

Sistemas complejos: Distribuciones de equilibrio en sistemas económicos y físicos



Iván Allué Lacasta
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Ricardo López Ruiz
21 de junio de 2017

Prólogo

En el presente trabajo, titulado *Sistemas complejos: Distribuciones de equilibrio en sistemas económicos y físicos*, se analizan y simulan diferentes distribuciones de riqueza o velocidad. Los intercambios de dinero (o energía) entre los diversos agentes (o partículas) se pueden tratar como un sistema complejo ya que como resultado de las interacciones, surgen nuevas propiedades que no se pueden explicar a partir de las propiedades de cada agente (o partícula) independientemente. Para el estudio de sistemas financieros complejos aparece un campo de investigación científico, la *Econofísica*.

El ensayo está dividido en tres capítulos. En el primer capítulo nos centramos en el estudio de diferentes sistemas multi-agente y multi-partícula de los que se deduce por métodos geométricos diferentes distribuciones. Este estudio se realiza bajo la hipótesis de equiprobabilidad, esto es, la probabilidad de encontrar un agente con cierto dinero es la misma para todo agente del sistema, es decir, que ningún agente tiene privilegios sobre los demás. En el segundo capítulo tratamos la derivación de las distribuciones vistas en el primer capítulo desde modelos de operadores. Cabe destacar, que a diferencia del primer capítulo, tratamos con distribuciones fuera de equilibrio, las cuales, al aplicarle el operador, tienden al punto fijo. En el último capítulo realizamos diferentes simulaciones de los dos operadores tratados anteriormente.

Esta tesis contiene en la parte final una lista bibliográfica de los libros y artículos utilizados.

Las simulaciones obtenidas en el último capítulo se han realizado mediante los lenguajes de programación Octave y Wolfram Mathematica.

Me gustaría dar las gracias a mi tutor del trabajo, Ricardo López, por su excelente orientación y disponibilidad durante todo el proceso de realización del trabajo. También merecen un especial agradecimiento mi familia, en particular mis padres: vuestro apoyo, como siempre, me ha sido de gran ayuda, no sólo para redactar este ensayo si no también a lo largo de toda la carrera.

Summary

The economy governs many aspects of our personal and social life. So, it has always been a special interest in understanding their processes through models and processes that allow to explain and predict their behavior. But the economic interactions between the agents of a society are extremely numerous and varied, as well as a variety of very different times. A number of economic phenomena respond to what is known in physics under the name of nonlinear dynamics or dynamics of complex systems: systems whose collective behavior can not be explained from the simple overlap of its constituent parts. For example, complex systems are those that describe very remote situations of the equilibrium or those that show chaotic behaviors. It may be asked, therefore, if it is possible to apply methods of statistical physics to develop realistic and efficient economic models. In recent years, this novel field of scientific research that applies theories and methods to understand and solve problems in the economy and especially those involving stochastic and nonlinear dynamics, known as *Econophysics*, it has considerably improved our understanding of economic processes.

In this essay, we are going to present some complex systems with an almost trivial dynamics. In the first part of the first chapter, under the hypothesis equiprobability in the asymptotic equilibrium, it is shown that the (hyper)-planar geometry of an N-dimensional multiagent economic systems, both open and closed, implies the exponential (Boltzmann-Gibbs) wealth distribution. That is, the following equations

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = E \quad x_1 + x_2 + \dots + x_N \leq E$$

being x_i the amount of money in each agent and E the total amount of money, we obtain that the probability of finding an agent with money x is, in the asymptotic regime $N \rightarrow \infty$ (which implies $E \rightarrow \infty$),

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{\langle x \rangle} e^{-x/\langle x \rangle}$$

being $\langle x \rangle$ the mean money per agent.

In the second part of this chapter, under the hypothesis equiprobability too, it is displayed that the spherical geometry of a gas of particles which we treat it as a multi-particle systems, both open and closed system, implies the Gaussian (Maxwellian) distribution of velocities. That is, the following equations

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_N^2 = R^2 \quad p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_N^2 \leq R^2$$

being p_i the square root of the kinetic energy K_i and R^2 the total maximum energy, we obtain that the probability of finding a particle with energy p_i^2 is, in the asymptotic regime $N \rightarrow \infty$ (which implies $E \rightarrow \infty$),

$$\mathcal{P}(p) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} e^{-p^2/2\varepsilon}$$

being ε the mean energy per particle.

To finish this chapter we are interested in the same problem above presented but in a general way, under the hypothesis equiprobability too. That is, the following equation

$$x_1^b + x_2^b + \dots + x_N^b \leq E$$

being b a positive real constant and x_i a positive variable, we obtain that the probability of finding an agent with generic coordinate x is, in the asymptotic regime $N \rightarrow \infty$ (which implies $E \rightarrow \infty$),

$$\mathcal{P}(x) \approx \frac{1}{\langle x \rangle^{1/b}} e^{-x^b/b\langle x \rangle}$$

being $\langle x \rangle$ the mean value of x^b in the collectivity.

The second chapter presents two gas-like models which are displayed through different functional iteration models. In the first one, the gas-like model is

$$\begin{aligned} m'_i &= \varepsilon(m_i + m_j) & m'_j &= (1 - \varepsilon)(m_i + m_j) \\ & & i, j &= 1, \dots, N \end{aligned}$$

being N the number of economics agents and ε a random number in the interval $(0,1)$, where the agents (i, j) are randomly chosen. By numerical simulations, we can see that this model converges to an exponential (Boltzmann-Gibbs) distribution. We can regard this model as an evolution problem in the space of probability density functions, such as

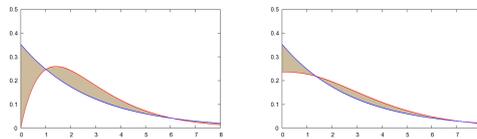
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^n(\mathcal{P}_0(m)) \rightarrow \mathcal{P}_f(m),$$

where an initial wealth distribution $\mathcal{P}_0(m)$ with a mean wealth value $\langle \mathcal{P}_0 \rangle$ evolves in the time under the action of an operator \mathcal{T} to asymptotically reach the equilibrium distribution $\mathcal{P}_f(m)$, that in this particular case is the exponential one which presents the same average value $\langle \mathcal{P}_0 \rangle = \langle \mathcal{P}_f \rangle$. Thus the question to answer is if it is possible to find \mathcal{T} and, if this is the case, how \mathcal{T} looks like.

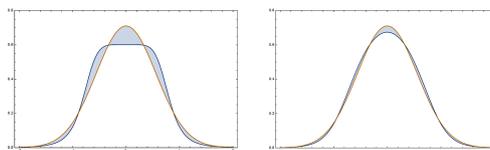
Finally, in this chapter we present a new model to explain the Maxwellian distribution as a limit point in the space of velocity distributions for a gas system evolving from any initial condition. We consider an ideal gas with particles of unity mass in the three-dimensional space. We are going to obtain an expression for the evolution operator \mathcal{T} such that conserves in time the energy and the null momentum of the gas. Moreover, for any initial velocity distribution, the system tends towards its equilibrium, that is, towards the Maxwellian velocity distribution.

In the last chapter, we simulate different probability distributions and we observe how, after applying the appropriate operator, they decay to the corresponding fixed point. Let's see an example of each one.

We consider the distribution $p(x) = \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}$ and the next graphics show how this distribution decays to exponential distribution.



We do the same for the Maxwellian distribution, having now $p(x) = \frac{3}{2^{2/3}\pi(1+4x^6)}$.



Índice general

Prólogo	III
Summary	V
1. Distribuciones de equilibrio en sistemas estadísticos: métodos geométricos	1
1.1. La distribución exponencial	1
1.1.1. Sistemas económicos multi-agente abiertos	2
1.1.2. Sistemas económicos multi-agente cerrados	3
1.2. La distribución Gaussiana	4
1.2.1. Sistemas multi-partícula abiertos	5
1.2.2. Sistemas multi-partícula cerrados	7
1.3. La distribución general e^{-x^b}	8
2. Distribuciones de equilibrio en sistemas estadísticos: modelos de operadores	11
2.1. La distribución exponencial	11
2.2. La distribución gaussiana	14
3. Simulación de los dos operadores anteriores	17
3.1. Ejemplos de la distribución de Boltzmann-Gibbs	17
3.2. Ejemplos de la distribución Maxwelliana	20
Bibliografía	25

Capítulo 1

Distribuciones de equilibrio en sistemas estadísticos: métodos geométricos

La física estadística trata con sistemas estadísticos en equilibrio. Dos distribuciones fundamentales para describir situaciones en equilibrio son la distribución de exponencial (Boltzmann-Gibbs) y la distribución Gaussiana (Maxwelliana). La primera representa la distribución de los estados de energía de un sistema y la segunda reproduce la distribución de velocidades de un gas ideal, el cuál es un gas compuesto por partículas que no interactúan entre sí. Pueden explicarse desde diferentes perspectivas. En la física del equilibrio, normalmente se obtienen desde el principio de máxima entropía [1]. En la física fuera de equilibrio, se han propuesto recientemente dos modelos no lineales que explican el decaimiento de cualquier distribución inicial hacia esos equilibrios asintóticos [2, 3].

En este capítulo, estas distribuciones se obtienen desde una interpretación geométrica de diferentes sistemas multi-agente desarrollados en el espacio de fases bajo la hipótesis de equiprobabilidad. Concretamente, un contexto económico es usado para ilustrar esta derivación. Entonces, consideramos un conjunto indeterminado de agentes que comercian y realizan un número de transacciones económicas en cada momento. Un tipo de modelos que consideran este desconocimiento asociado a los mercados son los modelos tipo-gas [4, 5]. Estos modelos aleatorios interpretan intercambios económicos de dinero entre agentes similar a colisiones en un gas donde las partículas comparten sus energías. Para explicar los dos comportamientos estadísticos mencionados anteriormente, no suponemos ninguna interacción entre agentes. Las limitaciones geométricas y la hipótesis de equiprobabilidad será suficiente para explicar estas distribuciones en una situación de equilibrio estadístico.

Por tanto, la distribución de Boltzmann-Gibbs se calcula en la Sección 1.1 desde las propiedades geométricas del volumen o de la superficie de un N -Simplex [6, 7]. En ambos casos, la motivación será un sistema económico multiagente con una economía abierta o cerrada, respectivamente. La distribución Maxwelliana se deriva en la Sección 1.2 desde argumentos geométricos sobre el volumen o superficie de una N -esfera [6, 8]. En este caso, la motivación será un sistema de gas multi-partícula en contacto con un depósito de calor (no aislado o sistema abierto) o con una energía fija (aislado o sistema cerrado), respectivamente. Y finalmente, en la Sección 1.3, la distribución general de equilibrio para un conjunto de muchos agentes interaccionando que obedecen a una restricción aditiva global es calculada también [6].

1.1. La distribución exponencial

La distribución exponencial está omnipresente en el marco de sistemas económicos multiagente. Normalmente, aparece como un estado de equilibrio en la evolución asintótica del tiempo. Hoy en día se sabe que la sociedad de las economías occidentales (capitalistas) pueden dividirse en dos grupos distintos si nos fijamos en la distribución de la riqueza (salarios, bienes,...) [9] Por un lado, el 95% de la población, que pertenecen a las clases económicas medias y bajas, distribuyen su riqueza según una distribución exponencial. Por otro lado, el 5% restante, con ingresos privilegiados, distribuyen su riqueza

según una distribución tipo ley de potencia.

Veamos lo que significa una distribución exponencial de ingresos. Si asumimos, por ejemplo, que en España el salario medio por mes es 1500 €, podemos considerar ingresos bajos aquellos salarios por debajo de la mitad de la media, es decir, 750 €/mes e ingresos altos aquellos salarios por encima del doble de la media, es decir, 3000 €/mes. Entonces la clase de economía media está formada por aquellos individuos con ingresos entre 750 y 3000 €/mes. Si ahora sabemos que la riqueza se distribuye exponencialmente, tendremos que el 39,35 % de la población son de clase económica baja, el 47,12 % son de clase económica media y el 13,53 % son de clase alta.

Ahora procedemos a calcular la distribución de Boltzmann-Gibbs en dos situaciones físicas diferentes con una inspiración económica. En la primera consideramos un conjunto de agentes que comparten una cantidad variable de dinero (sistemas abiertos) y en la segunda tratamos con el caso conservativo donde la riqueza total es fija (sistemas cerrados).

1.1.1. Sistemas económicos multi-agente abiertos

Asumimos N agentes, cada uno con coordenada x_i , $i = 1, \dots, N$ con $x_i \geq 0$ representando la riqueza o dinero del agente i y una cantidad total de dinero disponible E :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1} + x_N \leq E. \quad (1.1)$$

Vamos a suponer que el sistema se desarrolla en el interior de una pirámide N -dimensional dada por Ec.(1.1). El papel de un depósito de calor, que en este modelo suministra dinero en vez de energía, podría estar haciendo de estado o sistema bancario en economías occidentales, entiéndase el Banco Central Europeo, por ejemplo.

Teorema 1.1. *La fórmula del volumen $V_N(E)$ de una pirámide equilateral N -dimensional formada por $N + 1$ vértices donde hay N lados perpendiculares de longitud E es:*

$$V_N(E) = \frac{E^N}{N!} \quad (1.2)$$

Demostración. Vamos a proceder por inducción sobre N .

Para $N = 1$. $V_1(E) = E$ es trivial ya que el volumen de una recta de longitud E es E .

Para $N = 2$. $V_2(E) = \int_0^E V_1(E') dE'$. Realizando ahora el cambio de variable $E' = E - x_2$:

$$\int_0^E V_1(E - x_2) dx_2 = \int_0^E (E - x_2) dx_2 = \left[Ex_2 - \frac{x_2^2}{2} \right]_0^E = \frac{E^2}{2}$$

Supongamos que se verifica para $N = k$, veamos para $N = k + 1$.

$V_{k+1}(E) = \int_0^E V_k(E') dE'$. Realizando ahora el cambio de variable $E' = E - x_{k+1}$

$$\int_0^E V_k(E - x_{k+1}) dx_{k+1} = \int_0^E \frac{(E - x_{k+1})^k}{k!} dx_{k+1} = \left[-\frac{(E - x_{k+1})^{k+1}}{(k+1)!} \right]_0^E = \frac{E^{k+1}}{(k+1)!}$$

□

Supongamos que cada punto de la pirámide N -dimensional es equiprobable, entonces la probabilidad $f(x_i) dx_i$ de encontrar al agente i con dinero x_i es proporcional al volumen formado por todos los puntos en la pirámide $(N - 1)$ -dimensional teniendo la coordenada i igual a x_i .

Veamos ahora que $f(x_i)$ es el factor de Boltzmann (o la distribución de Maxwell-Boltzmann) con la condición de normalización

$$\int_0^E f(x_i) dx_i = 1 \quad (1.3)$$

Si el agente i tiene coordenada x_i , los $N - 1$ agentes restantes comparten, como mucho, el dinero $E - x_i$ en la pirámide $(N - 1)$ -dimensional

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_{N-1} + x_N \leq E - x_i. \quad (1.4)$$

cuyo volumen es $V_{N-1}(E - x_i)$.

Sabiendo que $V_N(E) = \int_0^E V_{N-1}(E - x_i) dx_i$, lo normalizamos para satisfacer la ecuación (1.3) y obtenemos

$$f(x_i) = \frac{V_{N-1}(E - x_i)}{V_N(E)} = \frac{(E - x_i)^{N-1}/(N-1)!}{E^N/N!} = \frac{N}{E} \left(\frac{E - x_i}{E} \right)^{N-1} = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{x_i}{E} \right)^{N-1} \quad (1.5)$$

siendo ε la riqueza media por agente $E = N\varepsilon$. Calculemos el límite cuando $N \rightarrow \infty$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x_i}{E} \right)^{N-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{(N-1)\log\left(1 - \frac{x_i}{E}\right)}$$

Aplicando equivalencias

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (N-1)\log\left(1 - \frac{x_i}{E}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} N\left(-\frac{x_i}{E}\right) = -\frac{x_i}{\varepsilon}$$

Por tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x_i}{E} \right)^{N-1} = e^{-\frac{x_i}{\varepsilon}} \quad (1.6)$$

Después de sustituir la Ec. (1.6) en la Ec. (1.5), obtenemos la distribución de Maxwell-Boltzmann en el régimen asintótico $N \rightarrow \infty$

$$f(x) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \quad (1.7)$$

donde el índice i ha sido quitado porque la distribución es la misma para cada agente, y entonces la distribución de riqueza puede obtenerse mediante la media sobre todos los agentes.

1.1.2. Sistemas económicos multi-agente cerrados

Asumimos N agentes, cada uno con coordenada x_i , $i = 1, \dots, N$ con $x_i \geq 0$ representando la riqueza o dinero del agente i . Si ahora suponemos que la cantidad total de dinero E se conserva,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1} + x_N = E. \quad (1.8)$$

entonces el sistema se desarrolla en la parte positiva de un N -hiperplano equilateral.

Teorema 1.2. La fórmula del área superficial $S_N(E)$ de un N -hiperplano equilateral de lado E es:

$$S_N(E) = \frac{\sqrt{N}}{(N-1)!} E^{N-1} \quad (1.9)$$

Demostración. Sea ω_\perp el vector perpendicular unitario del hiperplano con coordenadas $\frac{1}{\sqrt{N}}(1, 1, \dots, 1, 1)$ y v_{x_N} el vector unitario en la dirección x_N con coordenadas $(0, 0, \dots, 0, 1)$. Definimos el ángulo θ_N satisfaciendo

$$\cos\theta_N = \omega_\perp \cdot v_{x_N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Proyectando el hiperplano en la dirección x_N , obtenemos un volumen $(N - 1)$ -dimensional, verificando $V_{N-1}(E) = S_N(E)\cos\theta_N$ al tratarse de una proyección. Sabiendo que

$$V_{N-1}(E) = \frac{E^{N-1}}{(N-1)!}$$

obtenemos

$$S_N(E) = \frac{\sqrt{N}}{(N-1)!} E^{N-1}$$

□

Si asumimos la hipótesis ergódica, cada punto del N -hiperplano es equiprobable. Entonces la probabilidad $f(x_i)dx_i$ de encontrar al agente i con dinero x_i es proporcional al área superficial formado por todos los puntos del N -hiperplano teniendo la coordenada i igual a x_i . Veamos ahora que $f(x_i)$ es el factor de Boltzmann con la condición de normalización (1.3).

Si el agente i tiene coordenada x_i , los $N-1$ agentes restantes comparten el dinero $E-x_i$ en el $(N-1)$ -hiperplano

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_{N-1} + x_N = E - x_i. \quad (1.10)$$

cuya área superficial es $S_{N-1}(E-x_i)$.

De la igualdad $\cos^2\theta_N + \sin^2\theta_N = 1$ se obtiene que $\sin\theta_N = \sqrt{\frac{N-1}{N}}$. Es fácil probar que,

$$S_N(E) = \int_0^E \frac{S_{N-1}(E-x_i)}{\sin\theta_N} dx_i \quad (1.11)$$

Teniendo en cuenta la condición de normalización (1.3), obtenemos

$$f(x_i) = \frac{S_{N-1}(E-x_i)}{S_N(E)} \frac{1}{\sin\theta_N} = \frac{\sqrt{N-1}(E-x_i)^{N-2}(N-1)!}{(N-2)!\sqrt{N}E^{N-1}} \left(\sqrt{\frac{N-1}{N}}\right)^{-1} = \frac{(N-1)}{E} \left(1 - \frac{x_i}{E}\right)^{N-2} \quad (1.12)$$

Llamando ε a la riqueza media por agente, $E = N\varepsilon$, calculemos el límite cuando $N \rightarrow \infty$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x_i}{E}\right)^{N-2} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{(N-2)\log\left(1 - \frac{x_i}{E}\right)}$$

Aplicando equivalencias

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (N-2)\log\left(1 - \frac{x_i}{E}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} N\left(-\frac{x_i}{E}\right) = -\frac{x_i}{\varepsilon}$$

Por tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x_i}{E}\right)^{N-2} = e^{-\frac{x_i}{\varepsilon}} \quad (1.13)$$

Después de sustituir la Ec. (1.13) en la Ec. (1.12), obtenemos la distribución de Maxwell-Boltzmann (1.7) en el régimen asintótico $N \rightarrow \infty$.

1.2. La distribución Gaussiana

En este apartado, nuestro objetivo es explicar la omnipresencia de la distribución Maxwelliana en gases ideales. Si alguien fuera a hacer la similitud entre un gas de partículas y la sociedad humana, podríamos pensar que es una opción ridícula. Si esta comparación se restringe únicamente al aspecto económico, puede que la similitud no sea tan desproporcionada. Los agentes económicos intercambian dinero ó riqueza en transacciones comerciales de la misma forma que las partículas de un gas intercambian energía en colisiones. Está claro que siempre podríamos estar de acuerdo en que los agentes económicos están dotados de inteligencia y cierta previsión y determinación en sus decisiones para comprar y vender, características no presentes en interacciones aleatorias de partículas en un gas. Pero ignorando estos detalles sobre la inteligencia de los agentes, la semejanza entre mercados y gases ha sido introducida de manera satisfactoria en los años recientes. Ha conducido a reproducir sorprendentemente algunos de los hechos observados en la economía actual como, por ejemplo, la distribución de la

riqueza en la sociedad.

Ahora procedemos a calcular la distribución gaussiana en dos situaciones físicas diferentes con inspiración en teoría de gases ideales. En la primera consideramos un gas ideal con energía variable (sistemas abiertos) y en la segunda tratamos con el caso de un gas con una energía fija (sistemas cerrados).

1.2.1. Sistemas multi-partícula abiertos

Supongamos un gas ideal unidimensional de N -partículas clásicas no idénticas con masas m_i , $i = 1, \dots, N$ y energía total máxima E . Si la partícula i tiene un momento lineal $m_i v_i$, definimos la energía cinética

$$K_i = p_i^2 = \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad (1.14)$$

donde p_i es la raíz cuadrada de la energía cinética K_i . Si la energía total máxima se define como $E = R^2$, tenemos

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{N-1}^2 + p_N^2 \leq R^2. \quad (1.15)$$

Veamos que el sistema tiene estados accesibles con energía diferente. Estos estados están encerrados dentro del volumen de una N -esfera dada por Ec.(1.15).

Teorema 1.3. *La fórmula para el volumen $V_N(R)$ de una esfera de radio R es*

$$V_N(R) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)} R^N, \quad (1.16)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma.

Demostración.

$$V_N(R) = \int_{-R}^R \int_{-R\sqrt{1-(\frac{p_1}{R})^2}}^{R\sqrt{1-(\frac{p_1}{R})^2}} \dots \int_{-R\sqrt{1-(\frac{p_1}{R})^2-\dots-(\frac{p_{N-1}}{R})^2}}^{R\sqrt{1-(\frac{p_1}{R})^2-\dots-(\frac{p_{N-1}}{R})^2}} dp_N \dots dp_1$$

Realizando el cambio de variable $y_1 = p_1/R$, \dots , $y_N = p_N/R$, obtenemos

$$V_N(R) = R^N \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y_1^2}}^{\sqrt{1-y_1^2}} \dots \int_{-\sqrt{1-y_1^2-\dots-y_{N-1}^2}}^{\sqrt{1-y_1^2-\dots-y_{N-1}^2}} dy_N \dots dy_1 = R^N V_N(1)$$

siendo $V_N(1)$ el volumen de una N -esfera de radio 1. Para evaluar $V_N(1)$ usamos $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \pi^{1/2}$. Sabiendo que $dV_N(R) = NV_N(1)R^{N-1}dR$,

$$\pi^{N/2} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum_{i=1}^N p_i^2} dp_1 \dots dp_N = \int_0^{\infty} e^{-R^2} NV_N(1)R^{N-1}dR$$

Haciendo el cambio de variable $z = R^2$,

$$\pi^{N/2} = \frac{NV_N(1)}{2} \int_0^{\infty} \frac{z^{(N-1)/2} e^{-z}}{z^{1/2}} dz = \frac{NV_N(1)}{2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \Rightarrow V_N(1) = \frac{2\pi^{N/2}}{N\Gamma(\frac{N}{2})} = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)}$$

Así

$$V_N(R) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)} R^N \quad (1.17)$$

□

Supongamos que cada punto de la esfera N -dimensional es equiprobable, entonces la probabilidad $f(p_i)dp_i$ de encontrar la partícula i con coordenada p_i (energía p_i^2) es proporcional al volumen formado por todos los puntos en la N -esfera teniendo la coordenada i igual a p_i . Veamos ahora que $f(p_i)$ es la distribución Maxwelliana con la condición de normalización

$$\int_{-R}^R f(p_i)dp_i = 1 \quad (1.18)$$

Si la partícula i tiene coordenada p_i , las restantes $N - 1$ partículas comparten una energía menor que la energía máxima $R^2 - p_i^2$ en la $(N - 1)$ -esfera

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{i-1}^2 + p_{i+1}^2 + \dots + p_N^2 \leq R^2 - p_i^2, \quad (1.19)$$

cuyo volumen es $V_{N-1}(\sqrt{R^2 - p_i^2})$. Es fácil probar que

$$V_N(R) = \int_{-R}^R V_{N-1}(\sqrt{R^2 - p_i^2})dp_i \quad (1.20)$$

Teniendo en cuenta la condición de normalización (1.18), obtenemos

$$f(p_i) = \frac{V_{N-1}(\sqrt{R^2 - p_i^2})}{V_N(R)} = \frac{\pi^{(N-1)/2} \left(\sqrt{R^2 - p_i^2}\right)^{N-1} R^{N-1}}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right) \pi^{N/2} R^N} = C_N R^{-1} \left(1 - \frac{p_i^2}{R^2}\right)^{\frac{N-1}{2}} \quad (1.21)$$

con

$$C_N = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \quad (1.22)$$

Para $N \rightarrow \infty$, aplicamos la aproximación de Stirling, $N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$, a la Ec.(1.22), llegando a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{N}{2}} \quad (1.23)$$

Llamando ε a la energía media por partícula, $E = R^2 = N\varepsilon$, calculemos el límite cuando $N \rightarrow \infty$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{p_i^2}{R^2}\right)^{\frac{N-1}{2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\frac{(N-1)}{2} \log\left(1 - \frac{p_i^2}{R^2}\right)}$$

Aplicando equivalencias

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N-1)}{2} \log\left(1 - \frac{p_i^2}{R^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} \left(-\frac{p_i^2}{R^2}\right) = -\frac{p_i^2}{2\varepsilon}$$

Por tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{p_i^2}{R^2}\right)^{\frac{N-1}{2}} = e^{-\frac{p_i^2}{2\varepsilon}} \quad (1.24)$$

Después de sustituir las Ecs. (1.23)-(1.24) en la Ec. (1.21), obtenemos la distribución Maxwelliana en el régimen asintótico $N \rightarrow \infty$

$$f(p) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{p^2}{2\varepsilon}} \quad (1.25)$$

donde el índice i ha sido quitado porque la distribución es la misma para cada partícula, y entonces la distribución de velocidad puede obtenerse mediante la media sobre todos los agentes.

1.2.2. Sistemas multi-partícula cerrados

Supongamos un gas ideal unidimensional de N -partículas clásicas no idénticas con masas m_i , $i = 1, \dots, N$ y energía total E . Si la partícula i tiene un momento lineal $m_i v_i$, nuevamente definimos la energía cinética K_i dada por Ec.(1.14), donde p_i es la raíz cuadrada de K_i . Si la energía total se define como $E = R^2$, tenemos

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{N-1}^2 + p_N^2 = R^2. \quad (1.26)$$

Veamos que el sistema aislado se desarrolla en la superficie de una N -esfera.

Teorema 1.4. *La fórmula para el área superficial $S_N(R)$ de una N -esfera de radio R es*

$$S_N(R) = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} R^{N-1}, \quad (1.27)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma.

Demostración. Dado que $V_N(R) = \int_0^R S_N(r) dr$, entonces

$$S_N(R) = \frac{dV_N(R)}{dR} = \frac{N\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)} R^{N-1} = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} R^{N-1}$$

□

Supongamos que cada punto de la N -esfera es equiprobable, entonces la probabilidad $f(p_i) dp_i$ de encontrar la partícula i con coordenada p_i (energía p_i^2) es proporcional al área superficial formado por todos los puntos en la N -esfera teniendo la coordenada i igual a p_i . Nuestro objetivo es ver que $f(p_i)$ es la distribución Maxwelliana, con la condición de normalización (1.18).

Si la partícula i tiene coordenada p_i , las restantes $N - 1$ partículas comparten la energía $R^2 - p_i^2$ en la $(N - 1)$ -esfera

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{i-1}^2 + p_{i+1}^2 + \dots + p_N^2 = R^2 - p_i^2, \quad (1.28)$$

cuya área superficial es $S_{N-1}(\sqrt{R^2 - p_i^2})$. Si definimos la coordenada θ satisfaciendo

$$R^2 \cos^2 \theta = R^2 - p_i^2,$$

entonces

$$R d\theta = \frac{dp_i}{\left(1 - \frac{p_i}{R^2}\right)^{1/2}}$$

Es fácil probar que

$$S_N(R) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_{N-1}(R \cos \theta) R d\theta \quad (1.29)$$

Reescribiendo el área superficial como una función de p_i , normalizándolo para satisfacer la Ec.(1.18), obtenemos

$$f(p_i) = \frac{1}{S_N(R)} \frac{S_{N-1}(\sqrt{R^2 - p_i^2})}{\left(1 - \frac{p_i}{R^2}\right)^{1/2}},$$

y realizando algunos cálculos

$$f(p_i) = C_N R^{-1} \left(1 - \frac{p_i^2}{R^2}\right)^{\frac{N-3}{2}} \quad (1.30)$$

con

$$C_N = \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\Gamma(\frac{N-1}{2})\sqrt{\pi}} \quad (1.31)$$

Para $N \rightarrow \infty$, aplicamos la aproximación de Stirling, $N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$, a la Ec.(1.31), llegando a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{N}{2}} \quad (1.32)$$

Llamando ε a la energía media por partícula, $E = R^2 = N\varepsilon$, calculemos el límite cuando $N \rightarrow \infty$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{p_i^2}{R^2}\right)^{\frac{N-3}{2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\frac{(N-3)}{2} \log\left(1 - \frac{p_i^2}{R^2}\right)}$$

Aplicando equivalencias

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N-3)}{2} \log\left(1 - \frac{p_i^2}{R^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} \left(-\frac{p_i^2}{R^2}\right) = -\frac{p_i^2}{2\varepsilon}$$

Por tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{p_i^2}{R^2}\right)^{\frac{N-3}{2}} = e^{-\frac{p_i^2}{2\varepsilon}} \quad (1.33)$$

Después de sustituir las Ecs. (1.32)-(1.33) en la Ec. (1.30), obtenemos la distribución Maxwelliana (1.25) en el régimen asintótico $N \rightarrow \infty$.

1.3. La distribución general e^{-x^b}

En esta sección, presentamos el mismo problema tratado anteriormente pero en un caso general. Sea b una constante real positiva (los casos $b = 1, 2$ se han abordado en las secciones anteriores). Si tenemos un conjunto de variables positivas (x_1, x_2, \dots, x_N) verificando

$$x_1^b + x_2^b + \dots + x_{N-1}^b + x_N^b \leq E \quad (1.34)$$

con un mecanismo adecuado asegurando la equiprobabilidad de todos los posibles estados (x_1, x_2, \dots, x_N) en el volumen dado por la expresión (1.34), tendremos para la variable genérica x la distribución

$$f(x) \approx \varepsilon^{-1/b} e^{-x^b/b\varepsilon}, \quad (1.35)$$

cuando hacemos la media del conjunto en el límite $N, E \rightarrow \infty$, con $E = N\varepsilon$.

Veamos que esto se verifica. Desde los casos $b = 1, 2$ podemos extrapolar la fórmula general que nos proporcionará el comportamiento estadístico $f(x)$ de la variable genérica x cuando el sistema funciona equiprobablemente en el volumen definido por una restricción del tipo (1.34). La probabilidad $f(x_i)dx_i$ de encontrar i con coordenada x_i es proporcional al volumen formado por todos los puntos en el cuerpo simétrico N -dimensional con la coordenada i igual a x_i . Si i tiene coordenada x_i , los $(N-1)$ i 's restantes comparten como mucho $E - x_i^b$ en el cuerpo $(N-1)$ -dimensional cuyo volumen es $V_{N-1}((E - x_i^b)^{1/b})$. Por extensión de los casos $b = 1, 2$,

$$V_N(E^{1/b}) = \int_0^{E^{1/b}} V_{N-1}((E - x_i^b)^{1/b}) dx_i$$

con condición de normalización $\int_0^{E^{1/b}} f(x_i) dx_i = 1$.

Aplicando la condición de normalización, la expresión para $f(x_i)$ es

$$f(x_i) = \frac{V_{N-1}((E - x_i^b)^{1/b})}{V_N(E^{1/b})}. \quad (1.36)$$

El volumen N -dimensional, $V_N(b, r)$, de un cuerpo b -simétrico con lado de longitud r es proporcional al término r^N y al coeficiente $g_b(N)$ que depende de N :

$$V_N(b, r) = g_b(N)r^N.$$

Vamos a manipular el numerador de la Ec. (1.36)

$$V_{N-1}((E - x_i^b)^{1/b}) = g_b(N-1)[(E - x_i^b)^{1/b}]^{N-1} = g_b(N-1)E^{\frac{N-1}{b}} \left(1 - \frac{x_i^b}{E}\right)^{\frac{N-1}{b}}$$

Supongamos que $E = N\varepsilon$, siendo ε el valor medio por variable, esto es, $\varepsilon = \langle x_i^b \rangle$. Si $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x_i^b}{E}\right)^{\frac{N-1}{b}} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\frac{(N-1)}{b} \log \left(1 - \frac{x_i^b}{E}\right)}$$

Aplicando equivalencias

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N-1)}{b} \log \left(1 - \frac{x_i^b}{E}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{b} \left(-\frac{x_i^b}{E}\right) = -\frac{x_i^b}{b\varepsilon}$$

Por tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x_i^b}{E}\right)^{\frac{N-1}{b}} = e^{-\frac{x_i^b}{b\varepsilon}} \quad (1.37)$$

Entonces,

$$V_{N-1}((E - x_i^b)^{1/b}) = V_{N-1}(E^{1/b})e^{-x_i^b/b\varepsilon}$$

Después de sustituir la última expresión en la Ec. (1.36), obtenemos la forma exacta de $f(x)$ cuando $N \rightarrow \infty$

$$f(x) = c_b \varepsilon^{-1/b} e^{-x^b/b\varepsilon}, \quad (1.38)$$

donde el índice i ha sido quitado porque la distribución es la misma para cada variable, y entonces la distribución puede obtenerse mediante la media sobre todas ellas y c_b es

$$c_b = \frac{g_b(N-1)}{g_b(N)N^{1/b}}$$

Así, queda probado la distribución dada por la expresión (1.35).

Capítulo 2

Distribuciones de equilibrio en sistemas estadísticos: modelos de operadores

En este capítulo vamos a abarcar las mismas dos distribuciones tratadas en la primera parte del trabajo pero desde un enfoque iteracional, es decir, se proponen dos modelos de operadores para explicar la distribución exponencial de la riqueza y la distribución gaussiana de las velocidades de las partículas de un gas.

En la sección 2.1 se muestra un nuevo operador en el contexto de la teoría de iteración funcional para calcular la distribución exponencial. La familia uniparamétrica de distribuciones exponenciales es la única familia de puntos fijos de este operador. Entonces, el modelo explica la ubicuidad de la distribución exponencial en el régimen asintótico de un problema económico. En la segunda parte del capítulo, un nuevo modelo en teoría de gases para calcular la distribución Maxwelliana de velocidades es propuesto. Construimos un operador, el cual conserva el momento y la energía del gas ideal, que tiene la distribución gaussiana como punto fijo. Además, para cualquier distribución inicial de velocidad, se muestra que el gas decae a la distribución de equilibrio, es decir, hacia la distribución Maxwelliana.

2.1. La distribución exponencial

Diferentes estrategias pueden generar la distribución exponencial de la riqueza con un modelo tipo-gas. Una de ellas es la siguiente:

1. Las transacciones entre agentes se permiten de manera aleatoria, luego cada vez dos agentes son elegidos al azar.
2. Cada uno de ellos ponen todo su dinero junto y lo comparten de manera aleatoria.
3. Uno de estos individuos extrae una cantidad arbitraria de dinero disponible y el otro se queda con lo restante.

El gas evoluciona con este tipo de interacciones y la distribución de riqueza asintótica decae hacia la distribución exponencial. Notar que en este modelo todas las componentes son aleatorias, las parejas de agentes interactuando en cada momento y la forma en la que ellos dividen su dinero. Como las interacciones conservan el dinero, la dinámica global del sistema es también conservativa y la cantidad total de dinero es constante en tiempo.

Las ecuaciones de evolución de este modelo tipo-gas pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}m'_i &= \varepsilon(m_i + m_j), \\m'_j &= (1 - \varepsilon)(m_i + m_j), \\i, j &= 1, \dots, N,\end{aligned}$$

donde ε es un número aleatorio en el intervalo $(0, 1)$. Los agentes (i, j) intercambian dinero de tal manera que su dinero inicial (m_i, m_j) en tiempo t , se transforma en (m'_i, m'_j) en tiempo $t + 1$. Haciendo simulaciones numéricas, se obtiene que la distribución asintótica p_f es la distribución exponencial

(Boltzmann-Gibbs) [10],

$$p_f(m) = \beta e^{-\beta m}, \quad \text{siendo} \quad \beta = 1 / \langle m \rangle, \quad (2.1)$$

donde $p_f(m)$ denota la función de densidad. Evidentemente la función de densidad está normalizada $\|p_f\| = \int_0^\infty p_f(m) dm = 1$. El valor medio de la riqueza, $\langle m \rangle = \sum_{i=1}^\infty m_i / N$.

Podemos considerar este modelo como un problema de evolución en el espacio de fases de la función de densidad, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}(p_0(m)) \rightarrow p_f(m) \quad (2.2)$$

donde una distribución inicial de riqueza $p_0(m)$ con riqueza media $\langle p_0 \rangle$ evoluciona en el tiempo bajo la acción de un operador \mathcal{T} para asintóticamente alcanzar la distribución de equilibrio $p_f(m)$, que en este caso particular es la exponencial la cual presenta el mismo valor medio $\langle p_f \rangle = \langle p_0 \rangle$.

La cuestión a responder es si es posible encontrar el operador \mathcal{T} y, si se da el caso, saber cómo es. Procedemos ahora a calcular \mathcal{T} . Supongamos que p_n es la distribución de riqueza en el conjunto en tiempo n . La probabilidad de que dos agentes con dinero (u, v) interactúen será $p_n(u)p_n(v)dudv$. Dado que el comercio es totalmente aleatorio, sus intercambios pueden dar lugar con la misma probabilidad a cualquier valor comprendido en el intervalo $(0, u+v)$. Entonces, la probabilidad de obtener dinero x , con $x < u+v$, es $p_n(u)p_n(v)/(u+v)$. Finalmente podemos obtener la probabilidad de tener dinero x en tiempo $(n+1)$. Será la suma de probabilidades de todas las parejas con dinero (u, v) capaces de generar la cantidad x , es decir, todas las parejas verificando $x < u+v$. Por tanto, \mathcal{T} tiene la forma de un operador integral no lineal,

$$p_{n+1}(x) = \mathcal{T}p_n(x) = \int \int_{u+v>x} \frac{p_n(u)p_n(v)}{u+v} dudv \quad (2.3)$$

Si suponemos que \mathcal{T} actúa en el espacio de funciones de densidad, podemos probar que \mathcal{T} conserva la norma, es decir, \mathcal{T} mantiene la riqueza total del sistema, $\|\mathcal{T}p\| = \|p\| = 1$. Por extensión, también conserva la riqueza media del sistema, $\langle \mathcal{T}p \rangle = \langle p \rangle$. Entonces, se puede ver que la distribución exponencial, $p_f(x)$, con el valor medio correcto es el estado estacionario de \mathcal{T} , es decir, $\mathcal{T}p_f = p_f$. También se probará que esta distribución exponencial es punto fijo de \mathcal{T} y se hará referencia al trabajo de Guy Katriel en el que demuestra que este punto fijo es único. En consecuencia, la relación (2.2) se cumple.

Para demostrar lo nombrado anteriormente, primero introducimos unas definiciones.

Definición 2.1. El espacio L_1^+ de las distribuciones de riqueza en el intervalo $[0, \infty]$ es

$$L_1^+[0, \infty) = \{p : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad \|p\| < \infty\},$$

con norma

$$\|p\| = \int_0^\infty p(x) dx$$

Definición 2.2. La riqueza media $\langle x \rangle_p$ asociada a la distribución de riqueza $p \in L_1^+[0, \infty)$ es la media de x para la distribución p ,

$$\langle x \rangle_p = \|xp(x)\| = \int_0^\infty xp(x) dx$$

Definición 2.3. La acción del operador \mathcal{T} en p para $x \geq 0$ y $p \in L_1^+[0, \infty)$ se define como

$$\mathcal{T}p(x) = \int \int_{S(x)} \frac{p(u)p(v)}{u+v} dudv$$

siendo

$$S(x) = \{(u, v), \quad u, v > 0, \quad u+v > x\}$$

La conservación del número de agentes en el sistema económico se establece en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. Sea $B = \{p \in L_1^+[0, \infty), \|p\| = 1\}$ el subconjunto de las funciones de densidad en $L_1^+[0, \infty)$. Por tanto,

$$\text{si } p \in B \text{ entonces } \mathcal{T}p \in B, \text{ es decir, } \|\mathcal{T}p\| = \|p\| = 1.$$

Demostración. Sea $p \in B$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}p\| &= \int_0^\infty dx \int \int_{S(x)} \frac{p(u)p(v)}{u+v} dudv = \\ &= \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_0^{u+v} \frac{p(u)p(v)}{u+v} dx = \\ &= \int_0^\infty p(u)du \int_0^\infty p(v)dv = \|p\|^2 = 1. \end{aligned}$$

□

La riqueza media, y por extensión la riqueza total, de los sistemas económicos se conserva en tiempo. Esto se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2. El valor medio $\langle x \rangle_p$ de una función de densidad p se conserva, es decir,

$$\langle x \rangle_{\mathcal{T}p} = \langle x \rangle_p \quad \forall p \in B.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_{\mathcal{T}p} &= \|x(\mathcal{T}p)(x)\| = \int_0^\infty x dx \int \int_{S(x)} \frac{p(u)p(v)}{u+v} dudv = \\ &= \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_0^{u+v} x \frac{p(u)p(v)}{u+v} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty du \int_0^\infty (u+v)p(u)p(v)dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty up(u)du + \frac{1}{2} \int_0^\infty vp(v)dv = \\ &= \int_0^\infty xp(x)dx = \|xp(x)\| = \langle x \rangle_p \end{aligned}$$

□

En el siguiente teorema, se prueba que la distribución exponencial es un punto fijo del operador \mathcal{T} .

Teorema 2.3. La familia uniparamétrica de funciones $p_\alpha(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $\alpha \geq 0$, son puntos fijos de \mathcal{T} en $L_1^+[0, \infty)$.

Demostración. Cuando $\alpha = 0$ entonces $p_\alpha = 0$, que es punto fijo de \mathcal{T} . Supongamos ahora que $\alpha \neq 0$.

$$\mathcal{T}(\alpha e^{-\alpha x}) = \int \int_{S(x)} \frac{\alpha e^{-\alpha u} \alpha e^{-\alpha v}}{u+v} dudv = \alpha^2 \int \int_{u+v > x} \frac{e^{-\alpha(u+v)}}{u+v} dudv$$

Aplicamos el cambio de variable $u+v=r$,

$$\mathcal{T}(\alpha e^{-\alpha x}) = \alpha^2 \int_0^r \int_x^\infty \frac{e^{-\alpha r}}{r} dr dv = \alpha^2 \int_x^\infty e^{-\alpha r} dr = \alpha e^{-\alpha x}$$

□

En 2012, Ricardo López-Ruiz, José-Luis Lopez y Xavier Calbet, mediante tratamiento computacional de variados ejemplos, habían deducido que la distribución exponencial es el único punto fijo del operador \mathcal{T} . Fue en 2014, cuando Guy Katriel en [11] demostró esto matemáticamente, usando la transformada de Laplace. En su trabajo, para demostrar que la distribución exponencial es el único punto fijo, considera un α fijo y en esa línea el operador \mathcal{T}_α es contracción. Luego el punto fijo es único y atractivo. Pero si miramos \mathcal{T} en el espacio de las funciones de densidad, es una línea de puntos fijos.

2.2. La distribución gaussiana

En este capítulo, nuestro objetivo es explicar mediante un modelo de operadores la omnipresencia de la distribución gaussiana en gases ideales.

Consideramos un gas ideal compuesto de partículas, que tienen una unidad de masa, en el espacio 3D. Mientras no haya una dirección privilegiada en el equilibrio, podemos tomar cualquier dirección en el espacio y estudiar la evolución discreta del tiempo de la distribución de la velocidad en esa dirección. Llamemos a este eje U . Podemos completar un sistema cartesiano con dos ejes ortogonales adicionales V, W . Si $p_n(u)du$ representa la probabilidad de encontrar una partícula del gas con componente de velocidad en la dirección U comprendida entre u y $u + du$ en tiempo n , entonces la probabilidad de tener en tiempo n una partícula con una velocidad (u, v, w) será $p_n(u)p_n(v)p_n(w)dudvdw$. Las partículas del gas colisionan entre ellas y después de un número de interacciones se alcanza una nueva distribución de velocidad en tiempo $n + 1$. Hacemos dos suposiciones simples y realistas para obtener la probabilidad de tener una velocidad x en la dirección U en tiempo $n + 1$:

- Sólo aquellas partículas con energía mayor que x^2 en tiempo n pueden contribuir a esta velocidad x en la dirección U , es decir, aquellas partículas cuyas velocidades (u, v, w) verifiquen $u^2 + v^2 + w^2 \geq x^2$.
- Las nuevas velocidades después de las colisiones se distribuyen equitativamente en sus márgenes permitidos, es decir, las partículas con velocidad (u, v, w) pueden generar velocidades máximas $\pm U_{max} = \pm \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, entonces el rango permitido de velocidades es $[-U_{max}, U_{max}]$ y mide $2|U_{max}|$.

Así, la probabilidad, después de las interacciones, de encontrar una partícula con velocidad x será $p_n(u)p_n(v)p_n(w)/(2|U_{max}|)$. Tomando todo junto finalmente obtenemos la expresión del operador integral no lineal \mathcal{T} ,

$$p_{n+1}(x) = \mathcal{T}p_n(x) = \int \int_{u^2+v^2+w^2 \geq x^2} \frac{p_n(u)p_n(v)p_n(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} dudvdw \quad (2.4)$$

A continuación probaremos que el operador conserva en tiempo la energía y el momento nulo del gas. También demostraremos que la distribución gaussiana es punto fijo del operador \mathcal{T} . Finalmente, por medio de una conjetura, enunciaremos que para cualquier distribución inicial de riqueza, el sistema tiende al equilibrio, es decir, a la distribución Maxwelliana, esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}(p_0(x)) \rightarrow p_f(x) \quad (2.5)$$

siendo $p_f(x)$ la distribución gaussiana.

Análogamente a la primera parte del capítulo, facilitamos las siguientes definiciones.

Definición 2.4. *Introducimos el espacio L_1^+ de funciones positivas (distribución de velocidades unidimensional) en el eje real,*

$$L_1^+(\mathbb{R}) = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad \|p\| < \infty\},$$

con norma

$$\|p\| = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx$$

Por tanto para cada $p \in \mathbb{R}$, tenemos que $\|p\| \geq 0$.

Definición 2.5. *El valor medio de la velocidad $\langle x \rangle_p$ asociada a la distribución de velocidades $p \in \mathbb{R}$ es la media de x para la distribución p ,*

$$\langle x \rangle_p = \|xp(x)\| = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

Definición 2.6. Para cada $x \geq \mathbb{R}$ y $p \in L_1^+(\mathbb{R})$ definimos el operador \mathcal{T}

$$\mathcal{T}p(x) = \int \int \int_{u^2+v^2+w^2 \geq x^2} \frac{p(u)p(v)p(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} dudvdw$$

Por lo tanto, tenemos $\mathcal{T}(p(x)) \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, por tanto, $\|\mathcal{T}(p(x))\| \geq 0$.

Teorema 2.4. Para cualquier $p \in L_1^+(\mathbb{R})$, $\|\mathcal{T}p\| = \|p\|^3$.

Demostración. Sea $p \in L_1^+(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}p\| &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}(p(x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int \int \int_{u^2+v^2+w^2 \geq x^2} \frac{p(u)p(v)p(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} dudvdw \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\sqrt{u^2+v^2+w^2}}^{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \frac{p(u)p(v)p(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} dx \right) dudvdw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(u)p(v)p(w) dudvdw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(u) du \int_{-\infty}^{\infty} p(v) dv \int_{-\infty}^{\infty} p(w) dw = \|p\|^3 \end{aligned}$$

□

Corolario 2.1. Consideramos el conjunto $B \subset L_1^+(\mathbb{R})$ de las funciones de densidad, es decir,

$$B = \{p \in L_1^+(\mathbb{R}), \|p\| = 1\}$$

Por tanto, si $p \in B$ entonces $\mathcal{T}p \in B$. Claramente, si $\|p\| = 1$ entonces $\|\mathcal{T}p\| = 1$, es decir, la acción de \mathcal{T} en B conserva el número de partículas en el gas.

Aunque nuestro interés reside específicamente en el conjunto de las funciones de densidad, es decir, en B , el siguiente teorema también es válido para elementos de L_1^+ .

Teorema 2.5. El valor medio de la velocidad en la recursión $p_n = \mathcal{T}^n p_0$ se conserva en tiempo. De hecho, es nulo para todo n :

$$\langle x \rangle_{\mathcal{T}p} = \langle x \rangle_{\mathcal{T}^2 p} = \dots = \langle x \rangle_{\mathcal{T}^n p} = \dots = 0.$$

Significa que el momento total cero del gas se conserva en su evolución temporal bajo la acción de \mathcal{T} .

Demostración. Supongamos que $p \in B$ entonces

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_{\mathcal{T}p} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{T}(p(x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int \int \int_{u^2+v^2+w^2 \geq x^2} \frac{p(u)p(v)p(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} dudvdw \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(u)p(v)p(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \left(\int_{-\sqrt{u^2+v^2+w^2}}^{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} x dx \right) dudvdw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(u)p(v)p(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\sqrt{u^2+v^2+w^2}}^{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} dudvdw = 0. \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que si $p \in B$ entonces $\mathcal{T}p \in B$, por lo tanto, $\langle x \rangle_{\mathcal{T}^n p} = 0, \forall n$.

□

Teorema 2.6. La energía total del gas se conserva en tiempo, es decir, para cada $p \in B$ tenemos

$$\langle x^2 \rangle_p = \langle x^2 \rangle_{\mathcal{T}p} = \langle x^2 \rangle_{\mathcal{T}^2p} = \dots = \langle x^2 \rangle_{\mathcal{T}^n p} = \dots$$

Demostración. Supongamos que $p \in B$ entonces

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_{\mathcal{T}p} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathcal{T}(p(x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int \int \int_{u^2+v^2+w^2 \geq x^2} \frac{p(u)p(v)p(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} dudvdw \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(u)p(v)p(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \left(\int_{-\sqrt{u^2+v^2+w^2}}^{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} x^2 dx \right) dudvdw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(u)p(v)p(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{u^2+v^2+w^2}}^{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} dudvdw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(u)p(v)p(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \frac{2}{3} (u^2+v^2+w^2)^{2/3} dudvdw \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 p(u) du + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 p(v) dv + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 p(w) dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \langle x^2 \rangle_p. \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que si $p \in B$ entonces $\mathcal{T}p \in B$, por lo tanto, $\langle x^2 \rangle_{\mathcal{T}^n p} = \langle x^2 \rangle_p$, $\forall n$. \square

En el siguiente teorema, se prueba que la distribución gaussiana es un punto fijo del operador \mathcal{T} .

Teorema 2.7. La familia uniparamétrica de funciones $p_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}$, $\alpha \geq 0$, son puntos fijos de \mathcal{T} . Es decir, $\mathcal{T}p_\alpha = p_\alpha$.

Demostración. Cuando $\alpha = 0$ entonces $p_\alpha = 0$, que es punto fijo de \mathcal{T} . Supongamos ahora que $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}p_\alpha &= \int \int \int_{u^2+v^2+w^2 \geq x^2} \frac{p(u)p(v)p(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} dudvdw \\ &= \int \int \int_{u^2+v^2+w^2 \geq x^2} \frac{\frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha(u^2+v^2+w^2)}}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} dudvdw \end{aligned}$$

Transformamos la región de integración a coordenadas esféricas mediante el cambio de variable

$$u = r \sin\phi \cos\theta, \quad v = r \sin\phi \sin\theta, \quad w = r \cos\phi$$

. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{T}p_\alpha &= \int_{|x|}^{\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha r^2} r \sin\phi d\theta d\phi dr \\ &= \int_{|x|}^{\infty} \int_0^\pi \alpha \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha r^2} r \sin\phi d\phi dr = \int_{|x|}^{\infty} 2\alpha \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} r e^{-\alpha r^2} dr \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left[-e^{-\alpha r^2} \right]_{|x|}^{\infty} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} = p_\alpha \end{aligned}$$

\square

Conjetura 1. Para cualquier $p \in B$, con $\langle x^2 \rangle_p$ finito y verificando $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}^n p - \mu(x)\| = 0$, el límite $\mu(x)$ es el punto fijo $p_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}$, con $\alpha = (2 \langle x^2 \rangle_p)^{-1}$. En términos físicos significa que para cualquier distribución inicial de velocidad del gas, decae a la distribución Maxwelliana, la cual es el único punto fijo de la dinámica.

Capítulo 3

Simulación de los dos operadores anteriores

En este capítulo vamos a simular el decaimiento de distribuciones de probabilidad hacia el punto fijo correspondiente. En la primera sección observaremos, haciendo una única iteración, como las tres funciones de densidad consideradas tienden a la distribución exponencial basándonos en ejemplos del artículo [12]. Cabe destacar que estas simulaciones se han realizado en Octave, generando un fichero de datos y obteniendo así la gráfica en GNU Plot. En la última parte de este capítulo hemos considerado tres distribuciones de probabilidad similares a las tratadas en [3], las cuales, realizando una única iteración, decaen hacia la distribución gaussiana. A diferencia de la primera sección, las simulaciones se han llevado a cabo con Wolfram Mathematica.

3.1. Ejemplos de la distribución de Boltzmann-Gibbs

Antes de adentrarnos en las simulaciones vamos a recordar algunas definiciones importantes, las cuales han sido necesarias para la programación.

Definición 3.1. La acción del operador \mathcal{T} en $p \in L_1^+[0, \infty)$ se define como

$$p_{n+1}(x) = \mathcal{T}p(x) = \int \int_{u+v>x} \frac{p(u)p(v)}{u+v} dudv \quad (3.1)$$

Definición 3.2. La norma para $p \in L_1^+[0, \infty)$ es

$$\|p(x)\| = \int_0^\infty p(x)dx$$

Definición 3.3. La media de x para $p \in L_1^+[0, \infty)$ es

$$\langle x \rangle_p = \|xp(x)\| = \int_0^\infty xp(x)dx$$

Sea $B = \{p \in L_1^+[0, \infty), \|p\| = 1\}$ el subconjunto de las funciones de densidad en $L_1^+[0, \infty)$. Entonces para cualquier $p \in B$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^n p(x) = \frac{1}{\langle x \rangle_p} e^{-\frac{x}{\langle x \rangle_p}}$$

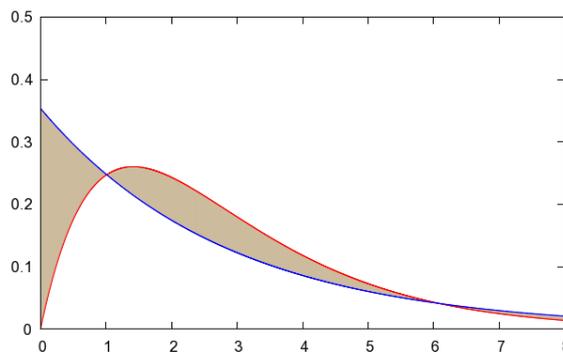
Ejemplo 3.1.1 Consideramos la siguiente función de densidad

$$p(x) = \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

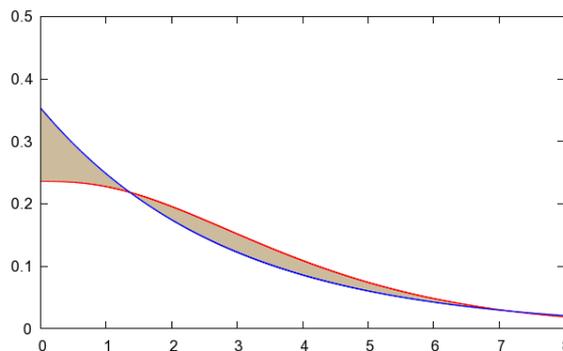
El valor medio es $\langle x \rangle_p = 2\sqrt{2}$, por lo tanto el punto fijo al cual decae esta distribución es

$$\mu(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{x}{2\sqrt{2}}}$$

La siguiente gráfica muestran las dos distribuciones y el área comprendida entre las dos funciones, es decir, el error cometido.



Numéricamente, obtenemos que el error cometido es $\|p(x) - \mu(x)\| = 0.36823$. Aplicando ahora el operador (3.1),



teniendo ahora $\|\mathcal{T}p(x) - \mu(x)\| = 0.18507$.

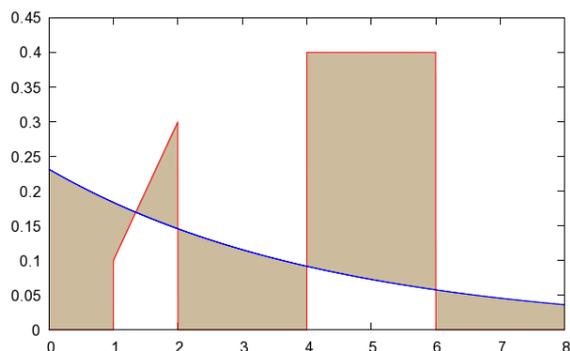
Ejemplo 3.1.2 Sea la función de densidad

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{10} & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{8}{20} & \text{si } 4 < x < 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

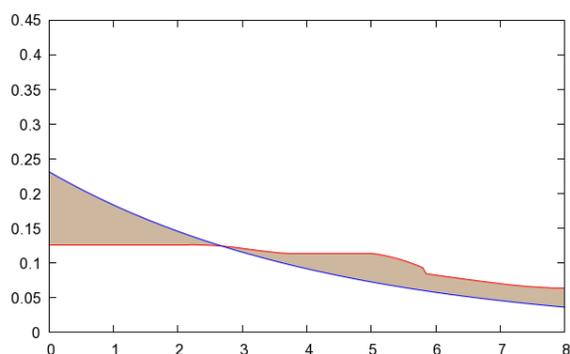
El valor medio es $\langle x \rangle_p = \frac{259}{60}$, por lo tanto el punto fijo al cual decae esta distribución es

$$\mu(x) = \frac{60}{259} e^{-\frac{60}{259}x}$$

La siguiente gráfica muestran las dos distribuciones y el área comprendida entre las dos funciones, es decir, el error cometido.



Numéricamente, obtenemos que el error cometido es $\|p(x) - \mu(x)\| = 1.4074$.
Aplicando ahora el operador (3.1),



teniendo ahora $\|\mathcal{T}p(x) - \mu(x)\| = 0.41525$.

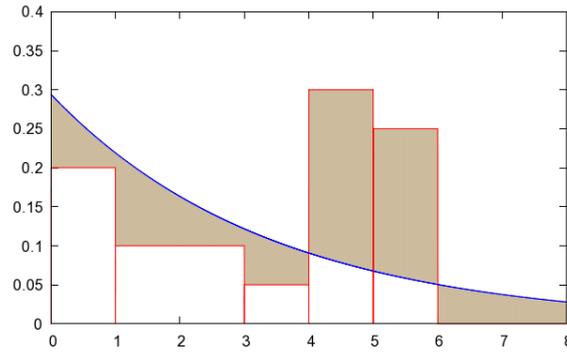
Ejemplo 3.1.3 Sea la función de densidad

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{10} & \text{si } 1 < x < 3 \\ \frac{1}{20} & \text{si } 3 < x < 4 \\ \frac{3}{10} & \text{si } 4 < x < 5 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 5 < x < 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

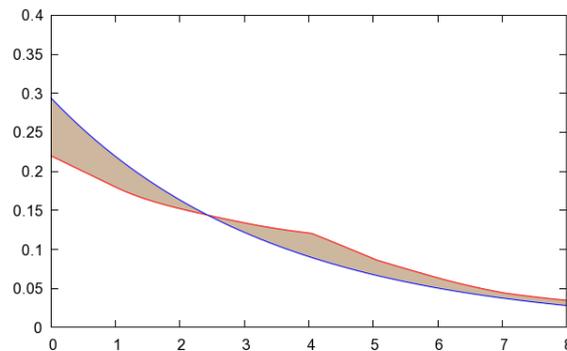
El valor medio es $\langle x \rangle_p = \frac{17}{5}$, por lo tanto el punto fijo al cual decae esta distribución es

$$\mu(x) = \frac{5}{17} e^{-\frac{5}{17}x}$$

La siguiente gráfica muestran las dos distribuciones y el área comprendida entre las dos funciones, es decir, el error cometido.



Numéricamente, obtenemos que el error cometido es $\|p(x) - \mu(x)\| = 0.825744$.
Aplicando ahora el operador (3.1),



teniendo ahora $\|\mathcal{T}p(x) - \mu(x)\| = 0.17007$.

3.2. Ejemplos de la distribución Maxwelliana

Análogamente a la sección anterior, vamos a recordar algunas definiciones importantes usadas en la simulación

Definición 3.4. La acción del operador \mathcal{T} en $p \in L_1^+(\mathbb{R})$ se define como

$$p_{n+1}(x) = \mathcal{T}p_n(x) = \int \int \int_{u^2+v^2+w^2 \geq x^2} \frac{p_n(u)p_n(v)p_n(w)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} dudvdw \quad (3.2)$$

Definición 3.5. La norma para $p \in L_1^+(\mathbb{R})$ es

$$\|p(x)\| = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx$$

Sea $B = \{p \in L_1^+(\mathbb{R}), \|p\| = 1\}$ el subconjunto de las funciones de densidad en $L_1^+(\mathbb{R})$.

Definición 3.6. La media de x para $p \in B$ es

$$\langle x \rangle_p = \|xp(x)\| = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

Como enunciamos en la conjetura al final del capítulo 2, para cualquier $p \in B$, con $\langle x^2 \rangle_p$ finito y verificando $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}^n p - \mu(x)\| = 0$, el límite $\mu(x)$ es el punto fijo

$$p_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} \quad \text{siendo } \alpha = (2 \langle x^2 \rangle_p)^{-1}$$

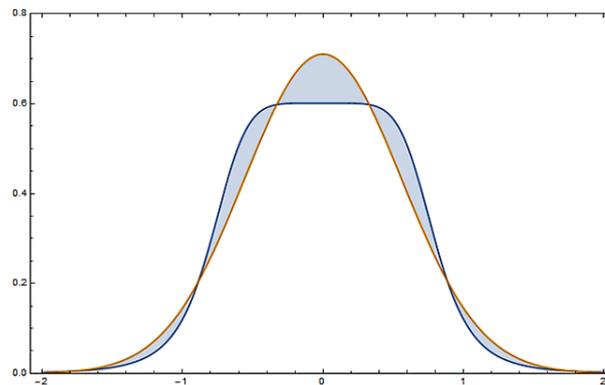
Ejemplo 3.2.1 Sea la función de densidad

$$p(x) = \frac{3}{2^{2/3}\pi(1+4x^6)}$$

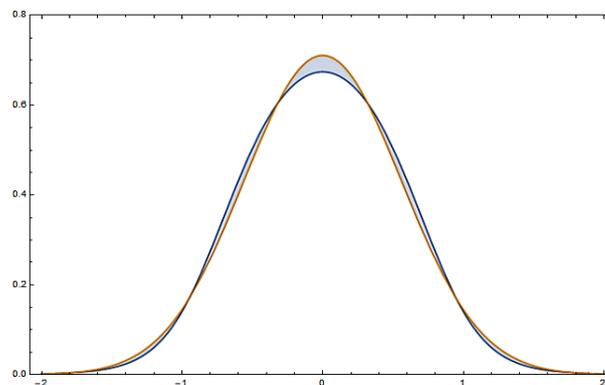
El valor medio es $\alpha = 2^{2/3}$, por lo tanto el punto fijo al cual decae esta distribución es

$$\mu(x) = \frac{2^{1/3}}{\sqrt{\pi}} e^{-2^{2/3}x^2}$$

La siguiente gráfica muestran las dos distribuciones y el área comprendida entre las dos funciones, es decir, el error cometido.



Numéricamente, obtenemos que el error cometido es $\|p(x) - \mu(x)\| = 0.144742$. Aplicando ahora el operador (3.2),



teniendo ahora $\|\mathcal{T}p(x) - \mu(x)\| = 0.0505915$.

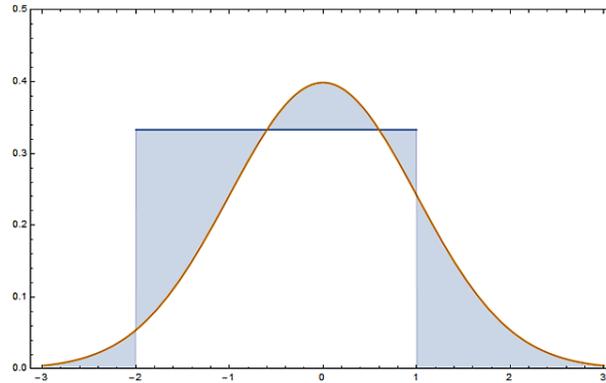
Ejemplo 3.2.2 Consideramos la siguiente función de densidad

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } -2 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

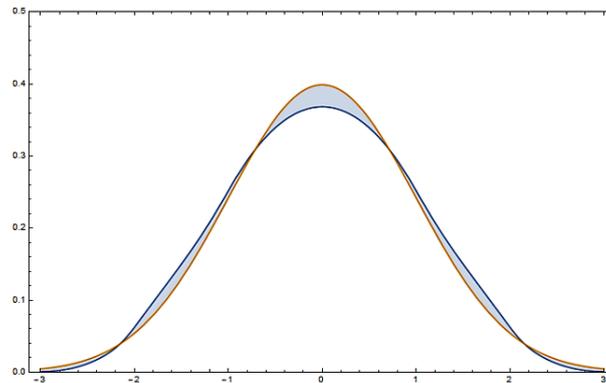
Calculamos que $\alpha = \frac{1}{2}$, por lo tanto el punto fijo al cual decae esta distribución es

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La siguiente gráfica muestran las dos distribuciones y el área comprendida entre las dos funciones, es decir, el error cometido. Obsérvese que en este caso, por simetría, $\langle x \rangle_p \neq 0$.



Numéricamente, obtenemos que el error cometido es $\|p(x) - \mu(x)\| = 0.465798$. Aplicando ahora el operador (3.2),



donde notamos que ahora $\langle x \rangle_{\mathcal{T}p} = 0$, tal como ha sido demostrado en el Capítulo 2.

Para ver más claro como el operador \mathcal{T} al ser aplicado reconvierte la distribución a momento nulo, proponemos el siguiente ejemplo.

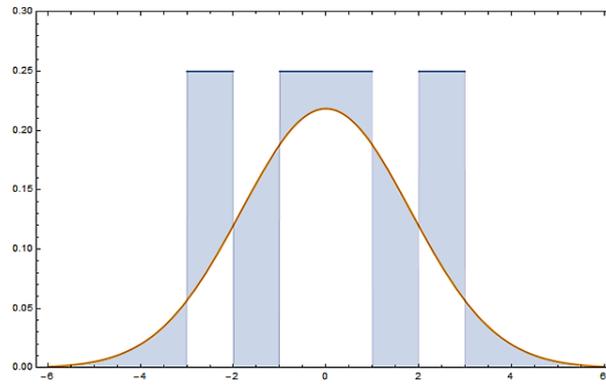
Ejemplo 3.2.3 Consideramos la siguiente función de densidad

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -3 < x < -2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

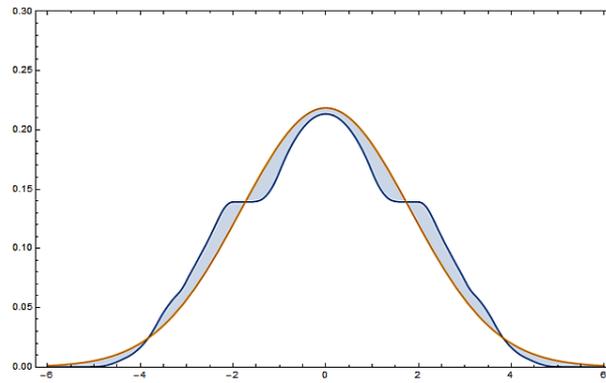
Calculamos que $\alpha = \frac{3}{20}$, por lo tanto el punto fijo al cual decae esta distribución es

$$\mu(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} e^{-\frac{3x^2}{20}}$$

La siguiente gráfica muestran las dos distribuciones y el área comprendida entre las dos funciones, es decir, el error cometido.



Numéricamente, obtenemos que el error cometido es $\|p(x) - \mu(x)\| = 0.821818$.
Aplicando ahora el operador (3.2),



Bibliografía

- [1] JAYNES ET (1957). *Information theory and statistical mechanics*. Phys Rev E 106:620-630.
- [2] LOPEZ JL, LOPEZ-RUIZ R, CALBET X (2012). *Exponential wealth distribution in a random market. A rigorous explanation*. J Math Anal App 386:195-204.
- [3] SHIVANIAN E, LOPEZ-RUIZ R(2012). *A new model for ideal gases. Decay to the Maxwellian distribution*. Physica A 391:2600-2607.
- [4] MANTEGNA R, STANLEY HE (1999). *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- [5] YAKOVENKO VM (2009), *Econophysics, Statistical Mechanics Approach to..* In the Encyclopedia of Complexity and System Science, Meyers, R.A. Ed.,Springer, Berlin, pp. 2800-2826.
- [6] LOPEZ-RUIZ R, SAÑUDO J, CALBET X (2009). *Equiprobability, entropy, Gamma distributions and other geometrical questions in multi-agent systems*. Entropy 11:959-971.
- [7] LOPEZ-RUIZ R, SAÑUDO J, CALBET X (2008). *Geometrical derivation of the Boltzmann factor*. Am J Phys 76:780-781.
- [8] LOPEZ-RUIZ R, CALBET X (2007). *Derivation of the Maxwellian distribution from the microcanonical ensemble*. Am J Phys 75:752-753
- [9] DRAGULESCU A, YAKOVENKO VM (2001). *Exponential and power-law probability distributions of wealth as income in the United Kingdom and the United States*. Physica A 299:213-221.
- [10] DRAGULESCU A, YAKOVENKO VM (2000). *Statistical mechanics of money* . Eur. Phys. J. B 17:723-729
- [11] KATRIEL G, *Convergence to an exponential wealth distribution in a random market model (2014)*. 93:1256-1263
- [12] LÓPEZ-RUIZ R, SHIVANIAN E, ABBASBANDY S, LÓPEZ JL (2013), *A generalized continuous model for random markets*. Math Aeterna 3:317-328

