

Anexos

Anexos A

Anexo

A.1. Expectation-Maximization

Expectation-Maximization (citar paper original) es un algoritmo iterativo basado en dos paso que estima los parámetros del GMM (medias, covarianzas y priors) que maximicen la verosimilitud a los datos. Dado un cúmulo de puntos generados por una distribución desconocida, el algoritmo ajusta un conjunto de Gaussianas para que aproxime la función de densidad de probabilidad que ha generado las muestras. Normalmente alcanzando un máximo local.

El algoritmo se basa en alternar entre dos pasos Expectation y Maximization. En Expectation, se calcula la verosimilitud para cada muestra de pertenecer a cada Gaussiana del GMM con sus parámetros actuales. La ecuación A.1 estima para cada punto r que probabilidad tendría si hubiese sido generada por una Gaussiana i con μ_i, Σ_i, π_i . En el paso de Maximization se calcula la media, covarianza y priors de cada Gaussiana que maximiza la verosimilitud calculada en la etapa anterior.

$$e(r|\mu_i, \Sigma_i) = \pi_i \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_i|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(r - \mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (r - \mu_i)\right] \quad (\text{A.1})$$

En el paso Expectation, para cada Gaussiana hemos obtenido un conjunto de probabilidades, una por cada punto. Lo primero que se realiza en el paso de Maximization es normalizarlas, como se observa en la ecuación A.2 donde N es el número de Gaussianas.

$$h_i(r_t) = \frac{e(r_t|\mu_i, \Sigma_i)}{\sum_{j=1}^N e(r_t|\mu_j, \Sigma_j)} \quad (\text{A.2})$$

A continuación se maximizan las variables de la Gaussiana teniendo en cuenta los puntos y la probabilidades normalizadas h_i de estos para la Gaussiana. El prior π de una Gaussiana i es la media de las probabilidades de las L muestras. Para maximizar la media μ se calcula la media de las posiciones de las muestras ponderados por

su probabilidad (ecuación A.4). La covarianza, al igual que con la media se calcula con el método habitual pero ponderado por la verosimilitud calculada en el paso de Expectation.

$$\pi_i = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L h_i(r_t) \quad (\text{A.3})$$

$$\mu_i = \frac{\sum_{t=1}^L h_i(r_t) r_t}{\sum_{t=1}^L h_i(r_t)} \quad (\text{A.4})$$

$$\Sigma_i = \frac{\sum_{t=1}^L h_i(r_t)(r_t - \mu_i)(r_t - \mu_i)^T}{\sum_{t=1}^L h_i(r_t)} \quad (\text{A.5})$$

El algoritmo se detiene cuando considera que ha alcanzado un máximo local o ha superado un número de iteraciones máximo. Para comprobar que a alcanzado un máximo local comprueba la diferencia entre la verosimilitud actual y la de la anterior iteración. Si esta es inferior a un umbral se considera que ha alcanzado un máximo y no puede mejorar más.

Para mejorar los resultados obtenidos por el algoritmo este es ejecutado varias veces con el objetivo de obtener distintas aproximaciones. Eligiendo como solución el GMM que haya alcanzado el mayor máximo local. El resultado del aprendizaje depende completamente de los parámetros iniciales de las Gaussianas. Con las mismas media y covarianzas iniciales se obtendrá la misma aproximación. Por ello es necesario inicializar, al menos las medias, de forma aleatoria.

A.2. Aproximaciones de BCSDF

A.2.1. Seda

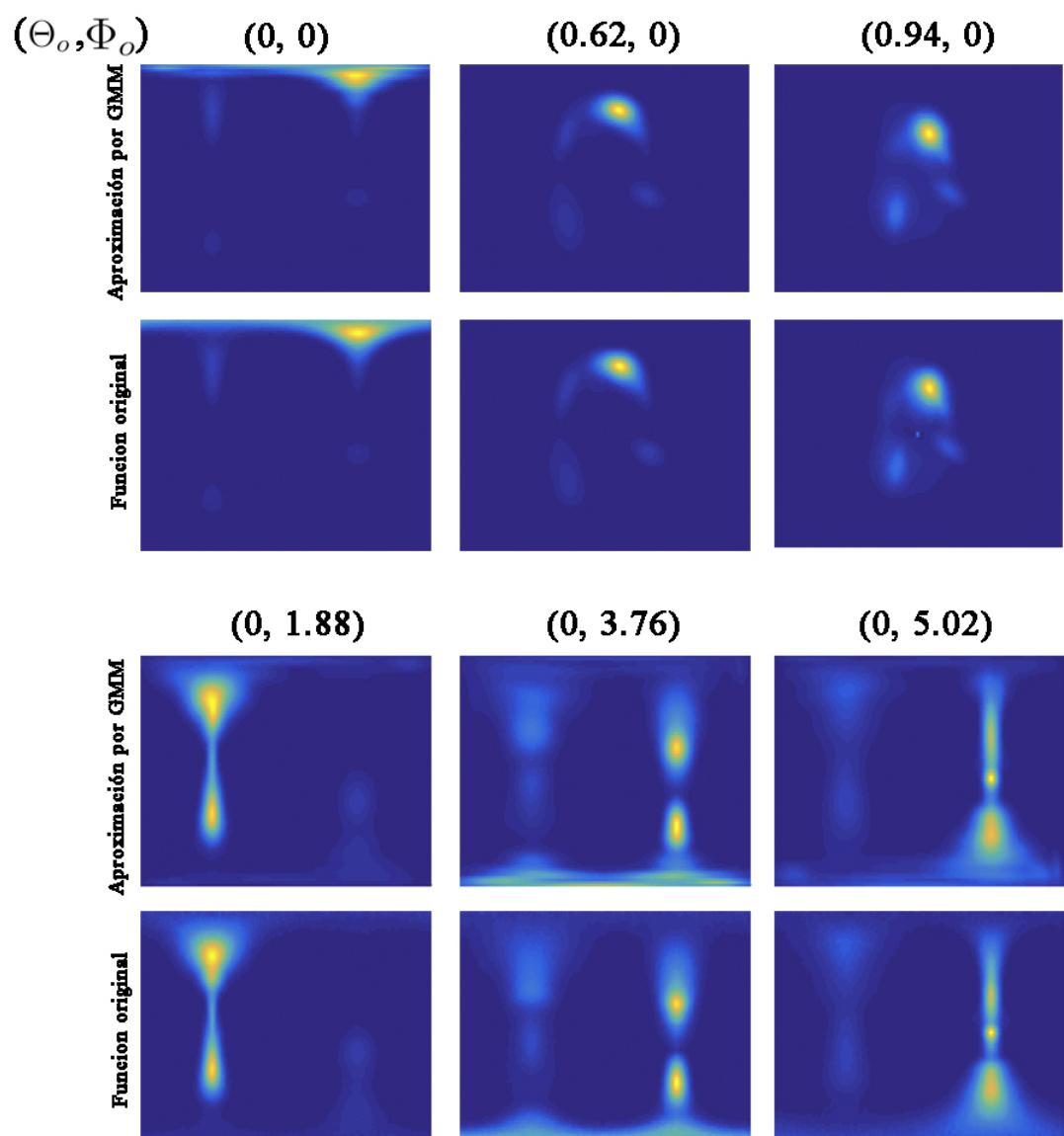


Figura A.1: Comparaciones entre diferentes rodajas definidas por Θ_o y Φ_o de la BCSDF de una fibra de seda y sus aproximaciones mediante *GMM*

A.2.2. Algodón

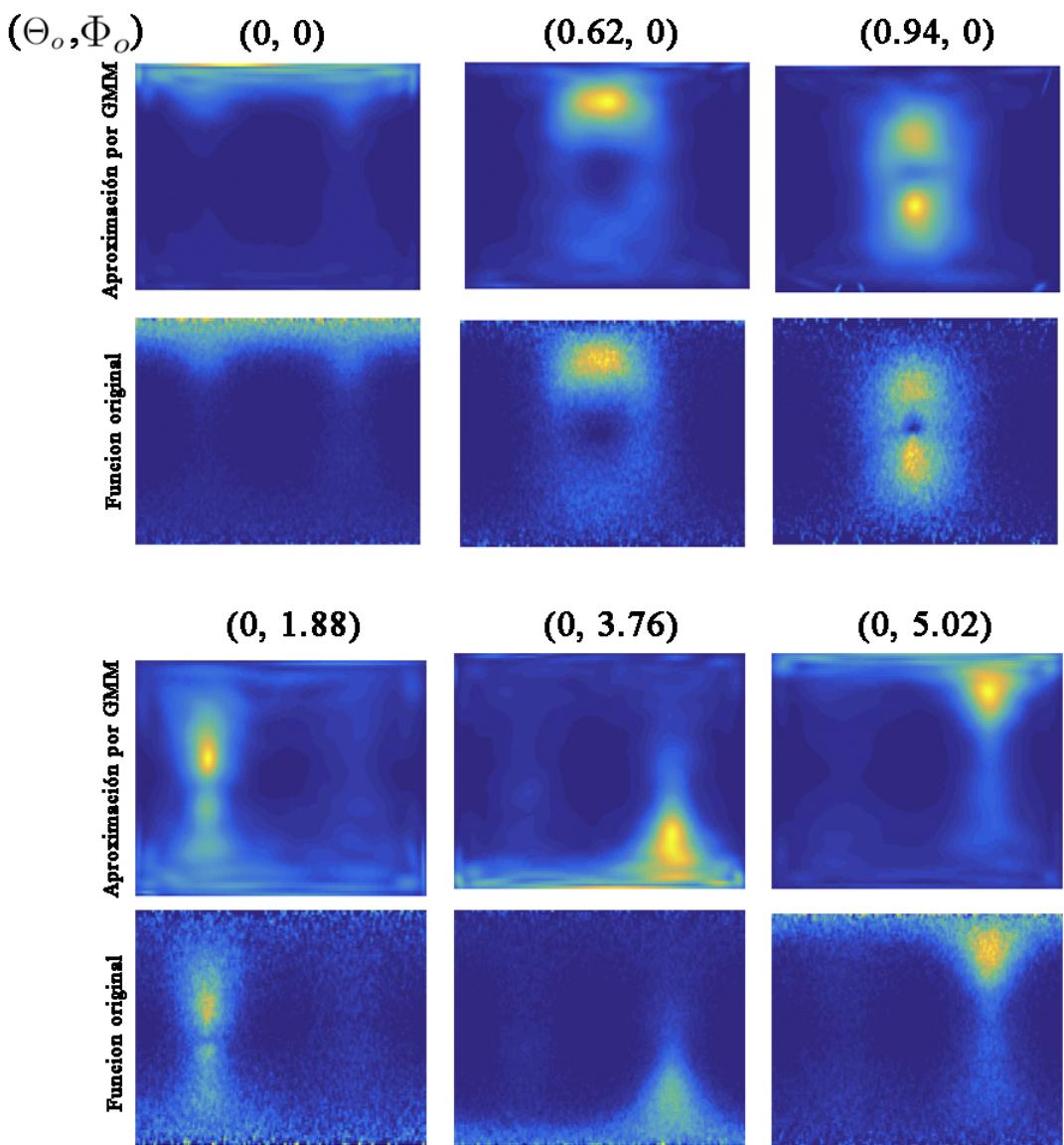


Figura A.2: Comparaciones entre diferentes rodajas definidas por Θ_o y Φ_o de la BCSDF de una fibra de algodón y sus aproximaciones mediante *GMM*

A.2.3. Polyester

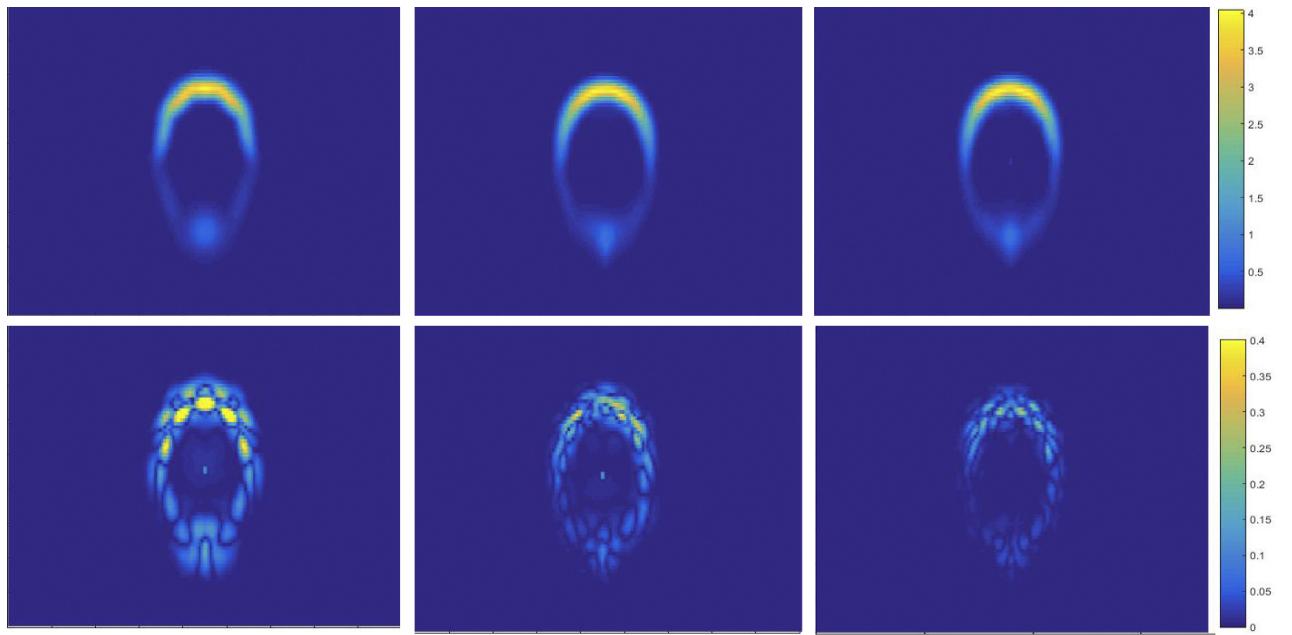


Figura A.3: Comparaciones entre aproximaciones de la función de apariencia de la fibra de poliéster con distinto número de Gaussianas para la dirección de salida $\Theta_o = 0,78$ y $\Phi_o = 0$. La fila superior es la aproximación mediante GMM y la fila inferior es el error respecto a la función original. El número de Gaussianas utilizadas son 10, 20 y 50 respectivamente.

A.3. Muestreo de GMM

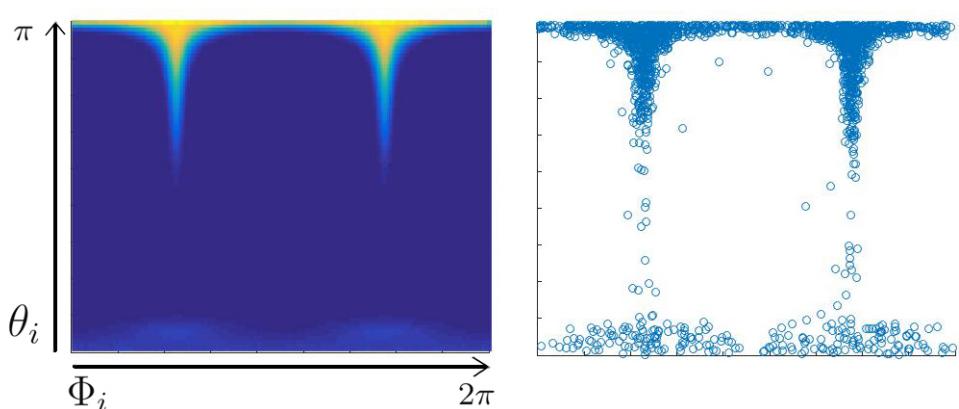


Figura A.4: Muestras generadas mediante la técnica expuesta en la sección 3.3 para una fibra de poliéster con $\Theta_o = 0$ y $\Phi_o = 0$.

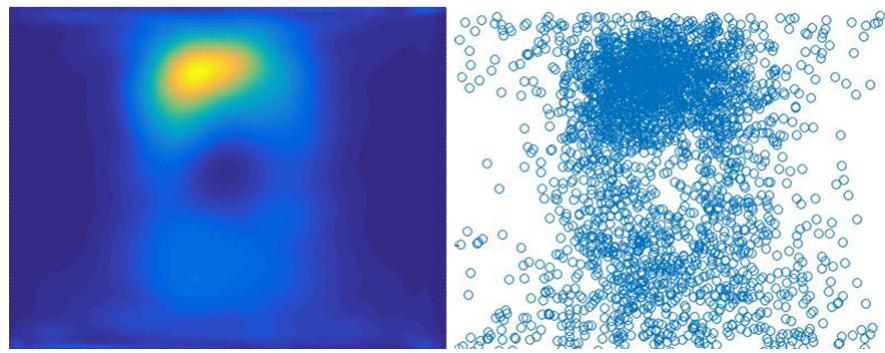


Figura A.5: Muestras generadas mediante la técnica expuesta en la sección 3.3 para una fibra de algodón con $\Theta_o = 0,78$ y $\Phi_o = 0$.

]