



**Universidad**  
Zaragoza

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

## **Dinámica evolutiva en metapoblaciones complejas**

Iñaki Echeverría Huarte

---

Director:  
Dr. Jesús Gómez Gardes





# Índice general

<b>Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
<b>1. Métodos y herramientas.</b>	<b>3</b>
1.1. Breve introducción a redes complejas. . . . .	3
1.1.1. Formas de expresión de una red. . . . .	3
1.1.2. Medidas en una red. . . . .	5
1.1.3. Tipos de red. . . . .	6
1.2. El juego de los bienes públicos. . . . .	9
<b>2. Modelos metapoblacionales</b>	<b>12</b>
2.1. Modelo de agentes. . . . .	12
<b>3. Resolución de los modelos.</b>	<b>15</b>
3.1. Implementación. . . . .	15
3.2. Resultados. . . . .	16
<b>4. Conclusiones y líneas futuras.</b>	<b>24</b>
<b>Referencias</b>	<b>25</b>



# Introducción y objetivos.

El motivo de elección de esta temática para la realización de un trabajo de fin de grado nace de la inquietud personal y académica de profundizar en el ámbito de estudio de redes y sistemas complejos dada su aplicación multidisciplinar partiendo de herramientas de la Física Estadística y No lineal.

Un sistema complejo está compuesto por un conjunto de elementos que son capaces de interactuar entre sí. Como resultado de estas interacciones, surgen nuevas propiedades dentro del sistema, imposibles de explicar de forma reduccionista (es decir, recurriendo exclusivamente al análisis de los entes individuales que constituyen nuestro sistema). Esta característica, comúnmente referida como emergencia, define un sistema complejo.

Hoy en día vivimos rodeados de numerosos ejemplos de sistemas complejos. Desde un punto de vista tecnológico o industrial, todas las infraestructuras de telecomunicaciones están integradas por una gran cantidad de elementos interactuantes (móviles, ordenadores, satélites...) que dan lugar a diferentes fenómenos colectivos en nuestra sociedad. En el ámbito de la biología también encontramos numerosos ejemplos de emergencia y complejidad, desde el funcionamiento de una célula, con redes génicas y metabólicas que regulan su actividad, hasta la interacción entre diferentes células, como las neuronas, dando lugar a procesos cognitivos.

Una manera de abordar la caracterización y comprensión de las interacciones entre los constituyentes de un sistema complejo, consiste en aplicar la teoría de redes complejas. El desarrollo de este campo ha ido de la mano con el de las nuevas tecnologías, dotándonos de capacidad computacional y datos para estudiar sistemas cada vez mayores en cuanto a tamaño y complejidad. Actualmente son muchos los usos que se le ha dado a la teoría de redes: Análisis de redes sociales, redes de transporte, redes eléctricas, redes neurológicas, etc. Estos sistemas se pueden caracterizar como una colección de nodos (que representan individuos, aeropuertos, transformadores eléctricos, neuronas, etc) [2], unidos entre sí mediante links que denotan los diferentes tipos de interacciones característicos de cada sistema (ver figura 1).

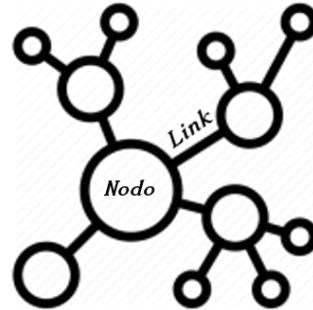


Figura 1: Esquema de una red

Con este trabajo, pretendemos hacer uso del análisis de redes para realizar una revisión de los recientes avances en la dinámica evolutiva de los juegos que se rigen por interacciones grupales [4]. Nos centraremos principalmente en **el juego de los bienes públicos (public good games)** o de forma más general, en los juegos de N-jugadores (N-player games), que son representativos para este tipo de interacciones.

Siguiendo esta línea temática, intentaremos dar explicación a cómo surge la evolución de la cooperación entre personas no relacionadas en sociedades humanas, aspecto que actualmente continúa siendo una cuestión difícil de responder. Nos enfrentaremos al dilema social que surge cuando un bien o una inversión beneficia a todos los miembros de un grupo social, con independencia de que contribuyan a sufragarlo [3] pero que no puede sobrevivir cuando todos los agentes omiten sus responsabilidades a su sostenimiento. Analizaremos las posibles estrategias seguidas por los agentes para obtener un máximo beneficio individual y cómo este tipo de decisiones afectan a la estructura económica global del sistema, originando la decadencia o regeneración de sociedades egoístas o altruistas respectivamente. Finalmente, comentaremos las vías de investigación que se abren con la realización de estudios de este tipo, permitiéndonos extrapolar los resultados a fenómenos tan interesantes (y candentes en la actualidad) como los fenómenos migratorios, consiguiendo así hacer de la ciencia una herramienta útil al servicio de las personas.

# Capítulo 1

## Métodos y herramientas.

### Breve introducción a redes complejas.

#### Formas de expresión de una red.

Antes de comenzar a describir el modelo utilizado para la simulación de la dinámica evolutiva, introduciremos los conceptos y terminología básica de redes complejas.

Como se ha mencionado, una red compleja es un grafo que se caracteriza por tener ciertas propiedades. Generalmente en el trabajo con redes, se hace uso de objetos matemáticos que nos permita encapsular toda la información del grafo, a saber; número de nodos y cómo están conectados. En la gran mayoría de los casos se hace uso de la denominada *matriz de adyacencia*,  $A$ , que se conforma de la siguiente manera: En el caso de una red no pesada y no dirigida, es una matriz de dimensión  $N \times N$  nodos en la que cada elemento  $(i,j)$  toma dos posibles valores:

- 0 si los nodos  $i$  y  $j$  no están conectados
- 1 si los nodos  $i$  y  $j$  están conectados

Una vez codificada nuestra red mediante esta matriz, podemos extraer de forma inmediata ciertas propiedades adicionales del grafo con el que trabajamos.

Existen otro tipo de configuraciones para la determinación de la matriz de adyacencia. Podemos encontrar matrices pesadas, en donde la conexión con determinados nodos no es binomial (0 ó 1), sino un número real, matrices con signo (muy útil por ejemplo para describir el comportamiento en una red social en donde la amistad tendría una interacción positiva y la enemistad negativa), matrices direccionales, en donde el enlace entre los nodos se establece en una dirección determinada, etc. En nuestro caso trabajaremos con matrices de adyacencia sin pesar, sin signo y no direccionadas; es decir, binarias.

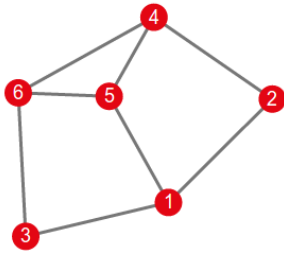


Figura 1.1: Ejemplo de una red no pesada y no direccional

Para el caso de una red no direccional, la matriz de adyacencia será simétrica y en el caso en el que no se considere que un nodo está conectado consigo mismo, los elementos de la diagonal serán cero. A modo aclaratorio y con el fin de poner un ejemplo, la matriz de adyacencia de la red correspondiente a la imagen 1.1 será:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Otra forma de expresar una red es mediante **la matriz laplaciana**. Al igual que la matriz de adyacencia, la matriz laplaciana resulta extremadamente útil en el estudio de grafos, especialmente para el caso de teoría espectral de grafos. Matemáticamente se define como:

$$l_{ij} \begin{cases} k_i & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j \text{ e } i \text{ está conectado a } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si particularizamos para el caso de la imagen 1.1 obtenemos una expresión para la matriz laplaciana de la forma:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Algunas de las propiedades más interesantes de la matriz laplaciana es que siempre es definida positiva, por lo que sus autovalores son siempre positivos. Además, el primer autovalor  $\lambda_0 = 0$  es siempre nulo cuyo autovector asociado es siempre  $[1, 1, \dots, 1]$ . La multiplicidad de  $\lambda_0$  indica el número de subgrafos que hay. El segundo autovalor no nulo  $\lambda_2$  se conoce como conectividad algebraica, la cual nos da información sobre la conectividad del grafo. Conforme el valor de  $\lambda_2$  se hace más pequeño, el grafo adquiere una estructura modular.

Para el caso que nos ocupa, haremos uso exclusivamente de la matriz de adyacencia dado que, a efectos prácticos, consideramos que es más sencilla de tratar.



### Medidas en una red.

Introducimos ahora una serie de elementos asociados a cada red que podremos utilizar para obtener información sobre el tipo de estructuración que esta sigue. En primer lugar presentamos el grado de un nodo, que se corresponde con el número de vecinos o links que éste tiene. Dicha variable puede ser calculada mediante la expresión:

$$k_i = \sum_j^N A_{ij} \quad (1.1)$$

Donde  $A_{ij}$  es el elemento (i,j) de la matriz de adyacencia previamente definida. De igual forma podemos calcular el número de links de la red como:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \quad (1.2)$$

Otro de los aspectos relevantes de las redes es el grado medio o conectividad, que se calcula como:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2L}{N} \quad (1.3)$$

Otra variable importante a tener en cuenta es el **coeficiente de clustering** que cuantifica qué tanto está agrupado un nodo con sus vecinos o cuán tupida es nuestra red. Llegados a este punto debemos diferenciar dos tipos de clustering:

- **Clustering de un nodo:** Que para el caso que nos ocupa de una red no direccionada se calcula como:

$$C_i = \frac{2|e_{jk}|}{k_i(k_i - 1)} \quad (1.4)$$

En donde  $k_i$  es el grado del nodo  $i$  y  $e_{jk}$  son el número de links entre vecinos de  $i$ . Otra forma de ver  $e_{jk}$  es considerarlo como el número de triángulos conectados a  $i$ . Para el caso de la red 1.1, si nos fijamos en el nodo 1,  $C_1$  es igual a cero dado que sus tres vecinos son el nodo 2,3 y 5, pero no existe conexión entre ellos. Por el contrario, el coeficiente de clustering del nodo 6 será  $C_6 = (2 \cdot 1)/(3 \cdot 2) = 1/3$

- **Clustering de una red:** Que considerando de nuevo el caso de una red no direccionada se calcula como:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \quad (1.5)$$

Para nuestra red ejemplo tendremos un cluster de red igual a :

$$C = \frac{1}{6}(C_1 + C_2 + \dots + C_6) = \frac{1}{6} \left( 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{18}$$

Otra magnitud interesante que debemos introducir es la distancia entre nodos. Esta se define como el número mínimo de vértices que se debe recorrer para unir dos nodos cualesquiera. Para aquellos nodos que no estén conectados, se considera que su distancia es infinita.

También es interesante introducir el concepto de **red conexas**. Una red es conexas si para todo par de nodos distintos existe un camino posible que los une. De esta definición surge el concepto de componente conexas de un grafo, siendo esta un subgrafo conexo maximal. Una observación que se puede realizar a partir de ambas definiciones es que un grafo es conexo si y sólo si tiene una sola componente conexas. En el ejemplo de la red 1.1, tenemos un grafo conexo con una única componente conexas.

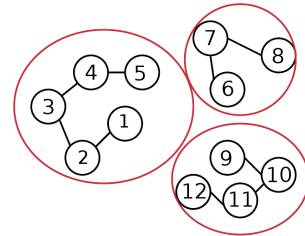


Figura 1.2: Componente gigante en una red

Una vez presentada la distancia entre nodos y el concepto de red conexas, introducimos la noción de componente gigante. Dada una red inconexas, la componente gigante se define como la componente conexas más grande de la red. Si por el contrario tenemos un grafo conexo, la componente conexas más grande y por ende la componente gigante, será la propia red. Para el caso de la red representada en la imagen 1.2 será la que está conformada por los nodos 1-2-3-4 y 5.

Finalmente, podemos introducir la distribución de conectividad, es decir, la probabilidad de que un nodo elegido al azar tenga conectividad  $k$ . Esta probabilidad viene dada por la expresión:

$$p_k = \frac{N_k}{N} \quad (1.6)$$

Donde  $N_k$  es el número de nodos con grado  $k$  y  $N$  es el número total de nodos.  $p_k$  está sujeta a la relación de normalización:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

La distribución de la conectividad nos ofrece información muy útil sobre cómo se organiza la red y sobre muchas de sus propiedades intrínsecas.

## Tipos de red.

La clasificación de los distintos tipos de redes radica en las propiedades de las conexiones entre los distintos nodos. En nuestro caso trabajaremos principalmente con redes *Erdős-Renyi*, en donde la unión entre nodos es puramente probabilística, esto es, cada nuevo nodo se enlaza con igual probabilidad con el resto de la red (figura 1.3a) y redes *libres de escala (scale free)*, en donde los links siguen una conexión preferencial, es decir, aquellos nodos con muchas con-

xiones tienen mayor probabilidad de recibir nuevos links que aquellos con menos (figura 1.3b). Veámoslas en detalle cada una de ellas.

### Red Erdős Renyi.

Paul Erdős y Alfréd Rényi describieron las redes que forman los sistemas de comunicaciones y los sistemas biológicos como redes aleatorias en 1959. Desde entonces, y durante un periodo de cuarenta años, se consideró que todas las redes reales seguían este modelo.

Las redes de tipo Erdős Renyi parten de la concepción de una red de  $N$  nodos sin conectar y distribuidos de forma aleatoria. Imaginemos que en un instante inicial enlazamos dos nodos cualesquiera, de esta forma en pasos sucesivos vamos enlazando aleatoriamente de dos a dos nodos. Los nodos que se encuentren enlazados se descartan. Definiremos  $p$  como la probabilidad de que se establezca un enlace entre un par de nodos. El número total de parejas que podemos conseguir en una red de  $N$  nodos es:

$$N_p = \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} \quad (1.7)$$

De los que se deduce que el número total de links creados será:

$$E(L) = p \frac{N(N-1)}{2} \quad (1.8)$$

Finalmente, la probabilidad de generar una red con  $L$  links será:

$$P(N, L) = p^L (1-p)^{\frac{N(N-1)}{2} - L} \quad (1.9)$$

Que no es más que el producto de probabilidades de que se formen  $L$  links ( $p^L$ ) por la probabilidad de que el resto de las  $\frac{N(N-1)}{2} - L$  parejas no lo formen.

La conectividad media de los nodos en este tipo de redes, se calcula realizando el producto entre la probabilidad de que un nodo establezca un enlace por los  $(N-1)$  nodos restantes que le quedan para poder establecerlo. Matemáticamente se expresa:

$$\langle k \rangle = p(N-1) \quad (1.10)$$

Obtengamos ahora la probabilidad de, escogiendo un nodo al azar, que este tenga conectividad  $k$ . Dado un nodo  $j$  cualquiera, este tiene  $N-1$  enlaces posibles para formar. Únicamente estoy interesado en que forme  $k$ , de forma que tendré que valorar todas las posibles combinaciones que contengan  $k$  conexiones de entre las  $N-1$  posibilidades de enlace que tengo. De esta forma, la probabilidad de la que disponemos para encontrar un nodo con grado  $k$  no es más que el producto de formar  $k$  enlaces ( $p^k$ ), por la probabilidad de que no forme enlace con los  $N-1-k$

posibilidades restantes  $(p^{N-1-k})$  y por las posibles combinaciones que contengan  $k$  conexiones de entre las  $N-1$  conexiones posibles. Matemáticamente lo expresamos como:

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \quad (1.11)$$

Este resultado no es sino una distribución binomial para  $N$  de valor finito. Si consideramos el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ , ocurre que pasamos a una distribución Poissoniana de la forma:

$$P(k) \simeq e^{-pN} \frac{(pN)^k}{k!} = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (1.12)$$

En donde  $P(k)$  es la llamada **distribución de grado**.

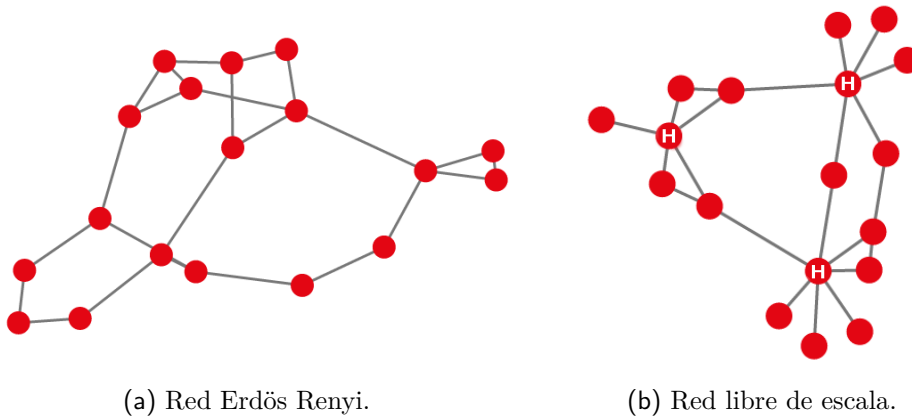


Figura 1.3: Ejemplos de redes.

### Red Libre de escala.

Ya en 1999, Albert Barabási junto con Réka Albert, realizaron un mapa de la web, en donde consideraron que los nodos eran las páginas web, mientras que los links se correspondían con los enlaces entre ellas. Esperando encontrar un comportamiento que se correspondiera con una red aleatoria tal y como habían descrito Erdős y Rényi, dada la gran variedad de intereses de los usuarios y la gran cantidad de páginas web, se sorprendieron al observar el resultado. Encontraron que más de un 80% de las páginas visitadas tenían únicamente 4 links o menos, mientras que un 0.01% tenían más de mil [2].

Se trataba por lo tanto de una red formada por muchos nodos con muy pocas conexiones y pocos nodos, denominados *hubs* (marcados con letra H en la figura 1.3b), con un gran número de conexiones. Este tipo de redes reciben el nombre de **redes libres de escala** [1]. Veamos ahora un modelo que permite explicar las observaciones realizadas por los mismos anteriormente.

Para el caso de las redes libres de escala, el proceso de generación de la red es el siguiente:

- Partimos de  $m_0$  nodos conectados entre sí.
- Para cada paso de tiempo se incorpora un nuevo nodo a la red.
- El nuevo nodo lanza  $m \leq m_0$  nuevos links a los nodos ya existentes.
- La probabilidad de que un nodo  $i$  reciba un link de un nuevo nodo incorporado es:

$$\Pi_i(t) = \frac{k_i(t)}{\sum_{j=1}^{t+m_0-1} k_j(t)} \quad (1.13)$$

Este tipo de generación de enlace, al contrario que para el caso de redes Erdős Renyi, es un tipo de enlace preferencial.

La evolución temporal del grado de un nodo viene dada por:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \frac{k_i(t)}{\sum_{j=1}^{t+m_0-1} k_j(t)} \quad \text{en donde } k_i(t = t_i) = m \quad (1.14)$$

Cuya solución es:

$$k_i(t) = 0 \quad t < t_i$$

$$k_i(t) = m \left( \frac{t}{t_i} \right)^{1/2} \quad t > t_i$$

A partir de estas últimas relaciones, se llega a que la distribución de grado de una red construida mediante enlaces preferenciales es:

$$p(k) \sim k^{-\gamma} \quad (1.15)$$

Es decir, siguen una ley potencial que recupera el comportamiento observado en redes reales como Internet o la Web. De este hallazgo, se observó que la mayoría de las redes reales siguen una ley de potencias y tienen un exponente en el rango  $2 < \gamma \leq 3$ .

Una vez presentadas las herramientas matemáticas que utilizaremos a lo largo de este trabajo pasamos a presentar el marco conceptual sobre el que se centra esta investigación. Introducimos pues los conceptos básicos de **el juego de los bienes públicos**.

## El juego de los bienes públicos.

El juego de los bienes públicos (PGG) está contenido en un marco más general conocido como **la teoría de juegos** [3][4]. La teoría de juegos es un área de la matemáticas que a partir del uso de modelos estudia las tomas de decisiones y las interacciones en lo que se conoce como estructuras formalizadas de incentivos, conocidas formalmente como juegos. La teoría de juegos se utiliza actualmente en muchos campos, como en la física, la informática, la biología, filosofía, etc, pretendiendo estudiar las estrategias más óptimas a seguir por aquellos individuos que

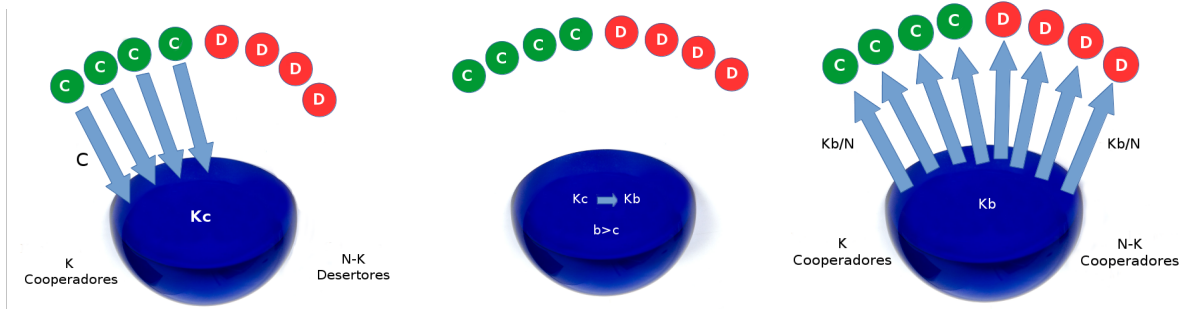


Figura 1.4: Funcionamiento gráfico de juego de los bienes públicos. Aquí el capital inicial que ofrecen los cooperadores es  $c$ , mientras que el factor por el que se multiplica el dinero total recaudado es  $b$ , siendo este valor mayor que  $c$ .

participen en el juego [9]. Los resultados a los que se ha llegado actualmente han sido realmente interesantes: Desde estudios de empresa para ver cómo responderá la competencia ante la fijación del precio de un producto, propósitos militares, hasta evolución de epidemias [8], etc.

En nuestro caso, nos centraremos en un tipo de juego bastante relacionado con la economía experimental. A grandes rasgos, el PGG más simple se puede describir como sigue. Al inicio del juego, tenemos  $N$  participantes que reciben una cantidad  $c$ . Una vez reciben dicha cantidad, tienen la posibilidad de compartirla en un fondo común o no. Llegados a este punto, tendremos dos posibles estrategias de juego. Aquellos jugadores que decidan poner su dinero en el fondo común serán los que llamamos cooperadores, mientras que aquellas personas que no pongan nada pasaremos a llamarlos desertores. Una vez todos los jugadores hayan decidido su estrategia, la cantidad total recaudada se multiplica por un factor  $b$  mayor que  $c$  y se divide el resultado entre todos los participantes [4] (mirar esquema gráfico 1.4 que da cuenta de funcionamiento del juego).

Elaboremos ahora un pequeño esquema de ganancias, en caso de que seamos nosotros un jugador cooperador o desertor, para comprender mejor el modelo. En la figura 1.5, se exponen las posibles ganancias de un cooperador (fila 1) y un desertor (fila 2) en función de la estrategia de los  $N-1$  jugadores restantes.

		Resto de los $n-1$ jugadores					
		# Coop	0	1	2	...	$N-1$
Jugador 1	C	$b/N-c$	$2b/N-c$	$3b/N-c$	...	$b-c$	
	D	0	$b/N$	$2b/N$	...	$(N-1)b/N$	

Figura 1.5: Esquema de las ganancias obtenidas por un jugador para todas las posibles configuraciones del resto de jugadores.

Para analizar los posibles resultados de este juego, consideremos que la concentración de

cooperadores es  $[C] = x$ . De esta forma, la riqueza para los desertores se calcula como:

$$W_D(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} x^k (1-x)^{N-1-k} \frac{b}{N} k = b \frac{N-1}{N} x \quad (1.16)$$

Mientras que la riqueza asociada a los cooperadores se calcula como:

$$W_C(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} x^k (1-x)^{N-1-k} \frac{b}{N} (k+1) - c = b \frac{N-1}{N} x + \frac{b}{N} - c \quad (1.17)$$

Notar que si  $b < N$ , ocurre que  $W_D(x) > W_C(x) \forall x$ , mientras que si  $b > N$ , ocurre lo contrario. Damos cuenta así de que si  $b$  es menor que  $N$ , la riqueza asociada a los desertores será mayor en comparación con la de los cooperadores. Estamos pues favoreciendo la deserción. En caso de que  $b$  sea mayor que  $N$ , estaremos favoreciendo la cooperación.

Una vez vistas las riquezas asociadas a agentes cooperadores y desertores, nos planteamos como afectan estas dos variables a la evolución de cada tipo de agente. La ecuación que nos permite estudiar la variación temporal en la concentración de cooperadores/desertores en función de sus riquezas asociadas se denomina **ecuación del replicador** [9], que para el caso que nos ocupa se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) [W_C(x) - W_D(x)] = x(1-x) \left( \frac{b}{N} - c \right) \quad (1.18)$$

Llegados a este punto, es necesario analizar dos casos particulares:

1. **Altruismo débil:** En este caso en el que  $b > Nc$ . La derivada es positiva y hay un incremento de la concentración de cooperadores, hasta que toda la población se hace cooperadora.
2. **Altruismo fuerte:** En el caso en el que  $b < Nc$ . La derivada ahora es negativa y tenemos una disminución de la concentración de cooperadores hasta que toda la población se convierte en desertora. Es la llamada **tragedia de los comunes**<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>La tragedia de los comunes describe una situación que alcanza el sistema cuando todos los individuos que participan del juego se mueven por un interés individual y egoísta, pero de forma racional, acabando por destruir un recurso compartido, a pesar de que a ninguno de ellos les sea favorable dicha destrucción.

## Capítulo 2

# Modelos metapoblacionales.

Una vez explicado los conceptos básicos de teoría de juegos particularizando para el caso de el juego de los bienes públicos, pasamos a explicar el modelo matemático elaborado en este TFG.

### Modelo de agentes.

Comenzemos definiendo el concepto de **metapoblación**. Una metapoblación (ver figura 2.1) se entiende como una red compleja donde los nodos contienen agentes interactuantes y dichos agentes pueden pasar de un nodo a otro siguiendo la topología marcada por la red [5]. En nuestro modelo consideramos una metapoblación en donde cada nodo  $I$  de la red, es una subpoblación con un total de  $W_I$  agentes, los cuales pueden moverse acorde a determinadas reglas. La red compleja está compuesta por un total de  $N$  nodos ( $N= 1000$  en nuestro caso) y la población total es de  $\sum_I W_I$ . La red está descrita por una matriz de adyacencia  $A = \{a_{IJ}\}$ .

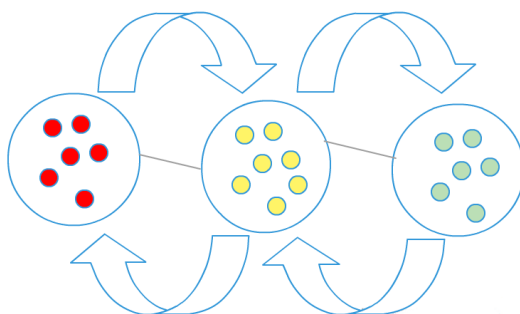


Figura 2.1: Descripción gráfica de una metapoblación.

El número total de agentes será 25000 e inicialmente estarán distribuidos de forma homogénea (25 agentes por nodo) sin permitir interacciones entre ellos. El tipo de estrategia a seguir por cada agente vendrá dada por una probabilidad  $q$  de ser cooperador, definiendo su estrategia como  $s_i = 1$ , ó  $(1 - q)$  de ser desertor, definiéndola en este caso por  $s_i = 0$ . Inicialmente dejamos



termalizar el sistema con el fin de que que alcance el régimen estacionario en donde los agentes siguen una distribución acorde al grado del nodo [7].

$$W_k = \frac{k}{\langle k \rangle} \bar{N} \quad (2.1)$$

En donde  $W_k$  es el número de agentes en un nodo con grado  $k$ ,  $\langle k \rangle$  es el grado medio de la red (en nuestro caso 6) y  $\bar{N}$  es el numero medio de habitantes de la red que en nuestro caso es 25.

Una vez la distribución de haya alcanzado su estado estacionario iniciamos la interacción entre agentes dentro de cada nodo. Para cada paso de tiempo  $\tau$ , el payoff de cada agente y el payoff total normalizado para el nodo  $I$  se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{cases} f_i^I(t) = r \frac{\sum_{j \in I} s_j^c}{N_I} - s_i c \\ f_I(t) = \frac{\sum_{i \in I} f_i}{N_I} \end{cases} \quad (2.2)$$

Donde  $r$  es el factor de ganancia (anteriormente llamado  $b$ ),  $c = 1$  es una cantidad fija y  $N_I$  es el número de agentes que pertenecen al nodo  $I$  en un tiempo  $\tau$ . El nivel de cooperación global se calcula en función de las estrategias de todos los agentes de la forma:

$$C(t) = \frac{\sum_i s_i}{W} \quad (2.3)$$

Después de cada ronda de juego, cada agente  $i \in I$  decide moverse o no hacia uno de los nodos vecinos  $J$ . Su decisión radica en la diferencia entre su riqueza personal y la riqueza del nodo donde habita. En particular, la probabilidad de que un agente  $i$  del nodo  $I$  se mueva, viene determinada siguiendo una distribución de Fermi de la forma:

$$p_i^I(t) = \frac{1}{1 + e^{\beta(f_i^I(t) - \bar{f}^I(t))}} \quad (2.4)$$

Esto significa que, conforme la riqueza de la persona es mayor frente a la riqueza del nodo, la tendencia a quedarse es muy grande, dado que el factor  $(f_i^I(t) - \bar{f}^I(t)) \gg 1$  y por tanto  $p_i^I(t) \rightarrow 0$ . De igual forma, si la riqueza de la persona es escasa frente a la riqueza del nodo ocurre exáctamente lo contrario:  $(f_i^I(t) - \bar{f}^I(t)) \ll 1$  por lo que  $p_i^I(t) \rightarrow 1/2$ , ofreciendo al agente una decisión completamente aleatoria.

El valor de  $\beta$  juega el papel de temperatura efectiva. Con esto nos referimos a que, para valores de  $\beta$  altos (temperaturas bajas), el exponente de la distribución se hace más grande, por lo que el efecto en la diferencia de pay-off's se hace más acusado, permitiendo así que la toma de decisión de movimiento por parte del agente sea más racional. Por el contrario, para valores de  $\beta$  bajos (temperaturas altas), el argumento de la exponencial tiende a cero, por lo que el papel de la exponencial no es importante, haciendo que la toma de decisión en este caso tenga un notable carácter aleatorio.

Una vez todos los agentes hayan tomado su decisión (moverse o permanecer), pasamos a redistribuirlos. Si un agente en  $I$  ha decidido moverse, la probabilidad de moverse al vecino  $J$  se computa de la siguiente manera:

$$\prod_{I \rightarrow J} = A_{IJ} \frac{f^J}{\sum_J A_{IJ}(f^J)} \quad (2.5)$$

Así, la elección del vecino se realiza en base a su riqueza por lo que se realizan movimientos preferenciales hacia nodos ricos. Esto es, conforme más rico sea el vecino, la probabilidad de movernos a él aumenta.

Llegados este punto, se realizan dos consideraciones para el modelo:

- O bien se permite que aquellos nodos que quedan desprovistos de agentes puedan seguir recibiendo habitantes para tiempos de simulación posteriores. Llamaremos a este modelo **modelo no restrictivo**.
- O imposibilitamos que aquellos nodos que queden vacíos puedan recibir agentes, haciendo que pierdan por completo todas sus conexiones con el resto de nodos y quedando aislados de la red. Llamaremos a este modelo **modelo re restrictivo**.

Una vez los agentes decidan moverse del nodo  $I$  al  $J$ , pueden decidir si cambiar o mantener su estrategia con una probabilidad que depende del número de cooperadores dentro del nodo  $J$ , expresado como:

$$p(s_i \rightarrow 1) = \frac{N_c^J}{N_J} \quad (2.6)$$

Lo que significa que una vez me muevo a un nuevo nodo, adopto con mayor probabilidad la estrategia que sigue la mayoría.

Con este tipo de modelos somos capaces de simular la dinámica evolutiva en metapoblaciones complejas. Una posible vía de investigación que nos ofrecen estos modelos es el estudio dinámico de sociedades económicas y observar como evolucionan en función de los agentes económicos que las forman [10]. Con prototipos como el presentado anteriormente, podemos dar explicación a la decadencia en sociedades egoistas cuya riqueza se origina a partir del pago de impuestos. Aquellas sociedades en las que sea la desertión la que triunfe, se originará una destrucción de la propia sociedad económica, ya que los propios agentes son los que acaban con los recursos de los que disponen. Por el contrario, aquellas sociedades en las que los agentes participen y compartan sus recursos, permitirán un desarrollo positivo de las mismas.

## Capítulo 3

# Resolución de los modelos.

Dentro de este apartado, queríamos centrarnos en dos aspectos fundamentales a comentar. El primero de ellos es el procedimiento que se ha seguido a la hora de implementar el programa. Con esto nos referimos a explicar de forma esquemática el funcionamiento de los programas principales así como su desarrollo para una mejor comprensión. Por último, acabaremos comentando los resultados obtenidos tras las distintas simulaciones junto con sus correspondientes explicaciones que intenten de alguna manera, hacer entender al lector porque el sistema simulado se ha comportado de la manera que se presenta.

### Implementación.

En cuanto a los aspectos de implementación, debemos diferenciar dos partes principales en las que está estructurado nuestro programa:

1. Una primera parte centrada en la termalización: Este segmento de programa se encarga de distribuir los agentes acorde a la distribución de grado correspondiente de la red. Recordamos que inicialmente los agentes están distribuidos de forma homogénea. Tras la termalización, se consigue que los agentes se distribuyan acorde a la distribución de grado de la red con la que se trabaja [7].
2. Una segunda parte centrada en la dinámica evolutiva del juego [9]: Este segmento del programa constituye la parte principal de la simulación. Consiste básicamente en el cálculo de riquezas de agentes y nodos, cálculo de probabilidades de movimientos de agentes, distribución de agentes sujetas a las normas comentadas en el modelo, cálculo de clusters y componentes gigantes y cambios de estrategia. Es la parte con mayor coste computacional y se precisa de una correcta optimización de la misma para que el desarrollo del programa se realice de la forma más óptima posible.

Para observar el proceso de implementación asociado a cada una de las partes comentadas remitirse al apéndice B.

## Resultados.

Una vez comentados los segmentos de programa más interesantes, procedemos a presentar y comentar los resultados obtenidos tras la simulación. Comenzamos con la distribución de agentes tras la termalización. Se ha realizado la termalización del sistema con los siguientes parámetros iniciales: Fracción de cooperadores iniciales: 50 %, valor de  $\beta = 1$ , valor de  $r = 2$ ,  $a = 1$ , número de agentes= 25000 y número de repeticiones= 2500. El sistema se ha simulado para dos tipos de red: Una red Erdős-Rényi, y una red libre de escala obteniendo los siguientes resultados:

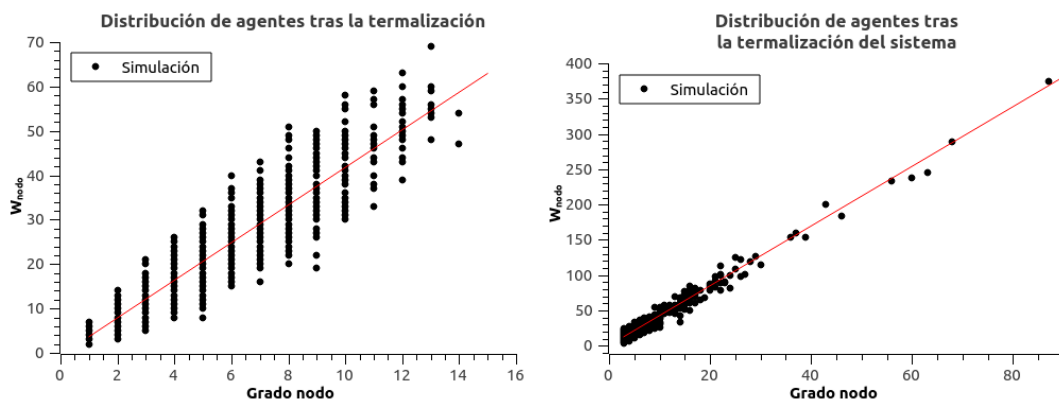


Figura 3.1: Distribución de agentes por nodos una vez completada la termalización en una red Erdős-Rényi (izquierda) y en una red libre de escala (derecha).

Como puede observarse, la distribución de agentes para ambos tipos de redes respeta la tendencia esperada dada por la ecuación 2.1, considerando así que la termalización del sistema se ha realizado de manera óptima. A partir de aquí, se evitará comentar que para cualquier simulación futura, con una combinación cualesquiera de parámetros, el sistema se termaliza previamente respetando el comportamiento observado en las gráficas 3.1.

Una vez termalizado el sistema, se ha realizado inicialmente una simulación larga para ver la evolución que presenta el número de cooperadores para los distintos tipos de red. De esta forma, podemos observar cómo responde el sistema inicialmente dada una configuración de parámetros específicos, y nos servirá para, en posteriores simulaciones, realizar variaciones de parámetros para obtener así una dinámica evolutiva más interesante. Los resultados obtenidos de la evolución de cooperadores dado un porcentaje inicial de cooperadores del 50 % y respetando los mismos valores iniciales para el resto de parámetros ha sido el siguiente:

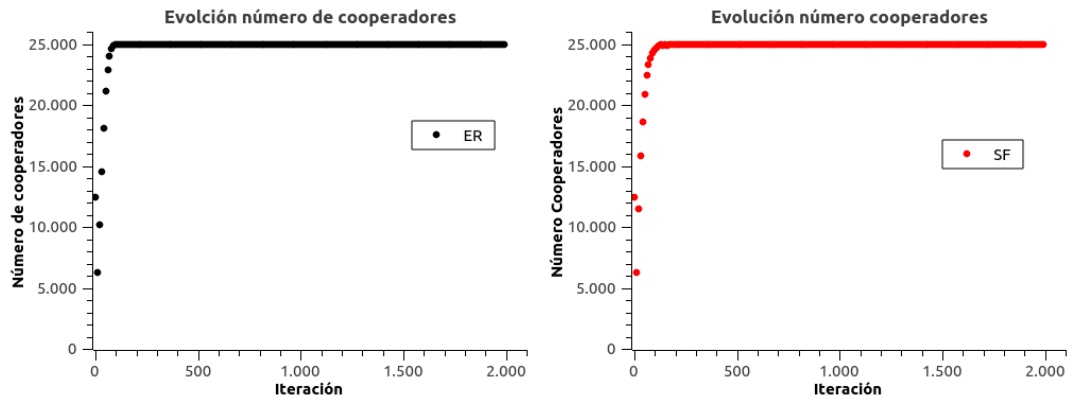


Figura 3.2: Evolución del número de cooperadores para un total de 2000 iteraciones en una red Erdős-Rényi (izquierda) y en una red libre de escala (derecha)

El comportamiento que presenta el sistema para ambos tipos de red es prácticamente idéntico. Observamos que el sistema pronto obedece la dinámica cooperadora, acabando finalmente por conseguir que todos los agentes que participan del juego se conviertan en cooperadores. Con el fin de apreciar algún cambio entre ambos tipos de redes e intentar observar una dinámica diferente, variamos el porcentaje de cooperadores iniciales de nuestro sistema. De esta manera, para porcentajes iniciales menores de cooperadores, el comportamiento que se sigue es el siguiente:

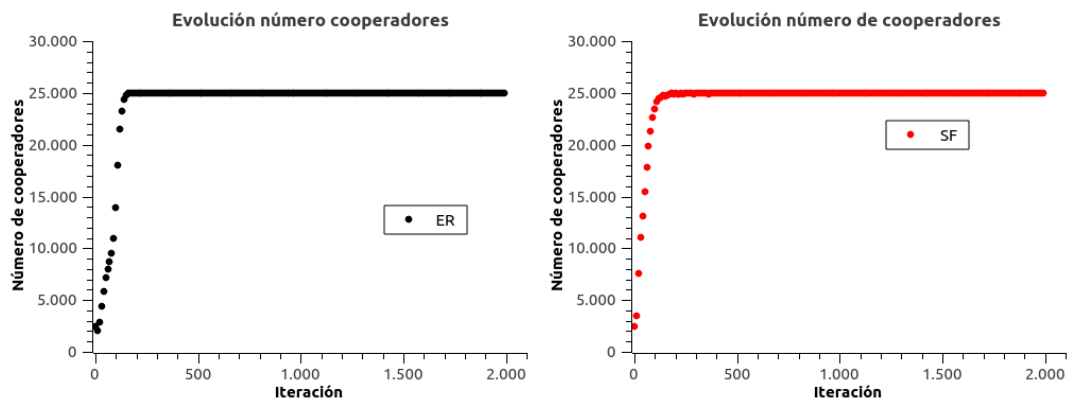


Figura 3.3: Evolución del número de cooperadores para un total de 2000 iteraciones en una red Erdős-Rényi (izqda) y en una red libre de escala (derecha) con un 10% de cooperadores iniciales.

A simple vista, la respuesta de ambas redes al cambio es prácticamente idéntica. El comportamiento de ambas sigue siendo muy parecido, presentando una clara tendencia hacia la cooperación con el paso del tiempo. El único cambio apreciable que se puede observar es que la pendiente de crecimiento de la cooperación es algo menor en este segundo caso que en el primer caso comentado. Esto principalmente se debe a que el sistema, al iniciarse con un número de cooperadores menor, necesita un mayor tiempo de simulación para alcanzar la situación de máxima cooperación. Si que es cierto que este cambio es poco apreciable en este caso. Esto se debe a que el número de agentes que participan del juego es pequeño. Dado que aumentando el

número de agentes, el tiempo de ejecución se hace mucho mayor, preferimos mantener nuestro número de agentes totales igual a 25000.

Con el fin de querer obtener cambios apreciables en la dinámica, realizamos un nuevo cambio en nuestro sistema. Hasta ahora, hemos estado trabajando con el modelo no re restrictivo, en donde los nodos que quedaban vacíos podían volver a ocuparse. Consideremos ahora el modelo re restrictivo imposibilitando la ocupación de nodos vacíos. Este nuevo planteamiento nos permitirá obtener una dinámica mucho más interesante, facilitando la formación de clusters/comunidades independientes de la red principal en las que pueden establecerse estrategias de juego completamente distintas. De esta manera, podemos conseguir que el comportamiento global del sistema cambie drásticamente, obteniendo así una comparativa bastante interesante de realizar entre ambos tipos de planteamientos.

Una vez realizada la simulación, omitiendo aquellos nodos que queden vacíos, realizaremos dos estudios bastante interesantes:

1. El primero de ellos se va a centrar en **la evolución del grado de cooperación en el sistema**. Al igual que los resultados anteriores, vamos a estudiar cómo cambia la evolución de la cooperación y deserción al introducir el concepto de red dinámica.
2. El segundo de ellos irá más enfocado a estudiar **la evolución de la fragmentación de la red**. En esta segunda parte queremos observar cómo se fragmenta la red conforme avanza la simulación. Veremos si se forman o no comunidades aisladas o si por el contrario, la fragmentación origina una sola componente gigante dejando nodos individuales aislados conforme se desarrolla la dinámica.

#### - Evolución de la cooperación del sistema -

Una vez realizadas las simulaciones, los resultados obtenidos con el nuevo planteamiento en comparación con el de su predecesor es el siguiente. Se ha tomado un porcentaje inicial de cooperadores del 50 % manteniendo el resto de parámetros exactamente iguales a los valores dados en la secciones anteriores:

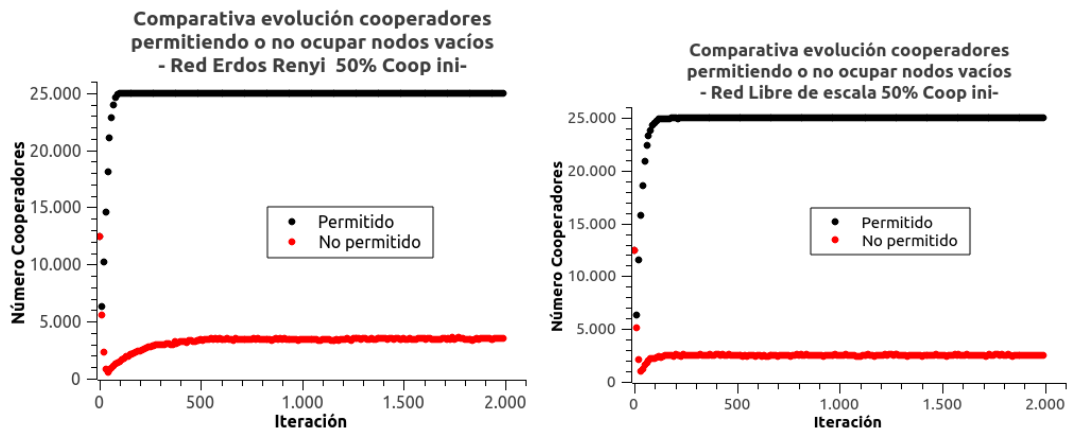


Figura 3.4: Comparativa entre modelo de ocupación de nodos vacíos (permitido) y modelo restrictivo (no permitido) en la evolución del número de cooperadores para un total de 2000 iteraciones en una red Erdős-Rényi (izquierda) y en una red libre de escala (derecha).

El resultado que se obtiene es realmente interesante. Al no permitir la ocupación de nodos vacíos, observamos que la dinámica del sistema pasa de ser cooperadora a ser, en su gran parte, desertora. Se comentará este resultado más adelante al introducir el estudio de la fragmentación. Seremos capaces de intuir, gracias a estudiar como se fragmenta la red, el conjunto de nodos que quedaban vacíos en el primer modelo y que volvían a ser ocupados. Al permitir este tipo de ocupación, se favorecía al sistema a alcanzar una dinámica cooperadora mientras que, al hacer que la red quede fragmentada, conseguimos que este comportamiento se revierta.

Se ha querido realizar la comparativa para distintos porcentajes de cooperadores iniciales. Los resultados y conclusiones pueden leerse en el apéndice A.1.

### - Evolución fragmentación de la red -

Pasamos ahora a estudiar cómo evoluciona la red conforme se originan nodos sin agentes. Pretendemos averiguar si la red se fragmenta de tal forma que se originan comunidades aisladas con varias decenas de nodos, o si por el contrario, encontramos una componente gigante única que va perdiendo nodos individuales que han quedado vacíos. Para ello estudiamos cómo evoluciona el tamaño de la componente gigante con el tiempo, así como la evolución del número de nodos que quedan vacíos. El resultado que se observa es el siguiente:

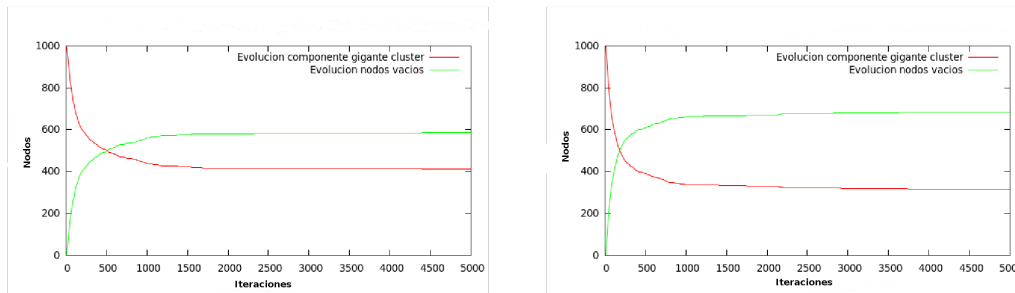


Figura 3.5: Estudio de la evolución de tamaño para la componente gigante y evolución del número de nodos vacíos para una red Erdős-Rényi (izquierda) y una red libre de escala (derecha). La simulación se ha realizado con un total de 25000 agentes, durante un intervalo de tiempo de 5000 iteraciones, un porcentaje inicial de cooperadores del 50%, valor de  $\beta = 1$ , valor de  $r = 2$  y valor de  $a = 1$

Como puede observarse, la disminución de la componente gigante es prácticamente complementaria al aumento de nodos vacíos conforme se desarrolla la simulación. Esto nos hace comprender que la fragmentación de la red no es en comunidades sino en una única componente gigante de la que se van separando nodos aislados conforme se quedan sin agentes. Este es un punto muy importante a tener en cuenta, ya que nos permite explicar de manera más o menos coherente por qué el sistema cambia de dinámica al introducir el modelo re restrictivo observado en las gráficas 3.4.

Observamos que conforme la fragmentación de la red se estabiliza, el número de nodos que quedan libres suele estar en torno a los 600 aproximadamente. Estos nodos, con el sistema no restrictivo utilizado anteriormente, podían volver a ser ocupados. Cada agente que llegara a un nodo sin habitantes, adquiriría con una probabilidad del 50% cualquier tipo de estrategia, ya fuese cooperadora o desertora. De esta forma, tendríamos aproximadamente la mitad de esos 600 nodos que generarían cooperadores. Esos nodos en donde triunfa la cooperación, serían grandes focos atractores tanto para cooperadores, como desertores, mientras que la otra mitad de nodos en donde triunfa la deserción serían escasamente atractivos desde el punto de vista de los agentes. De esta forma, la mayoría de las personas se moverán a nodos donde triunfa la cooperación, y por lo tanto adquirirán estrategias cooperadoras al llegar a estos nodos (nótese que un agente que llega a un nuevo nodo adquiere con mayor probabilidad la estrategia mayoritaria, en este caso la cooperadora). Estos agentes que llegan a estos nodos, no tienen grandes probabilidades de irse dado que la concentración de cooperadores es alta y por lo tanto sus ganancias también. De esta forma, la mayoría de agentes abandona aquellos nodos en donde existe deserción para viajar a nodos donde existe mayor cooperación. Al llegar a estos nodos, conseguimos que aumente la cooperación [9].

Por otro lado, en caso de que trabajemos con el modelo re restrictivo, aquellos nodos que



quedan vacíos ya no son habitables y quedan desconectados de la red. De esta forma, no hay posibilidad de formar nodos cooperadores de nuevo y por lo tanto, se precisa de altos niveles de cooperadores iniciales para que triunfe la cooperación, mientras que para niveles bajos y medios de cooperadores iniciales, es la desertión la estrategia más óptima a seguir por los agentes. No deja de ser curioso el nivel constante de cooperadores que encontramos en el modelo restrictivo (en torno a los 3000 agentes). A priori uno podría pensar que, para niveles intermedios o bajos de cooperación inicial, las ganancias asociadas a los cooperadores son mucho menores que la de los desertores, por lo que son estos los que se mueven. Al moverse, sus nodos destino conforme evoluciona temporalmente el sistema, estarán cargados cada vez más de desertores, por lo que el sistema debería tender a una desertión total. Sin embargo, para las gráficas 3.4 no observamos esto, sino un pequeño remanente de cooperadores que se mantiene.

La justificación a este comportamiento radica en el estudio de la componente gigante y cómo evoluciona. Son dos las posibilidades que pueden justificar este comportamiento:

- O bien, existen nodos con alto porcentaje de cooperadores que quedan aislados conforme la red se fragmenta y por lo tanto, al perder sus conexiones, sus agentes no pueden moverse y la única estrategia posible es la cooperación, por lo que tenemos pequeñas comunidades cooperadoras aisladas de la componente gigante.
- Se puede dar el caso de que existen nodos pertenecientes a la componente gigante cuya población es plenamente cooperadora. Ocurre entonces que, conforme el sistema se estabiliza, la mayor parte de nodos se encuentran llenos de desertores, salvo estos pocos nodos que contienen cooperadores. La diferencia entre la riqueza asociada a cada agente y la riqueza global de este tipo de nodos es la misma que para el caso de los nodos plenamente desertores. Ocurre por lo tanto que el flujo de agentes de un nodo con todo cooperadores o de un nodo con todo desertores es el mismo, al igual que el grado de atracción que ofrecen cada uno de ellos. Conseguimos así que el número de agentes que abandona el nodo es el mismo que el que llega para ambos tipos de nodos, obteniendo de esta manera la estabilidad observada en ambos tipos de estrategias.

Si realizamos un estudio del grado de cooperación por nodo en la componente gigante, el resultado que se observa es el explicado en segundo lugar:

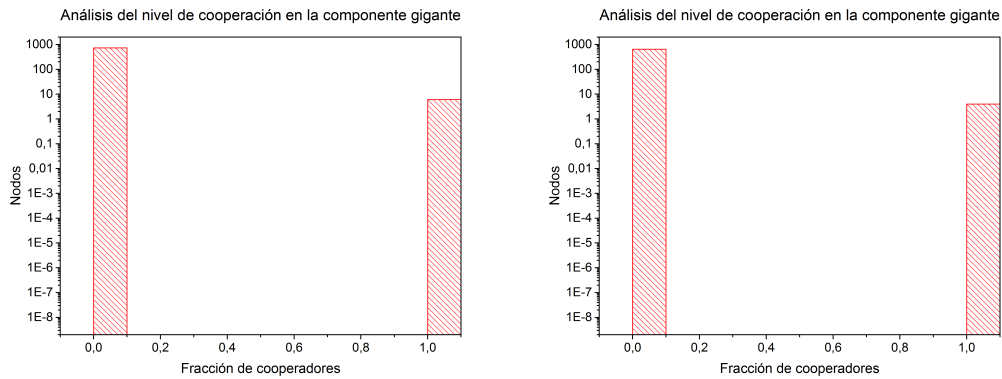
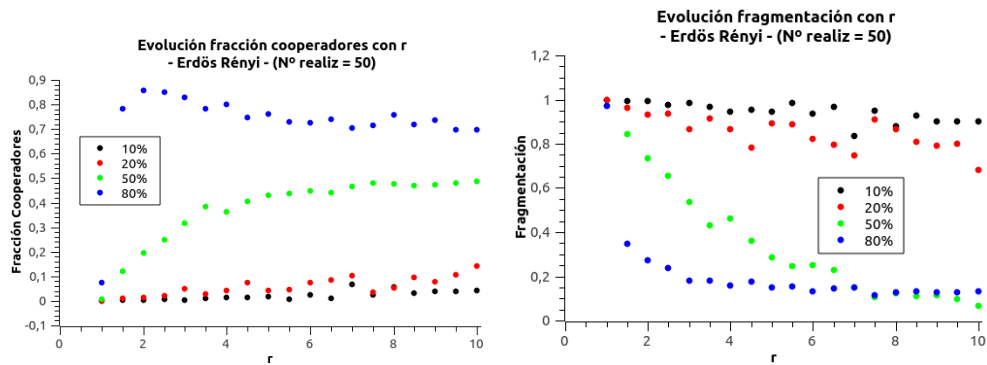


Figura 3.6: Estudio de la fracción de cooperadores por nodo en la componente gigante para una red Erdős-Renyi (izquierda) y una red libre de escala (derecha), para un porcentaje inicial de cooperadores del 50%, valor de  $r = 2$  y  $a = 1$ .

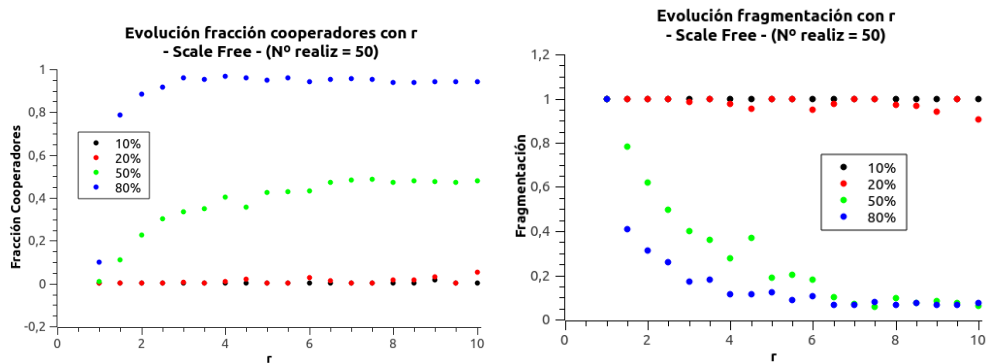
En caso de que se aumente el valor de  $r$ , el sistema tiende de forma más clara hacia estrategias cooperadoras conforme el tamaño de la componente gigante se hace más pequeño. Esto significa que el número de nodos totales que forman la componente gigante será menor, manteniéndose constante el número de nodos totalmente cooperadores dentro de ella, pero con un número de agentes interno mucho mayor. Tales resultados pueden verse en el anexo A.2.

Por último, y con el fin de recapitular todos los resultados obtenidos, hemos querido remitirnos a las ecuaciones 1.17 y 1.18, en donde se realizaba un análisis del factor de ganancia  $b$  ( $r$  en nuestro modelo). Este factor es un indicativo de cuán cerca está mi sistema de ser un sistema altruista. Para valores bajos (muy alejados de  $N$ ), los desertores se ven favorecidos en cada ronda, incitando así al resto de agentes cooperadores a cambiar su estrategia y acabar corrompiendo al sistema. Conforme el valor de  $r$  se hace mayor, los beneficios de cooperadores y desertores en cada ronda de juego se hacen menos distantes, por lo que la tendencia de los agentes cooperadores a cambiar su estrategia es menor, consiguiendo así un mayor número de comunidades cooperadoras dentro de la red.

Siguiendo este razonamiento, hemos querido observar cómo responde el sistema a la modificación de  $r$  para distintos porcentajes de cooperadores iniciales. Se ha realizado un estudio del grado de cooperación y fragmentación que presenta cada tipo de red para un total de 50 simulaciones para cada valor de  $r$  con distintos porcentajes de cooperadores iniciales (10, 20, 50 y 80). De esta manera, somos capaces de dar cuenta de las fluctuaciones que presenta mi sistema y ofrecer datos más fidedignos y con tendencias más suaves que los que conseguiríamos con una única simulación. Los resultados obtenidos para ambos tipos de redes han sido los siguientes:



(a) Comparativa de la evolución de la cooperación en red Erdős Rényi para distinto porcentaje de cooperadores iniciales. (b) Comparativa de la evolución de la fragmentación en red Erdős Rényi para distinto porcentaje de cooperadores iniciales.



(a) Comparativa de la evolución de la cooperación en red libre de escala para distinto porcentaje de cooperadores iniciales. (b) Comparativa de la evolución de la fragmentación en red libre de escala para distinto porcentaje de cooperadores iniciales.

Tal y como puede observarse, el comportamiento que se obtiene es el esperado. Conforme el valor de  $r$  incrementa, el grado de cooperación en ambos tipos de redes aumenta al igual que lo hace la fragmentación. Para bajo porcentaje de cooperadores iniciales este efecto se hace menos acusado, mientras que conforme este aumenta, el comportamiento es mucho más visible. Para dar cuenta del análisis individual de cada porcentaje inicial con sus respectivos errores, acudir al anexo A.3.

## Capítulo 4

# Conclusiones y líneas futuras.

Cerrando este trabajo y a modo de epílogo, retomamos los intereses particulares de los que partíamos al comienzo del mismo. Nuestro principal propósito ha consistido en realizar un estudio de la teoría de juegos, concretamente del juego de los bienes públicos, en donde disponíamos de una red compuesta por comunidades (metapoblación), dentro de la cual coexistían agentes interactuantes. Estos participaban del juego originando una riqueza personal asociada a cada agente y una riqueza global asociada a su comunidad. Después de cada ronda, se permitía el movimiento de estos, el cual se establecía valorando la diferencia entre riqueza personal y la riqueza global. En caso en el que la riqueza asociada al agente fuese menor que la riqueza de la comunidad donde habitaba, los agentes disponían de mayor probabilidad de movimiento. Una vez consideraban moverse, su elección del nuevo destino se basaba en valorar las riquezas correspondientes a sus comunidades vecinas, eligiendo con mayor posibilidad aquellas comunidades más ricas. Ya habiendo elegido su nueva comunidad, se consideraba un cambio de estrategia del agente en función de la estrategia mayoritaria en el nodo destino.

Una vez implementado el modelo y obtenidos los resultados, hemos podido observar como cambia el comportamiento de un sistema variando las condiciones iniciales del mismo. De igual manera, hemos querido examinar el comportamiento dinámico de una red permitiendo su fragmentación y las implicaciones directas de este fenómeno en el sistema global. Finalmente hemos conseguido explicar cómo surgen y coexisten comunidades totalmente cooperadoras o desertoras en metapoblaciones complejas.

El paralelismo que se puede realizar con este trabajo vinculándolo a casos reales es bastante interesante. Gracias a la utilización de modelos metapoblacionales podemos explicar sistemas complejos de diversa índole. Desde modelos económicos que expliquen la decadencia o crecimiento de sociedades, hasta movimientos migratorios que den cuenta de decisiones de cambios de comunidad basadas en diferencias de riqueza. Aunque el modelo no caputuramos muchos de los ingredientes de estas estructuras, consideramos que puede ser un buen punto de partida de estos u otros sistemas en donde los movimientos migratorios jueguen un papel determinante.

# Bibliografía

- [1] Réka Albert y Albert-László Barabási. “Statistical mechanics of complex networks”. En: *Reviews of modern physics* 74.1 (2002), pág. 47.
- [2] Albert-László Barabási y Réka Albert. “Emergence of scaling in random networks”. En: *science* 286.5439 (1999), págs. 509-512.
- [3] Hannelore Brandt, Christoph Hauert y Karl Sigmund. “Punishment and reputation in spatial public goods games”. En: *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences* 270.1519 (2003), págs. 1099-1104.
- [4] Jesús Gómez-Gardeñes et al. “Evolutionary games defined at the network mesoscale: The public goods game”. En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 21.1 (2011), pág. 016113.
- [5] Ilkka Hanski. “Metapopulation dynamics”. En: *Nature* 396.6706 (1998), págs. 41-49.
- [6] Mark EJ Newman. “The structure and function of complex networks”. En: *SIAM review* 45.2 (2003), págs. 167-256.
- [7] Jae Dong Noh y Heiko Rieger. “Random walks on complex networks”. En: *Physical review letters* 92.11 (2004), pág. 118701.
- [8] Romualdo Pastor-Satorras et al. “Epidemic processes in complex networks”. En: *Reviews of modern physics* 87.3 (2015), pág. 925.
- [9] Matjaž Perc et al. “Evolutionary dynamics of group interactions on structured populations: a review”. En: *Journal of the royal society interface* 10.80 (2013), pág. 20120997.
- [10] Francisco C Santos, Marta D Santos y Jorge M Pacheco. “Social diversity promotes the emergence of cooperation in public goods games”. En: *Nature* 454.7201 (2008), págs. 213-216.
- [11] Duncan J Watts y Steven H Strogatz. “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”. En: *nature* 393.6684 (1998), págs. 440-442.