

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
ESCUELA DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA



INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN
PROYECTO FIN DE CARRERA

ESTIMACIÓN DE CANALES DE
BANDA ULTRA ANCHA (UWB)
MEDIANTE EL USO DE
FILTROS DE LAGUERRE

Institut für Nachrichtentechnik

VODAFONE CHAIR TU DRESDEN
INSTITUT FÜR NACHRICHTENTECHNIK

AUTOR: JAVIER JALLE IBARRA
PONENTE: ENRIQUE MASGRAU GÓMEZ
DIRECTOR: WOLFGANG RAVE

12 de Noviembre, 2011

Agradecimientos

A mi difunta abuela por lo mucho que disfrutaría en este momento.

A Dr. -Ing. habil. Wolfgang Rave y Dr. Enrique Masgrau por su apoyo e interés en el proyecto.

A mis amigos, compañeros y familia.

Resumen

Por estimación de canales entendemos la aproximación de la respuesta impulsional discreta de un canal desconocido usando el criterio de mínimo error cuadrático medio (MSE). En un enfoque clásico, esta aproximación es obtenida ajustando de manera adaptativa los coeficientes de un filtro FIR transversal, también conocido como 'entrenamiento'.

La estimación de canales en canales de banda ultra ancha (UWB) tiene que hacer frente a respuestas impulsionales largas debido a la alta frecuencia de muestreo y usualmente la energía está concentrada en una pequeña fracción de los intervalos de tiempo. Usando un filtro transversal FIR, se requiere un orden elevado para poder estimar de manera correcta la larga respuesta impulsional y la mayoría de los coeficientes del filtro reúnen poca o ninguna energía debido a la concentración de la energía en pequeñas fracciones de intervalos de tiempo.

La fuente de este problema viene del hecho de que una aproximación consiste en representar una función como una suma ponderada de una base ortonormal completa (también llamadas funciones base), y luego truncar esta suma a un número fijo de términos (equivalente al orden del filtro). En el enfoque clásico del filtro FIR transversal, las funciones base se corresponden con la delta de Kronecker ($\delta(k - j)$), también conocida como la base canónica. El problema con los canales UWB surgen debido a la extensión temporal extremadamente corta de las funciones base de los filtros FIR.

Este estudio es una aproximación teórica para caracterizar la viabilidad de los filtros de Laguerre en un sistema de comunicación UWB. La aproximación es llevada a cabo por medio de otra base ortonormal, las secuencias de Laguerre, las cuales forman un compromiso entre los sistemas FIR y los IIR; y además pueden ser consideradas como una generalización de los filtros FIR. Estas secuencias son utilizadas para la estimación del canal para varios canales de prueba en el ámbito UWB y para realizaciones del modelo estocástico de canales UWB proporcionado por el estándar IEEE 802.15.4a, mostrando que ofrecen mejor rendimiento, en términos del error cuadrático medio (MSE), como generalización de los filtros FIR, sin embargo esta mejora no es muy grande cuando el canal presenta cambios abruptos, debido al comportamiento paso bajo de los filtros de Laguerre.

Métodos adaptativos, como el algoritmo RLS son utilizados para caracterizar de forma práctica estas aproximaciones y verificar los resultados obtenidos teóricamente.

Índice

Lista de Tablas	ix
Lista de Figuras	xii
Símbolos	xiii
Abreviaturas	xv
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.1.1 Presentación de la idea	1
1.1.2 Descripción del problema	2
1.1.3 Solución propuesta	3
1.2 Objetivos del trabajo	4
1.3 Breve descripción de los capítulos	4
2 Secuencias de Laguerre	5
2.1 Introducción a las secuencias ortonormales	5
2.2 Secuencias de Laguerre	6
2.2.1 Longitud de las secuencias de Laguerre	9
3 Filtro transversal	13
3.1 Introducción	13
3.2 Filtro transversal de Laguerre	14
3.3 Teoría básica de estimación lineal	15
3.4 Coeficientes de correlación	16
3.5 Método de solución de las ecuaciones normales	17
4 Aproximación de un canal UWB FIR idealizado	19
4.1 Introducción	19
4.2 Error cuadrático medio (MSE) en la aproximación	20
5 Canales UWB	25
5.1 Introducción	25
5.2 UWB IEEE 802.15.4a Standard model	25
5.3 Estimación del canal	25
6 Métodos adaptativos	37
6.1 Introducción	37
6.2 Algoritmo RLS	37
6.2.1 Estimación de canales UWB	38
7 Conclusiones y trabajo futuro	43

Lista de Tablas

1.1	Comparación del coste computacional de un filtro RLS-Laguerre Lattice de orden M con un RLS-FIR Lattice de order M' (normalmente $M \ll M'$). (Reproducido de: ver [4])	4
4.1	NMSE para un filtro de Laguerre de orden 60 con diferentes posiciones del polo.	20
5.1	NMSE obtenida estimando una realización de canal UWB con filtros de diferentes órdenes y posiciones del polo.	29
5.2	Δ_{MSE} o ganancia MSE obtenida estimando una realización de canal UWB con filtros de diferentes órdenes y posiciones del polo.	30
5.3	Estadísticas del NMSE (en dB) obtenido estimando canales UWB con filtros de diferente orden y varias posiciones del polo.	32
5.4	Δ_{MSE} o ganancia MSE en media, obtenida estimando canales UWB con filtros de órdenes y posiciones del polo diferentes.	33
5.5	Estadísticas del orden necesario por los diferentes filtros para obtener un NMSE específico.	35

Lista de Figuras

1.1	Respuesta impulsional de un canal UWB dada por la realización de un modelo estocástico (ver [6]).	1
1.2	Filtro transversal clásico	2
1.3	Ejemplo de una respuesta FIR que representa de manera sencilla el tipo de canales estudiados.	3
2.1	Variación de la posición del polo.	6
2.2	Generación de las secuencias de Laguerre.	7
2.3	Secuencias de Laguerre con diferente posición del polo a	8
2.4	Longitud de una secuencia de Laguerre	9
2.5	Longitud de las secuencias de Laguerre en función del orden de secuencia y de la posición del polo.	11
2.6	Longitud (real y aproximada) de las secuencias de Laguerre.	12
3.1	Filtro transversal clásico	13
3.2	Filtro transversal de Laguerre	14
3.3	Modelo de canal simple	15
3.4	Modelo de estimación de canal.	15
4.1	Respuesta impulsional del canal UWB FIR idealizado.	19
4.2	MSE normalizado de la aproximación del canal FIR en función de la posición del polo para diferentes órdenes del filtro.	20
4.3	MSE normalizado de la estimación del canal FIR en función del orden del filtro para diferentes posiciones del polo.	21
4.4	Variación de la posición óptima del polo en función del orden del filtro.	21
4.5	Aproximación del canal FIR con un filtro de Laguerre de orden 60.	22
4.6	Impulse response of the FIR channel	23
4.7	MSE normalizado de la aproximación del canal FIR en función de la posición del polo para diferentes órdenes del filtro.	24
4.8	MSE normalizado de la estimación del canal FIR en función del orden del filtro para diferentes posiciones del polo.	24
5.1	Realizaciones del modelo estocástico de canales UWB.	26
5.2	Realización del modelo estocástico de canales UWB.	27
5.3	MSE normalizado de la estimación del canal UWB en función de la posición del polo para diferentes órdenes del filtro.	27
5.4	Efecto del signo del polo en la estimación de un canal complejo con un filtro de Laguerre de orden 100.	28
5.5	MSE normalizado de la estimación del canal UWB en función del orden del filtro para diferentes posiciones del polo.	29
5.6	Variación de la posición óptima (y estimada) del polo para el filtro de Laguerre en función del orden del filtro.	30

5.7	MSE normalizado medio de la estimación de los canales UWB en función de la posición del polo para diferentes órdenes del filtro.	31
5.8	MSE normalizado medio de la estimación de los canales UWB en función del orden del filtro para diferentes posiciones del polo.	31
5.9	Variación de la posición óptima (y estimada) del polo para el filtro de Laguerre en función del orden del filtro.	32
5.10	Función de densidad de probabilidad del MSE normalizado para un filtro de Laguerre de orden 100 con diferentes posiciones del polo.	33
5.11	Función de densidad de probabilidad del MSE normalizado para un filtro de Laguerre de orden 200 con diferentes posiciones del polo.	34
5.12	Función de densidad de probabilidad del MSE normalizado para un filtro de Laguerre de orden 300 con diferentes posiciones del polo.	34
5.13	Orden necesario por los diferentes filtros para obtener un NMSE específico(-3dB, -6dB and -10 dB).	35
6.1	Modelo usado para la adaptación.	37
6.2	Realización del modelo estocástico de canales UWB.	39
6.3	Curvas de aprendizaje para el algoritmo RLS para filtros de Laguerre y FIR. . .	40
6.4	Respuesta impulsional estimada por filtros de Laguerre ($a = -0.5$ y -0.7) y un filtro FIR de orden 100 con un algoritmo RLS en estado estacionario.	41
7.1	Filtro transversal de Laguerre con polo complejo.	43
7.2	Estructura ortonormal transversal con múltiples polos.	44
7.3	Modelo de ecualización.	44

Símbolos

\mathbb{N}_0	conjunto de números naturales y el cero
$\ell^2(\mathbb{N}_0)$	espacio de Hilbert sobre los números naturales y el cero
$.^T$	trasposición de una matriz
$.^*$	conjugación compleja
$.^H$	trasposición Hermitiana
j	unidad imaginaria definida como $\sqrt{-1}$
\mathbf{x}	letras en negrita denotan vectores
\mathbf{X}	letras mayúsculas en negrita denotan matrices
x	letras en fuente normal denotan escalares
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	producto escalar entre \mathbf{x} y \mathbf{y}
$\mathbf{E}\mathbf{x}$	valor esperado de la variable aleatoria/proceso \mathbf{x}
$\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$	variables ortogonales \mathbf{x} y \mathbf{y} (i.e., $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$)
$a \stackrel{\triangle}{=} b$	cantidad a definida como b
$\Re(x)$	parte real de x
$\Im(x)$	parte imaginaria de x
0	cero escalar, vector o matriz
z^{-1}	operador unidad de retardo de tiempo
k	variable de tiempo discreto
$X(z)$	transformada z-bilateral de la secuencia escalar $\{x(k)\}$
$X(e^{j\omega})$	transformada de Fourier de tiempo discreto de $\{x(k)\}$
$x(k)$	señal de entrada del canal
$h(k)$	respuesta impulsional del canal
$H(z)$	función de transferencia del canal
$y(k)$	señal de salida del canal
M	orden del filtro o aproximación
$\hat{y}_M(k)$	aproximación/estimación de la señal $y(k)$ de orden M
$\hat{h}_M(k)$	aproximación/estimación del canal $h(k)$ de orden M
\mathbf{x}_M	vector de datos de entrada o vector de regresión
$w_{M,i}$	coeficiente i -ésimo de un filtro de orden M
\mathbf{w}_M	vector de los coeficientes de un filtro de orden M
σ_y^2	varianza de la señal y

Lista de Abreviaturas

FIR	Finite Impulse Response
IIR	Infinite Impulse Response
UWB	Ultra Wide Band
m.m.s.e.	Minimum Mean Square Error criterion
MSE	Mean Square Error
NMSE	Normalized Mean Square Error
RLS	Recursive Least Squares
LOS	Line Of Sight
NLOS	Non Line Of Sight
Fig.	Figure
NaN	Not-a-Number
ISI	InterSymbol Interference
SNR	Signal-to-Noise Ratio
AWGN	Additive White Gaussian Noise
TU Dresden	Technische Universität Dresden

1 Introducción

1.1 Motivación

1.1.1 Presentación de la idea

Los canales de radio en las comunicaciones inalámbricas sufren de desvanecimientos y dispersión multicamino. El efecto del multicamino está provocado por el fenómeno de la propagación que ocasiona que una misma señal alcance el receptor por varios caminos (debido a reflexiones/refracciones) causando una interferencia que ocasiona el efecto conocido como ISI (inter-symbol interference). Para eliminar este efecto se utilizan los ecualizadores, los cuales en su mayoría requieren del conocimiento del canal, que a su vez es estimado usando una secuencia de entrada conocida. Se necesita tener un criterio para poder evaluar la calidad de dicha estimación (también conocido como aproximación de sistemas o identificación de sistemas), que en este estudio será el criterio del mínimo error cuadrático medio (m.m.s.e.). En particular, en este estudio se utilizarán canales de banda ultra ancha (UWB) para la estimación, los cuales se caracterizan por tener unas respuestas impulsionales muy largas, debido a la alta frecuencia de muestreo y además suelen tener la energía concentrada en pequeñas fracciones de intervalos de tiempo. Como ejemplo de un canal UWB se muestra en la figura 1.1 una realización del modelo dado por el IEEE 802.15.4a típica para entornos sin línea de visión (Non Line-Of-Sight, NLOS) y áreas residenciales.

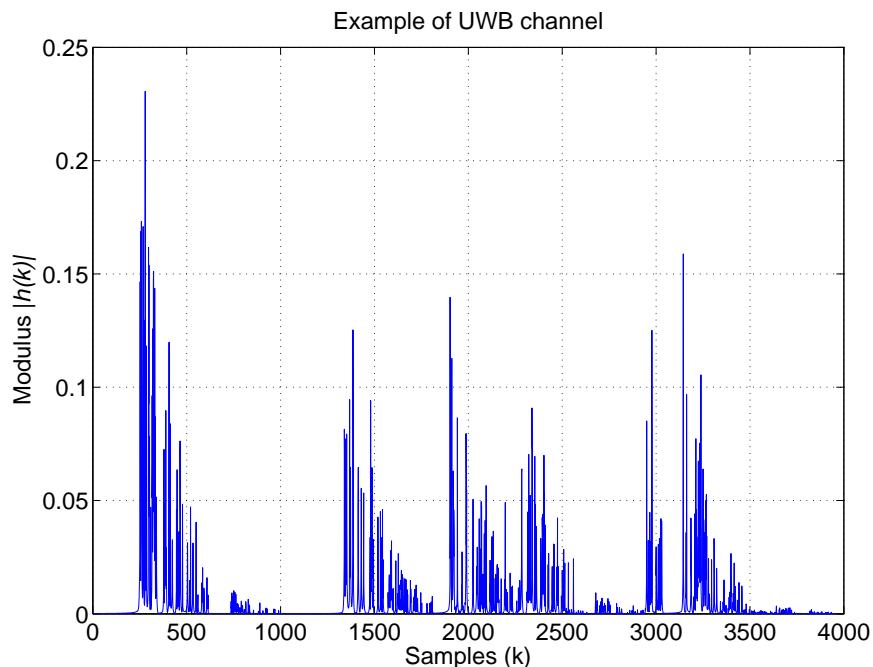


Figura 1.1: Respuesta impulsional de un canal UWB dada por la realización de un modelo estocástico (ver [6]).

1.1.2 Descripción del problema

En un enfoque clásico (ver [9], [2]), la estimación del canal es hecha por medio del entrenamiento de un filtro transversal ('training') como el mostrado en la Figura 1.2 usando algoritmos adaptativos. La salida del sistema viene dada por

$$\hat{y}_M(k) = \sum_{i=0}^M w_{M,i} x(k-i) \quad (1.1)$$

y la respuesta impulsional del sistema asumiendo un estado estacionario de los coeficientes del filtro viene dada por la salida del sistema cuando la entrada es una señal de impulso (delta de Kronecker $\delta(k-i)$), es decir

$$\hat{h}_M(k) = \sum_{i=0}^M w_{M,i} \delta(k-i) \quad (1.2)$$

Viendo esta fórmula se puede observar que corresponde con una secuencia de longitud finita

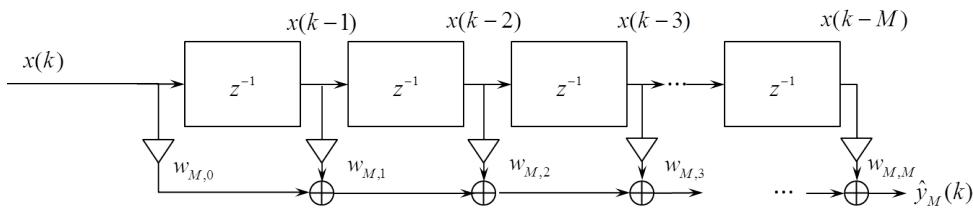


Figura 1.2: Filtro transversal clásico

(FIR), en concreto cada coeficiente del filtro corresponde con una delta de Kronecker (δ_{ik}), lo que unido al hecho de que los canales estudiados poseen una longitud grande hace que sea necesario un filtro de orden elevado para poder estimar correctamente este tipo de canales. Como ejemplo, consideremos el canal mostrado en la Figura 1.3 como una respuesta de un canal UWB idealizado de prueba, es decir, respuesta impulsional larga y la energía concentrada en pequeñas fracciones de intervalos de tiempo. Con un filtro FIR clásico necesitaríamos al menos un filtro de 400 coeficientes para poderlo aproximar correctamente, con lo que saltan a la vista dos problemas, el primero es que se necesita un filtro de orden elevado y el segundo es que la mayoría de los coeficientes del filtro no contienen energía alguna debido a que ésta no está distribuida homogéneamente.

El origen de este problema es la extensión temporal extremadamente corta de las funciones delta de Kronecker, las cuales son las funciones base de los filtros FIR, si consideramos los canales como elementos de un espacio de funciones, haciendo uso de la teoría de espacios de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ y considerando a las deltas de Kronecker como las funciones base. Esto se traduce en que cualquier función del espacio puede ser representada como una suma ponderada de las funciones base

$$h(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i \delta(k-i) \quad (1.3)$$

para hacer una aproximación hay que truncar esta suma a un número finito de términos, esto es

$$\hat{h}_M(k) = \sum_{i=0}^M c_i \delta(k-i),$$

que corresponde con la respuesta de un filtro FIR de orden M .

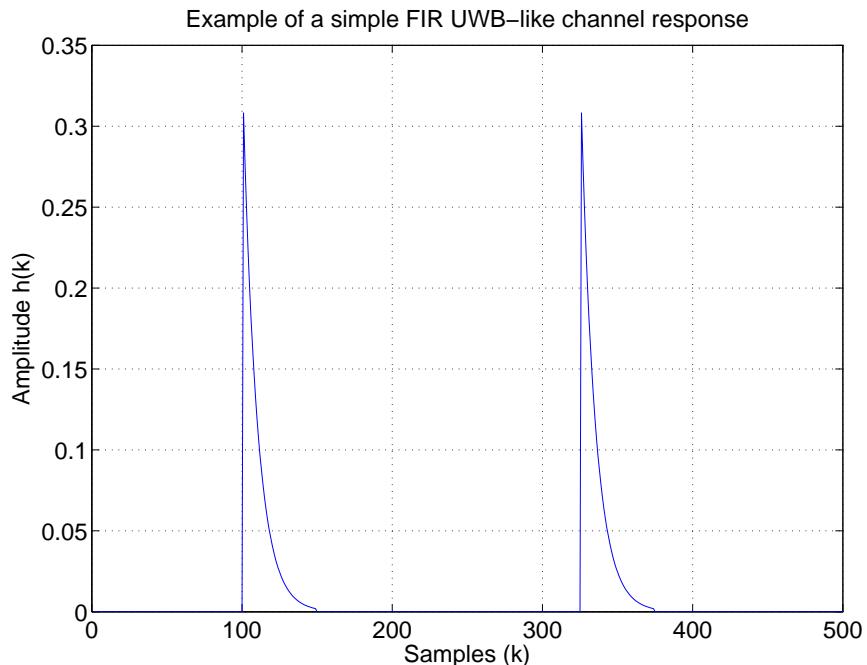


Figura 1.3: Ejemplo de una respuesta FIR que representa de manera sencilla el tipo de canales estudiados.

1.1.3 Solución propuesta

Siguiendo con la idea de las funciones base, se ha dicho que el problema se origina debido a la extremadamente corta extensión temporal de las deltas de Kronecker. Hay muchos otros conjuntos de funciones base, como ejemplo, dos conjuntos muy usados son

$$\begin{aligned} \delta(k - i) &= \delta_{ki} && \text{Delta de Kronecker (Base canónica)} \\ e^{j\omega k i} & && \text{Exponenciales complejas (Series de Fourier)} \end{aligned}$$

La base canónica es apropiada para funciones con extensión temporal corta, es decir funciones localizadas en tiempo, y las series de Fourier son apropiadas para funciones con poca extensión frecuencial, es decir localizadas en frecuencia (o banda estrecha). Lo que está claro es que estos dos conjuntos representan los dos casos extremos, las funciones delta tienen extensión temporal mínima e infinita en el dominio frecuencial y con las exponenciales complejas ocurre lo contrario. La idea que surge es que utilizando otro conjunto de funciones entre estos dos casos extremos, con una extensión temporal más larga se puede llegar a reducir el orden necesario del filtro.

En un primer acercamiento a la solución, se podrían utilizar filtros de respuesta impulsional infinita (IIR) para aproximar estas respuestas impulsionales, pero los filtros IIR conllevan una serie de dificultades, las más importantes son superficies de error multimodales y el problema de la estabilidad (ver [3]). Superficies de error multimodales significa que puede haber mínimos locales que no son mínimos globales, y el problema de la estabilidad hace necesario desarrollar métodos para vigilar la estabilidad del sistema y recuperarla si se ha perdido.

Los filtros de Laguerre se presentan como un compromiso entre los filtros FIR y los IIR. El principal motivo es que poseen (como se verá en el Capítulo 2) un único polo múltiple ajustable, lo que permite garantizar la estabilidad del sistema manteniendo este polo dentro de la circunferencia unidad. Otra de las razones para utilizar estos filtros es la existencia de

Tabla 1.1: Comparación del coste computacional de un filtro RLS-Laguerre Lattice de orden M con un RLS-FIR Lattice de orden M' (normalmente $M \ll M'$). (Reproducido de: ver [4])

Filter	Mult.	Div.	Add.
Laguerre	$17M + 2$	$14M$	$14M + 1$
FIR	$8M'$	$8M'$	$8M'$

algoritmos adaptativos muy eficientes (ver [4], [5]) que poseen una complejidad computacional de orden $O(M)$ (M es el orden del filtro), en concreto se trata de filtros RLS Laguerre en celosía (o conocidos como Lattice), lo que los convierte en una opción factible en comparación con los filtros FIR estándar, como se puede apreciar en la Tabla 1.1.

1.2 Objetivos del trabajo

El objetivo principal es estimar la respuesta impulsional de canales UWB de prueba con un filtro de Laguerre. La calidad de la estimación es evaluada usando el criterio del mínimo error cuadrático medio (m.m.s.e.). Alcanzando idealmente un MSE aceptable con un filtro de menor orden que el que sería necesario con un filtro FIR clásico, para poder reducir el coste computacional. Como objetivo secundario se propone analizar el efecto de la posición del polo de los filtros de Laguerre en la estimación.

1.3 Breve descripción de los capítulos

En el Capítulo 2 se presentan los conjuntos de secuencias ortonormales y las secuencias de Laguerre como tal. El Capítulo 3 presenta el filtro utilizado y la teoría básica de estimación utilizada para calcular y evaluar la estimación del canal.

En el Capítulo 4 se presenta la estimación de un canal de prueba UWB idealizado. En el Capítulo 5 se presenta la estimación de canales UWB generados por el modelo de canal estocástico del estándar IEEE 802.15.4a.

El Capítulo 6 realiza el análisis de los métodods adaptativos de Laguerre.

En el anexo se presenta la memoria del proyecto en inglés completa, la cual posee en esencia el mismo contenido que esta pero más detallado, algunas pruebas con otros canales de prueba y otros entornos UWB que no se incluyen en la presente memoria por motivos de extensión.

2 Secuencias de Laguerre

2.1 Introducción a las secuencias ortonormales

Esta sección presenta conceptos de teoría de sistemas motivados por [11], [7] o [12]. Una señal discreta consiste en un conjunto ordenado de muestras y el conjunto de ceros precedentes, que puede ser representada como $\dots, 0, 0, x(0), x(1), x(2), \dots$ o de manera más compacta como el conjunto $\{x(k)\} = x(k)$ donde k representa la variable de tiempo discreto y varía de $-\infty$ a $+\infty$. Este tipo de señales o conjuntos también es denominado secuencia, que se define en matemáticas como una lista o conjunto ordenado de elementos.

Si consideramos el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ de las secuencias cuadráticamente sumables, toda secuencia $x(k)$ perteneciente a este espacio puede ser representada en términos de un conjunto de secuencias ortonormal completo $\{\phi_i(k)\}$, donde el índice $i = 0, 1, 2, \dots$ se refiere al índice de la secuencia en el conjunto. La expansión viene dada por

$$x(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i \phi_i(k) \quad (2.1)$$

con los coeficientes c_i definidos como

$$c_i = \langle \phi_i(k), x(k) \rangle \quad (2.2)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar de dos secuencias que dà como resultado un valor escalar dado por

$$\langle f(k), g(k) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) g^*(k). \quad (2.3)$$

Una aproximación de la secuencia se puede construir truncando la expansión a un número finito de términos, es decir

$$x_M(k) = \sum_{i=0}^M c_i \phi_i(k) \quad (2.4)$$

y aceptando un error en la aproximación, correspondiente a los términos eliminados de la expansión.

El conjunto de secuencias $\{\phi_i(k)\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ es ortonormal si el producto escalar de cualquier secuencia del conjunto con cualquier otra es nulo y el producto escalar de cualquier secuencia consigo misma da como resultado la unidad. Expresado de manera matemática

$$\langle \phi_i(k), \phi_j(k) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_i(k) \phi_j^*(k) = \delta_{ij} \quad (2.5)$$

con δ_{ij} definida como la delta de Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

desde una perspectiva geométrica el principio de ortogonalidad implica que cada nueva secuencia del conjunto añade una nueva dimensión ortogonal al espacio extendido por el conjunto de secuencias.

Estos conjuntos ortonormales son también llamados funciones base. Los dos conjuntos más usados se corresponden con

$$\begin{aligned} \delta(k-i) & \quad \text{Delta de Kronecker (Base canónica)} \\ e^{j\omega_k i} & \quad \text{Exponenciales complejas (Series de Fourier)} \end{aligned}$$

La base canónica es apropiada para funciones con extensión temporal corta, es decir funciones localizadas, y las series de Fourier son apropiadas para funciones con poca extensión frecuencial, es decir localizadas en frecuencia (o de banda estrecha).

2.2 Secuencias de Laguerre

Las secuencias de Laguerre son la versión discreta de las funciones de Laguerre (procedentes de la ortonormalización de la función $t^i e^{-pt}$, $i \in \mathbb{N}_0$, $p > 0$, ver [1]), llamadas Laguerre porque están relacionadas con los polinomios de Laguerre, que son la solución de la ecuación diferencial de Laguerre. Estas secuencias forman un conjunto ortonormal completo en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ y se obtienen de la ortonormalización de las secuencias $m^i a^m$, $i \in \mathbb{N}_0$, $|a| < 1$ (ver [10]), vienen dadas en el dominio del tiempo discreto por

$$\begin{aligned} l_i(k, a) &= \sqrt{1-a^2} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} \binom{k+i-j}{i} a^{k+i+2j} \\ &= \sqrt{1-a^2} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \frac{(k+i-j)!}{(i-j)!j!(k-j)!} a^{k+i+2j}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

El parámetro a representa la posición del único polo múltiple, que es variado en el eje real dentro de la circunferencia unidad, esto es, de -1 a $+1$ para poder mantener la estabilidad de las funciones (todos los polos de un sistema deben estar dentro de la circunferencia unidad para garantizar la estabilidad), como se representa en la Figura 2.1, enfatizando en el rango de valores reales que llevan a un comportamiento estable.

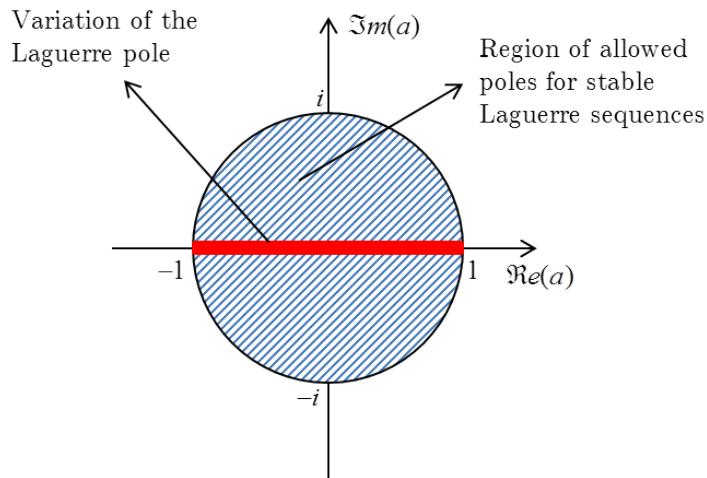


Figura 2.1: Variación de la posición del polo.

Las primeras secuencias de Laguerre son

$$\begin{aligned}
 l_0(k, a) &= \sqrt{1 - a^2} \frac{k!}{0!k!} a^k = \sqrt{1 - a^2} a^k \\
 l_1(k, a) &= \sqrt{1 - a^2} \left(-\frac{(k+1)!}{0!k!} a^{k+1} + \frac{k!}{1!(k-1)!} a^{k-1} \right) = \sqrt{1 - a^2} \left(-(k+1)a^{k+1} + ka^{k-1} \right) \\
 l_2(k, a) &= \sqrt{1 - a^2} \left(\frac{(k+2)!}{2!k!} a^{k+2} - \frac{(k+1)!}{1!(k-1)!} a^k + \frac{k!}{2!(k-2)!} a^{k-2} \right) \\
 &= \sqrt{1 - a^2} \left(\frac{k^2 + 3k + 2}{2} a^{k+2} - (k^2 + k) a^k + \frac{(k^2 - k)}{2} a^{k-2} \right) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Aquí puede apreciarse que las secuencias de Laguerre se componen de diversas secuencias exponenciales multiplicadas por un polinomio solapadas entre sí, siendo a el parámetro de desvanecimiento o decaimiento de la secuencia exponencial, y el orden de la secuencia indica el número de secuencias exponenciales superpuestas.

La representación en el dominio z viene dada por

$$L_i(z, a) = \sqrt{1 - a^2} \frac{(z^{-1} - a)^i}{(1 - az^{-1})^{i+1}} = \underbrace{\frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 - az^{-1}}}_{\text{low-pass}} \underbrace{\left[\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \right]^i}_{\text{all-pass}} = L_0(z, a) [L_A(z, a)]^i \quad (2.7)$$

definiendo $L_0(z, a) = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 - az^{-1}}$ y $L_A(z, a) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$. Aquí puede apreciarse como el parámetro a corresponde con el único polo múltiple de las secuencias y además una de las características principales de estas secuencias que es su sencilla representación en el dominio frecuencial, que puede ser separada en un filtro paso bajo, seguido de una cascada de filtros pasa todo. Esto permite generar las secuencias de Laguerre de manera sencilla con el esquema mostrado en la Figura 2.2, obteniendo la secuencia de Laguerre de orden cero como la salida excitada por un impulso unitario de la sección paso-bajo, la de primer orden como la salida de la primera sección pasa-todo y así en adelante. Si a partir de este esquema tomamos la suma ponderada de las salidas de las diferentes secciones del filtro obtenemos la estructura conocida como el filtro transversal de Laguerre que será estudiado en el capítulo siguiente.

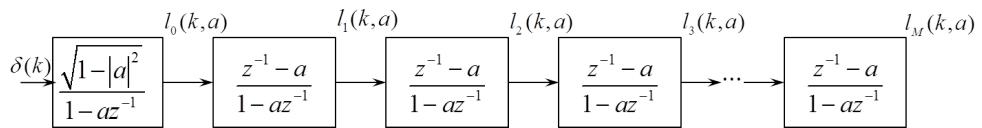


Figura 2.2: Generación de las secuencias de Laguerre.

En la Figura 2.3 se muestran diferentes secuencias de Laguerre desde el orden 0 hasta 200 con diferentes posiciones del polo a . Nótese la dependencia de la extensión temporal de cada secuencia con los dos parámetros principales, el orden de la secuencia y la posición del polo, que define el ratio de decaimiento de la secuencia. Cuanto más cercano a la circunferencia unidad está el polo ($|a|$ cerca de 1), el decaimiento de la secuencia es más lento y por ello posee una mayor extensión temporal. En el caso opuesto, cuando el polo está cerca de cero, el decaimiento es mucho más rápido y la extensión temporal se ve reducida. Con el aumento del orden de la secuencia se puede observar como la extensión temporal se ve incrementada. Con un polo negativo se observa el mismo comportamiento solo que la secuencia oscila más debido al factor $(-1)^k$ que introduce el polo negativo. Cabe destacar que para el caso $a = 0$ (observando la

ecuación 2.7), las secuencias de Laguerre se convierten en la base canónica (deltas de Kronecker), lo cual permitirá considerar los filtros de Laguerre como una generalización de los filtros FIR clásicos.

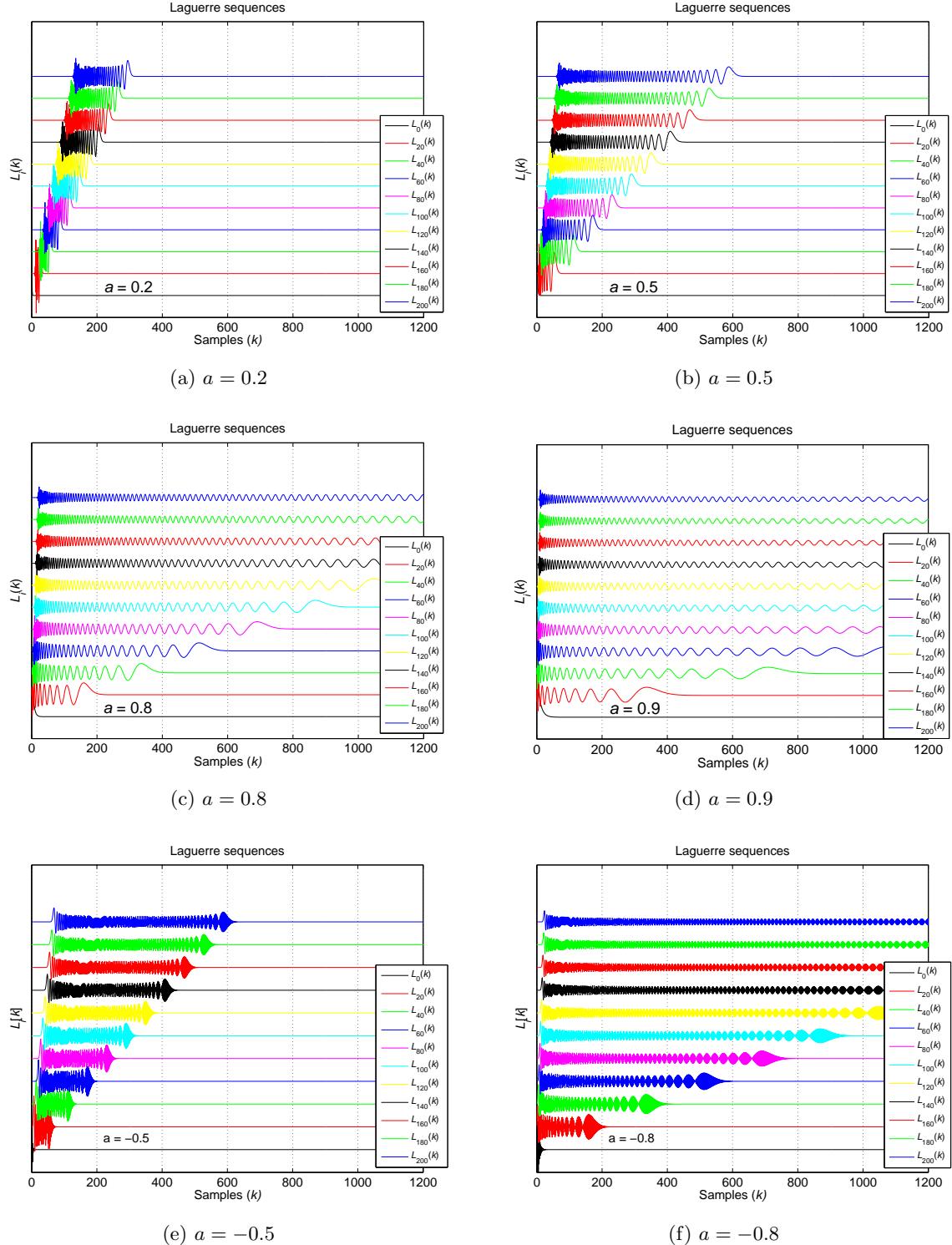


Figura 2.3: Secuencias de Laguerre con diferente posición del polo a .

2.2.1 Longitud de las secuencias de Laguerre

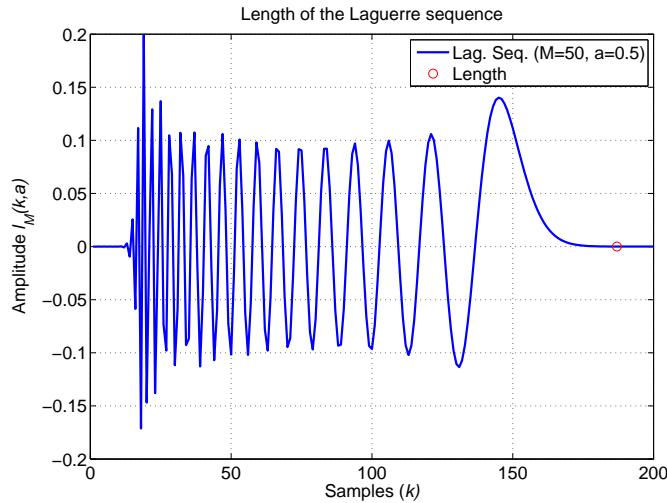


Figura 2.4: Longitud de una secuencia de Laguerre

Un aspecto interesante de las secuencias de Laguerre es la extensión temporal que pueden cubrir, puesto que para poder aproximar una respuesta impulsional larga, de manera intuitiva una elección razonable del polo de las secuencias es aquella que hace que cubran una extensión temporal aproximadamente equivalente a la extensión de la respuesta impulsional. Por este motivo si la longitud (o extensión temporal) de las secuencias de Laguerre se puede modelar, nos permitiría realizar una estimación de una posible posición del polo razonablemente buena usando dicho modelo con un orden y una longitud fija.

La longitud de una secuencia de Laguerre se obtiene localizando la muestra donde el último decaimiento exponencial está por debajo de un umbral como se puede observar en la Figura 2.4. La longitud de las secuencias en función de la posición del polo (a) y el orden de la secuencia (M) es mostrada en la Figura 2.5. Viendo la gráfica en función de la posición del polo se puede observar un comportamiento $\frac{1}{1-a}$ y en la gráfica en función del orden M , uno lineal.

Si modelamos la longitud real de las secuencias como una variable $l(M, a)$, la longitud aproximada está definida por

$$\hat{l}(M, a) = \frac{k_1 M + k_2}{1 - |a|} = k_1 \frac{M}{1 - |a|} + k_2 \frac{1}{1 - |a|} \quad (2.8)$$

los coeficientes k_1 y k_2 pueden ser obtenidos resolviendo un sencillo problema de mínimos cuadrados. Si tenemos la longitud real de las secuencias $l(M_j, a_j)$ para varios pares de valores $\{M_j, a_j\}$ se puede formular el problema

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l(M_1, a_1) \\ l(M_2, a_2) \\ \vdots \\ l(M_N, a_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_1}{1-|a_1|} & \frac{1}{1-|a_1|} \\ \frac{M_2}{1-|a_2|} & \frac{1}{1-|a_2|} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{M_N}{1-|a_N|} & \frac{1}{1-|a_N|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{k} \quad (2.9)$$

la solución de mínimos cuadrados para \mathbf{k} viene dada por (ver [9] para más detalles sobre la

solución de mínimos cuadrados)

$$\mathbf{k} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{l} = \begin{bmatrix} k_1 = 1,8402 \\ k_2 = 20,0563 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

que ha sido calculada utilizando longitudes de secuencias de Laguerre de órdenes desde 1 hasta 200 y posiciones del polo de 0 a 0.95.

El modelo para la aproximación de la longitud de una secuencia de Laguerre queda como

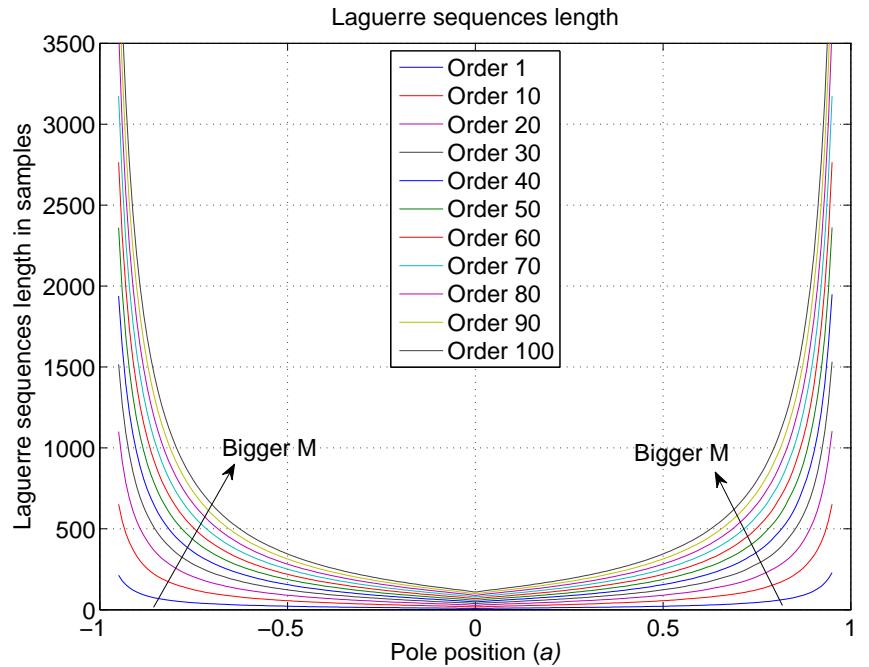
$$\hat{l}(M, a) = \frac{k_1 M + k_2}{1 - |a|}, \text{ with } k_1 = 1,8402 \text{ and } k_2 = 20,0563. \quad (2.11)$$

y la comparación entre los valores reales de longitud y los estimados está representada en la Figura 2.6.

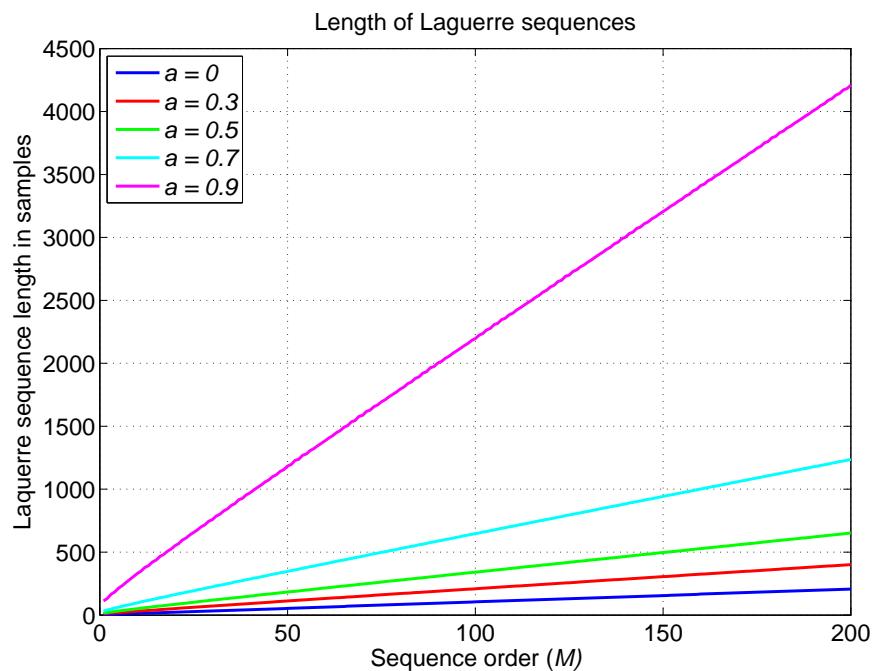
La idea detrás de este modelado de la longitud es poder hacer una estimación de una posición del polo cercana a la óptima cuando la longitud típica del canal l_h es conocida y el orden del filtro M es fijo, despejando a de la Ecuación 2.11

$$|\hat{a}|^{\text{Opt}} = \left| 1 - \frac{k_1 M + k_2}{l_h} \right| \quad (2.12)$$

que es la posición del polo que hace que las secuencias de Laguerre cubran una extensión temporal similar a la longitud de la respuesta impulsional del canal.



(a) En función de la posición del polo a .



(b) En función del orden de secuencia M .

Figura 2.5: Longitud de las secuencias de Laguerre en función del orden de secuencia y de la posición del polo.

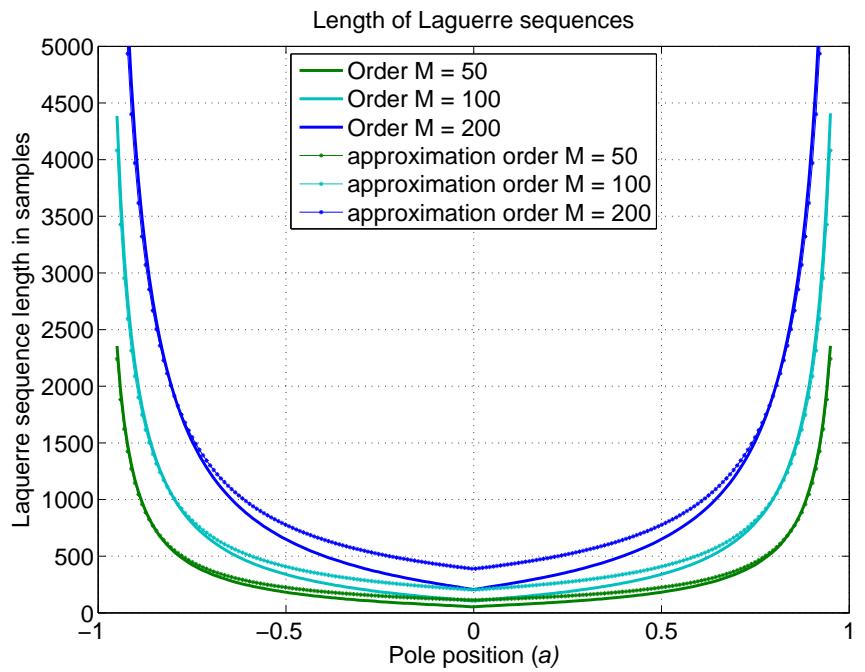
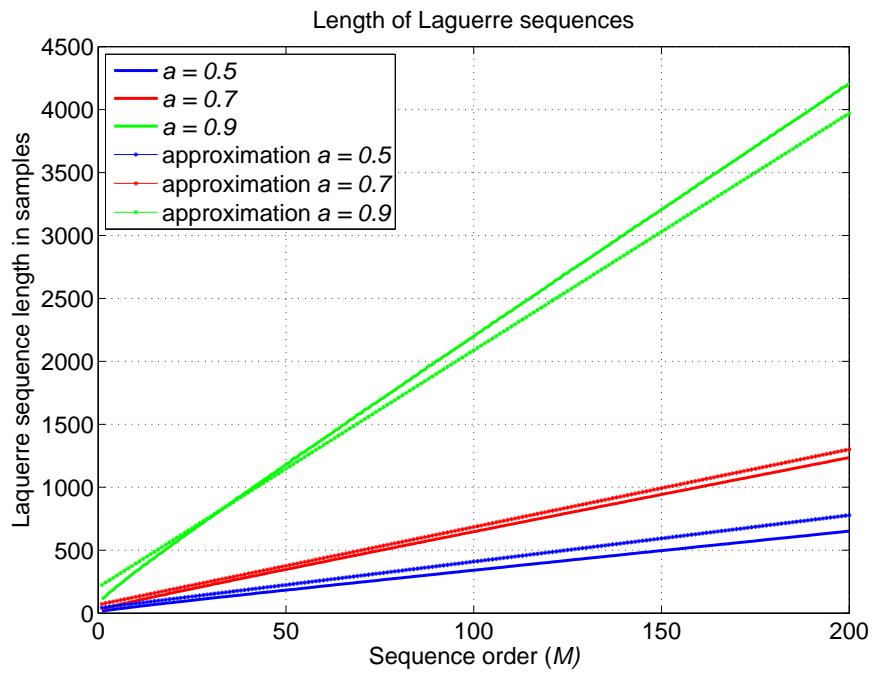
(a) En función de la posición del polo a .(b) En función del orden de secuencia M .

Figura 2.6: Longitud (real y aproximada) de las secuencias de Laguerre.

3 Filtro transversal

3.1 Introducción

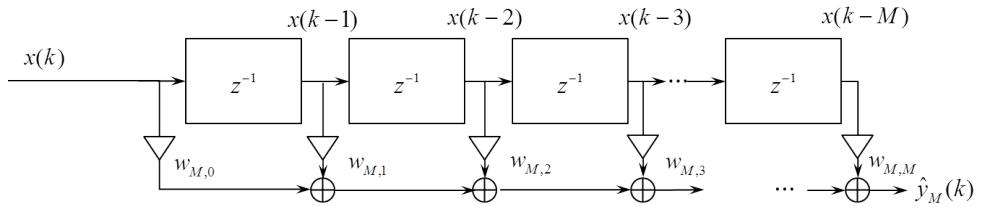


Figura 3.1: Filtro transversal clásico

El filtro transversal es una de las estructuras más usadas dentro del modelado de sistemas lineales, especialmente si se requiere de métodos adaptativos y se le han encontrado aplicaciones en identificación de sistemas, predicción lineal, ecualización de canales y cancelación de eco. La fuente de esta popularidad está en su simplicidad, estabilidad y la existencia de algoritmos rápidos y eficientes. Existen algunas estructuras relacionadas con el filtro transversal que también son muy populares como el filtro en celosía (o "lattice filter"). El filtro FIR transversal clásico es mostrado en la Figura 3.1.

La salida del filtro FIR transversal viene dada por

$$\hat{y}_M(k) = \sum_{i=0}^M w_{M,i} x(k-i) = \mathbf{w}_M \mathbf{x}_M(k) \quad (3.1)$$

definiendo los vectores

$$\mathbf{w}_M = [w_{M,0} \ w_{M,1} \ \cdots \ w_{M,M}] , \quad (3.2)$$

$$\mathbf{x}_M(k) = \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \\ \vdots \\ x_M(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-M) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

siendo \mathbf{w}_M el vector de coeficientes del filtro y $\mathbf{x}_M(k)$ definido como el vector de datos de entrada, también llamado vector de regresión, que en este caso corresponde con los diferentes retardos de la entrada. La razón de denominar a la salida del filtro por $\hat{y}_M(k)$ es que el filtro está diseñado para aproximar la respuesta de un sistema por lo que la salida es una aproximación de orden M de la salida deseada $y(k)$. La respuesta impulsional estimada viene dada por

$$\hat{h}_M(k) = \sum_{i=0}^M w_{M,i} \delta(k-i). \quad (3.4)$$

Como puede observarse, se trata de una respuesta FIR, que si se interpreta como una aproximación en el espacio de Hilbert, está claro que las funciones base de los filtros FIR son las deltas

de Kronecker $\delta(k-i)$, también conocidas como base canónica. La duración finita de la respuesta impulsional permite la mayoría de las ventajas del filtro transversal como su estabilidad y simplicidad pero también es la causa de que cuando se requiera una respuesta impulsional larga, el número de unidades de retardo (o orden del filtro) puede ser muy alto.

Una opción para solventar este problema podrían ser los filtros IIR pero estos tienen sus propios problemas, especialmente si se usan métodos adaptativos, como superficies de error multimodal y inestabilidad (ver [3]). Superficies de error multimodal permiten que existan mínimos locales que no corresponden con mínimos globales y la inestabilidad, relacionada con la adaptación de los polos del sistema (para que un sistema sea estable, sus polos deben estar dentro de la circunferencia unidad), hace necesario el desarrollo de métodos para controlar la estabilidad y recuperarla en caso de perdida. Es aquí cuando los filtros de Laguerre se presentan como una solución compromiso entre los filtros FIR y los IIR.

3.2 Filtro transversal de Laguerre

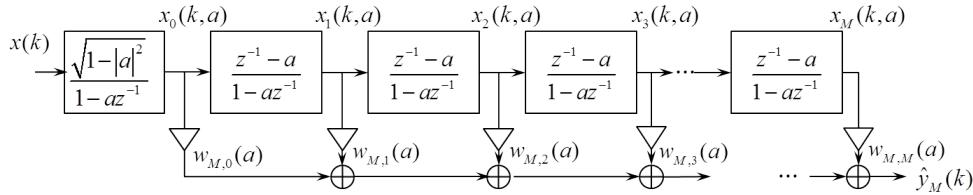


Figura 3.2: Filtro transversal de Laguerre

Como se vió en el Capítulo anterior, las secuencias de Laguerre tienen la siguiente representación en el dominio z

$$L_i(z, a) = \sqrt{1 - a^2} \frac{(z^{-1} - a)^i}{(1 - az^{-1})^{i+1}} = \underbrace{\frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 - az^{-1}}}_{low-pass} \underbrace{\left[\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \right]^i}_{all-pass} = L_0(z, a)[L_A(z, a)]^i \quad (3.5)$$

que se puede expresar como una sección paso bajo $L_0(z, a)$ seguida de una cascada de secciones pasa todo $L_A(z, a)$. Si construimos la suma ponderada de las diferentes secciones obtenemos lo que se conoce como filtro transversal de Laguerre, mostrado en la Figura 3.2 con la salida y la respuesta impulsional dadas por

$$\hat{y}_M(k) = \sum_{i=0}^M w_{M,i}(a) x_i(k, a) = \mathbf{w}_M(a) \mathbf{x}_M(k, a) \quad (3.6)$$

$$\hat{h}_M(k) = \sum_{i=0}^M w_{M,i}(a) l_i(k, a) \quad (3.7)$$

donde ahora el vector $\mathbf{x}_M(k, a)$ es el vector de datos de entrada que consiste en las señales de salida de las diferentes secciones del filtro de Laguerre desde orden 0 hasta M . La posición del polo a se considera en este estudio como un parámetro y no una variable, es decir, es elegido a priori pudiendo variar entre -1 y 1 , permitiendo mantener el filtro estable, lo que constituye una de las razones por las que los filtros de Laguerre son considerados un compromiso entre los filtros IIR y FIR; y permite además controlar el ratio de decaimiento de la respuesta impulsional, lo cual es útil para aproximar respuestas impulsionales muy largas. Cabe destacar que cuando el polo es cero, $a = 0$, el filtro transversal de Laguerre degenera en el filtro FIR transversal, lo cual

permite considerar al filtro de Laguerre como una generalización de los filtros FIR, y a estos como un caso particular de los filtros de Laguerre.

3.3 Teoría básica de estimación lineal

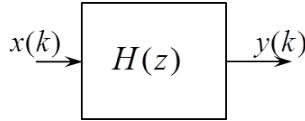


Figura 3.3: Modelo de canal simple

Una vez que tenemos el filtro, vamos a definir el sistema en el cual vamos a realizar la estimación. Para este caso vamos a utilizar el sistema mostrado en la Figura 3.3, definiendo $x(k)$ como la señal de entrada, $H(z)$ o $h(k)$ como el canal a estimar y $y(k)$ como la salida. La razón de no incluir ruido en este sistema tan simple para que sea mas realista es debido a que esto es un estudio teórico de la viabilidad de los filtros de Laguerre estimando canales y el ruido únicamente añadiría limitaciones a la calidad de la estimación, de hecho si se añadiera ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN) el efecto conseguido sería que el error cuadrático medio (MSE) resultante tuviera un valor asintótico limitado por el SNR efectivo del sistema.

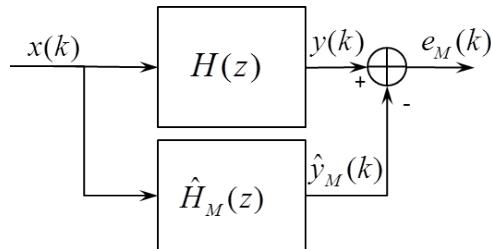


Figura 3.4: Modelo de estimación de canal.

En el modelo de estimación mostrado en la Figura 3.4 se introduce el sistema estimado de orden M , $\hat{H}_M(z)$ o $\hat{h}_M(k)$, la estimación de la salida $y(k)$ de orden M , $\hat{y}_M(k)$ y la señal de error $e_M(k)$

$$\hat{y}_M(k) = \sum_{i=0}^M w_{M,i} x_i(k) = \mathbf{w}_M \mathbf{x}_M(k), \quad (3.8)$$

$$e_M(k) = y(k) - \hat{y}_M(k). \quad (3.9)$$

Un pequeño detalle a tener en cuenta es que la señal de error está definida en términos de $y(k)$ y no de $h(k)$ (el objetivo es estimar el canal $h(k)$), pero si el error resultante se normaliza por la varianza de $y(k)$ ($\sigma_y^2 \triangleq \mathbb{E}[y(k)y^*(k)]$), se obtiene un error normalizado que corresponde con el error de estimación del sistema.

Una vez que la señal de error es definida se necesita un criterio para establecer una función de coste a minimizar, en este caso el criterio del mínimo error cuadrático medio (m.m.s.e.), que establece como función de coste el error cuadrático medio (MSE)

$$J(\mathbf{w}_M) = \mathbb{E}[e_M(k)e_M^*(k)] = \underbrace{\mathbb{E}[|e_M(k)|^2]}_{MSE} \quad (3.10)$$

y minimiza este coste eligiendo de manera correcta los coeficientes del filtro \mathbf{w}_M

$$\mathbf{w}_M = \underset{\mathbf{w}_M}{\operatorname{argmin}}(J(\mathbf{w}_M)).$$

La minimización de la función de coste se puede realizar de varias maneras, en la práctica se realiza mediante métodos adaptativos que minimizan la función de coste de manera iterativa como se verá en el Capítulo 6. En este caso la minimización de la función de coste se realizará con el conocimiento perfecto de las estadísticas de segundo orden de las señales del sistema y da como resultado la llamadas ecuaciones normales (ver memoria en el anexo para más detalles sobre la minimización)

$$\boxed{\mathbf{w}_M \mathbf{R}_x = \mathbf{p}_{yx}} \quad (3.11)$$

definiendo la matriz de autocorrelación \mathbf{R}_x y el vector de correlación cruzada \mathbf{p}_{yx} como

$$\mathbf{R}_x \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{x}_M(k)\mathbf{x}_M^H(k)] \quad (3.12)$$

$$\mathbf{p}_{yx} \triangleq \mathbb{E}[y(k)\mathbf{x}_M^H(k)]. \quad (3.13)$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones normales ya que poseen una importante interpretación geométrica que se puede apreciar mejor si se escriben de la siguiente manera equivalente

$$\boxed{\mathbb{E}[e_M(k)\mathbf{x}_M^H(k)] = 0} \quad (3.14)$$

en la cual se ve la importante interpretación geométrica que poseen: Establecen una condición de ortogonalidad entre la señal de error $e_M(k)$ y el vector de datos $\mathbf{x}_M(k)$, de hecho con cualquier transformación lineal de los datos, esto quiere decir que ninguna otra transformación lineal de los datos puede extraer información extra sobre la señal deseada (para reducir el error en media).

$$e_M \perp x_M$$

3.4 Coeficientes de correlación

Para calcular los coeficientes $w_{M,i}$ del filtro necesitamos resolver las ecuaciones normales y para ello necesitamos el conocimiento de las estadísticas de segundo orden del sistema representadas por \mathbf{R}_x y \mathbf{p}_{yx} . Cada coeficiente de correlación viene dado por

$$r_{ij} = \mathbb{E}[x_i(k, a)x_j^*(k, a)] \quad (3.15)$$

$$p_i = \mathbb{E}[y(k)x_i^*(k, a)] \quad (3.16)$$

que puede ser calculado de manera numérica en el dominio del tiempo tomando una media aritmética basada en un número finito de puntos N

$$\begin{aligned} r_{ij} &\simeq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_i(k, a)x_j^*(k, a) \\ p_i &\simeq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(k)x_i^*(k, a). \end{aligned}$$

Sin embargo, se ha visto en el Capítulo anterior que las secuencias de Laguerre poseen una representación frecuencial simple, lo que intuitivamente puede proporcionar una mejor manera de calcular estos coeficientes utilizando el teorema de Parseval para pasar de la representación

temporal a una en el dominio de la frecuencia

$$r_{ij} = \mathbb{E}[x_i(k, a)x_j^*(k, a)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_i(e^{j\omega}, a)X_j^*(e^{j\omega}, a) d\omega \quad (3.17)$$

la representación frecuencial de la salida i -ésima del filtro de Laguerre, $x_i(k, a)$ viene dada por

$$X_i(e^{j\omega}, a) = X(e^{j\omega})L_i(e^{j\omega}, a) = X(e^{j\omega})L_0(e^{j\omega}, a)[L_A(e^{j\omega}, a)]^i \quad (3.18)$$

observando que $L_A^*(e^{j\omega}, a) = \frac{1}{L_A(e^{j\omega}, a)}$

$$X_j^*(e^{j\omega}, a) = X^*(e^{j\omega})L_0^*(e^{j\omega}, a)[L_A^*(e^{j\omega}, a)]^j = X^*(e^{j\omega})L_0^*(e^{j\omega}, a)[L_A(e^{j\omega}, a)]^{-j} \quad (3.19)$$

los coeficientes pueden ser expresados como

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_i(e^{j\omega}, a)X_j^*(e^{j\omega}, a) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})|L_0(e^{j\omega}, a)|^2[L_A(e^{j\omega}, a)]^{i-j} d\omega \end{aligned} \quad (3.20)$$

y definiendo la densidad espectral de potencia de $x(k)$ como $\phi_{xx}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})$,

$$r_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi_{xx}(e^{j\omega})|L_0(e^{j\omega}, a)|^2[L_A(e^{j\omega}, a)]^{i-j} d\omega \quad (3.21)$$

la dependencia en $i - j$ lleva a una estructura Toeplitz de la matriz \mathbf{R}_x .

Procediendo de la misma manera para los coeficientes de correlación cruzada

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Y(e^{j\omega})X_i^*(e^{j\omega}, a) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Y(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})L_0^*(e^{j\omega}, a)[L_A(e^{j\omega}, a)]^{-i} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}, a)X^*(e^{j\omega}, a)L_0^*(e^{j\omega}, a)[L_A(e^{j\omega}, a)]^{-i} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi_{xx}(e^{j\omega})H(e^{j\omega})L_0^*(e^{j\omega}, a)[L_A(e^{j\omega}, a)]^{-i} d\omega \end{aligned} \quad (3.22)$$

sustituyendo las funciones de transferencia de los filtros de Laguerre $L_0(e^{j\omega})$ y $L_A(e^{j\omega})$ por su expresión

$$r_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\Phi_{xx}(e^{j\omega})(1-a^2)}{|1-ae^{j\omega}|^2} \left(\frac{e^{j\omega}-a}{1-ae^{j\omega}} \right)^{j-i} d\omega \quad (3.23)$$

$$p_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega})\sqrt{1-a^2}}{1-ae^{j\omega}} \left(\frac{e^{j\omega}-a}{1-ae^{j\omega}} \right)^i d\omega \quad (3.24)$$

3.5 Método de solución de las ecuaciones normales

Primero se calculan los coeficientes de correlación para un polo a y un orden M dados, teniendo en cuenta que al tener estructura Toeplitz la matriz \mathbf{R}_x , solo se necesita calcular un vector \mathbf{r} de

esta, es decir, se calculan (ver [11])

$$r_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\Phi_{xx}(e^{j\omega})(1-a^2)}{|1-ae^{j\omega}|^2} \left(\frac{e^{j\omega}-a}{1-ae^{j\omega}} \right)^i d\omega, \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (3.25)$$

$$p_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega})\sqrt{1-a^2}}{1-ae^{j\omega}} \left(\frac{e^{j\omega}-a}{1-ae^{j\omega}} \right)^i d\omega, \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (3.26)$$

Una vez que se tienen los dos vectores calculados, se procede a la solución del sistema de ecuaciones

$$\mathbf{w}_M \mathbf{R}_x = \mathbf{p}_{yx}. \quad (3.27)$$

Este sistema puede ser resuelto por los métodos clásicos de inversión de matrices (eliminación Gaussiana, ...) sin embargo al poseer la matriz \mathbf{R}_x una estructura Toeplitz se puede resolver el sistema de ecuaciones de manera eficiente por medio de un método recursivo explotando la estructura de los datos. Este método es el algoritmo de Levinson-Durbin (ver memoria adjunta en el anexo para explicación), que para hallar la solución de orden M utiliza la solución de orden $M-1$.

El algoritmo modificado de Levinson-Durbin utilizado da como resultado los coeficientes c_i de la expansión ortonormal de $\hat{y}_M(k)$ asumiendo un conjunto de secuencias ortonormales $\phi_i(k)$ (estas secuencias ortonormales son en realidad las secuencias de error de predicción hacia atrás $e_i^b(k)$ como se ve en la explicación del algoritmo en los anexos)

$$\hat{y}_M = \sum_{i=0}^M c_i \phi_i(k) \quad (3.28)$$

con

$$c_i = \langle y, \phi_i \rangle$$

nótese que los coeficientes c_i no dependen del orden del filtro porque son los coeficientes de la expansión ortonormal de $y(k)$. El error cuadrático medio (MSE) para cada orden M es calculado como

$$MSE = J_{\min} = \mathbb{E}|e_M|^2 = \langle e_M, e_M \rangle = \langle (y - \hat{y}_M), e_M \rangle$$

recordando que la señal de error (debido a las ecuaciones normales) es ortogonal a todas las combinaciones lineales de los datos (es decir, \hat{y}_M)

$$MSE = J_{\min} = \langle y, e_M \rangle = \sigma_y^2 - \langle y, \hat{y}_M \rangle = \sigma_y^2 - \sum_{i=0}^M c_i \langle y, \phi_i(k) \rangle = \sigma_y^2 - \sum_{i=0}^M |c_i|^2.$$

Normalizando el resultado respecto a la energía de $y(k)$ para obtener el error normalizado

$$NMSE = 1 - \sum_{i=0}^M \frac{|c_i|^2}{\sigma_y^2}$$

que es el resultado que pretendíamos obtener desde un principio, el error cuadrático medio normalizado de la estimación del sistema por medio de un filtro de Laguerre.

4 Aproximación de un canal UWB FIR idealizado

4.1 Introducción

Para poder analizar el comportamiento de los filtros de Laguerre en el ámbito de los canales UWB, empezaremos con un modelo de canal idealizado. Los canales UWB usados en este estudio están modelados por el estándar IEEE 802.15.4a (ver [6]), modelo basado en un comportamiento clusterizado de los diferentes tiempos de llegada de los ecos y un PDP (power delay profile) exponencial. Los canales presentan una respuesta impulsional larga y para entornos sin línea de visión (NLOS, non line of sight) no tiene por qué haber un eco dominante. La respuesta impulsional más simple respondiendo a estas características es un canal FIR consistente de dos PDPs exponenciales retardadas, por ejemplo

$$h(k) = 0.8^k u(k) + 0.8^{k-150} u(k - 150), \quad k = 0, 1, \dots, 200 \quad (4.1)$$

con $u(k)$ la función escalón

$$u(k) = \begin{cases} 1 & : k \geq 0 \\ 0 & : k < 0 \end{cases}$$

representada en la Figura 4.1. La razón de no usar todavía el modelo estocástico de canales UWB es que para poder interpretar los resultados primero es mejor trabajar con un modelo determinista simplificado.

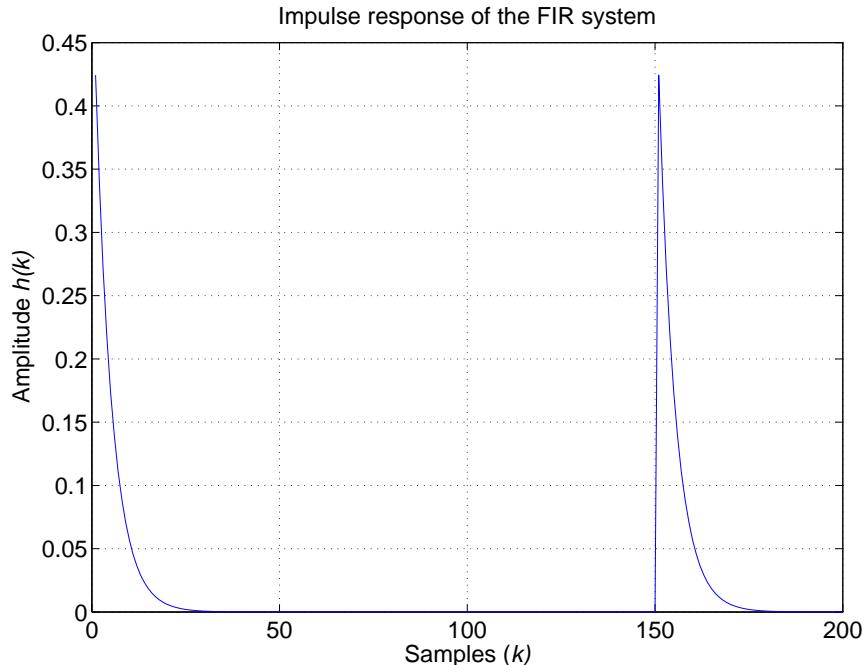


Figura 4.1: Respuesta impulsional del canal UWB FIR idealizado.

4.2 Error cuadrático medio (MSE) en la aproximación

En la Figura 4.2 se muestra el MSE normalizado (NMSE) para el canal FIR presentado en función de la posición del polo para diferentes órdenes del filtro. Un NMSE de 0 dB corresponde con un error igual a la unidad, lo que significa que no hay aproximación alguna (máximo error), por otro lado un NMSE de $-\infty$ dB corresponde con un error nulo, lo que significa una aproximación perfecta. La posición del polo varía desde -1 a 1 como ya se explicó en el Capítulo 2, destacando que $a = 0$ se corresponde con el caso FIR.

Tabla 4.1: NMSE para un filtro de Laguerre de orden 60 con diferentes posiciones del polo.

filtro	posición del polo (a)	NMSE (en dB)
FIR transversal	0	-3 dB
Laguerre	0.5	-7.2 dB
Laguerre	0.7	-8.1 dB
Laguerre	0.64 (posición óptima)	-8.2 dB

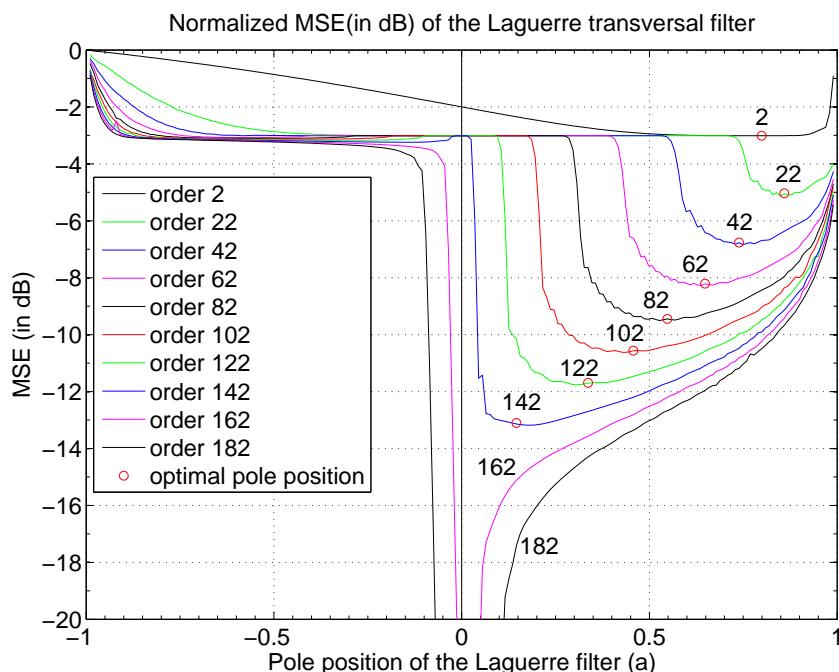


Figura 4.2: MSE normalizado de la aproximación del canal FIR en función de la posición del polo para diferentes órdenes del filtro (nota: $a = 0 \triangleq$ filtro FIR).

Hay varias conclusiones interesantes que se pueden derivar de la figura, la primera de ellas es que para el caso FIR ($a = 0$) el NMSE está atascado en -3 dB hasta que el orden del filtro alcanza 150, lo cual es algo fácil de entender intuitivamente puesto que volviendo a la Figura 4.1 se puede ver claramente que con un filtro FIR de orden menor que 150 sólo se puede aproximar el primer PDP, que corresponde con la mitad de la energía, es decir 3 dB. Otra cosa interesante es que la posición óptima del polo empieza en la constante de tiempo del sistema, en este caso 0.8, para aumentar hasta la unidad y entonces ir disminuyendo con el orden hasta cero cuando el orden del filtro es comparable con la longitud del canal como se puede ver en la Figura 4.4. Esto se debe a que cuando tenemos un orden mucho más pequeño que la longitud del canal se

necesitan secuencias de más duración para poder aproximar mejor (polo cercano a 1) y cuando el orden es comparable a la longitud, se utilizan polos más pequeños (polo cercano a cero) porque ofrecen una mejor resolución temporal que genera una mejor aproximación.

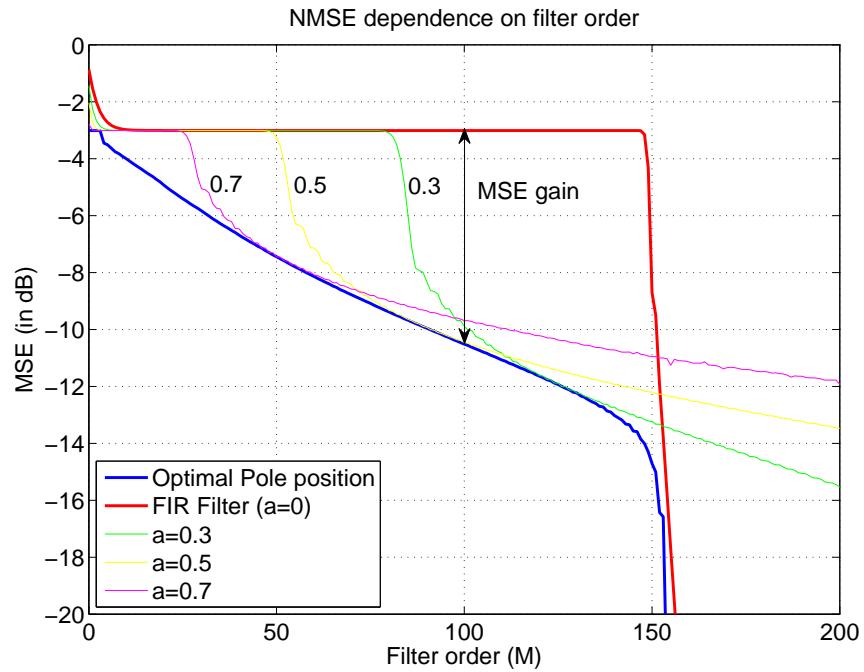


Figura 4.3: MSE normalizado de la estimación del canal FIR en función del orden del filtro para diferentes posiciones del polo (nota: $a = 0 \triangleq$ filtro FIR).

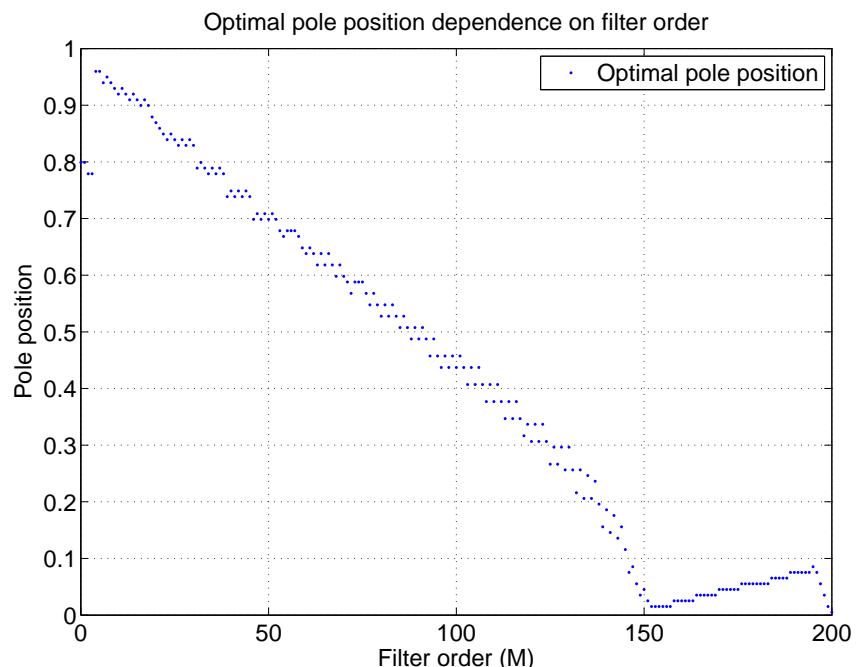


Figura 4.4: Variación de la posición óptima del polo en función del orden del filtro.

Para ver de manera mas clara estos resultados, la información se reorganiza para producir la Figura 4.3 que representa el NMSE esta vez como función del orden del filtro para algunas posiciones de polo concretas. En esta figura se puede ver como hay un intervalo en el cual los filtros de Laguerre producen un mejor resultado que los FIR hasta que el orden del filtro alcanza un valor comparable con la longitud del canal. Algunos resultados numéricos se muestran en la tabla 4.1.

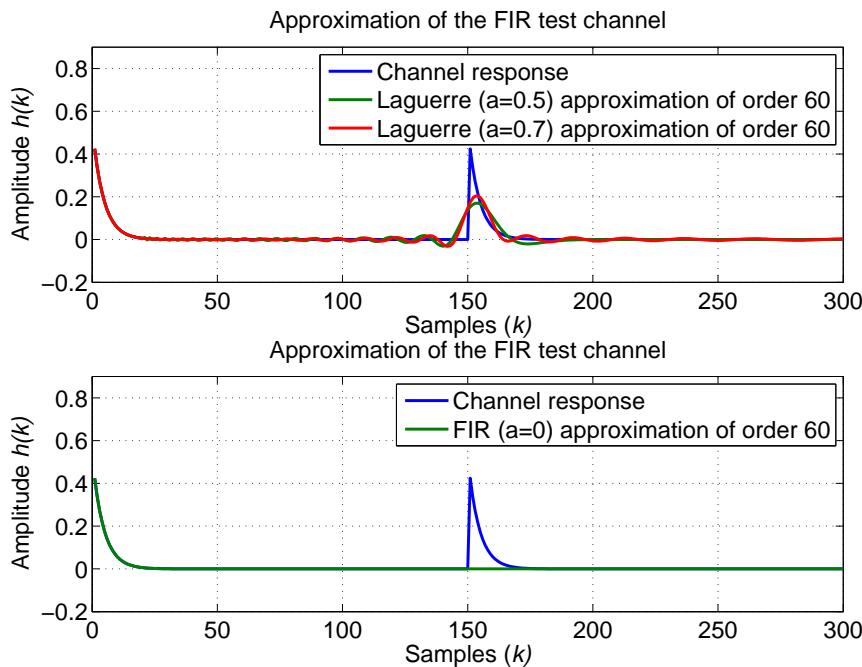


Figura 4.5: Aproximación del canal FIR con un filtro de Laguerre de orden 60.

Un ejemplo de la aproximación producida se muestra en la Figura 4.5, aquí se puede apreciar como el filtro FIR solo puede aproximar las primeras 60 muestras del canal (se trata de un filtro de orden 60), mientras que el filtro de Laguerre puede aproximar más longitud del canal porque tiene una mayor extensión temporal. También puede apreciarse un problema relacionado con los filtros de Laguerre debido a las discontinuidades o cambios abruptos en el canal, viendo como en estos puntos se generan oscilaciones (previas y posteriores) que no deberían estar, similar al fenómeno de Gibbs en el análisis de Fourier. Este efecto es causa del comportamiento paso bajo de los filtros de Laguerre (recuérdese que se componen de un filtro paso bajo seguido de una cascada de filtros paso alto) que hace que no pueda generar las componentes de alta frecuencia que intrínsecamente poseen los cambios abruptos o discontinuidades.

Los canales UWB utilizados en este estudio son canales complejos debido a una fase compleja aleatoria que se le asigna a cada componente multicamino, como se verá en el siguiente Capítulo. Esto ocasiona que las partes real e imaginaria del canal posean un comportamiento oscilatorio. Para captar mejor este comportamiento se propone una pequeña variación al canal de prueba utilizado que consiste en asignarle un signo aleatorio lo que le da un comportamiento oscilatorio, como se muestra en la Figura 4.6.

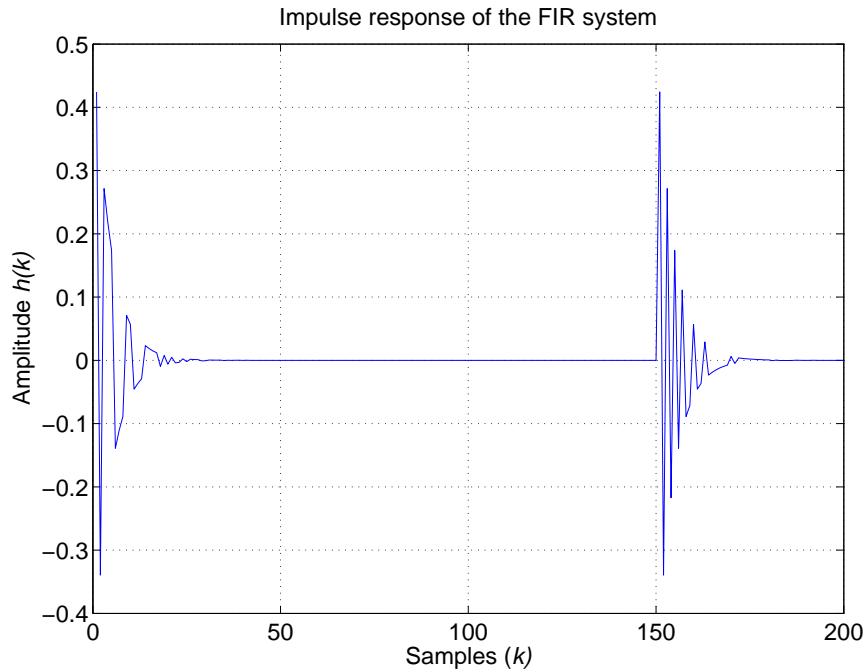


Figura 4.6: Impulse response of the FIR channel

El MSE resultante se muestra en las Figuras 4.7 y 4.8, que muestran que los polos óptimos siguen manteniendo un comportamiento similar solo que esta vez son negativos, para poder captar mejor el carácter oscilatorio del canal.

Las conclusiones que pueden tomarse de este análisis son que existe un intervalo de órdenes del filtro en el cual los filtros de Laguerre proporcionan un menor MSE que los filtros FIR, escogiendo correctamente el polo del filtro. Este intervalo viene delimitado por el orden del filtro comparable con la longitud de la respuesta impulsional del canal. La posición del polo cambia conforme aumentamos el orden del filtro, siendo un valor cercano a la unidad para órdenes pequeños (para tener secuencias de más duración y poder aproximar mejor respuestas impulsionales largas) y un valor cercano a cero para órdenes comparables con la longitud del canal (donde el filtro FIR es la mejor opción porque posee una mejor resolución temporal).

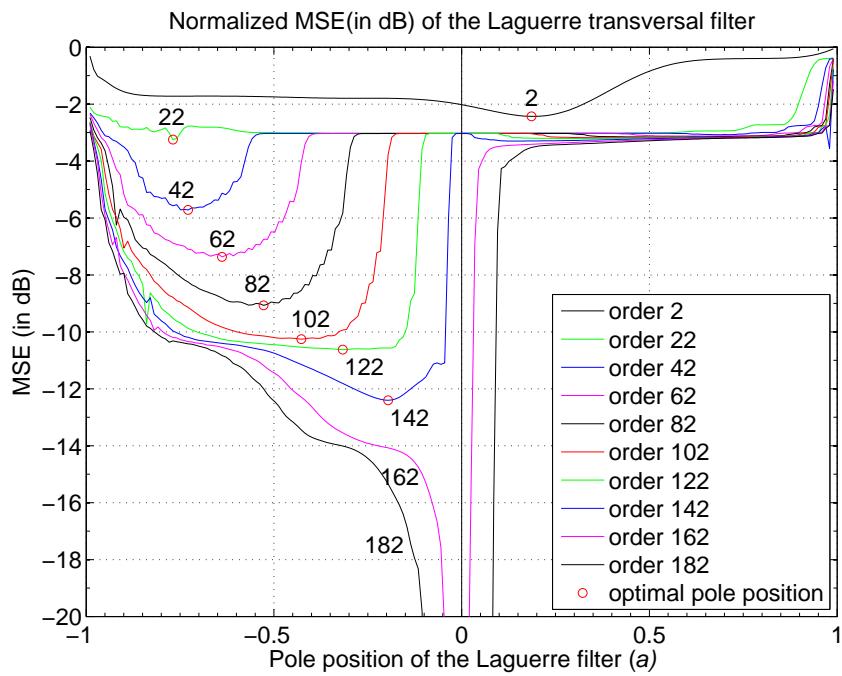


Figura 4.7: MSE normalizado de la aproximación del canal FIR en función de la posición del polo para diferentes órdenes del filtro (nota: $a = 0 \triangleq$ filtro FIR).

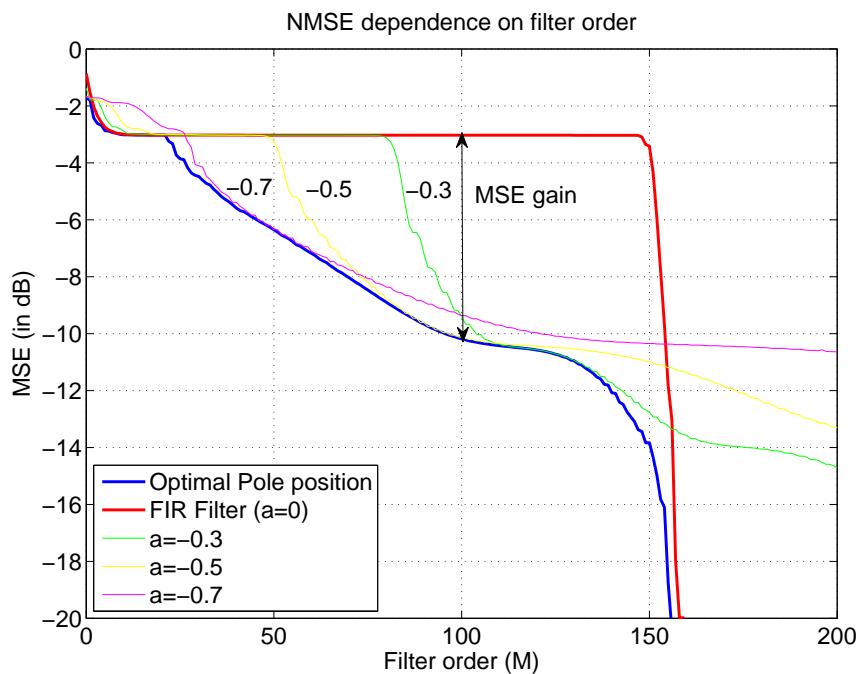


Figura 4.8: MSE normalizado de la estimación del canal FIR en función del orden del filtro para diferentes posiciones del polo (nota: $a = 0 \triangleq$ filtro FIR).

5 Canales UWB

5.1 Introducción

Las comunicaciones de banda ultra ancha (UWB) son un tema muy actual tanto en el mundo académico como empresarial, debido al uso de anchos de banda de transmisión muy amplios permitiendo algunas capacidades deseables como posicionamiento y medición precisos, alta capacidad de acceso múltiple, comunicaciones encubiertas, ...

El IEEE estableció un grupo de estandarización, el IEEE 802.15.4a (rectificación sobre el IEEE 802.15.4) que describe la capa física y de acceso al medio para comunicaciones UWB. El modelo de la capa física corresponde con el modelo utilizado en este estudio.

La mayoría de los modelos de canal para comunicaciones inalámbricas se basan en la propagación de una señal a través de un canal consistente de varios caminos (o ecos) también conocido como propagación multicamino. Cada componente multicamino tiene su amplitud y su retardo que son caracterizados para describir el modelo.

Los sistemas UWB cubren un ancho de banda de casi 10 GHz, lo que produce nuevos efectos. Uno puede ser que solo unas pocas componentes multicamino se solapen como resultado de la mayor resolución del sistema, lo que ocasiona que las estadísticas no sean Rayleigh (como en la mayoría de modelos) y que halla intervalos de muestreo que estén vacíos (no contienen energía recibida).

5.2 UWB IEEE 802.15.4a Standard model

El modelo de canal propuesto por el grupo de estandarización (ver [6]) cubre el rango de 2 a 10 GHz para varios entornos (indoor residential, indoor office, industrial, outdoor y open outdoor). El documento proporciona una implementación del modelo en MATLAB®.

El modelo está basado en un modelo Saleh-Valenzuela (ver [8]). En particular, las componentes multicamino son modeladas en clústeres en lugar de un continuo como en los canales de banda estrecha. Esto es resultado del corto intervalo de muestreo. Las componentes multicamino son agrupadas en dos categorías diferentes: como cluster y como eco dentro de un cluster. Además el "power delay profile" es modelado como un decaimiento exponencial dentro de los clústeres y para los mismos clústeres .

5.3 Estimación del canal

En este estudio se utilizará el entorno de área residencial sin línea de visión (residential NLOS) del modelo de canales UWB debido a que cumple con el comportamiento esperado de los canales UWB que inspiró el canal de prueba idealizado del Capítulo 4. La estimación de canal se lleva a cabo usando el método descrito en el Capítulo 3.

Algunas realizaciones del modelo estocástico pueden ser vistas en la Figura 5.1.

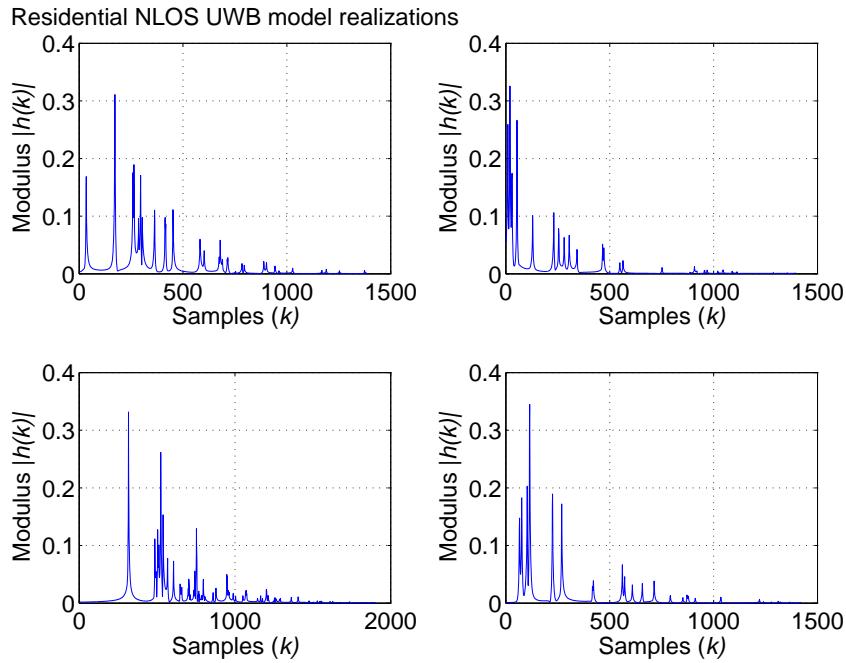


Figura 5.1: Realizaciones del modelo estocástico de canales UWB.

Si nos centramos primero en una realización del modelo, como la mostrada en la Figura 5.2, podemos calcular el MSE resultante de estimar este sistema con filtros de Laguerre de diferentes ordenes y posiciones del polo. En la Figura 5.2, se puede ver que la longitud efectiva del canal es de 1000 muestras mas o menos (dato que permitirá obtener una estimación de una posición óptima del polo como se vió en el Capítulo 2), luego un filtro de orden 200 o 300 debería ser suficiente para poder estimar correctamente gran parte de su respuesta impulsional.

En la Figura 5.3 se muestra el NMSE para esta respuesta impulsional para filtros con órdenes desde 50 hasta 300 en función de la posición del polo a . Puede apreciarse como los filtros de Laguerre con una elección apropiada de la posición del polo pueden proporcionar un menor MSE que los filtros FIR ($a = 0$) para esta realización del canal. También puede verse que las posiciones óptimas del polo son negativas, esto ocurre debido a que el modelo estocástico proporciona canales complejos con una fase compleja aleatoria para cada componente multicamino, lo cual hace que las partes real e imaginaria del canal posean un comportamiento oscilatorio y por ello un polo negativo funcione mejor para este tipo de canales puesto que el término $(-1)^k$ que introduce genera un comportamiento oscilatorio, como se puede ver en la Figura 5.4.

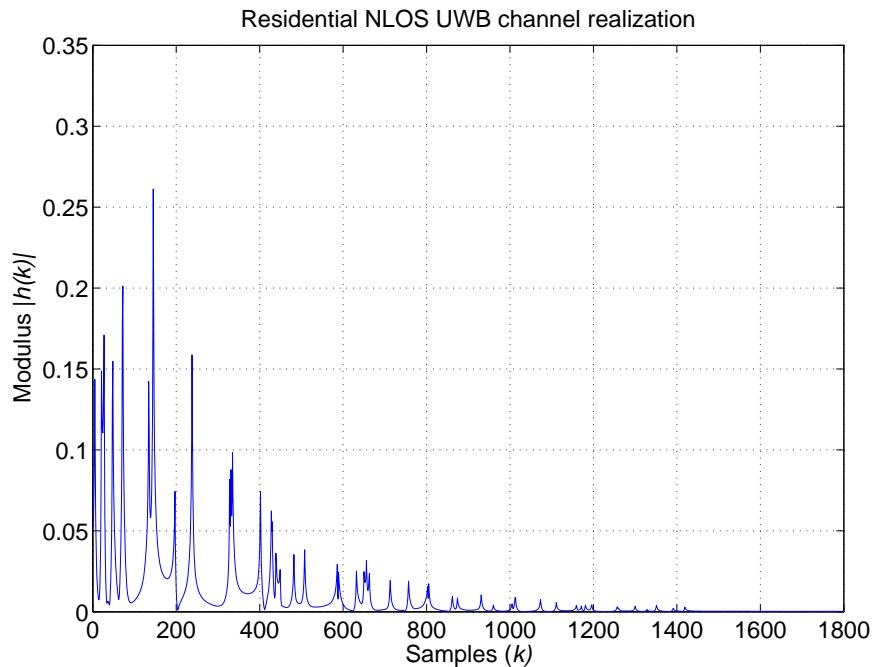


Figura 5.2: Realización del modelo estocástico de canales UWB.

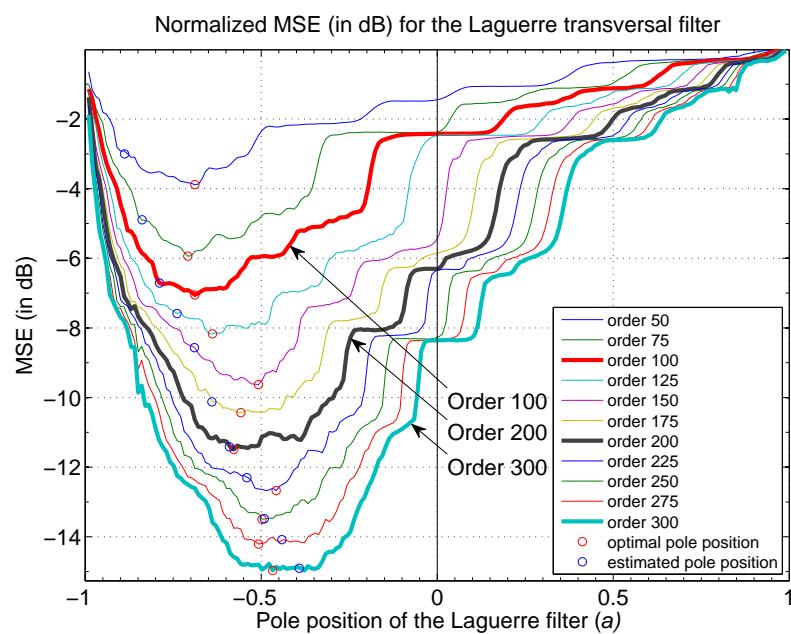


Figura 5.3: MSE normalizado de la estimación del canal UWB en función de la posición del polo para diferentes órdenes del filtro (nota: $a = 0 \triangleq$ filtro FIR).

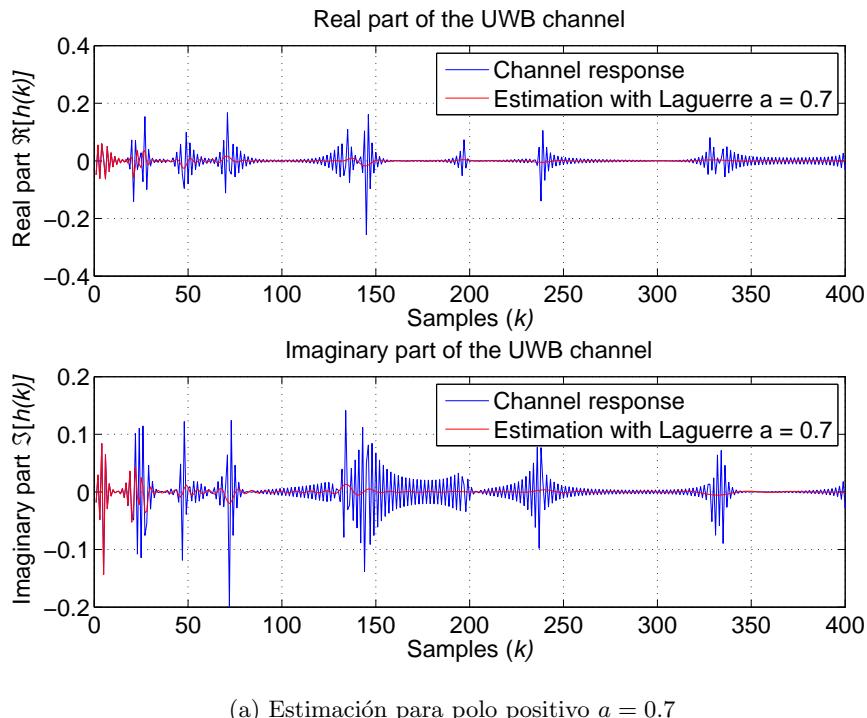
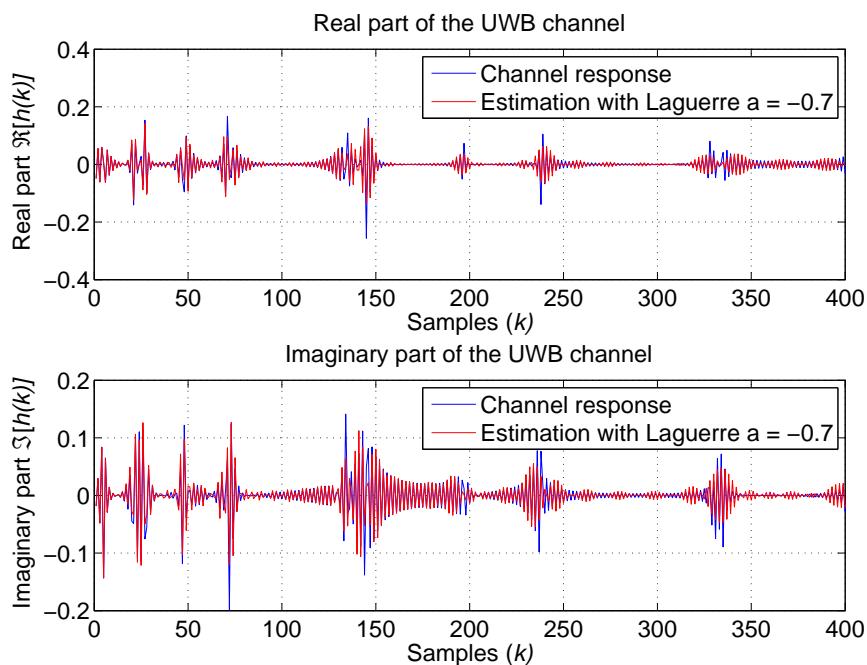
(a) Estimación para polo positivo $a = 0.7$ (b) Estimación para polo negativo $a = -0.7$

Figura 5.4: Efecto del signo del polo en la estimación de un canal complejo con un filtro de Laguerre de orden 100.

Volviendo a la Figura 5.3, puede observarse que las posiciones de polo óptimas y las estimadas (utilizando el criterio descrito en el Capítulo 2, que aprovecha el conocimiento de la longitud del canal y hace coincidir ésta con la longitud cubierta por las secuencias de Laguerre) están cerca, lo cual muestra que la estimación del polo realizada no es perfecta pero da una posición

suficientemente cercana de manera muy sencilla (utilizando un modelo lineal) que resulta en un pequeño deterioro del MSE. Una representación equivalente a la Figura 5.3 en función del orden del filtro es mostrada en la Figura 5.5, que permite ver estos resultados de manera más clara. Se puede apreciar un decremento sobre 5 dB del MSE y también lo cercana que está la curva de MSE de las posiciones de polo estimadas respecto la óptima.

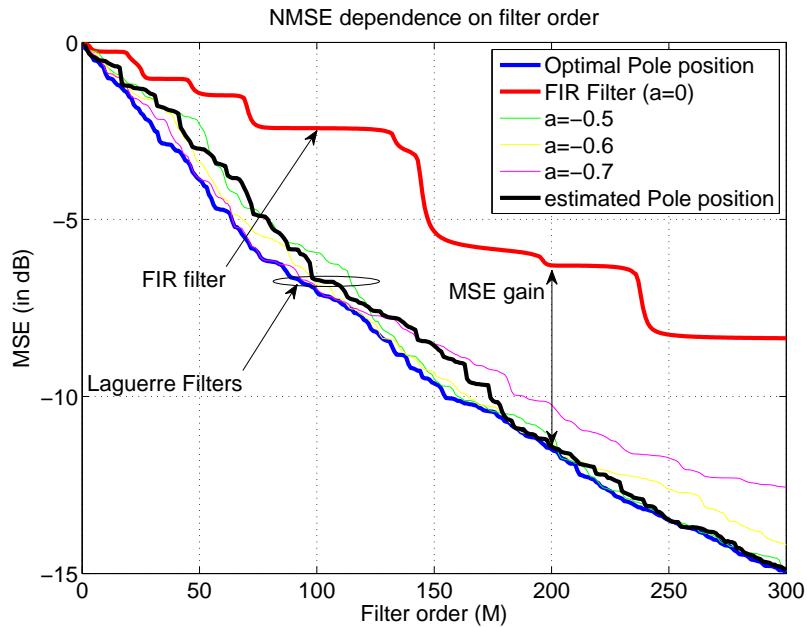


Figura 5.5: MSE normalizado de la estimación del canal UWB en función del orden del filtro para diferentes posiciones del polo (nota: $a = 0 \triangleq$ filtro FIR).

Algunos valores numéricos son mostrados en la Tabla 5.1, que contiene el NMSE para filtros de orden 100, 200 y 300 con diferentes posiciones del polo (recordar que el filtro FIR es un filtro Laguerre con posición del polo $a = 0$). Si calculamos la ganancia en MSE por los diferentes filtros de Laguerre en comparación con el filtro FIR como $\Delta_{\text{MSE}} = \text{MSE}^{\text{FIR}} - \text{MSE}^{\text{Lag}}$, se obtiene la Tabla 5.2, que muestra para la posición del polo estimada una ganancia sobre 5 dB que puede obtenerse con los filtros de Laguerre.

Tabla 5.1: NMSE obtenida estimando una realización de canal UWB con filtros de diferentes órdenes y posiciones del polo.

filtro	posición del polo(a)	Orden 100	Orden 200	Orden 300
FIR transversal filter	0	-2.4 dB	-6.3 dB	-8.4 dB
Laguerre filter	-0.5	-5.9 dB	-11.1 dB	-14.9 dB
Laguerre filter	-0.7	-7.0 dB	-10.2 dB	-12.6 dB
Laguerre filter	Óptima	-7.1 dB	-11.5	-15.0 dB

La posición óptima del polo para cada orden del filtro es mostrada en la Figura 5.6 junto con la estimada.

Tabla 5.2: Δ_{MSE} o ganancia MSE obtenida estimando una realización de canal UWB con filtros de diferentes órdenes y posiciones del polo.

pole position (a)	Order 100	Order 200	Order 300
-0.5	3.5 dB	4.8 dB	6.5 dB
-0.7	4.6 dB	3.9 dB	4.2 dB
<i>Estimated</i>	4.3 dB	5.1 dB	6.5 dB
<i>Optimal</i>	4.7 dB	5.2 dB	6.6 dB

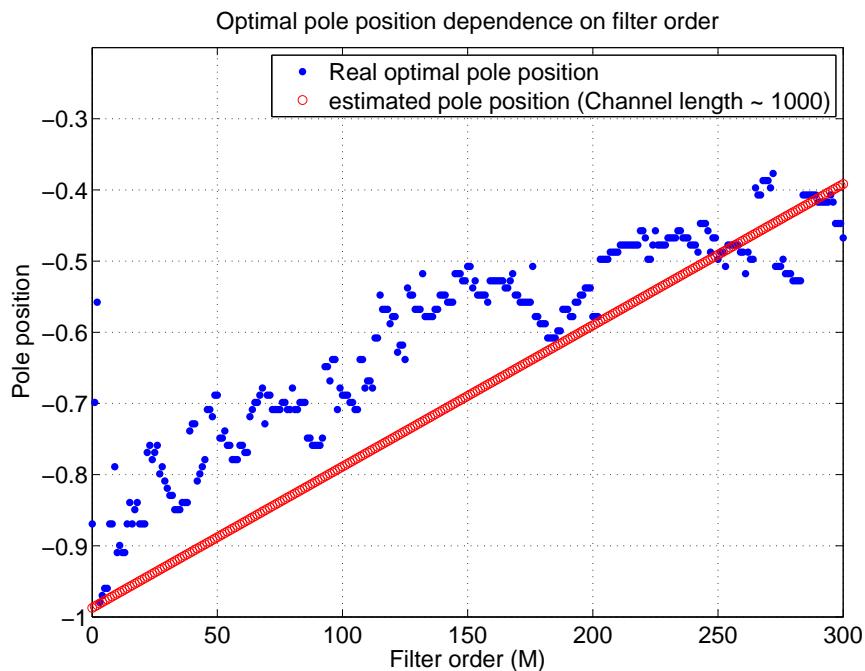


Figura 5.6: Variación de la posición óptima (y estimada) del polo para el filtro de Laguerre en función del orden del filtro.

Una vez que el caso concreto de una realización ha sido estudiado, un caso más general se puede obtener analizando el comportamiento de varias realizaciones del experimento estocástico. En concreto se realiza la estimación de canal por medio de un filtro de Laguerre de orden hasta 300 de 500 realizaciones del modelo estocástico de canales UWB.

Primero de todo el NMSE en media para las 500 realizaciones del canal se representa como función de la posición del polo para algunos órdenes del filtro en la Figura 5.7 y como función del orden del filtro para varias posiciones del polo en la Figura 5.8. Aquí se puede apreciar un incremento de 4 o 5 dB para los filtros de Laguerre en comparación con los FIR. Otra vez las posiciones óptimas del polo son negativas por los mismos motivos explicados anteriormente y las posiciones estimadas del polo parecen ser una buena elección por su cercanía a las posiciones óptimas lo que se traduce en un pequeño deterioro del MSE. Si observamos la Figura 5.8, la curva del MSE para las posiciones del polo estimadas y la óptima están muy cerca. Las posiciones óptimas del polo y las estimadas son mostradas en la Figura 5.9.

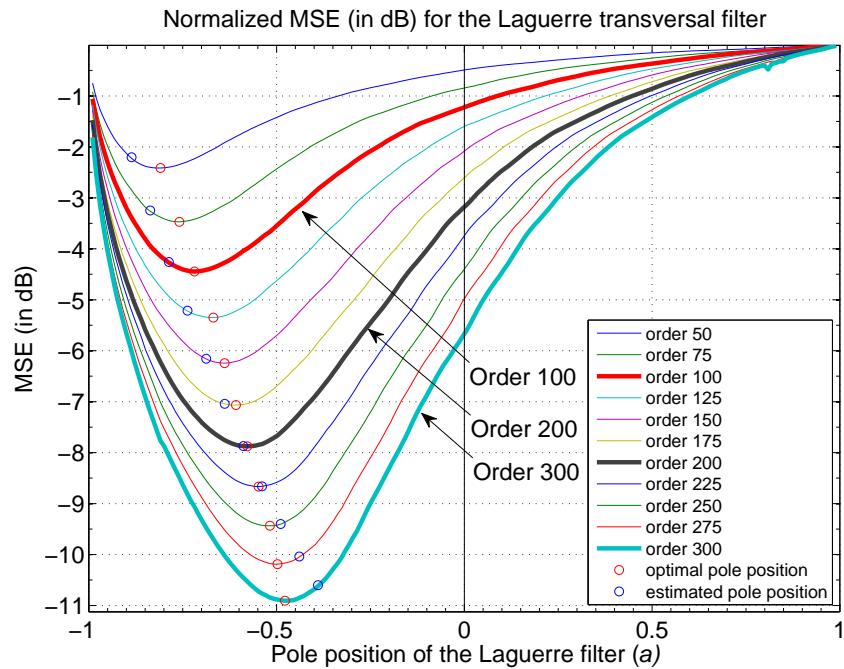


Figura 5.7: MSE normalizado medio de la estimación de los canales UWB en función de la posición del polo para diferentes órdenes del filtro (nota: $a = 0 \triangleq$ filtro FIR).

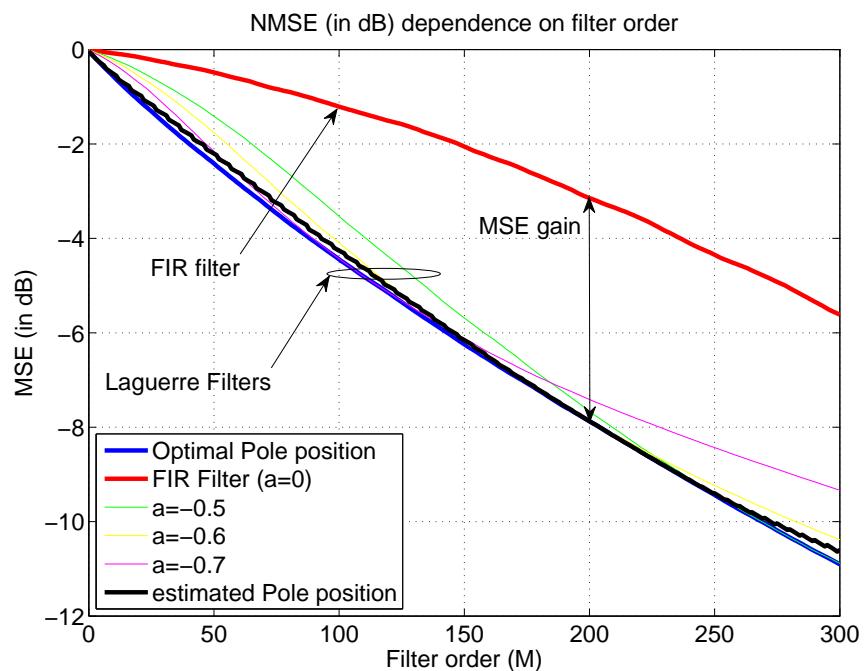


Figura 5.8: MSE normalizado medio de la estimación de los canales UWB en función del orden del filtro para diferentes posiciones del polo (nota: $a = 0 \triangleq$ filtro FIR).

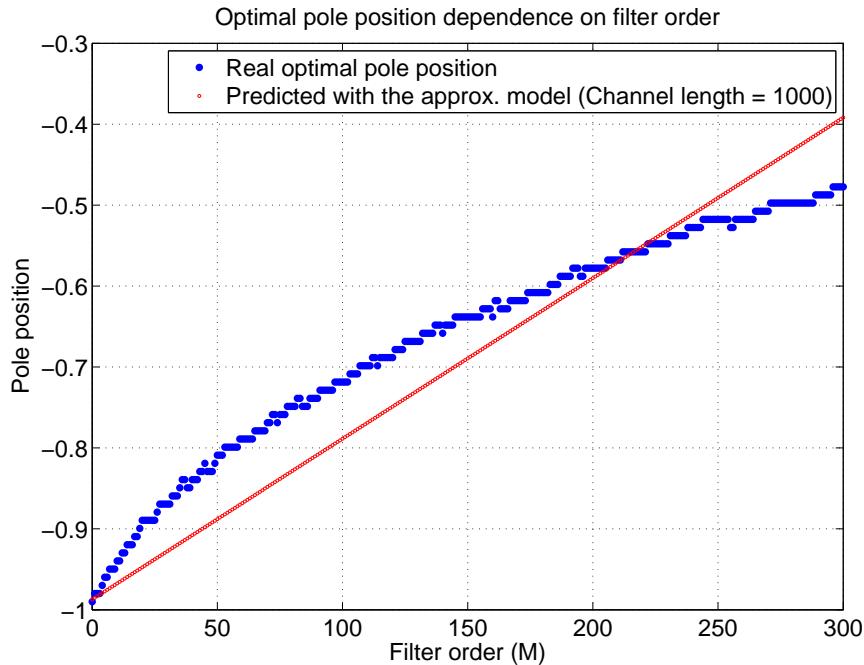


Figura 5.9: Variación de la posición óptima (y estimada) del polo para el filtro de Laguerre en función del orden del filtro.

La función de densidad de probabilidad (pdf) experimental para el MSE es obtenida para filtros de órdenes 100, 200 y 300 y posiciones del polo $a = 0, -0.5, -0.7$ y la óptima para cada orden (nota: $a = 0$ corresponde con el filtro FIR transversal). La razón de elegir -0.7 y -0.5 es que viendo el comportamiento en la Figura 5.7 ambos parecen ser una buena elección, además el filtro correspondiente con $a = -0.5$ conlleva una implementación computacional eficiente porque una multiplicación o división por una potencia de 2 es muy sencilla con tecnología digital (se reduce a añadir ceros o eliminar bits). Los resultados son resumidos en la Tabla 5.3, y representados en las Figuras 5.10, 5.11 y 5.12 para los órdenes 100, 200 y 300 respectivamente. Las figuras muestran que en general los filtros de Laguerre ofrecen mejores resultados proporcionando un menor MSE para un orden dado, con mejoras medias de 3.2 dB, 4.7 dB y 5 dB para filtros de orden 100, 200 y 300 respectivamente con una posición del polo óptima como se puede ver en la Tabla 5.4. Este mejor comportamiento responde al hecho de que los filtros de Laguerre son una generalización de los filtros FIR y como tal pueden funcionar mejor o igual que los filtros FIR.

Tabla 5.3: Estadísticas del NMSE (en dB) obtenido estimando canales UWB con filtros de diferente orden y varias posiciones del polo.

filtro	posición del polo (a)	Orden 100		Orden 200		Orden 300	
		Media	Std	Media	Std	Media	Std
FIR transversal filter	0	-1.5	1.7	-3.7	2.5	-6.6	3.0
Laguerre filter	-0.5	-4.0	2.0	-8.3	2.4	-11.6	2.5
Laguerre filter	-0.7	-4.7	1.7	-7.7	1.9	-9.6	2.0
Laguerre filter	Óptima	-4.7	1.7	-8.4	2.2	-11.6	2.5

Tabla 5.4: Δ_{MSE} o ganancia MSE en media, obtenida estimando canales UWB con filtros de órdenes y posiciones del polo diferentes.

pole position (a)	Order 100	Order 200	Order 300
-0.5	2.5 dB	4.6 dB	5 dB
-0.7	3.2 dB	4.0 dB	3 dB
Estimated	3.0 dB	4.7 dB	4.9 dB
Optimal	3.2 dB	4.7 dB	5 dB

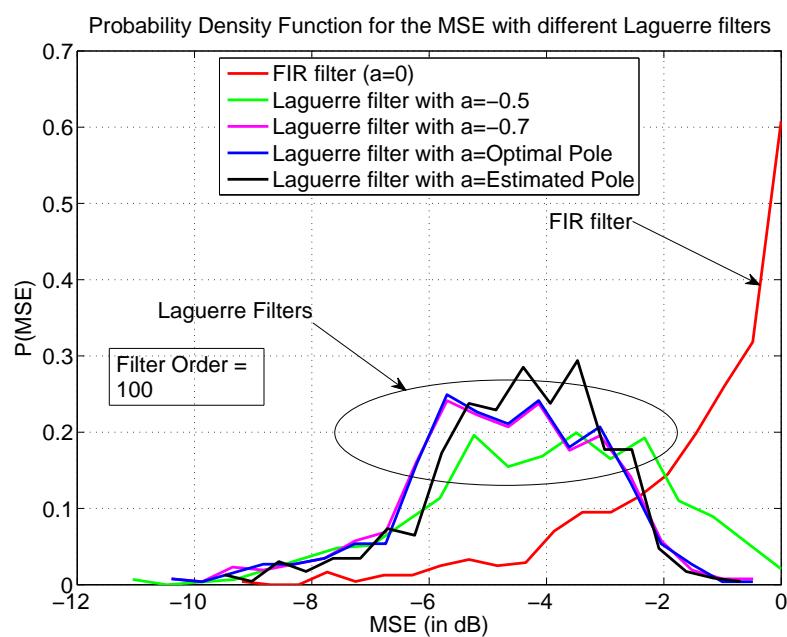


Figura 5.10: Función de densidad de probabilidad del MSE normalizado para un filtro de Laguerre de orden 100 con diferentes posiciones del polo.

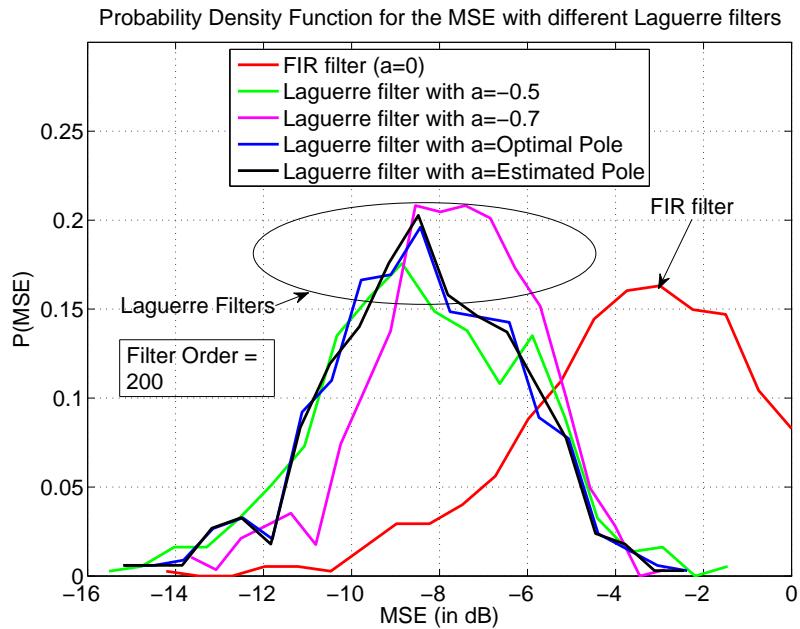


Figura 5.11: Función de densidad de probabilidad del MSE normalizado para un filtro de Laguerre de orden 200 con diferentes posiciones del polo.

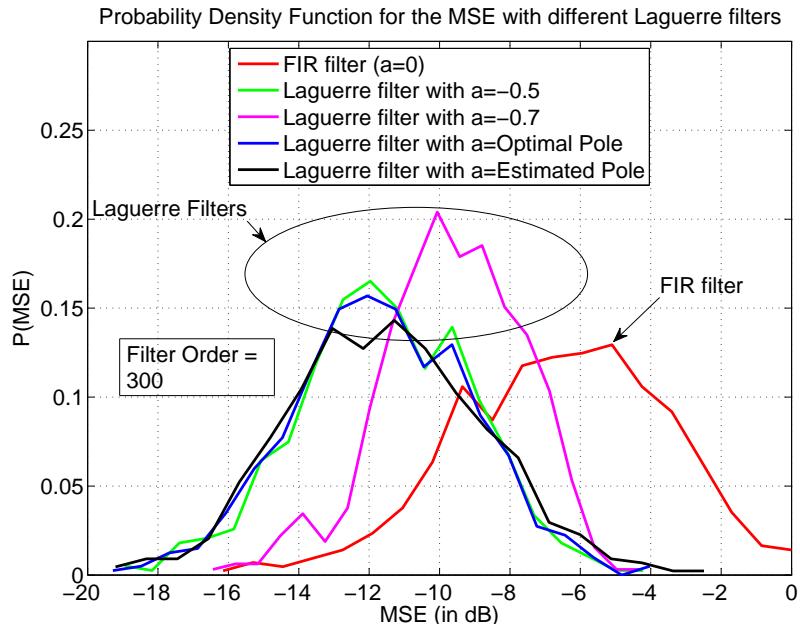


Figura 5.12: Función de densidad de probabilidad del MSE normalizado para un filtro de Laguerre de orden 300 con diferentes posiciones del polo.

Si el orden necesario para cumplir un MSE específico (-3 dB, -6 dB y -10 dB) se calcula, se obtienen los resultados mostrados en la Figura 5.13 y la Tabla 5.5.

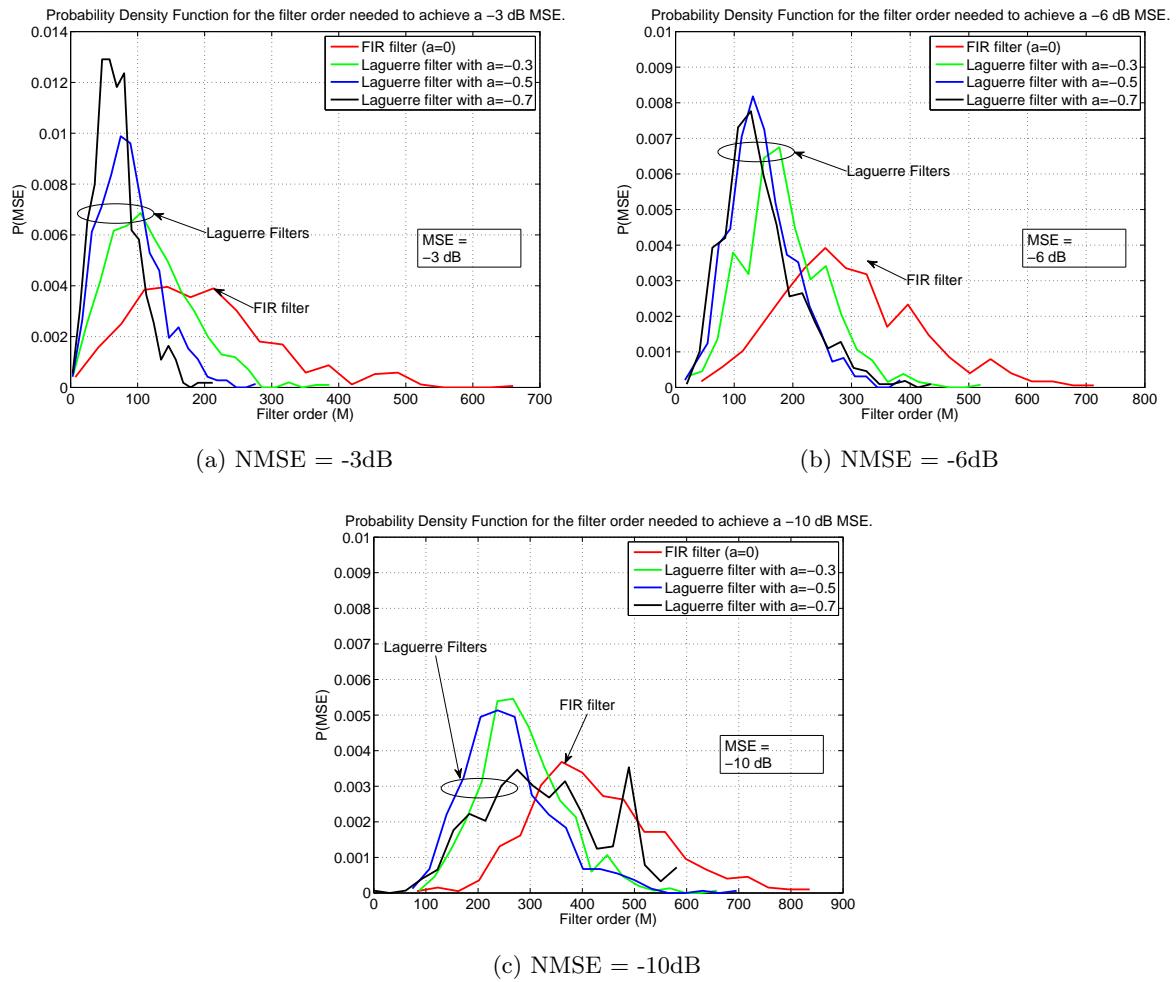


Figura 5.13: Orden necesario por los diferentes filtros para obtener un NMSE específico(-3dB, -6dB and -10 dB).

Tabla 5.5: Estadísticas del orden necesario por los diferentes filtros para obtener un NMSE específico.

filtro	posición del polo (a)	-3dB NMSE		-6dB NMSE		-10dB NMSE	
		Media	Std	Media	Std	Media	Std
FIR transversal	0	197	106	296	118	425	124
Laguerre	-0.3	118	62	187	73	285	83
Laguerre	-0.5	88	44	150	58	260	89
Laguerre	-0.7	69	33	148	66	327	116

6 Métodos adaptativos

6.1 Introducción

En los capítulos anteriores, se resolvió el problema de estimación de manera teórica conociendo de manera exacta las estadísticas de segundo orden de las señales involucradas en el sistema. En la práctica esta situación no es la real y el problema se resuelve ajustando los coeficientes del filtro por medio de métodos adaptativos usando una secuencia de entrada conocida (secuencia de entrenamiento). Los métodos adaptativos constituyen una solución iterativa al problema de minimización de la función de coste o del error cuadrático medio. En este capítulo el índice de tiempo discreto k se cambiará por i , puesto que ahora el tiempo discreto es interpretado como iteración.

$$\hat{y}_M(i) = \sum_{j=0}^M w_{M,j}(i) x_j(i) = \mathbf{w}_i \mathbf{x}_M(i) \quad (6.1)$$

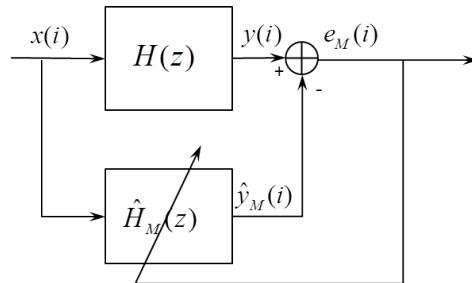


Figura 6.1: Modelo usado para la adaptación.

El modelo de adaptación usado es el mostrado en la Figura 6.1. Conceptos comunes en los métodos adaptativos son la convergencia ($E[e_M(i)] \xrightarrow[i \rightarrow +\infty]{} J_{\min}$, con J_{\min} el MSE teórico/asintótico, que coincide con el calculado en los capítulos previos) y velocidad de convergencia (como de rápido se alcanza este valor asintótico o como de larga ha de ser la secuencia de entrenamiento).

El método escogido para esta sección es el algoritmo RLS (del inglés, Recursive-Least-Squares algorithm), que es uno de los algoritmos adaptativos más usados, puesto que presenta una rápida convergencia y hay muchas implementaciones eficientes (en términos de coste computacional), como los algoritmos RLS lattice (ver [4], [5]). La descripción y desarrollo precisos de este método se puede encontrar en cualquier buen libro sobre métodos adaptativos, como [9] y [2].

6.2 Algoritmo RLS

El algoritmo RLS puede verse de dos maneras diferentes. La primera es como una solución del método de steepest descent con un gradiente estocástico que emplea una aproximación más sofisticada para la matriz de autocorrelación \mathbf{R}_x , dada por una media ponderada exponencial-

mente

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i \lambda^{i-j} \mathbf{x}_M(j) \mathbf{x}_M^H(j)$$

en lugar de una aproximación instantánea como en el método de Least Mean Squares (LMS).

Sin embargo, el algoritmo RLS puede verse también como la solución exacta de un problema de mínimos cuadrados (LS del inglés Least Squares) bien definido (en concreto un problema de mínimos cuadrados ponderados regularizado), dado por

$$\min_{\mathbf{w}} \left[\lambda^{i+1} (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})^* \mathbf{\Pi} (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}) + \sum_{j=0}^i \lambda^{i-j} |y(j) - \mathbf{x}_M(j) \mathbf{w}|^2 \right] \quad (6.2)$$

que el algoritmo RLS resuelve de manera iterativa. La iteración RLS viene dada por

$$e_M(i) = y(i) - \mathbf{x}_M(i) \mathbf{w}_{i-1}, \quad (6.3)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}_M(i) \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{x}_M^H(i)}, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{g}_i = \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{x}_M^H(i) \gamma_i, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \mathbf{g}_i e_M(i), \quad (6.6)$$

$$\mathbf{P}_i = \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}_{i-1} - \frac{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^H}{\gamma_i}. \quad (6.7)$$

Para evaluar las prestaciones del algoritmo RLS se utiliza la curva de aprendizaje promediada de varios experimentos (ensemble-average learning curve). La curva de aprendizaje de un experimento viene dada por el valor de la función de coste (J) en función de la iteración (i)

$$J(i) = |e_M(i)|^2. \quad (6.8)$$

Esta función de coste es calculada para un número de iteraciones, $0 \leq i \leq N$, suficientemente grande para garantizar que se puede observar convergencia, calculando la señal de error y la correspondiente curva de error cuadrático. La función de coste resultado del primer experimento se denota por

$$\left\{ J^{(1)}(i) \right\} \quad (6.9)$$

con el superíndice ⁽¹⁾ usado para indicar que es el primer experimento. El experimento es repetido varias veces con las mismas condiciones iniciales obteniendo L funciones de coste. La curva de aprendizaje promedio en el intervalo $0 \leq i \leq N$ está definida como la media muestral de los L experimentos:

$$\hat{J}(i) \triangleq \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L J^{(j)}(i), \quad 0 \leq i \leq N. \quad (6.10)$$

Para $L = 100$ experimentos en este estudio.

6.2.1 Estimación de canales UWB

Los resultados teóricos hallados en el Capítulo 5 pueden ser comprobados y reproducidos por medio del algoritmo RLS sin conocimiento previo alguno sobre el canal (o las estadísticas), y observar como funciona la convergencia y la longitud de la secuencia de entrenamiento sabiendo que el valor asintótico debe coincidir con el valor teórico hallado anteriormente.

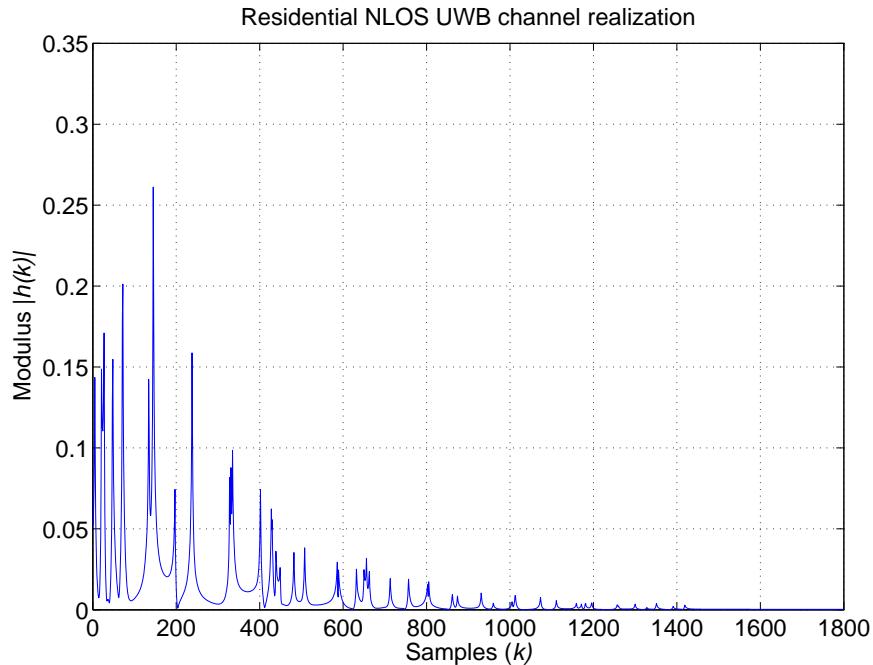


Figura 6.2: Realización del modelo estocástico de canales UWB.

El canal a probar es la realización del modelo de canales UWB utilizado anteriormente, mostrado en la Figura 6.2.

Como se vió en el Capítulo 5 en la Figura 5.3, para un filtro de orden 100, una posición del polo de -0.7 o -0.5 son una buena elección. Las curvas de aprendizaje promedio para $a = -0.5$ y $a = -0.7$ son mostradas en la Figura 6.3. Como se puede ver el comportamiento asintótico del algoritmo adaptativo coincide con el teórico hallado conociendo exactamente las estadísticas de segundo orden del sistema y también se puede observar una dependencia del tiempo de convergencia con la posición del polo. Esta convergencia se debe a que, viendo las Figuras 6.4, para una posición de polo mayor ($a = -0.7$) se consigue estimar una mayor parte de la respuesta impulsional debido a la mayor longitud de las secuencias lo que hace necesario un mayor tiempo de convergencia.

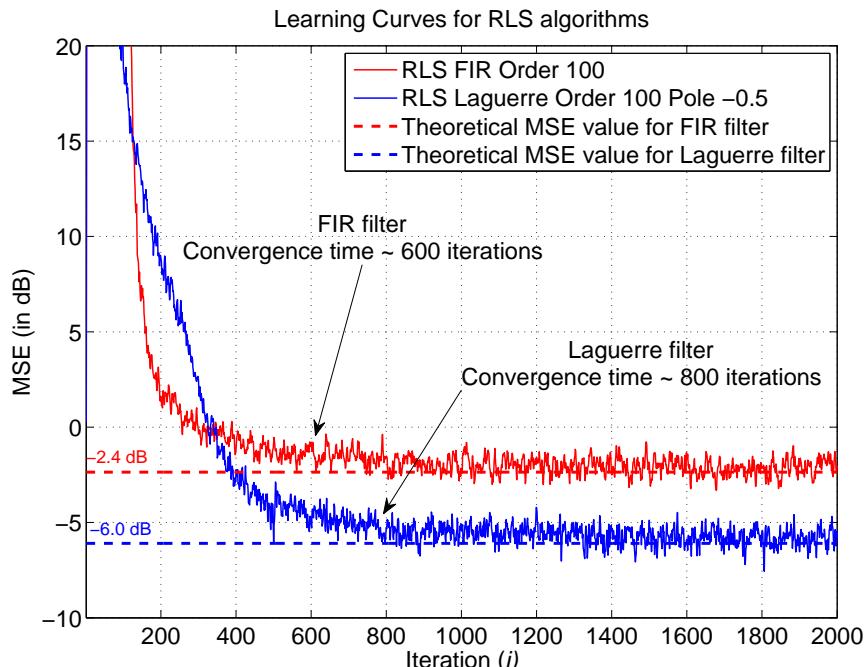
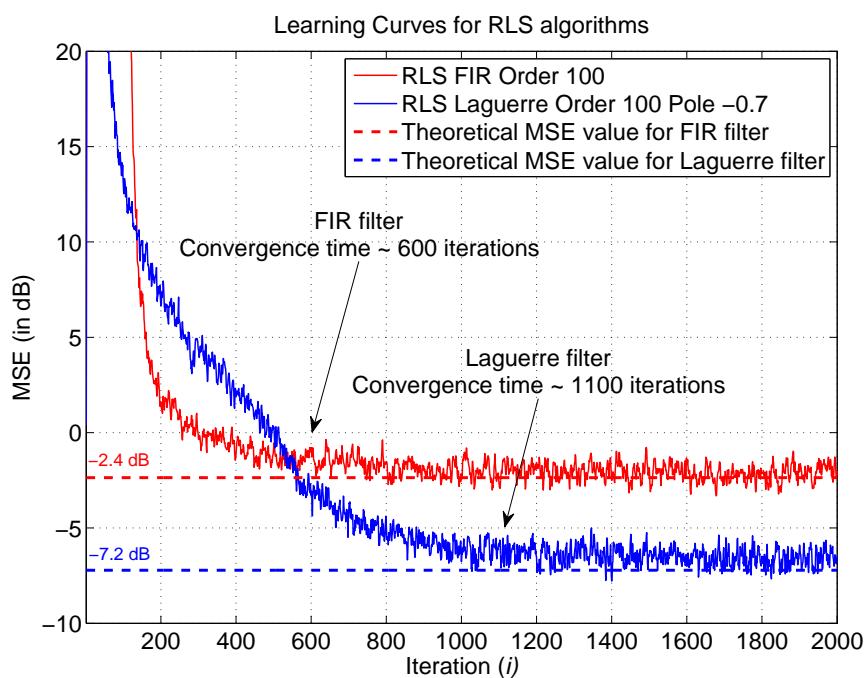
(a) $a = -0.5$ (b) $a = -0.7$

Figura 6.3: Curvas de aprendizaje para el algoritmo RLS para filtros de Laguerre y FIR.

La respuesta impulsional estimada resultante en el estado estacionario del filtro (cuando la convergencia o comportamiento asintótico es alcanzado) es mostrada en la Figura 6.4, que muestra la motivación principal de la estimación de canales con filtros de Laguerre en comparación con los FIR, pudiendo estos primeros aproximar una mayor parte del canal sin requerir un orden excesivamente grande que los filtros FIR no pueden.

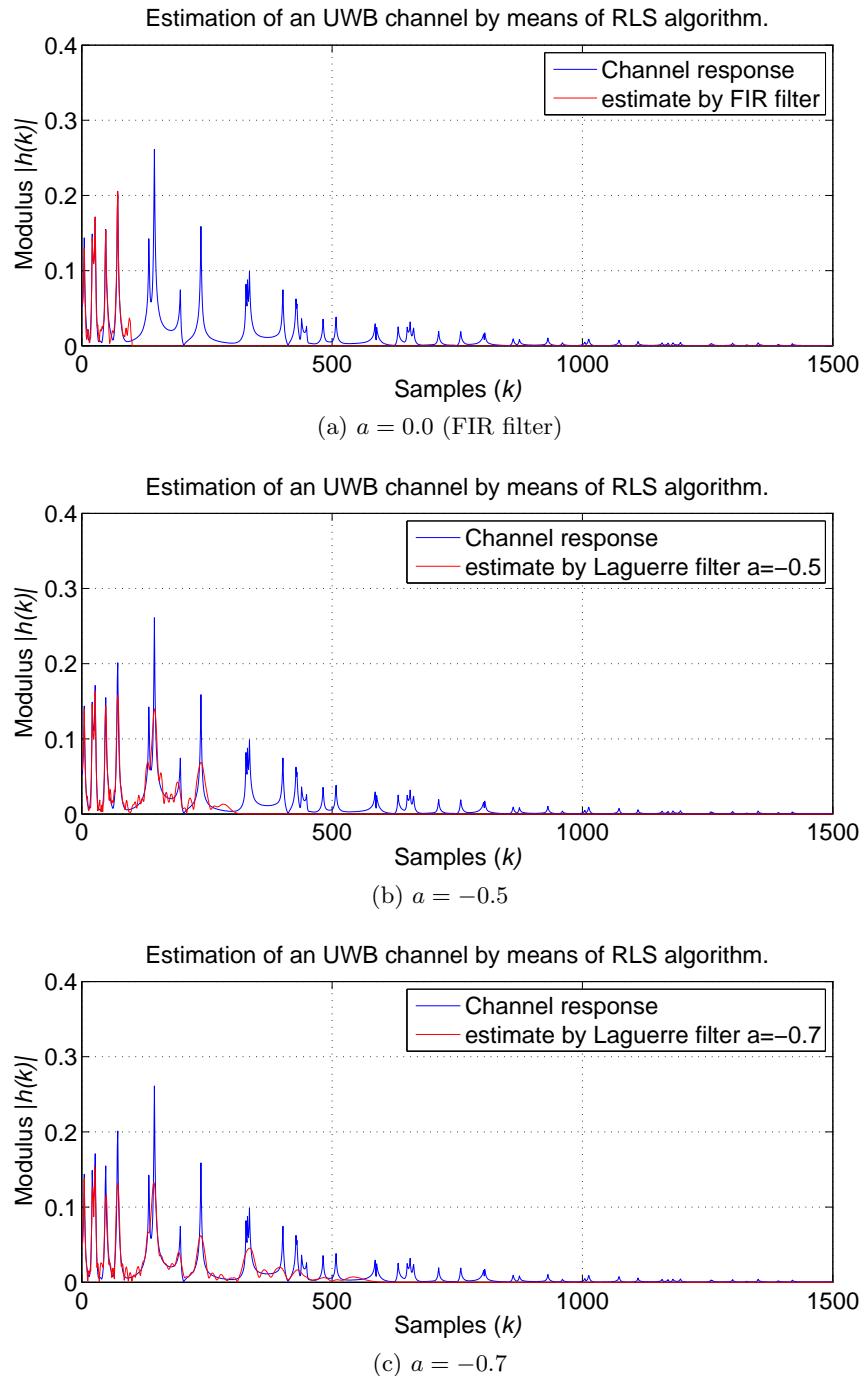


Figura 6.4: Respuesta impulsional estimada por filtros de Laguerre ($a = -0.5$ y -0.7) y un filtro FIR de orden 100 con un algoritmo RLS en estado estacionario.

7 Conclusiones y trabajo futuro

Los filtros de Laguerre, como generalización de los filtros FIR, pueden funcionar mejor o igual que los filtros FIR, en particular para los canales UWB, se ha visto que se puede obtener una mejora en media alrededor de 5 dB para el entorno del modelo de canal escogido, con características Non Line-Of-Sight (NLOS). La conclusión es que las secuencias de Laguerre no son especialmente adecuadas para este tipo de canales, sobretodo si presentan comportamiento caóticos y poco dispersos (o non-sparse), como ocurre con algunos de los canales UWB. Aun así, como generalización de los filtros FIR, funcionan mejor o igual que los filtros FIR y son una buena opción cuando el orden del filtro tiene que ser pequeño y las respuestas impulsionales largas. Son más adecuados para canales con respuestas impulsionales con cambios más suaves ("smooth") como los canales con una función de transferencia racional. Esta falta de idoneidad de las secuencias para este tipo de canales se debe en mayor parte a su comportamiento intrínseco paso-bajo, si recordamos que consisten de una sección paso-bajo seguida de una cascada de secciones pasa-todo.

Otro punto interesante es la selección de la posición óptima del polo del filtro de Laguerre. Se ha visto que la posición óptima varía según el orden del filtro, empezando por una posición del polo de gran magnitud (cercana a 1) para órdenes pequeños del filtro para poder disponer de secuencias más largas, y posiciones mas cercanas a cero para filtros de mayor orden para tener secuencias con menor extensión temporal pero mejor resolución temporal. La posición óptima del polo puede ser estimada con relativo éxito utilizando la sencilla idea de hacer coincidir aproximadamente la extensión temporal que cubren las secuencias de Laguerre con la longitud típica de los canales. Esto unido al modelado lineal de la longitud de las secuencias de Laguerre, ha demostrado ser una estimación bastante buena de la posición óptima del polo para un longitud típica del canal dada y un orden fijo del filtro, lo que hace que la selección de la posición del polo una tarea sencilla para canales UWB.

Para posibles profundizaciones en este estudio de los filtros de Laguerre, se pueden realizar todavía un par de generalizaciones sobre el filtro básico de Laguerre. La primera de ellas consiste en considerar el caso de tener un polo complejo (siempre dentro de la circunferencia unidad) en lugar de limitarse al caso de un polo real. El filtro considerado es mostrado en la Figura 7.1. Añadir una fase compleja al polo no afecta a la extensión temporal de las secuencias y proporciona un grado nuevo de libertad para optimizar la posición del polo, que intuitivamente proporcionaría ventajas si se pudiera ajustar la posición del polo de manera adaptativa.

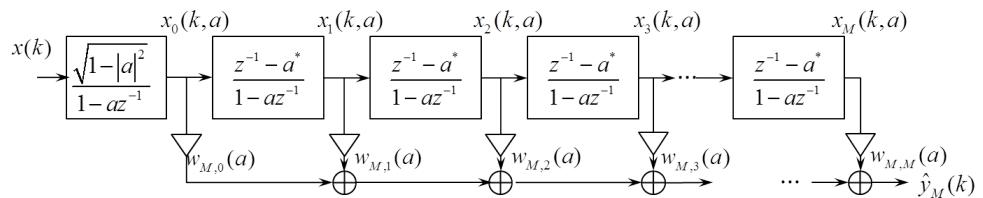


Figura 7.1: Filtro transversal de Laguerre con polo complejo.

La segunda generalización consiste en considerar la estructura ortonormal de la Figura 7.2, que consiste en usar diferentes polos para cada sección del filtro en lugar de uno solo. Esta estructura conlleva un problema de optimización multivariante para la elección de la posición

óptima del polo con su respectiva complejidad.

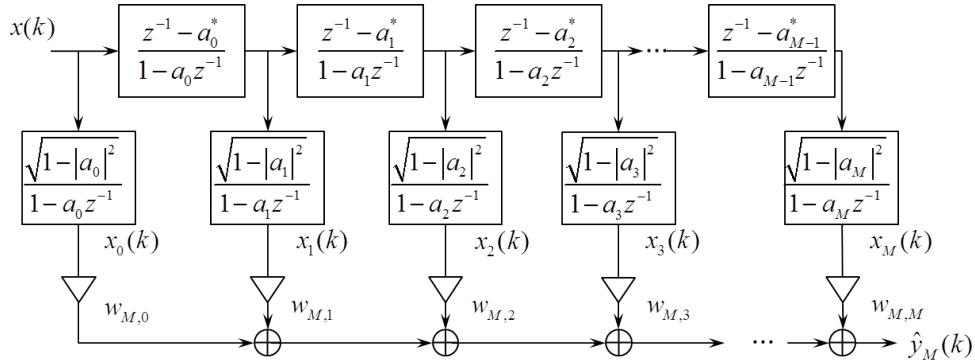


Figura 7.2: Estructura ortogonal transversal con múltiples polos.

Otro tema a tratar sería la ecualización, o el diseño de ecualizadores con filtros de Laguerre según el modelo mostrado en la Figura 7.3. Si disponemos de un filtro FIR, $H(z) = B(z)$, entendiendo por ecualizador el sistema inverso $G(z)$, este es por definición un sistema IIR, $G(z) = H^{-1}(z) = \frac{1}{B(z)}$, lo cual puede representar una ventaja para los filtros de Laguerre. Aunque analizandolo desde un punto de vista frecuencial, la mayoría de los canales presentan un comportamiento paso-bajo lo que hace que el sistema inverso tenga comportamiento paso-alto al contrario que los filtros de Laguerre que poseen un comportamiento paso-bajo, lo que los convierte, en este sentido, en una peor opción.

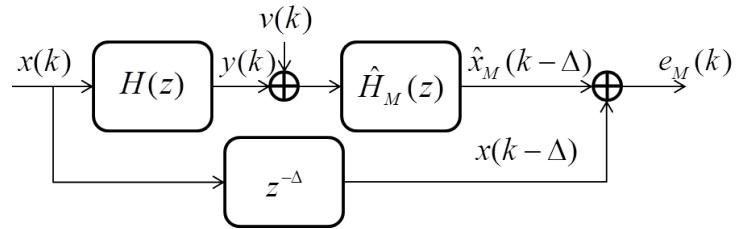


Figura 7.3: Modelo de ecualización.

Bibliografía

- [1] BACK, A.D. ; TSOI, A.C.: Nonlinear system identification using discrete Laguerre functions. In: *Journal of Systems Engineering* 6 (1996), Nr. 3, S. 194–207
- [2] HAYKIN, Simon: *Adaptive filter theory* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ, USA : Prentice-Hall, Inc., 1996. – ISBN 0-13-322760-X
- [3] LAGUNAS-HERNANDEZ, M. ; FIGUEIRAS-VIDAL, A. ; MARINO-ACEBAL, J. ; VILANOVA, A.: A linear transform for spectral estimation. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on* 29 (1981), oct, Nr. 5, S. 989 – 994. – ISSN 0096-3518
- [4] MERCHED, R. ; SAYED, A.H.: Order-recursive RLS Laguerre adaptive filtering. In: *Signal Processing, IEEE Transactions on* 48 (2000), nov, Nr. 11, S. 3000 –3010. – ISSN 1053-587X
- [5] MERCHED, R. ; SAYED, A.H.: RLS-Laguerre lattice adaptive filtering: error-feedback, normalized, and array-based algorithms. In: *Signal Processing, IEEE Transactions on* 49 (2001), nov, Nr. 11, S. 2565 –2576. – ISSN 1053-587X
- [6] MOLISCH, Andreas F. ; BALAKRISHNAN, Kannan ; CHONG, Chia chin ; EMAMI, Shahriar ; FORT, Andrew ; KAREDAL, Johan ; KUNISCH, Juergen ; SCHANTZ, Hans ; SCHUSTER, Ulrich ; SIWIAK, Kai: IEEE 802.15.4a channel model - final report. In: *Converging: Technology, work and learning. Australian Government Printing Service, Online*. Available, 2004
- [7] PROAKIS, J.G. ; MANOLAKIS, D.G.: *Digital signal processing*. Pearson Prentice Hall, 2007. – ISBN 9780131873742
- [8] SALEH, A ; VALENZUELA, R: A Statistical Model for Indoor Multipath Propagation. In: *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 5 (1987), Nr. 2, S. 128–137
- [9] SAYED, Ali H.: *Adaptive Filters*. Wiley-IEEE Press, 2008. – ISBN 0470253886
- [10] SILVA, T. Oliveira e.: On the determination of the optimal pole position of Laguerre filters. In: *Signal Processing, IEEE Transactions on* 43 (1995), sep, Nr. 9, S. 2079 –2087. <http://dx.doi.org/10.1109/78.414769>. – DOI 10.1109/78.414769. – ISSN 1053-587X
- [11] SILVA, Tomás Oliveira e: Laguerre Filters — An Introduction. In: *Revista do DETUA* 1 (1995), Januar, Nr. 3, S. 237–248
- [12] W., Broo P.: Discrete Orthonormal Sequences. In: *J. ACM* 12 (1965), April, S. 151–168. – ISSN 0004-5411

Anexos