

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
ESCUELA DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

TRABAJO FIN DE MASTER
MASTER DE MECÁNICA APLICADA

PROGRAMA OFICIAL DE POSGRADO EN INGENIERÍA
MECÁNICA Y MATERIALES

**ESTIMACIÓN DEL ERROR A POSTERIORI DEL
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS CON LA
TEORÍA VARIACIONAL DE LAS
MULTIESCALAS APLICADO A ELASTICIDAD
LINEAL**

Autor: Diego Irisarri Jiménez
Director: Guillermo Hauke Bernardos

Área de mecánica de Fluidos

Curso 2010/2011
Diciembre 2011

Estimación del error a posteriori del método de elementos finitos con la teoría variacional de las multiescalas aplicado a elasticidad lineal

RESUMEN

El presente trabajo investiga técnicas de estimadores de error a posteriori para el método de elementos finitos aplicado al problema de elasticidad lineal. Para hallar el error que comete el método de elementos finitos se emplea el método variacional multiescala. Con la ayuda de este método y partiendo de los resultados obtenidos de la simulación de elementos finitos, se obtiene una estimación del error cometido. En concreto, en este proyecto se ha estudiado la estimación de error para problemas de tensión plana.

A la hora de analizar el acierto en la estimación de error, es necesario conocer previamente el error real que comete el método de elementos finitos. Por ello, se ha calculado la solución analítica de los casos estudiados de tensión plana, empleando las ecuaciones básicas de elasticidad.

Los problemas estudiados de tensión plana son aplicados sobre dominios rectangulares. Sobre estos dominios se han impuesto distintos tipos de solicitudes en el contorno para estudiar cómo afectan los distintos tipos de esfuerzos en los estimadores de error. También se analiza su influencia con los principales parámetros que caracterizan el problema de elasticidad plana. Con el objetivo de cuantificar la calidad de los estimadores de error, se establece la denominada eficiencia del estimador de error, el cual relaciona el error estimado con el error realmente cometido.

Índice general

1. Introducción y objetivos	1
1.1. Objetivo del trabajo	1
1.2. Motivación del trabajo	2
1.3. Estimación del error	2
1.4. Metodología	4
2. Elasticidad bidimensional	5
2.1. Estado tensional plano	5
2.2. Problemas de tensión plana	9
3. Problema elástico lineal	11
3.1. Formulación fuerte del problema	11
3.2. Formulación débil del problema	12
3.3. Método de aproximación de Galerkin	14
3.4. Comparativa ecuación de calor y elasticidad	15
4. Estimación de error a posteriori	16
4.1. Método variacional de las multiescalas	16
4.2. Estimación de error	19
4.3. Función bubble	20
4.4. Expresión del estimador de error	22
4.5. Eficiencia global y eficiencia local	23
5. Resultados	24
5.1. Problema de la ecuación de calor	24
5.2. Problemas sometidos a flexión en el contorno	26
5.2.1. Solución analítica de los problemas	27
5.2.2. Solución de elementos finitos	28
5.2.3. Análisis de la eficiencia del error	30
5.2.4. Análisis de sensibilidad del estimador	34
5.3. Viga en voladizo y viga biapoyada	37
5.3.1. Solución analítica de los problemas	37
5.3.2. Solución por elementos finitos	38
5.3.3. Análisis de la eficiencia del error	38
6. Conclusiones	42

Bibliografía	44
Anexos	45
A. Solución analítica: Problema flexión Pura	47
B. Solución analítica: Problema flexión compuesta	50
C. Solución analítica: Problema de flexión en los dos ejes	52
D. Solución analítica: Problema viga empotrada	55
E. Solución analítica: Problema viga apoyada	59

Capítulo 1

Introducción y objetivos

Los métodos computacionales son una de las últimas herramientas a disposición del ingeniero a la hora de resolver modelos matemáticos de un fenómeno físico. Se empezaron a desarrollar a mediados del siglo XX tras la irrupción de los computadores. En un principio se limitaron a apoyar o a extender resultados empíricos. Hoy en día son capaces de ofrecer soluciones confiables a modelos físicos plasmados en ecuaciones diferenciales y a pesar de su relativa novedad, se han integrado de una manera muy notable en los más variados procesos industriales. El rápido desarrollo de los ordenadores ha supuesto un aumento de su capacidad de cálculo al mismo tiempo que un abaratamiento de su coste.

La mecánica de medios continuos es un campo donde los métodos computacionales son de gran utilidad y al mismo tiempo suponen un gran reto. Ambas situaciones se deben a la gran complejidad de los modelos matemáticos que describen su comportamiento.

Hay que recordar que las soluciones analíticas que existen en elasticidad son limitadas y sirven para geometrías sencillas, o bien asumen hipótesis simplificativas que desvirtúan la solución obtenida. Sin embargo, los métodos de elementos finitos se adaptan a cualquier geometría y permiten abordar el problema con toda su complejidad a cambio de tiempo de computación.

1.1. Objetivo del trabajo

El objetivo de este Trabajo Fin de Master es investigar la estimación de error que se comete en la resolución numérica por el método de elementos finitos de las ecuaciones de elasticidad lineal. Para ello, se caracterizan y evalúan estimadores de error para el método de elementos finitos basado en el Método Variacional de las Multiescalas (VMS). La evaluación consiste en la comparación del error estimado con el error exacto.

En el estudio de este trabajo se persiguen los siguientes objetivos concretos:

- Hallar un estimador de error adecuado para elasticidad lineal, en el que se consiga

- una precisión y robustez razonables
- Evaluar la influencia en la estimación del error para los parámetros característicos de la elasticidad lineal.

Partiendo de la formulación débil del problema y aplicando el VMS, se emplean estos estimadores de error, los cuales involucran directamente el residuo de la solución de elementos finitos. De esta manera, se pretende proporcionar al usuario de programas de FEM una medida de la calidad de la solución obtenida.

1.2. Motivación del trabajo

El propósito de realizar este trabajo, partió de la investigación previamente realizada en el departamento de Mecánica de Fluidos sobre estimación de error ([10], [11], [12]) en la ecuación del transporte. En particular, para ecuaciones diferenciales elípticas, como la ecuación del calor, los estimadores de error explícitos empleados proporcionan unos buenos resultados.

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema elástico lineal son elípticas. Sin embargo, en relación con la ecuación de calor, la ecuación de elasticidad presenta algunas diferencias significativas que añaden complejidad al problema y que se detallarán más adelante.

Desde este punto de partida y debido a la elevada utilización de programas de método de elementos finitos que existe hoy en día en el diseño mecánico y estructural, mediante este trabajo, se estudia la estimación de error en un campo en el que existe un gran interés en investigar el error que se comete en la solución obtenida por el método de elementos finitos.

1.3. Estimación del error

La estimación de error es uno de los campos de investigación de mayor interés en la mecánica computacional. Hoy en día, los métodos computacionales son fiables, útiles y cada vez más rápidos, de tal manera que ya están plenamente integrados en el proceso productivo. La estimación de error surge como una mejora natural de los mismos. Como en otros campos de la ciencia o de la ingeniería, es deseable conocer con qué margen de error se ajustan a la realidad los cálculos o incluso los resultados de un experimento. En los métodos experimentales, una medida no se considera completa sin una estimación del error cometido. La tendencia en los métodos computacionales debería ser la misma, ya no sólo por una cuestión de rigor científico, sino porque una correcta evaluación del error puede suponer un ahorro considerable en el coste computacional (y por tanto económico) de las simulaciones.

Las soluciones obtenidas por los métodos computacionales en general y el Método de los elementos finitos, en particular, dependen fuertemente de la discretización. La elección

de la malla surge por tanto del compromiso entre la precisión de la solución requerida y el coste computacional que se está dispuesto a asumir. La estrategia de mallado más interesante es aquella en la que se concentran mayor número de elementos en la zona donde éstos son necesarios. Así, se impone mayor resolución en las zonas donde los gradientes son intensos. Cabe destacar que obtener el mallado adecuado sería trivial si tuviésemos ya una solución donde se observen todos los fenómenos relevantes.

Las técnicas de estimación de error pueden desempeñar un papel crucial en esta situación. Para esto es necesario que el estimador proporcione el error en cada elemento. Si se conoce el error de la simulación en cada punto con fiabilidad, y se relaciona dicho error con el tamaño de los elementos de la malla, se podría elegir un umbral de error que se considere aceptable y elaborar una malla que obtenga ese resultado. Actuando así se obtendrían simulaciones con un error controlado aumentando la densidad de la malla sólo donde sea necesario. A esta estrategia se le llama mallado adaptativo.

Los principales estimadores de error empleados hoy en día pueden ser clasificados en los siguientes grupos:

- **Métodos explícitos:** Se llaman métodos explícitos porque emplean la solución obtenida mediante elementos finitos de forma directa, sin resolver ecuaciones diferenciales. Estas técnicas estiman el error a partir del residuo de la solución aproximada de elementos finitos. Para ello, emplean el residuo en el interior del elemento, en las fronteras entre elementos y en el contorno.
- **Métodos implícitos:** Estos métodos emplean la solución aproximada de elementos finitos de forma indirecta. Para la estimación del error es necesario resolver un problema de ecuaciones diferenciales aplicados a elementos individuales o a un conjunto de ellos.
- **Métodos de recuperación:** Estos métodos aprovechan las propiedades superconvergentes de las soluciones. Se centran en el posproceso de la solución numérica aplicado a distintos grupos de elementos.

Es sabido que conforme una malla se hace más fina, la solución numérica converge a la solución exacta. Es decir, si la malla fuera infinitamente densa la solución numérica coincidiría con la solución analítica. Aprovechando este concepto, el método variacional de las multiescalas, consiste en realizar una separación de escalas, separando escalas resueltas y no resueltas. Este método es un caso particular de los métodos explícitos. La escala resuelta es la solución obtenida de la malla empleada, y la escala no resuelta proporciona el error producido por la discretización. Esta descomposición en escala resuelta y no resuelta se introduce en la formulación variacional del problema a estudiar para realizar una estimación del error.

1.4. Metodología

El planteamiento general que se ha seguido a la hora de realizar este proyecto ha sido en primer lugar, establecer unos problemas concretos de tensión plana y hallar analíticamente su solución exacta. Seguidamente, se ha empleado el VMS para obtener una formulación de los estimadores de error a posteriori y pronosticar el error. Por último, se analizan las eficiencias obtenidas con los estimadores de error para los distintos problemas tratados. Los pasos seguidos en el desarrollo del trabajo se esquematizan en la figura 1.1.

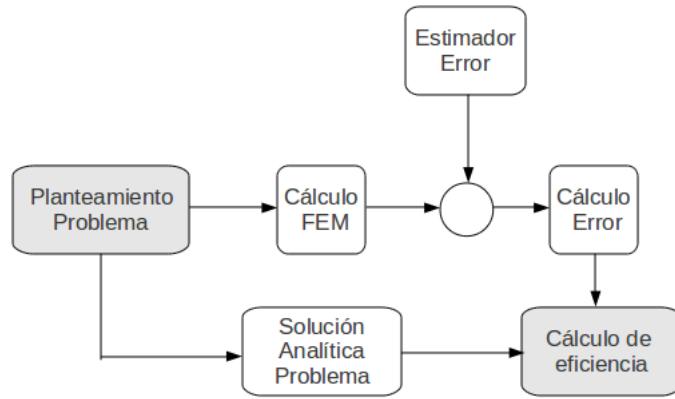


Figura 1.1: Esquema de trabajo

Para la realización del proyecto se han empleado diversos software. La programación de la solución exacta, del estimador de error y del cálculo de eficiencias se ha implementado en Fortran. Posteriormente, con la herramienta Tecplot, se han realizado las gráficas de resultados.

Mediante la presente memoria se expone de manera descriptiva el trabajo desarrollado a lo largo de este proyecto. Primeramente, se presentan las ecuaciones que gobiernan la tensión plana, para asentar los conceptos básicos. Despues, se plantea la formulación fuerte y la formulación débil del problema de elasticidad. Seguidamente, se muestra la formulación del VMS y los estimadores de error empleados. Por último, se analizan los resultados obtenidos con los estimadores de error y se obtienen unas conclusiones.

Capítulo 2

Elasticidad bidimensional

En un cuerpo sólido sometido a un estado elástico plano, el rasgo más relevante es que tanto la matriz de tensiones como la matriz de deformación permanecen constantes en una dirección perpendicular a un plano, llamado plano director. De esta manera, es posible tratar el problema elástico en dos dimensiones, estudiando el problema en el plano director.

Según el estado tensional y de deformación que se presente, se distinguen dos tipos de estados tensionales: Deformación plana y tensión plana. En deformación plana, la deformación en una recta perpendicular al plano director es nula. Sin embargo, para el caso de tensión plana, la tensión es nula en la dirección perpendicular al plano director, existiendo deformación en la misma. En este trabajo, se han estudiado problemas de tensión plana, si bien la formulación de ambos problemas es similar. En ambos casos, el campo de desplazamientos en el plano director queda perfectamente determinado si se conocen los desplazamientos en x e y .

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases}$$

donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son los desplazamientos en x e y respectivamente.

En el siguiente apartado, se muestra más concretamente, el estado de tensiones y deformaciones que se producen en tensión plana.

2.1. Estado tensional plano

En la figura 2.1 se muestran los ejes adoptados en el plano director para un sólido cualesquiera sometido a un estado tensional plano.

Se cumple que las tensiones solamente dependen de x e y , de manera que $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$. Se denomina u , v y w a los desplazamientos en los ejes x , y y z respectivamente.

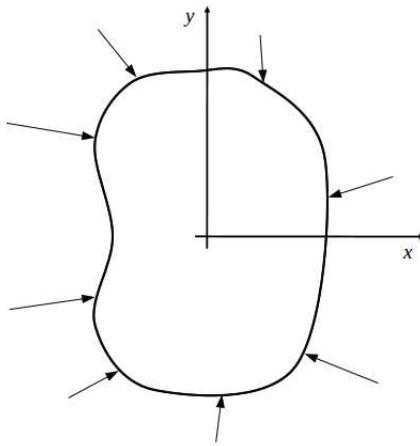


Figura 2.1: Cuerpo sometido a tensión

■ Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio, son obtenidas al aplicar la sumatoria de fuerzas que actúan sobre un pequeño bloque rectangular de tamaño diferencial como se muestra en la figura 2.2. En este caso, al trabajar sólo en dos ejes, hay dos ecuaciones de equilibrio.

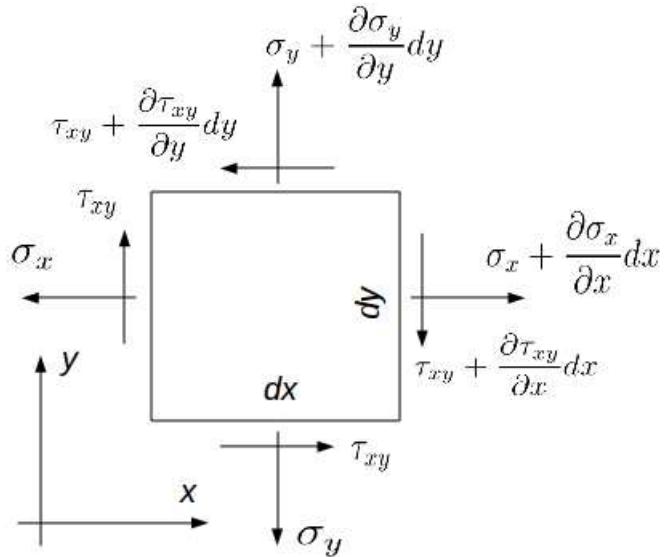


Figura 2.2: Cuadrilátero elemental. Ecuaciones de equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \quad (2.2)$$

donde X e Y son las fuerzas volumétricas.

■ Ecuaciones de comportamiento

Las ecuaciones de comportamiento se obtiene aplicando las ecuaciones de Lamé. Para el caso de los esfuerzos nulos $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$ resulta

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \quad G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \quad \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Despejando $\frac{\partial w}{\partial z}$ de la última ecuación:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\lambda}{\lambda + 2G}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (2.3)$$

Por otro lado, las tensiones no nulas en tensión plana son σ_x , σ_y , τ_{xy} . Según las ecuaciones de Lamé, estas tensiones se relacionan con los desplazamientos de la siguiente manera:

$$\sigma_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\sigma_y = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (2.6)$$

donde λ y G son los parámetros de Lamé. Estos parámetros se relacionan con el módulo elástico y el coeficiente de Poisson de la siguiente manera.

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Sustituyendo en las anteriores ecuaciones la expresión (2.3), se obtienen las ecuaciones de las componentes de la matriz de tensiones para tensión plana.

$$\sigma_x = \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\sigma_y = \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.9)$$

En las anteriores ecuaciones $\lambda^* = \frac{2\lambda G}{2G+\lambda}$

■ Ecuaciones de compatibilidad

Las ecuaciones de compatibilidad, muestran las relaciones que tienen que tener las deformaciones entre sí para que los desplazamientos sean físicamente posibles. Las relaciones entre deformaciones y desplazamientos son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.10)$$

Derivando respecto a y dos veces en el primer término de la ecuación (2.10), derivando respecto a x el segundo término y, por último, derivando respecto a x y respecto a y el tercer término, se obtiene la llamada ecuación de compatibilidad entre las deformaciones.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.11)$$

Esta ecuación diferencial debe ser cumplida por las deformaciones para que existan unos desplazamientos u y v que satisfagan la ecuación (2.10).

Es posible determinar las condiciones de compatibilidad en función de las tensiones a partir de la ley de Hooke y de las ecuaciones de equilibrio. La ley de Hooke, establece la relación que se muestra en las siguientes ecuaciones entre deformaciones y tensiones.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones de la ley de Hooke en (2.11) se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.12)$$

Por otro lado, volviendo a las ecuaciones de equilibrio (2.1) y (2.2), si se supone que las fuerzas volumétricas, X e Y , son constantes y se deriva la ecuación (2.1) respecto a x y la ecuación (2.2) respecto a y y, por último, se suman, da como resultado

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

Por tanto, sustituyendo (2.13) en (2.12) se obtiene la ecuación de compatibilidad en función de la tensión

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.14)$$

Por otro lado, es posible establecer una función $\phi(x, y)$ a partir de la cual se definan las componentes de la tensión y que cumpla las ecuaciones de compatibilidad. Esta función, se denomina función de Airy. El empleo de la función de Airy es un método comúnmente usado para resolver las ecuaciones de elasticidad plana.

Definiendo las componentes de tensiones como

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx \quad (2.15)$$

se puede comprobar que satisfacen las condiciones de compatibilidad y equilibrio. De esta manera, la función de compatibilidad (2.14) se puede expresar en función de la función de Airy de la siguiente manera.

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.16)$$

2.2. Problemas de tensión plana

Los problemas de tensión plana que se han tratado en este trabajo se muestran en las figuras 2.3 y 2.4. En la primera figura, se muestra el primer bloque de problemas analizados. Son tres problemas de elasticidad lineal con un dominio rectangular apoyados en la parte inferior. Cada uno de los problemas presenta distintas cargas en el contorno.

En la figura 2.4 aparecen dos problemas que presentan un estado tensional más complejo. Al igual que en los problemas de la figura 2.3 la geometría del dominio es rectangular. El primer problema es una viga empotrada con una carga aplicada en el extremo de la misma. En el segundo problema, se aplica una carga distribuida en la cara superior de la viga, la cual está apoyada en ambos extremos.

En los anexos, se describe detalladamente la solución exacta en cada uno de los problemas.

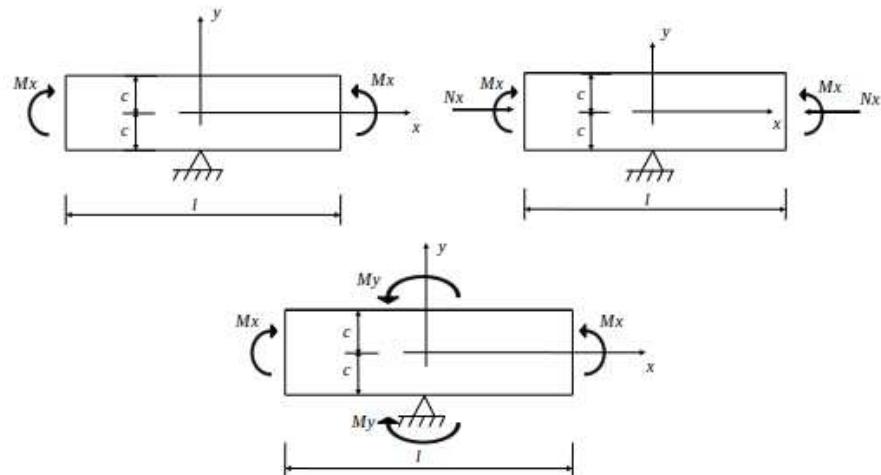


Figura 2.3: Problemas de elasticidad plana con solicitudes M_x , M_y y N_x

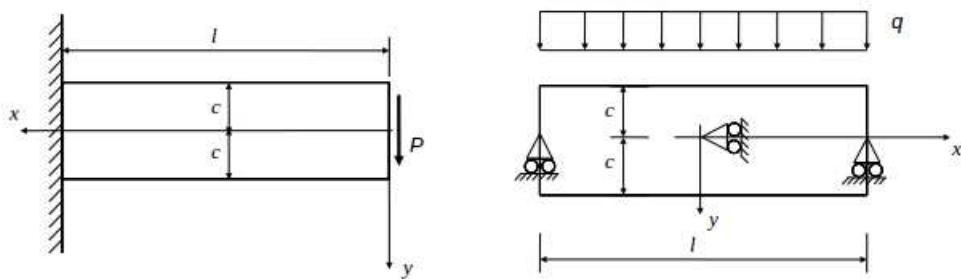


Figura 2.4: Problema de viga empotrada y de viga apoyada

Capítulo 3

Problema elástico lineal

3.1. Formulación fuerte del problema

La formulación fuerte del problema de elasticidad lineal, se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio y las condiciones de contorno siguientes. Sea un dominio espacial Ω con contorno Γ , el cual es dividido en dos zonas no solapadas Γ_g y Γ_h , según se aplique condición de contorno de Dirichlet o Neumann. El planteamiento genérico del problema consiste en encontrar $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para una condición esencial dada $\mathbf{g} : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}$, la condición natural $\mathbf{h} : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}$ y la fuerza volumétrica $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaga las siguientes ecuaciones.

$$\begin{cases} \mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{en } \Gamma_g \\ \mathcal{B}\mathbf{u} = \mathbf{h} & \text{en } \Gamma_h \end{cases}$$

donde \mathcal{L} , es el operador de segundo orden y \mathcal{B} , el operador diferencial aplicado en el contorno para la condición de contorno natural.

Particularizando para el problema de elasticidad plana

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{en } \Gamma_g \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{en } \Gamma_h \end{cases}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy, \mathbf{f} es el vector de fuerzas volumétricas, \mathbf{g} los desplazamientos impuestos en el contorno, \mathbf{h} las tensiones impuestas en el contorno y \mathbf{n} el vector normal hacia fuera del contorno.

Las componentes del tensor de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, son σ_x , σ_y y τ_{xy} siendo la tensión normal en x , la tensión normal en y la tensión cortante en el plano xy respectivamente.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

En el caso de tensión plana, la relación entre el tensor de tensiones de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, y

los desplazamientos, \mathbf{u} , se obtiene por medio de las ecuaciones de comportamiento y de compatibilidad.

- Ecuaciones de comportamiento:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (\lambda^* + 2G)\varepsilon_x + \lambda^*\varepsilon_y \\ \sigma_y &= (\lambda^* + 2G)\varepsilon_y + \lambda^*\varepsilon_x \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}$$

De manera que, las componentes del tensor de Cauchy pueden expresarse en función de las componentes de la matriz de deformación, ε_x , ε_y y γ_{xy} .

- Relación desplazamiento-deformaciones:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

Por tanto, queda determinada la relación entre las tensiones y los desplazamientos. Denotando como \mathbf{D} a la matriz que relaciona tensión y deformación, y \mathbf{H} , al operador diferencial que relaciona las deformaciones con los desplazamientos, se pueden expresar las tensiones como $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{H}\mathbf{u}$.

3.2. Formulación débil del problema

La formulación débil se obtiene a partir de la formulación fuerte, multiplicando por una función de peso e integrando por partes.

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} -\mathbf{w} \cdot \mathbf{f} d\Omega \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} -\mathbf{w} \cdot \mathbf{f} d\Omega \quad (3.2)$$

Aplicando el teorema de la divergencia y ordenando términos

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} d\Gamma_h \quad (3.3)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_h \quad (3.4)$$

Expresando $\boldsymbol{\sigma}$ en función de los desplazamientos, \mathbf{u} .

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : (\mathbf{D} \mathbf{H} \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_h \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) se puede expresar de forma compacta mediante los siguientes operadores:

- $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal
- (\cdot, \cdot) es el producto escalar en $L_2(\Omega)$
- $(\cdot, \cdot)_w$ es el producto escalar en $L_2(w)$

De este modo la ecuación (3.5) queda:

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{f}) + (\mathbf{w}, \mathbf{h})_{\Gamma_h} \quad (3.6)$$

Para asegurar que las integrales que han surgido en la formulación débil se puedan calcular, hay que imponer como requisito a las funciones de peso, \mathbf{w} , y a las funciones solución, \mathbf{u} , que su derivada primera al cuadrado esté acotada. Las funciones que satisfacen esta condición son llamadas funciones H^1 .

Por tanto, los espacios de funciones donde se buscan la función solución y las funciones de peso son los siguientes:

$$\begin{aligned} \delta &= \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in H^1, \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{en } \Gamma_g\} \\ v &= \{\mathbf{w} | \mathbf{w} \in H^1, \mathbf{w} = 0 \quad \text{en } \Gamma_g\} \end{aligned}$$

La única diferencia entre los dos espacios de funciones es el valor que deben tener en la parte del contorno donde se aplica la condición de contorno Dirichlet. De esta manera, las funciones de δ son las que satisfacen la condición de contorno esencial y las funciones de v satisfacen las condiciones de contorno esenciales homogéneas.

3.3. Método de aproximación de Galerkin

Para desarrollar el método de elementos finitos, es necesario crear un espacio de funciones de dimensión finita que sea una aproximación de δ y v . Estos espacios de funciones se denotan como δ^h y v^h y su dimensión está relacionada con la discretización que se haga del dominio.

$$\begin{aligned}\delta^h &\subset \delta \\ v^h &\subset v\end{aligned}$$

Por lo tanto, la formulación débil discreta del problema para un número de elementos nel se formula:

$$\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{w}^e : (\mathbf{D} \mathbf{H} \mathbf{u}^e) d\Omega^e = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^e \cdot \mathbf{f} d\Omega^e + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_h^e} \mathbf{w}^e \cdot \mathbf{h} d\Gamma^e \quad (3.7)$$

Considerando un elemento aislado de la discretización, como se observa en la figura 3.1, se puede expresar las componentes del vector desplazamiento en función de los desplazamientos de sus nodos.

$$\begin{aligned}u &= u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4 \\ v &= v_1 N_1 + v_2 N_2 + v_3 N_3 + v_4 N_4\end{aligned}$$

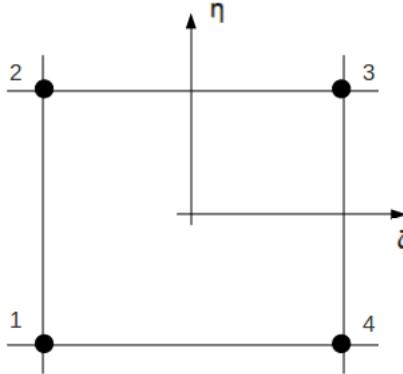


Figura 3.1: Representación de elemento cuadrilátero y sus variables nodales

En la expresión anterior u y v son los desplazamientos en dirección x e y . Por otro lado N_i son las funciones de forma del nodo i al que está asociado. Las funciones N_i son funciones polinómicas que valen uno en el nodo i y cero en el resto.

A su vez, las funciones de peso \mathbf{w}^e , son las mismas que las funciones de forma empleadas para aproximar los desplazamientos. Las siguientes expresiones muestran las funciones de

forma para cuadriláteros.

$$\mathbf{w}^e = (N_1, N_2, N_3, N_4)^T \quad \text{Para cuadriláteros}$$

Las incógnitas del problema son los desplazamientos nodales u_i , que se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que resulta de la discretización.

3.4. Comparativa ecuación de calor y elasticidad

En esta sección se compara la formulación de la ecuación de calor y la formulación de elasticidad vista en las anteriores secciones.

La ecuación que gobierna la ecuación de calor es la ecuación de Laplace. A continuación se muestra las ecuaciones para un dominio en el que la conductividad en x es igual a la conductividad en y . La condición de contorno natural es el flujo en el contorno y la condición de contorno esencial es la temperatura en el contorno.

$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0 & \text{en } \Omega \\ T = g & \text{en } \Gamma_g \\ \mathbf{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{en } \Gamma_h \end{cases}$$

donde T es la temperatura, g la temperatura impuesta en el contorno, h el flujo de calor impuestas en el contorno \mathbf{q} es el vector flujo de calor $\mathbf{q} = (q_x, q_y)^T$ y \mathbf{n} el vector normal hacia fuera del contorno, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$.

Por último el flujo de calor se expresa como:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \nabla T \quad \text{donde}$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}$$

Las principales diferencias de la formulación del problema de calor y la ecuación de elasticidad plana son:

- En la ecuación de calor, la incógnita es un escalar, la temperatura; mientras que en elasticidad es un vector, los desplazamientos en x y en y .
- La matriz constitutiva de las ecuaciones de elasticidad es más compleja que en el caso de calor. Aunque ambas matrices son simétricas, la matriz constitutiva de la ecuación del calor es diagonal, mientras que para elasticidad, presenta términos no nulos fuera de la diagonal.

En el capítulo 5 se muestra la resolución de un problema concreto de la ecuación de calor empleando el mismo método de estimación de error que en el caso de elasticidad plana.

Capítulo 4

Estimación de error a posteriori

4.1. Método variacional de las multiescalas

Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} dos puntos cualesquiera sobre el dominio Ω' . El problema de elasticidad es una ecuación diferencial de segundo orden con las condiciones de contorno naturales y esenciales. Se puede representar de forma genérica

$$\begin{cases} \mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{en } \Gamma_g \\ \mathcal{B}\mathbf{u} = \mathbf{h} & \text{en } \Gamma_h \end{cases}$$

donde \mathcal{L} , es el operador de segundo orden y \mathcal{B} , el operador diferencial aplicado en el contorno para la condición de contorno natural.

Como se ha visto anteriormente, particularizando los operadores diferenciales y las variables para el caso de elasticidad lineal.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{en } \Gamma_g \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{en } \Gamma_h \end{cases}$$

El campo de desplazamientos solución del problema elástico se puede descomponer en suma de los desplazamientos de la escala resuelta, $\bar{\mathbf{u}}$, y los desplazamientos de la escala no resuelta, \mathbf{u}' . El desplazamiento $\bar{\mathbf{u}}$, representa la solución obtenida mediante FEM y \mathbf{u}' es la diferencia entre la solución exacta y la solución FEM, es decir, el error. De igual manera, las funciones de peso se pueden dividir análogamente en $\bar{\mathbf{w}}$ y \mathbf{w}' .

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \\ \mathbf{w} &= \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}' \end{aligned}$$

Incorporando esta descomposición de las funciones de peso y los desplazamientos en la formulación débil.

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') : \mathbf{D}\mathbf{H} \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') d\Omega = \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_h} (\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') \cdot \mathbf{h} d\Gamma \quad (4.1)$$

Gracias a la linealidad de la ecuación anterior, respecto a los desplazamientos, ésta ecuación puede ser dividida en dos problemas, uno de escala grosera y otro de escala fina.

- Problema de escala grosera:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}} : (\mathbf{D}\mathbf{H} \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{h} d\Gamma \quad (4.2)$$

- Problema de escala fina:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{w}' : (\mathbf{D}\mathbf{H} \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}' \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{w}' \cdot \mathbf{h} d\Gamma_h \quad (4.3)$$

Tanto la formulación de escala fina como la formulación de escala grosera, gracias a la bilinealidad y recordando la fórmula (3.6) se pueden agrupar en los siguientes términos:

$$a(\bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{u}}) = -a(\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{u}') + (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{f}) + (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{h})_{\Gamma_h} \quad (4.4)$$

$$a(\mathbf{w}', \mathbf{u}') = -a(\mathbf{w}', \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{w}', \mathbf{f}) + (\mathbf{w}', \mathbf{h})_{\Gamma_h} \quad (4.5)$$

En el método de elementos finitos, el dominio del problema, Ω , se subdivide en elementos con dominio Ω^e y contorno Γ^e ($e=1, 2, \dots, nel$). La agrupación de los dominios y el contorno de los elementos se denotan respectivamente:

$$\begin{aligned} \Omega' &= \bigcup_{e=1}^{nel} \Omega^e \\ \Gamma' &= \bigcup_{e=1}^{nel} \Gamma^e \end{aligned}$$

Por último, el conjunto del contorno interior de los elementos con los que se ha discretizado el dominio se expresa como $\Gamma_{int} = \Gamma' \setminus \Gamma$.

Se denomina $\llbracket \cdot \rrbracket$ al operador salto de una función a través de una discontinuidad, como sucede en los contorno entre elementos. Según la notación de la figura 4.1, referida al

vector normal de los elementos que comparten el mismo contorno, el salto de \mathbf{v} se expresa como:

$$[\![\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]\!] = \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n}^- \quad (4.6)$$

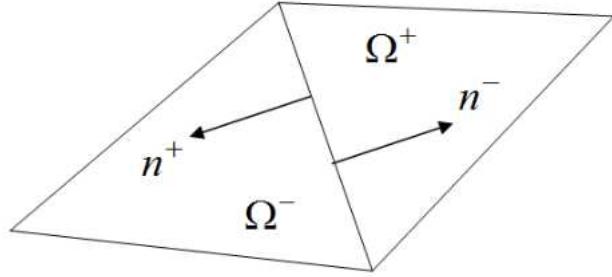


Figura 4.1: Notación para el operador salto

Las funciones para elementos finitos son suaves dentro del elemento pero bastas en el contorno entre elementos. Por tanto, la integración de $a(\mathbf{w}', \bar{\mathbf{u}})$ resulta

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}', \bar{\mathbf{u}}) &= \sum_{i=1}^{nel} a(\mathbf{w}', \bar{\mathbf{u}})_{\Omega^e} \\ &= \sum_{i=1}^{nel} [(\mathbf{w}', \mathcal{L}\bar{\mathbf{u}})_{\Omega^e} + (\mathbf{w}', \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}})_{\Gamma^e}] \\ &= (\mathbf{w}', \mathcal{L}\bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\mathbf{w}', [\![\mathcal{B}\bar{\mathbf{u}}]\!])_{\Gamma_{int}} + (\mathbf{w}', \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}})_{\Gamma_h} \end{aligned}$$

De esta manera el problema de la escala fina queda

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}', \mathbf{u}') &= -(\mathbf{w}', \mathcal{L}\bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} - (\mathbf{w}', [\![\mathcal{B}\bar{\mathbf{u}}]\!])_{\Gamma_{int}} - (\mathbf{w}', \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}})_{\Gamma_h} \\ &\quad + (\mathbf{w}', \mathbf{f}) + (\mathbf{w}', \mathbf{h})_{\Gamma_h} \\ &= -(\mathbf{w}', \mathcal{L}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f})_{\Omega'} - (\mathbf{w}', [\![\mathcal{B}\bar{\mathbf{u}}]\!])_{\Gamma_{int}} - (\mathbf{w}', \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{h})_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Agrupando en un mismo término, los saltos en el contorno interior entre los elementos $[\![\mathcal{B}\bar{\mathbf{u}}]\!]$ y en el contorno exterior $\mathcal{B}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{h}$.

$$a(\mathbf{w}', \mathbf{u}') = -(\mathbf{w}', \mathcal{L}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f})_{\Omega'} - (\mathbf{w}', [\![\mathcal{B}\bar{\mathbf{u}}]\!])_{\Gamma^e} \quad (4.8)$$

donde el término $[\![\mathcal{B}\bar{\mathbf{u}}]\!]$ representa las saltos que se producen entre las tensiones en las fronteras entre elementos.

4.2. Estimación de error

La escala fina se puede resolver de forma analítica empleando las funciones de Green. Llamando $\mathbf{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a la matriz de funciones de Green del problema de escalas finas resulta

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) \approx - \int_{\Omega'} \mathbf{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\mathcal{L}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f})(\mathbf{y}) d\Omega_y - \int_{\Gamma_y^e} \mathbf{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\llbracket \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}} \rrbracket)(\mathbf{y}) d\Gamma_y^e \quad (4.9)$$

donde $\mathbf{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} g_x^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & g_y^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ g_y^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & g_x^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$

Las funciones $g_x^e(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $g_y^e(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ son las funciones de green definidas en el eje x y en el eje y respectivamente.

En el presente problema de elasticidad lineal, el primer término de la ecuación (4.9) es despreciable para elementos lineales y bilineales y, por tanto, la fuente de error del método de elementos finitos proviene de los saltos entre las acciones exteriores y la tensión que presentan los elementos situados en el contorno y los saltos de tensiones que se producen en los contornos de los elementos.

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) \approx - \int_{\Gamma_y^e} \mathbf{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\llbracket \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}} \rrbracket)(\mathbf{y}) d\Gamma_y^e \quad (4.11)$$

Aplicando la inecuación de Hölders

$$|\mathbf{u}'(\mathbf{x})| \leq \left\| \mathbf{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\|_{L_p(\Gamma_y^e)} \left\| \llbracket \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}} \rrbracket \right\|_{L_q(\Gamma^e)} \quad (4.12)$$

donde $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Tomando la norma L_r

$$\left\| \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \right\|_{L_r(\Omega^e)} \leq \left\| \left\| \mathbf{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\|_{L_p(\Gamma_y^e)} \right\|_{L_r(\Omega_x^e)} \left\| \llbracket \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}} \rrbracket \right\|_{L_q(\Gamma^e)} \quad (4.13)$$

Seleccionando $p = 1$ y $q = \infty$

$$\left\| \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \right\|_{L_r(\Omega^e)} \leq \left\| \left\| \mathbf{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\|_{L_1(\Gamma_y^e)} \right\|_{L_r(\Omega_x^e)} \left\| \llbracket \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}} \rrbracket \right\|_{L_\infty(\Gamma^e)} \quad (4.14)$$

Mediante el teorema de la traza, es posible realizar una aproximación de la norma de la función de Green de la escala fina sobre el contorno Γ^e y de la norma de la función de Green en el interior del elemento Ω^e mediante la siguiente expresión:

$$\left\| \|\mathbf{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{L_1(\Gamma_y^e)} \right\|_{L_r(\Omega_x^e)} \approx \frac{1}{2} \frac{\text{meas}(\Gamma^e)}{\text{meas}(\Omega^e)} \left\| \|\mathbf{G}_e(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{L_1(\Omega_y^e)} \right\|_{L_r(\Omega_x^e)} \quad (4.15)$$

Si la función $\mathbf{G}_e(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ no cambia de signo en el interior del elemento

$$\left\| \|\mathbf{G}_e(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{L_1(\Omega_y^e)} \right\|_{L_r(\Omega_x^e)} = \|\mathbf{B}^e(\mathbf{x})\|_{L_r(\Omega_x^e)} \quad (4.16)$$

donde la matriz $\mathbf{B}^e(\mathbf{x})$ es la matriz de funciones bubble del residuo. La manera de determinar éstas funciones bubble se estudia en el siguiente apartado.

$$\mathbf{B}^e = \begin{pmatrix} b_{0x}^e & b_{0y}^e \\ b_{0y}^e & b_{0x}^e \end{pmatrix}$$

Así pues, la expresión (4.14) se puede expresar como

$$\left\| \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \right\|_{L_r(\Omega^e)} \leq \|\mathbf{B}^e(\mathbf{x})\|_{L_r(\Omega_x^e)} \|\llbracket \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}} \rrbracket\|_{L_\infty(\Gamma^e)} \quad (4.17)$$

En este caso, $\|\llbracket \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}} \rrbracket\|_{L_\infty(\Gamma^e)}$ representa el salto máximo que existe entre las tensiones en el contorno del elemento.

La función bubble aporta al estimador de error la información específica del problema físico a resolver. En la formulación del estimador de error, la función bubble se introduce a través de la matriz $\boldsymbol{\tau}_{el,Lr}^{err}$ como se verá más adelante.

4.3. Función bubble

Para encontrar la solución de desplazamientos de la escala fina, \mathbf{u}' , es necesario determinar la función bubble, que a su vez es la integral de la función Green. La formulación para obtener la función bubble o burbuja es:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\mathbf{B}^e = \mathbb{I} & \text{en } \Omega^e \\ \mathbf{B}^e = 0 & \text{en } \Gamma^e \end{cases}$$

donde \mathbf{B}^e es la función bubble y \mathbb{I} es la matriz identidad.

El operador diferencial, \mathcal{L} , es el mismo que hemos empleado anteriormente para resolver el problema de tensión plana. El problema se evalúa en un elemento Ω^e , cuyo contorno es Γ^e .

La función bubble se ha obtenido de forma numérica. Para ello, mediante el problema de elementos finitos empleado para resolver los problemas de tensión plana, se ha resuelto un problema con carga distribuida unidad sobre un área rectangular y condiciones de contorno Dirichlet homogéneas. El módulo elástico y el coeficiente de Poisson que se han impuesto son los mismos que los del problema a analizar. En la figura 4.2 se muestra el planteamiento del problema.

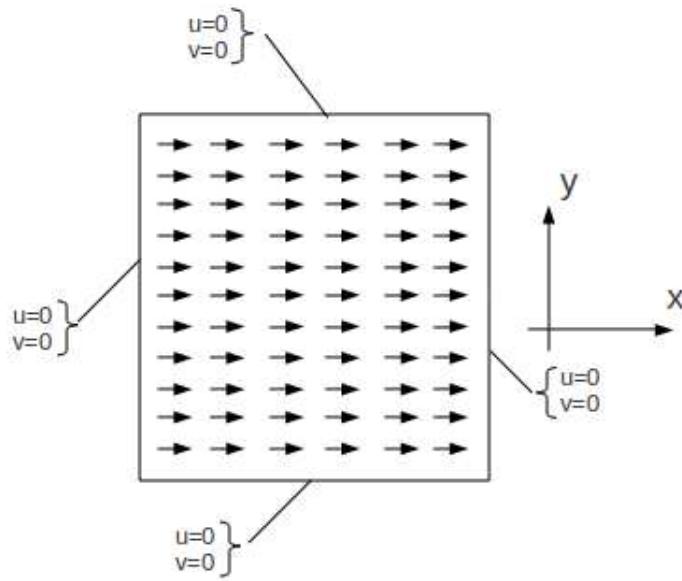


Figura 4.2: Planteamiento del problema para hallar la función bubble

La solución en desplazamientos del problema anterior, determina la función bubble. Para realizar la integral de la función bubble se dispuso con una malla muy fina para que la integral fuera lo más exacta posible. En la figura 4.3 se muestra tanto la malla como los vectores desplazamiento de cada nodo.

Los desplazamientos que se obtienen tanto en el eje x como en el eje y , se integran por separado para obtener la matriz τ_{el}^{err} que nos servirá posteriormente para obtener la estimación del error. Como se aprecia, existen desplazamientos tanto en x como en y , que se denominarán $\mathbf{u}_b = (u_{bx}, u_{by})$. Por tanto, si se toma la norma L_1 y L_2 de la función bubble con dichos desplazamientos

$$\text{Norma } L_1 : \|b_{0x}^e\|_{L_1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{nel} \int_{\Omega^e} |u_{bx}| d\Omega^e \quad \|b_{0y}^e\|_{L_1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{nel} \int_{\Omega^e} |u_{by}| d\Omega^e \quad (4.18)$$

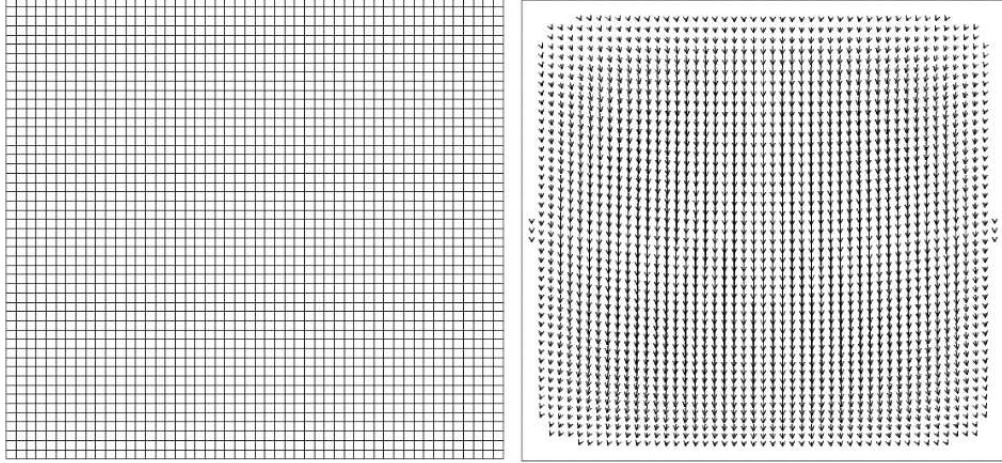


Figura 4.3: Malla y desplazamientos de los nodos para hallar la función bubble

$$\text{Norma } L_2 : \quad \|b_{0x}^e\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{nel} \int_{\Omega^e} |u_{bx}|^2 d\Omega^e} \quad \|b_{0y}^e\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{nel} \int_{\Omega^e} |u_{by}|^2 d\Omega^e} \quad (4.19)$$

4.4. Expresión del estimador de error

Las componentes de la matriz $\boldsymbol{\tau}_{el}^{err}$ se obtiene a partir de la norma de la función bubble obtenida.

$$\boldsymbol{\tau}_{el,L_r}^{err} = \frac{\|\mathbf{B}^e\|_{L_r(\Omega^e)}}{\text{meas}(\Omega^e)^{1/r}} = \frac{\begin{pmatrix} \|b_{0x}^e\|_{L_r(\Omega^e)} & \|b_{0y}^e\|_{L_r(\Omega^e)} \\ \|b_{0y}^e\|_{L_r(\Omega^e)} & \|b_{0x}^e\|_{L_r(\Omega^e)} \end{pmatrix}}{\text{meas}(\Omega^e)^{1/r}}$$

Conociendo la función bubble del problema, podemos expresar la matriz $\boldsymbol{\tau}_{el,L_r}^{err}$ para la norma L_1 y L_2 como:

$$\boldsymbol{\tau}_{el,L_1}^{err} = \frac{\|\mathbf{B}^e\|_{L_1(\Omega^e)}}{\text{meas}(\Omega^e)} \quad \boldsymbol{\tau}_{el,L_2}^{err} = \frac{\|\mathbf{B}^e\|_{L_2(\Omega^e)}}{\text{meas}(\Omega^e)^{1/2}} \quad (4.20)$$

Así pues, el estimador de error queda finalmente

$$\|\mathbf{u}'(\mathbf{x})\|_{L_r(\Omega^e)} \approx \frac{1}{2} \text{meas}(\Omega^e)^{1/r} \boldsymbol{\tau}_{el,L_r}^{err} \frac{\text{meas}(\Gamma^e)}{\text{meas}(\Omega^e)} \|\|\mathcal{B}\bar{\mathbf{u}}\|\|_{L_\infty(\Gamma^e)} \quad (4.21)$$

$I_{\text{eff}}^e < 0.1$	Intolerable
$0.1 < I_{\text{eff}}^e < 0.5$	Deficiente
$0.5 < I_{\text{eff}}^e < 2.0$	Óptima
$2.0 < I_{\text{eff}}^e < 5.0$	Conservadora
$5.0 < I_{\text{eff}}^e < \infty$	Sobrestimado

Tabla 4.1: Valoración de la eficiencia

4.5. Eficiencia global y eficiencia local

Una manera de medir la calidad de un estimador de error es comparar el error estimado con el error real que se produce. De esta manera, se definen los conceptos de eficiencia local y eficiencia global. La eficiencia local es la relación entre el error estimado en un elemento y el error real que se produce en él.

$$I_{\text{eff}}^e = \frac{\|\text{Error estimado}\|}{\|\text{Error real}\|} = \frac{\|\boldsymbol{\eta}^e\|}{\|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{\Omega^e}} \quad (4.22)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma a considerar. En nuestro caso la variable que nos interesa son los desplazamientos. El error estimado se denota como $\boldsymbol{\eta}^e$. Como ya se ha comentado anteriormente, los desplazamientos obtenidos de la solución aproximada de elementos finitos es $\bar{\mathbf{u}}$ y denominado \mathbf{u} como la solución exacta.

Por otro lado, se define la eficiencia global como el cociente de las sumas de las normas del error estimado y error real en todo el dominio. Las normas más empleadas son la norma L_1 y L_2

$$I_{\text{eff},L_1}^G = \frac{\sum_{i=1}^{\text{nel}} \boldsymbol{\eta}_i^e}{\sum_{i=1}^{\text{nel}} \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{\Omega_i^e}} \quad I_{\text{eff},L_2}^G = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\text{nel}} [\boldsymbol{\eta}_i^e]^2}{\sum_{i=1}^{\text{nel}} \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{\Omega_i^e}^2}} \quad (4.23)$$

En la tabla 4.1 se muestra la valoración subjetiva con que se evalúa la eficiencia y con la que se determina la calidad de la estimación de error.

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones realizadas sobre los distintos problemas de tensión plana. El cálculo de estimación de error se ha realizado mediante el procedimiento de cálculo expuesto. De acuerdo con los objetivos, se muestran los resultados más significativos del trabajo, donde se analiza la eficiencia local, la eficiencia global y la sensibilidad de las mismas respecto a los parámetros principales del problema. El módulo elástico y el coeficiente de Poisson seleccionados para las simulaciones son los típicos del acero. El módulo elástico es $E = 2.1e11\text{N/m}^2$ y el coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

Primeramente, se muestra la aplicación de esta metodología de estimación de error para la ecuación del calor, que al ser también una ecuación elíptica, guarda cierta relación con la ecuación de elasticidad.

5.1. Problema de la ecuación de calor

Para la ecuación de calor, se ha utilizado el mismo método que para elasticidad, en el cálculo del error. Evidentemente, al tratarse de un problema diferente el valor de τ para la estimación del error es distinta que para el calculado en elasticidad [10]. En este caso el valor de τ según sea la norma L_1 o L_2 es:

$$\tau_{L_1} = \frac{h^2}{28.45 \cdot k} \quad \tau_{L_2} = \frac{h^2}{24.24 \cdot k} \quad (5.1)$$

donde h es la dimensión del elemento y k es la conductividad.

El problema a analizar se muestra en la figura 5.1. Es un dominio rectangular de 10 m de largo y 4 m de ancho en cuyo contorno no hay flujo de calor, a excepción de dos zonas en la parte superior en las que se ha impuesto dos temperaturas diferentes. En la parte de la izquierda se ha impuesto una temperatura $T_1=10\text{ }^{\circ}\text{C}$ y en la parte derecha una temperatura $T_2=0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

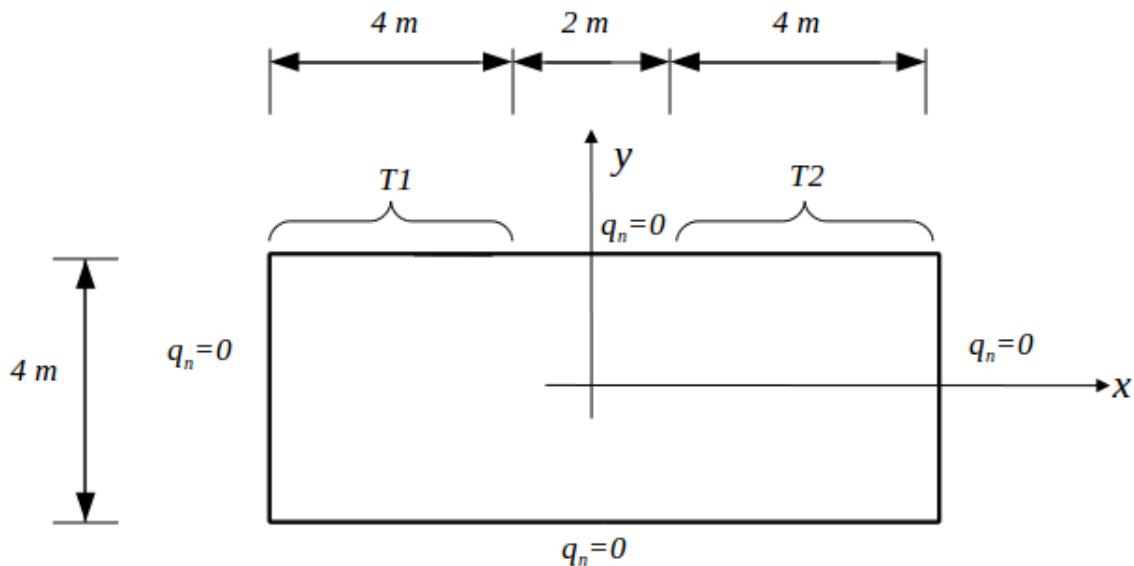


Figura 5.1: Problema de la ecuación de calor

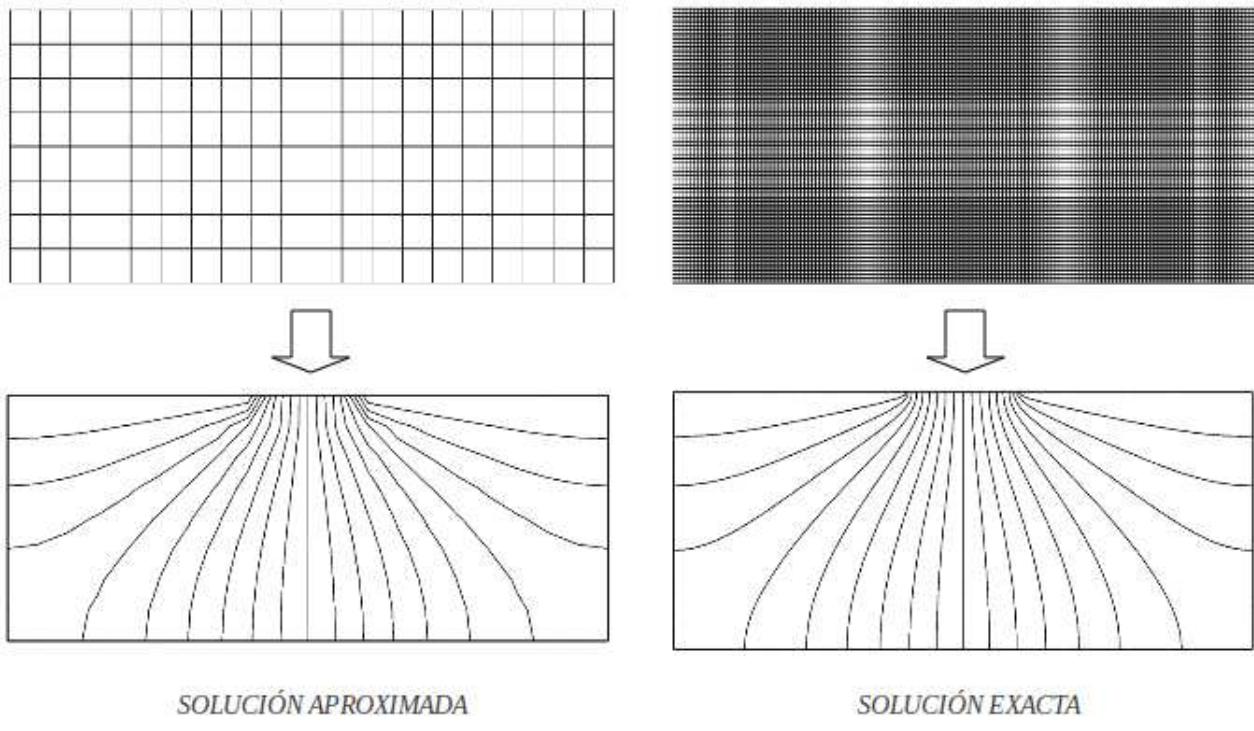


Figura 5.2: Solución de la ecuación de calor

En la figura 5.2 se muestra la solución obtenida mediante elementos finitos y la solución exacta, así como la malla empleada. En este caso, se ha considerado como solución exac-

ta, la solución obtenida con una malla muy fina. La figura de la izquierda es la solución aproximada obtenida por elementos finitos y la figura de la derecha es la solución exacta. Se representan las líneas isotermas. Entre cada curva de nivel hay 0.5°C .

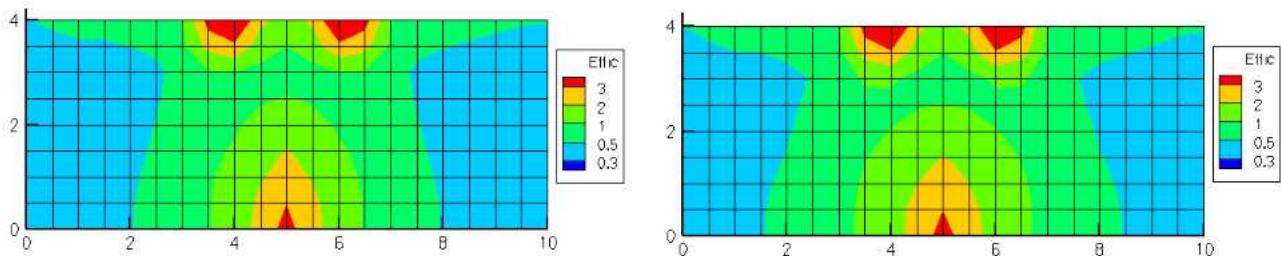


Figura 5.3: Eficiencia local para la ecuación de calor. Norma L_1 (izquierda) y L_2 (derecha)

En la figura 5.3 se muestra la eficiencia local del estimador de error. En prácticamente todo el dominio, la eficiencia es mayor de la unidad y por tanto va del lado de la seguridad. Las eficiencias locales y globales obtenidas con L_1 y L_2 son muy similares. La eficiencia global para la norma L_1 es 0,98879 y para L_2 es 1,9337.

5.2. Problemas sometidos a flexión en el contorno

En primer lugar, se estudian casos sencillos en dominios rectangulares en los que los esfuerzos aplicados y el estado tensional no presentan excesiva complejidad. Los tres primeros problemas analizados son problemas en los que se aplica flexión simple y compuesta en las caras del contorno.

En la figura 5.4 se muestra la geometría, las cargas y condiciones de contorno de los problemas que se describen a continuación:

- Problema (a): El dominio es rectangular y está sometido a flexión pura en los extremos. El cuerpo está apoyado en el centro de la cara inferior.
- Problema (b): Presenta la misma geometría y condiciones de apoyo que el problema (a) pero en este caso, se aplica una flexión en los extremos más un esfuerzo axil. Por tanto, el esfuerzo aplicado es una flexión compuesta.
- Problema (c): La geometría y las condiciones de apoyo son las mismas que en los problemas anteriores, pero en este problema existe flexión en ambos ejes.

Para los problemas realizados en este trabajo se ha escogido arbitrariamente como dimensiones del dominio, una longitud de 10 m y una anchura de 2 m.

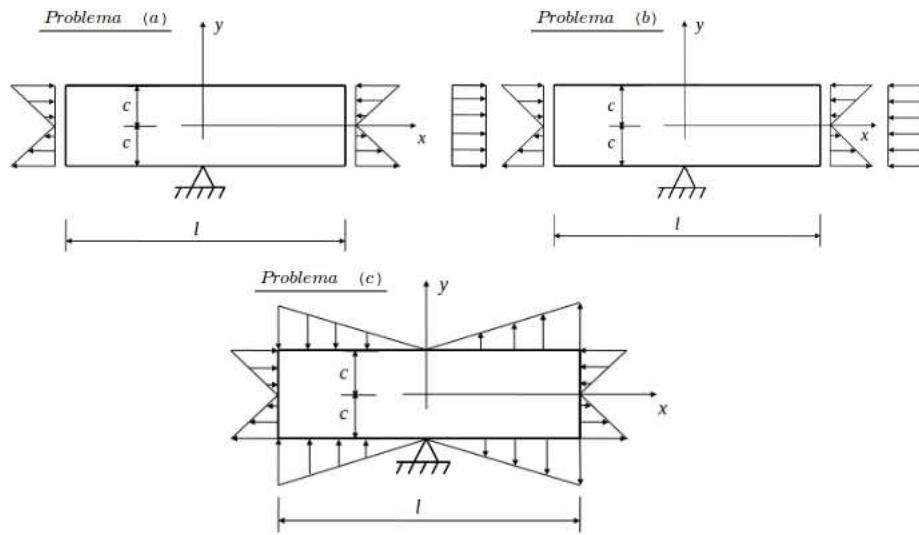


Figura 5.4: Problemas sometidos a flexión en el contorno

5.2.1. Solución analítica de los problemas

Para evaluar el error que se comete en la solución del método de elementos finitos y, de esta manera, calcular la eficiencia, es preciso conocer la solución exacta del problema. A continuación, se muestran las soluciones analíticas de los problemas (a), (b) y (c). En los anexos se detallá detenidamente el proceso de cálculo de la solución exacta.

Problema (a)

$$\begin{aligned} u &= \frac{M_x}{I_x} x \cdot y \\ v &= -\frac{M_x}{2EI_x} x^2 - \frac{\nu M_x}{2EI_x} y^2 + \frac{\nu M_x}{2EI_x} c^2 \end{aligned}$$

Problema (b)

$$\begin{aligned} u &= \frac{M_x}{I_x} x \cdot y + \frac{Nx}{2cE} \\ v &= -\frac{M_x}{2EI_x} x^2 - \frac{\nu M_x}{2EI_x} y^2 + \frac{\nu M_x}{2EI_x} c^2 - \nu \frac{N_x}{2cE} (y + c) \end{aligned}$$

Problema (c)

$$\begin{aligned} u &= \frac{M_x}{EI_x}x \cdot y - \nu \frac{M_y}{2I_y E}x^2 - \frac{M_y}{2EI_y}y^2 + \frac{M_y}{2I_y E}c^2 \\ v &= -\frac{\nu M_x}{2EI_x}y^2 - \frac{M_x x^2}{EI_x} + \frac{\nu M_x}{2EI_x}c^2 + \frac{M_y}{EI_y}xy \end{aligned}$$

donde M_x , M_y y N son los esfuerzos de momento en x , momento en y y axil respectivamente. $I_x = \int_{-c}^c y^2 \cdot dy$ es el momento de inercia en el eje x y $I_y = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \cdot dx$ es el momento de inercia en el eje y .

5.2.2. Solución de elementos finitos

Para realizar las simulaciones se ha realizado un mallado de 20 elementos en x y 4 elementos en y como se muestra en la figura 5.5.

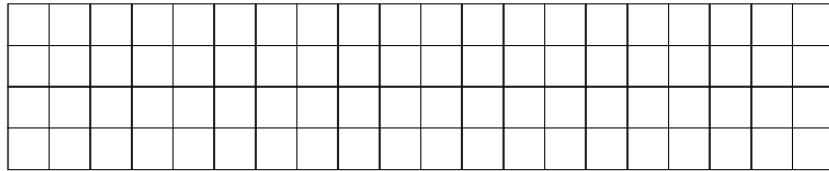


Figura 5.5: Forma del mallado

En las figuras 5.6, 5.7 y 5.8 se muestra la deformada de los tres casos distintos analizados. Se muestra las cargas aplicadas y los vectores del desplazamiento de los nodos.

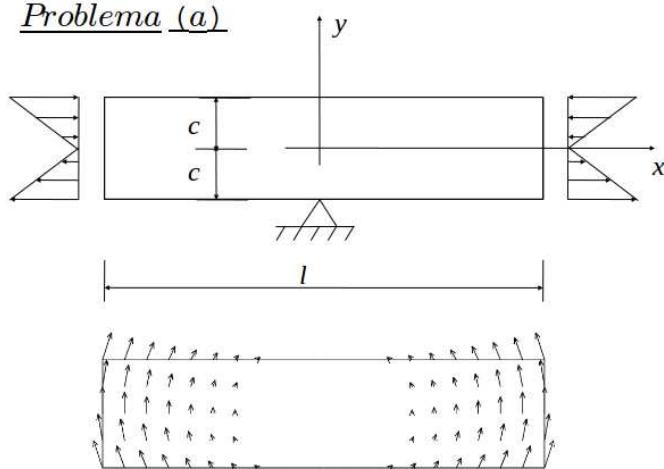
Problema (a)

Figura 5.6: Deformada del problema (a)

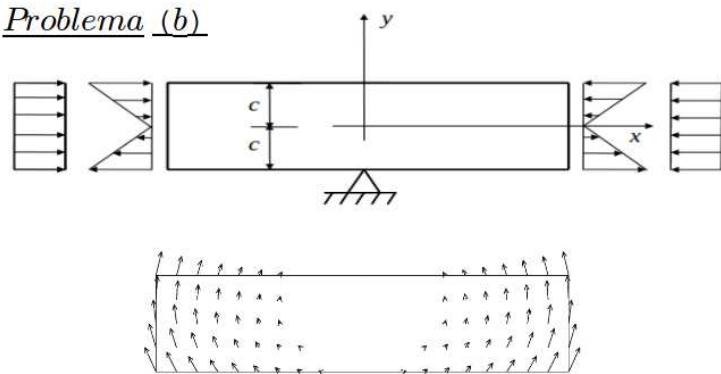
Problema (b)

Figura 5.7: Deformada del problema (b)

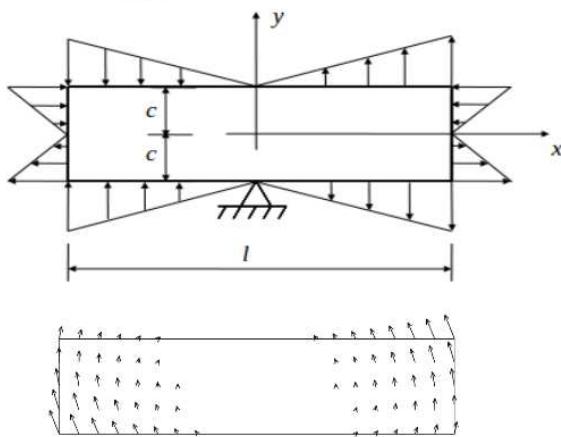
Problema (c)

Figura 5.8: Deformada del problema (c)

5.2.3. Análisis de la eficiencia del error

Dela figura 5.9 a 5.14, se muestra en mapa de colores la eficiencia local tanto en el eje x como en el eje y para los problemas (a), (b) y (c). Se muestra la eficiencia tanto con la norma L_1 como con la norma L_2 .

- Problema (a)

En este caso, se ha aplicado un momento en los extremos del dominio de $M_x = 1000$ N m. En las figuras 5.9 y 5.10 se observan las eficiencias locales.

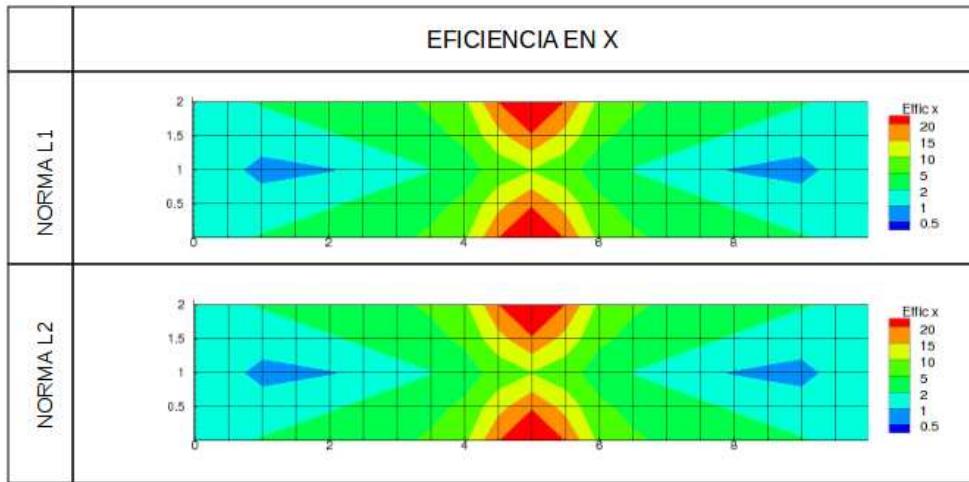


Figura 5.9: Eficiencia en x . Problema (a)

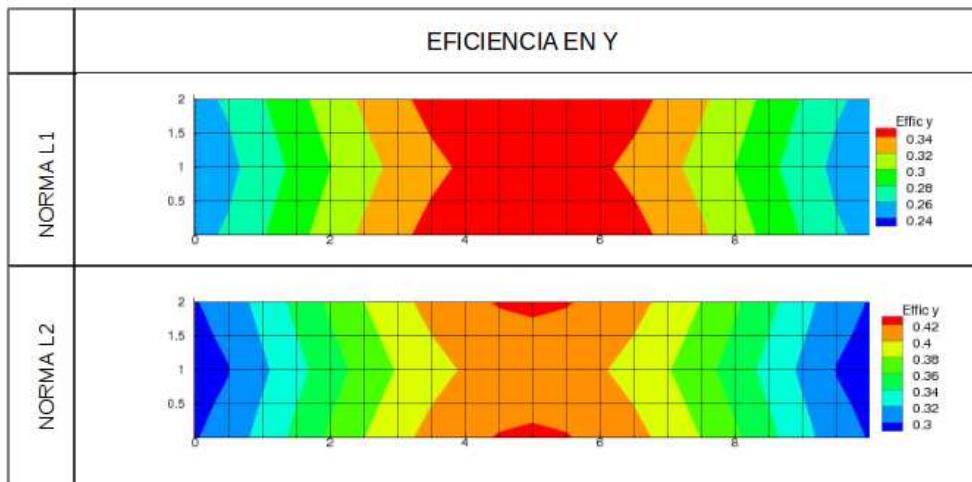


Figura 5.10: Eficiencia en y . Problema (a)

- Problema (b)

El esfuerzo axil aplicado es $N_x = -1000\text{N}$ y el momento en x es $M_x = 1000\text{N m}$

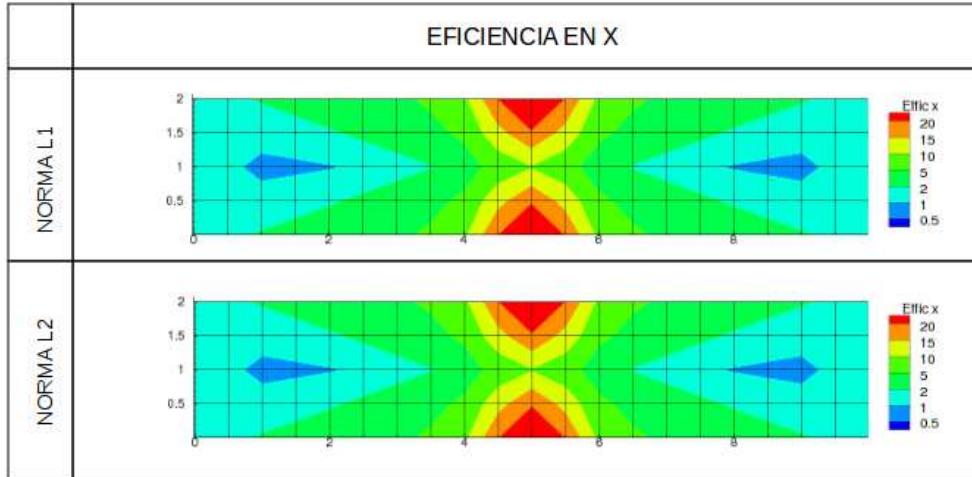


Figura 5.11: Eficiencia en x . Problema (b)

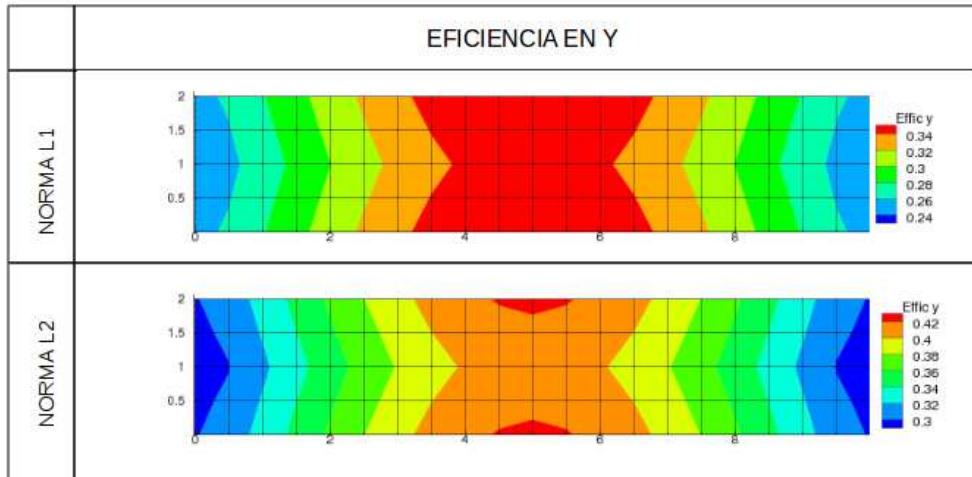


Figura 5.12: Eficiencia en y . Problema (b)

Se observa que la eficiencia es la misma para el problema (a) que para el problema (b). Este resultado es coherente, ya que la única diferencia entre ambos problemas es el esfuerzo axil en el eje x que existe en el problema (b). La solución que proporciona el método de elementos finitos de una barra traccionada es exacta, ya que en este caso los desplazamientos son lineales. Por esta razón, el esfuerzo axil aplicado no introduce error alguno en la solución de elementos finitos del problema (b). Por otro

lado, nuestro estimador de error tampoco se ve afectado. De ahí, que la eficiencia entre los dos problemas sea la misma.

■ Problema (c)

En este problema, como ya se ha comentado, se aplica momento de flexión en ambas caras del dominio rectangular. En la cara superior e inferior el momento es $M_y = 100000\text{N m}$ y en las caras laterales el momento es $M_x = 1000\text{N m}$. La diferencia de la magnitud del momento aplicado en el eje x y en eje y se debe a que la inercia en y es mayor que en x y por tanto se ha aumentado el momento M_y para que la tensión en las caras del dominio sean del mismo orden.

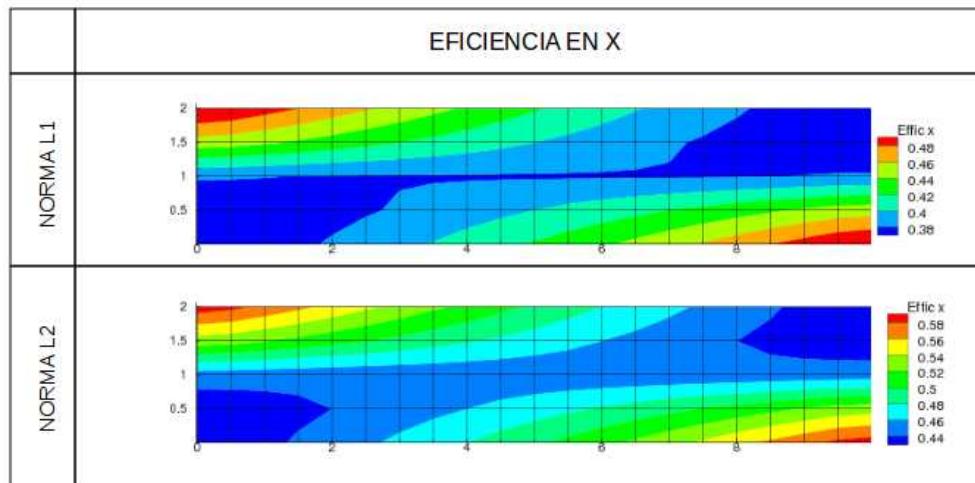


Figura 5.13: Eficiencia en x . Problema (c)

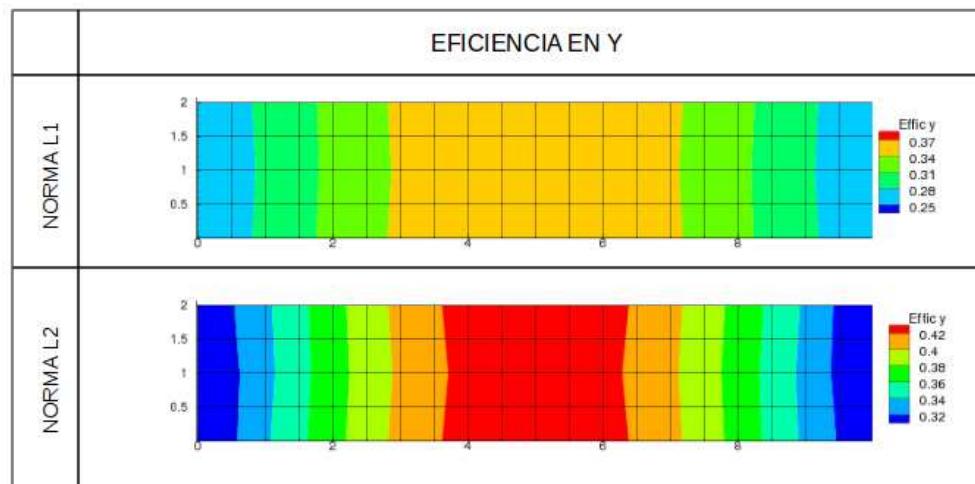


Figura 5.14: Eficiencia en y . Problema (c)

Gráficos de eficiencias locales

Para evaluar la eficiencia local en los elementos de los problemas, se han agrupado dichas eficiencias según la tabla 4.1. En las figuras 5.15, 5.16 y 5.17 se representan los diagramas de barras que muestran la frecuencia con que se repite una eficiencia local en los elementos tanto en la norma L_1 como L_2 .

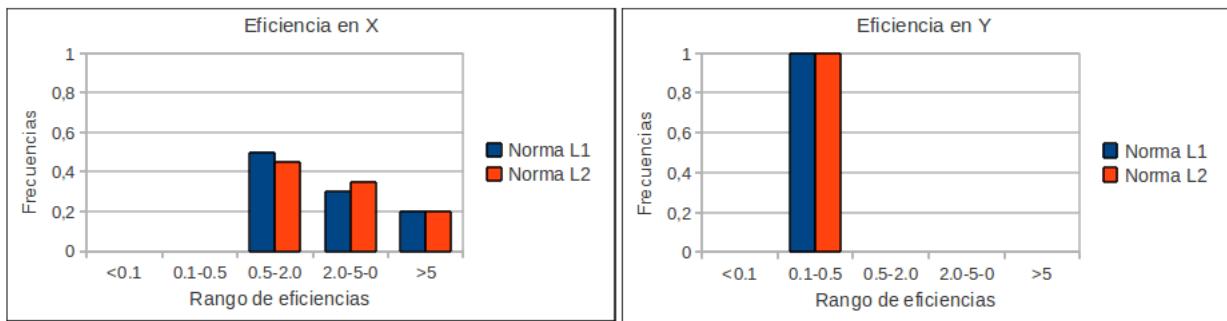


Figura 5.15: Eficiencia en x y en y . Problema (a)

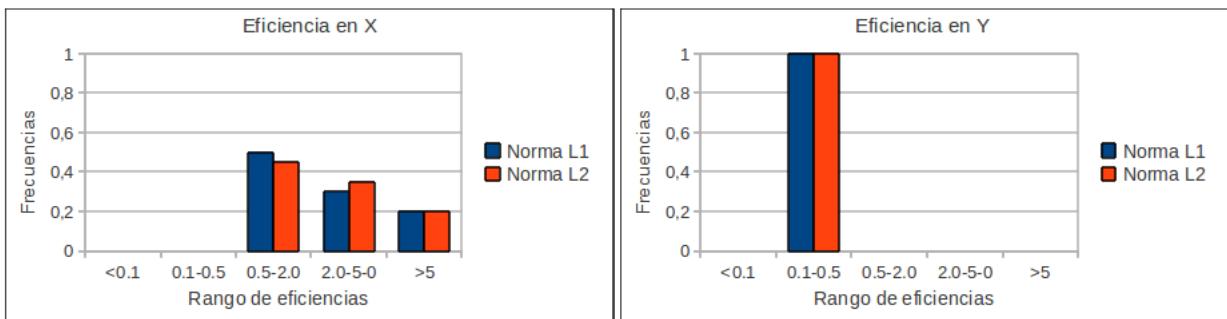
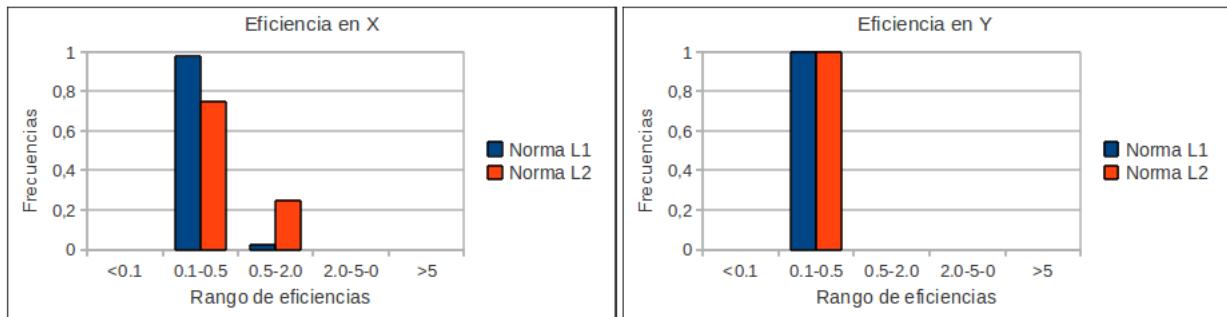


Figura 5.16: Eficiencia en x y en y . Problema (b)

Figura 5.17: Eficiencia en x y en y . Problema (c)

Eficiencia Global

Por último, en la siguiente tabla 5.1 se muestran las eficiencias globales obtenidas tanto en el eje x como en el y .

	Eficiencia x		Eficiencia y	
	Norma L1	Norma L2	Norma L1	Norma L2
Probl (a)	2.475	2.73	0.308	0.358
Probl (b)	2.475	2.73	0.308	0.358
Probl (c)	1.544	1.816	0.309	0.360

Tabla 5.1: Eficiencia globales en x e y en problemas a, b y c

5.2.4. Análisis de sensibilidad del estimador

Es interesante comprobar cómo se comporta el estimador de error al variar los principales parámetros que definen el problema. En este caso, se ha estudiado la eficiencia para diferentes módulos elásticos y coeficientes de Poisson, los cuales definen el comportamiento de un material elástico lineal. También se ha analizado la influencia del tamaño del elemento de la malla.

- Modificación de Módulo elástico, E

Para el análisis de sensibilidad aplicado al módulo elástico, E , se ha tomado $\nu = 0.3$ y $E = 2.1e10, 2.1e11 y 2.1e12$ N m. Se ha observado que el estimador proporciona la misma eficiencia independientemente su valor, como se aprecia en la figura 5.18. Esto se debe a la proporcionalidad que existe entre el módulo elástico y los desplazamientos, que es la misma que existe entre el módulo elástico y el error estimado.

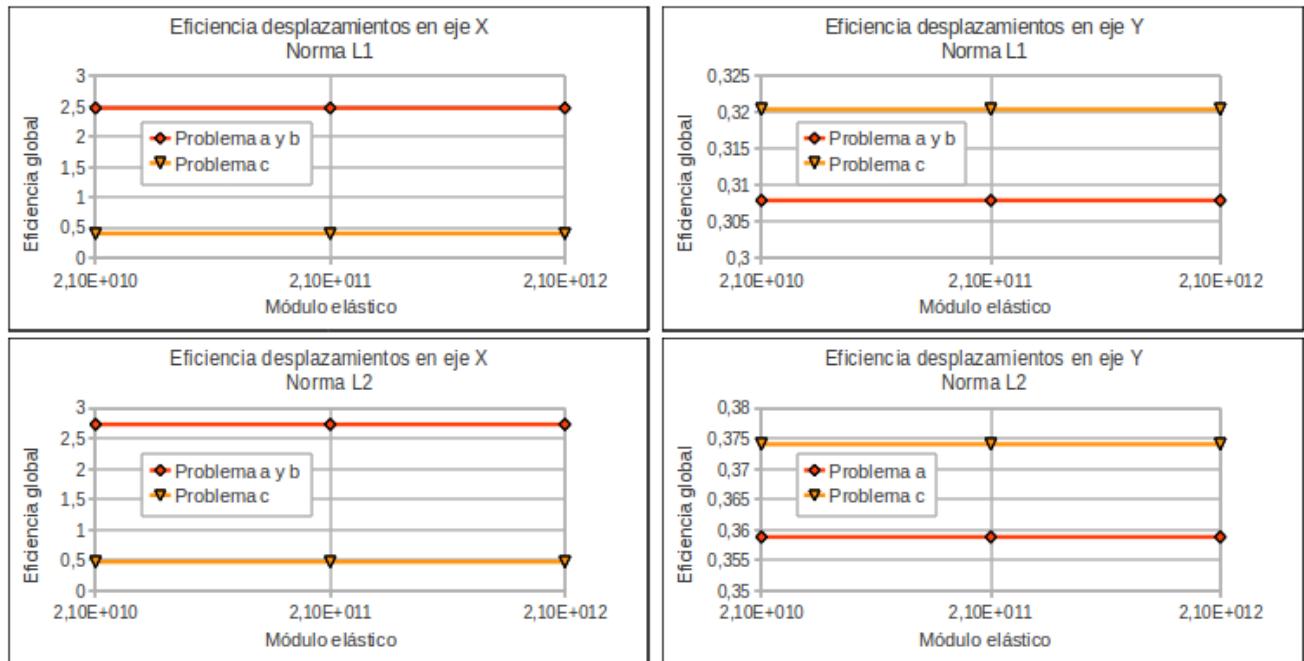


Figura 5.18: Influencia del módulo elástico en la eficiencia. Norma L_1 y L_2

De esta manera, al doblar el valor del módulo elástico, los desplazamientos que proporciona la solución de elementos finitos y la solución exacta es justamente el doble. Por tanto, el error real que comete el método de elementos finitos es el doble. Por otro lado, el error estimado también se dobla ya que la función bubble dobla su valor y el estimador es proporcional a esta función bubble. Por tanto, al realizar el cálculo de la eficiencia, en la que se divide error estimado y error real, se obtiene el mismo valor.

■ Coeficiente de Poisson, ν

Desde un punto de vista físico, los valores que puede tomar el coeficiente de Poisson de un material va de 0 a 0,5 sin llegar a estos extremos. Por ello, se ha tomado como módulo elástico $E = 2.1e11$ N m y se ha realizado un barrido del parámetro coeficiente de Poisson desde 0,05 a 0,45. En las figuras 5.19 y 5.20 se muestran los valores de eficiencia global obtenidos para los tres problemas analizados y para las normas L_1 y L_2 . Los problemas (a) y (b) se han agrupado al tener la misma eficiencia.

■ Tamaño del elemento

Una cuestión importante a analizar en un estimador de error es ver si la eficiencia se ve afectada por el tamaño de los elementos. Para estudiar la sensibilidad de la eficiencia, se ha partido de un tamaño de elemento h y se ha ido haciendo el elemento más pequeño $h/2$ y $h/4$. En este caso, h es el lado del elemento cuadrilátero.

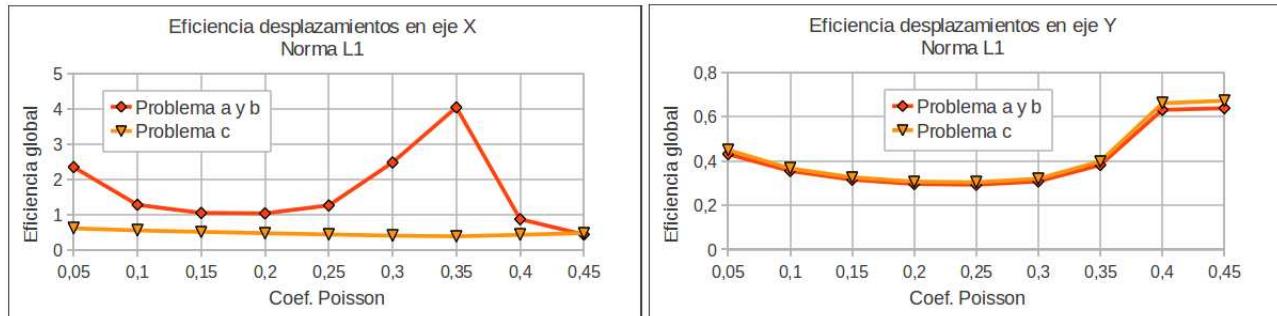


Figura 5.19: Influencia del coeficiente de Poisson en la eficiencia. Norma L1

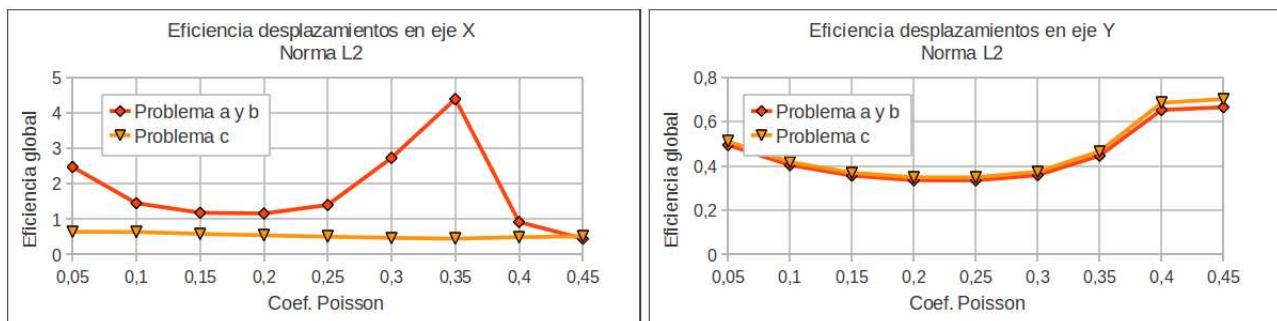


Figura 5.20: Influencia del coeficiente de Poisson en la eficiencia. Norma L2

En las figuras 5.21 y 5.22 aparece la eficiencia global obtenida con los distintos tamaños de malla para las normas L_1 y L_2 con $\nu = 0.3$ y $E = 2.1e11$ N m. Se aprecia que la influencia es mínima, exceptuando la eficiencia para el eje x en los problemas (a) y (b).

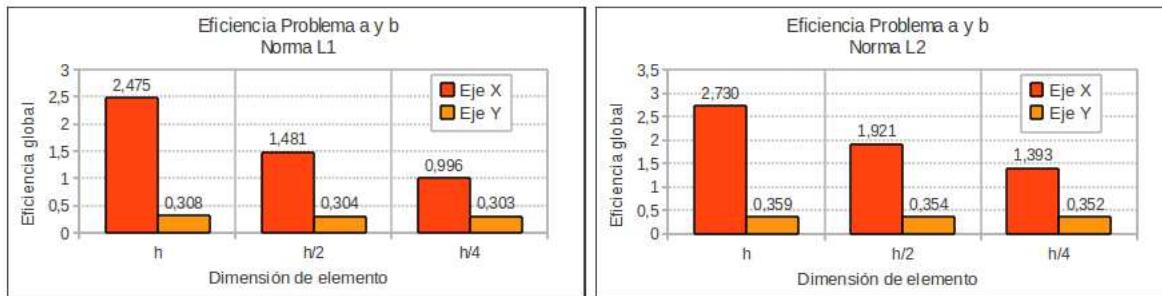


Figura 5.21: Influencia del tamaño de malla en la eficiencia. Problema a y b

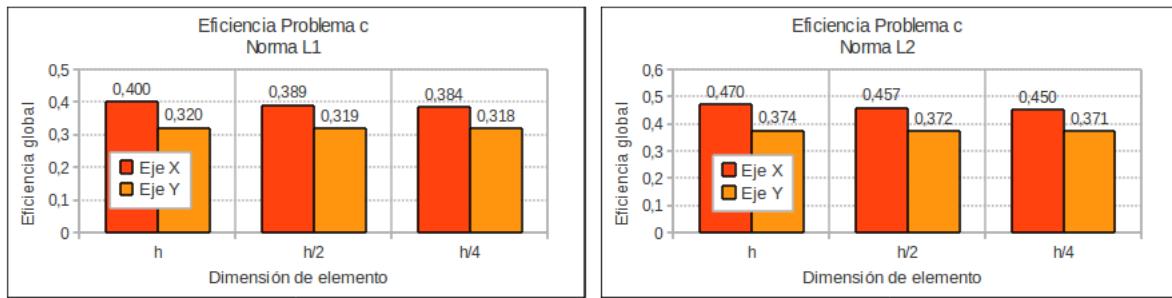


Figura 5.22: Influencia del tamaño de malla en la eficiencia. Problema c

5.3. Viga en voladizo y viga biapoyada

En este apartado, se muestran los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas para dos casos en los que el estado tensional de los cuerpos es de mayor complejidad. En la figura 5.23 aparecen los problemas que se han estudiado.

El primer problema, se trata de una viga rectangular en voladizo con una carga P en el extremo opuesto del empotramiento. El segundo caso, el problema a resolver es una viga rectangular biapoyada en la que se ha aplicado una carga distribuida en la cara superior.

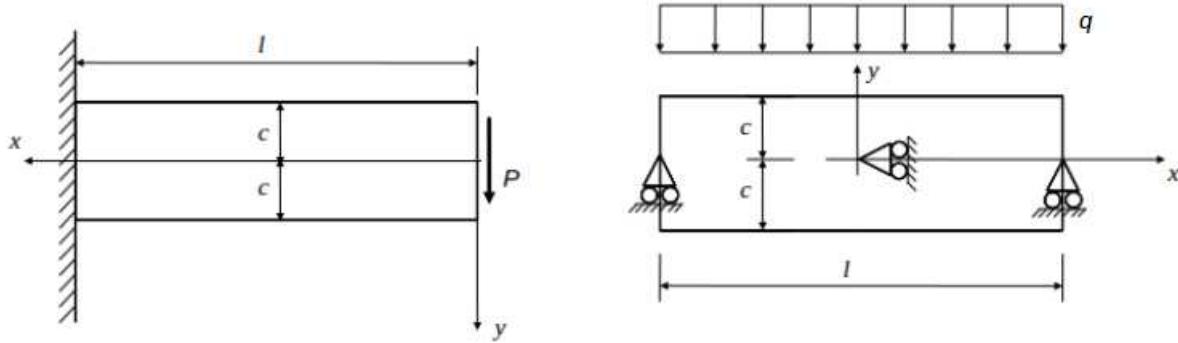


Figura 5.23: Problemas de viga empotrada y viga apoyada

Al igual que en la sección anterior, se ha seleccionado un dominio con una longitud de 10 m y una anchura de 2 m.

5.3.1. Solución analítica de los problemas

Como en los problemas anteriormente analizados, hay que conocer la solución exacta del problema a tratar. De esta manera, se puede hallar el error que se comete con el método de elementos finitos. A continuación, se muestran las soluciones analíticas de los

problemas. En los anexos se detalla detenidamente el proceso de cálculo de la solución exacta.

Problema viga empotrada

$$u = -\frac{P \cdot x^2 \cdot y}{2EI} - \frac{\nu \cdot P \cdot y^3}{6EI} + \frac{P \cdot y^3}{6IG} + \left(\frac{P \cdot l^2}{2EI} - \frac{P \cdot c^2}{2IG} \right) \cdot y \quad (5.2)$$

$$v = \frac{\nu \cdot P \cdot x \cdot y^2}{2EI} + \frac{P \cdot x^3}{6EI} - \frac{P \cdot l^2 \cdot x}{2EI} + \frac{P \cdot l^3}{3EI} \quad (5.3)$$

Problema viga biapoyada

$$u = \frac{q}{2EI} \left[\left(l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + \nu x \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right] \quad (5.4)$$

$$v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + \nu \left[(l^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\} - \quad (5.5)$$

$$-\frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right] +$$

$$+\frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]$$

donde $I = \int_{-c}^c y^2 \cdot dy$ es el momento de inercia de la sección transversal.

5.3.2. Solución por elementos finitos

En este caso, para las simulaciones se ha realizado un mallado de 20 elementos en x y 4 elementos en y como se muestra en la figura 5.24.

En la figura 5.25 se muestra la deformada de la viga empotrada y de la viga apoyada obtenida mediante el método de elementos finitos. Se representan los vectores desplazamiento de los nodos del mallado.

5.3.3. Análisis de la eficiencia del error

En este aparato se muestra las eficiencias locales obtenidas en la estimación de error. En las figuras 5.26, 5.27, 5.28 y 5.29 se muestra en mapa de colores la eficiencia tanto en el eje x como en el eje y para los problemas estudiados.

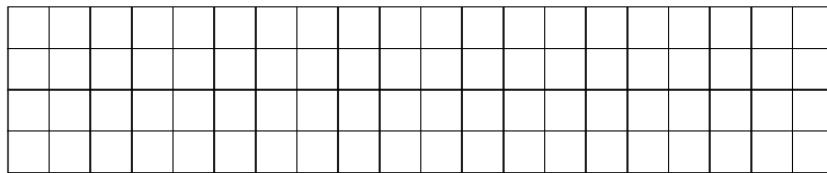


Figura 5.24: Forma del mallado

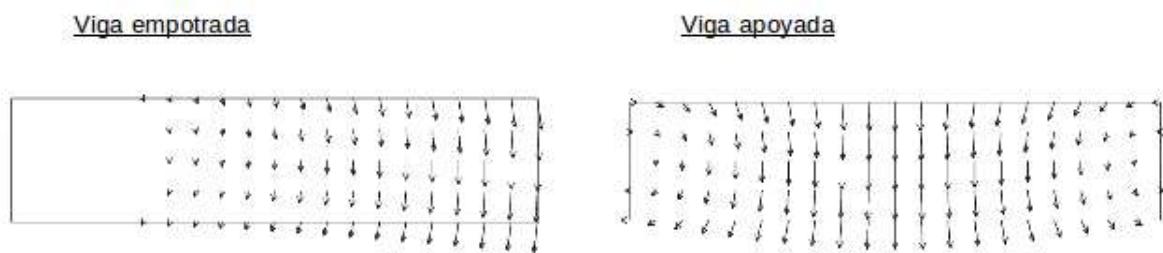


Figura 5.25: Deformada de la viga empotrada y de la viga apoyada

- Viga empotrada

El valor de la carga P colocada en el extremo del voladizo es de 1000 N.

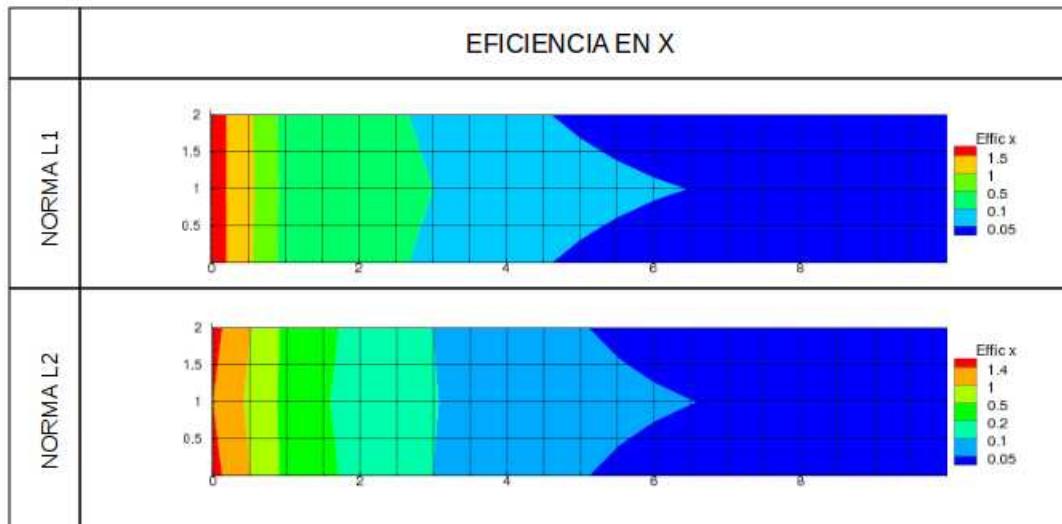


Figura 5.26: Eficiencia en x. Problema viga empotrada

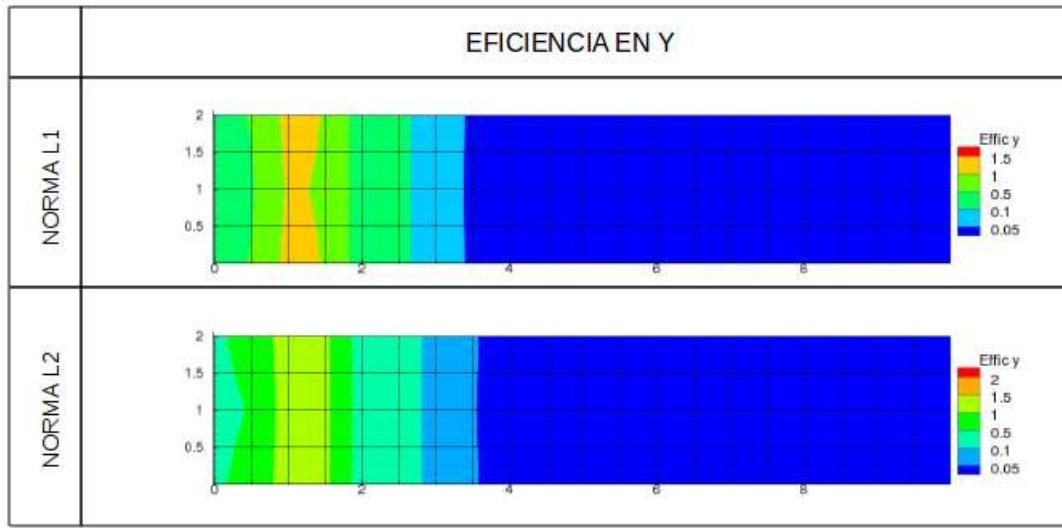


Figura 5.27: Eficiencia en y. Problema viga empotrada

- Viga apoyada

En este caso, la carga distribuida en la viga es de 100 N/m.

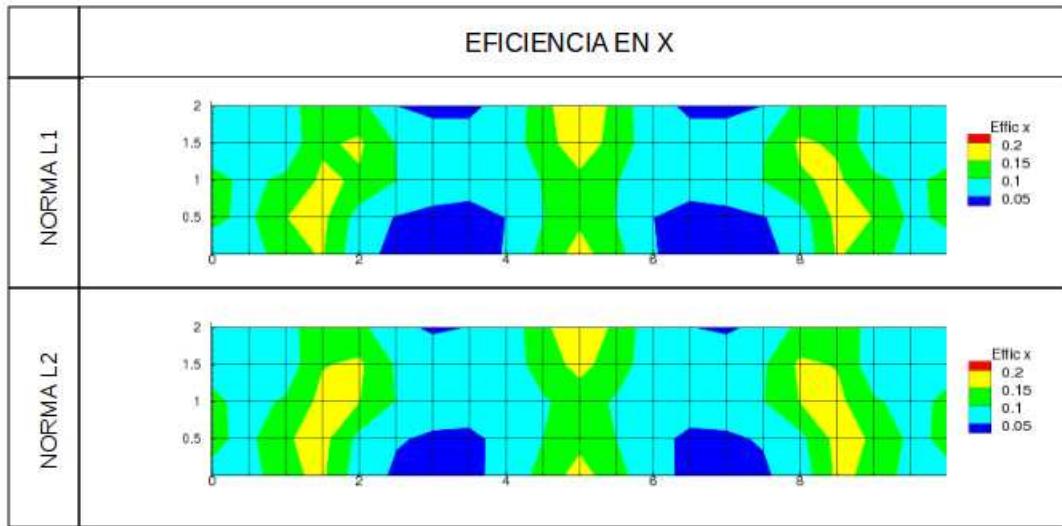


Figura 5.28: Eficiencia en x. Problema viga apoyada

Por último, en la siguiente tabla 5.2 se muestran las eficiencias globales obtenidas tanto en el eje x como en el y .

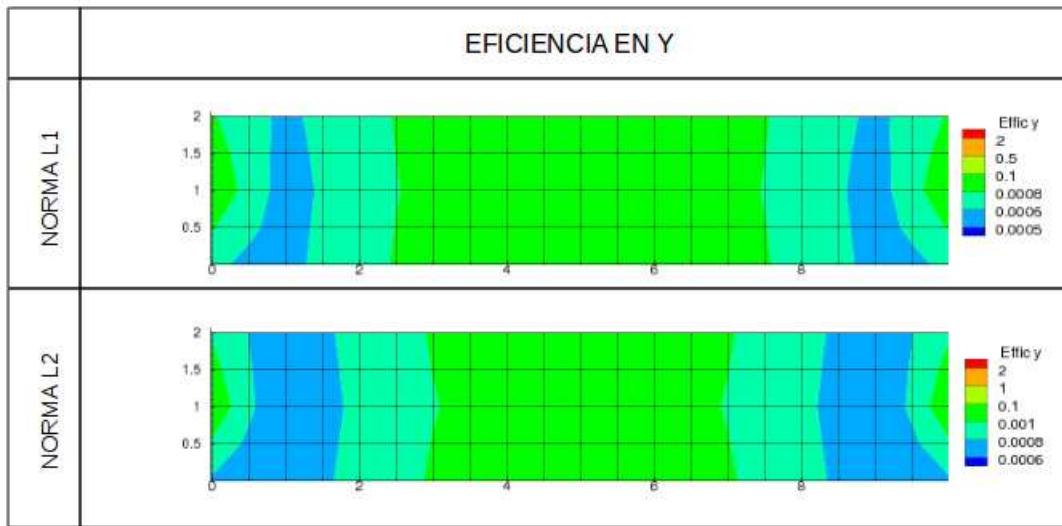


Figura 5.29: Eficiencia en y. Problema viga apoyada

	Eficiencia x		Eficiencia y	
	Norma L1	Norma L2	Norma L1	Norma L2
Viga empotrada	5.85e-2	6.03e-2	1.37e-2	1.38e-2
Viga biapoyada	0.1968	0.1958	3.533e-2	3.88e-2

Tabla 5.2: Eficiencia en x e y en problemas a, b y c

Capítulo 6

Conclusiones

A raíz de los resultados obtenidos se extraen las siguientes conclusiones:

- En los problemas (a), (b) y (c), las eficiencias tanto locales como globales están dentro de límites aceptables. En general, la eficiencia suele ser menor que la unidad, es decir, la estimación de error es más pequeña que lo que realmente es. Un aspecto positivo, es que en las desplazamientos en el eje y , que es donde se produce el desplazamiento más importante, la dispersión del error es muy pequeña, existiendo entre el error real y el error estimado un factor de escala prácticamente constante en todo el dominio.
- Se aprecia que el valor de la eficiencia local y la eficiencia global no se ve afectada de forma relevante por el tipo de norma empleada, L_1 y L_2 , siendo la eficiencia obtenida mediante la norma L_2 un poco mayor que la eficiencia de la norma L_1 .
- En el estudio de sensibilidad, se ha observado que la calidad de la estimación de error no se ve afectada de forma notable por la variación de los parámetros que definen las propiedades del material. Respecto al módulo elástico, la eficiencia es independiente de su valor. Por otro lado, el estimador de error es poco sensible a la variación del coeficiente de Poisson, ν . Además, tampoco afecta de forma significativa el tamaño de la malla, siendo las eficiencias de la estimación del error similares para mallas diferentes.
- En los problemas de la viga en voladizo y la viga biapoyada los resultados de las eficiencias no son tan satisfactorios. En estos problemas, el estado tensional es más complejo que en los problemas más básicos como son los problemas (a), (b) o (c). En gran parte del dominio, la estimación de error es bastante más pequeña que el error real. Las posibles causas de esta discrepancia son:
 - Las aproximaciones realizadas en la función de Green, mediante el teorema de la traza, en el planteamiento de la formulación del error.
 - Comparando con los problemas (a), (b) y (c), en los problemas de la viga empotrada y biapoyada, existe presencia de esfuerzo cortante, donde posiblemente el estimador de error no trate de forma adecuada el efecto de este esfuerzo a la estimación del error.

- Además, en relación a la matriz constitutiva de la ecuación del calor y de la ecuación de elasticidad, es en los términos de fuera de la diagonal donde existe una diferencia significativa entre ambas. En la ecuación de calor, estos valores son nulos, mientras que en la ecuación de elasticidad no lo son. Son precisamente estos valores fuera de la diagonal los que influyen en la aportación que hacen los esfuerzos cortantes. Por tanto, sería conveniente en un trabajo futuro, predecir de manera más óptima la influencia del cortante en la estimación del error.

Bibliografía

LIBROS

- [1] Hauke, G.; *Introducción al método de elementos finitos en fluidodinámica computacional*, Primera edición, 2010.
- [2] Timoshenko, S.P., Goodier J.N. *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Book Company, 1970.
- [3] Ortiz Berrocal, L., *Elasticidad*, 3^a edición, McGrawHill, 1998.
- [4] Oñate, E. *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis elástico lineal*, 2^a edición, CIMNE, 1995.
- [5] Hughes, T.J.R. *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, Engelwoods Cliffs, 1987.
- [6] Ainsworth, M., Oden J.T. *A posteriori error estimation in finite element analysis*, Wiley-interscience, 2000.
- [7] Smith, I.M., Griffith, D.V. *Programming the finite element method*, 4th edition, Wiley, 2004.
- [8] Roach, G.F. *Green's function*, 2nd edition, Cambridge university press, 1982.
- [9] Stakgold, I., Holst M., *Green's function and boundary value problems*, 3rd edition, Wiley, 2011.

ARTÍCULOS

- [10] Hauke G., Doweidar M.H. and Fuster D. A posteriori error estimation for computational fluid dynamics: The variational multiscale approach. (Eds.: E. Ramm, R. Borst), Series: Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer, Vol 55 pp. 1–20, 2010. ISSN 1613-7736, ISBN 978-90-481-9808-5.
- [11] Hauke G., Doweidar M.H. and Miana M. Proper intrinsic scales for a-posteriori multiscale error estimation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2005.
- [12] Hauke G., Doweidar M.H. and Miana M. The multiscale approach to error estimation and adaptivity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2005.

- [13] Masud A., Truster T.J. and Bergman M. A variational multiscale a posteriori error estimation method for mixed form of nearly incompressible elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2011.

Anexos

Anexo A

Solución analítica: Problema flexión Pura

En este caso, el problema es una viga de gran canto sometida a flexión pura. Las dimensiones y ejes adoptados para el problema de flexión pura se observan en la figura A.1. Según se muestra, las cargas que se aplican en el contorno del dominio, debido al momento aplicado en los extremos, es una carga distribuida de forma triangular, es decir, la magnitud de la carga aplicada es proporcional a la distancia respecto a la fibra neutra.

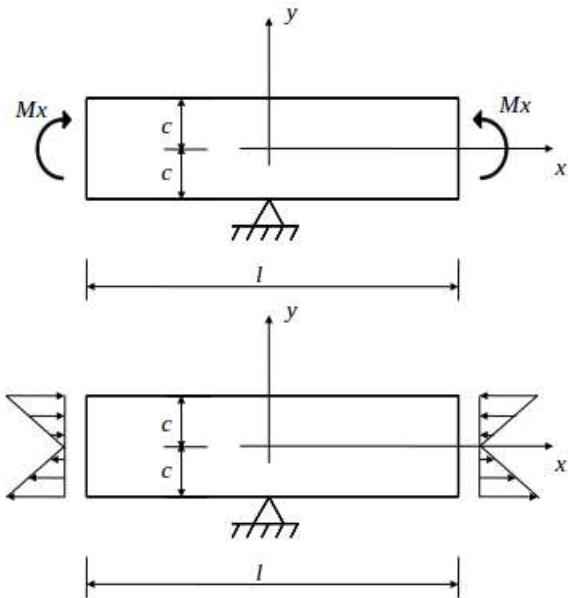


Figura A.1: Problema flexión pura. Dimensiones y ejes

La distribución de la carga en el contorno es igual a las tensiones que se producen en la viga en una sección perpendicular al eje x . Por otro lado, la tensión en y , σ_y , y el cortante, τ_{xy} , son nulos.

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x}y \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde M_x es el momento aplicado e $I_x = \int_{-c}^c y^2 \cdot dy$ es el momento de inercia.

Conociendo el estado tensional en el dominio del problema, es inmediato hallar el estado de deformación.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{M_x}{EI_x}y \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = -\nu \frac{M_x}{EI_x}y \quad (\text{A.3})$$

Integrando e imponiendo las condiciones de contorno apropiadas se obtiene el campo de desplazamientos.

$$u = \frac{M_x}{EI_x}y \cdot x + f_1(y) \quad (\text{A.4})$$

$$v = -\nu \frac{M_x}{2EI_x}y^2 + f_2(x) \quad (\text{A.5})$$

Para determinar $f_1(x)$ y $f_2(x)$ de las ecuaciones anteriores, se aplica la condición de que el esfuerzo cortante es cero.

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \rightarrow \frac{M_x}{EI_x}x + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto, para cumplir la ecuación anterior las funciones $f_1(y)$ y $f_2(x)$ se definen como se muestra a continuación.

$$f_2(x) = -\frac{M_x}{2EI_x}x^2 + A$$

$$f_1(y) = 0$$

Sustituyendo en (A.4) y (A.5), las funciones $f_2(x)$ y $f_1(y)$

$$u = \frac{M_x}{EI_x}y \cdot x \quad (\text{A.7})$$

$$v = -\nu \frac{M_x}{2EI_x}y^2 - \frac{M_x}{2EI_x}x^2 + A \quad (\text{A.8})$$

La constante A se debe obtener aplicando una condición de contorno. En este caso, la condición de contorno es que el desplazamiento vertical en el apoyo es cero.

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -c \end{aligned} \quad \} \rightarrow v = -\frac{\nu M_x}{2EI_x} c^2 + A = 0 \Rightarrow A = \frac{\nu M_x}{2EI_x} c^2$$

Finalmente, los desplazamientos para el problema de flexión pura en una viga de gran canto quedan:

$$u = \frac{M_x}{EI_x} y \cdot x \quad (\text{A.9})$$

$$v = -\frac{\nu M_x}{2EI_x} y^2 - \frac{M_x x^2}{2EI_x} + \frac{\nu M_x}{2EI_x} c^2 \quad (\text{A.10})$$

Anexo B

Solución analítica: Problema flexión compuesta

Este problema presenta la misma geometría y condiciones de apoyo que en el caso del anexo A. La única diferencia es la carga a la que está sometida la viga. En los laterales, se ha añadido al momento del problema de flexión pura, un esfuerzo axil. En la figura B.1 se muestra la disposición de las cargas y las tensiones aplicadas en el contorno.

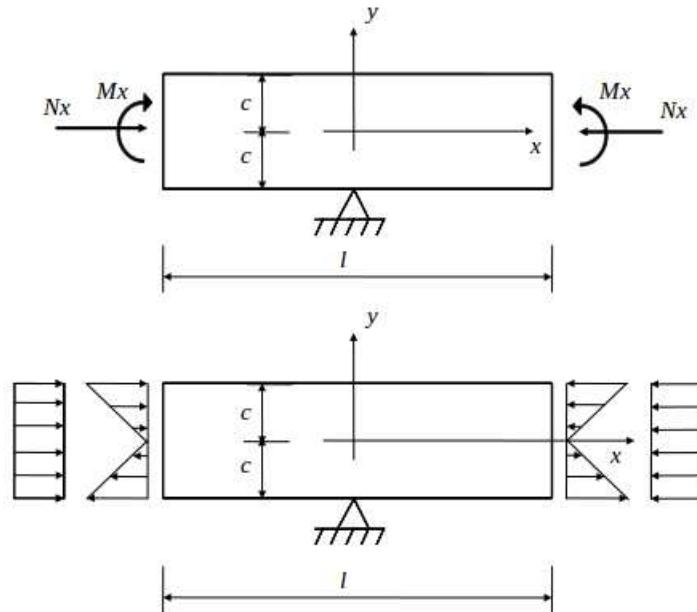


Figura B.1: Problema flexión compuesta. Dimensiones y ejes

Debido a la elasticidad lineal, se puede obtener la solución analítica mediante el principio de superposición, a partir de la solución del anexo A. De esta manera, la solución exacta es la suma de la solución del anexo A y la solución de la viga sometida a esfuerzo axil.

La viga sometida a una carga axil, N_x , el estado tensional y de deformación es

Tensiones:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{N_x}{2c} \\ \sigma_y &= \tau_{xy} = 0\end{aligned}$$

Deformaciones:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E}\end{aligned}$$

Los desplazamientos, u y v , se determinan integrando las expresiones de las deformaciones.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow u = \frac{N_x}{2cE}x + A \quad (B.1)$$

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow v = -\nu \frac{N_x}{2cE}y + B \quad (B.2)$$

Las constantes de integración se determinan imponiendo las condiciones de contorno. En este caso, la condición es que tanto el desplazamiento en x como en y es cero en el apoyo.

$$\begin{aligned}x = 0 \\ y = -c\end{aligned} \} \rightarrow \begin{cases} u = A = 0 \\ v = 0 = \nu \frac{N_x}{2cE}c + B \rightarrow B = -\nu \frac{N_x}{2cE}c \end{cases}$$

Por tanto, los desplazamientos generados por el esfuerzo axil son

$$u = \frac{N_x}{2cE}x \quad (B.3)$$

$$v = -\nu \frac{N_x}{2cE}(y + c) \quad (B.4)$$

Sumando esta solución a la solución del anexo A se obtiene la solución analítica de este problema

$$u = \frac{M_x}{EI_x}y \cdot x + \frac{N_x}{2cE}x \quad (B.5)$$

$$v = -\frac{\nu M_x}{2EI_x}y^2 - \frac{M_x x^2}{EI_x} + \frac{\nu M_x}{2EI_x}c^2 - \nu \frac{N_x}{2cE}(y + c) \quad (B.6)$$

Anexo C

Solución analítica: Problema de flexión en los dos ejes

Este problema tiene una geometría y unas condiciones de contorno iguales al anexo A. La carga a la que está sometido es también la misma que en el anexo A pero añadiendo un momento, M_y , en la cara superior de la viga, como se aprecia en la figura C.1. Por tanto, la solución analítica de desplazamientos se puede descomponer como suma de dos soluciones parciales. La primera de ellas será la solución debida al momento M_x aplicado en las caras laterales, obtenida en el anexo A. La otra solución, es la debida al momento M_y que solicita la cara superior e inferior, y que se expone a continuación.

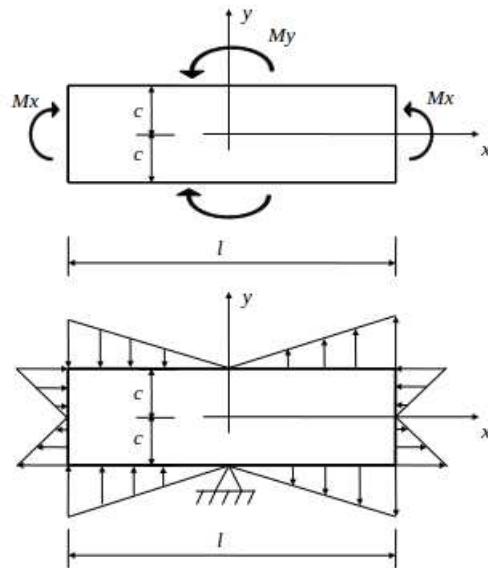


Figura C.1: Problema flexión en los dos ejes. Dimensiones y ejes

En primer lugar, para hallar los desplazamientos que produce el momento M_y , es necesario conocer las tensiones y deformaciones que produce este momento.

Tensiones:

$$\sigma_y = \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0$$

Deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{M_y}{EI_y} x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{M_y}{EI_y} x$$

Los desplazamientos u y v se obtienen integrando las ecuaciones de deformación.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow u = -\nu \frac{M_y}{2EI_y} x^2 + f_1(y) \quad (C.1)$$

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow v = \frac{M_y}{EI_y} xy + f_2(x) \quad (C.2)$$

Las ecuaciones $f_1(y)$ y $f_2(x)$ se pueden determinar a partir de la condición de que el cortante es nulo.

$$\tau_{xy} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (C.3)$$

Sustituyendo u y v en la ecuación (C.3),

$$\frac{M_y y}{EI_y} + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = 0 \quad (C.4)$$

por tanto $\frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = -\frac{M_y y}{EI_y}$ y $\frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = 0$ y las funciones $f_1(y)$ y $f_2(x)$ quedan

$$f_2(x) = A \quad f_1(y) = -\frac{M_y y^2}{2EI_y} + B \quad (C.5)$$

Los desplazamientos u y v se pueden expresar como

$$u = -\nu \frac{M_y}{2EI_y} x^2 - \frac{M_y y^2}{2EI_y} + B \quad (C.6)$$

$$v = \frac{M_y}{EI_y}xy + A \quad (C.7)$$

Las constantes A y B se obtienen al imponer las condiciones de contorno. En este caso, el desplazamiento en x e y es cero en el apoyo situado en la cara inferior.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -c \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = 0 = -\frac{M_y c^2}{2EI_y} + B \rightarrow B = \frac{M_y c^2}{2EI_y} \\ v = 0 = A \rightarrow A = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, los desplazamientos u y v producidos por M_y son

$$u = -\nu \frac{M_y}{2EI_y}x^2 - \frac{M_y y^2}{2EI_y} + \frac{M_y c^2}{2EI_y} \quad (C.8)$$

$$v = \frac{M_y}{EI_y}xy \quad (C.9)$$

A estos desplazamientos hay que sumar los obtenidos en el anexo A debido al momento M_x . Por tanto, los desplazamientos de la solución exacta del problema, contando con las contribuciones de M_x y M_y son

$$u = \frac{M_x}{EI_x}y \cdot x - \nu \frac{M_y}{2EI_y}x^2 - \frac{M_y y^2}{2EI_y} + \frac{M_y c^2}{2EI_y} \quad (C.10)$$

$$v = -\frac{\nu M_x}{2EI_x}y^2 - \frac{M_x x^2}{EI_x} + \frac{\nu M_x}{2EI_x}c^2 + \frac{M_y}{EI_y}xy \quad (C.11)$$

Anexo D

Solución analítica: Problema viga empotrada

En la figura D.1 se muestra el esquema que representa la viga empotrada con sus medidas. La viga es una viga rectangular de gran canto, empotrado en uno de sus lados y en su lado opuesto hay una fuerza de valor P . En la cara superior e inferior no hay ninguna carga.

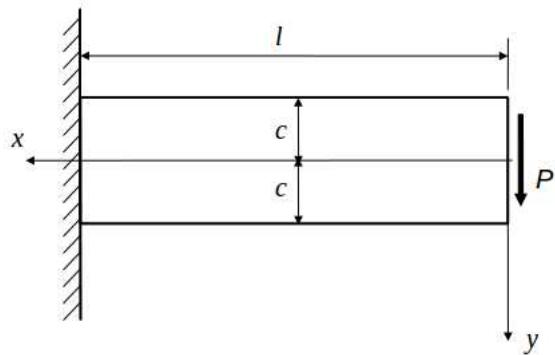


Figura D.1: Viga empotrada con carga P en su extremo. Dimensiones, carga y ejes.

La distribución de tensiones en la viga que resulta de la aplicación de estas cargas es la siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{3P \cdot x \cdot y}{2 \cdot c^3} \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{3P}{4 \cdot c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)\end{aligned}$$

Definiendo el momento de inercia, $I = \frac{2}{3}c^3$, las expresiones anteriores quedan:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{P \cdot x \cdot y}{I} \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{2 \cdot I} (c^2 - y^2)\end{aligned}$$

Para que realmente existan estas tensiones en el dominio, en virtud del principio de Saint-Venant, la carga aplicada en el borde del empotramiento tiene que tener una distribución parabólica, tal y como ocurre con τ_{xy} . De lo contrario, en el borde del voladizo la distribución de tensiones no será la indicada anteriormente.

Aplicando la ley de Hooke, se obtienen las deformaciones producidas por el estado tensional:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{P \cdot x \cdot y}{E \cdot I} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \nu \frac{P \cdot x \cdot y}{E \cdot I} \\ \sigma_x &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2)\end{aligned}$$

donde E y G son el modulo elástico de Young y el módulo elástico transversal respectivamente.

Para obtener los desplazamientos, hay que integrar las ecuaciones de las deformaciones anteriores.

$$u = -\frac{P \cdot x^2 \cdot y}{2EI} + f_1(y) \quad v = \frac{\nu \cdot P \cdot x \cdot y^2}{2EI} + f_2(x) \quad (\text{D.1})$$

Las funciones $f_1(y)$ y $f_2(x)$, han surgido de realizar la integral. Sustituyendo u y v en la ecuación de la deformación tangencial se obtiene una relación entre $f_1(y)$ y $f_2(x)$.

$$-\frac{P \cdot x^2}{2EI} + \frac{df_1(y)}{dy} + \frac{\nu \cdot P \cdot y^2}{2EI} + \frac{df_2(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2) \quad (\text{D.2})$$

Agrupando en la expresión anterior los términos constantes y los términos que dependen de x e y .

$$F(x) + G(y) = K \quad (\text{D.3})$$

$$\text{donde } F(x) = -\frac{P \cdot x^2}{2EI} + \frac{df_2(x)}{dx}, \quad G(y) = -\frac{P y^2}{2IG} + \frac{\nu P y^2}{2EI} + \frac{df_1(y)}{dy}.$$

Como puede comprobarse, $F(x)$ y $G(y)$ deben de ser constantes, ya que de lo contrario, si $F(x)$ variara con x , y $G(y)$ variara con y , la ecuación (D.3) no se cumpliría. Llamando $F(x) = d$ y $G(y) = e$ la ecuación (D.3) queda:

$$d + e = -\frac{P \cdot c^2}{2IG} \quad (\text{D.4})$$

Por tanto, podemos obtener una expresión para las funciones $f_1(y)$ y $f_2(x)$.

$$\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{P \cdot x^2}{2EI} + d \rightarrow f_2(x) = \frac{P \cdot x^3}{6EI} + d \cdot x + h \quad (D.5)$$

$$\frac{f_1(y)}{dy} = -\frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{P \cdot y^2}{2IG} + e \rightarrow f_1(y) = -\frac{\nu Py^3}{6IE} + \frac{Py^3}{6IG} + e \cdot y + g \quad (D.6)$$

Introduciendo $f_1(y)$ y $f_2(x)$ en las expresiones de u y v .

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + e \cdot y + g \quad (D.7)$$

$$v = \frac{\nu Px \cdot y^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + d \cdot x + h \quad (D.8)$$

Las constantes d , e , g , h se pueden determinar a partir de tres condiciones de contorno y de las ecuaciones (D.7) y (D.8). En primer lugar, impondremos las condiciones de que el desplazamiento horizontal y vertical es nulo en el centro de la sección del empotramiento.

En $x = l$ e $y = 0 \rightarrow u = 0$ y $v = 0$, sustituyendo en las ecuaciones anteriores.

$$u(x = l, y = 0) = 0 \rightarrow g = 0$$

$$v(x = l, y = 0) = 0 \rightarrow h = -\frac{P \cdot l^3}{6EI} - d \cdot l$$

Las ecuaciones para los desplazamientos (D.7) y (D.8), al introducir el valor de estas constantes, resultan como se expresan en (D.9) y (D.10). Por tanto, únicamente queda por determinar las constantes d y e .

$$u = -\frac{P \cdot x^2 \cdot y}{2EI} - \frac{\nu \cdot P \cdot y^3}{6IG} + e \cdot y \quad (D.9)$$

$$v = -\frac{\nu \cdot P \cdot x \cdot y^2}{2EI} - \frac{P \cdot x^3}{6IG} + d \cdot x - \frac{P \cdot l^3}{6EI} - d \cdot l \quad (D.10)$$

Para determinar la constante d , impondremos la restricción que anula la rotación sobre el centro de la sección de empotramiento.

En $x = l$ e $y = 0 \rightarrow (\frac{dv}{dx})_{x=l, y=0} = 0$. Por tanto, derivando la ecuación de (D.10).

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{P \cdot l^2}{2EI} + d = 0 \rightarrow d = -\frac{P \cdot l^2}{2EI}$$

La constante e , se puede hallar directamente aplicando la ecuación (D.4).

$$d + e = -\frac{Pc^2}{2IG} \rightarrow e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}$$

De este modo, sustituyendo en las ecuaciones (D.9) y (D.10) las constantes d y e por su valor, los desplazamientos quedan de la siguiente manera.

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}\right)y \quad (\text{D.11})$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \quad (\text{D.12})$$

Anexo E

Solución analítica: Problema viga apoyada

En este problema, se considera una viga de sección rectangular estrecha, apoyada en sus extremos.

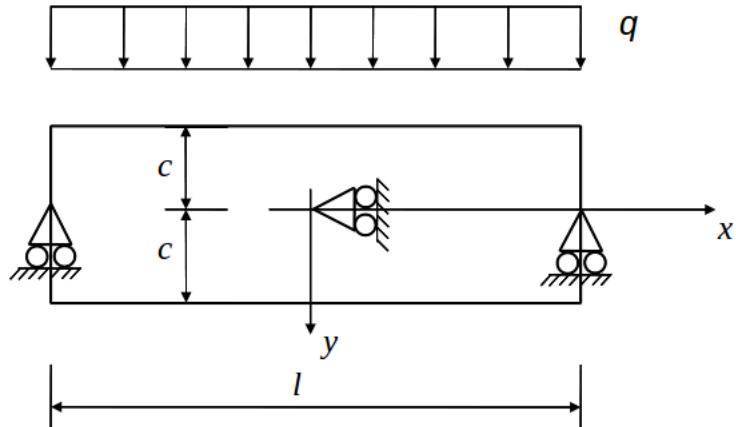


Figura E.1: Problema de viga apoyada. Dimensiones y ejes

En la figura E.1 se ilustra la disposición del problema. La solicitación de la viga es una carga distribuida en la cara superior de valor q .

Las condiciones de las tensiones en los contornos del dominio son:

- Cara superior e inferior:

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = 0, \quad (\sigma_y)_{y=+c} = 0, \quad (\sigma_y)_{y=-c} = -q \quad (\text{E.1})$$

- Cara laterales:

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \pm ql, \quad \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0 \quad (E.2)$$

Las dos últimas ecuaciones de (E.2) establecen, que sobre los extremos no hay esfuerzo longitudinal ni ningún momento flector. Las condiciones (E.1) y (E.2) se cumplen al combinar varias de las funciones de Airy.

$$\phi_1 = \frac{a}{6}x^2y^3 \quad \phi_2 = \frac{b}{2}x^2 \quad \phi_3 = \frac{c}{2}x^2y \quad (E.3)$$

A partir de estas funciones de Airy se generan las siguientes tensiones

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a(x^2y - \frac{2}{3}y^3) \\ \sigma_y &= \frac{1}{3}ay^3 + cy + b \\ \tau_{xy} &= -axy^2 - cx \end{aligned}$$

Reemplazando estas componentes de tensión en las condiciones (E.1) se determinan las constantes a, b y c.

$$a = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3} \quad b = -\frac{q}{2} \quad c = \frac{3}{4}\frac{q}{c} \quad (E.4)$$

Teniendo en cuenta que $2c^3/3$ es el momento de inercia I de la sección transversal.

$$\sigma_x = -\frac{3q}{4c^3}(x^2y - \frac{2}{2}y^3) = -\frac{q}{2I}(x^2y - \frac{2}{2}y^3) \quad (E.5)$$

$$\sigma_y = -\frac{3q}{4c^3}(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3) = -\frac{q}{2I}(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3) \quad (E.6)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3q}{4c^3}(c^2 - y^2)x = -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x \quad (E.7)$$

Como se puede ver, esta solución de tensiones cumplen con las condiciones de tensiones (E.1) y las dos primeras condiciones de (E.2). La última condición no es satisfecha. Ésta condición expresa que en las caras laterales, no existe un par aplicado. Por tanto, impondremos una flexión simple $\sigma_x = d \cdot y$, que proviene de la función de Airy $\phi_4 = \frac{d}{6}y^3$. El coeficiente d se obtiene al imponer precisamente la condición comentada en los extremos $x = \pm l$.

$$\int_{-c}^c \sigma_x y dy = \int_{-c}^c [-\frac{3q}{4c^3}(l^2y - \frac{2}{2}y^3) + dy]y dy = 0 \quad (E.8)$$

por tanto

$$d = \frac{3q}{4c} \left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right) \quad (\text{E.9})$$

De manera que la tensión σ_x queda

$$\sigma_x = -\frac{q}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{2} y^3 \right) + \frac{3q}{4c} \left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right) y = -\frac{q}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{2} y^3 \right) + \frac{q}{2I} \left(l^2 - \frac{2c^2}{5} \right) y \quad (\text{E.10})$$

Una vez obtenido el estado tensional, se puede hallar fácilmente las deformaciones aplicando la ley de Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{q}{2EI} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + \frac{q}{2EI} \left(l^2 - \frac{2c^2}{5} \right) y \quad (\text{E.11})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma_y}{E} = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \quad (\text{E.12})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{q}{2GI} (c^2 - y^2) x \quad (\text{E.13})$$

Por tanto los desplazamientos se pueden expresar como

$$u = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{x^3 y}{3} - \frac{2}{3} y^3 x \right) + \frac{q}{2EI} \left(l^2 - \frac{2c^2}{5} \right) y x + f_1(y) \quad (\text{E.14})$$

$$v = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{1}{12} y^4 - \frac{1}{2} c^2 y^2 + \frac{2}{3} c^3 y \right) + f_2(x) \quad (\text{E.15})$$

Las funciones $f_1(y)$ y $f_2(x)$ se determinan sustituyendo las funciones (E.14) y (E.15) en la ecuación (E.13). De esta manera las funciones $f_1(y)$ y $f_2(x)$ que resultan

$$f_1(y) = A \quad (\text{E.16})$$

$$f_2(x) = -\frac{2}{5} \frac{q}{EI} c^2 x^2 + \frac{q}{EI} \frac{x^4}{24} - \frac{\nu q c^2 x^2}{4EI} + B \quad (\text{E.17})$$

donde A y B son constantes de integración. Éstas se determinan mediante las condiciones de apoyo. Sustituyendo en (E.14) y (E.15) las funciones $f_1(y)$ y $f_2(x)$ y reordenando términos las funciones u y v quedan:

$$u = \frac{q}{2EI} \left[(l^2x - \frac{x^3}{3})y + x(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y) + \nu x(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3) \right] + A \quad (\text{E.18})$$

$$v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2y^2}{2} + \frac{2}{3}c^3y + \nu[(l^2 - x^2)\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5}c^2y^2] \right\} - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5}c^2x^2 + (1 + \frac{1}{2}\nu)c^2x^2 \right] + B \quad (\text{E.19})$$

La constante A de (E.21) se observa que es cero ($A = 0$), ya que el desplazamiento horizontal en la sección central es nulo. Por otro lado, la constante B se puede hallar con la condición de apoyo en los extremos, en la que el desplazamiento v es nulo.

$$B = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad (\text{E.20})$$

Por tanto, los desplazamientos u y v de la solución analítica son:

$$u = \frac{q}{2EI} \left[(l^2x - \frac{x^3}{3})y + x(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y) + \nu x(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3) \right] \quad (\text{E.21})$$

$$v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2y^2}{2} + \frac{2}{3}c^3y + \nu[(l^2 - x^2)\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5}c^2y^2] \right\} - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5}c^2x^2 + (1 + \frac{1}{2}\nu)c^2x^2 \right] + \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad (\text{E.22})$$