

**TÍTULO:** FABRICACIÓN PARAMÉTRICA DE ENGRANAJES NO CIRCULARES

**AUTOR:** ALFREDO RAMÓN RAMÓN

**DIRECTOR:** JOSE LUIS HUERTAS TALÓN

**MÁSTER:** SISTEMAS MECÁNICOS

**PROGRAMA DE POSGRADO:** INGENIERÍA TÉCNICA MECÁNICA

**CURSO ACADÉMICO:** 2010 / 11

**FECHA:** 21 / 11 / 11



# **FABRICACIÓN PARAMÉTRICA DE ENGRANAJES NO CIRCULARES**

## **RESUMEN**

El presente trabajo se centra en el diseño, en los posibles nuevos modos de fabricación y en las aplicaciones para las que son viables el uso de los engranajes no circulares.

De la revisión del estado del arte se concluye que existen nuevas aplicaciones para las ruedas no circulares que surgen tanto del desarrollo de la teoría del diseño del perfil del diente como de la aplicación de nuevos procesos de manufactura y adaptación de antiguos procesos que permiten obtener el perfil deseado con precisión. El desarrollo de herramientas de cómputo más potentes permite superar la gran cantidad de cálculos necesarios para su diseño, mientras que el desarrollo del CNC permite su fabricación, pudiendo aplicarse a mecanismos en los que hasta de ahora no se usaban y en los que serían y serán de gran utilidad.

# Índice

<b>1.INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>4</b>
<b>2.APLICACIONES ENGRANAJES NO CIRCULARES.....</b>	<b>4</b>
<b>3.MÉTODOS DE FABRICACIÓN.....</b>	<b>10</b>
<b>4.DISEÑO PARAMÉTRICO DEL ENGRANAJE.....</b>	<b>16</b>
4.1.RADIO DE CURVATURA EN UN PUNTO DE LA ELIPSE.....	16
4.2.DISTRIBUCIÓN DE LOS DIENTES DE LA ELIPSE.....	18
4.3.LONGITUD DE LA ELIPSE BASE Y LONGITUD DE ARCO.....	18
4.4.FUNDAMENTOS PARA EL CÁLCULO DE LA TRAYECTORIA DE LA FRESA.....	21
4.5.REALIZACIÓN DE LOS CÁLCULOS MATEMÁTICOS.....	23
4.6.DISEÑO DEL PERFIL DE EVOLVENTE PARA CADA DIENTE.....	23
<b>5.FABRICACIÓN.....</b>	<b>25</b>
<b>6.CONCLUSIONES.....</b>	<b>26</b>
<b>7.BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>27</b>

# 1.INTRODUCCIÓN

[1] De sobras es conocido que en multitud de aplicaciones es de interés obtener relaciones de transmisión variables, como por ejemplo en mecanismos de retorno rápido, en aplicaciones en las que se desea una reducción de las fluctuaciones del par motor, en el equilibrado de mecanismos de diversos eslabones... Estas relaciones pueden obtenerse mediante distintos mecanismos, entre los que destacan los engranajes no circulares. Éstos permiten la obtención de cualquier ley de desplazamiento o velocidad angular entre el eje conducido y el eje conductor siempre que se cumplan las condiciones adecuadas de continuidad, de periodicidad y de curvatura exigida a las curvas primitivas de las ruedas.

La posibilidad de elegir libremente las dos curvas primitivas, como ocurre en los sistemas leva-palpador, permite la definición continua de la ley de transmisión, sin que ésta esté restringida al paso por unos pocos puntos de precisión, como sucede con los mecanismos de barras.

## 2.APLICACIONES ENGRANAJES NO CIRCULARES

[2] Existe una gran variedad de formas y tamaños de engranajes, desde los más pequeños usados en relojería e instrumentos científicos (se alcanza el módulo 0,05) a los de grandes dimensiones, empleados, por ejemplo, en las reducciones de velocidad de las turbinas de vapor de los buques, en el accionamiento de los hornos y molinos de las fábricas de cemento, etc.

El campo de aplicación de los engranajes es prácticamente ilimitado. Los encontramos en las centrales de producción de energía eléctrica, hidroeléctrica y en los elementos de transporte terrestre: locomotoras, automotores, camiones, automóviles, transporte marítimo, en buques de todas clases, aviones, en la industria siderúrgica: laminadores, transportadores, minas y astilleros, fábricas de cemento, grúas, montacargas, máquinas-herramientas, maquinaria textil, de alimentación, de vestir y calzar, industria química y farmacéutica, hasta en los más simples movimientos de accionamiento manual.

Toda esta gran variedad de aplicaciones del engranaje puede decirse que tiene por única finalidad la transmisión de la rotación o giro de un eje a otro distinto, reduciendo o aumentando la velocidad del primero.

[3] La escasa aplicación hasta hace pocos años de los engranajes no circulares se debe tanto a que los diseñadores no habían reconocido su potencial de utilización como elementos en un mecanismo, como a la escasez de fabricantes con capacidad de cortar los dientes dentro

del proceso de manufactura de los engranajes. El poco éxito en su utilización puede atribuirse a la gran cantidad de cálculos para un diseño exacto y una manufactura apropiada.

Los ejemplos típicos de aplicaciones de engranajes no circulares son: 1) como mecanismo para la generación de una función y 2) como etapa de entrada de un mecanismo más complejo.

En el presente trabajo se resaltan algunos de los muchos ejemplos de utilización de este tipo de engranajes como elementos indispensables dentro de mecanismos comunes y no tan comunes:

-Como sustitutos de levas:

[1] Los engranajes no circulares presentan la ventaja frente a las levas, de ser directamente mecanismos desmodrómicos (siempre en contacto a lo largo de todo su movimiento) y presentar velocidades de deslizamiento limitadas por el tamaño de los dientes. [4] Además en los engranajes no circulares, el eslabón conducido puede girar continuamente sin cambios de sentido cuando la rueda conductora gira en un mismo sentido, lo que es otro punto a favor en comparación con los mecanismos de levas.

-Integrados en mecanismos articulados:

[3] [5] Aunque se utilizan mecanismos de eslabonamientos para las aplicaciones que requieran movimiento irregular, los engranajes no circulares presentan la ventaja de tener una transmisión precisa, definida de manera continua, ser de tamaño compacto y pueden ser balanceados fácilmente.

Ejemplos:

Optimización de cinco eslabones de barras con engranajes no circulares para describir una trayectoria exacta de movimiento [6] *D. Mundo, G. Gatti, D.B. Dooner* :

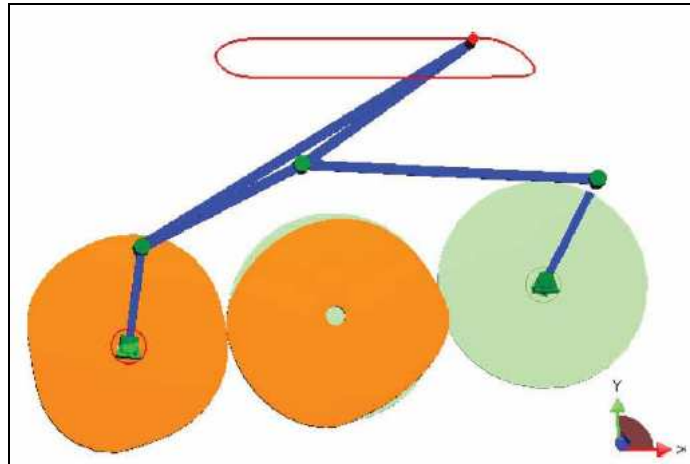


Fig.2.1. CAD assembly model of the optimal GFBM with non-circular gears [6].

Utilización de engranajes no circulares para balancear mecanismos de cinco eslabones fig.2.2 en los que reemplazan los engranajes circulares por engranajes no circulares [7] Y.A. Yao, H. S. Yan:

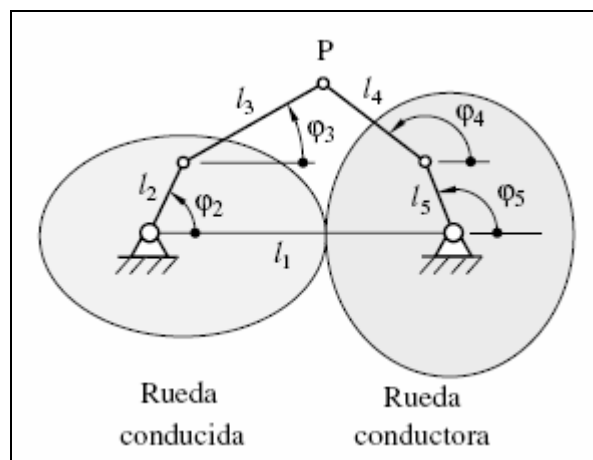


Fig.2.2. Mecanismo de 5 barras [7].

-Para caudalímetros:

También son utilizados para medir el caudal de descarga de un fluido en proceso:



Fig.2.3. Caudalímetro [8].

-Para equipamiento médico:

A día de hoy ya se ha experimentado con un par de engranajes no circulares, los cuales impulsan un mecanismo de corredera-manivela diseñado para obtener una ley de movimiento específico. La aplicación propuesta es generar un flujo sanguíneo pulsátil durante el by-pass cardio-pulmonar para la cirugía cardíaca [9] *Erika Ottaviano, Domenico Mundo, Guido A. Danieli, Marco Ceccarelli*. La ley del movimiento prescrito se puede obtener mediante una bomba volumétrica y puede ser utilizada para modular el flujo de sangre en las máquinas de circulación externa, evitando de este modo la utilización de complejos sistemas de control.

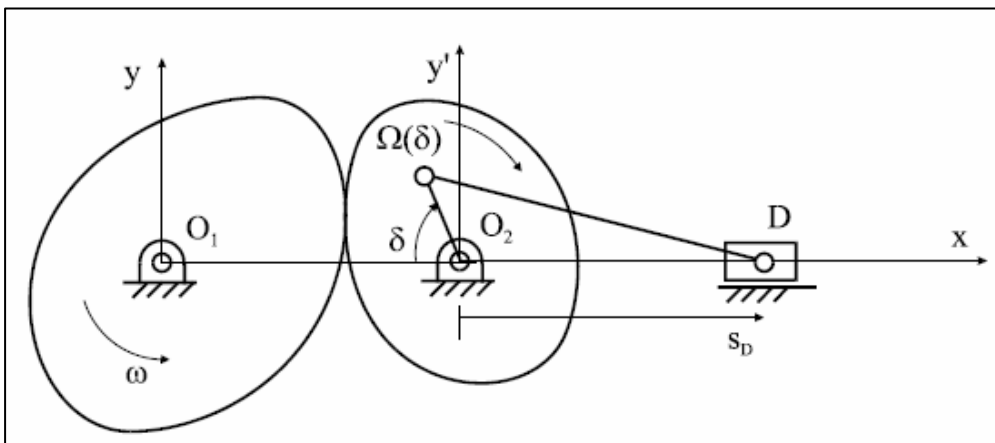


Fig.2.4. Esquema representativo del mecanismo [9].

-Para la dirección de automóviles:

Existen trabajos donde se propone la utilización de engranajes no circulares en el mecanismo de la dirección de los automóviles. *Emura y Arakawa* [10] analizan un mecanismo que incluye unos engranajes elípticos que controlan cada una de las llantas; *Dooner* [11] propone un mecanismo de ocho eslabones como alternativa. Los engranajes no circulares se utilizan para regular los desplazamientos relativos de dos eslabones extremos del mecanismo que soportan las llantas. En la figura 2.5 se presenta el mecanismo propuesto por *Dooner*.

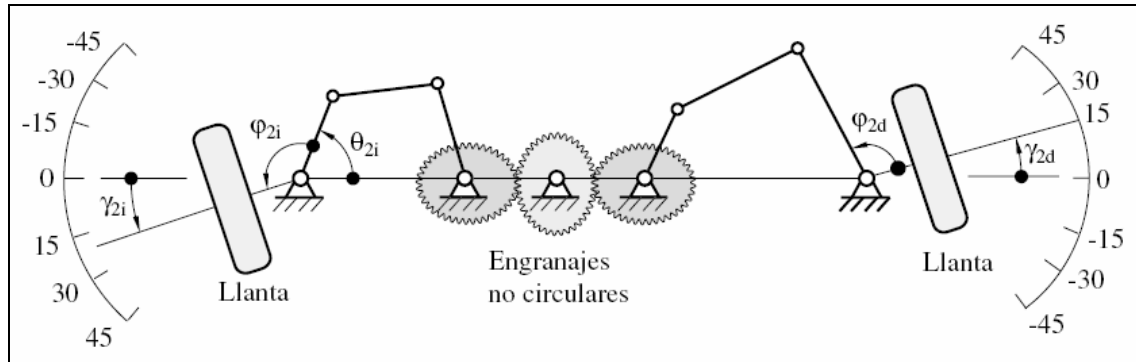


Fig.2.5. Aplicación en la dirección de un automóvil [11].

Actualmente, varias empresas automovilísticas ya incluyen en los mecanismos de dirección de sus vehículos (cremallera y piñón), engranajes no circulares, con el objetivo de diferenciarse tanto en la maniobrabilidad del volante como en ergonomía de conducción.

La diferencia con las direcciones tradicionales, radica en que esta relación variable de la geometría de la cremallera, permite optimizar el sistema de dirección haciéndolo más suave y confortable durante la conducción en línea recta y más sensitivo en los giros.



Fig.2.6. Cremallera y piñón con relación variable.

Las distintas configuraciones de relación variable entre piñón y cremallera, hacen también este mecanismo interesante para aplicaciones aeroespaciales y aeronáuticas, tales como el desplazamiento de embarcaciones dentro de los astilleros o plantas de producción, el control sobre los grandes elevadores de despegue de las naves espaciales y/o su sistema de engranajes para el aterrizaje...

-Como elementos para reducir las fluctuaciones de velocidad y de par motor:

*Dooner* [12] realiza el estudio de los engranajes no circulares como elementos que permiten reducir las fluctuaciones de velocidad angular debido a las fluctuaciones del par resistente. Las fluctuaciones del par resistente y las fluctuaciones de par debido a los engranajes no circulares se suman para reducir la fluctuación total resultante. En la figura 2.6 se presenta el montaje para un mecanismo que requiere ser balanceado:

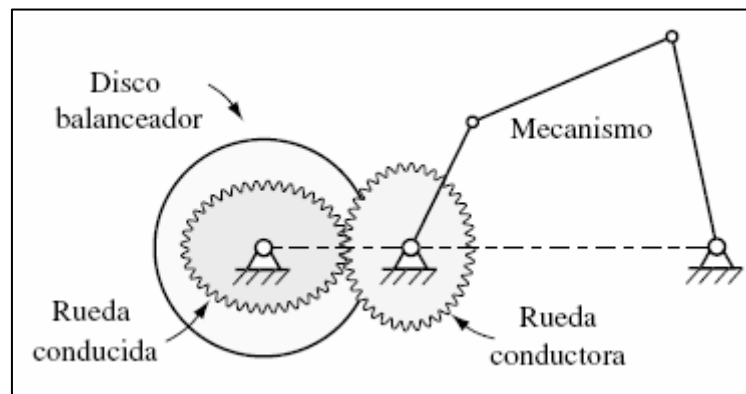


Fig.2.7. Mecanismo balanceador con engranajes no circulares [12].

*H. F. Quintero, C. A. Romero, L. V. Vanegas Useche* [13] y *M. Ogura* [14] estudian el balanceo de un motor de combustión interna mediante engranajes excéntricos.

También podría ser interesante instalar algún engranaje no circular compensado con algún disco balanceador que transmitiera el giro al cigüeñal de los automóviles.

-Para maquinaria agrícola:

*L. S Guo, W. J. Zhang* [15].

-Para bombas de caudal variable:

Los engranajes de relación variable harían que en cada una de sus posiciones de giro los engranajes expulsaran una determinada cantidad de volumen de fluido al exterior de la bomba.

-Platos de bicicletas:

Los platos ovalados mejoran el “punto muerto” en el pedaleo.

-Mecanismos de retorno rápido

-Planetarios o trenes de engranajes

-Maquinaria industrial:

Un número creciente de aplicaciones en procesos de forja, maquinaria textil, máquinas embaladoras, maquinaria para minería, maquinaria con autoabastecimiento etc., demandan cada vez más sistemas que les permitan mejorar y abaratar el control de los ciclos y mejorar los tiempos de proceso. Hoy en día se está trabajando activamente en la implementación de sistemas mecánicos basados en engranajes no circulares, que permitan mejorar las características y el rendimiento de trabajo en este tipo de máquinas [16], [17].

### **3.MÉTODOS DE FABRICACIÓN**

El tallado de engranajes no circulares comienza básicamente a mediados de los años cuarenta del siglo pasado, como consecuencia de una primera toma de conciencia en cuanto a su potencial de utilización.

Los principales problemas de mecanizado de estos engranajes en esos años e incluso en la actualidad, eran el impedimento por el cual no han tenido un uso más extendido para aplicaciones en los que serían de gran utilidad. Entre esos problemas cabe destacar la necesidad de diseñar nuevas máquinas-herramienta o adaptar las ya existentes para el conformado de los nuevos perfiles de las ruedas dentadas no circulares; esto hace que se tengan que cambiar lotes enteros de herramientas e incluso reformar la maquinaria de arriba abajo, con los consecuentes problemas de costes y amortización que tanto asustan al empresario.

Procedimientos de talla por reproducción o copia:

En los procedimientos de mecanizado o tallado de ruedas dentadas por reproducción, el borde cortante de la herramienta es una copia exacta de la rueda a tallar o de cierta parte de ella (por ejemplo, del hueco entre dientes contiguos). Estos métodos exigen de un número elevado de herramientas, ya que incluso para fabricar ruedas dentadas con el mismo módulo es necesario contar con una herramienta para cada número de dientes puesto que el hueco interdental varía.

A estas herramientas de corte se les denomina “cortadores conformadores” y, generalmente, el cortador tiene la forma exacta del hueco interdental. Cabe distinguir dos procedimientos, según la máquina herramienta utilizada:

### Cepillado

La herramienta, en la sección perpendicular a la dirección de su movimiento tiene perfiles cortantes, que se corresponden perfectamente con el contorno del hueco interdental del engranaje a tallar. Actualmente se suele emplear para dientes no normalizados encontrándose cada vez más en desuso.

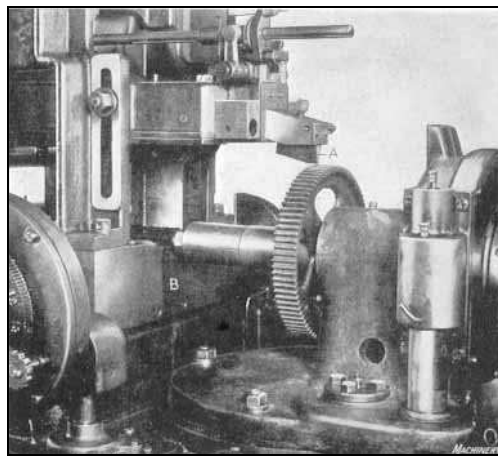


Fig.3.1. Tallado de un engranaje por cepillado [18].

### Fresado

Es un método muy difundido, similar a la talla por cepillado, pero en lugar de una cuchilla con una forma determinada se utiliza como herramienta una fresa especial estandarizada, la "fresa de módulo", cuyos dientes tienen perfiles idénticos a la forma del hueco interdental que se persigue.



Fig.3.2. Tallado de un engranaje con fresa de módulo [19].

Los problemas inevitables que pueden encontrarse con este tipo de mecanizado en ruedas elípticas, son entre otros, el dañado de la superficie en el “*addendum*” del diente ya que puede dejarlo en mal estado y la dificultad de obtener un mecanizado completo del perfil según las características del engranaje en cuestión.

#### Procedimientos de talla por generación:

El procedimiento de talla de ruedas dentadas por generación o rodamiento permite, aprovechando las propiedades de la evolvente, la "generación del perfil del diente" de un engranaje. Los dientes de perfil de evolvente se pueden tallar de forma sencilla y muy exacta empleando herramientas de perfil rectilíneo. La herramienta de corte va avanzando a medida que la rueda gira sobre su centro. Esta es la principal ventaja de este tipo de perfiles, cuya talla puede realizarse con una precisión elevadísima, cualquiera que sea el número de dientes, asegurando así un funcionamiento perfecto y silencioso, aun a grandes velocidades.

Existen diversas formas de lograr el perfil del diente: con un piñón generador, por tallado con fresa madre, por tallado con cremallera etc.

#### Generación con piñón generador

Como los perfiles de evolvente son conjugados entre sí, se pueden generar ruedas dentadas haciéndolas engranar con un piñón generador, es decir, se emplea como herramienta de corte una rueda dentada con bordes cortantes a la que se hace rodar sobre la rueda base que se pretende tallar.

#### Generación con cremallera

En este método de talla se utiliza un cortador en forma de cremallera, de módulo igual al de la rueda a tallar. En todo momento el corte se produce debido a un movimiento de vaivén de la herramienta en la dirección del eje de la rueda. Con la cremallera se generan simultáneamente las dos caras del diente.

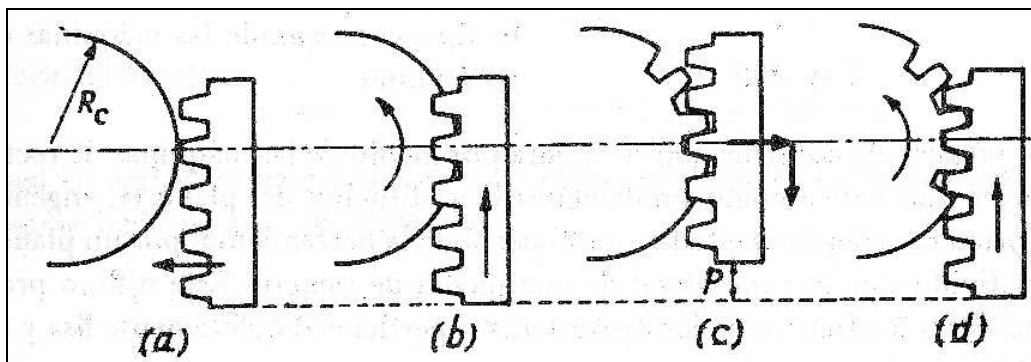


Fig.3.3. Generación de ruedas dentadas de perfil de evolvente mediante cremallera de talla [18].

#### Generación con fresa madre

En este método de talla por generación (el más extendido), el cortador utilizado es una herramienta con una forma semejante a la de un tornillo sinfín, denominado “fresa madre” o fresa para engranajes. Los dientes son de lados rectos, como los de una cremallera, pero el eje del cortador debe desalinearse un valor igual al ángulo de avance de la hélice del tornillo, para cortar dientes rectos (no helicoidales).



Fig.3.4. Generación con fresa madre (Gleason Cutting Tools) [20].

#### Generación de engranajes mediante rodillos

Este método de fabricación, al igual que los tres anteriores, también pertenece a la fabricación de engranajes por generación, siendo las herramientas de corte en este caso rodillos.

#### Fabricación de engranajes en maquinaria CNC

Otra forma de fabricación, consiste en trabajar con terminaciones de fresa colocadas de forma que su movimiento sea el de una trayectoria determinada de una curva equidistante al perfil del engranaje. El problema tecnológico de este método, es la necesidad de tener siempre un radio adecuado entre la fresa y la superficie del diente a mecanizar.

#### Mecanizado por electroerosión

[21] Este método permite el corte de formas complicadas gracias a la posibilidad de controlar la herramienta traslacionalmente y en direcciones angulares. La tecnología de corte por electroerosión en máquinas CNC con mecanizado por cable de descarga eléctrica

(WEDM), está caracterizada por la necesidad de usar pequeñas descargas de energía, condicionadas por el pequeño diámetro del cable eléctrico, lo que hace que se obtengan superficies de gran calidad ( $R_a = 2,5 - 0,5 \text{ mm}$ ).

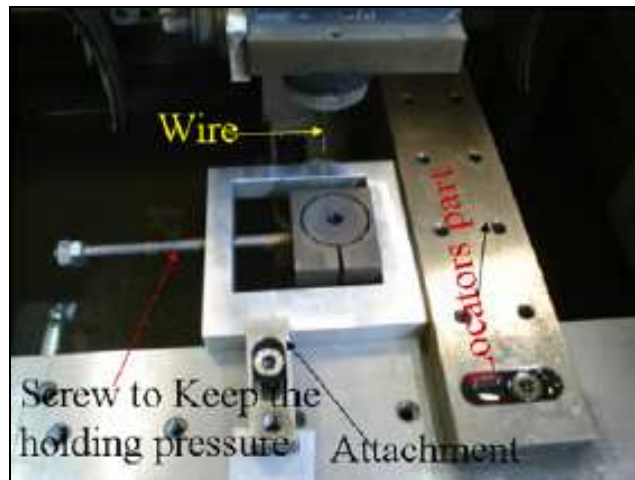


Fig.3.5. Herramientas de trabajo por cable de electroerosión [21].

#### Mecanizado por oxicorte

El oxicorte se puede utilizar implementado en máquinas CNC. El gas empleado es  $\text{CO}_2$ , siendo necesario tener un gran control sobre el mismo para que las condiciones de corte sean similares en todo momento y poder conseguir una adecuada repetibilidad.

Es útil en engranajes de escasa precisión y de formas sencillas ya que el calor generado en este tipo de proceso hace que los engranajes se deformen un poco durante su conformado.

#### Mecanizado por chorro de agua a presión

Éste método, cada vez mas implantado en los procesos industriales, es muy similar al de corte con gas, con la diferencia de que al cortar con agua se evita el “choque térmico” y los posibles cambios físico-químicos en la pieza, además de conseguir unas calidades en la superficie extraordinarias.

El inconveniente de éste método es el reciclaje del agua empleada, ya que contiene restos de partículas de material y/o arenilla de corte.

#### Conformado por troquelado

Este tipo de procedimiento para obtención de ruedas dentadas tiene aplicación bastante limitada en el entorno industrial. Normalmente se fabrican así, grandes series de ruedas

dentadas de características mecánicas bajas y de limitada precisión; especialmente demandadas por los sectores jugueteros, fotográficos, artículos para oficina...

#### Conformado por fundición

La fabricación de los dientes del engranaje por fundición se realiza por varios procedimientos, entre los cuales se encuentran: colado en arena, moldeo en cáscara, fundición por revestimiento, colada en molde permanente, colada en matriz.

El problema principal es que se suele emplear para grandes series de producción debido al coste de los moldes. Otro problema es que posteriormente los engranajes se tienen que rectificar o pulir, ya que las superficies obtenidas de la fundición dejan mucho que desear para aplicaciones en las que se requiera cierta precisión.

#### Conformado por pulvimetalurgia-extrusión

El atractivo mayor de la pulvimetalurgia es la habilidad de fabricar piezas de formas complejas con excelentes tolerancias y de alta calidad de forma relativamente barata. En resumen, la pulvimetalurgia toma polvos metálicos con ciertas características como tamaño, forma y empaquetamiento para luego crear una figura de alta dureza y precisión. Los pasos claves que incluye son: la compactación del material polvo y la subsiguiente unión termal de las partículas por medio de la sinterización.

#### Prototipado rápido

El prototipado rápido cada vez más empleado en la producción de objetos en plástico, cerámica y metal, parte de principios básicos de tecnología aditiva que consisten en la impresión o adición del material capa por capa de abajo hacia arriba sin moldes o matrices en base a un prototipo modelado digitalmente con anterioridad mediante software.

El método consiste básicamente en el sinterizado por capas del material en polvo o desmenuzado, mediante un rayo láser de infrarrojos, con el cual se pueden crear diferentes estructuras o configuraciones en zonas determinadas de la pieza [18].

“Antes de proceder al mecanizado de los dientes en los engranajes, la pieza en bruto debe pasar por otras máquinas-herramientas como tornos o fresadoras, donde se mecanizan sus dimensiones exteriores y agujeros si los tuviera, dejando eso si, los excedentes necesarios en caso de que el engranaje necesitara recibir tratamiento térmico y posterior mecanizado”.

## 4.DISEÑO PARAMÉTRICO DEL ENGRANAJE

A continuación se expone el desarrollo matemático empleado en el diseño paramétrico de **engranajes elípticos de dentado recto**, con el que se fabricará una pareja de engranajes de este tipo idénticos uno del otro, con las posibilidades de hacer esto mediante técnicas de electroerosión o bien por mecanizado con “bailarina” en máquinas de control numérico que es como en realidad se va a realizar.

### 4.1.RADIO DE CURVATURA EN UN PUNTO DE LA ELIPSE

La ecuación de la elipse, con centro en el origen y conocidos sus dos semiejes es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.1.1)$$

El radio de curvatura de una curva plana es:

$$\rho = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \quad (4.1.2)$$

Derivando respecto de x la expresión de la ecuación de la elipse:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{a^2} + \frac{y \cdot y'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} \quad (4.1.3)$$

Derivando nuevamente

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \left( \frac{y - xy'}{y^2} \right) = -\frac{b^2}{a^2} \left( \frac{y - x \left( -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} \right)}{y^2} \right) = -\frac{b^2}{a^2} \left( \frac{1}{y} + \frac{b^2 x^2}{a^2 y^3} \right)$$
$$\rho = \frac{\left[ 1 + \left( -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{b^2}{a^2} \left( \frac{1}{y} + \frac{b^2 x^2}{a^2 y^3} \right)} = \frac{\left[ 1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^2}{a^2} \left( \frac{1}{y} + \frac{b^2 x^2}{a^2 y^3} \right)} = \frac{\left[ \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^2}{a^2} \left( \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{a^2 y^3} \right)} = \frac{\frac{-1}{a^6 y^3} \left[ a^4 y^2 + b^4 x^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^2}{a^4 y^3} (a^2 y^2 + b^2 x^2)} = -\frac{\left[ a^4 y^2 + b^4 x^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)}$$

$$\text{Como } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad \rho = - \frac{\left[ a^4 y^2 + b^4 x^2 \right]^{3/2}}{a^4 b^4} \quad (4.1.4)$$

#### Ejemplo 1

Elipse  $a=120$ ,  $b=50$ , en el punto  $\tilde{x}=96$ ,  $y=30$ , sustituyendo en la ecuación del radio de curvatura de la elipse (4.1.4):

$$\rho = \frac{\left[ 120^4 \cdot 30^2 + 50^4 \cdot (-96)^2 \right]^{3/2}}{120^4 \cdot 50^4} = 93.1274065$$

Los radios de curvatura máximo y mínimo se obtienen en el extremo del semieje  $b$  y del  $a$  de la figura, respectivamente.

$$\rho = \frac{\left[ 120^4 0^2 + 50^4 - 96^2 \right]^{3/2}}{120^4 50^4} = 20.8333333 \quad \rho = \frac{\left[ 120^4 50^2 + 50^4 0^2 \right]^{3/2}}{120^4 50^4} = 288$$

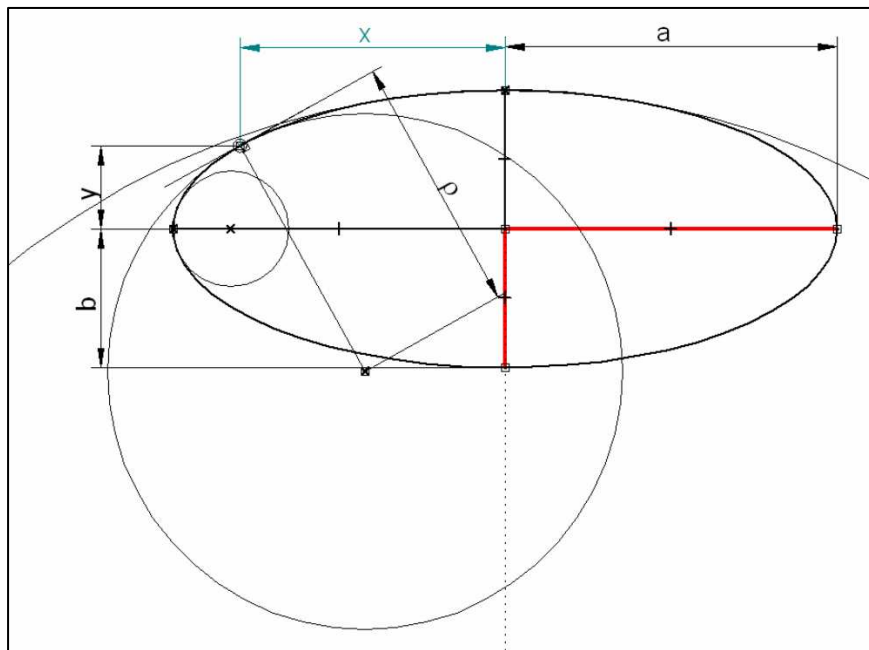


Fig.4.1.1. Radios de curvatura en un punto cualquiera y en el semieje mayor de la elipse.

## 4.2.DISTRIBUCIÓN DE LOS DIENTES DE LA ELIPSE

Se considera que en el punto de la intersección del eje de simetría del diente con la elipse, el radio constructivo del diente es el radio de curvatura de la elipse correspondiente (para generar el diente, es la base). Es decir, la circunferencia base del diente concreto en esa posición tiene un radio igual al de curvatura de la elipse en el punto de intersección de la elipse que consideraremos base con el eje de simetría del diente.

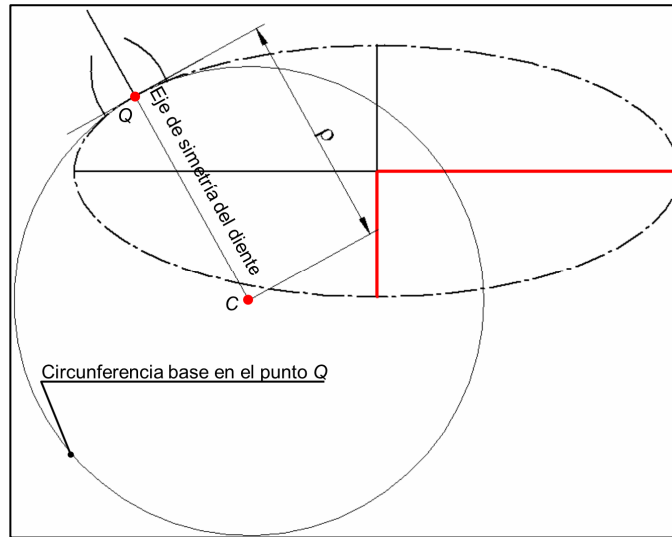


Fig.4.2.1. Circunferencia base de un diente concreto.

En primer lugar se obtiene la elipse primitiva distribuyendo el número de dientes alrededor de su perímetro. Si el engranaje tiene  $z$  dientes, con un paso circunferencial  $p$ , que es el doble del espesor del diente (dicho espesor debe ser el mismo para todos los dientes, pues en otro caso no encajarían durante el engrane todos los huecos con todos los dientes, el acabado final dará un grosor de diente menor y un hueco mayor para la tolerancia de engrane según la calidad del engranaje) medido en la elipse primitiva, como el paso es  $\pi.m$ , entonces el perímetro es  $\pi.m.z$ , que es la longitud de la elipse primitiva.

## 4.3.LONGITUD DE LA ELIPSE BASE Y LONGITUD DE ARCO

La longitud de la elipse base se obtiene evaluando la integral:

$$l = 4 \int_0^a \sqrt{d^2 x + d^2 y} \quad (4.3.1)$$

$$\text{De } dy = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} dy \text{ (4.3.2), con lo que } l = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} dx$$

$$\text{De la ecuación de la elipse, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

Sustituyendo arriba:

$$l = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)}} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} dx = \frac{4}{a} \int_0^a \sqrt{\frac{a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx$$

Teniendo en cuenta que la excentricidad de la elipse es:  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow a^2 - b^2 = e^2 a^2$

Se observa que  $0 < e < 1$

Con lo que:

$$l = \frac{4}{a} \int_0^a \sqrt{\frac{a^4 - e^2 a^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx$$

Realizando el cambio de variable  $x = a \sin \theta \Rightarrow dx = a \cos \theta d\theta \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \theta=0 \\ x=a \rightarrow \theta=\pi/2 \end{cases}$

$$l = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{a^2 - e^2 a^2 \sin^2 \theta}{a^2 - a^2 \sin^2 \theta}} a \cos \theta d\theta = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k \sin^2 \theta} d\theta, \text{ con } k = e^2$$

Que es una integral elíptica de segunda especie, la cual se puede evaluar mediante el comando de MATLAB (Ver Anexos):

$[P \ S]=\text{ellipke}(k)$ ; en P está la integral de primera especie y en S la de segunda especie.

También se puede utilizar el desarrollo en serie de Taylor:

$$E(x) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 x^2 - \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{x^4}{3} - \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{x^6}{5} - \dots - \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{x^{2n}}{2n-1} - \dots \right]$$

El matemático Ramanujan también ideó una ecuación más simple que se aproxima razonablemente a la longitud de la elipse, pero en grado menor que la obtenida mediante integrales elípticas.

Ahora se debe proceder a la inversa, conocido el módulo y el número de dientes del engranaje, así como la excentricidad requerida, determinar los semiejes de la elipse, pues así también se puede conocer su longitud.

Ejemplo, si se desea construir un engranaje de módulo  $m=4$ , número de dientes  $z=35$  y excentricidad 0,85. La longitud de la elipse primitiva debe ser  $l = \pi \cdot m \cdot z = \pi \cdot 4 \cdot 35 = 439,822972$ .

Eliendo un punto como inicio de los dientes, por ejemplo (0, b), se pueden marcar el punto de intersección del eje de simetría del diente con la elipse primitiva llevando el paso circunferencial uno a continuación de otro sobre la elipse primitiva.

Otro planteamiento, no correcto, es que el espesor cordal debe ser el mismo, ya que es ancho del hueco para que encaje un diente en otro. En el caso de un engranaje circular, tampoco habría coincidencia al ser diferente el diámetro primitivo. Pero no es correcto pensar así, pues lo que es igual en una pareja de engranajes circulares es el paso circunferencial, que es  $\pi.m$ , si los dos diámetros son iguales (igual número de dientes) entonces si es igual el espesor cordal, pero al cambiar el diámetro con el número de dientes no coincidirán los espesores cordales.

La longitud de arco es:

$$\Delta l = \int_{x1}^{x2} \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx \quad (4.3.2)$$

El punto  $x1$  es facilitado para iniciar el recorrido y se despejaría  $x2$ . Tras ello, entraría  $x1=x2$  y así de forma sucesiva.

Como quiera que la longitud de arco desemboca en el cálculo de integrales elípticas, sería posible utilizar una representación paramétrica de la elipse:

$$x(u) = a \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad y(u) = b \frac{2u}{1+u^2}$$

Que si  $0 \leq u \leq 1$  se tiene representado el primer cuadrante de la elipse.

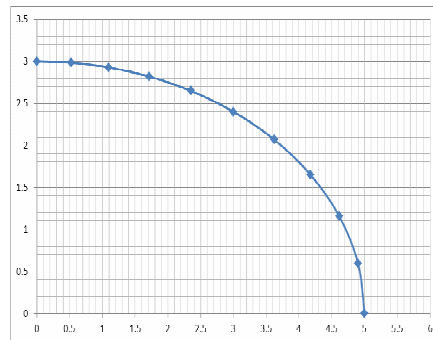


Fig.4.3.1. Representación del primer cuadrante de la elipse.

Las derivadas son:

$$\frac{dy}{du} = b \frac{2(1+u^2) - 2u \cdot 2u}{(1+u^2)^2} = b \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}$$

$$\frac{dx}{du} = a \frac{-2u(1+u^2) - 2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2} = a \frac{-4u}{(1+u^2)^2}$$

Dividiendo miembro a miembro ambas igualdades

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \frac{1-u^2}{2u}$$

Para la derivada segunda

$$\frac{d^2 y_c}{dx_c^2} = \frac{\frac{dx_c}{dx} \frac{d^2 y_c}{dx^2} - \frac{dy_c}{dx} \frac{d^2 x_c}{dx^2}}{\left(\frac{dy_c}{dx}\right)^2}$$

La longitud de arco

$$\Delta l = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(a \frac{-4u}{(1+u^2)^2}\right)^2 + \left(b \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\right)^2} du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{2}{(1+u^2)^2} \sqrt{(2au)^2 + (b(1-u^2))^2} du$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow a^2 - b^2 = e^2 a^2$$

$$\sqrt{4u^2 a^2 + b^2 + b^2 u^4 - 2b^2 u^2} = \sqrt{4u^2 (a^2 - (b^2/2)) + b^2 (1 + u^4)}$$

Otra representación paramétrica:

$$x(\varphi) = a \cos \varphi \quad y(\varphi) = b \sin \varphi$$

Las derivadas son:

$$\frac{dy}{du} = b \cos \varphi$$

$$\frac{dx}{du} = -a \sin \varphi$$

Dividiendo miembro a miembro ambas igualdades

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \frac{1}{\tan \varphi}$$

La longitud de arco es:

$$\Delta l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow a^2 - b^2 = e^2 a^2$$

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = a^2 (1 - \cos^2 \varphi) + b^2 \cos^2 \varphi = (b^2 - a^2) \cos^2 \varphi + a^2 = a^2 - e^2 a^2 \cos^2 \varphi = a^2 (1 - e^2 \cos^2 \varphi)$$

$$\Delta l = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

#### 4.4.FUNDAMENTOS PARA EL CÁLCULO DE LA TRAYECTORIA DE LA FRESA

En el entorno de un punto  $A(x_1, y_1)$  debemos encontrar otro punto  $B(x_2, y_2)$ , también perteneciente a la función, que cumpla la condición de que la secante  $AB$  mantenga una distancia máxima  $d$  (error máximo exigido) a la curva. Esta distancia se obtiene al sustituir las coordenadas  $T(x_3, y_3)$  en la ecuación normal de la recta:

$$d = \frac{a \cdot x_3 + b \cdot y_3 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4.4.1)$$

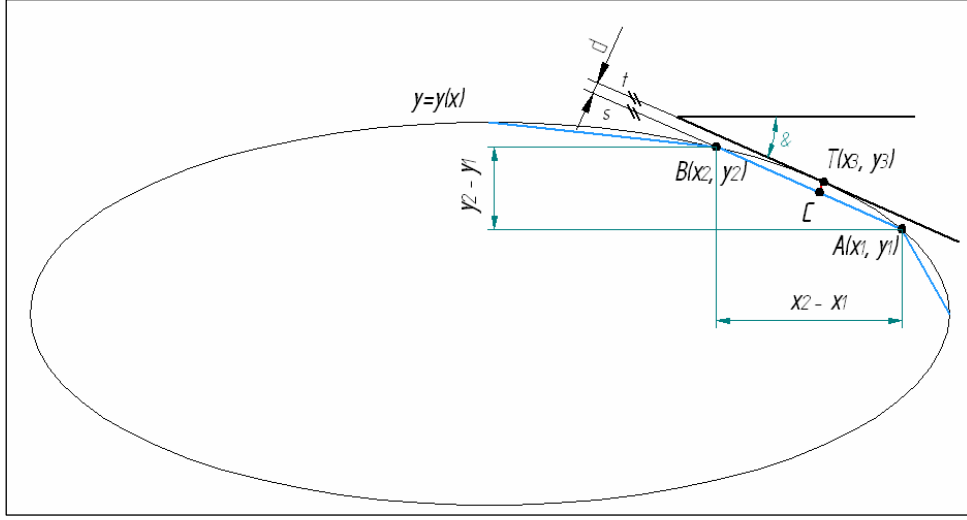


Fig.4.4.1. Representación del primer cuadrante de la elipse.

En principio, si la función conserva siempre el mismo sentido de crecimiento y de concavidad, solamente tenemos dos alternativas (figura 8). Pero únicamente es válida la que se encuentra en el sentido del mecanizado,  $x_2 < x_1$  o  $x_2 > x_1$  según que estemos mecanizando por abajo o por arriba del perfil.

También hay que tener en cuenta el signo de la distancia  $d$ , pues nos indica en el semiplano dónde se encuentra el punto tomado como referencia para el cálculo de dicha distancia. En nuestro caso, se ha evaluado el cuadrado de la distancia para prescindir del signo [21]:

$$d^2 = \frac{(a \cdot x_3 + b \cdot y_3 + c)^2}{(a^2 + b^2)} \quad (4.4.2)$$

El punto anterior,  $T$ , es el de tangencia con la gráfica de la función, de la recta paralela al segmento secante  $AB$ . Por lo tanto, la derivada primera en  $T$  es igual a la tangente del ángulo  $\varphi$  [21]:

$$y'_{x=x_3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4.4.3)$$

Se tiene, de esta forma, las dos condiciones que permitirán resolver las dos incógnitas ( $x_2, y_2$ ) ya que  $x_1, x_2$  y  $d$  son conocidos.

No hace falta analizar el signo de la tangente, pues se conoce la forma de la trayectoria a seguir.

Para resolver este sistema de dos ecuaciones por métodos numéricos MATLAB dispone de la instrucción [21]:

*maple(fsolve({ecu1,ecu2},{var1,var2},{var1=v1inicial..v1final,var2=v2inicial..v2final}))*

## 4.5.REALIZACIÓN DE LOS CÁLCULOS MATEMÁTICOS

La ecuación de la recta se deduce por la condición de pasar por el punto inicial A y tener la pendiente anteriormente calculada:

$$y - y_1 = y'_{x=x_3} (x - x_1) \quad (4.5.1)$$

que, arreglada convenientemente, nos proporciona los coeficientes de la ecuación de la recta:

$$y'_{x=x_3} \cdot x - y - y'_{x=x_3} \cdot x_1 + y_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = y'_{x=x_3} \\ b = -1 \\ c = -y'_{x=x_3} \cdot x_1 + y_1 \end{cases}$$

El algoritmo para resolver el sistema de ecuaciones planteado es relativamente sencillo. Se parte del valor inicial  $\alpha_i=0$ , encontrándose la solución  $\alpha_2$  para el parámetro que define el punto B(x2, y2) al resolver el sistema formado por (4.4.2) y (4.4.3). El parámetro obtenido vuelve a entrar como valor inicial. Así se prosigue hasta mientras la solución obtenida sea inferior al valor de  $\alpha_{\text{máx}}$ .

## 4.6.DISEÑO DEL PERFIL DE EVOLVENTE PARA CADA DIENTE

Teniendo ya en cuenta un error controlado d y conocidos todos los parámetros (radio primitivo, longitud de elipse base y de arco...), se puede pasar al modelado del perfil de evolvente de cada diente, el cual consiste simplemente en una traslación y un giro del perfil generado desde su propia circunferencia base para situarlo en la elipse a la que pertenece.

Como sabemos, el perfil del diente del engranaje desde la circunferencia base hasta la circunferencia exterior es de evolvente. La evolvente es la curva descrita por el punto extremo de una semirrecta que rueda sobre una circunferencia, (Fig.4.6.1):

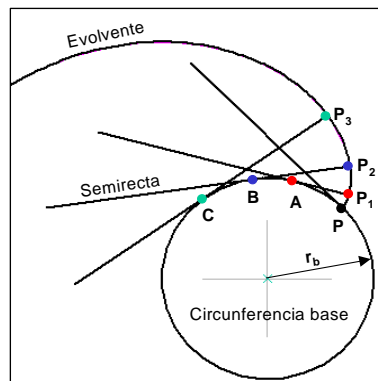


Fig.4.6.1. Representación del primer cuadrante de la elipse [21].

La condición de esta curva es que la longitud de los arcos PA, PB, PC es respectivamente igual a la de los segmentos P1A, P2B, P3B y así sucesivamente.

De la observación de la figura 4.6.1 podemos deducir la ecuación paramétrica de esta curva, para ello vamos a suponer una parte de la intersección de eje OX con la circunferencia base (punto P).

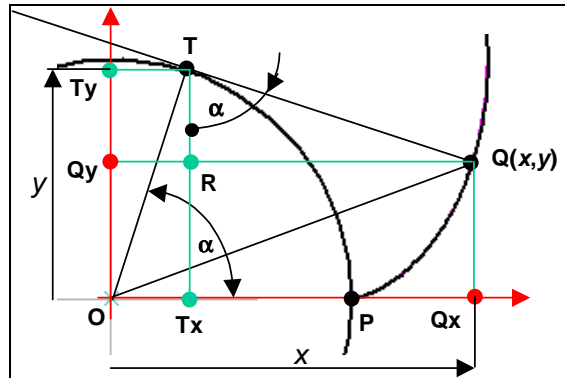


Fig.4.6.2. Deducción de la ecuación de evolvente [21].

Las coordenadas (x, y) del punto Q de la evolvente son:

$$x = \overline{OQx} = \overline{OTx} + \overline{TQx} = \overline{OT} \cdot \cos \alpha + \overline{TQ} \cdot \sin \alpha$$

$$y = \overline{OQy} = \overline{OTy} - \overline{TQy} = \overline{OT} \cdot \sin \alpha - \overline{TQ} \cdot \cos \alpha$$

El segmento OT es el radio de la circunferencia base y el segmento TQ, según la definición de la evolvente, debe tener la misma longitud que el arco TP, por lo tanto, la ecuación paramétrica queda así:

$$x = r_b \cdot \cos \alpha + \alpha \cdot r_b \cdot \sin \alpha$$

$$y = r_b \cdot \sin \alpha - \alpha \cdot r_b \cdot \cos \alpha$$

En forma vectorial la ecuación es:

$$\mathbf{x} = r_b (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) \mathbf{i} + r_b (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \mathbf{j}$$

Proporcionando un rango de valores al parámetro  $\alpha$  (en radianes) podemos obtener los correspondientes puntos de trazado  $x(x, y)$ .

La trayectoria que describen los puntos de la evolvente del otro lado del diente, es simétrica en nuestro caso, con respecto del eje de simetría del propio diente con la elipse (véase Fig.4.1.1). La unión de estos perfiles en la cabeza del diente se consigue simplemente trazando el perfil de la elipse exterior, obteniéndose de este modo el diente completo.

Ahora, de la parte de diseño, solo quedaría trazar el resto de los dientes hasta completar toda la elipse (véase macro y programa de MATLAB en Anexos).

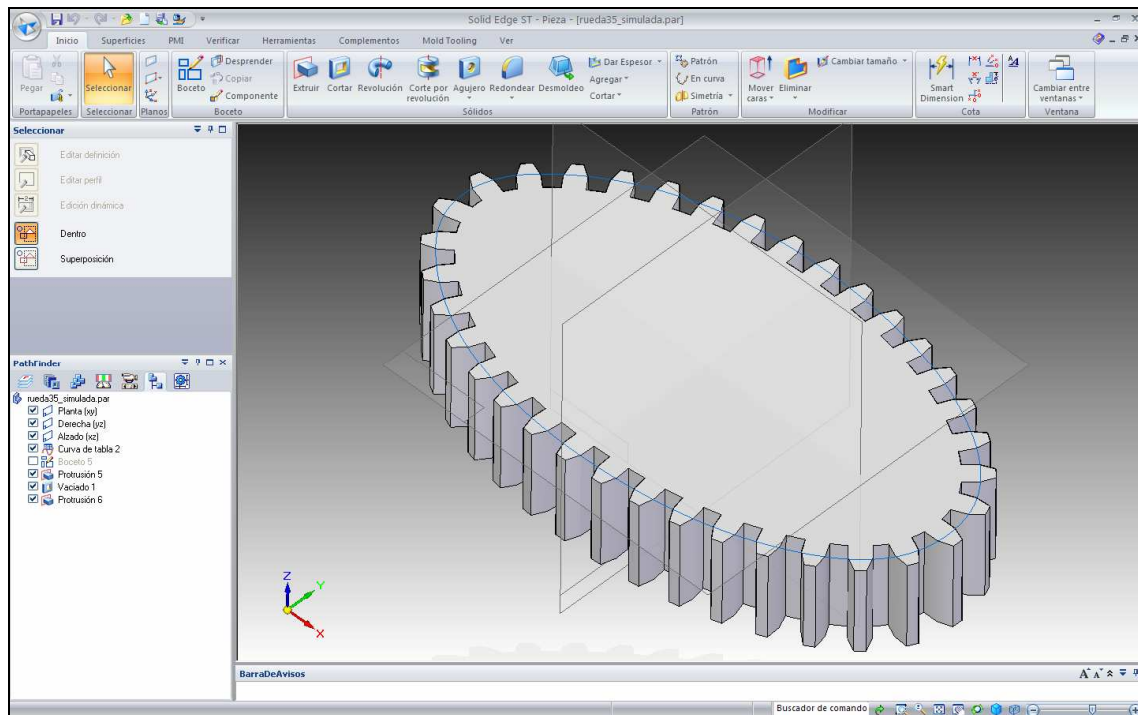


Fig.4.6.3. Diseño de uno de los engranajes elípticos de diente recto en Solid Edge ST2.

## 5.FABRICACIÓN

Una vez modelado todo el engranaje y obtenido el programa de control numérico vía (CAD/CAM) o tradicional, se introduce en el software de la máquina mediante USB, cable, teclado...y se pasa a la fabricación de la primera pieza.

Para la fabricación se ha utilizado una fresadora FANUC Robodrill de cinco ejes con un divisor de dos ejes y 24000 rpm (sólo se ha usado el cuarto eje).

El tamaño de los dientes influye en la selección del proceso de corte de los dientes. En el proceso de fresado por control numérico, se requiere que el espacio entre los dientes sea mayor al diámetro de la herramienta de corte (3 mm) de tal forma que permita la adecuada trayectoria de la herramienta de corte sin producir daños en el diente; si el tamaño de los dientes es muy pequeño, es preferible cortar los dientes en una máquina de electroerosión por hilo o por láser.

Tras acabar el proceso de mecanizado de las primeras piezas sería necesario comprobar que las medidas de la pieza fabricada no se desvíen demasiado respecto a las cotas esperadas, teniendo en cuenta siempre el error de la propia máquina, añadido al error que mete la propia fresa debido a su esbeltez. Para ello es muy recomendable usar una MMC en un entorno controlado, la cual tiene una precisión óptima para evaluar la magnitud de los errores que se quieren controlar.

## 6.CONCLUSIONES

La presente investigación se centra en el diseño, en los posibles nuevos modos de fabricación y en las aplicaciones para las que son viables el uso de los engranajes no circulares.

De la revisión del estado del arte se concluye que existen nuevas aplicaciones para las ruedas no circulares que surgen tanto del desarrollo de la teoría del diseño del perfil del diente como de la aplicación de nuevos procesos de manufactura y adaptación de antiguos procesos que permiten obtener el perfil deseado con precisión. El desarrollo de herramientas de cómputo más potentes permite superar la gran cantidad de cálculos necesarios para su diseño, mientras que el desarrollo del CNC permite su fabricación.

Para el diseño, se adopta un modelo matemático con el que se relacionan parámetros del engranaje tales como su módulo, número de dientes, excentricidad, semiejes de elipse, radios de curvatura...con el objetivo de obtener tanto el perfil de los dientes, como la capacidad de situarlos entorno a un perfil elíptico con los consecuentes problemas que eso ha conllevado (consultas a profesores, libros especializados [22], [23], manuales de programas...), teniendo en cuenta un error bien definido y su posterior modo de fabricación. Para ello nos hemos ayudado del programa de cálculo Matlab, implementaciones en macros de Excel y del programa de diseño Solid Edge ST2, del cual yo no tenía adquiridos conocimientos hasta la hora de realizar este trabajo.

En relación al proceso de manufactura, en este trabajo se comprobó que es posible definir el perfil de las ruedas dentadas mediante un conjunto de puntos listo para su introducción en un máquina de control numérico, tal como una fresadora o una máquina de electroerosión.

De entre los posibles modos de fabricación nos hemos decantado por el **mecanizado en máquinas de CNC mediante fresado por “bailarina”**, que no es otra cosa que una fresa de diámetro de unos 3 mm.

Este tipo de mecanizado puede ser económico para series cortas, debido a sus ventajas con respecto a los métodos tradicionales:

- Ausencia de la necesidad de adaptar máquinas al proceso o incluso de adquirir otras nuevas (se puede emplear una fresadora universal común).
- Menor costo de herramientas (una fresa para casi todos los engranajes).
- Precisión adecuada (errores inferiores a 2-3 micras).
- Tiempo de fabricación razonable.
- Versatilidad (se pueden hacer módulos de engranaje no estandarizados).

En este trabajo fin de máster se recopilan las publicaciones mas relevantes relacionadas con los engranajes no circulares considerando sus aplicaciones, las principales teorías de diseño propuestas y los procesos de manufactura. Esta recopilación sirve como soporte a posibles investigaciones futuras relacionadas con los engranajes no circulares.

## 7.BIBLIOGRAFÍA

[1] S.Cardona y L. Jordi. Síntesis de Engranajes no Circulares con Leyes de Desplazamiento Angular Definidas a Partir de Curvas de Bézier. Información Tecnológica-Vol. 16 págs.: 27-32. 2005.

[2] <http://es.wikipedia.org/wiki/Engranaje>

[3] Quintero R, Héctor Fabio; Cardona I Foix, Salvador; Jordi Nebot, LLuïsa. Engranajes no circulares: Aplicaciones, diseño y manufactura. Scientia Et Técnica, Vol X, Núm24, pp 133-138. 2004.

[4] Héctor Fabio Quintero Riaza. Tesis: Aporte al diseño de engranajes no circulares cilíndricos rectos. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona. 2006.

[5] K.-H. Modler, E.-C. Lovasz, G.F. Bär, R. Neumann, D. Perju, M. Perner, D. Margineanu. General method for the synthesis of geared linkages with non-circular gears. Mechanism and Machine Theory 44, 726–738. 2009.

[6] D. Mundo, G. Gatti, D.B. Dooner. Optimized five-bar linkages with non-circular gears for exact path generation. Mechanism and Machine Theory 44, 751–760. 2009.

[7] Y.A. Yao, H. S. Yan. A new method for torque balancing of planar linkages using noncircular gears. Proc. of the Inst. of Mech. Eng, 217 (5), 495 – 503. 2003.

[8] <http://es.wikipedia.org/wiki/Caudalimetro>

[9] Erika Ottaviano, Domenico Mundo, Guido A. Danieli, Marco Ceccarelli. Numerical and experimental analysis of non-circular gears and cam-follower systems as function generators. Mechanism and Machine Theory 43, 996–1008. 2008.

[10] T. Emura, A. Arakawa. A new steering mechanism using noncircular gears. Jap. Soc. Mech Engrs, Int. J. Ser. III, 35 (4), 604 – 610. 1992.

- [11] *D. B. Dooner*. Function generation utilizing an eight-link mechanism and optimized non-circular gear elements with application to automotive steering. *Proc. of the Inst. of Mech. Eng*, 215 (7), 847 – 857. 2001.
- [12] *D. B. Dooner*. Use of noncircular gears to reduce torque and speed fluctuations in rotating shafts. *Journal of Mechanical Design*, 119 (Jun), 299 – 306. 1997.
- [13] *H. F. Quintero, C. A. Romero, L. V. Vanegas Useche*. Thermodynamic and dynamic analysis of an internal combustion engine with a noncircular-gear based modified crank-slider mechanism. 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June 18-21. 2007.
- [14] *M. Ogura*. Study of non-uniform velocity balancer in the piston crank mechanism. International Congress and Exposition, Detroit, MI, USA, SAE Technical Paper Series, 910345, 7p. 1991.
- [15] *L. S. Guo, W. J. Zhang*. Kinematic analysis of a rice transplanting mechanism with eccentric planetary gear trains. *Mechanism and Machine Theory*, 36 (11), 1175-1188. 2001.
- [16] *G.A. Daniela*. Toward a greater industrial application of variable radius gearing. 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June 18-21. 2007.
- [17] *E. Doege, M. Hindersmann*. Optimized kinematics of mechanical presses with noncircular gears. 1997.
- [18] Teoría de mecanismos. Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad Carlos III de Madrid.
- [19] *P. Krawiec*. Design, manufacturing and measurement teeth of non-circular gears. Poznań University of Technology (Poland). 2009.
- [20] [w.w.w. gleason.com/products](http://w.w.w. gleason.com/products)
- [21] *José Luís Huertas Talón, Juan Carlos Cisneros Ortega, Carmelo López Gómez, Elena Ros Sancho, Elena Faci*. Olmos. Manufacture of a spur tooth gear in Ti\_6Al\_4V alloy by electrical discharge. *Computer-Aided Design*. 2009.
- [22] *Fiador L. Litvin, Alfonso Fuentes*. Gear geometry and applied theory.
- [23] *David B. Dooner, Ali A. Seireg*. The kinematic geometry of gearing.