



**Universidad**  
Zaragoza



## **PROYECTO FINAL DE CARRERA**

*Modelo dinámico de una aeronave con tres grados de libertad*

### **AUTOR**

Daniel Ortigosa Val

### **DIRECTOR**

Rafael Rey Gayo

### **ESPECIALIDAD**

Mecánica

### **CONVOCATORIA**

Marzo 2012



# RESUMEN

El presente proyecto consiste en el análisis de un modelo dinámico de una aeronave, considerando tres grados de libertad. Se crea el modelo con la herramienta Simulink de MatLab, la cuál permite hacer una simulación para obtener resultados y realizar un estudio del comportamiento del aeroplano.

El estudio se lleva a cabo teniendo en cuenta tres grados de libertad, por lo que el modelo analiza las fuerzas y momentos que crean la trayectoria en un mismo plano.

Para las variables de entrada, los mandos de que dispondrá la aeronave serán dos, la tracción del motor y la deflexión del estabilizador de cola, ya que son los únicos que influyen en el movimiento dentro del plano.

En el documento se muestra cómo se crea y se implementa el modelo teórico en el programa. Después se muestra la forma de utilización del modelo, exponiendo las posibilidades teóricas y las aplicaciones que proporciona. Y una vez mostrado, se utiliza para obtener los puntos de equilibrio del aeroplano a distintas alturas y el análisis de distintas maniobras de incremento de velocidad, interpretando y comparando los resultados para conocer la reacción del mismo.

# ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN.....	5
2	MOVIMIENTO DE UN AEROPLANO.....	6
2.1	Sistemas de coordenadas y relación entre ellos.....	6
2.1.1	<i>Sistema de ejes tierra</i> .....	6
2.1.2	<i>Sistema de ejes horizonte local</i> .....	6
2.1.3	<i>Sistema de ejes cuerpo</i> .....	7
2.1.4	<i>Sistema de ejes viento</i> .....	7
2.1.5	<i>Relación entre ejes cuerpo y ejes horizonte local</i> .....	8
2.1.6	<i>Relación entre ejes cuerpo y ejes viento</i> .....	10
2.1.7	<i>Convenio de signos para las superficies de control</i> .....	12
2.2	Ecuaciones de movimiento de un sólido .....	13
2.3	Fuerzas consideradas .....	16
2.3.1	<i>Fuerzas aerodinámicas</i> .....	17
2.3.2	<i>Fuerzas propulsión</i> .....	20
2.3.3	<i>Fuerzas gravedad</i> .....	21
3	IMPLEMENTACIÓN EN SIMULINK/MATLAB.....	23
3.1	Descripción .....	23
3.1.1	<i>MatLab</i> .....	23
3.1.2	<i>Simulink</i> .....	24
3.2	Diagrama de bloques general .....	25
3.2.1	<i>Bloque general</i> .....	27
3.2.2	<i>Bloque integrador</i> .....	29
3.2.3	<i>Bloque fuerza aerodinámica</i> .....	31
3.2.4	<i>Bloque motor</i> .....	34
3.2.5	<i>Bloque centrado</i> .....	35
3.2.6	<i>Bloque sumador fuerzas</i> .....	36
3.2.7	<i>Bloque atmósfera ISA</i> .....	38

4	UTILIZACIÓN DEL MODELO DINÁMICO .....	39
4.1	Punto de equilibrio .....	39
4.2	Cálculo de maniobras .....	40
5	APLICACIÓN .....	41
5.1	Definición de parámetros .....	41
5.2	Vuelo rectilíneo a distintas alturas.....	42
5.2.1	<i>Velocidad mínima y máxima</i> .....	42
5.2.2	<i>Velocidad de máximo alcance</i> .....	47
5.3	Simulación de maniobra de incremento de velocidad.....	52
5.3.1	<i>Maniobra 1</i> .....	53
5.3.2	<i>Maniobra 2</i> .....	57
5.3.3	<i>Análisis maniobras</i> .....	61
6	CONCLUSIÓN .....	65

# 1 . INTRODUCCIÓN

El presente proyecto consiste en el análisis de un modelo dinámico de una aeronave, considerando tres grados de libertad. Se crea el modelo con la herramienta Simulink de MatLab, la cuál permite hacer una simulación para obtener resultados y realizar un estudio del comportamiento del aeroplano.

El estudio se lleva a cabo teniendo en cuenta tres grados de libertad, por lo que el modelo analiza las fuerzas y momentos que crean la trayectoria en un mismo plano.

Para las variables de entrada, los mandos de que dispondrá la aeronave serán dos, la tracción del motor y la deflexión del estabilizador de cola, ya que son los únicos que influyen en el movimiento dentro del plano.

En el documento se muestra cómo se crea y se implementa el modelo teórico en el programa. Después se muestra la forma de utilización del modelo, exponiendo las posibilidades teóricas y las aplicaciones que proporciona. Y una vez mostrado, se utiliza para obtener los puntos de equilibrio del aeroplano a distintas alturas y el análisis de distintas maniobras de incremento de velocidad, interpretando y comparando los resultados para conocer la reacción del mismo.

Este proyecto es un modelo novedoso para el departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Zaragoza, ya que no se había hecho un análisis de este tipo, que estudiara la dinámica de vuelo de un aeroplano, desde un punto de vista mecánico. En estos momentos económicos tan difíciles que estamos viviendo, representa una forma de avanzar en el estudio aeronáutico de una manera más sólida, sin grandes inversiones de dinero.

Personalmente, la razón personal para hacer este proyecto es la posibilidad de introducirme en el mundo de la aeronáutica, muy atractivo desde el punto de vista de la ingeniería, y a la vez poder colaborar y avanzar en el estudio de la mecánica de vuelo, aportando mis conocimientos y, sobretodo, aprendiendo de la realización del proyecto y de los resultados obtenidos.

## 2 . MOVIMIENTO DE UN AEROPLANO

### 2.1 Sistemas de coordenadas y relación entre ellos

Para situar el avión en el espacio y referenciar todas las fuerzas vamos a establecer los distintos sistemas de coordenadas considerados. A lo largo del proyecto vamos a utilizar los distintos ejes de referencia, y es importante para la comprensión su correcto entendimiento y conocer la relación en ellos.

#### 2.1.1 *SISTEMA DE EJES TIERRA*

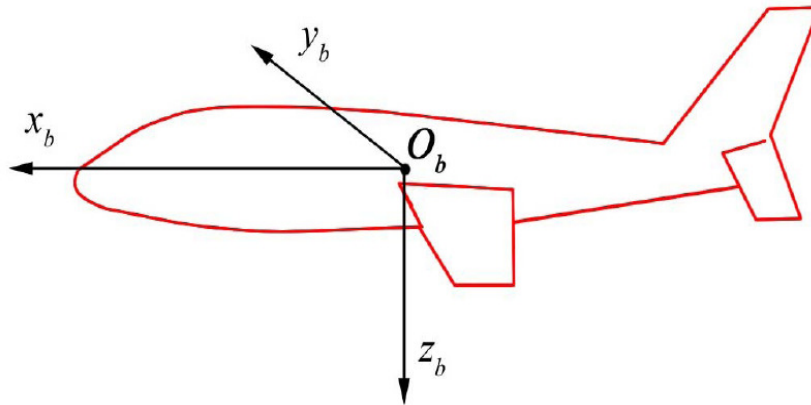
Los ejes tierra ( $F_e$ ) son un sistema de referencia ortogonal  $O_e X_e Y_e Z_e$  que se considera fijo en el espacio. Su origen puede ser fijado en una posición arbitraria, pero siempre se elegirá coincidente con el centro de gravedad del avión antes de comenzar cualquier estudio. El eje ' $Z_e$ ' va hacia abajo, paralelo a la dirección normal de la gravedad. El eje ' $X_e$ ' se dirige hacia el norte y el eje ' $Y_e$ ' hacia el este.

#### 2.1.2 *SISTEMA DE EJES HORIZONTE LOCAL*

Los ejes horizonte local ( $F_h$ ) son un sistema de referencia ortogonal  $O_h X_h Y_h Z_h$ . El origen ' $O_h$ ' se considerará en el centro de gravedad de la aeronave a estudio, mientras que los ejes ' $X_h Y_h Z_h$ ' se sitúan paralelos a los ejes tierra que existirían en el punto de intersección del radio vector que une el centro de gravedad del avión con la superficie terrestre.

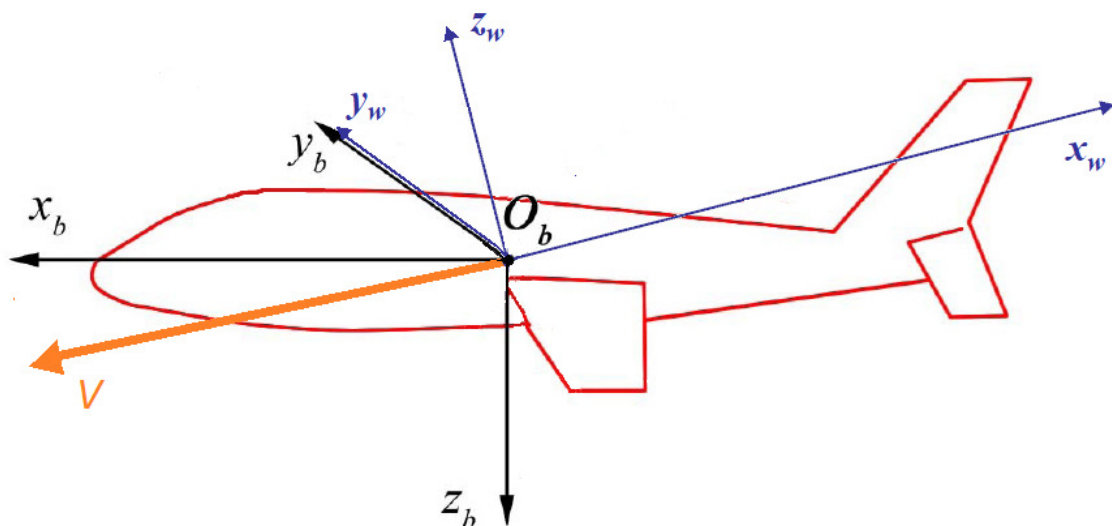
### 2.1.3 SISTEMA DE EJES CUERPO

Los ejes cuerpo referidos al avión ( $F_b$ ) son un sistema de referencia ortogonal  $O_b X_b Y_b Z_b$ . El origen ' $O_b$ ', coincide con el centro de gravedad de la aeronave. El plano  $X_b O_b Z_b$  coincide con el plano de simetría del avión (si es simétrico). El eje ' $X_b$ ' se sitúa en dirección al morro del avión, el eje ' $Y_b$ ' va en dirección del ala derecha y el eje ' $Z_b$ ' hacia la parte inferior de la aeronave.



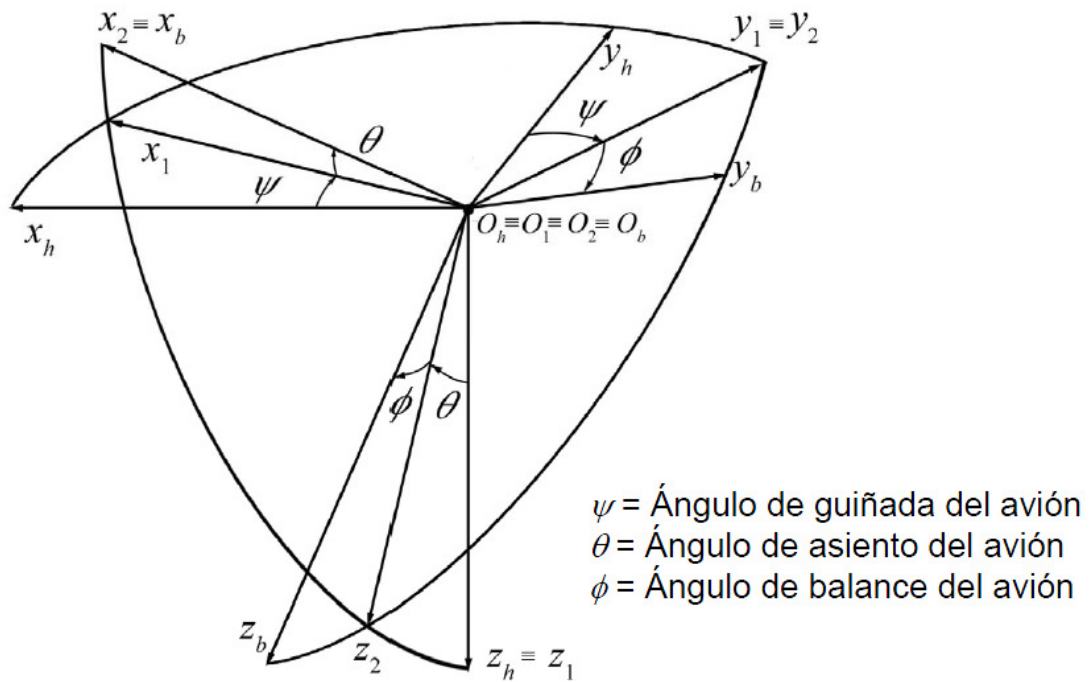
### 2.1.4 SISTEMA DE EJES VIENTO

Los ejes viento ( $F_w$ ) son un sistema de referencia ortogonal  $O_w X_w Y_w Z_w$ , también llamado ejes de trayectoria de vuelo. Tiene su origen ' $O_w$ ' en el centro de gravedad de la aeronave y la razón de estos ejes es que el eje ' $X_w$ ' va siempre alineado con el vector de la velocidad, pero en sentido contrario a la trayectoria que está siguiendo el avión en cada momento. El eje ' $Y_w$ ' coincide con el eje ' $Y_b$ ' y el eje ' $Z_w$ ' es perpendicular a sus ejes respectivos.



### 2.1.5 RELACIÓN ENTRE EJES CUERPO Y EJES HORIZONTE LOCAL

Para situar el avión respecto a nuestros ejes y representar la relación entre ellos se va a hacer uso de los ángulos de Euler:



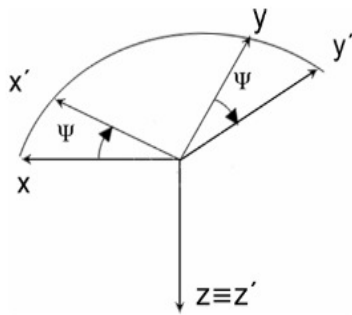


Para expresar un vector cualquiera en el sistema de referencia  $F_b$ , cuando se conocen sus tres componentes en el sistema de referencia  $F_h$ , se recurre al concepto de matriz de transformación o de rotación entre ambos sistemas,  $L_{bh}$ :

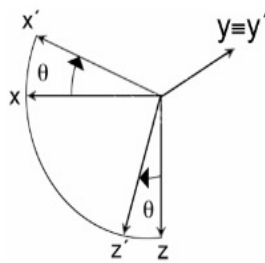
$$\vec{A}_b = L_{bh} \vec{A}_h$$

$$L_{bh} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

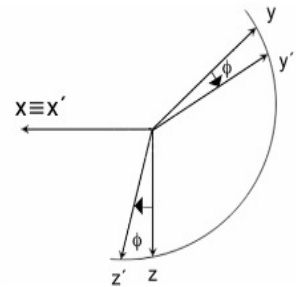
Aquí se muestran las tres rotaciones por separado expresadas de forma individual:



$$R_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



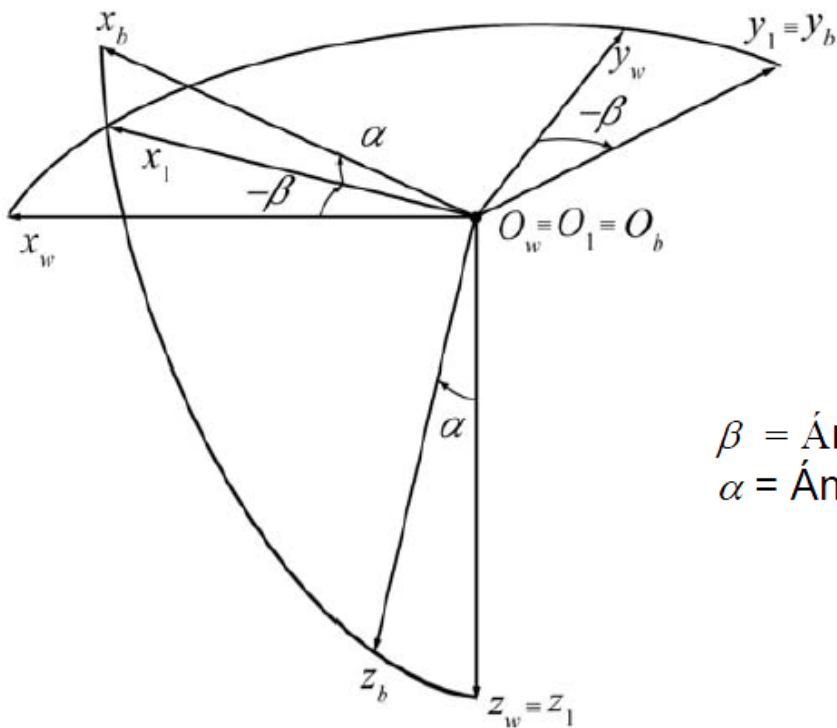
$$R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$



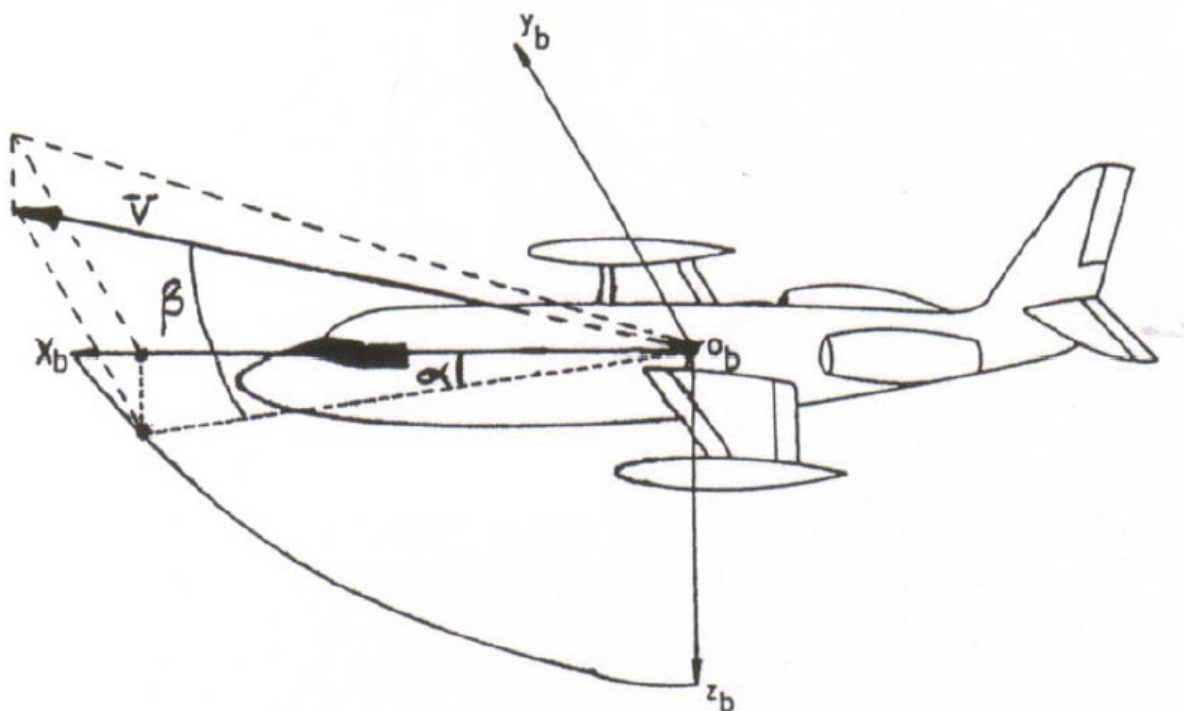
$$R_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$L_{bh}(\psi, \theta, \phi) = R_1(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)$$

### 2.1.6 RELACIÓN ENTRE EJES CUERPO Y EJES VIENTO



$\beta$  = Ángulo de resbalamiento  
 $\alpha$  = Ángulo de ataque



Para expresar un vector cualquiera en el sistema de referencia  $F_b$ , cuando se conocen sus tres componentes en el sistema de referencia  $F_w$ , se recurre al concepto de matriz de transformación o de rotación entre ambos sistemas,  $L_{bw}$ :

$$\vec{A}_b = L_{bw} \vec{A}_w$$

$$L_{bw} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

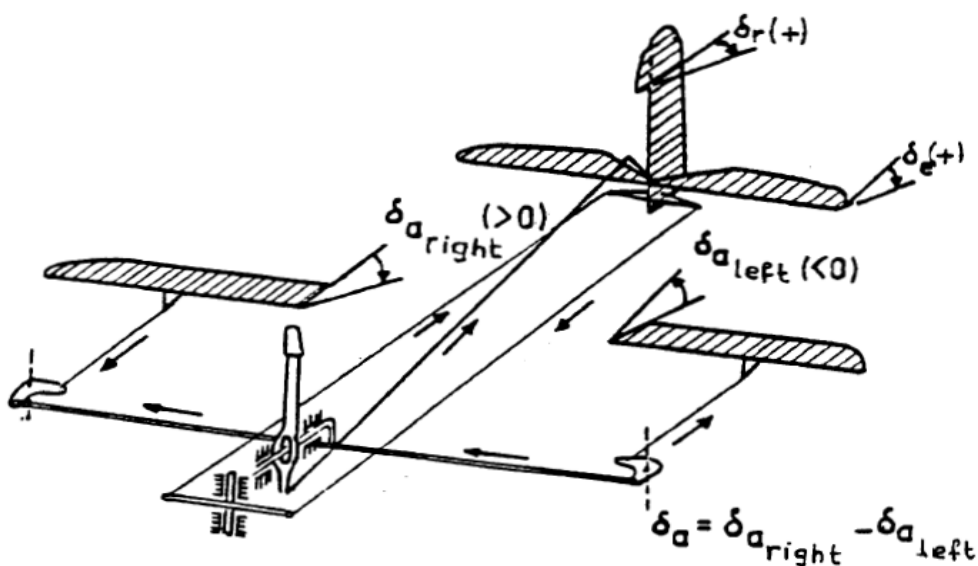
### 2.1.7 CONVENIO DE SIGNOS PARA LAS SUPERFICIES DE CONTROL

Es conveniente también establecer el convenio de signos para las deflexiones de las superficies de control.

Aquí se muestra cómo son medidas las desviaciones positivas de las superficies de control. Para nuestro caso, la deflexión positiva del estabilizador o timón de profundidad se mide hacia abajo: un  $\delta_e$  positivo, da un movimiento de cabeceo hacia abajo de la aeronave.

Aunque no influyan en nuestro estudio, el convenio para las superficies de control también incluye el timón de dirección y los alerones, cuyas desviaciones son positivas si se fuerza el avión para desplazarse hacia la izquierda. Si la deflexión de un alerón tiene signo positivo, el otro es negativo. La deflexión total del alerón, por lo tanto, se define como:

$$\delta_a = \delta_{a\text{dcha}} - \delta_{a\text{izda}}.$$



## 2.2 Ecuaciones de movimiento de un sólido

Es importante para empezar resaltar el *teorema de la cantidad de movimiento*:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$

Donde:

$\vec{F}$	Resultante de fuerzas exteriores
$\vec{V}$	Velocidad absoluta del centro de masa del avión
$m$	Masa del avión ( $m=W/g$ , siendo $W$ el peso y $g$ la aceleración de la gravedad)
$t$	Tiempo

Así como el *teorema de momento cinético*:

$$\vec{G} = \frac{d\vec{h}}{dt}$$

Donde:

$$\vec{h} = I\vec{\omega}$$

$\vec{G}$	Resultante de los momentos exteriores alrededor del centro de masa
$\vec{h}$	Momento cinético total del avión
$\vec{\omega}$	Velocidad angular absoluta del avión
$I$	Tensor de inercia del avión

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & I_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$	Momentos de inercia alrededor de los tres ejes
$J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$	Productos de inercia

Para establecer las relaciones dinámicas proyectamos las fuerzas en ejes cuerpo:

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$$

$$\vec{G} = (L, M, N)^T$$

$$\vec{V} = (u, v, w)^T$$

$$\vec{\omega} = (p, q, r)^T$$

Las ecuaciones de estado presentadas aquí son válidas para expresar la dinámica de los aviones y son un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Expresan los movimientos de la aeronave en términos de fuerzas externas y momentos, que pueden subdividirse en una serie de categorías. Sólo se considerarán las contribuciones de las fuerzas y momentos de la aerodinámica, el motor y la gravedad.

Aplicando las ecuaciones de Euler a los teoremas anteriores se obtiene:

$$F_x = m(\dot{u} - r \cdot v + q \cdot w)$$

$$F_y = m(\dot{v} + r \cdot u - p \cdot w)$$

$$F_z = m(\dot{w} - q \cdot u + p \cdot v)$$

$$L = I_{xx} \cdot \dot{p} - J_{xz} \cdot \dot{r} + (I_{zz} - I_{yy})q \cdot r - J_{xz} \cdot p \cdot q$$

$$M = I_{yy} \cdot \dot{q} - (I_{zz} - I_{xx})p \cdot r + J_{xz}(p^2 - r^2)$$

$$N = I_{zz} \cdot \dot{r} - J_{xz} \cdot \dot{p} - (I_{xx} - I_{yy})p \cdot q - J_{xz} \cdot q \cdot r$$

Sin embargo, como el análisis es exclusivamente respecto a tres grados de libertad, se puede despreciar tanto la fuerza  $F_y$ , como los momentos  $L$  y  $N$ , ya que actúan fuera del plano considerado. Esto implica que para analizar las acciones que intervienen en este plano, se deben considerar nulas las siguientes variables:

$$p = 0$$

$$r = 0$$

$$v = 0$$

De ahí se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$F_x = m(\dot{u} + q \cdot w)$$

$$F_z = m(\dot{w} - q \cdot u)$$

$$M = I_{yy} \cdot \dot{q}$$

Ahora se separa de las fuerzas exteriores la fuerza de gravedad, descomponiéndola respecto al ángulo  $\theta$ . Al aparecer una nueva variable, se añade una ecuación que obtenga una relación con este ángulo y se despejan las aceleraciones, obteniendo las **ecuaciones generales de movimiento** con tres grados de libertad:

$$\dot{u} = \frac{F_x}{m} - q \cdot w - g \cdot \sin\theta$$

$$\dot{w} = \frac{F_z}{m} - q \cdot u - g \cdot \cos\theta$$

$$\dot{q} = \frac{M}{I_{yy}}$$

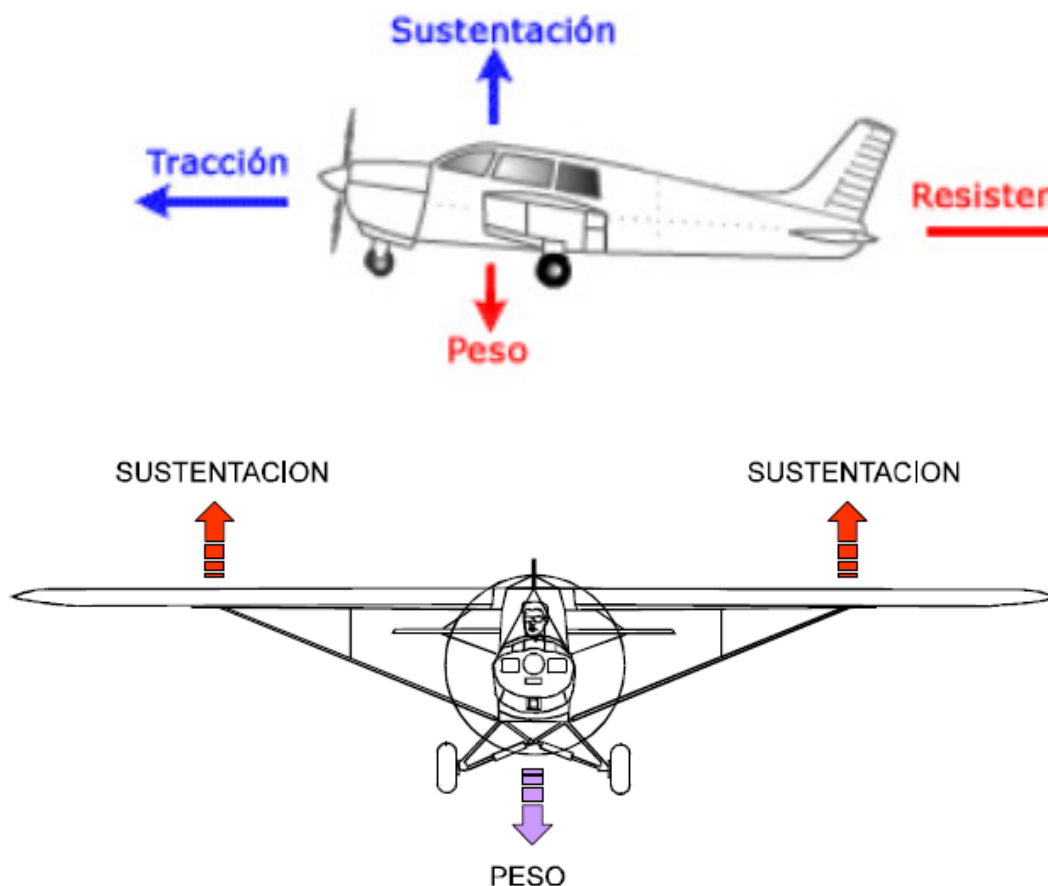
$$\dot{\theta} = q$$

## 2.3 Fuerzas consideradas

Las fuerzas y momentos considerados son las acciones exteriores debidas a la aerodinámica, la propulsión y la gravedad. De todas las fuerzas que actúan sobre un aeroplano en vuelo, las básicas y principales, porque afectan a todas las maniobras, son cuatro: *sustentación*, *peso*, *empuje o tracción* y *resistencia*. Estas cuatro fuerzas actúan en pares; la sustentación es opuesta al peso, y el empuje o tracción a la resistencia.

También es importante destacar el momento de cabeceo o de picado, que se produce a lo largo del eje *Y* e incide directamente en la sustentación y la resistencia.

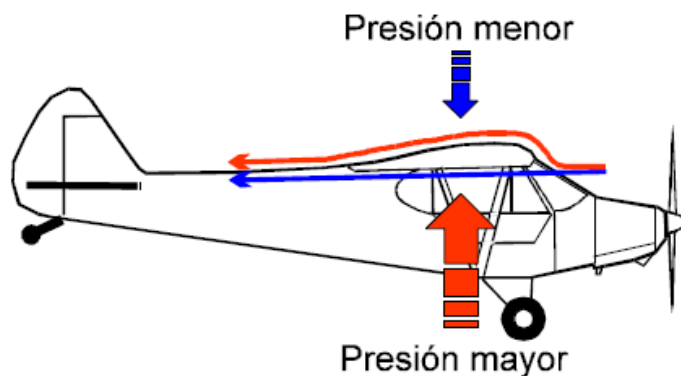
El avance de un avión dentro de una masa de aire provoca un viento relativo que, al circular sobre sus alas, produce la sustentación. Al avanzar el avión por efecto de la tracción, automáticamente aparece otra fuerza, la resistencia al avance, que actúa en contraposición de la anterior. Por último, aparece la fuerza de gravedad, a la que se opone la nombrada sustentación.





### 2.3.1 FUERZAS AERODINÁMICAS

Son las fuerzas y momentos exteriores que actúan sobre las alas, fuselaje y cola del avión y producen la sustentación necesaria para que el avión se mantenga en el aire. Un avión se sustenta en el aire como consecuencia de la diferencia de presiones que se origina al incidir la corriente de aire sobre un perfil aerodinámico, como es el ala. En la parte superior de la misma se produce un aumento de velocidad, ya que la trayectoria a recorrer por las partículas de aire en ésta, es mayor que en la parte inferior, en el mismo tiempo. Entonces se origina en la parte superior una disminución de presión con respecto a la parte inferior, produciendo de esta forma la sustentación del ala.



Esta fuerza, es la fuerza desarrollada por un perfil aerodinámico moviéndose en el aire, ejercida de abajo arriba, y cuya dirección es perpendicular al viento relativo y a la envergadura del avión (no necesariamente perpendiculares al horizonte). Se suele representar con la letra  $L$  del inglés *Lift* = **SUSTENTACION** y su fórmula es:

$$L = q \cdot S \cdot C_L$$

Donde:

$$q = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2$$

- $q$  Presión aerodinámica
- $\rho$  Densidad del aire
- $V$  Velocidad del viento relativo
- $S$  Superficie alar
- $C_L$  Coeficiente de sustentación. Aproximaremos este coeficiente como  
 $C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \cdot \alpha$ , con  $\alpha$  igual al ángulo de ataque

Además también aparecen momentos a lo largo del eje  $Y$  debido a los distintos centros de presiones y el centro de gravedad del aeroplano, así como los producidos por las fuerzas sobre distintas partes del fuselaje. Se llama **MOMENTO DE PICADO** o **DE CABECEO** y su fórmula es:

$$M = q \cdot S \cdot c \cdot C_M$$

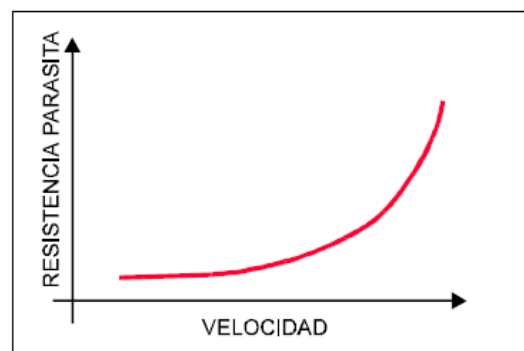
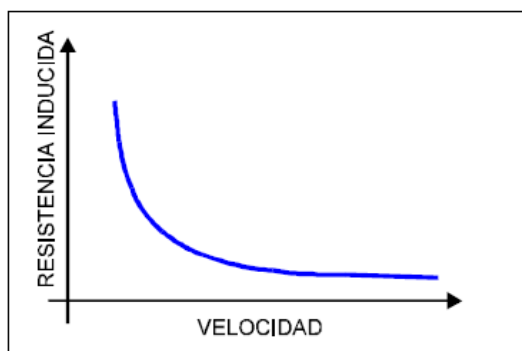
Donde:

$$q = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2$$

$q$	Presión aerodinámica
$\rho$	Densidad del aire
$V$	Velocidad del viento relativo
$S$	Superficie alar
$c$	Cuerda media aerodinámica del ala
$C_M$	Coeficiente de momento de picado o cabeceo. Aproximaremos este coeficiente como $C_M = a_0 + a_1 \cdot \alpha + a_2 \cdot \alpha^2 + a_3 \cdot \alpha^3$ , con $\alpha$ igual al ángulo de ataque

Los mismos factores que contribuyen al vuelo producen efectos no deseables, como la resistencia. La **resistencia** es la fuerza que tiende a retardar el movimiento del avión en el aire. Un tipo de resistencia es la **parásita**, producida por la fricción del fuselaje, tren de aterrizaje, alerones, etc. Depende de la forma del objeto y de la rugosidad de su superficie. Se puede reducir mediante perfiles muy aerodinámicos del fuselaje y alas del avión. Hay diseños que incorporan elementos para reducir la fricción, consiguiendo que el aire que fluye en contacto con las alas mantenga el llamado flujo laminar cuando se desliza sobre ellas sin producir torbellinos.

Otro tipo de resistencia, llamada resistencia **inducida**, es el resultado directo de la sustentación producida por las alas.



Se llama resistencia **total** a la suma de ambas resistencias. La ingeniería aeronáutica trata de conseguir que la relación entre la sustentación y la resistencia total sea lo más alta posible, que se obtiene teóricamente al igualar la resistencia aerodinámica con la inducida, pero dicha relación en la práctica está limitada por factores como la velocidad y el peso admisible de la célula del avión.

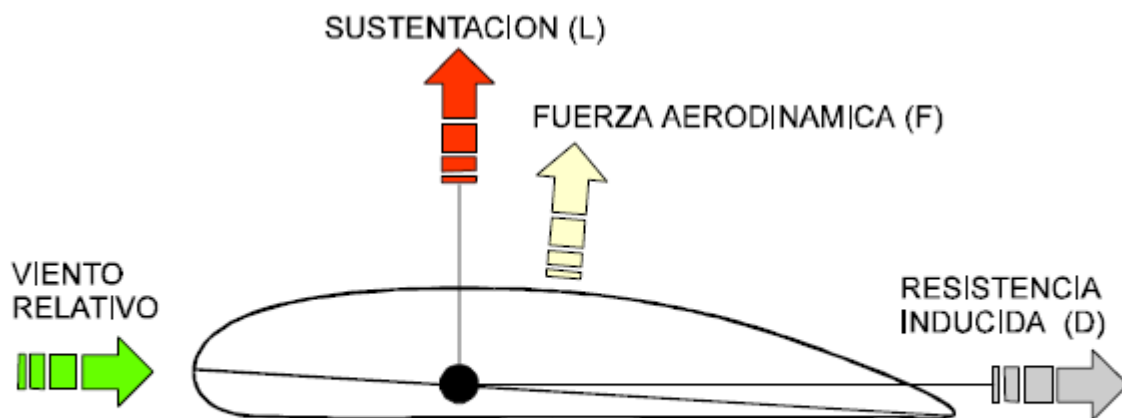
Se suele representar con la letra ***D*** del inglés *Drag* = **RESISTENCIA** y su fórmula es:

$$D = q \cdot S \cdot C_D$$

Donde:

$$q = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2$$

- $q$  Presión aerodinámica
- $\rho$  Densidad del aire
- $V$  Velocidad del viento relativo
- $S$  Superficie alar
- $C_D$  Coeficiente de resistencia. Aproximaremos este coeficiente como  
 $C_D = a_0 + a_1 \cdot \alpha + a_2 \cdot \alpha^2 + a_3 \cdot \alpha^3$ , con  $\alpha$  igual al ángulo de ataque



### 2.3.2 FUERZAS PROPULSIÓN

Para vencer la inercia del avión parado, acelerarlo en la carrera de despegue o en vuelo, mantener una tasa de ascenso adecuada y vencer la resistencia al avance se necesita una fuerza: el empuje o tracción. Esta fuerza se obtiene acelerando una masa de aire a una velocidad mayor que la del aeroplano. La reacción, de igual intensidad pero de sentido opuesto (3ª ley del movimiento de Newton), mueve el avión hacia adelante.

En aviones de hélice, la tracción la genera la rotación de la hélice, movida por el motor, haciendo que una masa de aire se mueva hacia atrás e impulse al avión; en reactores, la tracción se logra directamente por la expulsión violenta de los gases quemados por la turbina.

Esta fuerza se ejerce en la misma dirección a la que apunta el eje del sistema propulsor, que suele ser más o menos paralela al eje longitudinal del avión.



Un factor principal que influye en esta fuerza es la potencia del motor, pero hay otros elementos que también influyen como pueden ser la forma y tamaño de la hélice, la densidad del aire, etc.

Puesto que potencia es equivalente a energía por unidad de tiempo, a mayor potencia, mayor capacidad de aceleración. Con lo que la potencia y, por tanto, la tracción producida por la hélice, es un factor importante a la hora de determinar la tasa de ascenso de un avión.

En este caso la fórmula para determinar la **TRACCIÓN** o **FUERZA DE EMPUJE** es:

$$F_m = k \cdot T_{\max}$$

Donde:

$T_{\max}$  Tracción máxima que es capaz de producir el motor  
 $k$  Coeficiente que indica el porcentaje de tracción máxima

### 2.3.3 FUERZAS GRAVEDAD

El peso es la fuerza de atracción gravitatoria sobre un cuerpo, siendo su dirección perpendicular a la superficie de la tierra, su sentido hacia abajo, y su intensidad proporcional a la masa de dicho cuerpo. Esta fuerza es la que atrae al avión hacia la tierra y ha de ser contrarrestada por la fuerza de sustentación para mantener al avión en el aire.



Se expresa como:

$$F_G = W = m \cdot g$$

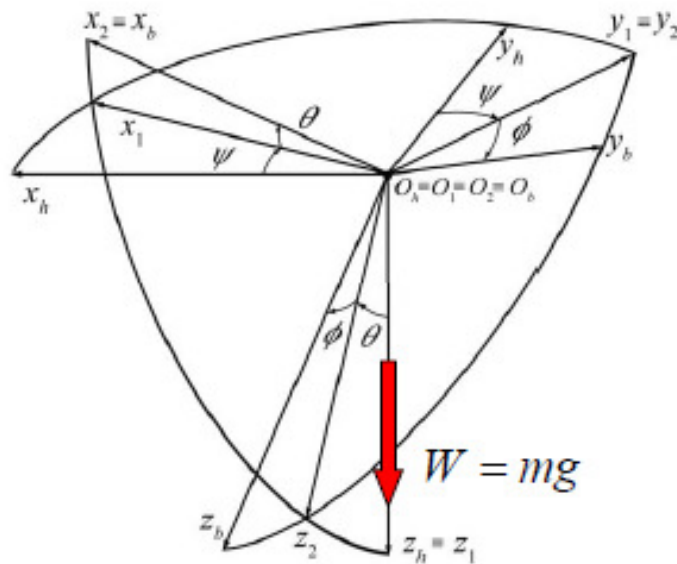
Donde:

$m$  Masa del avión  
 $g$  Gravedad

Para expresar la fuerza de gravedad en los distintos ejes:

$$(\vec{F}_G)_h = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{Bmatrix}$$

$$(\vec{F}_G)_b = \begin{Bmatrix} F_{Gx} \\ F_{Gy} \\ F_{Gz} \end{Bmatrix} = L_{bh} \cdot (\vec{F}_G)_h = \begin{Bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{Bmatrix}$$

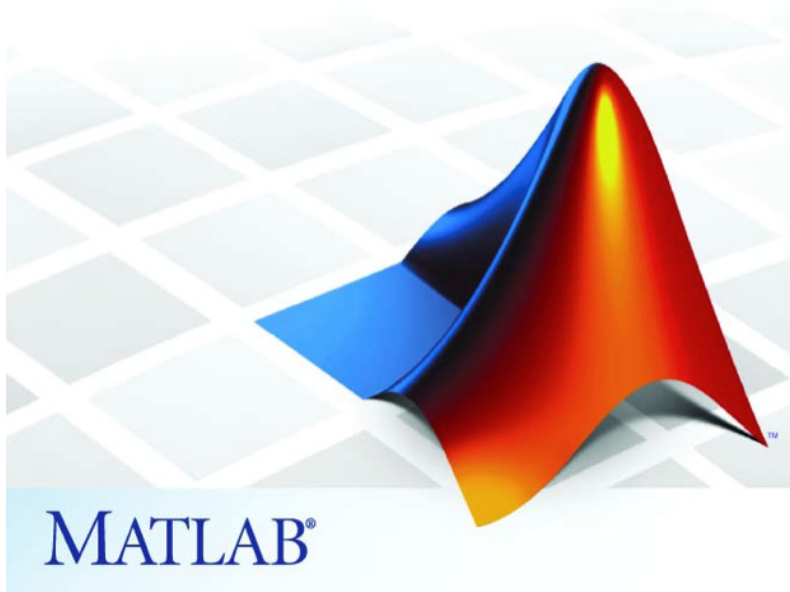


## 3 . IMPLEMENTACIÓN EN SIMULINK/MATLAB

### 3.1 Descripción

#### 3.1.1 *MATLAB*

Por todos es conocido el programa MATLAB. **MatLab** (**Matrix Laboratory**) es un sistema basado en matrices para realizar cálculos matemáticos y de ingeniería. Pero para lo que corresponde a este proyecto, hay que destacar la parte de este programa con la que se va a realizar el mismo. Entre las múltiples herramientas que presenta este programa se encuentra ***SIMULINK***, que es una librería de MATLAB que permite la simulación de procesos mediante diagramas de bloques. Y es una de las mejores herramientas posibles para la simulación de modelos dinámicos.



### 3.1.2 *SIMULINK*

Como ya hemos introducido, ***SIMULINK*** es un paquete de software para modelar, simular y analizar sistemas dinámicos. Soporta sistemas lineales y no lineales, modelados en tiempo continuo, muestreados o un híbrido de los dos. Los sistemas pueden ser también multifrecuencia, es decir, tienen diferentes partes que se muestrean o actualizan con diferentes velocidades.

Después de definir un modelo, puede simularlo utilizando cualquiera de los métodos de integración que tiene a su disposición o bien desde el menú de ***SIMULINK*** o introduciendo órdenes desde la ventana de órdenes de MATLAB. Los menús son apropiados para un trabajo interactivo; mientras que el enfoque de línea de orden es muy útil para ejecutar un lote de simulación.

Para modelar, ***SIMULINK*** proporciona una interfaz de usuario gráfica (*GUI*) para construir los modelos como diagramas de bloques, utilizando operaciones con el ratón del tipo pulsar y arrastrar. Con esta interfaz, puede dibujar los modelos de la misma forma que lo haría con lápiz y papel (o como lo representan la mayoría de los libros de texto). Esto es un cambio radical respecto a los paquetes de simulación previos que requieren que formule las ecuaciones diferenciales mediante un lenguaje o programa.

***SIMULINK*** incluye una amplia biblioteca de bloques de sumideros, fuentes, componentes lineales y no lineales y conectores. Puede también personalizar y crear sus propios bloques. Los modelos son jerárquicos, es decir, puede construir modelos utilizando una metodología descendente y ascendente. Puede visualizar el sistema en un nivel superior, desde donde mediante un doble clic sobre los bloques puede ir descendiendo a través de los niveles para ver con más detalle el modelo. Esto le proporciona una comprensión de cómo se organiza un modelo y cómo interactúan sus partes.

Los resultados de la simulación se pueden transferir al espacio de trabajo de MATLAB para su posterior postprocesamiento y visualización.

Las herramientas de análisis de modelo que incluyen linealización y determinación de estados estacionarios pueden ser accedidas desde la línea de orden de MATLAB, así como las muchas utilidades que MATLAB y sus toolboxes de aplicación poseen. Y como MATLAB y ***SIMULINK*** están integrados, pueden simular, analizar y revisar sus modelos en uno u otro entorno en cualquier momento.



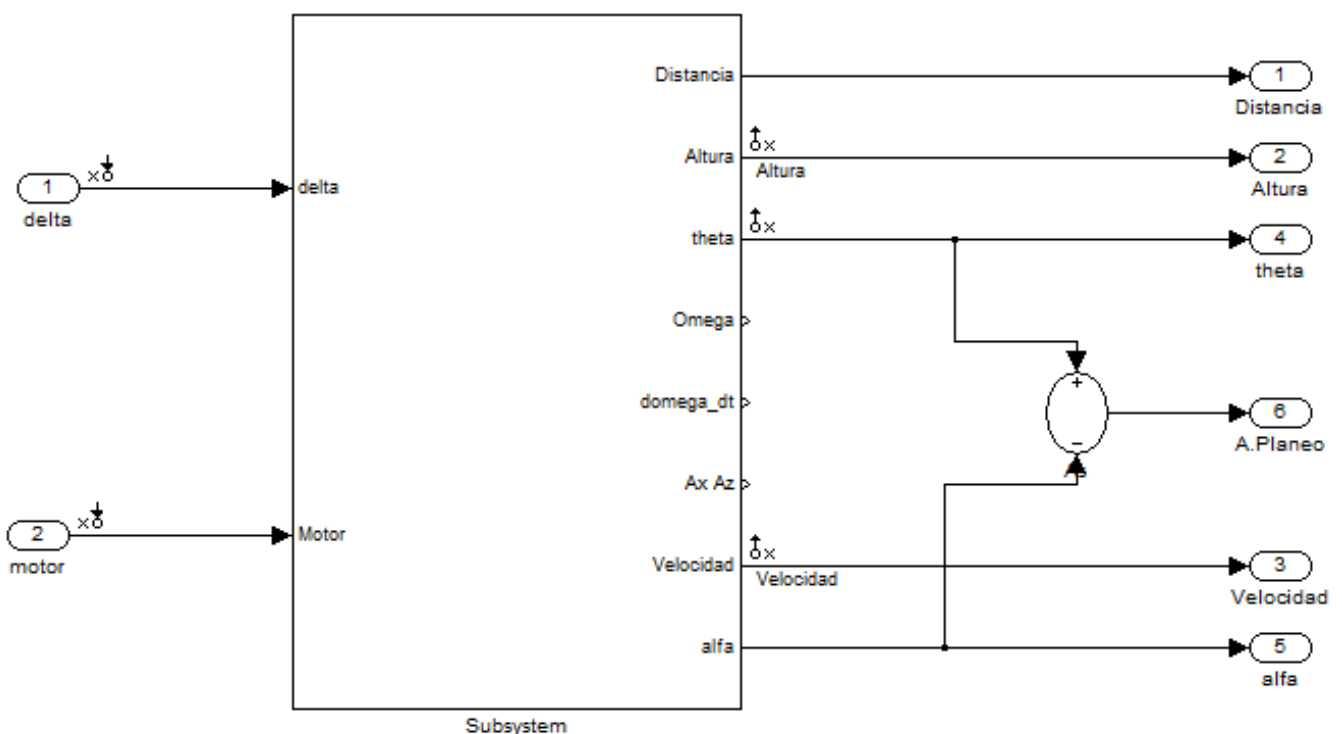


## 3.2 Diagrama de bloques general

Se va a realizar el desarrollo de un modelo dinámico de una aeronave considerando los tres grados de libertad. Eso indica que el análisis sólo es válido para el avión en movimiento dentro del mismo plano. Eso conlleva no considerar los giros y fuerzas laterales que producen movimiento fuera del plano, como los momentos de guiñada y balanceo.

### Descripción:

Para el desarrollo del modelo dinámico vamos a utilizar los diagramas de bloques. Simulink nos proporciona la herramienta perfecta para hacer simulaciones mediante este método con un sistema que funciona mediante niveles. Nos proporciona los parámetros de entrada y salida de la aeronave, siendo la misma un subsistema que funciona como una caja negra de información. A la vez, podemos entrar en ella y acceder al siguiente nivel, compuesta de varios subsistemas más, que nos muestran cómo funcionan y las distintas interacciones de las variables de dentro. Y así se compone de distintos niveles que cada vez te permiten acceder a cada nivel inferior de cada elemento del que esta compuesto el diagrama general. Aquí se muestra el diagrama general:



### Parámetros de entrada:

$\delta(rad)$ : Es el ángulo  $\delta$ , que indica la deflexión del estabilizador de cola.

$k$ : Es el coeficiente adimensional  $k$  del motor e indica el porcentaje de tracción máxima que transmite el motor a las hélices.

### Parámetros de salida:

$X(m)$ : Indica la localización del avión en el eje  $X$ , proporcionando la distancia recorrida, en ejes cuerpo.

$Z(m)$ : Indica la localización del avión en el eje  $Z$ , proporcionando la altura del mismo, en ejes cuerpo.

$\theta(rad)$ : Es el ángulo  $\theta$ , que indica el ángulo de asiento del avión.

$\phi(rad)$ : Es el ángulo de planeo, que indica la diferencia entre el ángulo  $\theta$  y el ángulo  $\alpha$ .

$V(m/s)$ : Indica la velocidad del avión.

$\alpha(rad)$ : Es el ángulo  $\alpha$ , que indica el ángulo de ataque del avión.

Las salidas  $\omega$ ,  $\dot{\omega}$  y  $A_x A_z$  no van a ninguna señal de salida porque, aunque son halladas por el integrador dentro del subsistema, no van a ser utilizadas para el posterior análisis.



El eje central del modelo es el bloque integrador *3DoF (body axes)*, que es el encargado de integrar las ecuaciones de movimiento, utilizando para ello las fuerzas y momentos totales a los que está sometido, hallando la posición, las velocidades y las aceleraciones totales de la aeronave en ejes cuerpo.

Para ello se necesita inicialmente los bloques *subsystem aerodinamica*, *subsystem motor* y *subsystem centrado*. El bloque aerodinámico se encarga de obtener las diferentes fuerzas y momentos de cada elemento en el que influyen las fuerzas aerodinámicas. El bloque motor es el encargado de obtener la tracción o fuerza de empuje que crea la hélice mediante la potencia del motor. El bloque de centrado obtiene las posiciones de los elementos respecto al centro de gravedad del avión, para poder centrar todas las acciones exteriores y obtener las fuerzas en ejes cuerpo y trasladarlas al centro de gravedad.

Una vez obtenidas todas las fuerzas y momentos por separado, respecto al centro de gravedad del avión en ejes cuerpo, el subsistema *FMsort* es el encargado de agruparlas y sumar las fuerzas totales, y de hallar los momentos totales que crean dichas fuerzas y momentos aplicadas en otros puntos. Así quedan agrupadas en el centro de gravedad para entrar al bloque integrador directamente.

Por último cabe describir el subsistema *ISA Atmosphere Model*. Para las fuerzas aerodinámicas, la densidad es una variable que influye de forma notable, pero como este factor varía con la altura, necesitamos el bloque atmósfera ISA para obtener la densidad correspondiente a cada altura, que nos indica a la salida del integrador.

### 3.2.2 BLOQUE INTEGRADOR

#### Descripción:

El bloque integrador se ocupa de, a través de las fuerzas y momentos a las que está sometido el avión, obtener la posición, las velocidades y las aceleraciones que tiene en el momento dado. Para ello integra las ecuaciones de movimiento anteriormente descritas:

$$\dot{u} = \frac{F_x}{m} - q \cdot w - g \cdot \sin \theta$$

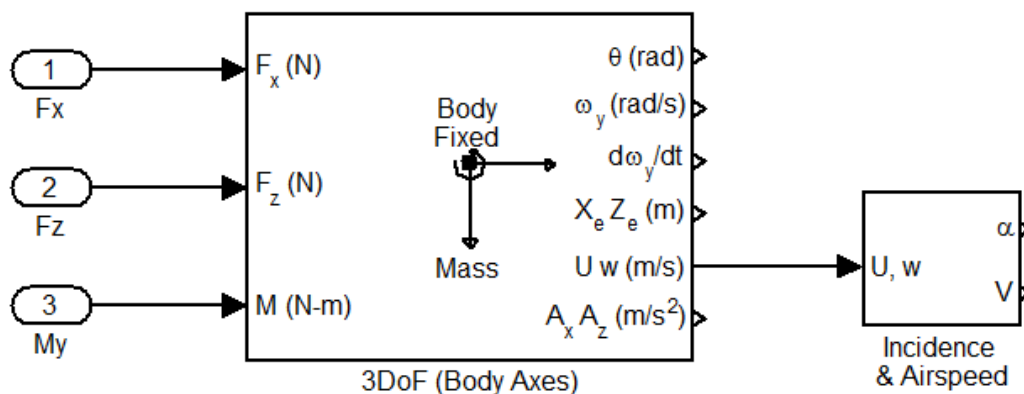
$$\dot{w} = \frac{F_z}{m} - q \cdot u - g \cdot \cos \theta$$

$$\dot{q} = \frac{M}{I_{yy}}$$

$$\dot{\theta} = q$$

Para poder establecer el momento dado en comenzar la integración, es necesario introducir las *condiciones iniciales*. Para integrar respecto a los tres grados de libertad, hay que definir la velocidad, ángulo de asiento, ángulo de ataque y posición iniciales, junto a la masa y la inercia de la aeronave.

El bloque integra en los tres grados de libertad respecto a los ejes cuerpo de la aeronave:



### Parámetros de entrada:

$F_x(N)$ : Es la suma total de todas las fuerzas exteriores a las que está sometido el avión situadas en el eje X, en ejes cuerpo y aplicadas en el centro de gravedad.

$F_z(N)$ : Es la suma total de todas las fuerzas exteriores a las que está sometido el avión situadas en el eje Z, en ejes cuerpo y aplicadas en el centro de gravedad.

$M_y(N \cdot m)$ : Es la suma de todos los momentos a los que está sometido el avión situados en el eje Y, en ejes cuerpo.

### Parámetros de salida:

$\theta(rad)$ : Indica el ángulo de asiento del avión en ejes cuerpo que resulta de las fuerzas introducidas.

$\omega_y(rad/s)$ : Indica la velocidad angular a la que está sometido el avión a lo largo del eje Y, correspondiente al valor de 'q'.

$\frac{d\omega_y}{dt}$ : Indica la aceleración angular a la que está sometido el avión a lo largo del eje Y, correspondiente al valor de ' $\dot{q}$ '.

$X_e, Z_e(m)$ : Indican la localización general del avión en ejes tierra. ' $X_e$ ' indica la distancia en el eje X, mientras que ' $Z_e$ ' indica la altura en el eje Z.

$u, w(m/s)$ : Indican la velocidad del avión en ejes cuerpo. ' $u$ ' indica la componente en el eje X mientras que ' $w$ ' indica la componente en el eje Z.

$A_x, A_z(m/s^2)$ : Indican la aceleración del avión en ejes cuerpo. ' $A_x$ ' indica la componente en el eje X mientras que ' $A_z$ ' indica la componente en el eje Z.

$\alpha(rad)$ : Indica el ángulo de ataque del avión, obtenido a partir del vector  $(u, w)$  de velocidad en ejes cuerpo.

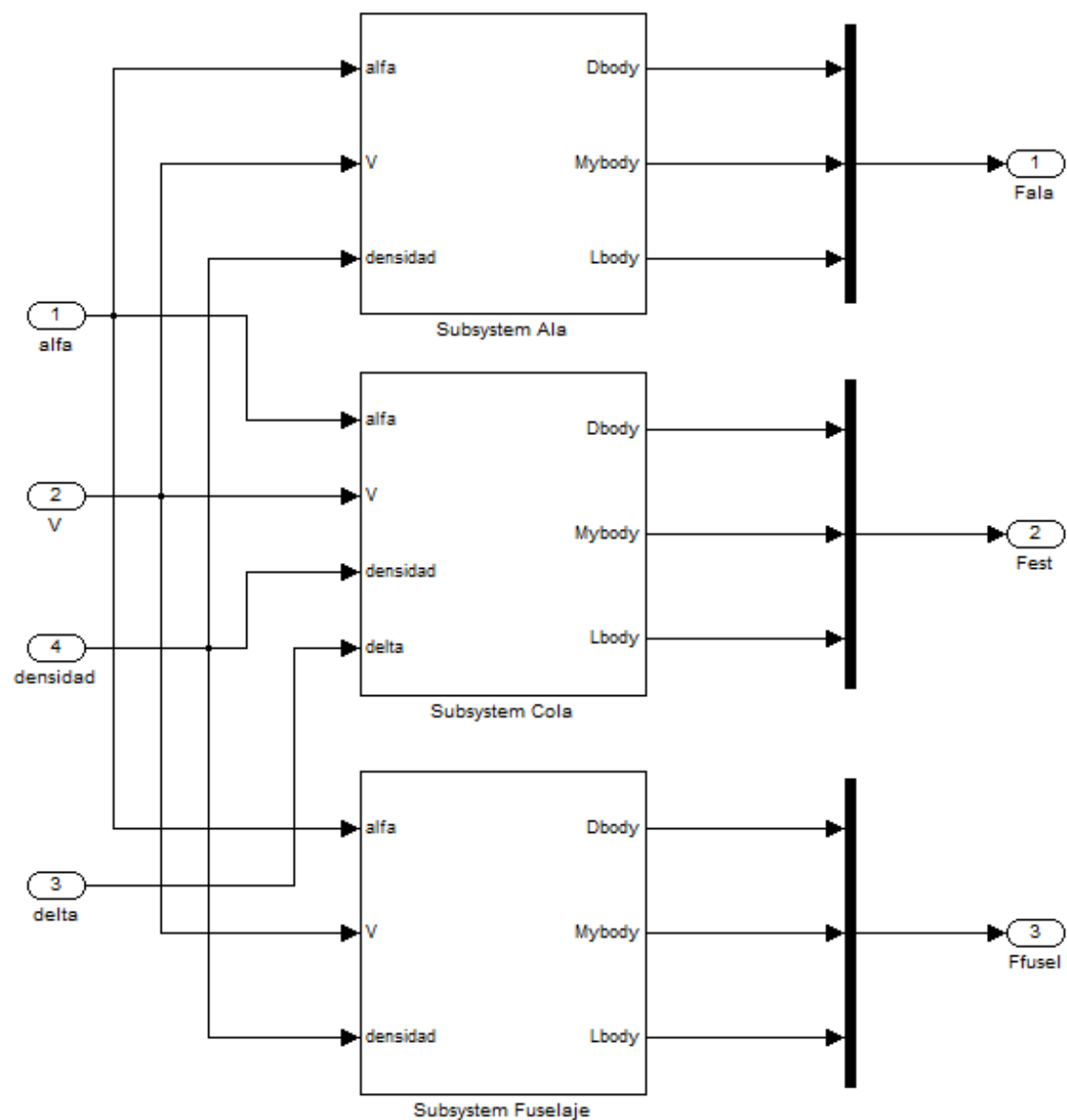
$V(m/s)$ : Indica el módulo del vector velocidad  $(u, w)$ .

### 3.2.3 BLOQUE FUERZA AERODINÁMICA

#### Descripción:

La fuerza aerodinámica es la producida por las acciones sobre el ala, cola y fuselaje. Estas fuerzas son las que crean la sustentación del avión, pero a la vez producen una resistencia al avance y también crean el momento de cabeceo.

Primero obtenemos las fuerzas individualmente de cada elemento:



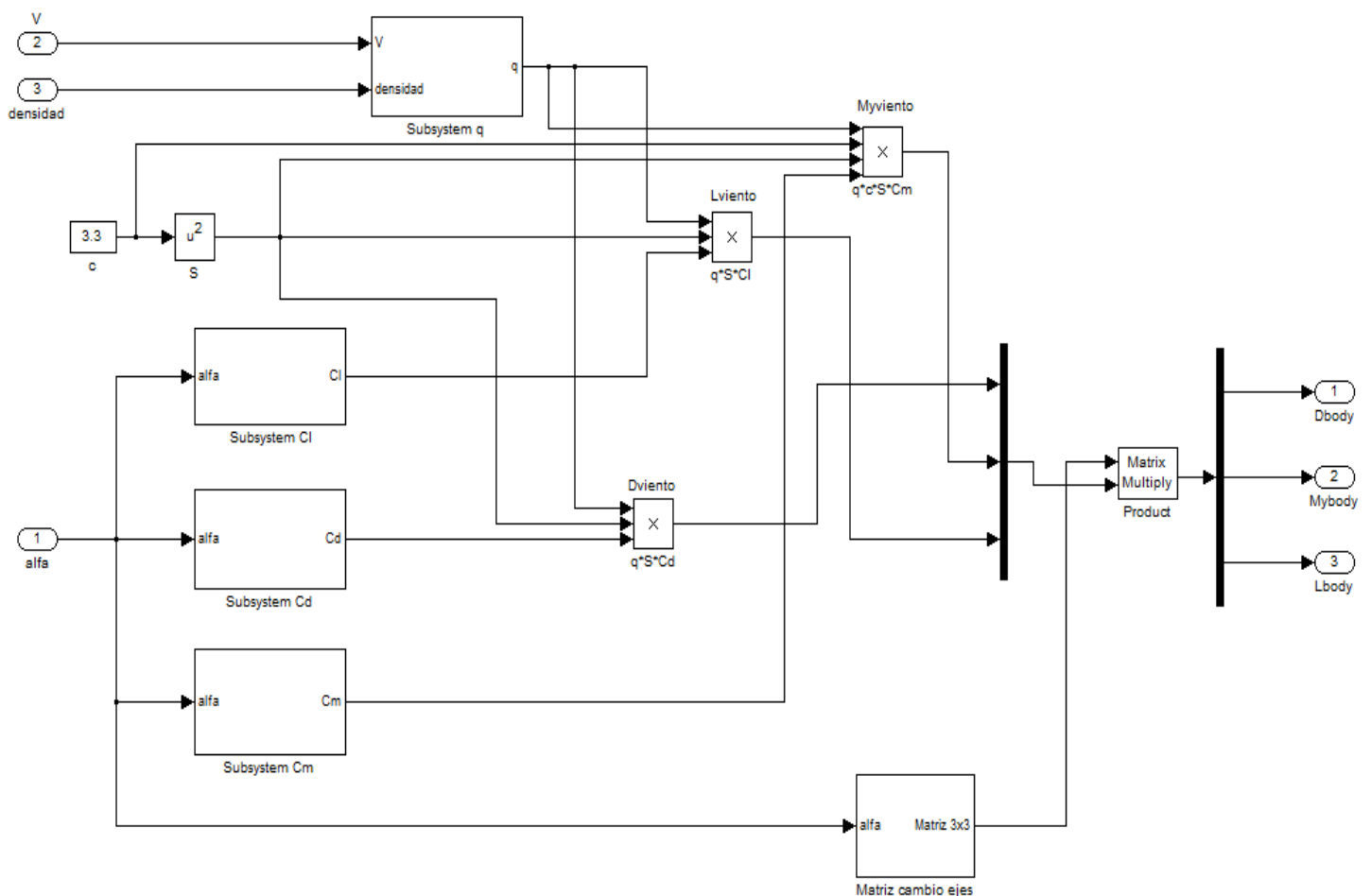
Estas fuerzas vienen determinadas por las fórmulas anteriormente descritas:

$$L = q \cdot S \cdot C_L \quad \text{SUSTENTACIÓN}$$

$$M = q \cdot S \cdot c \cdot C_M \quad \text{MOMENTO DE CABECEO}$$

$$D = q \cdot S \cdot C_D \quad \text{RESISTENCIA}$$

Por lo que dentro de cada elemento se hallan los distintos coeficientes para obtener  $L$ ,  $M$  y  $D$  en ejes viento. Y después se pasan a ejes cuerpo mediante la matriz de transformación para hallar la fuerza aerodinámica total del elemento. Se hace lo mismo con el ala, el fuselaje y la cola del avión, con sus respectivas características. El ángulo delta solo interviene en la aerodinámica de la cola:





**Parámetros de entrada:**

$V(m/s)$ : Módulo de la velocidad del avión.

$\rho(kg/m^3)$ : Densidad del aire a la altura de vuelo.

$\alpha(rad)$ : Ángulo de ataque del avión.

$\delta(rad)$ : Ángulo de deflexión del estabilizador de cola.

**Parámetros de salida:**

$F_{ala}$ : Vector de salida compuesto por la resistencia ( $D$ ) en el eje  $X$ , el momento de cabeceo ( $M$ ) en el eje  $Y$ , y la sustentación ( $L$ ) en el eje  $Z$ , que forman las fuerzas aerodinámicas del ala. Todas ellas en ejes cuerpo.

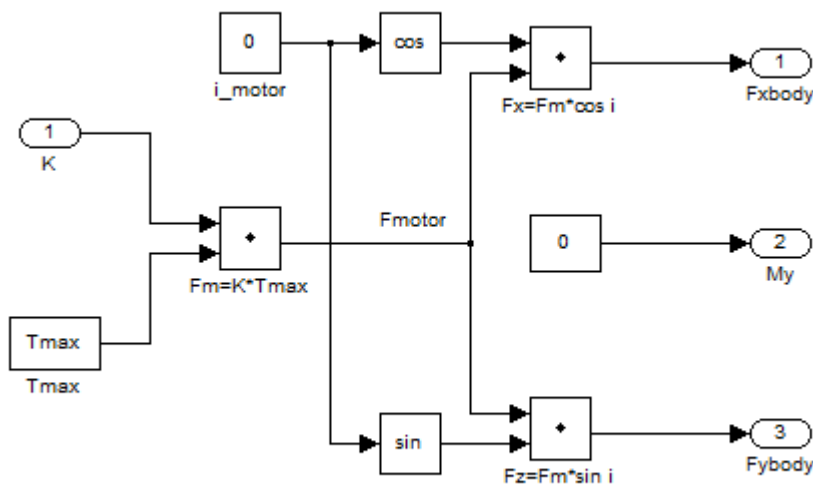
$F_{est}$ : Vector de salida compuesto por la resistencia ( $D$ ) en el eje  $X$ , el momento de cabeceo ( $M$ ) en el eje  $Y$ , y la sustentación ( $L$ ) en el eje  $Z$ , que forman las fuerzas aerodinámicas del estabilizador. Todas ellas en ejes cuerpo.

$F_{fusel}$ : Vector de salida compuesto por la resistencia ( $D$ ) en el eje  $X$ , el momento de cabeceo ( $M$ ) en el eje  $Y$ , y la sustentación ( $L$ ) en el eje  $Z$ , que forman las fuerzas aerodinámicas del fuselaje. Todas ellas en ejes cuerpo.

### 3.2.4 BLOQUE MOTOR

#### Descripción:

La fuerza de tracción es la fuerza de empuje generada por la hélice a través del motor. La fuerza es el resultado de la ecuación  $F_m = k \cdot T_{\max}$ . Además la fuerza se descompone según el coeficiente  $i$  que depende de la alineación del eje del motor/hélice con el eje horizontal del aeroplano. Para nuestro modelo, al estar alineados,  $i = 0$ , quedando un diseño así:



#### Parámetros de entrada:

$k$ : Coeficiente que indica el porcentaje de tracción máxima

$T_{\max}(N)$ : Tracción máxima que es capaz de producir el motor

#### Parámetros de salida:

$F_{xbody}(N)$ : Es la fuerza de tracción a la que esta sometida el avión a lo largo del eje X, en ejes cuerpo.

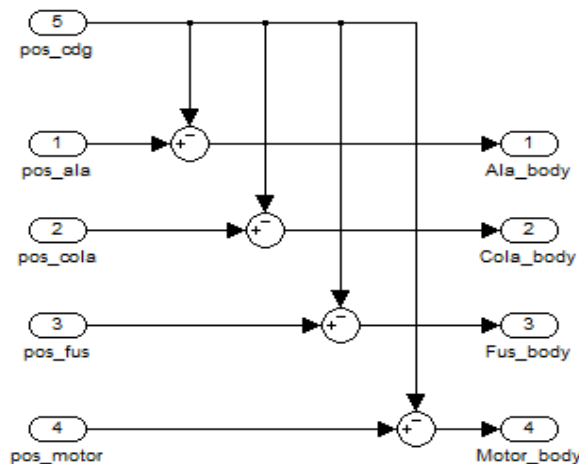
$M_y(N \cdot m)$ : Es el momento producido por el motor en el avión en el eje Y, pero en este caso será igual a cero, ya que se desprecian los momentos giroscópicos producidos.

$F_{zbody}(N)$ : Es la fuerza de tracción a la que esta sometida el avión a lo largo del eje Z, en ejes cuerpo.

### 3.2.5 BLOQUE CENTRADO

#### Descripción:

Como la geometría de los distintos elementos viene dada respecto a un punto dado, para poder sumar las fuerzas y momentos en cada uno, es imprescindible referir cada elemento a un mismo punto. El bloque de centrado se encarga de situar cada parte respecto al centro de gravedad del aeroplano, en ejes cuerpo, para posteriormente poder agrupar las fuerzas creadas en cada elemento.



#### Parámetros de entrada:

**`pos_ala`**: Posición geométrica del centro de aplicación de las alas.

**`pos_cola`**: Posición geométrica del centro de aplicación de la cola.

**`pos_fuselaje`**: Posición geométrica del centro de aplicación del fuselaje.

**`pos_motor`**: Posición geométrica del centro de aplicación del motor.

**`pos_cdg`**: Posición del centro de gravedad del aeroplano.

#### Parámetros de salida:

**`Ala_body`**: Posición de las alas respecto al centro de gravedad en ejes cuerpo.

**`Cola_body`**: Posición de la cola respecto al centro de gravedad en ejes cuerpo.

**`Fus_body`**: Posición del fuselaje respecto al centro de gravedad en ejes cuerpo.

**`Motor_body`**: Posición del motor respecto al centro de gravedad en ejes cuerpo.

### 3.2.6 BLOQUE SUMADOR FUERZAS

#### Descripción:

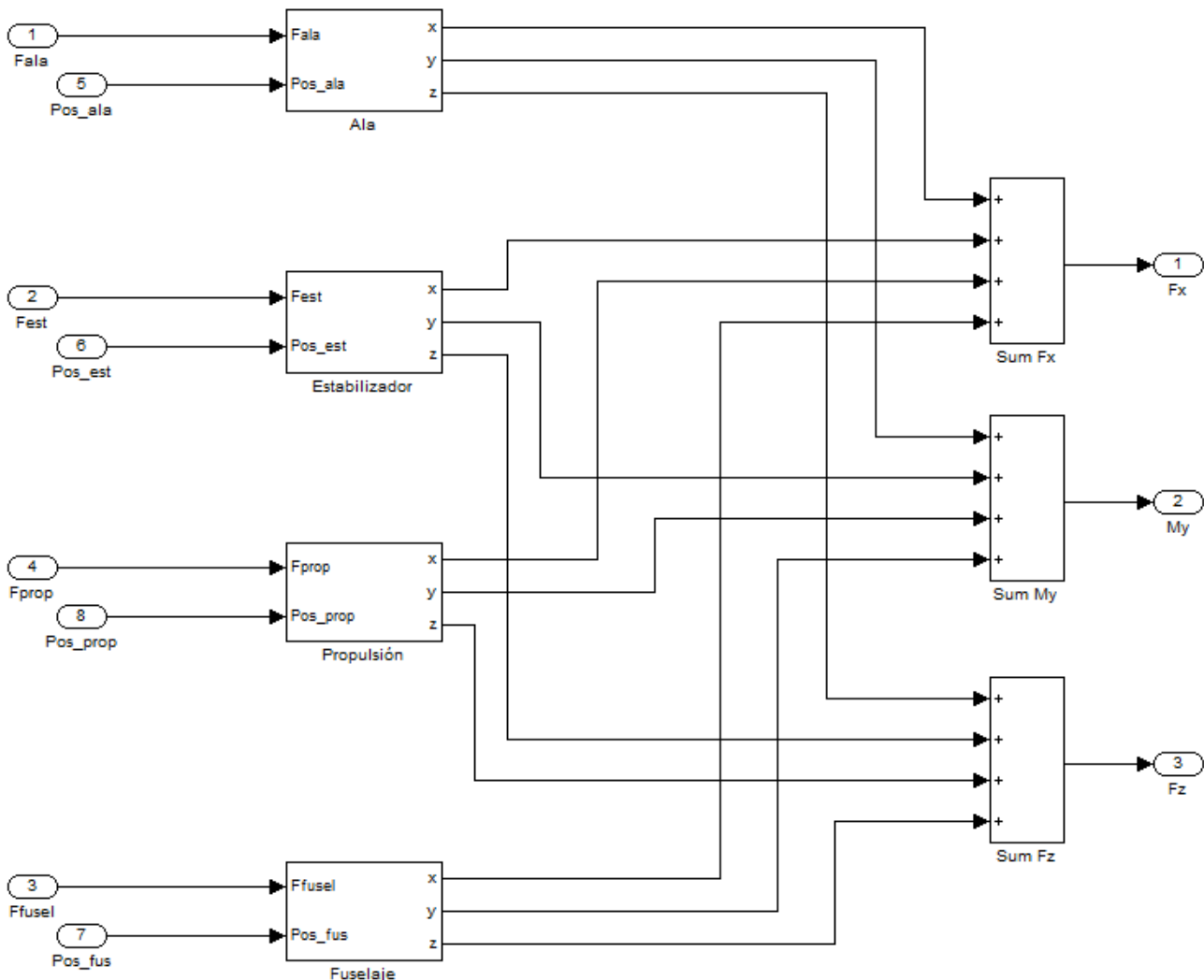
El sumador de fuerzas es el bloque que se encarga de obtener la suma de todas las fuerzas y momentos en los distintos elementos del avión. Las partes que distinguimos del aeroplano que están sometidas a fuerzas exteriores las dividimos en alas, fuselaje, estabilizador y la proporcionada por el motor. Cada una de las partes está sometida a distintas fuerzas, que agrupamos para aplicarlas al centro de gravedad de cada elemento.

Las fuerzas de cada elemento se suman individualmente a lo largo de los ejes X y Z.

Por otro lado, en la suma de momentos, hay que tener en cuenta el punto de aplicación de las distintas fuerzas, así como los momentos que se transmitan. Para hallar el momento total en un punto B, transmitiendo fuerzas desde un punto A, usamos la siguiente expresión:

$$\sum M_B = \sum M_A + r_{AB} \times F_B$$

Donde  $r_{AB} \times F_B$  es el producto vectorial entre el vector desplazamiento entre A y B, y la fuerza total aplicada en el punto B.



**Parámetros de entrada:**

Las entradas de este bloque son las distintas fuerzas que sufre el avión, y que están divididas en las fuerzas sobre el ala, el estabilizador, el motor (la tracción) y el fuselaje. Están definidas como  $F_{ala}$ ,  $F_{est}$ ,  $F_{prop}$  y  $F_{fusel}$  respectivamente, y son vectores compuestos por la fuerza en el eje  $X$ , el momento en el eje  $Y$  y la fuerza en el eje  $Z$  de cada elemento.

Para poder hallar las fuerzas totales a las que está sometido el avión también necesitamos como parámetro de entrada las posiciones de los elementos descritos, para poder transmitir los distintos momentos y fuerzas. Vienen definidos como  $Pos_{ala}$ ,  $Pos_{est}$ ,  $Pos_{prop}$  y  $Pos_{fus}$  y definen la posición de cada elemento respecto al centro de gravedad del avión. Son vectores compuestos por la distancia en el eje  $X$ , en el eje  $Y$  y en el eje  $Z$  de cada elemento al centro de gravedad.

**Parámetros de salida:**

Una vez sumados todas las fuerzas y momentos, como resultado tenemos las salidas del bloque, que son  $F_x$ , la fuerza total ejercida sobre el avión a lo largo del eje  $X$ ;  $M_y$ , el momento total al que está sometido el avión a lo largo del eje  $Y$ ; y  $F_z$ , la fuerza total ejercida sobre el avión a lo largo del eje  $Z$ .

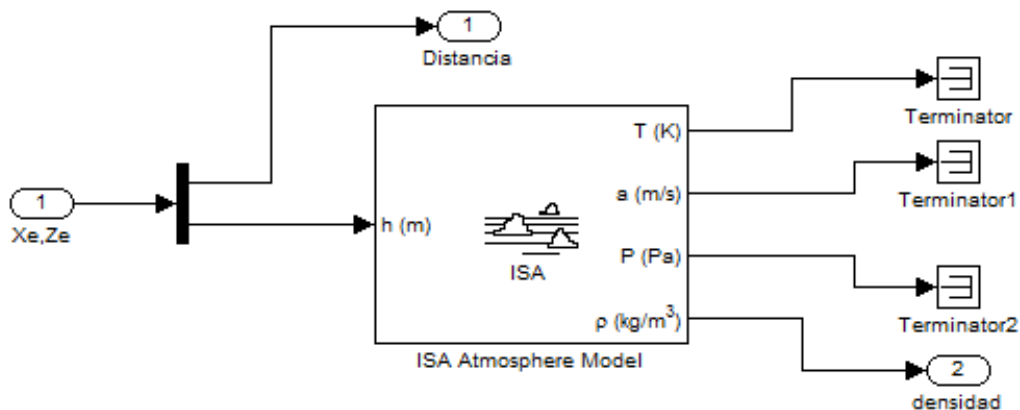
### 3.2.7 BLOQUE ATMÓSFERA ISA

#### Descripción:

Como las condiciones atmosféricas, presión, densidad y temperatura, para una altitud determinada, no tienen siempre los mismos valores, siendo prácticamente imposible que existan el mismo conjunto de condiciones en 2 días diferentes, es necesario tener unas condiciones estándar de referencia, respecto a las cuales se den los resultados de las actuaciones de un avión o de pruebas aerodinámicas, con el fin de tener un criterio común de comparación con resultados similares de otros aviones o pruebas.

Este conjunto de condiciones de referencia estándar, o tipo, se conoce con el nombre de Atmosfera Tipo Internacional (ISA) de OACI (International Civil Aviation Organization) y se define como aquella que a un nivel del mar tiene una temperatura de 15 °C y una presión de 760 mm de mercurio, disminuyendo la temperatura a razón de 6,5 °C por cada kilómetro de altitud que se ascienda, hasta los 11 km.

En este caso Simulink incorpora un bloque que proporciona todos los datos en función de la altura. En nuestro análisis, lo utilizamos para obtener la densidad del aire:



#### Parámetros de entrada:

$X_e, Z_e (m)$ : Indican la localización del avión en ejes tierra. 'X<sub>e</sub>' indica la distancia en el eje X, mientras que 'Z<sub>e</sub>' indica la altura en el eje Z, que entra en el bloque como 'h'.

#### Parámetros de salida:

$\rho (kg/m^3)$ : Indica la densidad del aire a la altura determinada.

El resto de salidas las terminamos con la salida *Terminator* para cerrarlas, ya que no las vamos a utilizar durante el análisis.

## 4 . UTILIZACIÓN DEL MODELO DINÁMICO

### 4.1 Punto de equilibrio

El punto de equilibrio de la aeronave es el estado en el cual las aceleraciones angulares y lineales a las que esta sometida, son igual a cero. Es decir, el punto de equilibrio aparece cuando las entradas de la aeronave consiguen que las aceleraciones totales sean nulas.

Para ello  $u$ ,  $w$ ,  $q$  deben ser constantes en el movimiento:

$$u = cte \rightarrow \dot{u} = 0$$

$$w = cte \rightarrow \dot{w} = 0$$

$$q = cte \rightarrow \dot{q} = 0$$

Se consigue determinar este punto de equilibrio porque SIMULINK realiza iteraciones siguiendo un algoritmo de optimización hasta conseguir que el término de aceleración en cada ecuación desaparezca.

Los puntos de equilibrio que se buscan son los que corresponden a un vuelo rectilíneo horizontal. Esto es, la aeronave ni gana ni pierde altura. Esto implica que el ángulo de asiento de la aeronave  $\theta$  tiene que ser igual al ángulo de ataque  $\alpha$ . Esta tercera condición determina la unicidad de solución del punto de equilibrio.

## 4.2 Cálculo de maniobras

Una vez conocidos distintos estados de la aeronave, se van a simular maniobras de vuelo para analizar cómo se comporta el aeroplano.

Para mover el avión sólo disponemos de los mandos principales, que en nuestro análisis son el ángulo de deflexión de cola  $\delta$  y la tracción del motor transmitida por el coeficiente  $k$ .

SIMULINK proporciona la posibilidad de introducir las variables de entrada como se desee, variando su evolución con el tiempo. Así se tiene la posibilidad de simular una maniobra tal y como se haría con los dispositivos reales de mandos de control.

Después deberemos estudiar los resultados obtenidos, analizando las distintas variables de salida como son la altura, la velocidad, el ángulo de ataque  $\alpha$  o el ángulo de planeo. MatLab proporciona el espacio de trabajo adecuado para examinar e interpretar los resultados comprobando cómo se comporta la aeronave.



# 5 . APLICACIÓN

## 5.1 Definición de parámetros

	Posición geométrica (m)
Centro de gravedad	( 0.4 , 0 , 0 )
Alas	( 0 , 0 , 0 )
Fuselaje	( 0 , 0 , 0 )
Cola	( 3.420 , 0 , -0.607 )
Motor	( 3.600 , 0 , -0.264 )

	Coeficientes
Avión	$m = 900kg$
	$I_y = 10kg \cdot m^2$
Alas	$C_L = 1.5836\alpha + 0.1186$
	$C_D = 0.7181\alpha^2 + 0.0979\alpha + 0.0276$
	$C_M = 0.5872\alpha^3 + 0.0428\alpha^2 - 0.2885\alpha - 0.0174$
	$S = 3.3^2$
	$c = 3.3$
Fuselaje	$C_L = 0.6231\alpha - 0.0102$
	$C_D = 0.6731\alpha^3 + 0.4036\alpha^2 - 0.0463\alpha + 0.0154$
	$C_M = 0.0355\alpha^2 - 0.16\alpha + 0.0035$
	$S = 3.3^2$
	$c = 3.3$
Cola	$C_L = 1.4\delta + 2.1292\alpha - 0.078$
	$C_D = 0.005\alpha$
	$C_M = 0$
	$S = 2.7538$
	$c = 3.3$
Motor	$T_{\max} = 900N$

## 5.2 Vuelo rectilíneo a distintas alturas

Para establecer un vuelo rectilíneo a distintas alturas, SIMULINK halla los puntos de equilibrio imponiendo las variables que restringen el movimiento al estado que queremos llegar. Para ello lo más importante es imponer un ángulo de planeo igual a cero, que obliga a que el vuelo sea rectilíneo, y aplicar la altura que queremos alcanzar, liberando las variables que queremos obtener para que el punto que buscamos tenga solución.

En este caso queremos hallar las velocidades máximas, mínimas y de máximo alcance del aeroplano a distintas alturas.

### 5.2.1 VELOCIDAD MÍNIMA Y MÁXIMA

Para obtener la velocidad mínima del aeroplano debemos tener en cuenta varios factores. El primero y más importante es el ángulo de ataque del ala  $\alpha$ . Ya que este ángulo es el que provoca la sustentación del ala. A una misma velocidad, a mayor ángulo, mayor sustentación, sin embargo esto ocurre hasta un ángulo concreto. A partir de este ángulo el ala entra en pérdida y deja de proporcionar la fuerza para sustentar el avión. Con este dato podemos deducir que la velocidad mínima del avión aparecerá cuando el ala entre en pérdida, que viene dado por el  $\alpha_{\max}$  y es independiente de cada modelo, ya que cada avión tiene su  $\alpha_{\max}$  característica. En este caso vamos a suponer un  $\alpha_{\max} = 15^\circ$ .

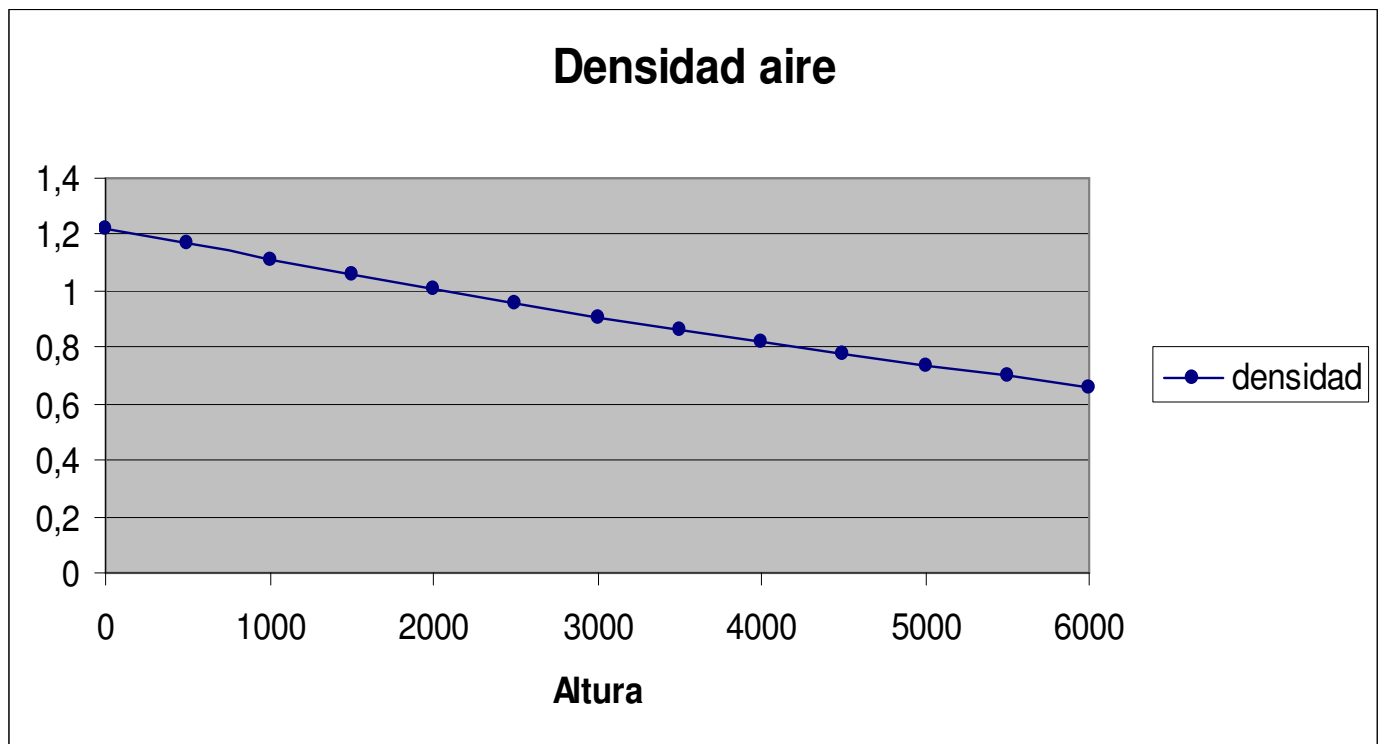
Sin embargo también hay que tener en cuenta que puede llegar un momento en el que el motor no tenga la fuerza suficiente para mantener una velocidad constante para un alto ángulo de ataque, con lo que también deberemos restringir  $k=1$ , que es la máxima tracción que puede transmitir el motor. La velocidad mínima será la que alcance antes el ángulo de pérdida  $\alpha_{\max} = 15^\circ$  o  $k=1$ .

Para obtener la velocidad máxima del aeroplano debemos obtener la máxima velocidad posible alcanzada con la máxima tracción del motor, que será igual a  $k=1$ .

Además estas velocidades varían dependiendo de la altura, ya que la densidad del aire  $\rho$  influye determinantemente en la velocidad, y ésta a su vez, varía dependiendo de la altura. Por lo tanto vamos a mostrar las distintas velocidades a  $0m$ ,  $1000m$  y  $5000m$  de altura para ver cómo influye.

Aquí se muestra una gráfica de cómo cambia la densidad  $\rho$  con la altura:

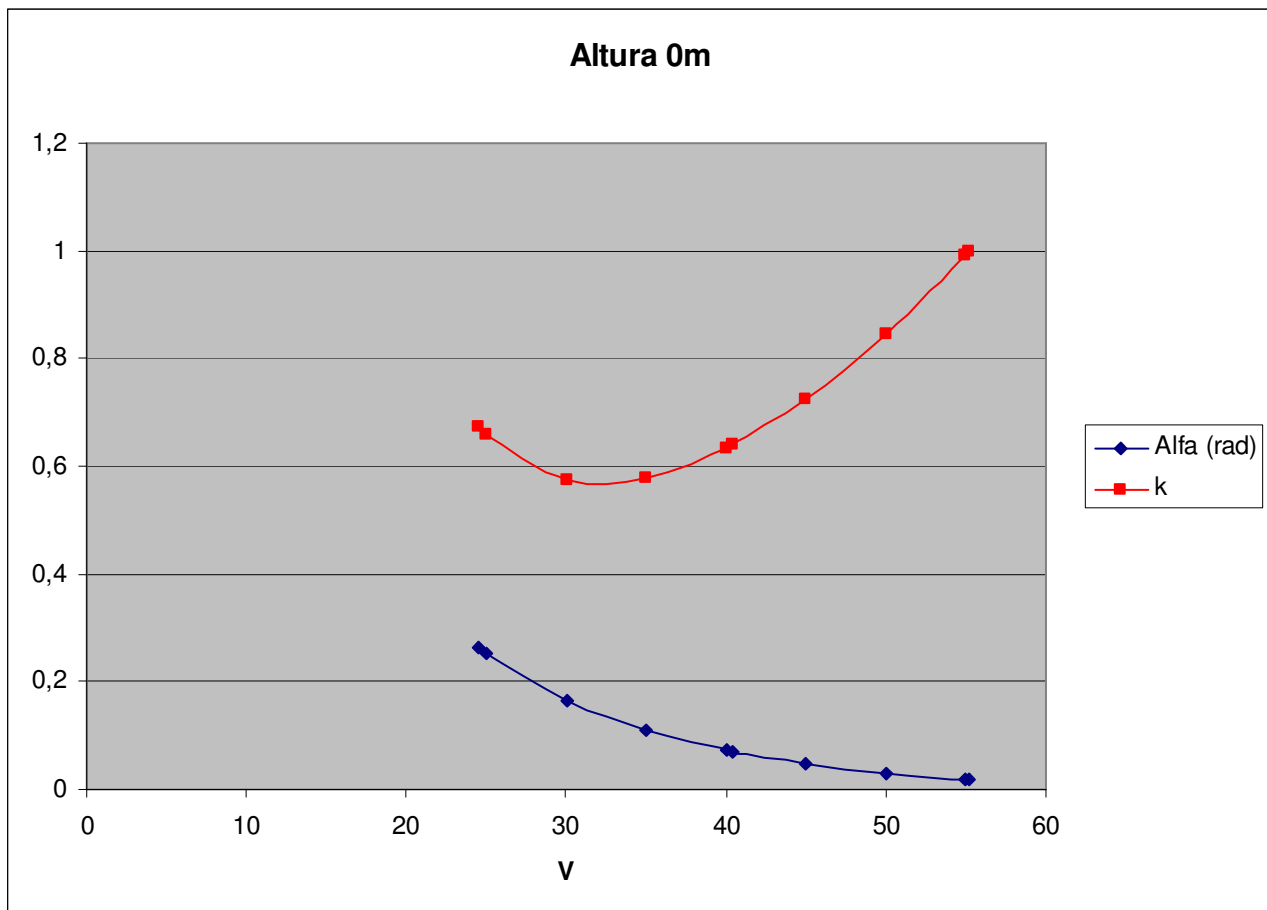
Altura (m)	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )
0	1,225
500	1,1673
1000	1,1116
1500	1,0581
2000	1,0065
2500	0,95686
3000	0,90912
3500	0,86323
4000	0,81913
4500	0,77677
5000	0,73612
5500	0,69711
6000	0,6597



De estos datos se puede sacar la conclusión de que cuanto más alto vuele el avión, mayor velocidad podrá alcanzar. Eso es debido a que como la densidad del aire será menor, la resistencia a la que se verá sometido también será menor, ya que las fuerzas aerodinámicas dependen directamente de la densidad del aire.

Estos son los datos obtenidos para una altura de  $0m$ :

Delta	Alfa (rad)	Alfa (grados)	k	V
0,37438	0,2618	15	0,67225	24,5141
0,36381	0,25084	14,3720397	0,65729	25
0,28367	0,16411	9,40278839	0,57374	30
0,23649	0,10961	6,28017571	0,57685	35
0,20671	0,073551	4,21415202	0,63284	40
0,20478	0,071157	4,07698625	0,63921	40,41
0,18679	0,048582	2,78353705	0,72563	45
0,17283	0,03062	1,75439267	0,84694	50
0,16268	0,017284	0,99029794	0,99224	55
0,16225	0,016714	0,95763942	1	55,248



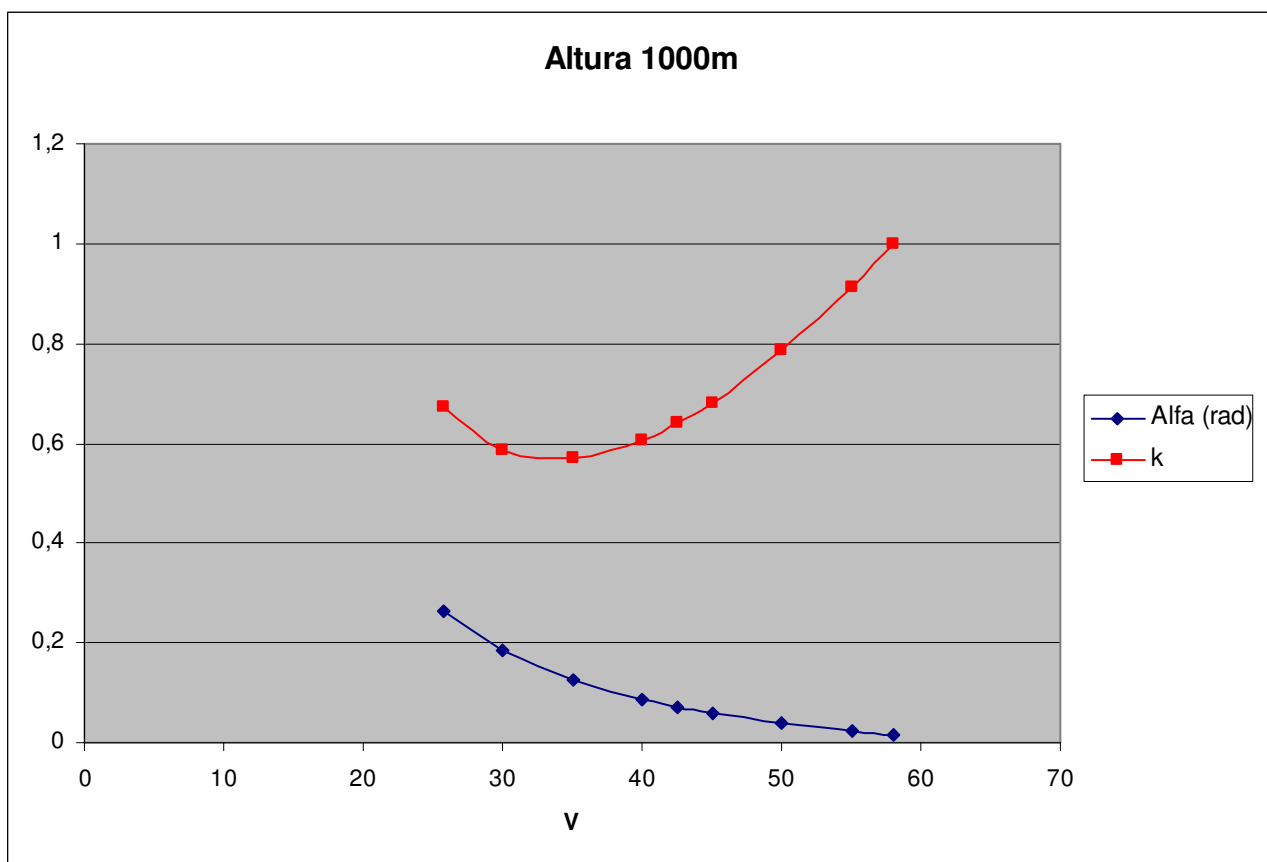
Velocidades obtenidas a  $0m$  de altura:

$$V_{\min} = 24,5141 m/s$$

$$V_{\max} = 55.248 m/s$$

Estos son los datos obtenidos para una altura de 1000m:

Delta	Alfa (rad)	Alfa (grados)	k	V
0,37438	0,2618	15	0,67225	25,7337
0,3021	0,18466	10,5802139	0,58649	30
0,24968	0,12514	7,16997708	0,5688	35
0,21654	0,085614	4,9053094	0,60665	40
0,20429	0,070559	4,04272345	0,64087	42,53
0,19438	0,058189	3,33397632	0,6822	45
0,17887	0,038438	2,20233002	0,78624	50
0,16759	0,023764	1,36157372	0,9137	55
0,16225	0,016713	0,95758212	1	57,997



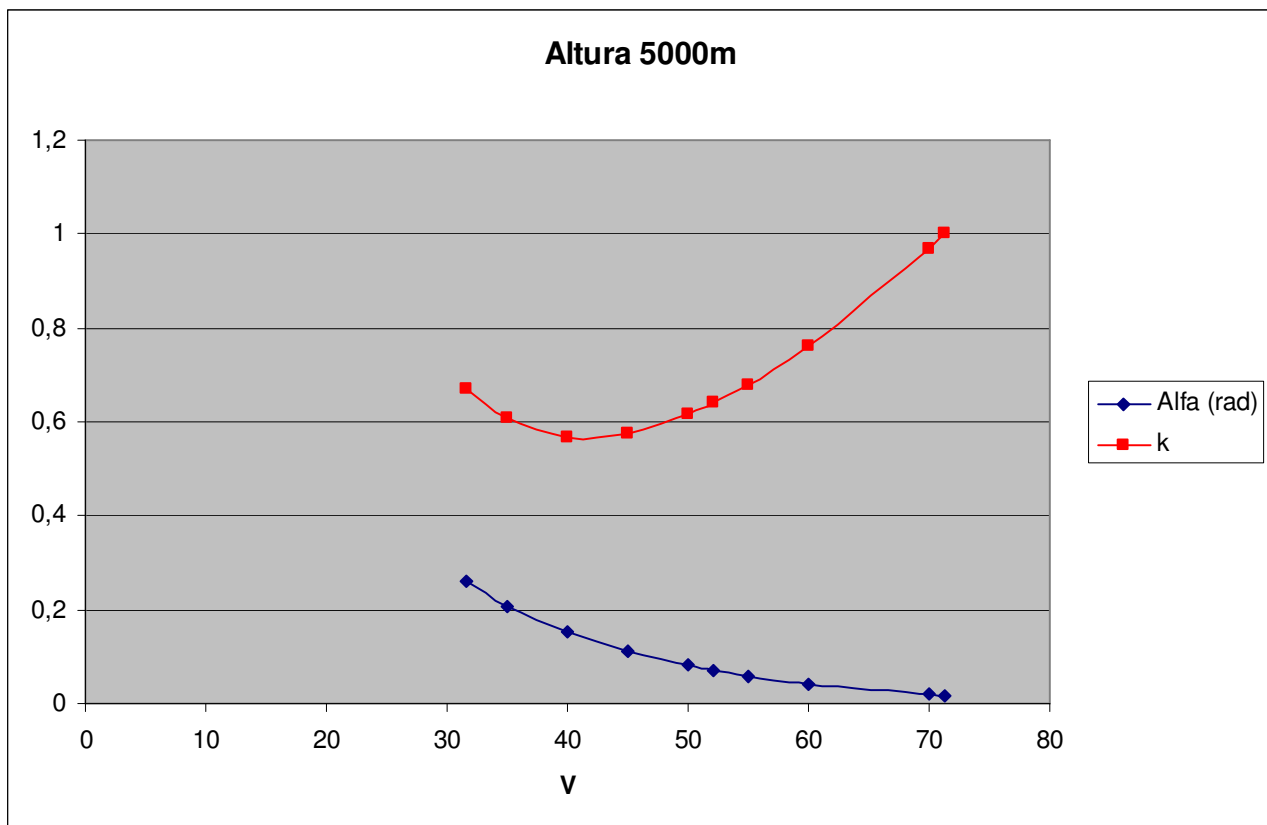
Velocidades obtenidas a 1000m de altura:

$$V_{\min} = 25,7337 \text{ m/s}$$

$$V_{\max} = 57.997 \text{ m/s}$$

Estos son los datos obtenidos para una altura de 5000m:

Delta	Alfa (rad)	Alfa (grados)	k	V
0,37438	0,2618	15	0,67225	31,6236
0,32404	0,20863	11,9535905	0,60765	35
0,27219	0,15111	8,657945	0,56887	40
0,23736	0,11063	6,33861727	0,57609	45
0,21297	0,081251	4,6553285	0,61507	50
0,2047	0,071066	4,07177235	0,63947	52,15
0,19529	0,059321	3,39883499	0,6778	55
0,18206	0,042548	2,43781513	0,75954	60
0,16399	0,019023	1,08993506	0,96943	70
0,16225	0,016715	0,95769672	1	71,27



Velocidades obtenidas a 5000m de altura:

$$V_{\min} = 31,6236 \text{ m/s}$$

$$V_{\max} = 71.27 \text{ m/s}$$

### 5.2.2 VELOCIDAD DE MÁXIMO ALCANCE

Es importante no confundir la velocidad máxima con la velocidad de máximo alcance. La velocidad máxima se alcanza cuando obtenemos toda la potencia del motor. Sin embargo, a esa velocidad, el gasto de combustible es muy elevado y la autonomía de la aeronave es menor. Por lo tanto, un dato de mucho interés es hallar la velocidad para la cual el avión puede llegar más lejos, llamada *velocidad de máximo alcance*.

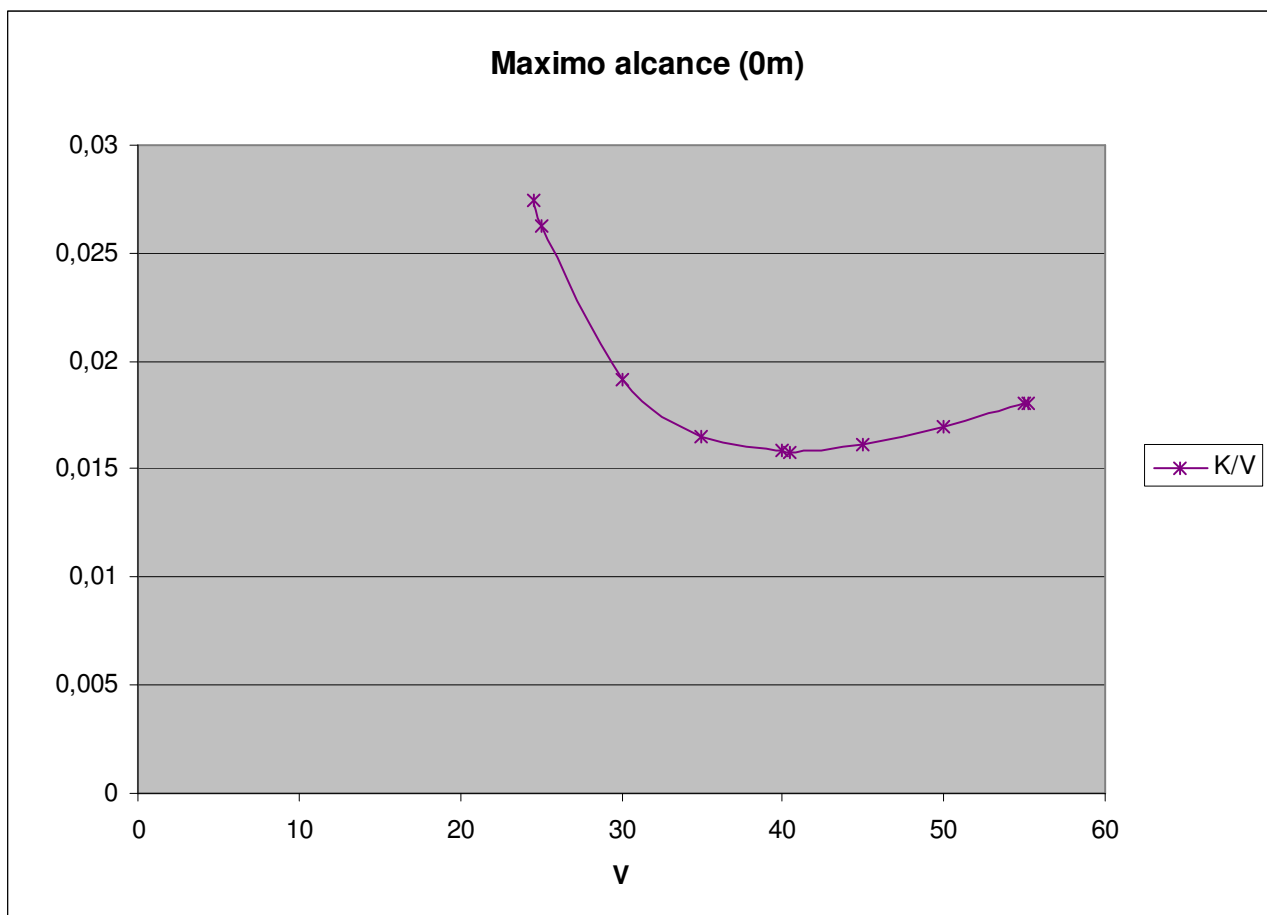
La curva  $k/V$  muestra que a una altura dada, cuanto mayor sea la velocidad, mayor va a ser la resistencia, lo que implica una mayor tracción y un ángulo de ataque bajo, lo que forma una curva creciente hacia la derecha. Sin embargo, cuanto menor es la velocidad, mayor debe ser el ángulo de ataque para poder seguir produciendo la sustentación. Lo que implica que llega un momento en que se tiene que incrementar la tracción mientras aumenta el ángulo de ataque, aunque la velocidad disminuya. Esto significa que a partir de una velocidad dada también es creciente hacia la izquierda, apareciendo un punto mínimo en la curva.

En este caso, la velocidad de máximo alcance se obtiene al hallar la que corresponde a este punto mínimo de la curva  $k/V$ , que proporciona el equilibrio entre velocidad y autonomía de vuelo.

Como en el apartado anterior, esta velocidad también varía según la altura, porque depende de la misma forma de la densidad del aire.

Estos son los datos para una altura de 0m:

Delta	Alfa (rad)	Alfa (grados)	k	V	K/V
0,37438	0,2618	15	0,67225	24,5141	0,02742299
0,36381	0,25084	14,3720397	0,65729	25	0,0262916
0,28367	0,16411	9,40278839	0,57374	30	0,01912467
0,23649	0,10961	6,28017571	0,57685	35	0,01648143
0,20671	0,073551	4,21415202	0,63284	40	0,015821
0,20478	0,071157	4,07698625	0,63921	40,41	0,01581811
0,18679	0,048582	2,78353705	0,72563	45	0,01612511
0,17283	0,03062	1,75439267	0,84694	50	0,0169388
0,16268	0,017284	0,99029794	0,99224	55	0,01804073
0,16225	0,016714	0,95763942	1	55,248	0,0181002



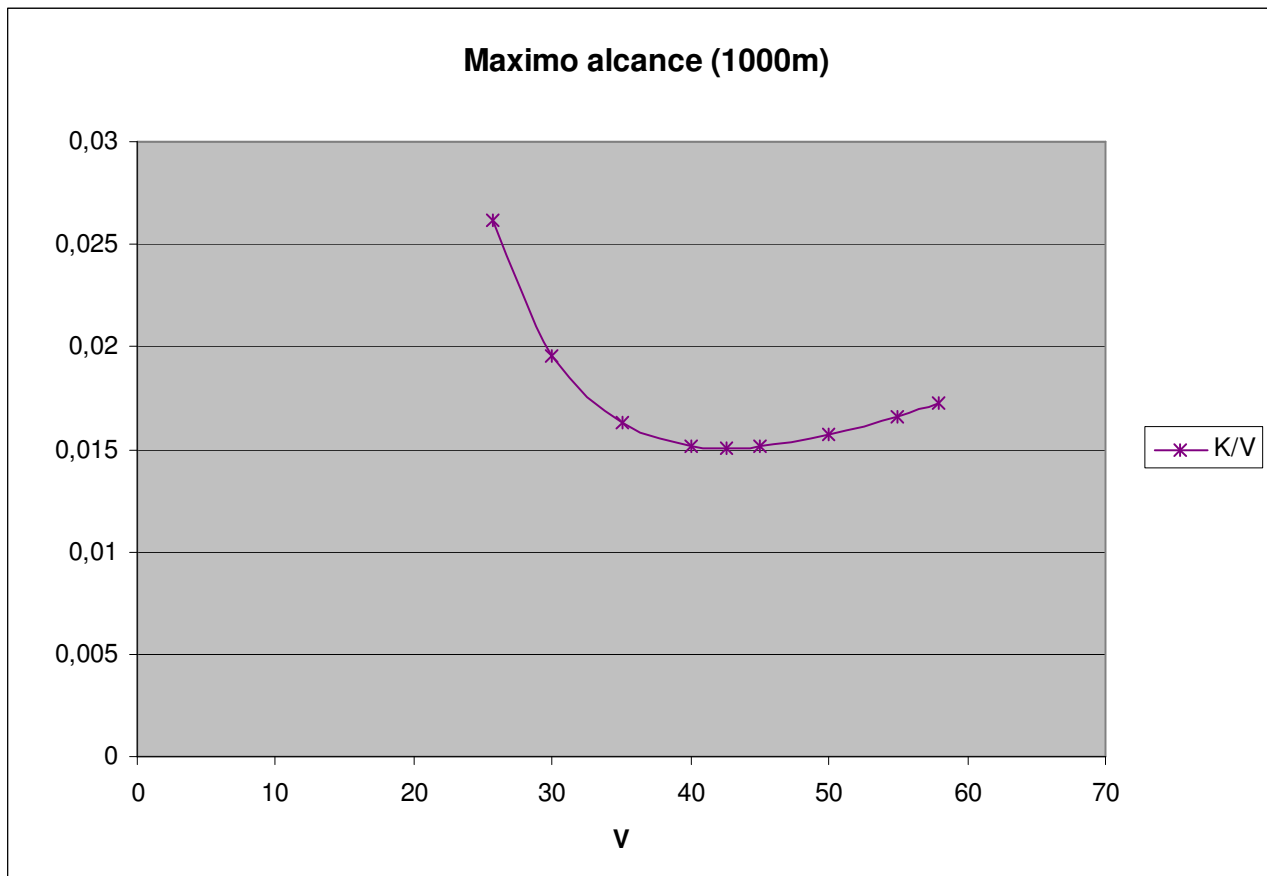
Velocidad de máximo alcance a 0m de altura:

$$V_{\text{max alcance}} = 40.41 \text{ m/s}$$



Estos son los datos para una altura de 1000m:

Delta	Alfa (rad)	Alfa (grados)	k	V	K/V
0,37438	0,2618	15	0,67225	25,7337	0,02612333
0,3021	0,18466	10,5802139	0,58649	30	0,01954967
0,24968	0,12514	7,16997708	0,5688	35	0,01625143
0,21654	0,085614	4,9053094	0,60665	40	0,01516625
0,20429	0,070559	4,04272345	0,64087	42,53	0,01506866
0,19438	0,058189	3,33397632	0,6822	45	0,01516
0,17887	0,038438	2,20233002	0,78624	50	0,0157248
0,16759	0,023764	1,36157372	0,9137	55	0,01661273
0,16225	0,016713	0,95758212	1	57,997	0,01724227

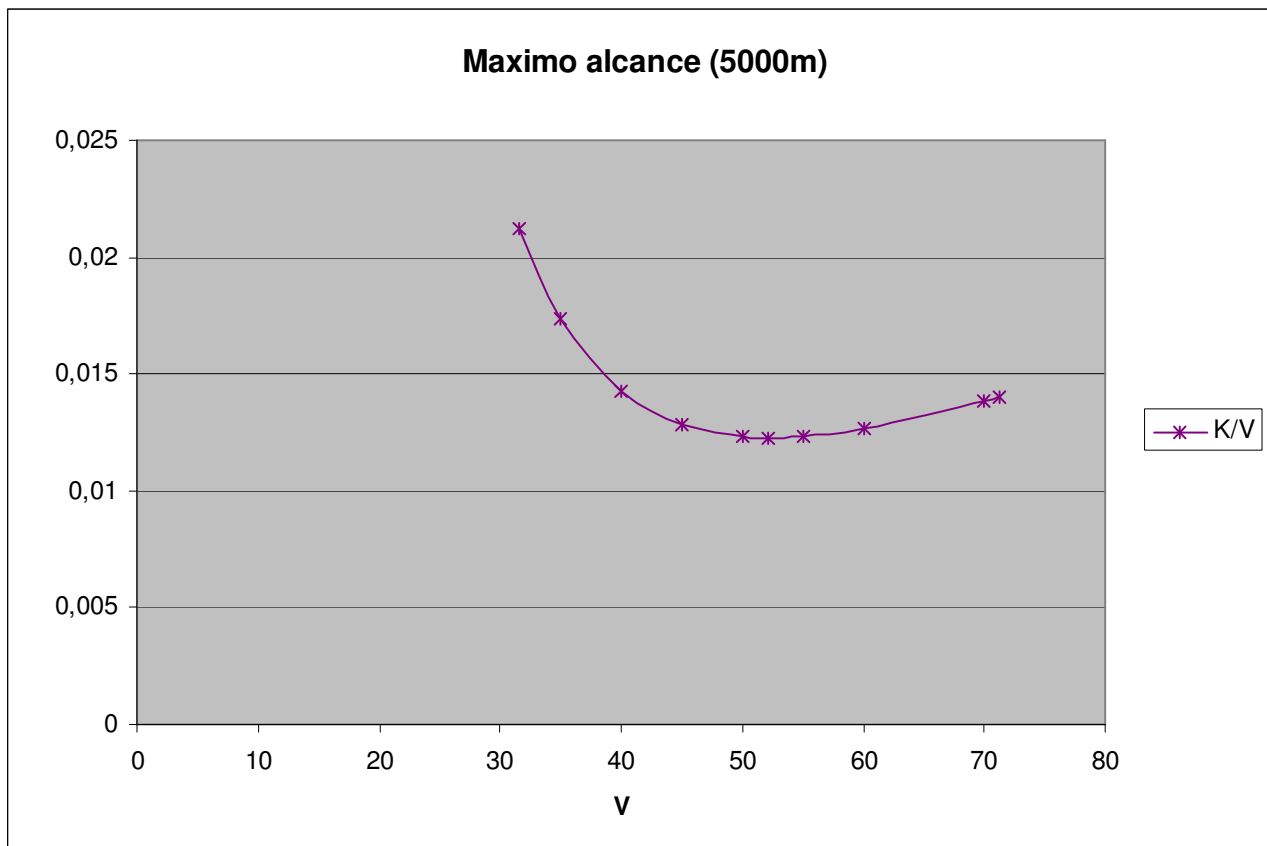


Velocidad de máximo alcance a 1000m de altura:

$$V_{\text{max alcance}} = 42.53 \text{ m/s}$$

Estos son los datos para una altura de 5000m:

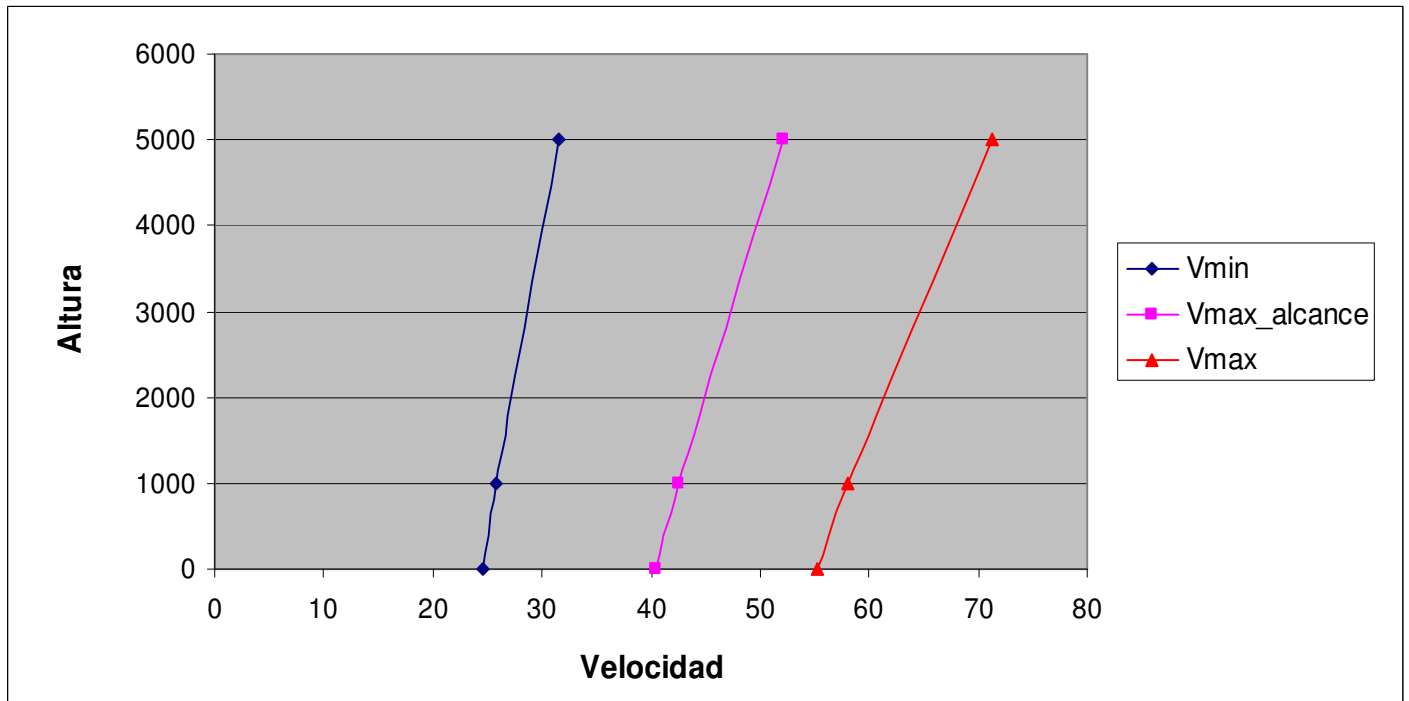
Delta	Alfa (rad)	Alfa (grados)	k	V	K/V
0,37438	0,2618	15	0,67225	31,6236	0,02125786
0,32404	0,20863	11,9535905	0,60765	35	0,01736143
0,27219	0,15111	8,657945	0,56887	40	0,01422175
0,23736	0,11063	6,33861727	0,57609	45	0,012802
0,21297	0,081251	4,6553285	0,61507	50	0,0123014
0,2047	0,071066	4,07177235	0,63947	52,15	0,01226213
0,19529	0,059321	3,39883499	0,6778	55	0,01232364
0,18206	0,042548	2,43781513	0,75954	60	0,012659
0,16399	0,019023	1,08993506	0,96943	70	0,013849
0,16225	0,016715	0,95769672	1	71,27	0,01403115



Velocidad de máximo alcance a 5000m de altura:

$$V_{\text{max alcance}} = 52.15 \text{ m/s}$$

La grafica siguiente muestra la evolución de todas las velocidades obtenidas dependiendo de la altura. Podemos destacar que el cambio significativo de densidad a 5000m de altura influye de manera notable en la velocidad del aeroplano:

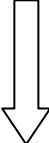


## 5.3 Simulación de maniobra de incremento de velocidad

En este apartado se va a simular una maniobra de incremento de velocidad a  $1000m$  de altura. Para ello se cuenta con los mandos de entrada. Se quiere aumentar la velocidad de  $30m/s$  a  $50m/s$ , de una forma controlada.

Para empezar se muestra el estado de inicio y el estado final al que se quiere llegar para comprobar el estado de las variables y poder alcanzar los estados deseados:

ALTURA  $1000m$

<b>V = 30 m/s</b>	$\delta = 0.3021 \text{ rad}$	$k = 0.58649$	$\alpha = 0.18466 \text{ rad}$
			
<b>V = 50 m/s</b>	$\delta = 0.17887 \text{ rad}$	$k = 0.78624$	$\alpha = 0.038438 \text{ rad}$

Se va a realizar la maniobra de incremento de velocidad de dos formas distintas, para comparar las reacciones del aeroplano. En ambos casos se realizará un cambio constante de los mandos en un periodo de tiempo, pero uno después de otro. En el primer caso cambiaremos primero el ángulo de deflexión de cola y luego aumentaremos la fuerza de tracción, mientras que el segundo caso haremos lo contrario.

En ambas maniobras el cambio de las entradas con los mandos se realizará durante  $10seg$  cada una, por lo que el primer paso es hallar la pendiente de la señal de entrada de ambos mandos para obtener los estados que queremos alcanzar en ese periodo de tiempo:

PENDIENTE  $\delta$

$$m_{\delta} = \frac{0.3021 - 0.17887}{0 - 10} = -0.012323$$

PENDIENTE  $k$

$$m_k = \frac{0.58649 - 0.78624}{0 - 10} = 0.019975$$

Para realizar la maniobra, hay que introducir las condiciones iniciales en el integrador, que conocemos del estado inicial:

Velocidad inicial $V_0$	30 m/s
Alfa inicial $\alpha_0$	0.18466 rad
Theta inicial $\theta_0$	0.18466 rad
Posición inicial $[x,z]$	[0 , 1000] m

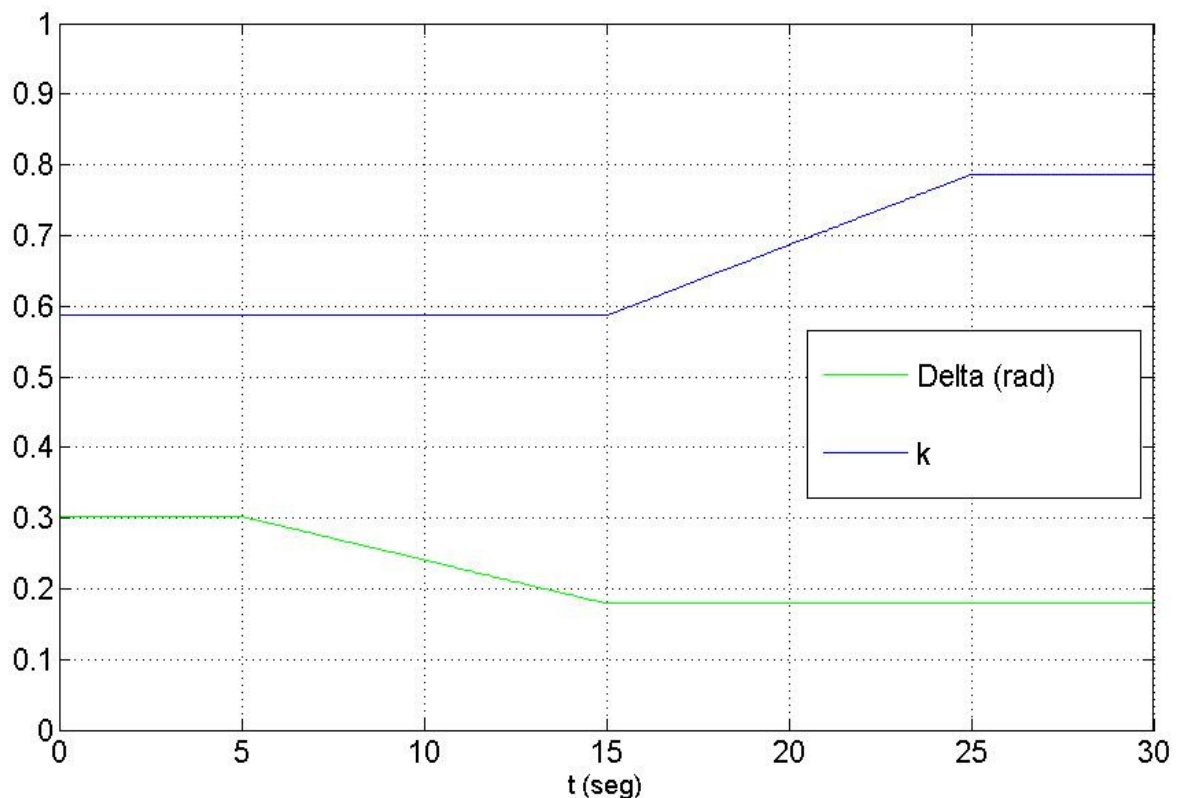
Y para asegurar que se empieza en un punto de equilibrio estable, se dejan 5 seg iniciales para comenzar la maniobra.

### 5.3.1 MANIOBRA 1

Se va a pasar del estado inicial de 30 m/s al estado final de 50m/s.

En este primer caso se empieza cambiando el ángulo del estabilizador  $\delta$  de 0.30212 rad a 0.17887 rad. Se va a hacer el cambio en una evolución de 10 seg de forma constante. Y después se realiza el aumento del coeficiente de tracción desde  $k=0.58649$  a  $k=0.78624$  en otros 10 seg y de la misma forma.

Se empieza la maniobra a los 5 seg. Ésta es la entrada de la maniobra 1 donde se varían los mandos durante 20 seg:

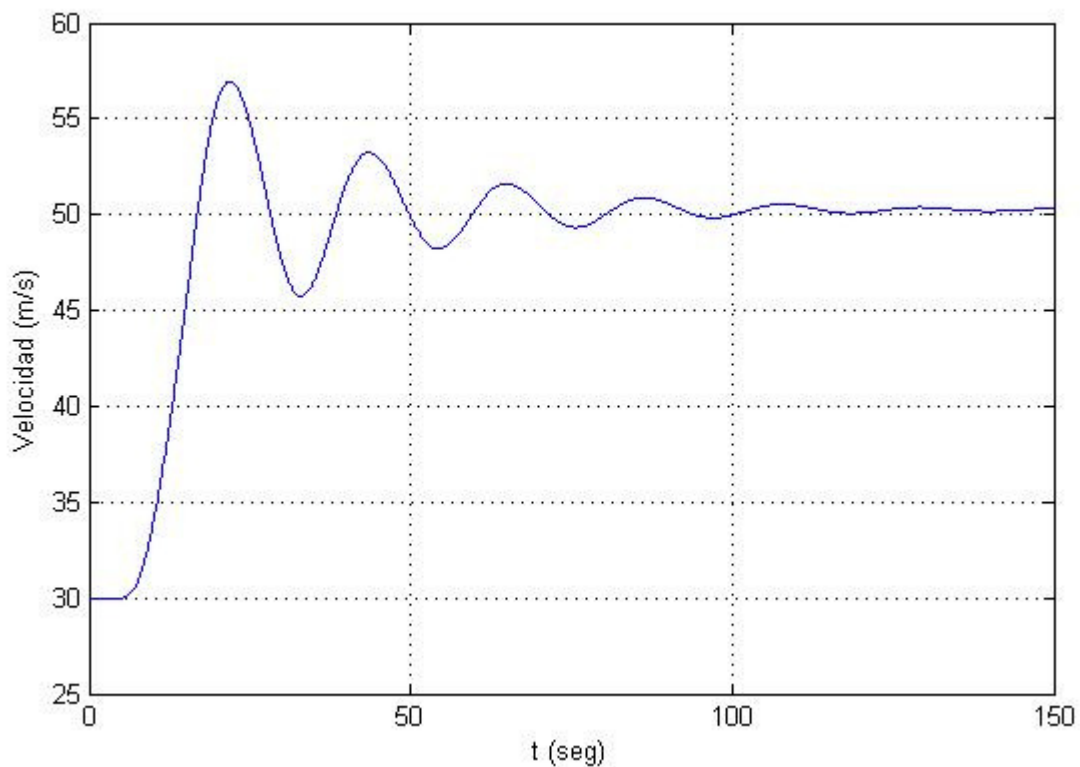


A continuación se observan las distintas salidas que muestran como reacciona el avión a esta primera maniobra.

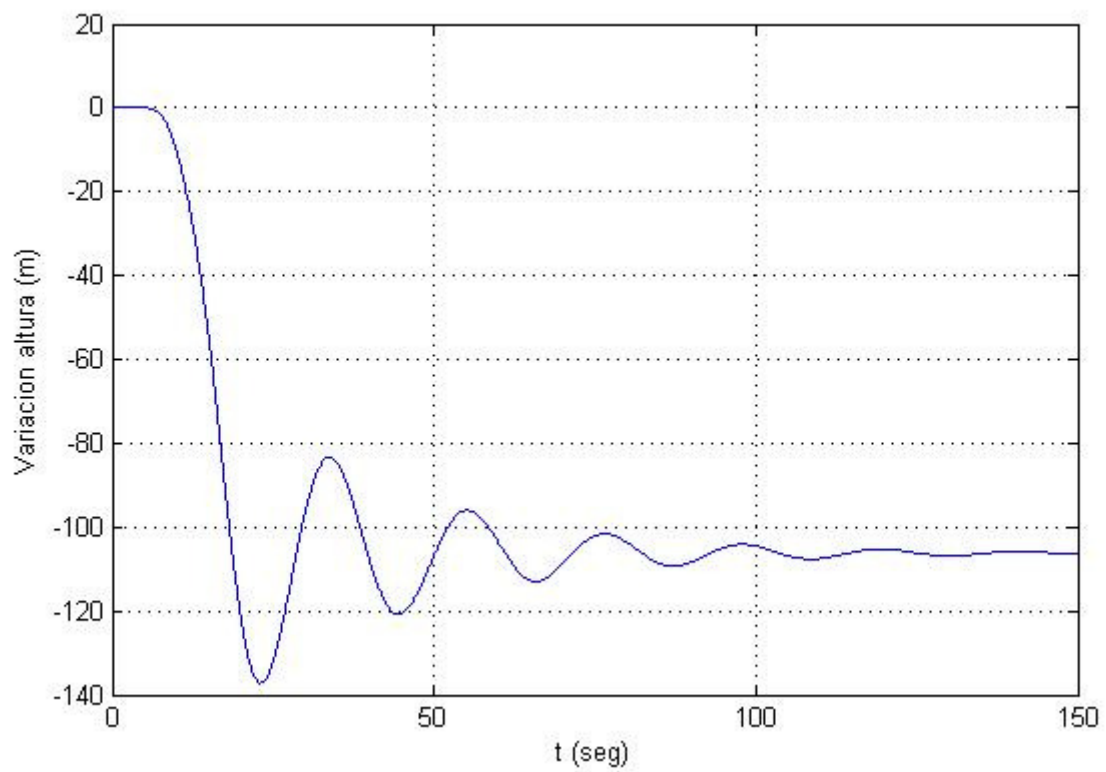
Para ello se realiza una simulación de *150 seg* con SIMULINK para que el aeroplano se estabilice alcanzando una velocidad y una altura estable.

Las variables más destacadas que muestran la evolución del vuelo durante la maniobra 1 son las siguientes:

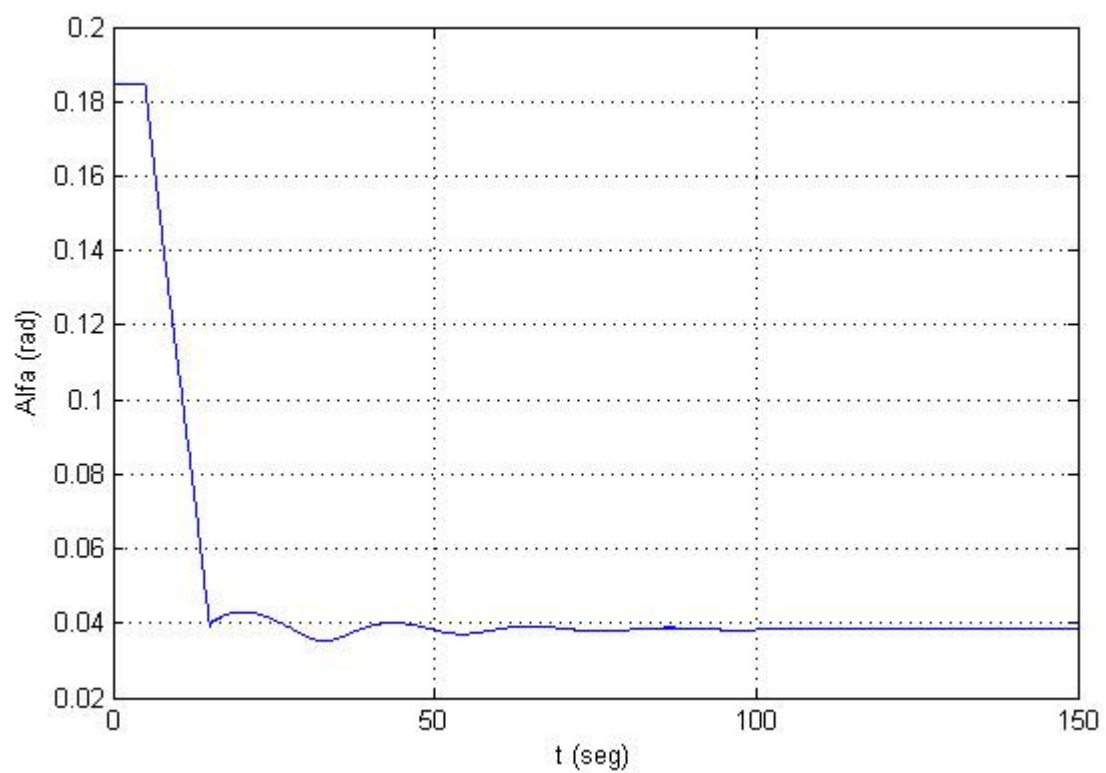
### VELOCIDAD



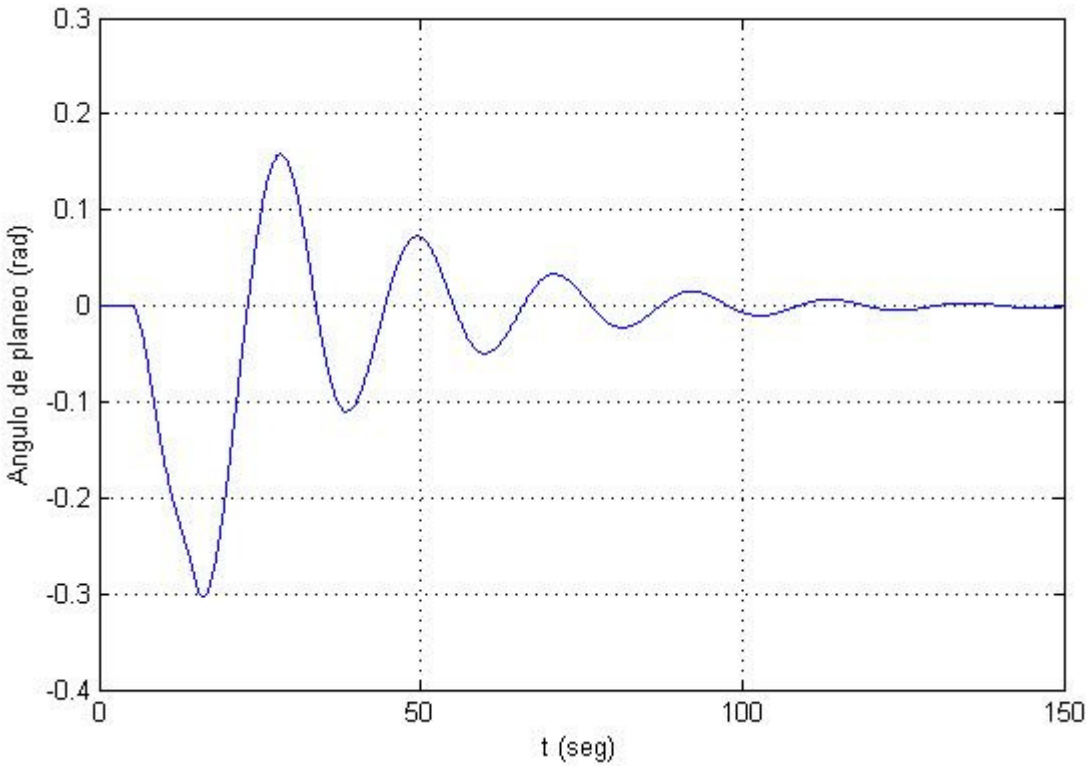
### VARIACIÓN ALTURA



### ÁNGULO DE ATAQUE $\alpha$



ÁNGULO DE PLANEEO



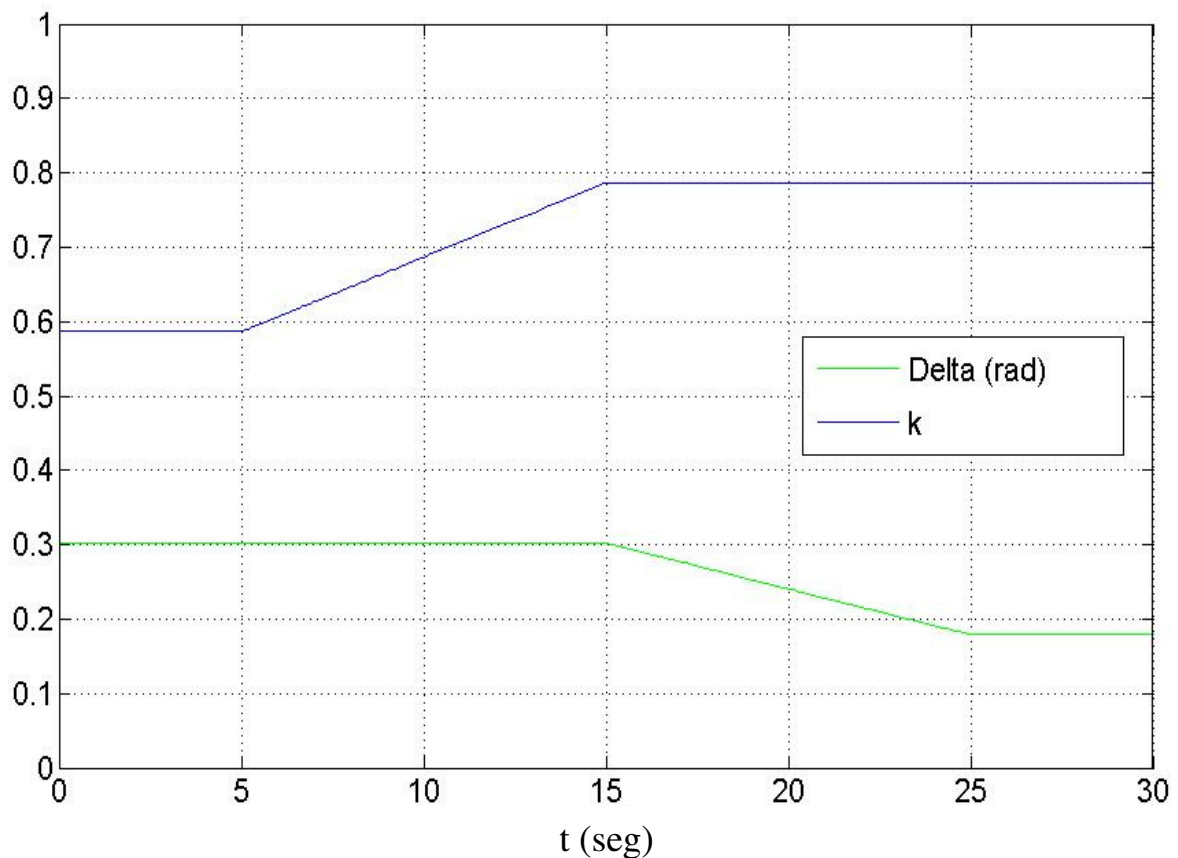


### 5.3.2 MANIOBRA 2

Se va a pasar del estado inicial de  $30\text{ m/s}$  al estado final de  $50\text{ m/s}$ .

En el segundo caso se va a empezar cambiando el coeficiente de tracción desde  $k=0.58649$  a  $k=0.78624$ , haciendo el cambio en una evolución de  $10\text{ seg}$  de forma constante. Y después se realizará la disminución del ángulo del estabilizador  $\delta$  de  $0.3021\text{ rad}$  a  $0.17887\text{ rad}$  en otros  $10\text{ seg}$  y de la misma forma.

Se empieza la maniobra a los  $5\text{ seg}$ . Ésta es la entrada de la maniobra 2 donde se varían los mandos durante  $20\text{ seg}$ :

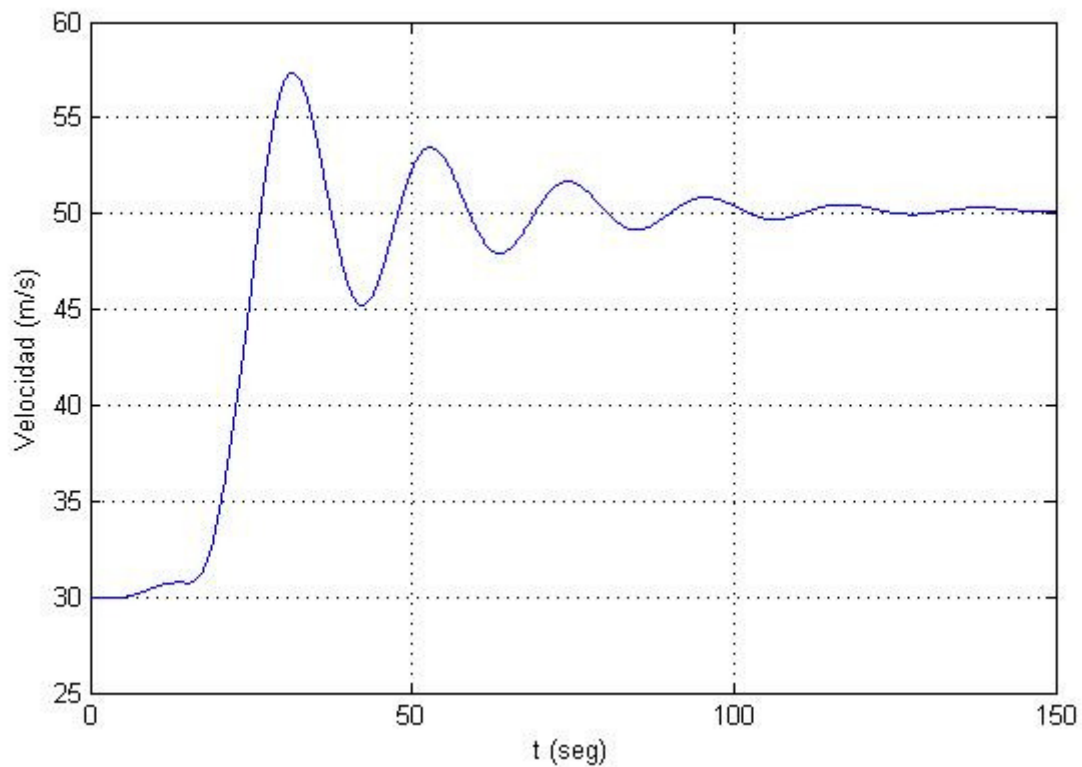


A continuación se observan las distintas salidas que muestran como reacciona el avión a esta segunda maniobra.

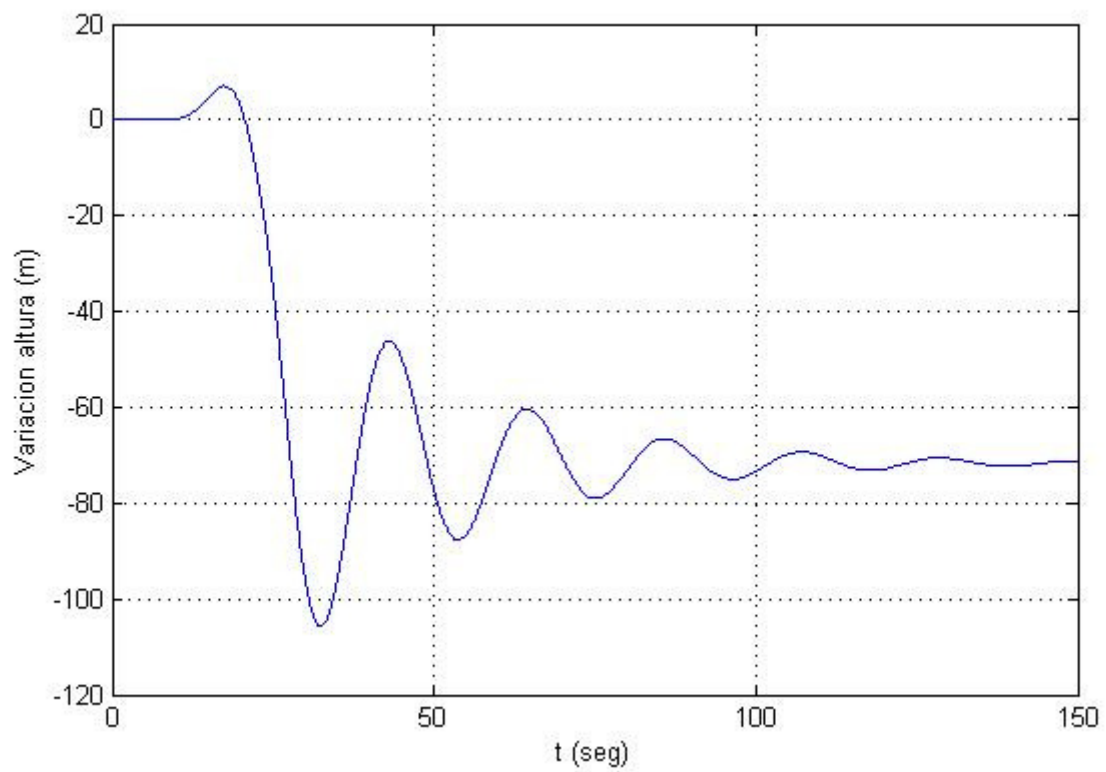
Para ello se realiza una simulación de *150 seg* con SIMULINK para que el aeroplano se estabilice alcanzando una velocidad y una altura estable.

Las variables más destacadas que muestran la evolución del vuelo durante la maniobra 2 son las siguientes:

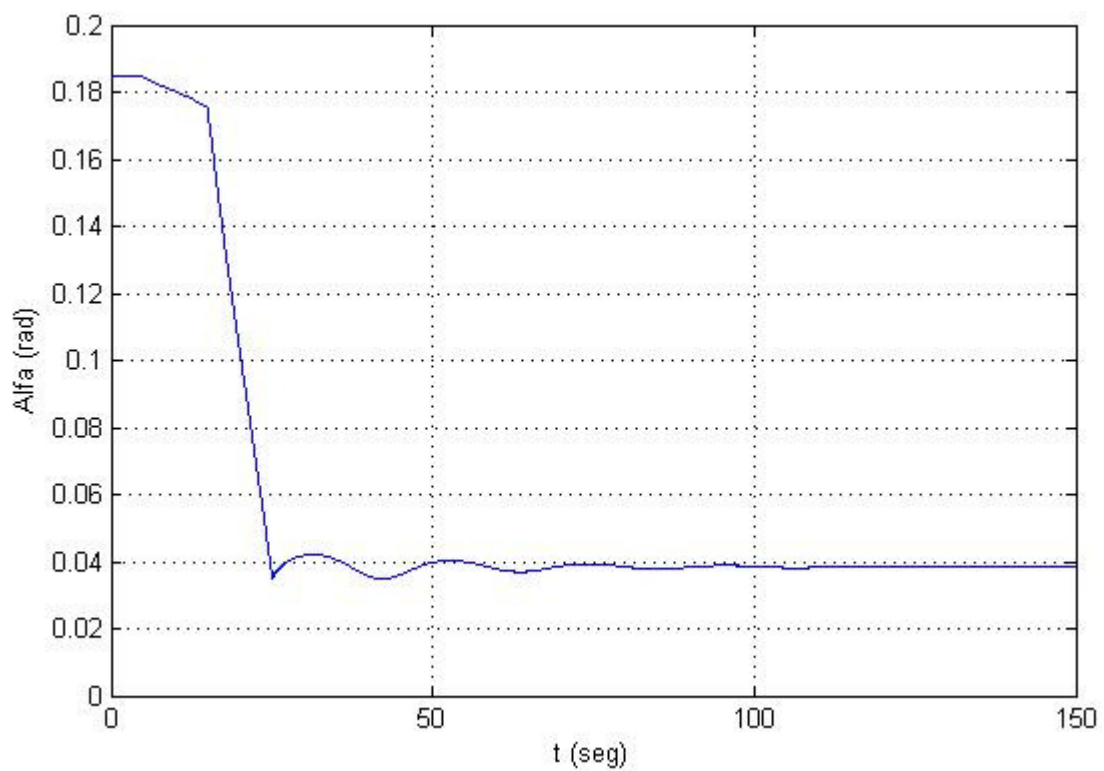
### VELOCIDAD



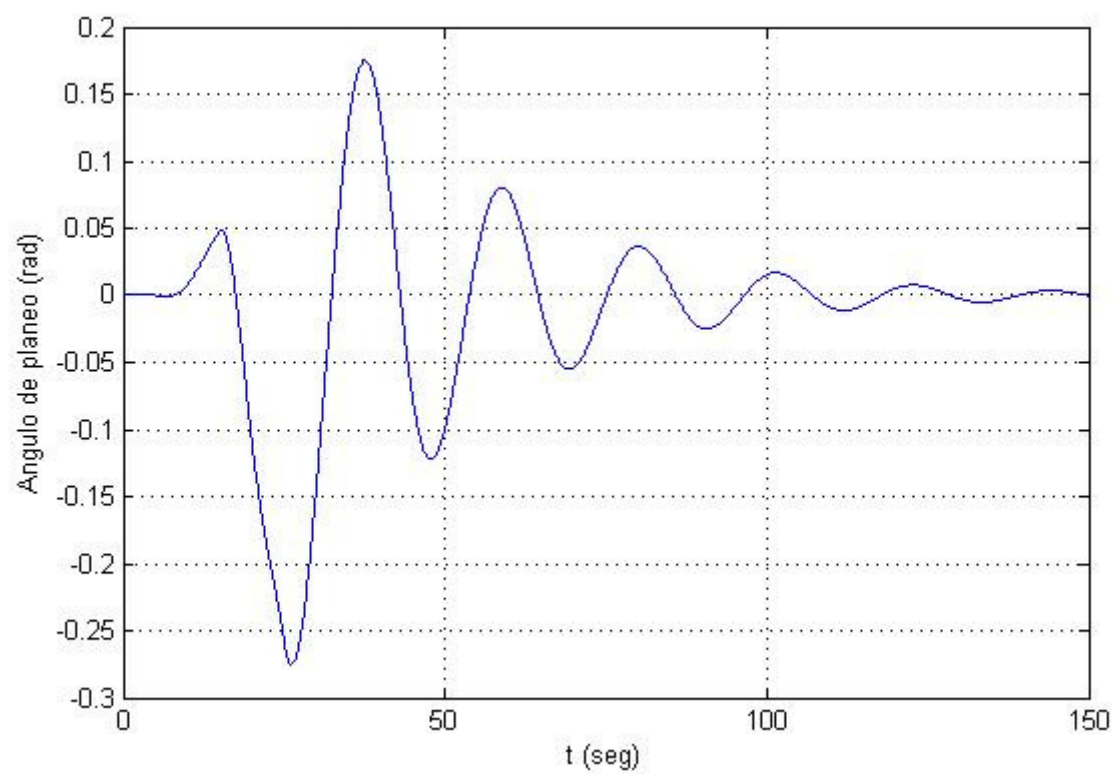
### VARIACIÓN ALTURA



### ÁNGULO DE ATAQUE $\alpha$



ÁNGULO DE PLANEEO

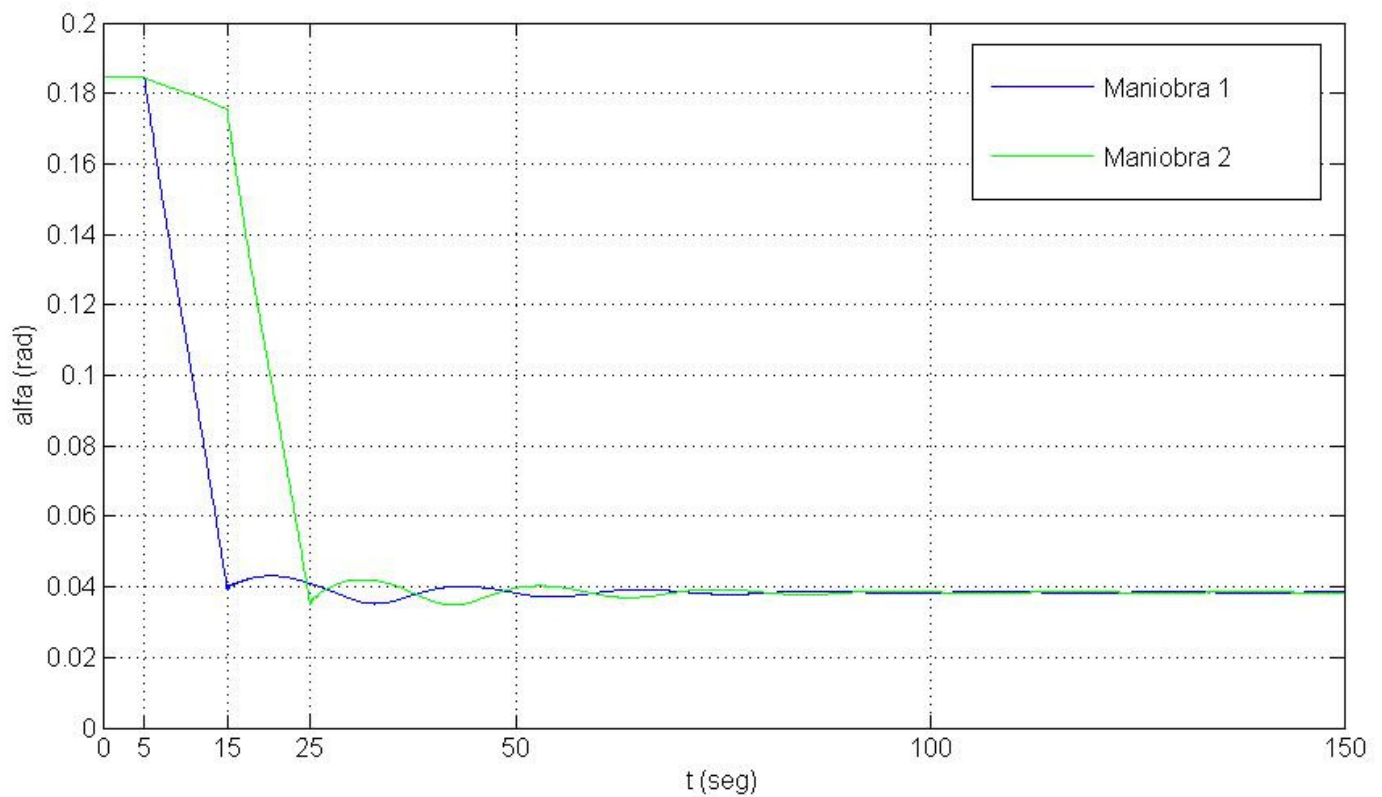


### 5.3.3 ANÁLISIS MANIOBRAS

Para interpretar los resultados obtenidos se va a comparar y analizar los datos más importantes de ambas maniobras.

Para empezar, se muestran los ángulos de ataque  $\alpha$  de las dos maniobras:

ÁNGULOS DE ATAQUE  $\alpha$

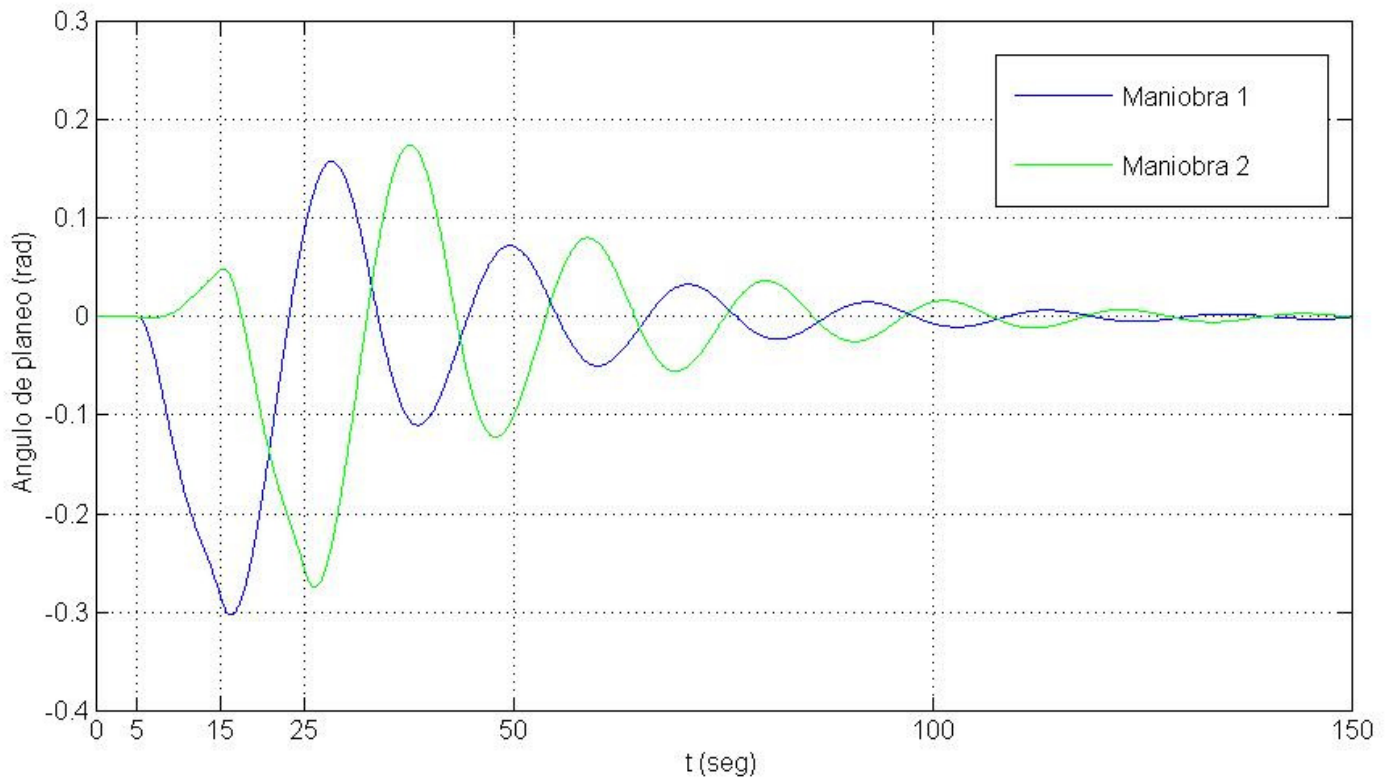


Se observa como en la primera maniobra, al empezar disminuyendo la deflexión del estabilizador, el ángulo de ataque disminuye a la vez de forma constante mientras se mantiene la tracción, hasta que aumenta la tracción y el ángulo de ataque se estabiliza.

Por el contrario, en la segunda maniobra, el ángulo de ataque disminuye muy ligeramente mientras disminuye la tracción, pero luego vuelve a bajar con la misma pendiente que antes cuando empieza a disminuir la deflexión del estabilizador con la tracción constante, hasta que se estabiliza.

Después se muestran los ángulos de planeo del aeroplano durante las dos maniobras:

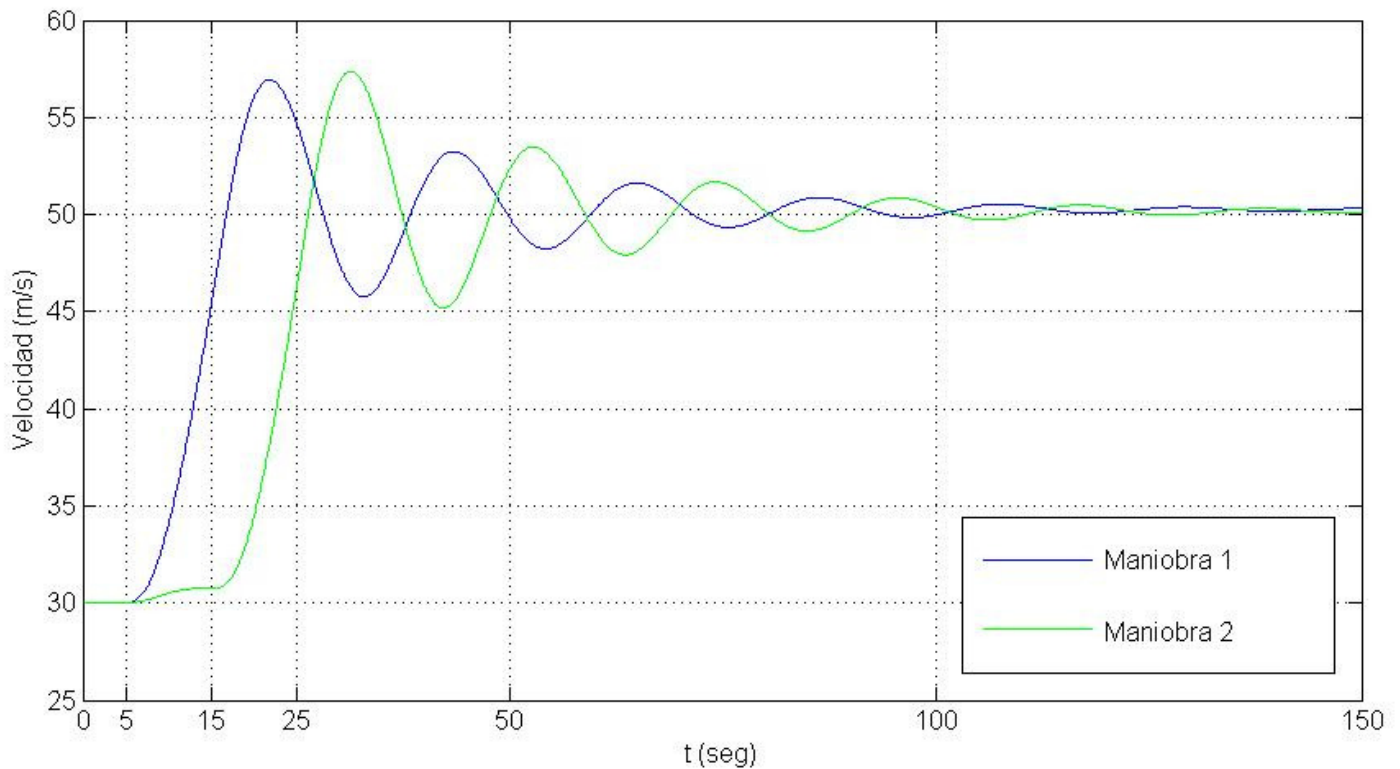
### ÁNGULOS DE PLANEAO



Lo más destacable del análisis de los ángulos de planeo es que en ambas maniobras su evolución en el tiempo muestra una *estabilidad dinámica*. Este equilibrio es oscilatorio y en ambas maniobras se estabiliza con una misma frecuencia. En ambos casos el periodo de la oscilación es  $T= 21.3072 \text{ seg}$ , lo que implica que la frecuencia de oscilación es  $f= 0.0469 \text{ seg}^{-1}$ .

La variación de velocidad, dependiendo del orden de variación de los mandos en cada maniobra, es la siguiente:

### VELOCIDADES

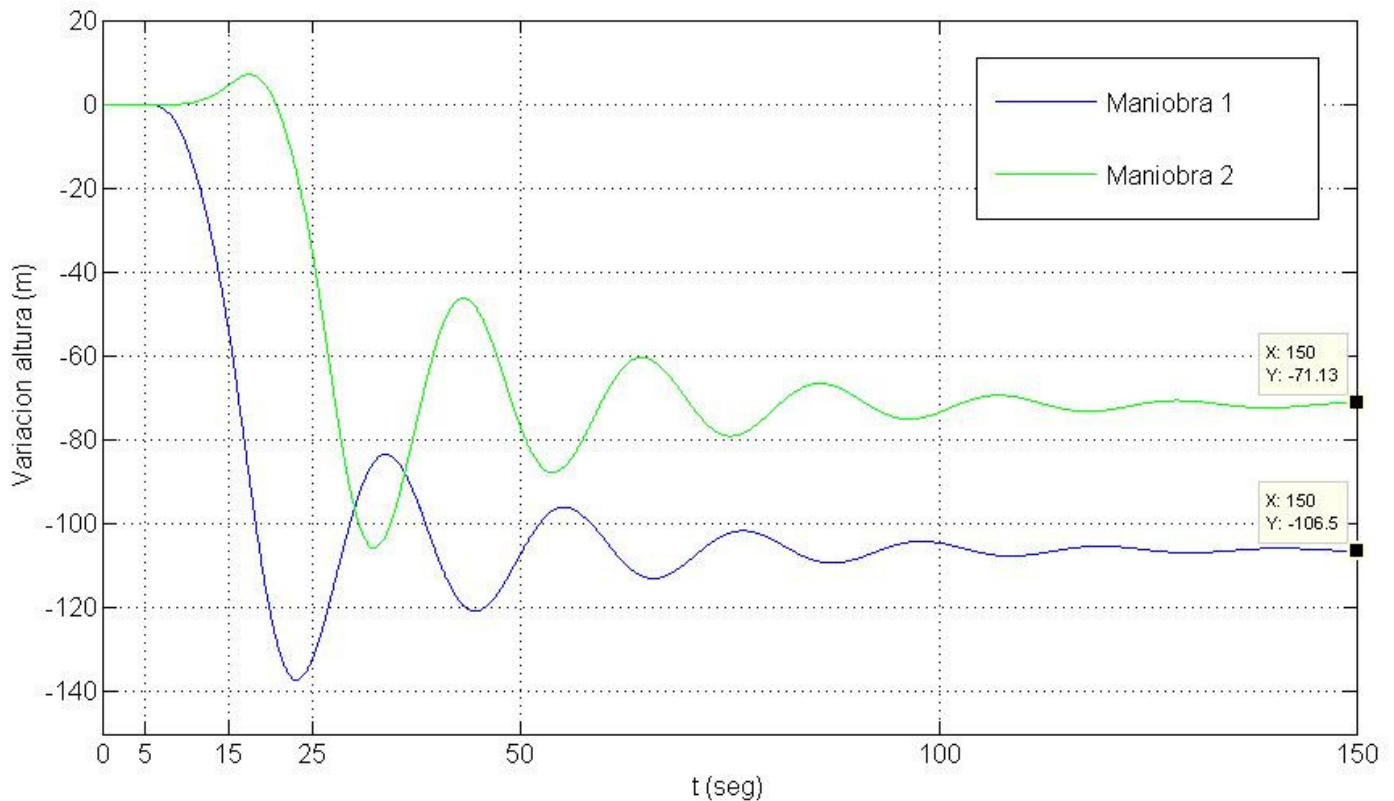


Se observa como en la primera maniobra la velocidad aumenta de forma casi constante, ya que al bajar primero el ángulo del estabilizador, el ángulo de ataque disminuye y comienza inmediatamente a ganar velocidad al disminuir la resistencia, y al aumentar la tracción después, sigue aumentando de la misma forma hasta que comienza a estabilizarse a la velocidad de 50m/s.

Sin embargo en la segunda maniobra, al comenzar aumentando la tracción manteniendo el estabilizador, la velocidad aumenta de forma muy ligera ya que el ángulo de ataque permanece casi constante. Pero en cuanto empieza a disminuir el ángulo del estabilizador, el ángulo de ataque vuelve a bajar comenzando a ganar velocidad hasta que se estabiliza a 50m/s.

Por último se muestra la variación de la altura que realiza el avión, dependiendo del orden del cambio de mandos en cada maniobra:

### VARIACIONES ALTURA



Se observa como en la primera maniobra la altura desciende muy rápido al disminuir el ángulo del estabilizador, ya que al disminuir el ángulo de ataque y aumentar la velocidad, se pierde altura rápidamente. Al aumentar la tracción, la altura continúa descendiendo de la misma forma hasta que comienza a equilibrarse, y se estabiliza cuando alcanza los  $106.5m$  por debajo de los  $1000m$  a los que empieza la maniobra, a una altura de  $893.5m$ .

Sin embargo en la segunda maniobra, al comenzar aumentando la tracción sin tocar el estabilizador, el ángulo de ataque casi no varía, produciendo una mayor sustentación, subiendo unos pocos metros. Después, al disminuir el ángulo del estabilizador, el ángulo de ataque empieza a disminuir y entonces desciende rápidamente, pero estabilizándose a mayor altura que la maniobra anterior. Eso ocurre a  $71.13m$  por debajo de los  $1000m$  iniciales, a una altura de  $928.87m$ .



## 6 . CONCLUSIÓN

A lo largo de este proyecto se ha hecho y se ha implementado un modelo dinámico con la herramienta SIMULINK, donde se ha aprendido su manejo, comprendiendo el desarrollo y funcionamiento teórico del vuelo de una aeronave.

Este modelo es una simplificación con tres grados de libertad que muestra los movimientos de la aeronave en un plano, y sirve de forma clara como introducción a un modelo dinámico completo.

Después se ha comprobado su utilidad hallando puntos de equilibrio a distintas alturas, y con ellos se ha podido encontrar datos muy útiles como la velocidad máxima, mínima o de máximo alcance.

Por último, el modelo ha demostrado ser válido para analizar y comprobar las reacciones del aeroplano mediante simulación de maniobras, donde se han obtenido datos interesantes de los cuáles se ha podido extraer importante información.