

Trabajo Fin de Grado

Cálculo de la trayectoria
de proyectiles de artillería

*Artillery shell trajectory
computation program*

Autor

Pablo Martín Villanueva

Director

Ángel Gracia Ramos

Ponente

Francisco Alcrudo Sánchez



DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD

(Este documento debe acompañar al Trabajo Fin de Grado (TFG)/Trabajo Fin de Máster (TFM) cuando sea depositado para su evaluación).

D./D^a. Pablo Martín Villanueva,

con nº de DNI 73029736K en aplicación de lo dispuesto en el art.

14 (Derechos de autor) del Acuerdo de 11 de septiembre de 2014, del Consejo de Gobierno, por el que se aprueba el Reglamento de los TFG y TFM de la Universidad de Zaragoza,

Declaro que el presente Trabajo de Fin de (Grado/Máster)
Grado _____, (Título del Trabajo)

Cálculo de la trayectoria de proyectiles de artillería

es de mi autoría y es original, no habiéndose utilizado fuente sin ser citada debidamente.

Zaragoza, 19 de Junio de 2017

Fdo: _____

TFG UNIZAR

CÁLCULO DE TRAYECTORIAS DE PROYECTILES DE ARTILLERÍA

Pablo Martín Villanueva

RESUMEN

En el presente trabajo se abordará la realización de un programa de cálculo de trayectorias para el tiro de artillería. Para ello se tendrán en cuenta todos los efectos físicos asociados al vuelo de un proyectil en un medio como el aire, además de listar y detallar todos los sistemas de referencia que utilizaremos en el problema. Se pasará a formular las ecuaciones de movimiento que rigen el vuelo del proyectil para posteriormente buscar y seleccionar un método de integración numérica que sea adecuado para resolver las mismas. Se terminará mostrando una serie de trayectorias calculadas por nuestro programa comparándolas con las obtenidas en las tablas de tiro del Ejército Español. En los anexos se detallan en profundidad algunas correcciones hechas en nuestro problema, además de demostrar las ecuaciones de movimiento del proyectil utilizadas en este trabajo. También se incluye una batería de ensayos adicional a la mostrada en la memoria realizada con nuestro programa.

TABLA DE CONTENIDOS

1. Introducción, Alcance y Objetivos.....	7
1.1 Introducción.....	7
1.2 Alcance y Objetivos.....	8
2. Sistemas de referencia	9
3. Efectos aerodinámicos y propiedades de la atmósfera.....	13
3.1 Efectos aerodinámicos.....	13
3.2 Propiedades de la atmósfera.....	19
4. Ecuaciones de movimiento.....	20
4.1 Correcciones por esfericidad de la Tierra.....	20
4.2 Trayectoria de Masa Puntual.....	22
4.3 Trayectoria de Masa Puntual Modificada.....	23
5. Integración numérica: Método y Convergencia.....	25
5.1 Método numérico.....	25
5.2 Convergencia.....	27
6. Resultados.....	28
6.1 Magnitud e importancia de los diferentes efectos.....	28
6.2 Comparación con las tablas de tiro.....	31
7. Conclusiones.....	32
Bibliografía.....	33
Anexos	34
Anexo I: Correcciones por esfericidad de la Tierra	34
Anexo II: Demostración de las ecuaciones de movimiento	36
Anexo III: Ensayos.....	40

ÍNDICE DE FIGURAS

- Figura 1: Sistema ECI.
- Figura 2: Paso de coordenadas del sistema ECI al ECEF.
- Figura 3: Paso del sistema ECEF al sistema longitud.
- Figura 4: Paso del sistema longitud al sistema latitud.
- Figura 5: Paso del sistema latitud al sistema final.
- Figura 6: El proyectil y los dos vectores unitarios definidos.
- Figura 7: Ejes de rotación principales del proyectil.
- Figura 8: Fuerza de resistencia al avance o arrastre.
- Figura 9: Momento de amortiguación del alabeo.
- Figura 10: Fuerza de sustentación.
- Figura 11: Momento de volcado.
- Figura 12: Fuerza de Magnus.
- Figuras 13, 14 y 15: Momento de Magnus, momento de amortiguación de cabeceo y fuerza de amortiguación de cabeceo.
- Figura 16: Coordenadas en nuestro sistema final y coordenadas reales sobre la superficie de la Tierra.
- Figura 17: Proyección de la fuerza de la gravedad en nuestro sistema.
- Figura 18: El vector $\vec{\alpha}_R$.
- Figuras 19, 20, 21 y 22: Variación del alcance y la deriva respecto al azimut de tiro y la latitud.
- Figura 23: Sistema de referencia y superficie de la Tierra.
- Figura 24: Componentes del vector gravedad en distintos puntos de la trayectoria.
- Figura 25: Los 3 vectores definidos.
- Figura 26: Gravedad aparente.

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Tabla resumen de los sistemas de referencia.

Tabla 2: Valor estándar de diferentes variables termodinámicas según la atmósfera ISA.

Tabla 3: Parámetros del proyectil *M107* en el obús *155/39 ATP*. Carga 3W.

Tabla 4: Parámetros de situación del sitio de tiro e inclinación del cañón.

Tabla 5: Tabla de convergencia.

Tabla 6: Parámetros del conjunto proyectil-obús.

Tabla 7: Efecto de la fuerza centrífuga del proyectil en el problema.

Tabla 8: Efecto de la deriva tabular en el problema.

Tabla 9: Efecto del viento en la trayectoria.

Tabla 10: Comparación de trayectorias subsónicas entre nuestro cálculo y el de las tablas de tiro.

Tabla 11: Comparación de trayectorias trans-sónicas entre nuestro cálculo y el de las tablas de tiro.

Tabla 12: Comparación de trayectorias supersónicas entre nuestro cálculo y el de las tablas de tiro.

Tabla 13: Ensayos para la carga subsónica.

Tabla 14: Resultados de las tablas de tiro.

Tabla 15: Errores entre nuestros ensayos y las tablas de tiro.

Tabla 16: Ensayos para la carga trans-sónica.

Tabla 17: Resultados de las tablas de tiro.

Tabla 18: Errores entre nuestros ensayos y las tablas de tiro.

Tabla 19: Ensayos para la carga supersónica.

Tabla 20: Resultados de las tablas de tiro.

Tabla 21: Errores entre nuestros ensayos y las tablas de tiro.

1. INTRODUCCIÓN, ALCANCE Y OBJETIVOS

1.1 Introducción

Los problemas balísticos como el tratado en el presente Trabajo de Fin de Grado se encuentran en el nacimiento de las modernas Escuelas Politécnicas. La Escuela Politécnica de París, la primera en su clase, fue fundada en 1794 con el objetivo de, entre otros, dotar de artilleros al ejército francés, que se había quedado desprovisto de ellos después de la Revolución. Desde los inicios del uso de artillería primitiva en Europa a partir del siglo XIV (el primer uso de artillería documentado en España se encuentra en el sitio de Algeciras llevado a cabo por Alfonso XI en 1312) y conforme los cañones se fueron haciendo cada vez más complejos y menos rudimentarios durante los siglos posteriores, se hizo patente la necesidad de predecir de una manera que no fuera empírica o intuitiva la trayectoria del tiro artillero para obtener parámetros como el alcance o el ángulo de tiro necesario para batir con eficacia un objetivo a una distancia dada.

La primera aproximación física hacia el cálculo de la trayectoria de un proyectil balístico se encuentra en la obra de Isaac Newton *Philosophiae naturalis principia mathematica* donde encontramos la primera formulación consistente del problema, en la que nos seguimos basando aún hoy en día. Durante los siglos de esplendor del Imperio Español (XVI y XVII), se fundaron las primeras Escuelas de artillería, donde se enseñaba un manejo puramente técnico de las armas de artillería debido a la carencia de las herramientas físico-matemáticas necesarias para calcular el tiro artillero. Durante el siglo XVIII y mientras las monarquías europeas estaban sumidas en el espíritu de la Ilustración, las primeras Academias de Artillería fueron fundadas, entre muchas otras instituciones científicas que aún perduran hoy en día. Cabe decir que la primera Academia fundada en el mundo fue la Academia de Artillería española, en el año 1764. Desde ese momento se pasó a abandonar el conocimiento puramente empírico del arte artillero y se comenzó gradualmente a formular modelos matemáticos que fueran capaces de predecir la trayectoria balística de un proyectil de forma más o menos exacta y consistente según las Leyes de la Física propuestas por Isaac Newton. A mediados del siglo XIX, las primeras investigaciones acerca de la fuerza de arrastre aerodinámica que sufre un proyectil en vuelo son llevadas a cabo, y se comienza a representar el coeficiente aerodinámico de los proyectiles respecto a su número de Mach, resultando esto en el abandono de las formas esféricas de los proyectiles de cañón, pasando a utilizar formas “ojivales” más eficientes aerodinámicamente hablando.

A partir de este momento, el progreso de la ciencia aerodinámico-balística comienza a desarrollarse de manera exponencial, obteniendo modelos cada vez más complejos de cómputo de trayectorias y de modelización aerodinámica de los proyectiles. Durante la Primera Guerra Mundial, se utilizan por primera vez en la Historia cañones con alcances superiores a la decena de kilómetros, y se hace patente la necesidad no solo de introducir la fuerza de arrastre aerodinámica en el modelo matemático, sino también de contar con los elementos necesarios para calcular la deriva sufrida por un proyectil en vuelo, a saber: las fuerzas llamadas de *inercia* (Coriolis, etc.), y el resto de fuerzas aerodinámicas restantes (Magnus, sustentación, etc.) Como curiosidad, en 1918, el llamado *Pariser Kanonen* del ejército alemán batió París desde una distancia de 120 km, lanzando proyectiles de 103 kg a una velocidad inicial de 1600 m/s y aunque consiguió alcanzar el objetivo, el proyectil sufrió una deriva hacia la derecha del plano de tiro de 1343 metros.

Este hecho hizo evidente la necesidad de contar con un método efectivo para calcular la deriva balística.

Posteriormente, durante la Segunda Guerra Mundial, los modelos físicos utilizados para el cómputo de trayectorias se fueron haciendo crecientemente complejos, hasta llegar a la forma en la que se encuentran hoy en día. Estos nuevos modelos no solo tenían en cuenta el cambio de posición de proyectil, como por ejemplo en la Trayectoria de Masa Puntual con 3 Grados de libertad (GDL), sino que también tienen en cuenta los 3 giros propios del proyectil, llegando finalmente a obtener un modelo de 6 GDL. Gracias a este modelo se pueden introducir en el mismo las fuerzas aerodinámicas dependientes del ángulo que forma el proyectil con la trayectoria del mismo. Este modelo, al que se le fueron introduciendo sucesivas mejoras, es el que se sigue utilizando hoy en día para el cálculo de trayectorias balísticas de cualquier tipo de proyectil.

1.2 Alcance y Objetivos

El objetivo del presente trabajo consiste en crear un programa en *MatLab* que sea capaz de calcular de manera precisa trayectorias de artillería, para posteriormente comparar esas trayectorias calculadas con las que aparecen en las tablas de tiro del Ejército Español.

Nuestro trabajo contará con las siguientes secciones:

1. Una primera parte donde se justifica la elección de *sistemas de referencia* utilizados para resolver el problema. Serán definidos y se mostrarán, para finalizar describiendo dos vectores unitarios clave para construir nuestro modelo físico.
2. En esta segunda sección, se listarán y describirán los *efectos aerodinámicos* que sufre un proyectil en vuelo. También se detallarán los cambios en las variables termodinámicas (densidad, temperatura...) que varían con el punto de la *atmósfera* donde se encuentre el proyectil.
3. En este punto se mostrarán las *ecuaciones de movimiento* que rigen el estudio que realizamos, las diferentes *correcciones* que serán introducidas al problema (esfericidad de la Tierra) y las *simplificaciones* que se toman respecto a la trayectoria general de 6 GDL.
4. Aquí se justificará la elección del *método numérico* adecuado para la resolución de las ecuaciones con las que contamos a partir de unos estudios de *convergencia* realizados al mismo.
5. Este es el punto central del estudio realizado, donde *se compararán los resultados* obtenidos con nuestro modelo numérico con las tablas de tiro utilizadas por el Ejército Español para calcular el tiro artillero. Se compararán tiros en la banda *sub, trans y supersónica* efectuados a diferentes latitudes y azimuts de tiro para comprobar la exactitud de nuestra formulación.
6. Por último, se concluirá con unas *conclusiones* y *trabajo futuro*, donde se mostrarán las diferentes conclusiones a las que se han llegado durante la resolución del problema, y se ahondará en el trabajo futuro que se podría realizar a partir de nuestro proyecto.

También se incluirán en el trabajo unos *anexos* donde se incluirán demostraciones y explicaciones relativas al desarrollo del trabajo que resultan demasiado farragosas y densas para ser incluidas en la memoria, así como baterías de ensayos adicionales.

2. SISTEMAS DE REFERENCIA

En esta sección listaremos los sistemas de referencia que tendremos en consideración hasta llegar al sistema de referencia final. Hay que tener en cuenta que el objetivo es comenzar por un sistema de referencia *inercial*, para a partir de él ir definiendo progresivamente nuevos sistemas de referencia hasta llegar al sistema de referencia final: un sistema con el centro en la boca de nuestro cañón y posicionado respecto a la latitud de la Tierra λ y al azimut de tiro ϑ (Ángulo que forma nuestro cañón con el Norte, medido en sentido de las agujas del reloj). El eje X de este sistema seguirá la dirección y sentido del tubo del cañón en su proyección en la superficie de la Tierra visto desde atrás, el eje Y marcará la vertical (tendrá la misma dirección y sentido que la normal respecto a la superficie de la Tierra) y el eje Z completará un triedro dextrógiro.

1. *Sistema con origen en el centro de la Tierra no dotado con giro propio de la misma ECI (Earth-Centered Inertial)*. Este sistema tendrá su origen en el centro de la Tierra C_T , no estará dotado del giro propio terrestre, y tendrá el eje X cortando los polos Norte y Sur. Este sistema es tomado como *inercial* a pesar de no serlo; el centro de la Tierra gira en torno al Sol y por lo tanto está acelerado. Sin embargo, esta aceleración es tan pequeña debido a la ínfima velocidad de rotación de la Tierra respecto al Sol que se puede despreciar.

$$\text{Sistema ECI} = \{X_{ECI}, Y_{ECI}, Z_{ECI}\}$$

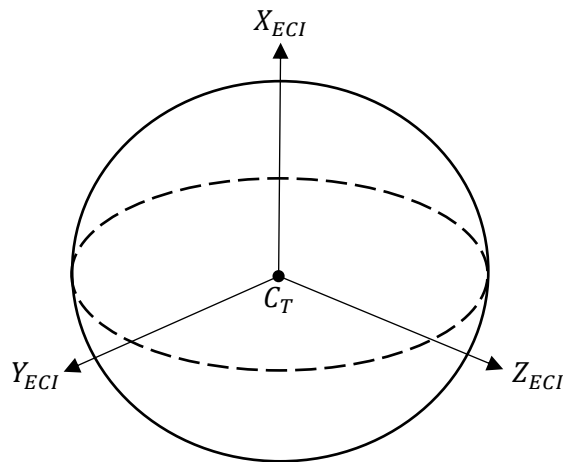


Fig. 1: Sistema ECI.

2. *Sistema con origen en el centro de la Tierra dotado de su giro propio ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed)*. Este sistema será idéntico al anterior, pero estará dotado del giro propio de la Tierra alrededor del eje X_{ECI} que designaremos como ψ_T . Será por lo tanto un sistema rotante y *no inercial*.

$$\text{Sistema ECEF} = \{X_{ECEF}, Y_{ECEF}, Z_{ECEF}\}$$

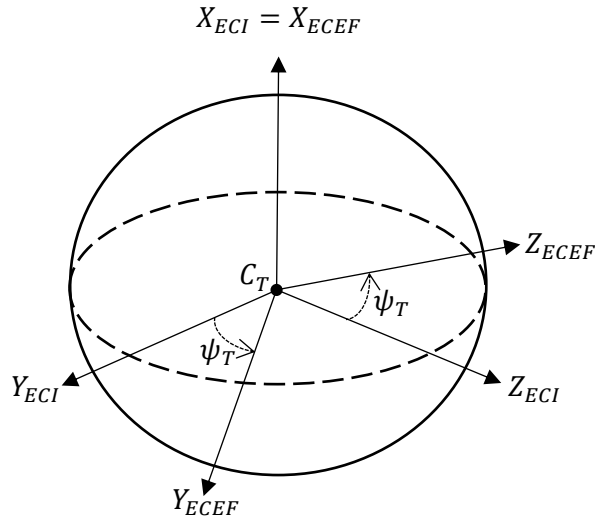


Fig. 2: Paso de coordenadas del sistema ECI al ECEF.

3. Sistema con origen en el centro de la Tierra, giramos su orientación con la longitud L . Del sistema ECEF, pasaremos a este sistema rotando al sistema ECEF con la longitud L alrededor del eje X_{ECEF} . La longitud tiene un rango de $-\pi$ a π radianes y la incluimos, aunque no influye físicamente en el problema.

$$\text{Sistema Longitud} = \{X_L, Y_L, Z_L\}$$

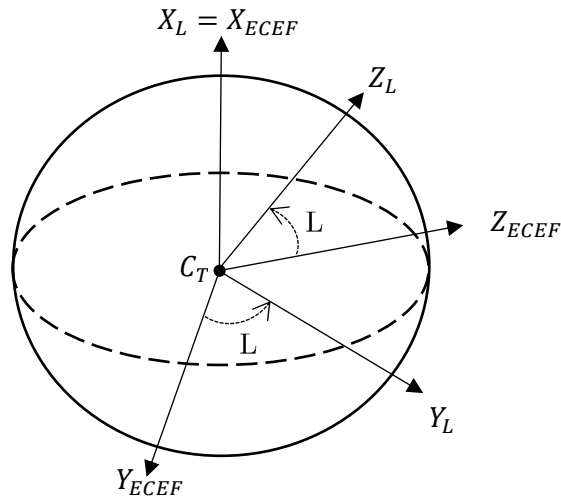


Fig. 3: Paso del sistema ECEF al sistema longitud.

4. Sistema con origen en la boca del cañón, giramos su orientación con la latitud λ . Del sistema longitud pasamos a este trasladando en este caso el origen desde el centro de la Tierra a la boca del cañón B siguiendo el radio terrestre R_{Tierra} . Posteriormente giramos el sistema de referencia con la latitud alrededor del eje Z_L .

Sistema Latitud = $\{X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda\}$

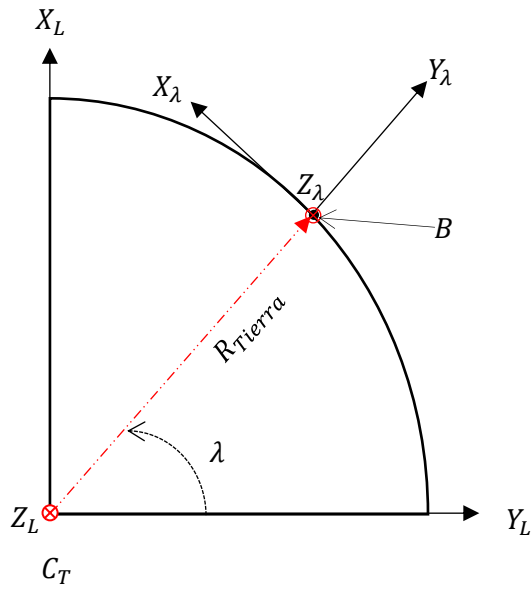


Fig.4: Paso del sistema longitud al sistema latitud.

5. Sistema final, giramos el sistema latitud con el azimut de Tiro θ . Rotamos alrededor del eje Y_λ . Observamos que el azimut puede tomar el rango de 0 a 2π radianes.

Sistema Final = $\{X, Y, Z\}$

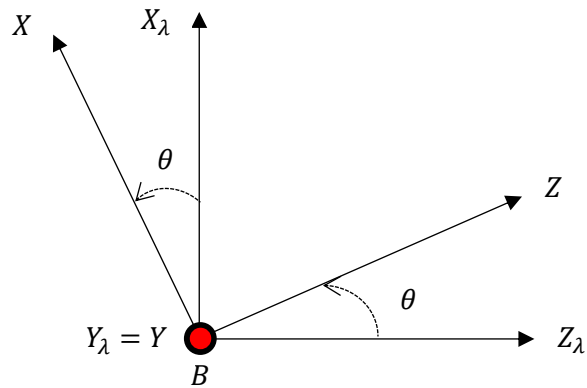


Fig. 5: Paso del sistema latitud al sistema final.

Sistema	ECI		ECEF		Longitud		Latitud		Final
Tipo	Inercial		No inercial		No inercial		No inercial		No inercial
Denominación	$\{X_{ECI}, Y_{ECI}, Z_{ECI}\}$		$\{X_{ECEF}, Y_{ECEF}, Z_{ECEF}\}$		$\{X_L, Y_L, Z_L\}$		$\{X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda\}$		$\{X, Y, Z\}$
Eje alrededor del cual se rota		X_{ECI}		X_{ECEF}		Z_L		Y_λ	
Rotación con		ψ_T		Longitud, L		Latitud, λ		Azimut de tiro, θ	

Tabla 1: Tabla resumen de los sistemas de referencia.

Por último, definiremos dos vectores unitarios, que utilizaremos más adelante únicamente para definir ciertas fuerzas y momentos aerodinámicos:

- En primer lugar, definiremos el vector unitario \vec{i} , que es tangente a la trayectoria del proyectil, y que por lo tanto sigue la dirección y sentido del vector velocidad \vec{V} del proyectil. Su expresión es:

$$\vec{i} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

- Por último, definimos el vector unitario \vec{x} , que sigue la dirección del eje de simetría del proyectil y que apunta hacia la ojiva del mismo.

Debido al movimiento giroscópico del proyectil estos dos vectores no tienen por qué coincidir entre sí y en general no lo hacen. El ángulo que forman entre sí será llamado *ángulo total de guiñada* α_t y será definido en la siguiente sección.

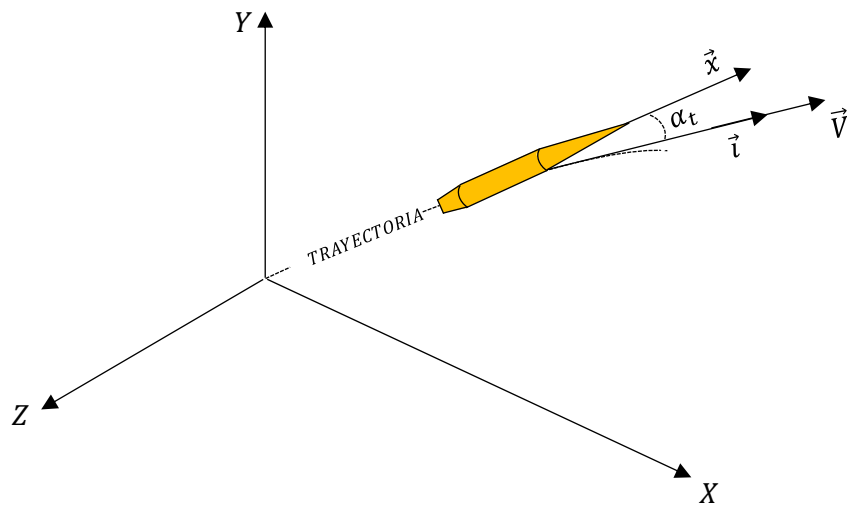


Fig. 6: El proyectil y los dos vectores unitarios definidos.

3. EFECTOS AERODINÁMICOS Y PROPIEDADES DE LA ATMÓSFERA

3.1 Efectos aerodinámicos

Comenzaremos este capítulo haciendo unas aclaraciones introductorias. En primer lugar, gracias al rayado del ánima de los cañones sabemos que el proyectil sale de la boca del cañón con un giro en torno a su eje de simetría. Ese giro es llamado en inglés *roll* o *spin* y en español se corresponde con el término alabeo en notación aeronáutica. No obstante a partir de aquí nos referiremos a él como *spin* por simplicidad. El rayado de ánima estándar occidental es *dextrorsum* por lo que el proyectil sale con un *spin* en dirección de las agujas del reloj visto desde el culote. El proyectil mostrará también dos giros más en vuelo: uno que dicta la posición de la punta de la ojiva hacia “arriba” o “abajo” llamado *pitch* o cabeceo y otro que describe la posición de la ojiva del proyectil hacia la “izquierda” o la “derecha” llamado *yaw* o guiñada.

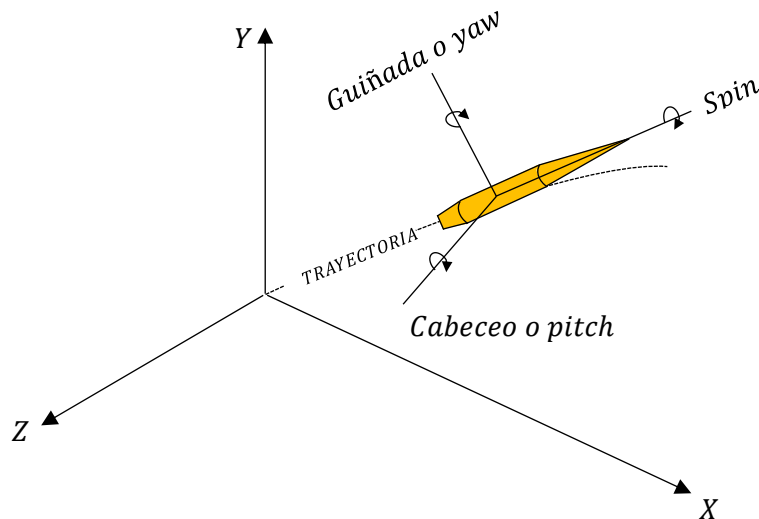


Fig. 7: Ejes de rotación principales del proyectil.

Por último, el proyectil es supuesto cómo un cuerpo rígido cuyo giro de *spin* coincide exactamente con su eje de simetría.

Es necesario además definir el *ángulo total de guiñada* o α_t que como hemos mencionado anteriormente es el ángulo que forman entre sí los vectores unitarios \vec{x} e \vec{l} . Este ángulo tiene como expresión $\alpha_t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ siendo α el cabeceo y β la guiñada del proyectil en radianes.

A continuación pasamos a listar los efectos aerodinámicos. Nos referiremos a ellos con la denominación anglosajona por ser la estándar en la mayor parte de la literatura.

1. FUERZA DE RESISTENCIA AL AVANCE (DRAG FORCE)

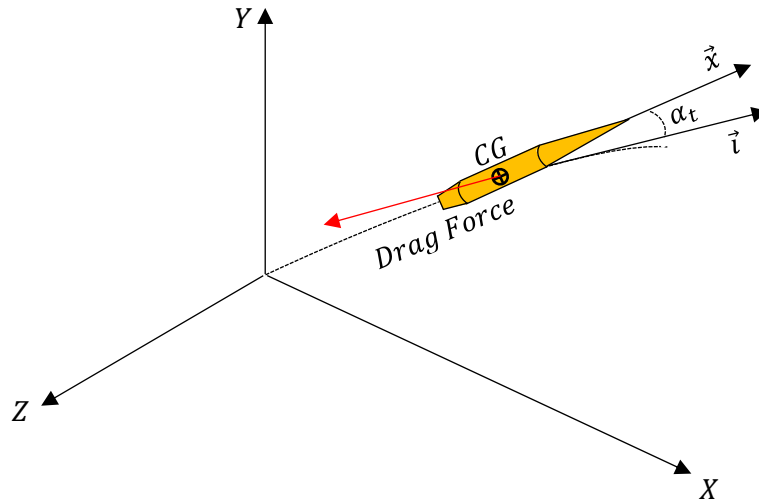


Fig. 8: Fuerza de resistencia al avance o arrastre.

Esta fuerza se opone al avance del proyectil y se debe a la fricción que sufre el proyectil al avanzar en un medio viscoso como el aire. Es la fuerza clásica aerodinámica y la que primero fue estudiada. Su magnitud vectorial y su módulo son:

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho AC_D V_R \vec{V}_R$$

$$F_D = -\frac{1}{2}\rho AC_D V_R^2$$

Debido a que esta fuerza siempre es definida en función de la velocidad relativa del proyectil respecto al viento al que es sometido, \vec{V}_R es el vector velocidad relativa del proyectil obtenido de sustraer al vector velocidad del proyectil, \vec{V} , el vector viento, \vec{W} , sufrido por el mismo y V_R es su módulo. A es la sección normal del proyectil respecto a su diámetro de referencia (el calibre del mismo), ρ es la densidad del aire y C_D es el coeficiente aerodinámico de arrastre que tiene como expresión:

$$C_D = C_{D0} + C_{D\delta^2} \delta^2$$

Siendo $\delta^2 = \text{sen}^2(\alpha_t)$.

C_{D0} es el coeficiente de arrastre aerodinámico que no depende del ángulo total de guiñada del mismo y $C_{D\delta^2}$ es un coeficiente que depende cuadráticamente del ángulo total de guiñada. Por medio de estos dos coeficientes es posible describir de manera aceptablemente precisa la resistencia que sufre el proyectil en vuelo cuando su eje de simetría no está alineado con el vector velocidad relativa. Hay que señalar que ningún coeficiente aerodinámico presenta un valor constante siendo una función que depende del número de Mach, M , del proyectil con $M = \frac{V}{c}$ y c la velocidad del sonido en el aire.

2. MOMENTO DE AMORTIGUACIÓN DEL ALABEO (SPIN DAMPING MOMENT)

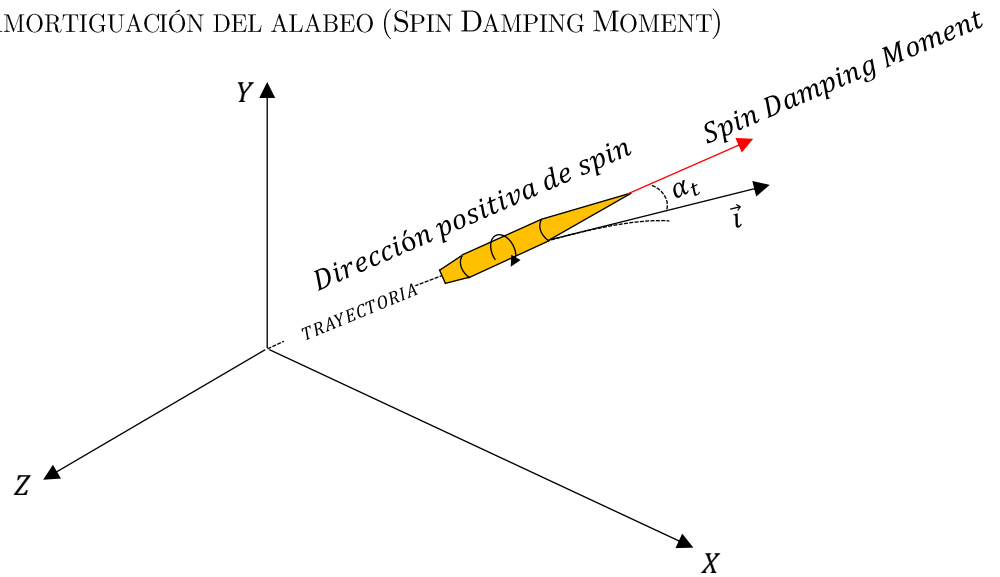


Fig. 9: Momento de amortiguación del alabeo.

Este momento se debe a la fricción que sufre el proyectil con el aire cuando gira respecto a su eje principal de simetría y tiende a disminuir la velocidad angular de *spin*.

Su expresión vectorial y su módulo son:

$$\vec{M}_{lp} = \frac{1}{2} \rho V^2 A d \frac{pd}{V} C_{lp} \vec{x}$$

$$M_{lp} = \frac{1}{2} \rho V^2 A d \frac{pd}{V} C_{lp}$$

p es la velocidad angular de *spin* del proyectil y C_{lp} es el coeficiente de amortiguación de *spin* que evidentemente es negativo. La cantidad $\frac{pd}{V}$ es un parámetro adimensional llamado *spin* por calibre de viaje y es la ratio entre el *spin* y la velocidad lineal.

3. FUERZA DE SUSTENTACIÓN (LIFT FORCE)

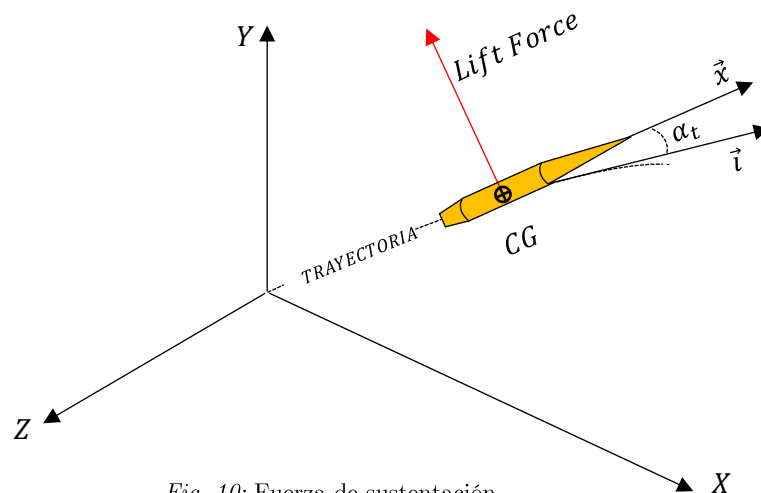


Fig. 10: Fuerza de sustentación.

Esta fuerza es perpendicular al vector velocidad del proyectil y está contenida en el plano formado por los vectores unitarios \vec{x} e \vec{l} . Como su punto de aplicación está en el centro de presiones que se sitúa delante del centro de gravedad, provoca un momento que tiende a “levantar” la ojiva del proyectil como se indica en el punto siguiente. Este hecho unido a los efectos giroscópicos es la causa principal de la deriva del proyectil a largas distancias. Su expresión vectorial y módulo son:

$$\vec{F}_L = \frac{1}{2} \rho A C_L (\vec{V} \times (\vec{x} \times \vec{V}))$$

$$F_L = \frac{1}{2} \rho V^2 A C_L \text{sen}(\alpha_t)$$

4. MOMENTO DE VOLCADO (OVERTURNING MOMENT)

Este momento está asociado a la existencia de la fuerza de sustentación y tiende a “volcar” el proyectil, dotándole de un ángulo de cabeceo y tendiendo a incrementar el ángulo total de guiñada. Este es el momento responsable de desestabilizar el proyectil en vuelo y la razón por la que se dota al mismo de una velocidad angular de *spin* en el cañón, que proporciona rigidez giroscópica frente al momento de volcado. $C_{M\alpha}$ es el coeficiente de volcado del proyectil.

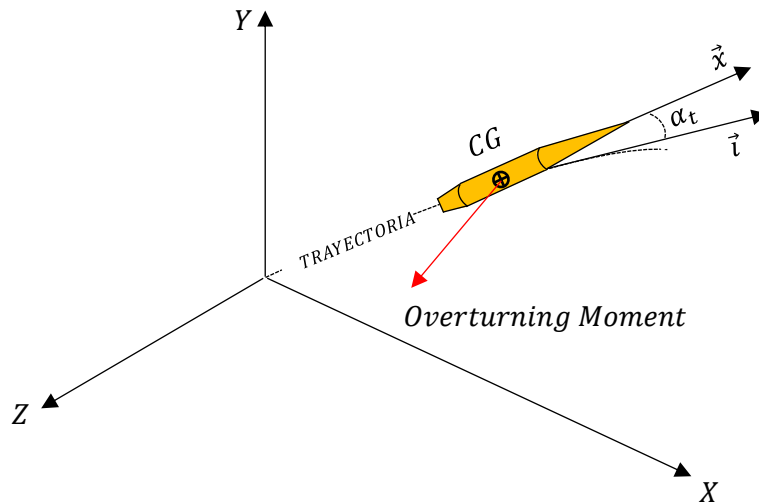


Fig. 11: Momento de volcado.

Su expresión vectorial y módulo son:

$$\vec{M}_V = \frac{1}{2} \rho A d C_{M\alpha} V^2 (\vec{l} \times \vec{x})$$

$$M_V = \frac{1}{2} \rho V^2 A d C_{M\alpha} \text{sen}(\alpha_t)$$

5. FUERZA DE MAGNUS (MAGNUS FORCE)

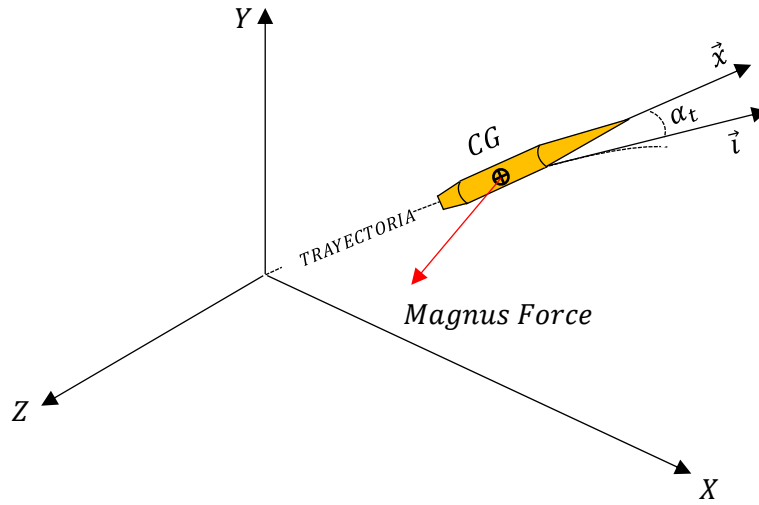


Fig. 12: Fuerza de Magnus.

Esta fuerza es producida por la existencia de presiones dispares en los lados opuestos de un proyectil rotante. Estas presiones dispares se producen por la interacción entre el fluido viscoso donde está sumergido el proyectil y la superficie del mismo. Tiene una importancia creciente conforme la velocidad del proyectil disminuye. Esta fuerza actúa en una dirección perpendicular al plano del ángulo total de guiñada. Su expresión vectorial y módulo son:

$$\vec{F}_M = \frac{1}{2} \rho V^2 A \frac{pd}{V} C_{Np\alpha} (\vec{i} \times \vec{x})$$

$$F_M = \frac{1}{2} \rho V^2 A \frac{pd}{V} C_{Np\alpha} \text{sen}(\alpha_t)$$

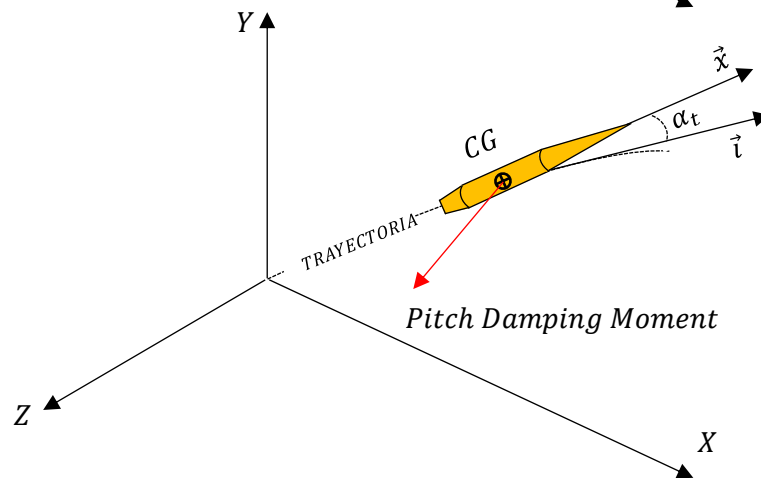
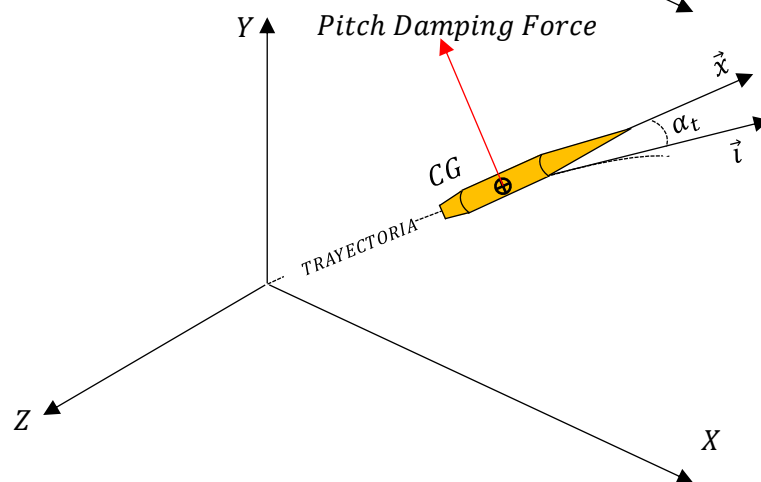
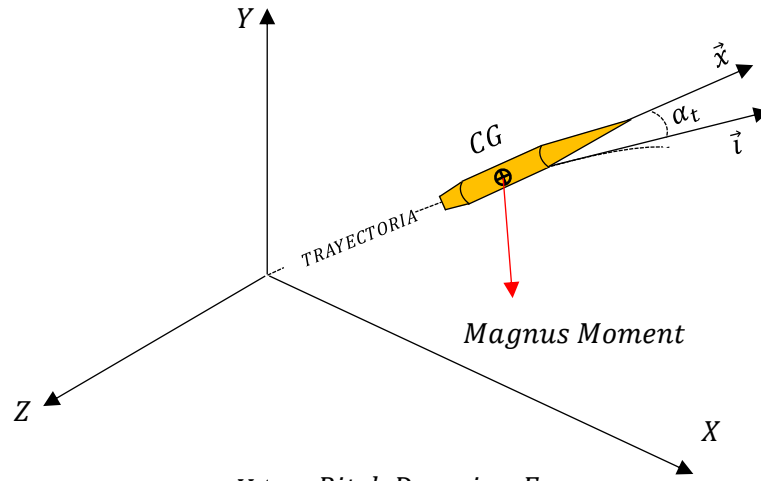
$C_{Np\alpha}$ es el coeficiente de la fuerza de Magnus y suele ser negativo.

6. OTRAS FUERZAS Y MOMENTOS

Existen además otras fuerzas y momentos aerodinámicos que no tendremos en cuenta por ser despreciables respecto al resto [2, pág. 39]. Son las siguientes:

1. *Momento de Magnus (Magnus Moment)*: Aparece a consecuencia de la fuerza de Magnus y tiende a voltear el proyectil, aumentando su ángulo de guiñada. Es muy importante para determinar la estabilidad dinámica del proyectil y es fuertemente no lineal, aunque no influirá en nuestras ecuaciones.
2. *Momento de amortiguación de cabeceo (Pitch Damping Moment)*: Debido al aumento del ángulo de cabeceo producido por el momento de volcado y a la velocidad de cambio del ángulo total de guiñada, se produce una velocidad angular de cabeceo que evidentemente genera fricción con el aire. Este momento está asociado a esa fricción y tiende a disminuir esa velocidad angular. Esta velocidad angular es tan pequeña que este momento es despreciable. Tiene también una gran importancia en la estabilidad dinámica.

3. *Fuerza de amortiguación de cabeceo (Pitch Damping Force)*: Fuerza análoga al momento anterior, igualmente despreciable.
4. *Momento y Fuerza cruzadas de Magnus (Cross-Magnus Moment & Force)*: Fueron predichas por J.L. Synge y K.L. Nielsen en [3] en base a la interacción del viento relativo con la rotación del proyectil. Sus efectos son tan pequeños que no han podido medirse experimentalmente todavía por lo que son despreciados en todos los estudios de la trayectoria balística de un proyectil.



Figs. 13, 14 y 15: Momento de Magnus, momento de amortiguación de cabeceo y fuerza de amortiguación de cabeceo.

3.2 Propiedades de la atmósfera

A continuación, describiremos las correcciones que aplicaremos a las variables termodinámicas como la temperatura, la presión y finalmente la densidad y la velocidad del sonido en el aire en función de dos parámetros: la altura a la que se encuentre el proyectil y el porcentaje de humedad presente en la atmósfera.

Corrección por altura

En este punto del trabajo seguiremos el modelo atmosférico estándar de la ICAO llamada ISA (International Standard Atmosphere) donde los valores estándar de las variables previamente mencionadas al nivel del mar son:

Temperatura	Densidad	Presión	Velocidad del sonido	Constante gas real aire	Coefficiente dilatación adiabática aire
$T_0=288.15$ K.	$\rho_0=1.225$ kg/m^3	$p_0=101325$ Pa.	$c_0=340.294$ m/s.	$R=287.04$ $\text{m}^2/\text{kg}\cdot\text{s}^2$	$\gamma=1.4$

Tabla 2: Valor estándar de diferentes variables termodinámicas según la atmósfera ISA.

Según este modelo atmosférico, en la capa troposférica, el gradiente de temperaturas es constante en -6.5 K/Km . Por lo tanto:

$$T(h) = T_0 - 0.0065h \quad \text{con } h \text{ la altura en m.}$$

Siguiendo un razonamiento que no mostraremos aquí, la variación de presión respecto a la altura será:

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{0.0065h}{T_0} \right)^{5.2561}$$

Si la ecuación de estado para los gases reales es:

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad \text{entonces} \quad \rho(h) = \frac{p_0 \left(1 - \frac{0.0065h}{T_0} \right)^{5.2561}}{R(T_0 - 0.0065h)}$$

Por último, si la velocidad del sonido en el aire es:

$$c = \sqrt{\gamma RT} \quad \text{entonces} \quad c(h) = \sqrt{\gamma R(T_0 - 0.0065h)}$$

Corrección por presencia de humedad en el aire

Aquí utilizaremos los factores de corrección propuestos en [2, págs. 167 y 168] ajustados para la atmósfera ISA que son:

$$f_\rho = 1 - 0.00378(H - 78) \frac{p_v}{101325} \quad \text{Para la densidad.}$$

$$f_c = 1 + 0.0014H \frac{p_v}{101325} \quad \text{Para la velocidad del sonido en el aire.}$$

p_v es la presión del vapor de agua en el punto donde se encuentre el proyectil y H la humedad relativa del punto expresada en tanto por ciento. Observamos que en todo caso estos factores siempre arrojarán correcciones minúsculas.

4. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

En este capítulo describiremos las ecuaciones de movimiento del proyectil en la atmósfera. Como es un sólido rígido se trata de un problema con 6 GDL. No obstante en tiro de artillería no es necesario resolver las ecuaciones correspondientes a todos ellos. En la práctica se utilizan dos aproximaciones: La Trayectoria de Masa Puntual y la Trayectoria de Masa Modificada, cuyas ecuaciones describiremos a continuación.

Antes de hacerlo es necesario considerar los efectos en nuestro sistema de coordenadas de las correcciones debidas a la esfericidad de la tierra.

4.1. Correcciones por esfericidad de la Tierra

Corrección en coordenadas

A la vista del sistema de referencia final elegido, observamos que no se trata de un sistema esférico y que una coordenada en el eje horizontal X de 200 metros no significa que hayamos recorrido 200 metros sobre la superficie de la Tierra (que es curvilínea). Algo parecido sucede con la coordenada vertical. Para solucionar este problema realizamos unas correcciones sobre las coordenadas del sistema final {X, Y, Z} para pasar a las coordenadas reales sobre la superficie de la Tierra. Hay que hacer notar que solo corregimos los ejes X e Y, ya que el desplazamiento en el eje Z (deriva) será tan pequeño que la imprecisión debida a no tener en cuenta la esfericidad de la Tierra será despreciable: Esta imprecisión comienza a hacerse notar a partir de las decenas de kilómetros, y la deriva jamás sobrepasará los 500-600 m en nuestro sistema proyectil-cañón.

Según se muestra en el *Anexo I*, las expresiones que permiten pasar de las coordenadas de nuestro sistema final {x, y} a las coordenadas reales sobre la superficie de la Tierra {x', y'} son:

$$x' = R_{Tierra} \frac{x}{R_{Tierra} + y}$$

$$y' = (R_{Tierra} + y) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R_{Tierra} + y} \right)^2 \right] - R_{Tierra}$$

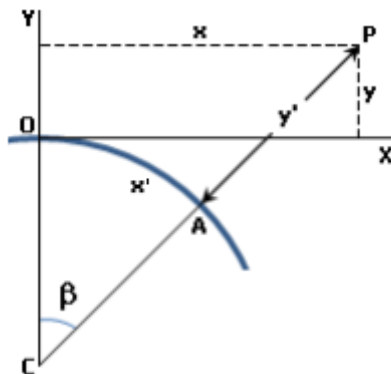


Fig. 16: Coordenadas en nuestro sistema final y coordenadas reales sobre la superficie de la Tierra.

Corrección en la fuerza de la gravedad

A medida que el proyectil P se aleja de la boca del cañón, la gravedad, que siempre apunta (aproximadamente, [7, pág 113]) hacia el centro de la Tierra cambia de dirección en nuestro sistema de referencia final. Según muestra la Figura 17, la gravedad que sufre el proyectil P sigue la dirección \overline{PC} que tiene componentes en los ejes X e Y. En el momento inicial de tiro la gravedad seguirá la dirección \overline{OC} y solo tendrá componente en el eje Y. Es, por tanto, necesario realizar una proyección de la gravedad sobre los ejes X e Y de nuestro sistema final. De nuevo las correcciones en el eje Z se desprecian por la razón explicada en anteriormente. Las proyecciones realizadas, según se muestra en el Anexo I son:

$$g = g_0 \frac{R_{Tierra}^2}{(R_{Tierra} + y')^2}$$

$$\text{Sobre el eje X} \quad g_x = g \frac{x}{R_{Tierra} + y'}$$

$$\text{Sobre el eje Y} \quad g_y = g \frac{R_{Tierra} + y}{R_{Tierra} + y'}$$

Además, g_0 , que es el módulo de la fuerza de la gravedad al nivel del mar, sufre variaciones con respecto a la latitud, debido esto al achatamiento de la Tierra en los polos. Utilizaremos la Fórmula Internacional de la Gravedad propuesta por la Asociación Internacional de la Geodesia para introducir este efecto en g_0 :

$$g_0 = 9.780327(1 + 0.0053024\text{sen}^2(\lambda) - 0.0000058\text{sen}^2(2\lambda)) \text{ m/s}^2$$

λ será la latitud del sitio de tiro, y al tener las trayectorias un alcance del orden del kilómetro, el proyectil no sufrirá cambios apreciables en la latitud y por tanto el módulo de la gravedad al nivel del mar se considerará constante.

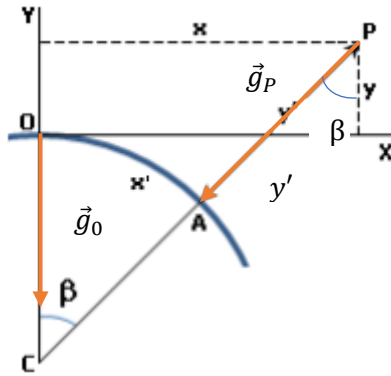


Fig. 17: Proyección de la fuerza de la gravedad en nuestro sistema.

A continuación, se describen las dos aproximaciones más extendidas que representan la trayectoria de un proyectil en artillería.

4.2. Trayectoria de Masa Puntual

En esta trayectoria el proyectil se supone como una masa puntual, por lo que no sufre ningún momento ni la mayoría de fuerzas aerodinámicas anteriormente listadas. Solamente se considerará la fuerza aerodinámica de resistencia al avance. En esta trayectoria y en el sistema de referencia elegido, las ecuaciones de movimiento son (demostración en el *Anexo II*):

$$\vec{F}_{total} = \sum \vec{F}_{ext} + \sum \vec{F}_{inerciales}$$

Así pues, las aceleraciones totales que son observadas desde nuestro sistema de referencia no son solo debidas a las fuerzas exteriores (gravedad y arrastre), sino que también habrá que sumar un grupo de fuerzas (de *arrastre* o *centrífugas* y de *Coriolis*) llamadas *inerciales*. Estas fuerzas aparecen por ser sistema de referencia elegido un sistema *no inercial*. No son estrictamente reales (si calculáramos la trayectoria desde un sistema *inercial* no aparecerían), y tienen una función básicamente correctora, un proyectil en vuelo visto desde un sistema *no inercial* tiene un comportamiento extraño que no somos capaces de predecir si solo tenemos en cuenta las aceleraciones reales que actúan sobre el mismo (gravedad y arrastre aerodinámico).

$$\vec{F}_{total} = \underbrace{\vec{F}_{gravedad} + \vec{F}_{arrastre}}_{F_{ext}} + \underbrace{\vec{F}_{centrifuga} + \vec{F}_{Coriolis}}_{F_{inerciales}}$$

Pasando de fuerzas a aceleraciones, estas serán nuestras aceleraciones desglosadas en las coordenadas de nuestro sistema de referencia:

- *Aceleración de la gravedad*: Con las proyecciones detalladas en la sección 3.1.

$$\vec{a}_{gravedad} = \vec{g} = \begin{bmatrix} x \\ -g \frac{R_{Tierra} + y'}{R_{Tierra} + y'} \\ -g \frac{R_{Tierra} + y'}{R_{Tierra} + y'} \\ 0 \end{bmatrix}_{xyz}; \text{ siendo } g = g_0 \frac{R_{Tierra}^2}{(R_{Tierra} + y')^2};$$

$$g_0 = 9.780327(1 + 0.0053024\text{sen}^2(\lambda) - 0.0000058\text{sen}^2(2\lambda)) \text{ m/s}^2$$

- *Aceleración de arrastre aerodinámico*: \vec{V} es la velocidad del proyectil y \vec{W} es la velocidad del viento; la aceleración de arrastre siempre depende de la velocidad respecto a la corriente de aire. ρ es la densidad del aire (que depende de la altura del proyectil y la humedad en el aire), A es la sección de referencia del proyectil, C_D es el coeficiente aerodinámico de arrastre del proyectil que depende de su número de Mach y m es la masa del proyectil:

$$\vec{a}_{arrastre} = -K_D V_R \vec{V}_R; \quad \vec{V}_R = \vec{V} - \vec{W}; \quad V_R = \sqrt{V_{R1}^2 + V_{R2}^2 + V_{R3}^2}$$

Módulo de \vec{V}_R

$$\text{con } K_D = \frac{\rho A C_D}{2m}; \quad \vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}_{xyz}; \quad \vec{W} = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}_{xyz}$$

- *Aceleración centrífuga:* esta aceleración tiene una magnitud ínfima respecto al resto de aceleraciones que influyen en este problema y la incluimos por interés académico. $\vec{\omega}$ es la velocidad angular de giro de la Tierra expresada en las coordenadas de nuestro sistema de referencia final y \vec{r} es la posición del proyectil respecto al centro de nuestro sistema de referencia:

$$\vec{a}_{centrifuga} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega \cos(\lambda) \cos(\theta) \\ \omega \sin(\lambda) \\ -\omega \cos(\lambda) \sin(\theta) \end{bmatrix}_{xyz} ; \vec{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{xyz} ; \omega = 1.160577 * 10^{-5} \text{ rad/s}$$

- *Aceleración de Coriolis:*

$$\vec{a}_{Coriolis} = -2(\vec{\omega} \times \vec{V})$$

4.3. Trayectoria de Masa Puntual Modificada

Para esta trayectoria, que se encuentra demostrada en [2, pág. 214] realizaremos unas modificaciones a la Trayectoria de Masa Puntual previamente mostrada. Debido a que el proyectil no es una masa puntual y tiene una forma determinada, este se ve sometido a ciertas fuerzas y momentos aerodinámicos adicionales. Para pasar de los 3 GDL de la Trayectoria de Masa Puntual a una trayectoria que sea capaz de predecir el resto de grados de libertad del proyectil (los 3 giros propios), definiremos un 4º GDL que es un ángulo vectorial llamado \vec{a}_R , cuyo módulo es el seno de α_t (recordamos que $\alpha_t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, siendo α y β respectivamente el ángulo de cabeceo o ataque y el ángulo de guiñada), es perpendicular a la trayectoria de vuelo y tiene un sentido dirigido de la trayectoria de vuelo al eje de rotación simétrica del proyectil. Matemáticamente este ángulo \vec{a}_R tiene la expresión:

$$\vec{a}_R = \vec{i} \times (\vec{x} \times \vec{i}) = \vec{x} - \cos(\alpha_t) \vec{i}$$

Recordemos que \vec{x} es un vector unitario a lo largo del eje de simetría del proyectil e \vec{i} un vector unitario en la dirección de la velocidad.

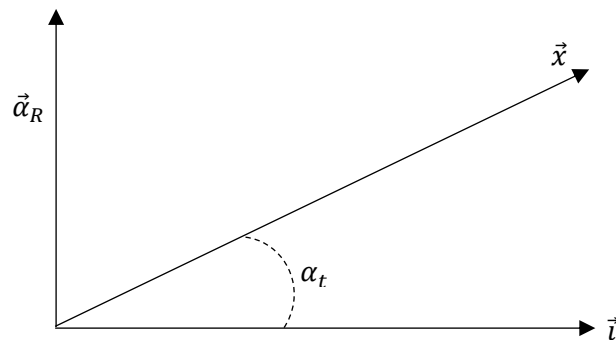


Fig. 18: El vector \vec{a}_R .

Esta trayectoria que definimos es una simplificación de la trayectoria de 6 GDL, pero permite llegar a resultados muy parecidos en alcance y deriva a los de la trayectoria completa de 6 GDL. Gracias a este ángulo vectorial $\vec{\alpha}_R$ podremos definir e introducir en el problema los momentos y fuerzas aerodinámicas previamente despreciadas, haciendo de esta manera la descripción del problema más precisa, especialmente en términos de deriva. Gracias a la introducción de estos momentos y fuerzas aerodinámicas podemos calcular la llamada “deriva tabular”. En concreto introduciremos el efecto de la fuerza de sustentación y de la fuerza de Magnus. También tendremos en cuenta la disminución en la velocidad angular de alabeo o *spin* que produce el momento de amortiguación del alabeo y el cambio en $\vec{\alpha}_R$ que produce el momento de volcado. Para $\vec{\alpha}_R$ la expresión matemática es [2, pág. 214]:

$$\vec{\alpha}_R = \frac{2I_x p (\vec{g} \times \vec{V})}{\rho A d V_R^4 C_{M\alpha}}$$

Esta es la aproximación de Bradley para el ángulo $\vec{\alpha}_R$, donde d es el diámetro de referencia del proyectil e I_x el momento de inercia en torno al eje simétrico de rotación. $C_{M\alpha}$ es el coeficiente aerodinámico de volcado y p es la velocidad angular de *spin*. Para la tasa de cambio de la velocidad angular de *spin* se tiene:

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{\rho A d^2 V_R}{2I_x} p C_{lp}$$

C_{lp} es el coeficiente aerodinámico de amortiguación del *spin*.

Estas serán las modificaciones que realizaremos a la Trayectoria de Masa Puntual:

$$\vec{a}_{total} = \begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{bmatrix} = \vec{a}_{MasaPuntual} + \underbrace{\frac{\rho A C_{L\alpha}}{2m} V_R^2 \vec{\alpha}_R}_{Fuerza\ de\ sustentación} + \underbrace{\frac{\rho A d C_{N\alpha}}{2m} p (\vec{V} \times \vec{\alpha}_R)}_{Fuerza\ de\ Magnus}$$

4. INTEGRACIÓN NUMÉRICA: MÉTODO Y CONVERGENCIA

A la vista de las ecuaciones de movimiento mostradas en el capítulo anterior constatamos que no se puede llegar a una solución analítica a partir de ellas: son Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de una complejidad tal que hace muy difícil o casi imposible el hallazgo de una solución sin la ayuda de métodos numéricos adecuados. Tendremos pues que elegir un método numérico adecuado para resolver estas ecuaciones y posteriormente tendremos que validarlo probando si tiene una buena convergencia o no. En este problema nos interesa resolver las tres coordenadas de posición X, Y, Z (alcance, ordenada máxima, deriva final) del proyectil en vuelo en su trayectoria. Es evidente que para resolver la posición habremos de resolver antes las velocidades lineales del proyectil.

4.1 Método numérico

Se ha elegido un método *Runge-Kutta* de 4º orden. Consideramos este método como adecuado para nuestras ecuaciones debido a que ofrece una potencia de cálculo muy alta para costes computacionales relativamente bajos. Un método numérico de un orden menor ofrecería peores convergencias, y la elección de un método de un orden mayor no compensa el aumento de costes computacionales para un incremento de la precisión ínfimo. Nuestra aplicación del método será peculiar porque las ecuaciones con las que contamos también lo son. En un método estándar las ecuaciones son de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Es decir, tomando por ejemplo el caso de las aceleraciones, estas deberían depender explícitamente de la variable temporal y de su integral respecto a esa variable, las velocidades. Sin embargo, recordando las ecuaciones mostradas anteriormente:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{total} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f}_a(\vec{V}, \vec{r}, p) \\ \vec{V} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{f}_v(\vec{V})\end{aligned}$$

Y recordamos que:

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = f_p(\vec{V}, \vec{r}, p)$$

Observando las aceleraciones, vemos que estas no solo dependen de su integral (las velocidades, \vec{V}) sino que dependen también de su segunda integral (las posiciones \vec{r}). También dependen de la velocidad de *spin*. Algo parecido pasa también con la tasa de cambio de la velocidad de *spin*. Vemos que no existe una dependencia explícita con t . Esto significa que no podemos resolver las ecuaciones de manera aislada y que tenemos que optar por seguir un método vectorial que resuelva el problema “en bloque”. Definiendo las siguientes variables:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{a}_{total} \\ \vec{V} \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\vec{V}}{dt} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} \vec{V} \\ \vec{r} \\ p \end{bmatrix}$$

Con esta notación el sistema se puede escribir en forma compacta:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{F}(\vec{y})$$

Que corresponde con la formulación estándar de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en forma vectorial. Éste puede ser resuelto por un método numérico como el *Runge-Kutta (RK)* de 4º orden. La forma del método para cada paso será la clásica de un método RK de 4º orden cómo el mostrado en [4, pág. 746]:

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)h$$

Con:

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{F}(\vec{y}_i) \\ \vec{k}_2 &= \vec{F}(\vec{y}_i + \frac{1}{2}\vec{k}_1h) \\ \vec{k}_3 &= \vec{F}(\vec{y}_i + \frac{1}{2}\vec{k}_2h) \\ \vec{k}_4 &= \vec{F}(\vec{y}_i + \vec{k}_3h) \end{aligned}$$

Siendo h el tamaño de paso en s.

Para definir los valores iniciales de \vec{y} (i=1):

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} V_0 \cos(\varphi) \\ V_0 \text{sen}(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo V_0 la velocidad de salida del proyectil del cañón (en m/s, depende del cañón, del proyectil que cargue y de la carga de pólvora que se esté utilizando). φ es el ángulo de tiro del cañón respecto al eje X de nuestro sistema de referencia.

$$p_1 = \frac{2 * \pi * V_0}{N * d}$$

Siendo N una variable que depende del cañón y que es el número de calibres por vuelta en el rayado del ánima. Por último, la posición inicial del proyectil es la boca del cañón que coincide con el origen de coordenadas:

$$\vec{r}_1 = \vec{0}$$

4.2 Convergencia

Se ha integrado la trayectoria de tiro parabólico en el vacío (sin resistencia) y el método es exacto debido a su propia formulación. En el caso general con efectos aerodinámicos no existe una solución exacta con la que comprobar por lo que se ha realizado un análisis de convergencia. Se ha monitorizado la solución numérica con pasos de tiempo progresivamente más cortos. Si el método ofrece una convergencia aceptable con tamaños de paso asequibles para nuestra computadora concluiremos que el método es aceptable. Para ello se escoge un conjunto proyectil-cañón con unas variables iniciales (V_0 , N , d , m e I_x), la localización del emplazamiento (λ , ϑ) y el ángulo de tiro (φ). En este trabajo, se utilizará el proyectil *M107* de 155 mm del que se ha podido obtener datos técnicos relativamente fiables. Tiraremos con una localización elegida al azar y con condiciones de viento y humedad inexistentes. Hay que destacar que comprobar la convergencia de un método no prueba la validez del modelo físico, sino la del modelo numérico escogido. Si el método es convergente tenderá a una solución única que puede no ser fiel con la realidad física debido a las aproximaciones del modelo matemático, pero que sí tenderá a la solución exacta de las ecuaciones diferenciales.

V_0	N	d	m	I_x
294 m/s	20 calibres/vuelta	155 mm.	43.09 kg.	0.146 kg*m ²

Tabla 3: Parámetros del proyectil *M107* en el obús *155/39 ATP*. Carga 3W.

λ	ϑ	φ
40°	10°	30°

Tabla 4: Parámetros de situación del sitio de tiro e inclinación del cañón.

La tabla de convergencia obtenida es la siguiente:

Tamaño de paso, h (s.)	Alcance (m.)	Tiempo de vuelo (s.)	Deriva final (m.)	Ordenada máxima (m.)
0,00001	6414,7	28,6209	88,9821	1003,5
0,0001	6414,7	28,621	88,9821	1003,5
0,001	6414,7	28,6219	88,9821	1003,5
0,01	6414,7	28,6309	88,9825	1003,5
0,1	6414,7	28,7208	88,9859	1003,5
1	6413,1	29,6134	88,9929	1003,5
10	6299	38,1062	87,5352	923,4525

Tabla 5: Tabla de convergencia.

Como podemos observar, el método escogido ofrece una convergencia excelente, siendo válido el tamaño de paso para obtener una precisión aceptable hasta la magnitud del segundo (magnitud muy alta teniendo en cuenta el tiempo de vuelo del proyectil, que es de unos 29 segundos). Vemos que a partir de un tamaño de paso de 0.01 segundos, el método ofrece aumentos en la precisión marginales que no compensan el tiempo de computación elevado que requieren los tamaños de paso asociados. Para tener una medida de estos tiempos de computación diremos que $h=0.00001$, la menor de todas, exige un tiempo de unos 5 minutos hasta llegar a la solución mientras que con un tamaño de paso de 0.01 segundos, el tiempo de cálculo es de unos 3 segundos. Por lo tanto, y teniendo esto en cuenta, elegimos como tamaño de paso para nuestro problema $h=0.01$ segundos.

6. RESULTADOS

En esta sección del trabajo mostraremos los resultados obtenidos por nuestro programa de cálculo siguiendo las ecuaciones previamente mostradas, comparándolos con las trayectorias obtenidas de las tablas de tiro para nuestro proyectil del Ejército Español. Trabajaremos con el proyectil *M101* de 155 mm. y de la bibliografía obtendremos los parámetros del mismo necesario para resolver el problema (masa, momento de inercia, coeficientes aerodinámico, etc.) Este proyectil será disparado por el obús *155/39 ATP*. Todos los coeficientes aerodinámicos han sido extraídos de [5] y [6].

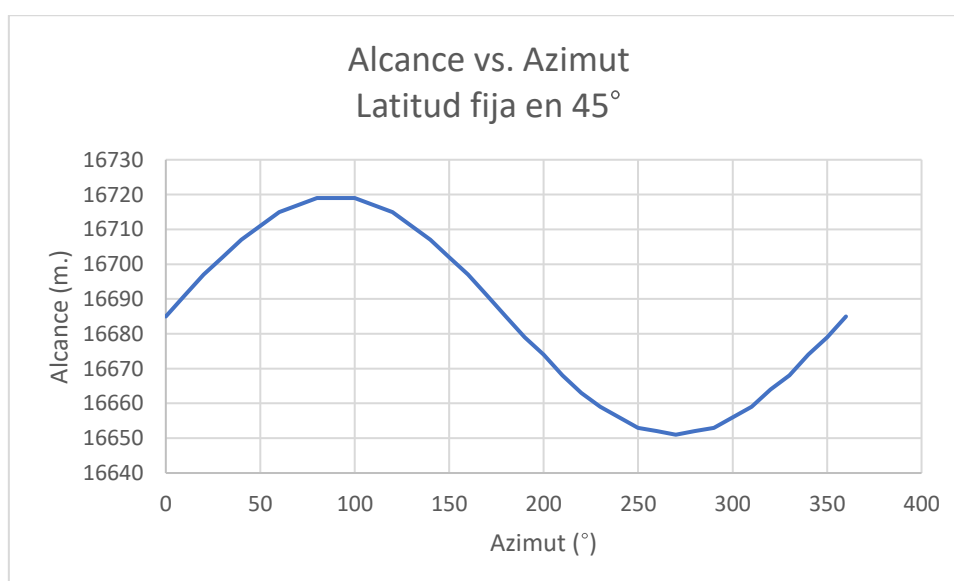
Masa, m	Momento de inercia, I_x	Diámetro nominal, d	Nº de calibres por vuelta en el rayado del tubo
43.09 kg.	0.146 kg*m ²	0.155 m.	20

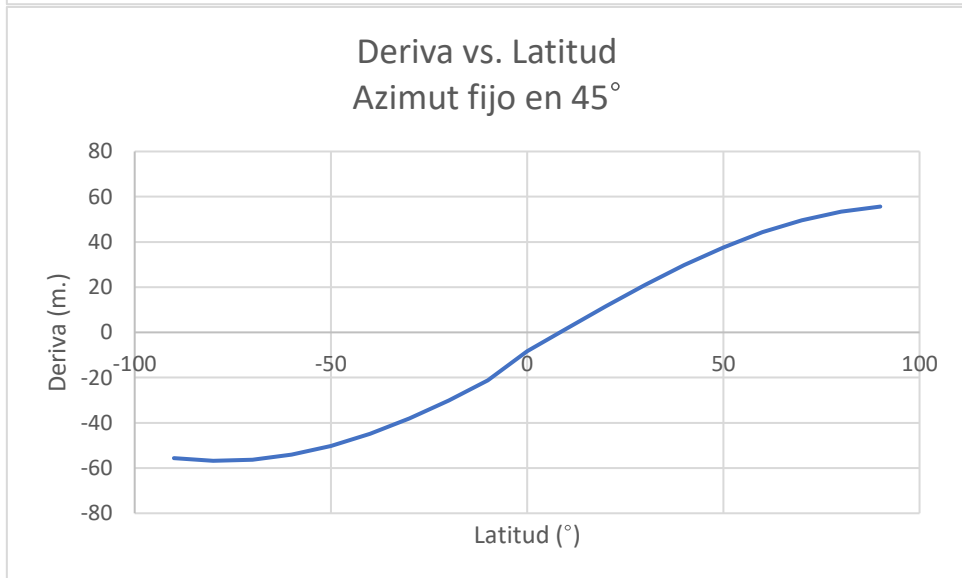
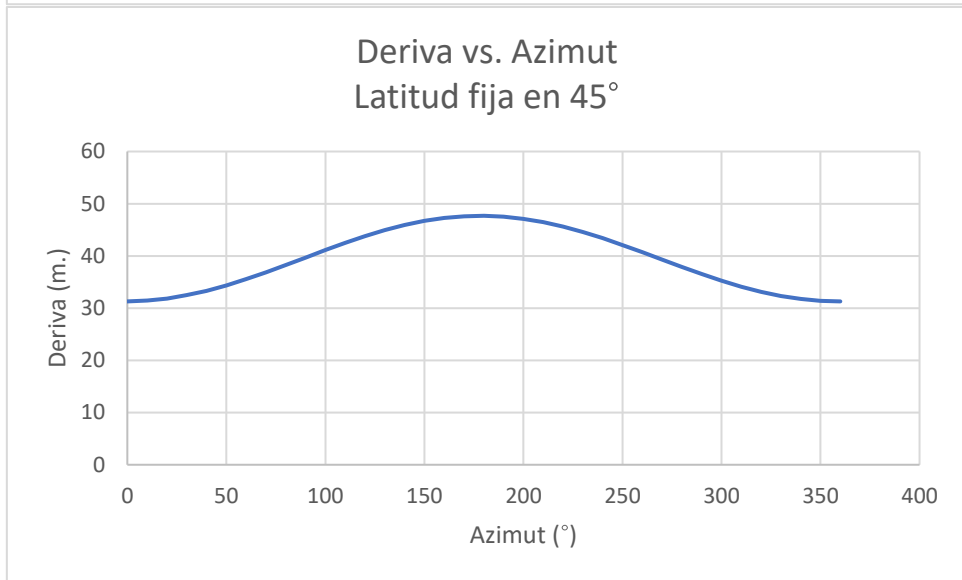
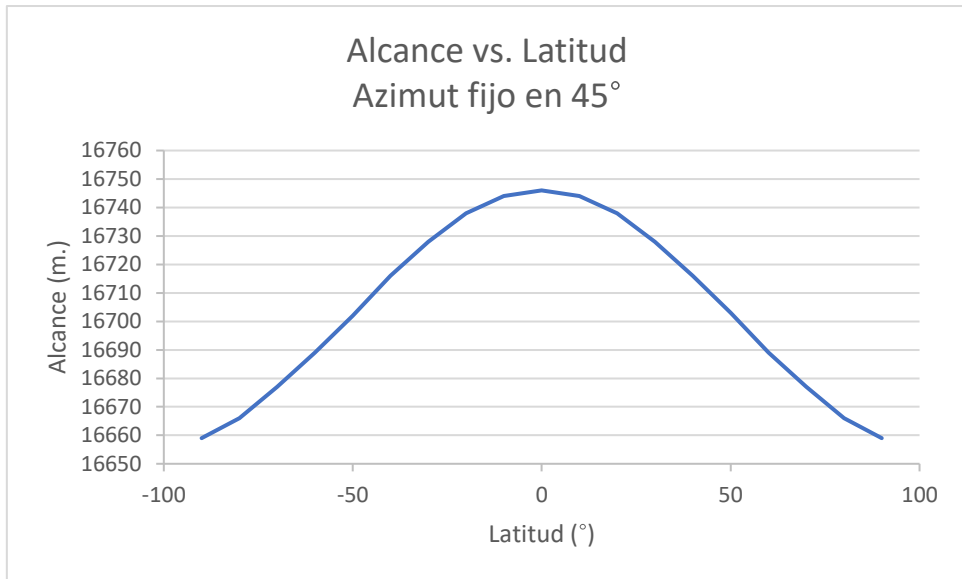
Tabla 6: Parámetros del conjunto proyectil-obús.

6.1 Magnitud e importancia de los diferentes efectos

Antes de comenzar a resolver el problema llevaremos a cabo un pequeño estudio sobre el peso de cada uno de los efectos físicos influyentes sobre el mismo. Por efectos físicos nos referimos a la existencia o no de fuerza de Coriolis, fuerza centrífuga *del proyectil*, deriva tabular y viento. Tiraremos con la carga supersónica 8 (que ofrece una velocidad de salida en la boca del cañón de 681 m/s) y con un ángulo de elevación de 30°. Procederemos a aislar cada efecto físico para comprobar su importancia en el problema.

- *Fuerza de Coriolis*: El orden de magnitud de la aceleración de Coriolis es $\sim \omega \cdot v$ y por tanto la deriva será de orden $\sim \frac{1}{2} \omega \cdot v \cdot t_{vuelo}^2$. Tomando $v \sim 400$ m/s y $t_{vuelo} \sim 50$ s se obtiene una deriva del orden de 60 metros que concuerda con lo observado en órdenes de magnitud. Variando la latitud y el azimut de tiro, se observan las variaciones en alcance y deriva que sufre la trayectoria.





Figs. 19, 20, 21 y 22: Variación del alcance y la deriva respecto al azimut de tiro y la latitud.

- *Fuerza centrífuga sufrida por el proyectil:* El módulo de la aceleración provocada por esta fuerza es aproximadamente de $\omega^2 \cdot r$. Tomando la magnitud r como unos kilómetros, la magnitud de esta fuerza es aproximadamente de 10^{-5} , lo que producirá derivas y cambios en el alcance ínfimos, en torno a 10^{-3} m. Tirando con el azimut y latitud donde este módulo es máximo ($\lambda=45^\circ$ y $\vartheta=45^\circ$):

	$\lambda=45^\circ$ y $\vartheta=45^\circ$
Alcance (m.)	16044
Deriva (m.)	0.0132

Tabla 7: Efecto de la fuerza centrífuga del proyectil en el problema.

Observamos que se produce una deriva pequeñísima para un alcance muy grande. Para alcances menores la fuerza centrífuga del proyectil se hace menor aún. Su influencia en el alcance es ínfima también. Incluimos esta fuerza en el problema por interés académico.

- *Deriva tabular:* Esta deriva es introducida en el problema por los efectos aerodinámicos y es de esperar que introduzca grandes valores de deriva. No tiene dependencia con λ o ϑ .

	Trayectoria solo Resistencia	Trayectoria con todos los efectos aerodinámicos
Alcance (m.)	16044	16080
Deriva (m.)	0	336.84
Tiempo de vuelo (s.)	49.0845	49.2556
Ordenada máxima (m.)	3165.8	3171.8

Tabla 8: Efecto de la deriva tabular en el problema.

Como podemos observar, este efecto sí que introduce grandes derivas (del orden de centenares de metros a largos alcances), mientras que mantiene el alcance y la ordenada máxima más o menos constantes, sin introducir grandes cambios. Es pues un efecto muy importante a tener en cuenta.

- *Viento:* Por último, probaremos la influencia del viento en el problema. Es evidente que el viento introducirá cambios en la trayectoria en el sentido en el que sopla. Para un viento de cola y lateral sin componente vertical *de perfil constante* (lo usual) en torno a los 50 km/h como:

$$W = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} m/s$$

	Trayectoria sin viento	Trayectoria con viento
Alcance (m.)	16044	16558
Deriva(m.)	0	195.08
Tiempo de vuelo (s.)	49.0845	49.2647
Ordenada máxima (m.)	3165.8	3181.8

Tabla 9: Efecto del viento en la trayectoria.

Como podemos observar, incluso vientos más o menos pequeños pueden introducir grandes variaciones en alcance y deriva.

6.2 Comparación con las tablas de tiro

Compararemos los resultados obtenidos con nuestro método respecto a los que encontramos en las tablas de tiro en 3 casos diferentes: carga subsónica, carga transónica y carga supersónica. En todos los casos introduciremos un viento de unos 50 km/h como el introducido anteriormente. Supondremos una temperatura del propulsante y un peso del proyectil estándar y condiciones de humedad 0. La milésima artillera es un ángulo empleado en tiro de artillería tal que una vuelta completa sobre la circunferencia corresponde a 6400‰ de la misma manera que en grados sexagesimales una vuelta completa corresponde a 360°.

Caso 1: Carga subsónica 3G ($V_0 = 273 \frac{m}{s}$), $\lambda=4^\circ$, $\vartheta=0^\circ$ (Dirección Norte) y $\varphi=112.1$ mils.

	Alcance (m.)	Tiempo de vuelo (s.)	Ordenada máxima (m.)	Deriva total (m.)
Trayectoria calculada	1602.4	6.08	45.07	5.91
Tablas de tiro	1608.16	6	45.6	5.31
Error relativo	-0.35%	1.33%	-1.16%	11.2%

Tabla 10: Comparación de trayectorias subsónicas entre nuestro cálculo y el de las tablas de tiro.

Caso 2: Carga trans-sónica 5W ($V_0 = 394 \frac{m}{s}$), $\lambda=30^\circ$, $\vartheta=90^\circ$ (Dirección Este) y $\varphi=224$ mils.

	Alcance (m.)	Tiempo de vuelo (s.)	Ordenada máxima (m.)	Deriva total (m.)
Trayectoria calculada	5239.2	16.12	319.70	54.35
Tablas de tiro	5137.7	15.9	315	54.59
Error relativo	1.97%	1.38%	1.49%	-0.44%

Tabla 11: Comparación de trayectorias trans-sónicas entre nuestro cálculo y el de las tablas de tiro.

Caso 3: Carga supersónica 8 ($V_0 = 681 \frac{m}{s}$), $\lambda=50^\circ$, $\vartheta=180^\circ$ (Dirección Sur) y $\varphi=588.8$ mils.

	Alcance (m.)	Tiempo de vuelo (s.)	Ordenada máxima (m.)	Deriva total (m.)
Trayectoria calculada	17293	53.48	3717.5	666.5
Tablas de tiro	17380.34	53.4	3715.6	634.91
Error relativo	-0.5%	-0.15%	-0.51%	-4.9%

Tabla 12: Comparación de trayectorias supersónicas entre nuestro cálculo y el de las tablas de tiro.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha acometido la integración numérica de la trayectoria de proyectiles de artillería. Para ello primero se han formulado las ecuaciones de movimiento del proyectil teniendo en cuenta los efectos aerodinámicos, de rotación y esfericidad de la Tierra así como la variación de las propiedades de la atmósfera.

A continuación se ha puesto a punto un método de integración numérica de las ecuaciones diferenciales que se ha programado en *MatLab*. Posteriormente se han realizado simulaciones de tiro observando los efectos de los distintos términos en la trayectoria.

Para finalizar se ha accedido a tablas de tiro del ejército con las que se han comparado los resultados. Del trabajo realizado se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La convergencia del método numérico parece suficientemente probada y se considera adecuada a las necesidades del problema.
- El modelo reproduce consistente y correctamente los efectos físicos contenidos en las ecuaciones, en particular los debidos a las correcciones por rotación y esfericidad de la tierra para distintas localizaciones y azimuts de tiro.
- Los efectos aerodinámicos han sido incluidos mediante la aproximación de masa puntual modificada que según la literatura parece suficiente para resolver este tipo de problemas. En las comparaciones realizadas con las tablas de tiro del ejército los resultados muestran en general errores inferiores al 2% en alcance, tiempo de vuelo y ordenada máxima y algo mayores en deriva.
- Estos errores, aun siendo aceptables desde el punto de vista ingenieril, no lo son a efectos de utilización del modelo como dirección de tiro lo que requiere una precisión aún mayor.
- Los errores obtenidos se achacan a una deficiente caracterización del proyectil. No ha sido posible obtener los datos exactos correspondientes al proyectil *M107* con los que se confeccionaron las tablas de tiro del ejército.

Se deja para un trabajo posterior la investigación de las correcciones empíricas que parece evidente se utilizan en la confección de las tablas de tiro en uso en el Ejército así como el desarrollo de un modelo de 6 GDL con el que comparar la aproximación de masa puntual modificada.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A.E. González Morales, *Fundamentos de Balística*. 2000.
- [2] R.L. McCoy, *Modern Exterior Ballistics*, 2 ed. Schiffer Publishing Ltd, 1998.
- [3] K.L. Nielsen y J.L. Synge, “On the motion of a spinning shell,” en *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 4, No. 3, 1946.
- [4] S.C. Chapra y R.P. Canale, *Métodos numéricos para ingenieros*, 6 ed. McGraw Hill, 2011.
- [5] H.E. Hudgins, “Aerodynamics, dimensions, inertial properties and performance of artillery projectiles,” Picatinny Arsenal, Dover, New Jersey, Estados Unidos, Enero 1977.
- [6] C.T. Odom, “A Drag Coefficient, K_D , Based On The 155mm Shell, HE, M101,” Ballistic Research Laboratories, 1958.
- [7] T.W.B. Kibble, *Classical Mechanics*, 3 ed. Longman Scientific & Technical, 1985.

I. CORRECCIONES POR ESFERICIDAD DE LA TIERRA

En este anexo demostraremos las correcciones realizadas en nuestro trabajo por la esfericidad de la Tierra tanto en coordenadas como en la fuerza de la gravedad. Debemos advertir de que no realizaremos corrección alguna sobre el eje Z de nuestro sistema de referencia por considerar el recorrido sobre el mismo de nuestro proyectil insignificante *para estos efectos*. Seguiremos el método mostrado en [1].

I.I Corrección en coordenadas

Dado que la superficie de la Tierra no es plana habrá que realizar unas correcciones sobre el sistema de referencia final elegido para proyectar nuestro eje X rectilíneo sobre la superficie curvilínea de la Tierra y obtener de esta manera el alcance real de nuestro tiro. Además, la altura calculada en nuestro sistema de referencia no será la altura real sobre la superficie de la Tierra.

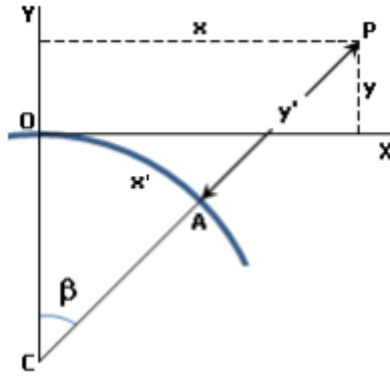


Fig. 23: Sistema de referencia y superficie de la Tierra.

En la Figura 23 se observa perfectamente el problema con el que contamos: Siendo O la boca del cañón, P la posición del proyectil en vuelo y C el centro de la Tierra está claro que la coordenada x (que es la que calculamos) no nos dará el alcance real sobre la superficie de la Tierra que será el arco OA denotado por x' . También vemos con facilidad que la coordenada y no nos da la altura real sobre la Tierra, siendo esta dada por la línea AP denotada por y' .

Suponiendo la Tierra como perfectamente esférica siendo R su radio y β un ángulo lo suficientemente pequeño:

$$\beta \cong \tan \beta = \frac{x}{R + y}$$

Por lo tanto:

$$x' = OA = R\beta = R \frac{x}{R + y}$$

Y:

$$y' = \overline{AP} = \overline{PC} - \overline{AC} = \frac{y + R}{\cos \beta} - R$$

Sabiendo que:

$$\frac{1}{\cos \beta} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \tan^2 \beta} \cong 1 + \frac{1}{2} \tan^2 \beta$$

$$y' = (y + R) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R + y} \right)^2 \right] - R$$

Es fácil de observar que estas correcciones empiezan a tener un peso importante a partir de los 10 kilómetros de alcance, donde se empiezan a observar correcciones en la componente y superiores a la decena de metros. Tradicionalmente estas correcciones han tenido un peso importante en tiro costero o naval con alcances superiores a los 40 kilómetros.

I.II Corrección en la fuerza de la gravedad

Dado que el vector gravedad \vec{g} siempre apunta (aproximadamente) hacia el centro de la Tierra conforme el proyectil en vuelo se vaya alejando de la boca del cañón, el vector \vec{g} comenzará progresivamente a desalinearse del eje Y de nuestro sistema de referencia y a presentar una proyección sobre el eje X . Esto se ve fácilmente en la Figura 24 donde observamos que el vector gravedad en el momento de la salida del proyectil de la boca del cañón es \vec{g}_0 y sigue la dirección y sentido de la recta \overline{OC} y que por lo tanto solo presenta componentes en el eje Y de nuestro sistema de referencia. Sin embargo, cuando el proyectil se encuentra en la posición P , el vector gravedad es \vec{g}_P y sigue la recta \overline{PA} , teniendo componentes en X e Y .

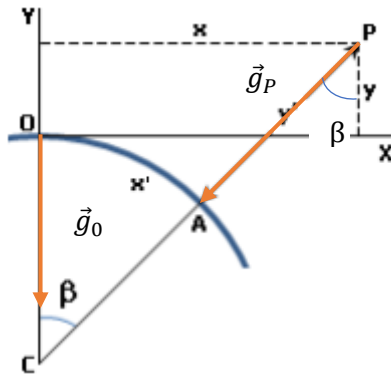


Fig. 24: Componentes del vector gravedad en distintos puntos de la trayectoria.

Para averiguar estas componentes, siendo g el módulo de la fuerza de la gravedad al nivel del mar actualizado con la latitud λ del sitio de tiro y con la altura y' sobre la superficie de la Tierra, las proyecciones sobre ambos ejes serán:

- Sobre \overline{OX} : $g \cdot \sen \beta = g \frac{x}{R+y'}$
- Sobre \overline{OY} : $g \cdot \cos \beta = g \frac{R+y}{R+y'}$

II. DEMOSTRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

En este anexo se demostrarán las ecuaciones de movimiento asociadas a la Trayectoria de Masa Puntual.

II.I Ecuaciones de movimiento de la Trayectoria de Masa Puntual

Tendremos en cuenta dos sistemas de referencia: el sistema inicial ECI que como sabemos tiene su centro en el centro de la Tierra C_T y es inercial, y el sistema final que tiene su centro en la boca del cañón B y es no inercial. Definiremos tres vectores: el vector \vec{R} que une los centros de ambos sistemas de referencia cuyo módulo es el radio de la Tierra supuesta esta una esfera perfecta, el vector \vec{r}' que une el centro de los ejes inerciales con el proyectil en vuelo y el vector \vec{r} que une el centro de los ejes no inerciales con el proyectil.

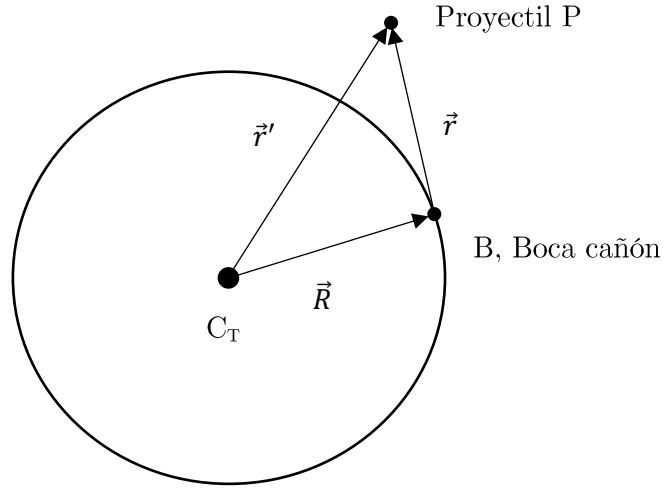


Fig. 25: Los 3 vectores definidos.

Por lo tanto $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}$. Definiendo de manera más precisa estos vectores:

- $\vec{r}' = \overline{C_T P}$ en el sistema de referencia ECI (no acelerado)
- $\vec{R} = \overline{C_T B}$ en el sistema de referencia ECI (no acelerado)
- $\vec{r} = \overline{B P}$ en el sistema de referencia final (acelerado al girar en torno a C_T con $\vec{\omega}$)

Sabemos que las aceleraciones *reales* que sufre el proyectil (gravedad y aerodinámica) corresponderán exactamente con la segunda derivada del vector \vec{r}' precisamente porque el punto C_T (sistema ECI) desde el que observamos el proyectil no está acelerado (sistema *inercial*). Si observáramos el proyectil desde el punto B (sistema final) la segunda derivada del vector \vec{r} es evidente que no coincidirá con las aceleraciones *reales* que sufre el proyectil porque el sistema está acelerado al girar en torno a C_T . Por ejemplo, visto desde el sistema final, un proyectil sufre una deriva que no puede ser explicada por ninguna de las fuerzas teóricas propuestas (gravedad y aerodinámica). Para explicar todas las aceleraciones sufridas por el proyectil desde el sistema de referencia final habrá que introducir un grupo de fuerzas ficticias llamadas fuerzas *inerciales* producidas por la *no inercialidad* del sistema. Así que en un sistema *no inercial* como el sistema final:

$$\vec{F}_{total} = \underbrace{\vec{F}_{aerodinámicas} + \vec{F}_{gravedad}}_{reales} + \underbrace{\vec{F}_{inerciales}}_{ficticias}$$

Antes de comenzar la demostración recordaremos que la derivada temporal de un vector cualquiera $\vec{u} = \overline{OP}$ visto desde un sistema de referencia 123 rotante con $\vec{\omega}_{123}$ es:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \underbrace{\left. \frac{d\overline{OP}}{dt} \right|_{123}}_{\text{Velocidad relativa del vector en 123}} + \vec{\omega}_{123} \times \overline{OP}$$

Por lo tanto, y definiendo los vectores \vec{r}' y \vec{R} en el sistema no inercial inicial ECI y \vec{r} en nuestro sistema de referencia final:

- $\vec{r}' = x' \cdot \hat{i}' + y' \cdot \hat{j}' + z' \cdot \hat{k}'$
- $\vec{R} = X \cdot \hat{i} + Y \cdot \hat{j} + Z \cdot \hat{k}$
- $\vec{r} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$

Comenzamos:

$$\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r}$$

La velocidad *real* del proyectil será la que se vea desde nuestro sistema de referencia inicial ECI, ya que éste es *inercial*. Así que:

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{x}' \cdot \hat{i}' + \dot{y}' \cdot \hat{j}' + \dot{z}' \cdot \hat{k}' = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Desarrollando:

$$\vec{v}' = \underbrace{(\dot{X} \cdot \hat{i} + \dot{Y} \cdot \hat{j} + \dot{Z} \cdot \hat{k})}_{\frac{d\vec{R}}{dt}} + \underbrace{[(\dot{x} \cdot \hat{i} + \dot{y} \cdot \hat{j} + \dot{z} \cdot \hat{k}) + (x \cdot \dot{\hat{i}} + y \cdot \dot{\hat{j}} + z \cdot \dot{\hat{k}})]}_{\frac{d\vec{r}}{dt}}$$

$\frac{d\vec{R}}{dt}$ corresponde a la velocidad entre los ejes de referencia considerados. El primer término de $\frac{d\vec{r}}{dt}$ corresponde a la velocidad relativa lineal entre la partícula P y el sistema de referencia final *no inercial*, mientras que el segundo término corresponde a la corrección debida a la rotación de los ejes *no inerciales* con el giro de la Tierra. Por lo tanto:

$$\vec{v}' = \vec{V} + \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Siendo ω el giro de la Tierra definido en el capítulo 2 como ψ_T . La aceleración del proyectil P será:

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} \\ \vec{a}' &= \underbrace{\frac{d\vec{V}}{dt}}_{\vec{A}} + \underbrace{\frac{d}{dt}(\dot{x} \cdot \hat{i} + \dot{y} \cdot \hat{j} + \dot{z} \cdot \hat{k})}_{\frac{d\vec{v}}{dt}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)}_{\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt}} \\ \vec{a}' &= \underbrace{\frac{d\vec{V}}{dt}}_{\vec{A}} + \underbrace{\vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{v}}_{\frac{d\vec{v}}{dt}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r})}_{\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt}} \end{aligned}$$

Calculando y reordenando términos (la Tierra no sufre aceleración angular y por lo tanto $\vec{\omega}$ es 0):

$$\vec{a}' = \vec{A} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a}$$

El término \vec{A} corresponde con la aceleración entre los sistemas de referencia escogidos y es $\omega \times \omega \times R$. Como se muestra en [7, pág 113], esta aceleración se encuentra ya incluida en la gravedad aparente, \vec{g}_{ap} , en la superficie de la Tierra y por tanto no la consideraremos explícitamente. Esta aceleración es la responsable del achatamiento de la Tierra por los polos. En la siguiente figura se explica su efecto de manera esquemática.

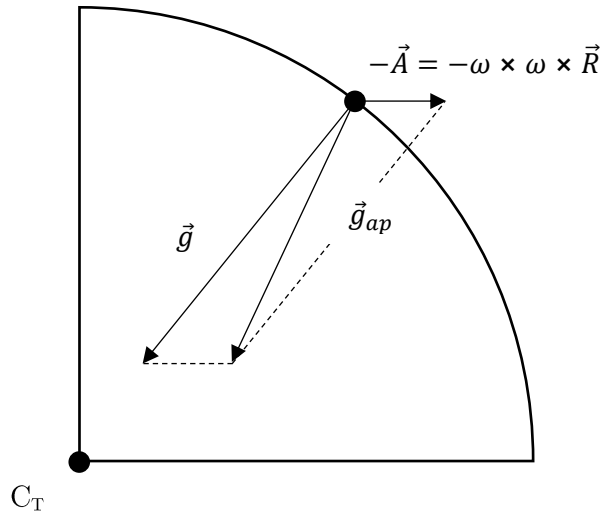


Fig. 26: Gravedad aparente.

Por lo tanto, el vector gravedad que midamos en la superficie de la Tierra:

1. No corresponde exclusivamente a la gravedad, si no que incluye también la aceleración \vec{A} .
2. Y como consecuencia del punto anterior *no apunta exactamente hacia el centro de la Tierra*, aunque esa desviación suele ser menor que $0^\circ 6'$.

Siguiendo con las ecuaciones previamente mostradas y eliminando el término \vec{A} :

$$\vec{a}' = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a}$$

\vec{a} es la aceleración del proyectil respecto del sistema de referencia final, es decir, la aceleración que vemos desde la boca del cañón, y la que es de interés físico para nuestro problema. \vec{a}' es la aceleración real sufrida por nuestro proyectil formada por la aceleración de la gravedad y por las aceleraciones debidas a los efectos aerodinámicos, que en esta trayectoria solo están compuestas por la aceleración de arrastre.

$$\vec{a} = \vec{a}' - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} - 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{g} + \vec{a}_D}_{\text{gravedad+aceleración de arrastre aerodinámica}} - \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}}_{\text{Aceleración centrífuga}} - \underbrace{2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}}_{\text{Aceleración Coriolis}}$$

Finalmente, y tal y como se ha dicho al comienzo del presente anexo, contaremos con una aceleración total formada por aceleraciones reales (arrastre+gravedad) y por unas fuerzas que no son reales llamadas *inerciales* que existen para corregir la *no inercialidad* del sistema de referencia en el que trabajamos (Coriolis y centrífuga).

C. ENSAYOS

En este anexo se muestran algunos ensayos suplementarios a los mostrados en la memoria. Seguiremos utilizando las mismas cargas subsónica, trans-sónica y supersónica. Evaluaremos cada carga para latitudes de 0°, 40° y 70°. Para las latitudes 0° y 70° evaluaremos el tiro para un azimut de 0°, mientras que para la latitud de 45° evaluaremos el tiro para azimuts de 0° (N), 90° (E), 180° (S) y 270° (O).

$$\text{C.1 Carga subsónica 3G} \left(V_0 = 273 \frac{m}{s}, \varphi = 112.1 \text{ mil. } W = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \frac{m}{s} \right)$$

	Alcance (m.)	Tiempo de vuelo (s.)	Ordenada máxima (m.)	Deriva (m.)
$\lambda=0^\circ, \vartheta=0^\circ$	1605.8	6.09	45.17	5.47
$\lambda=70^\circ, \vartheta=0^\circ$	1598.6	6.06	44.96	6.11
$\lambda=40^\circ, \vartheta=0^\circ$	1602.4	6.08	45.07	5.91
$\lambda=40^\circ, \vartheta=90^\circ$	1607.1	6.1	45.21	5.97
$\lambda=40^\circ, \vartheta=180^\circ$	1602.4	6.08	45.07	5.95
$\lambda=40^\circ, \vartheta=270^\circ$	1597.7	6.06	44.93	5.94

Tabla 13: Ensayos para la carga subsónica.

	Alcance (m.)	Tiempo de vuelo (s.)	Ordenada máxima (m.)	Deriva (m.)
$\lambda=0^\circ, \vartheta=0^\circ$	1608.1	6	45.6	4.81
$\lambda=70^\circ, \vartheta=0^\circ$	1608.1	6	45.6	5.48
$\lambda=40^\circ, \vartheta=0^\circ$	1608.1	6	45.6	5.31
$\lambda=40^\circ, \vartheta=90^\circ$	1601.88	6	45.6	5.29
$\lambda=40^\circ, \vartheta=180^\circ$	1608.1	6	45.6	5.32
$\lambda=40^\circ, \vartheta=270^\circ$	1612.81	6	45.6	5.34

Tabla 14: Resultados de las tablas de tiro.

	Error en alcance	Error en tiempo de vuelo	Error en ordenada máxima	Error en deriva
$\lambda=0^\circ, \vartheta=0^\circ$	-0.14%	1.50%	-0.94%	13.72%
$\lambda=70^\circ, \vartheta=0^\circ$	-0.59%	1.00%	-1.40%	11.50%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=0^\circ$	-0.35%	1.33%	-1.16%	11.30%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=90^\circ$	0.33%	1.67%	-0.86%	12.85%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=180^\circ$	-0.35%	1.33%	-1.16%	11.84%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=270^\circ$	-0.94%	1.00%	-1.47%	11.24%

Tabla 15: Errores entre nuestros ensayos y las tablas de tiro.

C.2 Carga trans-sónica 5W $\left(v_0 = 394 \frac{m}{s}. \varphi = 224 \text{ mil. } W = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \frac{m}{s} \right)$

	Alcance (m.)	Tiempo de vuelo (s.)	Ordenada máxima (m.)	Deriva (m.)
$\lambda=0^\circ, \vartheta=0^\circ$	5253.7	16.1	320.07	50.55
$\lambda=70^\circ, \vartheta=0^\circ$	5232.8	16.03	318.75	56.07
$\lambda=40^\circ, \vartheta=0^\circ$	5243.9	16.07	319.45	54.31
$\lambda=40^\circ, \vartheta=90^\circ$	5261	16.13	320.6	55
$\lambda=40^\circ, \vartheta=180^\circ$	5243.7	16.07	319.44	54.97
$\lambda=40^\circ, \vartheta=270^\circ$	5226.7	16.01	318.3	54.29

Tabla 16: Ensayos para la carga trans-sónica.

	Alcance (m.)	Tiempo de vuelo (s.)	Ordenada máxima (m.)	Deriva (m.)
$\lambda=0^\circ, \vartheta=0^\circ$	5155.11	15.9	315	51.73
$\lambda=70^\circ, \vartheta=0^\circ$	5155.11	15.9	315	57.4
$\lambda=40^\circ, \vartheta=0^\circ$	5155.11	15.9	315	55.7
$\lambda=40^\circ, \vartheta=90^\circ$	5139.71	15.9	315	55.67
$\lambda=40^\circ, \vartheta=180^\circ$	5155.11	15.9	315	56.8
$\lambda=40^\circ, \vartheta=270^\circ$	5170.51	15.9	315	56.46

Tabla 17: Resultados de las tablas de tiro.

	Error en alcance	Error en tiempo de vuelo	Error en ordenada máxima	Error en deriva
$\lambda=0^\circ, \vartheta=0^\circ$	1.91%	1.26%	1.61%	-2.28%
$\lambda=70^\circ, \vartheta=0^\circ$	1.51%	0.82%	1.19%	-2.32%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=0^\circ$	1.72%	1.07%	1.41%	-2.50%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=90^\circ$	2.36%	1.45%	1.78%	-1.20%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=180^\circ$	1.72%	1.07%	1.41%	-3.22%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=270^\circ$	1.09%	0.69%	1.05%	-3.84%

Tabla 18: Errores entre nuestros ensayos y las tablas de tiro.

C.3 Carga supersónica 8 $\left(V_0 = 681 \frac{m}{s}, \varphi = 588.8 \text{ mil. } W = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \frac{m}{s} \right)$

	Alcance (m.)	Tiempo de vuelo (s.)	Ordenada máxima (m.)	Deriva (m.)
$\lambda=0^\circ, \vartheta=0^\circ$	17320	53.61	3723	603.63
$\lambda=70^\circ, \vartheta=0^\circ$	17267	53.4	3711.8	663.88
$\lambda=40^\circ, \vartheta=0^\circ$	17295	53.51	3717.8	642.92
$\lambda=40^\circ, \vartheta=90^\circ$	17333	53.69	3729.6	655.94
$\lambda=40^\circ, \vartheta=180^\circ$	17292	53.5	3717.5	661.01
$\lambda=40^\circ, \vartheta=270^\circ$	17253	53.33	3705.9	648.03

Tabla 19: Ensayos para la carga supersónica.

	Alcance (m.)	Tiempo de vuelo (s.)	Ordenada máxima (m.)	Deriva (m.)
$\lambda=0^\circ, \vartheta=0^\circ$	17380.34	53.4	3715.6	647.6
$\lambda=70^\circ, \vartheta=0^\circ$	17380.34	53.4	3715.6	718.76
$\lambda=40^\circ, \vartheta=0^\circ$	17380.34	53.4	3715.6	691.38
$\lambda=40^\circ, \vartheta=90^\circ$	17344.05	53.4	3715.6	697.04
$\lambda=40^\circ, \vartheta=180^\circ$	17380.34	53.4	3715.6	712.9
$\lambda=40^\circ, \vartheta=270^\circ$	17416.53	53.4	3715.6	709.32

Tabla 20: Resultados de las tablas de tiro.

	Error en alcance	Error en tiempo de vuelo	Error en ordenada máxima	Error en deriva
$\lambda=0^\circ, \vartheta=0^\circ$	-0.35%	0.39%	0.20%	-6.79%
$\lambda=70^\circ, \vartheta=0^\circ$	-0.65%	0%	-0.10%	-7.64%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=0^\circ$	-0.49%	0.21%	0.06%	-7.01%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=90^\circ$	-0.06%	0.54%	0.38%	-5.90%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=180^\circ$	-0.51%	0.19%	0.05%	-7.28%
$\lambda=40^\circ, \vartheta=270^\circ$	-0.94%	-0.13%	-0.26%	-8.64%

Tabla 21: Errores entre nuestros ensayos y las tablas de tiro.