Tesis Doctoral

EL LENGUAJE ALGEBRAICO: UN ESTUDIO CON ALUMNOS DE TERCER CURSO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Autor

Garriga Mateo, Juan José

Director/es

Gairín Sallán, José María

FACULTAD DE EDUCACION
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales

2011

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales

EL LENGUAJE ALGEBRAICO:

UN ESTUDIO CON ALUMNOS DE TERCER CURSO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Memoria presentada por

JUAN JOSÉ GARRIGA MATEO

para optar al Grado de Doctor en

Ciencias (Matemáticas),

dirigida por el Dr. JOSÉ MARÍA GAIRÍN SALLÁN

Zaragoza, Septiembre de 2011

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales

EL LENGUAJE ALGEBRAICO: UN ESTUDIO CON ALUMNOS DE TERCER CURSO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Memoria presentada por

JUAN JOSÉ GARRIGA MATEO

para optar al Grado de Doctor en

Ciencias (Matemáticas),

dirigida por el Dr. JOSÉ MARÍA GAIRÍN SALLÁN

Zaragoza, Septiembre de 2011

A mi familia y amigos.

La fase experimental de esta Tesis Doctoral se llevó a cabo en el Instituto de Educación Secundaria "Goya" de la ciudad de Zaragoza durante el curso 2007-08. Guardo un excelente recuerdo de aquellos meses tan intensos y deseo manifestar mi gratitud, por su colaboración, a nivel organizativo, a todos los miembros del equipo directivo –dirigido por José Antonio Ruiz-, y del Departamento de Matemáticas del centro –dirigido por Carlos Garcés- y a todo el profesorado del instituto en general.

Me considero especialmente deudor de:

-El Dr José María Gairín Sallán, mi director de tesis, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, experto en el campo de la Didáctica de la Matemática, sin cuyo consejo y guía esta tesis doctoral no hubiera sido posible y que ha combinado magistralmente el rigor científico con una exquisita amabilidad y cordialidad en el trato personal. A él va dirigido mi principal agradecimiento.

-El Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Zaragoza cuyo Programa C022 "Didáctica de las Ciencias Experimentales" contenía unos cursos (Contrato didáctico, Análisis y diseño de materiales curriculares, Nuevas Tecnologías aplicadas a la enseñanza, Introducción a la metodología de la Ciencia, etc) que me proporcionaron unos conocimientos muy útiles para el diseño y la experimentación de una propuesta curricular alternativa para la enseñanza del lenguaje algebraico en el aula, y cuyos miembros siempre me han animado a seguir adelante con este trabajo de investigación.

-Los miembros del grupo de Investigación de Pensamiento Numérico y Algebraico que, con sus trabajos de investigación en el campo de la Didáctica de la Matemática, tanto me han enseñado e inspirado.

INDICE

Capítulo III: Metodología de investigación

Capítulo IV: Fases de planificación y acción

Capítulo V: Fase de observación

Capítulo VI: Fase de reflexión

Bibliografía

Anexos

Capítulo I:

El problema de investigación

I.1. Introducción

En nuestra larga experiencia profesional, hemos observado que la enseñanza y el aprendizaje del lenguaje algebraico en la ESO -Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años)- nos producen un alto grado de insatisfacción porque constamos que los alumnos están los cuatro años de la ESO ampliando sus conocimientos con el objetivo de ser competentes en la resolución de ecuaciones, inecuaciones y problemas algebraicos de primer y segundo grado y, sin embargo, muchos estudiantes encuentran serias dificultades para actuar con un grado suficiente de eficacia y precisión. Ciertamente dichas dificultades son atribuibles, en parte, a las propias capacidades de los alumnos; pero también hay que atribuirlas a la dificultad inherente a las propias matemáticas, y a la forma en que los profesores organizamos el proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje algebraico.

Las inquietudes señaladas no deben ser subjetivas, puesto que en muchas reuniones de los departamentos de matemáticas aparecen comentarios de otros profesores de instituto que ratifican nuestro diagnóstico sobre la situación. Y también aparecen datos relevantes en estudios sobre la comprensión de los alumnos. En este sentido, resulta clarificador el conocido como Informe TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), en el que España solamente participó en el año 1995 (López y Moreno, 1996), donde se indica que los escolares de 7º curso de EGB (12-13 años) y de 8º curso de EGB (13-14 años) obtuvieron respectivamente un 41% y un 54% de éxito en las pruebas de álgebra. Teniendo en cuenta que se trata de estudios obligatorios para toda la población, hay que valorar como insatisfactorio que la mitad de los estudiantes obtengan resultados negativos en un tema de gran relevancia en los currícula de matemáticas.

Pero si profundizamos en el análisis de las pruebas parciales, encontramos algunos resultados llamativos. Comentamos dos de las preguntas que se formularon a los alumnos:

-El enunciado de una de las preguntas se presentó en esta forma:

Si 3(x + 5) = 30, entonces x =

A 2
B 5
C 10
D 95

Los resultados obtenidos en esta pregunta fueron mucho mejores que los resultados generales que los alumnos lograron en el tema de álgebra: un éxito del 58% en los alumnos de 7º de EGB y un éxito del 76% en los alumnos de 8º de EGB. Resultados que nos llevan a presuponer que la enseñanza del álgebra alcanza altos niveles de rendimiento en conocimientos de tipo procedimental, posiblemente porque este tipo de conocimiento sea al que se dedica más esfuerzo en la práctica de aula.

-El enunciado de otra pregunta se enunció en los términos siguientes:

Si m representa un número positivo, ¿a qué es equivalente m + m + m + m?

A $m + 4$
B $4\,m$
C m^4
D $4(m + 1)$

El porcentaje de éxito en esta pregunta fue del 43% entre los alumnos de 7º de EGB, y del 59% entre los alumnos de 8º de EGB. Estos resultados son notablemente inferiores a los que alcanzaron dichos alumnos en la pregunta A, aunque nosotros pensemos que la pregunta A tiene un mayor grado de dificultad; es más, pensamos que ninguno de los alumnos que no responden correctamente la pregunta B no debería tener éxito en la pregunta A, situación que no se produce en la realidad.

Nuestra valoración es que la comparación de los resultados de estas dos preguntas refleja la comprensión que tienen los alumnos:

- De una parte, muestran un grado alto de eficacia en los procedimientos utilizados para la resolución de ecuaciones.

- De otra parte, un grado bajo de comprensión del sentido de las letras y del significado de las operaciones entre ellas; es decir, una baja comprensión de los aspectos conceptuales.

Estos resultados del estudio TIMSS pueden considerarse lejanos en el tiempo, pero lo cierto es que no se han producido nuevos estudios de este tipo. Más recientemente se han publicado resultados del denominado Informe PISA correspondiente a los años 2000 y 2003. Utilizamos la publicación del Informe PISA 2003 (Pisa 2005), en la que figuran algunas de las pruebas liberadas, para profundizar en el grado de comprensión que muestran los alumnos españoles sobre el álgebra escolar, y haciendo notar que los resultados que se publican corresponden únicamente a los alumnos de 2º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), que tienen la misma edad que los alumnos de 8º de EGB, esto es, 13-14 años.

Somos conscientes de que las pruebas utilizadas en el Informe PISA se elaboraron con una finalidad diferente a la del estudio TIMSS -competencia frente a rendimiento-. No obstante, podemos obtener ideas de interés para nuestro estudio. Así ocurre con los resultados de la siguiente pregunta formulada a los estudiantes:

Una revista de coches utiliza un sistema de puntuaciones para evaluar los nuevos coches y concede el premio de Mejor coche del año al coche con la puntuación total más alta. Se están evaluando cinco coches nuevos. Sus puntuaciones se muestran en la tabla.

Coche	*Seguridad (S)*	*Ahorro de Combustible (C)*	*Diseño Exterior (D)*	*Habitáculo Interior (H)*
Ca	*3*	*1*	*2*	*3*
M2	*2*	*2*	*2*	*2*
Sp	*3*	*1*	*3*	*2*
N1	*1*	*3*	*3*	*3*
XK	*3*	*2*	*3*	*2*

Las puntuaciones se interpretan de la siguiente manera:
3 puntos = Excelente
2 puntos = Bueno
1 punto = Aceptable

Pregunta 37:
EL MEJOR COCHE
Para calcular la puntuación total de un coche, la revista utiliza la siguiente regla, que da una suma ponderada de las puntuaciones individuales:

Puntuación total = (3× S) + C + D + H
Calcula la puntuación total del coche Ca.

Pregunta 38:
El fabricante del coche Ca pensó que la regla para obtener la puntuación total no era justa. Escribe una regla para calcular la puntuación total de modo que el coche Ca sea el ganador.
Tu regla debe incluir las cuatro variables y debes escribir la regla rellenando con números positivos los cuatro espacios de la ecuación siguiente.
Puntuación total = ……… S + ……… C + ……… D + ……… H.

Los resultados obtenidos por los alumnos españoles, y que figuran en el informe PISA, resultan llamativos: el porcentaje de éxito en la pregunta 37 es del 71’4 %, mientras que el porcentaje de éxito en la pregunta 38 es del 22’2%. Esa diferencia porcentual tan acusada pensamos que responde a dos causas principales:

- La pregunta 37 cabe ubicarla en el conocimiento procedimental por cuanto se reduce a un cálculo aritmético con número naturales, mientras que la pregunta 38 exige el conocimiento conceptual necesario para componer números y letras, y para dar sentido a las operaciones entre dichas composiciones.

- Una dilatada práctica escolar parece caracterizar una única dirección en las tareas escolares: la que demanda interpretar una frase formada por números y letras. No es tan usual la tarea de encontrar el lenguaje simbólico necesario para formar la frase que se necesita.

Sirvan estos ejemplos para poner de manifiesto que las observaciones de aula tienen un espectro más amplio que el de la experiencia personal; también los resultados más generales hacen aflorar las dificultades que encuentran los escolares españoles en el aprendizaje y uso del lenguaje algebraico.

Surgen así unas primeras preguntas que, desde la posición docente, nos hemos formulado con la intención de favorecer el aprendizaje de los alumnos: ¿resulta plausible que todos los ciudadanos españoles comprendan los contenidos del lenguaje algebraico escolar?, ¿qué utilidad se debe conceder al estudio de estos contenidos curriculares?, ¿cuáles son las dificultades de comprensión inherentes al currículo oficial sobre dichos tópicos matemáticos?, ¿es posible encontrar otras formas de enseñanza para estos contenidos?

Consecuentemente, queda delimitado el campo de trabajo a la compresión y uso del lenguaje algebraico en el nivel de Educación Secundaria Obligatoria. Y desde este posicionamiento nos planteamos dos cuestiones a las que se pretende contestar con este trabajo de investigación:

- ¿Cuáles son las causas del bajo rendimiento de los escolares españoles en los tópicos del lenguaje algebraico?

- ¿Cómo incrementar la comprensión que tienen estos escolares sobre los conceptos y procedimientos del lenguaje algebraico?

I.2. Causas del problema

Una historia de más de 3.000 años y un laborioso proceso de ensayos, interpretaciones, errores, desarrollos conceptuales y formalizaciones, han llevado a la configuración actual del lenguaje algebraico que se enseña en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Esta construcción formal sintetiza las diversas conceptualizaciones que, a lo largo del proceso histórico, han surgido sobre dicho tópico y es una muestra de las necesidades culturales y económicas que han satisfecho la enseñanza de los entes matemáticos que conforman el lenguaje del álgebra.

Una construcción de los conceptos del lenguaje algebraico que sea cognitivamente efectiva exige un lento proceso para el dominio y la integración de unos nuevos significados, que se articulen con los del campo numérico de los números naturales, los números racionales, los números enteros y de los números reales. También supone la incorporación de nuevas especificidades simbólicas, operatorias, estructurales, relacionales y de representación, que hay que acomodar a una variedad de nuevos significados; igualmente hay que profundizar sobre las relaciones que se presentan entre los distintos sistemas de representación considerados.

En el sistema educativo español el álgebra escolar ocupa un lugar destacado en los currícula de la enseñanza obligatoria desde la publicación de la Ley General de Educación de 1970. En esta decisión tuvieron especial relevancia las teorías de Piaget y sobre todo la consideración de que los alumnos alcanzan la etapa de las Operaciones Formales en torno a los 12 años. Sin embargo, desde el punto de vista de esta investigación nos preocupa, más que el desarrollo cognitivo de los alumnos asociado a su edad, los elementos sustanciales que permiten al alumno un aprendizaje significativo del álgebra escolar. Y en este sentido, indicamos las exigencias cognitivas que, a nuestro juicio, resultan relevantes para que dichos alumnos alcancen un alto grado de comprensión de los conceptos y procedimientos implicados en el lenguaje algebraico:

- Hay que disponer una buena comprensión de los conceptos y procedimientos aritméticos como: descomponer un número en factores; las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números naturales; la equivalencia, el orden, la suma y el producto de fracciones; las reglas de los signos en las operaciones con números negativos; y el significado de potencias y raíces, así como el cálculo de potencias (Kieran, 1979; Carpenter y Moser, 1984).

- Resulta imprescindible establecer con claridad las diferencias entre expresiones algebraicas, distinguiendo si se trata de una fórmula, una función, una generalización o una ecuación. Además, hay que hacer una permanente distinción entre los diferentes sentido que tiene el signo igual utilizado con expresiones algebraicas (Herscovics y Kieran, 1980).

- Se necesita disponer de un buen nivel de comprensión de las propiedad asociativa y, sobre todo, distributiva del producto respecto de la suma en situaciones en las que intervienen números y letras (Peck y Jencks, 1988); cabe advertir que estas propiedades son esenciales para el trabajo con expresiones algebraicas, situación que no se produce en el campo de la aritmética, pues la organización de los cálculos más eficaz aconseja desatender estas propiedades.

- Hay que dotar de sentido a las operaciones con expresiones algebraicas, y utilizar correctamente los algoritmos de cálculo con este tipo de expresiones, entendiendo que tales algoritmos tienen una cierta similitud con los empleados en la aritmética, pero con peculiaridades propias y diferenciadas en el campo de las relaciones algebraicas.

- Hay normas sintácticas que utiliza el álgebra que se convierten en dificultades de aprendizaje por jugar un rol muy diferente a las normas sintácticas que utiliza la aritmética:

-El producto se indica con una cruz o con un punto en las expresiones aritméticas. En el álgebra los monomios están formados por letras y números carentes de signo de multiplicación; incluso se omite con frecuencia el signo de multiplicación entre expresiones algebraicas. Este hecho hace que se resientan algunas ideas que se usaban correctamente en la aritmética, como pueden ser las de la escritura de los números en el sistema decimal posicional, o la escritura de números mixtos.

-La ausencia de la representación explícita del número 1, tanto en los monomios como en las expresiones escritas entre paréntesis, crea dificultades de interpretación porque en las operaciones aritméticas a realizar se debe ser consciente de la presencia implícita del número 1. Así lo constatamos en nuestra experiencia personal al observar que los alumnos tienen dificultades para eliminar los paréntesis en expresiones del tipo “$-(3x-2)$” o al reducir a mínimo común denominador expresiones del tipo “$\frac{x}{4}-x$”.

-Las potencias en la aritmética y en el álgebra se escriben con un exponente al lado superior derecho de un paréntesis. Sin embargo, en la aritmética la potencia afecta al número encerrado por el paréntesis y que puede estar formado por varias cifras; mientras que en el álgebra dicho exponente afecta a todos los elementos que componen el monomio, lo que obliga a elevar a la potencia cada uno de dichos elementos.

-Los alumnos utilizan letras en la aritmética para representar unidades de medida (m para metros, k para kilos,…) o como abreviatura de objetos (2L para indicar dos lapiceros, 5 B para representar cinco bolígrafos,…). Al usar la letra en el ámbito algebraico resulta que tiene sentido realizar multiplicaciones entre expresiones algebraicas, como ocurre con el producto ($2x \cdot 3y = 6xy$, $x^2 \cdot 2x = 2x^3, \ldots$), pero no tiene cabida el realizar algunas operaciones similares cuando se trata de operaciones de suma o resta ($2x + 3y = ¿?$, $x^2 + 2 = ¿?, \ldots$)

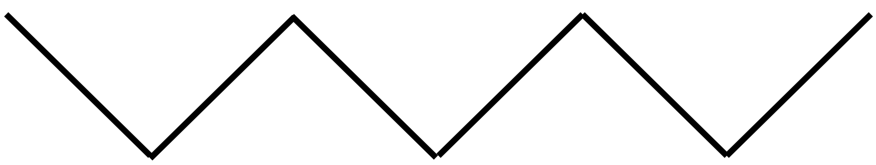
- Desde el mundo de la comunicación verbal se precisa un buen dominio de las estructuras lingüísticas, que incluye una cierta habilidad para distinguir el sujeto y el predicado en una oración; así como un buen grado de manejo de las relaciones lógicas elementales, con especial atención a los conexiones conjuntivas y disyuntivas.

- En el álgebra se manejan expresiones verbales que se formulan siguiendo las normas del lenguaje materno, un sistema de símbolos que se componen siguiendo leyes que guardan una aparente parecido con las leyes utilizadas en la aritmética, y unas representaciones gráficas en las que se utilizan normas y convenios propios. La confusión entre los objetos representados con las representaciones de los mismos, y la aplicación arbitraria de las normas sintácticas a "representaciones equivalentes" en sistemas de representación diferentes, constituyen buena parte de las dificultades de comprensión del álgebra escolar (Duval, 1995).

- En cuánto al proceso de interpretación y construcción de gráficos, cuestión central en la perspectiva de la modelación algebraica, cabe destacar que se trata de procesos en los cuales se suelen confundir características topológicas de una situación con aquellas características también topológicas de su correspondiente representación (Leinhardt et al., 1990). Es necesario reconocer que los gráficos involucran, al igual que otras formas simbólicas, relaciones arbitrarias, pero convencionales, entre los objetos que son representados (Roth, W-M y Bowen, G.M., 2001).

- Y también es necesario una cierta habilidad para manejar ideas abstractas, cuyo control queda limitado al correcto uso de las leyes formales (Swafford y Langrall, 2000; Nathan, y Koedinger, 2000). Esta situación queda muy alejada de la que se produce en el ámbito de la aritmética; en efecto, el siguiente esquema puede sintetizar las relaciones que se establecen entre el mundo físico y el modelo aritmético en la resolución de problemas:

MUNDO FÍSICO



MODELO ARITMÉTICO

Como puede observarse, en la modelización aritmética hay una constante comunicación entre el mundo físico y el correspondiente modelo, lo que permite un control permanente de las acciones realizadas y dicho control se hace además en términos de objetos perceptibles.

Sin embargo, el esquema correspondiente a la modelización en el álgebra escolar presenta una clara diferencia, como puede apreciarse en el gráfico siguiente:

MUNDO FÍSICO

MODELO ALGEBRAICO

En el campo algebraico hay una traslación desde el mundo físico hasta el simbólico en el inicio de la tarea; después hay un largo período en el que el trabajo se limita a la manipulación de entes abstractos sometidos a leyes formales y, finalmente hay una nueva traslación de los resultados obtenidos en el mundo de los objetos físicos.

I.3. Consideraciones sobre la instrucción

La enseñanza del álgebra escolar es un contenido curricular importante de la Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años). Sin embargo, resulta preocupante que el análisis del estado de conocimientos de los alumnos sobre el tema haya puesto de manifiesto múltiples disfunciones entre los resultados esperados y el conocimiento realmente alcanzado por estos alumnos.

El álgebra escolar se concibe actualmente como la rama de las matemáticas, dirigida a la población escolar de la ESO (12-16 años), que trata la simbolización de relaciones numéricas generales y de estructuras matemáticas, así como de la operación sobre esas estructuras. Los temas típicos incluyen:

- Propiedades de los números reales.
- El planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado en una incógnita.
- La simplificación de expresiones polinómicas y racionales.
- La representación simbólica de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, junto con sus gráficas.
- Sucesiones y series.

El contenido del álgebra escolar ha cambiado poco. Al comienzo del siglo XX los cursos iniciales del álgebra cubrían temas como: simplificación de expresiones algebraicas, planteo y resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas; resolución de problemas en los que intervienen razones, proporciones, potencias y raíces. En las siguientes décadas se incluyeron aplicaciones a problemas del mundo real y el uso de los métodos gráficos. Al comienzo de los años 1960 se puso de manifiesto la existencia de una brecha muy grande entre el álgebra enseñada -en las Enseñanzas medias y superiores- y las necesidades de ella en campos como la física nuclear, la exploración espacial, las comunicaciones y la tecnología computacional. Paralelamente, se produce la formalización de las matemáticas emprendida por el grupo Bourbaki y se incorporan a la enseñanza las llamadas matemáticas modernas. Se incluyen las inecuaciones y se hace énfasis en conceptos unificadores como conjunto y función a fin de proporcionar, al alumno, unos conocimientos generales susceptibles de aplicar a buena parte de las situaciones problemáticas de diferentes disciplinas.

En cuanto a la forma en que se presenta a los alumnos de ESO el lenguaje algebraico es a partir de una fase previa en la que se le recuerdan los resultados aritméticos de interés para el aprendizaje del álgebra. Después, las representaciones algebraicas se tratan como enunciados generalizados de las operaciones aritméticas; es decir que se trabaja en términos procedimentales en donde los valores numéricos se sustituyen por expresiones algebraicas para obtener resultados específicos. Sin embargo, una vez que se ha completado esta introducción, relativamente suave, las representaciones algebraicas empiezan a tratarse como objetos matemáticos abstractos sobre los cuales se aplican leyes formales.

Al abordar este estudio admitimos que una parte del problema de la enseñanza y del aprendizaje del lenguaje algebraico en la ESO reside en su peculiaridad sintáctica, semántica y de composición; en las características del conjunto de conceptos, procedimientos, relaciones y operaciones entre expresiones algebraicas. Y admitimos que en estas características reside buena parte de las principales dificultades de comprensión de los estudiantes.

Pero nuestra intención es avanzar en el análisis de estas dificultades en el sentido de cuestionar hasta qué punto las elecciones didácticas que se hacen al desarrollar las propuestas de enseñanza influyen en las dificultades de comprensión de los escolares; más concretamente, si la decisión de nuestro sistema educativo de presentar los conocimientos del álgebra escolar como generalización de los conocimientos aritméticos puede obstaculizar el aprendizaje de los alumnos; queremos, en suma, considerar entre las dificultades de comprensión de los alumnos las provocadas por los obstáculos didácticos, entendido el término en el sentido que le otorga Brousseau (1983).

Además, nuestro propósito es hacer indagaciones sobre la viabilidad de llevar al aula propuestas de enseñanza que sean alternativas, puesto que consideramos que los planteamientos teóricos sobre temas educativos han de orientarse a la resolución de problemas en el sistema escolar, y que la investigación debe estar conectada con la reflexión crítica sobre lo que ocurre en las aulas. Esta posición resulta adecuada por cuanto constituye un campo propio de indagación para el investigador en educación matemática (Kilpatrick, 1993), y porque tanto los expertos (Kilpatrick, 1992; Nickson, 1992), como las instituciones y sociedades (ICME-3, 1977; ICME-8, 1998) recomiendan la conexión entre teoría y práctica para fortalecer la coherencia interna de la disciplina. Desde esta posición, abordamos el trabajo de diseño e implementación de una propuesta curricular para escolares de Educación Secundaria. La observación e interpretación de los fenómenos que se produzcan, así como el análisis de datos obtenidos, permitirán elaborar las conclusiones del trabajo.

Las herramientas conceptuales más importantes que utilizamos son las nociones de comprensión del conocimiento matemático (Wittrock, 1990; Hiebert y Carpenter, 1992); modelos matemáticos para el aprendizaje (Castro, 1994, Gairín, 1999; Gagatsis y Patronis, 1990; Lesh et al., 1987); y sistemas de representación (Castro, Rico y Romero, 1997; Duval, 1993, 1995; Kaput, 1992).

El método de investigación que se adopta en esta tesis doctoral es el denominado de Investigación-Acción (Elliot, 1990; Kemis y McTaggart, 1988; Mcniff, 1991) y se va centrar en el estudio de un problema específico sobre un escenario específico (Cohen y Manion, 1990).

Quedan así presentados los datos globales de un trabajo de investigación cuya parte experimental se llevó a cabo en el Instituto "Goya" de Zaragoza durante el curso escolar 2007-08.

I.4. El problema de investigación

En esta investigación nos proponemos analizar la viabilidad de una propuesta didáctica alternativa que arbitre los medios necesarios para superar los obstáculos didácticos que han aparecido en la práctica docente habitual. Los aspectos esenciales que se consideran son los siguientes:

- El diferente significado de las letras como variable, incógnita o abreviatura según la expresión matemática en la que se ubiquen. (Primer Foco de investigación).

- La comprobación de la solución en las ecuaciones (comprobación sintáctica) y en los enunciados de los problemas (comprobación semántica). (Segundo Foco de investigación).

- Las conexiones entre el leguaje natural o materno y el lenguaje algebraico en ambos sentidos. (Tercer Foco de investigación).

I.4.1. El diferente significado de las letras

Compartimos la aseveración que figura en la introducción del Currículo de matemáticas para la ESO de la Comunidad de Aragón: *Los contenidos algebraicos* *se encuentran entre los que más dificultades presentan para la mayor parte de los alumnos.* (Currículo de Aragón, 2005). Pensamos que buena parte de esas dificultades se encuentran en los entes que utiliza el álgebra escolar, así como en las relaciones que se establecen entre ellos. En efecto, los estudiantes han utilizado letras en la aritmética para expresar las distintas unidades de medida, o para aplicar fórmulas, generalmente geométricas. Los distintos significados –como variable, como incógnita o como abreviatura- que tienen las letras en el ámbito algebraico no se comprenden de forma natural, antes bien, dicha comprensión viene obstaculizada por los conocimientos aritméticos previos. Es más, sin un buen dominio de las potencialidades y limitaciones de las letras, el alumno se verá limitado en competencias tales como saber analizar los argumentos expuestos, hacer razonamientos lógicamente estructurados, representar y comunicar informaciones de forma clara y precisa, saber resolver problemas y utilizar algunas técnicas e instrumentos matemáticos para ello, o recurrir al lenguaje matemático para describir fenómenos del mundo físico.

Además de las conexiones entre la aritmética y el álgebra, también hay que contemplar las relaciones entre el álgebra escolar y el Análisis funcional, lo que ocasiona una visión diferente de las letras y sus relaciones:

"… hay que tener en cuenta que las funciones proporcionan el soporte matemático para construir modelos de la realidad y, por tanto, son un instrumento muy importante en el estudio de las ciencias. Son un contenido nuevo para los alumnos, quienes deben establecer relaciones entre las tablas de datos, las representaciones gráficas y sus expresiones algebraicas, interpretando la información que contienen con relación a situaciones que describan fenómenos de su entorno y de los diversos ámbitos científicos que están estudiando en el currículo de la etapa. Además, el estudio de las funciones tiene que servir para conectar los distintos bloques de contenido de la materia" (Currículo de Aragón, 2005).

En consecuencia, la instrucción sobre los contenidos del lenguaje algebraico habrá de asentarse sobre un buen conocimiento de los alumnos sobre los diferentes significados que adquieren las letras en este ámbito de las matemáticas; y ello requiere una ruptura conceptual con las ideas previas que tienen los alumnos sobre el papel que juegan las letras en la aritmética. En esta investigación nuestro interés se centra en conocer el grado de comprensión alcanzado por los alumnos de 3º de ESO (14-15 años) sobre el diferente significado de las letras según la expresión matemática en la que aparecen, después de haber pasado por dos cursos, 1º y 2º de ESO, en los que han estudiado temas de álgebra escolar.

I.4.2. La comprobación de la solución

La cuarta fase del proceso de resolución de problemas contempla la actividad de revisar la solución obtenida (Polya, 1965), como recurso esencial para certificar la veracidad de dicho resultado; pero también constituye un instrumento esencial para analizar el proceso seguido, para analizar si la solución encontrada es única, para optimizar la formulación de la solución encontrada y para abrir vías a la resolución de un amplio abanico de nuevos problemas.

Desde la perspectiva de los aprendices, la actividad de comprobar el resultado obtenido se configura como el único medio de controlar la validez de las manipulaciones realizadas con entes abstractos, y siguiendo leyes formales que se han memorizado.

La comprobación de los resultados admite dos interpretaciones en las que utilizaremos términos similares a los empleados en investigaciones sobre la traducción del lenguaje materno o natural al lenguaje algebraico (Clement, 1982; Mestre, 1988; Spanos, Rhodes, Dale y Crandall, 1988; Herscovics, 1989; Kirshner, Awtry, McDonald y Gray, 1991):

-La comprobación sintáctica que consiste en trasladar la solución a las expresiones algebraicas utilizadas en la resolución del problema; esta comprobación tiene una validez parcial, pues no permite valorar si la traducción del lenguaje natural al algebraico está correctamente realizada, y está basada en una mera aplicación de las reglas formales del álgebra y de la aritmética. Sí que es una comprobación interesante como instrumento didáctico para que el alumno entienda los conceptos de incógnita y de ecuación, y como instrumento práctico para estudiar si las operaciones de resolución de ecuaciones han sido bien realizadas sin necesidad de repasar todos los pasos del cálculo.

-La comprobación semántica que consiste en llevar la solución al enunciado del problema y verificar si se cumplen las exigencias de dicho enunciado; esta comprobación es la más adecuada porque lleva el resultado al contexto en el que se formuló el enunciado, lo que implica dar sentido a las cantidades de magnitud, a las operaciones realizadas entre ellas y a la pertinencia del resultado; además, permite detectar los errores producidos en la formulación algebraica del problema y los producidos al aplicar las destrezas algebraicas. Y también permite valorar si el proceso de resolución puede ser refinado, si hay otros caminos para llegar a la solución, o si existen otros problemas que se pueden solucionar de forma similar.

I.4.3. Las conexiones entre el leguaje natural y el algebraico

Una de las características esenciales de la Matemática es la construcción y uso de un lenguaje específico, que se caracteriza por el uso de una simbología propia y por una precisión y rigor en la expresión que le permite contribuir a la formulación y resolución de problemas en los más diversos ámbitos científicos y cotidianos. En consecuencia, la materia de matemáticas posibilita la comunicación y la construcción del pensamiento lógico y, por tanto, contribuye de forma muy importante a la consecución de la competencia lingüística entre los alumnos de la Educación Secundaria Obligatoria.

Las diferentes formas de comunicación oral y escrita de los resultados obtenidos, acompañados de la formulación clara, precisa y lógicamente ordenada de los procesos seguidos en la resolución de los problemas, constituyen una parte esencial del trabajo en la asignatura de Matemáticas. Y así queda reflejado en el objetivo 1 del currículo de matemáticas de la Comunidad de Aragón: "*Utilizar correctamente el lenguaje matemático con el fin de comunicarse de manera clara, concisa, precisa y rigurosa*" (Currículo de Aragón, 2005).

Hay que tener en cuenta que las bases del aprendizaje del álgebra escolar en la Educación Secundaria se sustentan en tareas de generalización de las relaciones aritméticas y en la expresión de las mismas con un lenguaje simbólico. Pero el proceso de aprendizaje es lento y requiere un grado de madurez intelectual que los alumnos de esta etapa educativa van desarrollando a lo largo de los cuatro años de escolarización obligatoria. Será preciso, por tanto, poner la pausa necesaria en el adiestramiento del uso del lenguaje algebraico, apoyándose en muchos ejemplos extraídos de contextos aritméticos, situaciones geométricas, problemas de la vida real, etc., para tratar de conseguir que los alumnos lo vayan incorporando.

Consecuentemente, en este trabajo de investigación nos proponemos profundizar en el análisis sintáctico y semántico del lenguaje algebraico, pues constituyen aspectos esenciales para la comprensión y uso correcto del lenguaje matemático. Y un buen dominio del lenguaje algebraico, así como la traducción en ambos sentidos entre los lenguajes natural y algebraico –mediante el planteamiento de ecuaciones y la invención de enunciados de problemas de álgebra-, son esenciales para avanzar en el conocimiento de los campos matemáticos que conforman los currícula de las matemáticas del bachillerato y de la universidad.

I.5. El álgebra escolar como aritmética generalizada

Hay dos tendencias sobre la forma de introducir el álgebra escolar: una que propone seguir presentando el álgebra como un desarrollo de la aritmética, y otra que propone presentar el álgebra como un sistema simbólico basado en ciertas reglas propias rigurosas que deben ser bien formuladas.

La tendencia tradicional es la de presentar el álgebra como una estructura gobernada por las mismas leyes con las que se operan los números en la aritmética; de este modo, se argumenta, que si el estudiante relacionara más frecuentemente el álgebra con el significado intuitivo de los objetos y de las operaciones se evitarían los errores en la manipulación de las expresiones algebraicas (Turnau, 1990; Demby, 1997; Eves, 1981). Aunque también algunos investigadores ponen de manifiesto que este proceso instructivo puede obstaculizar el aprendizaje del álgebra porque, aunque ayuda a que los estudiantes asimilen los procedimientos intuitivos e informales de la aritmética, también dificulta la asimilación de los procedimientos abstractos y formales del álgebra, pues la existencia simultánea de estructuras aritméticas y algebraicas crean conflictos cognitivos en las mentes de los alumnos de modo que la aritmética entorpecía su manejo del álgebra (Kieran, 1989; Booth,1984a; Herscovics y Chalouh, 1985; Lee y Wheeler, 1989).

Entendemos que la generalización de las relaciones aritméticas y su expresión simbólica constituye la base del álgebra impartido en la Educación Secundaria Obligatoria. Ahora bien, el proceso de aprendizaje, de escolares cuyas edades están comprendidas entre los 12 y los 16 años, que conduce al desarrollo de la capacidad de generalización, el razonamiento inductivo, y de simbolización de los resultados utilizando letras y números, es lento y requiere un grado de madurez intelectual que los adolescentes van desarrollando a lo largo de esta etapa. Será preciso, por tanto, introducir el lenguaje algebraico paulatinamente y completando los aspectos cognitivos que mejoren la comprensión de los alumnos. En este sentido, la propuesta de presentar el álgebra escolar como una aritmética generalizada exige hacer una comparación entre ambos tópicos matemáticos, con la finalidad de precisar cuáles son los elementos cognitivos que están presentes en este proceso. Con esta finalidad, efectuamos un análisis comparativo de los entes utilizados, así como de las relaciones y operaciones que se establecen entre ellos:

-<u>El papel de las letras</u>:

En aritmética las letras son abreviaturas de sustantivos o de unidades de medida, o bien son valores variables generales que deben ser sustituidos por números concretos en las fórmulas. En álgebra las letras son incógnitas cuyo valor numérico concreto debe ser hallado en las ecuaciones, o bien son variables que pueden tomar muchos valores en las expresiones algebraicas abiertas como los polinomios o las funciones.

-<u>El tamaño de los números involucrados</u>:

En aritmética se puede saber si el número es grande o es pequeño según el número de cifras y las características de las cifras. En álgebra el tamaño de los números no se puede deducir a partir de los símbolos utilizados. Una letra puede representa a un número que puede ser muy grande o muy pequeño.

-<u>Composición de los elementos básicos</u>:

En aritmética se componen números de varias cifras a partir de los únicos diez dígitos que existen. El orden de las cifras de los números es estricto y siempre se escriben ceros en las posiciones en las que no haya unidades de los tamaños correspondientes a dichas posiciones. En álgebra se componen polinomios a partir del infinito número de monomios que puede haber. Los monomios de los polinomios admiten diferentes ordenaciones (de mayor a menor, de menor a mayor, desordenados,…), y los monomios con coeficientes nulos no se deben escribir.

<u>-El papel del signo =:</u>

En aritmética el signo de igualdad significa que hay que ejecutar una serie de operaciones con las cantidades expresadas a la izquierda del signo de igualdad.

Dichas operaciones llevarán a un resultado numérico concreto que se escribirá a la derecha de dicho signo de igualdad. En álgebra el signo igual representa que hay una relación de igualdad entre dos cantidades que están expresadas de forma diferente a la izquierda y a la derecha del signo de igualdad.

-Los signos + y -:

En aritmética el signo + y el signo – llevan siempre al cálculo de un nuevo resultado final que sustituye respectivamente a los dos sumandos o al minuendo y al sustraendo. En álgebra el signo + y el signo – llevan o bien a una expresión similar si los términos son semejantes (por ejemplo: $2x+3x=5x$), o bien no admite una formulación más simple (por ejemplo: $2x+3y$).

-El signo del producto:

En aritmética el punto se tiene que escribir para indicar el producto entre dos números, para indicar los miles en la notación tradicional europea y para indicar los decimales en la notación anglosajona típica de las calculadoras. También se utiliza el signo x, como alternativa al punto, para expresar el producto de dos números. En álgebra nunca se utiliza el signo x para denotar el producto puesto que se podría confundir con la letra x que es habitualmente utilizada en todo tipo de expresiones algebraicas.

-El papel de la coma:

En aritmética la coma se utiliza para indicar los decimales en la notación europea y para indicar los miles en la notación anglosajona típica de las calculadoras. En álgebra la coma se utiliza para separar las abscisas y las ordenadas en los pares ordenados de números.

-Ausencia de signo entre dos entes:

En aritmética la ausencia de símbolo operacional entre dos números significa que son cifras diferentes de un mismo número expresado en base diez. Así, por ejemplo, “56” significa “5 decenas y 6 unidades”. En álgebra la ausencia de símbolo operacional entre dos letras o entre número y letra significa que se trata, respectivamente, del producto de tales dos letras o del producto entre número y letra. Así, por ejemplo, “a b” significa “a multiplicado por b” y “3 x” significa “3 multiplicado por x”.

-Las técnicas de suma y resta:

En aritmética la suma y la resta tienen cada una su algoritmo propio para ser realizadas y se basa en el valor de los dígitos y en las posiciones ocupadas por los dígitos. Además las operaciones realizadas en cada posición pueden verse influidas por las realizadas en la posición o posiciones anteriores. En álgebra la suma y la resta se basan en la semejanza de los monomios implicados. Además las operaciones realizadas entre términos semejantes no son influidas por las de los demás términos que no sean semejantes a ellos.

-El resultado de la multiplicación:

En aritmética el resultado del producto de dos números se obtiene aplicando directamente un único algoritmo que se enseña en la escuela. En álgebra hay que ordenar el resultado obtenido para obtener el resultado de un producto de dos monomios, colocando primero el producto de los signos y de los números e ir escribiendo a continuación los productos de las potencias de la misma base.

-Propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

En aritmética la aplicación de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma no suele aplicarse, salvo como tarea enunciada explícitamente en el ámbito escolar, puesto que dificulta el cálculo. En álgebra la aplicación de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma es esencial para la manipulación de las expresiones algebraicas.

-Potencias:

En aritmética las potencias afectan al número como conjunto formado por una sucesión ordenada de dígitos. En álgebra las potencias afectan a cada uno de los elementos de la expresión algebraica.

-Significado de la fracción:

En aritmética una fracción puede representar una división entre dos números, o una parte de una totalidad, o una relación de proporcionalidad entre dos cantidades, o el resultado de una medida, o el resultado de un reparto, o un operador que actúa sobre una cantidad de magnitud. En álgebra una fracción sólo puede representar una división entre dos expresiones algebraicas.

-Sentido de la identidad:

En aritmética la identidad tiene el significado de un mismo resultado producido al operar números diferentes. En álgebra una identidad es un par de expresiones diferentes que llevarían a una misma cantidad al dar cualquier valor numérico a las variables implicadas.

-Existencia de infinitas soluciones:

En aritmética la existencia de infinitas soluciones se produce en un conjunto numérico con infinitos elementos que cumplen una determinada condición. En álgebra la existencia de infinitas soluciones aparece ante una ecuación indeterminada o un sistema compatible indeterminado.

-Situaciones en las que no hay solución:

En aritmética esta situación solamente se presenta en el caso de que una relación numérica no esté definida en el conjunto numérico en el que se trabaja. En álgebra esta situación aparece al resolver una ecuación incompatible o en un sistema incompatible indeterminado.

-El papel de las unidades utilizadas en los problemas:

En aritmética los datos que nos dan en el enunciado, los datos hallados en los cálculos intermedios, y también el resultado final, están siempre vinculados a la realidad concreta del problema. Por tanto, todo número está siempre ligado explícitamente a la unidad que lo dota de significado físico real. En álgebra los números y las letras de las ecuaciones se escriben sin sus unidades, se resuelven sin pensar en tales unidades y llevan a un resultado sin unidades. La resolución de ecuaciones algebraicas es una técnica abstracta y universal en la que, efectivamente, sobran las unidades como conectores de las ecuaciones con el mundo real.

-Sobre el método de trabajo:

En aritmética se van obteniendo resultados parciales en los que se trabaja sobre unos pocos datos del total de datos que nos han dado o que hemos calculado en los pasos intermedios. A partir de tales resultados parciales se llega al resultado final del problema. En álgebra todos los datos dados y los datos desconocidos del enunciado se formulan desde el principio, mediante un lenguaje simbólico, en forma de unas ecuaciones iniciales. A partir de dichas ecuaciones se obtiene directamente un único resultado que es el resultado final del problema.

-Comprobación de la solución de un problema:

En aritmética comprobar el resultado de un problema significa relacionar los datos hallados y los datos dados. En álgebra se puede proceder de dos maneras con las soluciones calculadas de un problema algebraico:

-sustituyendo dichas soluciones en las ecuaciones planteadas. Así sólo se comprueba la correcta resolución de unas ecuaciones que pueden ser, o no ser, la correcta traducción al lenguaje algebraico del problema dado.

-sustituyendo dichas soluciones en el enunciado. Así estaríamos realizando una comprobación correcta sobre la relación entre los datos dados y los datos calculados por el que ha resuelto el problema.

I.6. Revisión bibliográfica y antecedentes

Como en todo trabajo de investigación conviene analizar el estado de la cuestión, es decir, procede estudiar la situación del tema central de nuestro trabajo -la enseñanza del lenguaje algebraico en la ESO- en el mundo de la investigación en la Didáctica de las Matemáticas.

Para ello, realizamos una primera búsqueda sobre artículos que aborden cuestiones muy relacionadas con el tema central de la investigación que abarcó el período comprendido entre el 1 de enero de 1990 y el 1 de abril de 2003. Las bases de datos consultadas fueron: ISOC; REDINET; MATHSCINET; ERIC; FRANCIS. Los descriptores usados fueron:

-*Enseñanza secundaria*

-*Álgebra*

-*Problemas*

-*Resolución de problemas*

Posteriormente, con la finalidad de actualizar la documentación recientemente producida, se realizó una segunda búsqueda que se extiende desde el 1 de abril de 2003 hasta el 1 de diciembre de 2009. De esta forma, nuestra indagación bibliográfica total abarca la mayor parte de los últimos 21 años. En esta segunda búsqueda se utilizaron una gama mayor de descriptores:

-*Lenguaje algebraico*

-*Traducción al lenguaje algebraico*

-*Didáctica matemática*

-*Álgebra escolar*

-*Enseñanza secundaria*

-*Solución de problemas algebraicos*

-*Invención de problemas de algebraicos*

-*Comprobación de problemas de algebraicos.*

Hemos organizado las publicaciones de los dos periodos de búsqueda atendiendo a las temáticas abordadas. Así, las hemos agrupado en seis grandes campos: el de la introducción del álgebra escolar, el que analiza las relaciones entre el lenguaje materno y el lenguaje algebraico, el que se refiere a las dificultades de interpretación de las expresiones algebraicas, el que aborda la resolución de problemas utilizando el lenguaje algebraico, el que corresponde a las destrezas de cálculo con expresiones algebraicas y el que revisa las propuestas didácticas sobre la enseñanza del álgebra escolar, obteniendo las siguientes aportaciones:

I.6.1. Campo 1: Introducción del álgebra escolar

El álgebra escolar constituye un elemento de alfabetización matemática de los ciudadanos, de modo que el álgebra es simultáneamente la puerta de entrada en el mundo de las matemáticas avanzadas y la puerta de entrada a la ciudadanía

(Edwards, 1990; Kaput, 1998; Silver, 1997; Gamoran y Hanningan, 2000; Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001; Moses y Cobb, 2001). Esta perspectiva justifica plenamente la inclusión del álgebra escolar en los currícula de la enseñanza obligatoria aunque, de forma paralela, habría que reflexionar sobre los contenidos de dicho álgebra que son útiles y comprensibles para todos los escolares.

Aunque el álgebra se introduce tradicionalmente en la adolescencia, por razones históricas, por ideas asumidas sobre el desarrollo psicológico del adolescente, y por los datos que documentan las dificultades de los adolescentes con el álgebra, hay investigadores que defienden la introducción temprana del álgebra escolar porque ello podría facilitar la transición desde la aritmética al álgebra, puesto que así se consigue desplazar el interés desde el aprendizaje de las reglas de manipulación hacia el razonamiento algebraico (Xin, 2008; Discoll, 1999; Kaput, 1998 y1999; NCTM, 1997, 1998 y 2000; Carreher, 2006; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey, 2007). En este sentido, hay investigaciones realizadas con alumnos de Primaria en los que se demuestra la capacidad de los mismos para generalizar situaciones de carácter lineal y de carácter no lineal, así como para traducir enunciados verbales como ecuaciones expresadas que formalmente no son rigurosas (Filloy, Rojano y Solares, 2004; Swafford y Langrall, 2000).

La introducción del álgebra escolar suele hacerse como una aritmética generalizada, como una estructura gobernada por las mismas leyes con las que se operan los números en la aritmética (Eves, 1981), y utilizando el método de tanteo aritmético para introducir a los alumnos en la resolución de las ecuaciones lineales (Kieran, 1992). Ésta forma de presentar el álgebra escolar posibilita que los alumnos relacionen más frecuentemente el álgebra con el significado intuitivo de los objetos y de las operaciones (Turnau, 1990).

Sin embargo, hay otros estudios que cuestionan esta presentación de los contenidos algebraicos porque resulta demasiada confusa y abstracta para muchos alumnos de los primeros cursos; porque el énfasis puesto en finalizar los procedimientos con la obtención de un resultado numérico ayuda a que asimilen los procedimientos intuitivos e informales de la aritmética, pero dificulta la asimilación de los procedimientos abstractos y formales del álgebra en los que el resultado final puede ser, con frecuencia, una expresión algebraica; porque la existencia simultánea de estructuras aritméticas y algebraicas crean conflictos cognitivos en las mentes de los alumnos de los primeros cursos de aprendizaje del álgebra; y porque los alumnos perciben la aritmética y el álgebra como mundos totalmente disociados y si el profesor trata de que los alumnos los relacionan entonces la aritmética obstaculiza la comprensión del álgebra (Steen, 1992; Kieran, 1989; Booth, 1984a; Herscovics y Chalouh, 1985)

En nuestra opinión, es necesario que todos los alumnos adquieran conocimientos algebraicos; y de que lo hagan desde la posición de generalizar resultados aritméticos. Pero también defendemos que los alumnos deben ser conscientes de la ruptura conceptual existente entre estas dos ramas de la matemática. En este sentido, nos parece inconveniente hacer que los alumnos realicen operaciones aritméticas con métodos algebraicos, o que el sentido de las operaciones y relaciones algebraicas se identifiquen con las aritméticas.

I.6.2. Campo 2: Relación entre los lenguajes materno y algebraico

Desde la década de los años 80 hay una abundante literatura en torno a las dificultades que encuentran los alumnos en tareas de escritura de los enunciados verbales en el lenguaje algebraico (Clement, 1982; Clement, Lochhead y Monk, 1981; Clement, Narode y Rosnick, 1981; Kaput y Sims-Knight, 1983; Lochhead, 1980; Mestre, 1988 y Rosnick, 1981; MacGregor, 1991; Sfard y Linchevski, 1994; MacGregor y Stacey, 1992). De estas investigaciones se obtienen conclusiones de interés para nuestro trabajo: los errores cometidos en la formulación de las ecuaciones algebraicas se deben al intento, por parte de los alumnos, de convertir cada oración del lenguaje verbal en una ecuación, cambiando las palabras claves por símbolos de forma secuencial de izquierda a derecha. Esta forma de abordar estas tareas se denomina “traducción sintáctica” (Clement, 1982; Mestre, 1988; Spanos, Rhodes, Dale y Crandall, 1988).

La traducción más adecuada es la denominada “traducción semántica”, que consiste en comprender que existen unas relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas que vienen marcadas por la situación real a la que se refiere el enunciado, y que esta relación debe expresarse mediante el lenguaje simbólico de las ecuaciones (Herscovics, 1989; Kirshner, Awtry, McDonald y Gray, 1991).

Los resultados de estas investigaciones ponen de manifiesto que las dificultades que encuentran los estudiantes están ocasionadas por el sentido de los signos utilizados en el lenguaje algebraico:

-Dualidad en el uso de las letras como abreviaturas de unidades (m = metros) y como variables que relacionan cantidades, o como etiquetas de identificación de objetos;

-Interpretación del signo igual como un signo separador, o como un símbolo de correspondencia o asociación;

-Concebir la ecuación como relación entre grupos de objetos y no como relación entre cantidades de objetos;

-Traducción literal de los enunciados de los problemas algebraicos

-Desconocer el significado de la notación de las ecuaciones, y el significado del concepto de ecuación

Sin embargo, hay autores que mantienen que la conversión directa de situaciones reales -que involucran cantidades y relaciones entre las cantidades en contextos diferentes-, en expresiones algebraicas no le resulta difícil al alumno pues suele conocer el significado de las palabras que permiten hacer la conversión: doble, triple, siguiente, anterior, cuadrado, producto, etc. (Palarea y Socas Robayna, 1999 y 2000). También nosotros opinamos que la errónea identificación de las letras como abreviaturas de sustantivos de objetos -en vez de cómo sustitutos de cantidades de dichos objetos-, y del signo igual como un signo de correspondencia -en vez de cómo un signo de igualdad entre cantidades numéricas-, les lleva a una traducción sintáctica literal, palabra a palabra, sin sentido semántico alguno.

Entre las dificultades que encuentran los alumnos en el paso del lenguaje materno al lenguaje algebraico cabe mencionar el denominado "error de inversión", que consiste en aplicar el sumando corrector o el factor corrector, para aumentar la cantidad que es mayor, o, para reducir la que es menor, en los problemas de comparación (Booth, 1984a; Clement, 1982; Davis, 1984; Herscovics, 1989; Hinsley, Hayes y Simon, 1977; Kaput, 1987; Kirshner, Awtry, McDonald y Gray, 1991; Kuchemann, 1981; MacGregor y Stancey, 1993; Reed, 1987). Según estas investigaciones, los alumnos cometían el "*error de inversión*" porque sitúan los factores -o sumandos- correctores según su ubicación en el texto del enunciado, en la traducción sintáctica del enunciado; porque los alumnos perciben el adjetivo como complemento del sustantivo más próximo; porque los alumnos utilizan de forma automática, y arraigada, reglas sintácticas del lenguaje natural

I.6.3. Campo 3: Interpretación de las expresiones algebraicas

Una parte de las dificultades de interpretación de las expresiones algebraicas tiene origen epistemológico. En efecto, la dualidad semántica como objeto-proceso de las expresiones algebraicas confunde frecuentemente a los alumnos puesto que es necesario saber percibir, en cada paso, si la expresión algebraica dada debe ser contemplada como un objeto o como un proceso (Sfard y Linchevski, 1994).

Pero también estas dificultades epistemológicas pueden producirse entre profesores. Así, en una investigación sobre las actuaciones de profesores en tareas de introducción del álgebra escolar Tirosh, Even y Robinson (1998), concluyen que los profesores novatos no eran conscientes de la tendencia del alumnado a no ver las expresiones algebraicas como algo acabado cuando se han reducido términos semejantes; mientras que los profesores expertos atribuían esa errónea tendencia a que el estudiante está habituado a finalizar las expresiones. Desde estas consideraciones se vislumbra una práctica docente en la que, de forma consciente o inconsciente, profesores y alumnos admiten que la finalidad principal del trabajo algebraico consiste en hallar alguna cantidad desconocida. Esta visión del álgebra escolar limita el aprendizaje del alumno en importantes campos de utilización del lenguaje algebraico, como son la expresión de resultados generales o la formulación de relaciones funcionales entre variables.

Al considerar las características sintácticas y semánticas del lenguaje algebraico encontramos algunas de las causas de las dificultades de los alumnos en el uso correcto de este lenguaje y que corresponden a aspectos cognitivos:

-El bajo grado de competencia lingüística provoca tasas de éxito bajas en el manejo correcto de la notación algebraica (MacGregor La y Price, 1999).

-La baja comprensión del sentido diferenciado de los signos aritméticos y algebraicos tiene importantes implicaciones para que los alumnos alcancen un correcto desempeño de las tareas algebraicas (Knuth y Stephens, 2006; Fuson, 1992b).

-El uso de entes abstractos dificulta el control sobre la veracidad o falsedad de las manipulaciones simbólicas que utiliza el alumno; el control de tales acciones queda limitado a la confianza que el alumno deposite en su memoria (Hazzan y Zarkis, 2005; Eraslan, 2008).

-El uso de referentes del mundo físico facilita la comprensión de expresiones algebraicas situadas en una determinada estructura aritmética, a la vez que dificulta la comprensión de otras expresiones situadas en diferente estructura aritmética (Booth, 1983 y1984a).

Observamos, por tanto, que la dificultad del uso correcto del lenguaje algebraico proviene de obstáculos tanto epistemológicos, como didácticos y como cognitivos. Diagnosticar en cada situación el origen de las dificultades del alumno resulta esencial para incrementar su comprensión del lenguaje algebraico.

I.6.4. Campo 4: La resolución de problemas algebraicos

En la enseñanza habitual del álgebra escolar, los profesores suelen presentar los problemas de álgebra siguiendo una secuencia respetuosa con la dificultad creciente que ellos creen que tienen los alumnos cuando van a resolverlos, aunque las formas de razonar de los profesores, y de los autores de libros de texto, difiere mucho de la forma de razonar de los alumnos, pues para éstos últimos es muy relevante la posición que ocupa la incógnita en el enunciado del problema y la presentación lingüística del problema (Nathan y Koedinguer, 2000).

En la investigación de Threadgill-Sowder (1982) los alumnos de 13 años obtienen mejores resultados en la utilización del lenguaje algebraico si los enunciados se presentan de forma gráfica. Y en el mismo sentido caben citar los resultados de Cobo (1995), quien concluye que la presentación de problemas verbales con gráficos asociados, tiene una incidencia mayor sobre los alumnos clasificados como poco hábiles en la resolución de problemas.

Pero también existen resultados que contradicen los anteriormente citados; así en el trabajo de Markovits (1986) se concluye que, en estudiantes de 18 años, la presentación puramente verbal de problemas de razonamiento condicional producía resultados significativamente superiores que la presentación verbal con gráficos añadidos como referencias concretas de tales problemas.

Nos parece oportuno señalar que de estos resultados parece extraerse que el lenguaje gráfico favorece la comprensión de los problemas en edades tempranas, pero que va desapareciendo conforme los alumnos alcanzan el final de la educación secundaria. Ahora bien, esta primera valoración debe matizarse al considerar el ámbito de aplicación. En efecto, hay ocasiones en las que la representación gráfica de ciertos problemas (aritméticos o algebraicos) puede ser más compleja que su comprensión y resolución aritmética o algebraica, como sucede en muchos problemas de Física. Además, hay una amplia variedad de situaciones problemáticas, del ámbito algebraico, que no admiten una representación gráfica, o que dicha representación gráfica resulta compleja o no sirve de ayuda; así ocurre en problemas que implican relaciones entre números o cifras de números.

Existe un importante número de publicaciones que inciden en apoyar el trabajo de los alumnos con recursos tecnológicos; así se indica que los alumnos formados con medios informáticos se muestran más eficaces en la construcción de modelos, en la interpretación de las funciones y en el paso entre las representaciones tabular, gráfica y simbólica de las funciones algebraicas; además, presentan una actitud menos ansiosa y muestran más interés por las matemáticas (O´Callaghan, 1998); también se indica que la calculadora gráfica, al permitir simultáneamente la representación tabular-algebraica-gráfica de las funciones, es un útil instrumento para que los estudiantes comprendan mejor los conceptos algebraicos (Kaput, 1992; Kaput, Noss y Hoyles, 2002); el uso combinado de medios visuales e informáticos, o las representaciones animadas, ayudan a los estudiantes a conectar entre sí conceptos matemáticos diferentes y a recordar tales conceptos (Cavanagh, 2008; Nathan, Kintsch y Young, 1992, Koedinguer y Anderson, 1997; Kieran y Drijvers, 2006).

Pero también hay investigaciones que cuestionan los resultados al utilizar nuevas tecnologías. Así, el uso de la calculadora gráfica permite a los estudiantes comprender mejor las diferentes representaciones de las funciones pero no mostraban ni mejores ni peores resultados en la utilización del método algebraico para la resolución algebraica de las ecuaciones que aquellos que habían recibido una enseñanza de tipo tradicional; tampoco mejoró ni empeoró su actitud hacia las matemáticas (Hollar y Norwood 1999); además, se constata que los estudiantes formados con apoyo informático eran un poco más hábiles en la resolución de problemas pero eran más torpes en la resolución algebraica de las ecuaciones (Huntley, Rasmussen, Villarubi, Sangtong y Fey, 2000; Yerushalmy, 2006).

Existen investigaciones que inciden en la importancia del contexto en el que se formulan los problemas algebraicos. Así, se defiende que una eficaz coordinación entre la enseñanza de las matemáticas y la enseñanza de la física puede mejorar la comprensión de ambas materias (García Carmona, 2006); o que la utilización de modelos físicos, como máquinas que simulan poleas demuestran que los alumnos pueden comprender el diferente papel de las letras como variables y como incógnitas y mejorar la comprensión del lenguaje algebraico (Izsác, 2003); o que un contexto económico de leyes económicas de Oferta, Demanda y de Puntos de

Equilibrio entre Beneficios y de Precios facilita a los alumnos la resolución de problemas algebraicos (Galagovsky y Cittadini, 2008).

También hay investigaciones, de gran interés para nuestro trabajo, que abordan la problemática de la formulación de problemas algebraicos por parte de los alumnos. Esta actividad está explícitamente recomendada por el NCTM (1989) pues es una actividad muy beneficiosa para comprender los conceptos matemáticos (Silver, 1994; Simon, 1993; Brown y Walter, 1993; Kilpatrick, 1987; Moses, Bjork y Goldenberg, 1990), Silver, 1990 y 1994; Silver y Mamona, 1989). De hecho, se encuentra una clara correlación entre la habilidad para la invención de problemas y la habilidad para resolverlos (Silver y Mamona, 1989; Silver y Cai, 1993; Silver, 1994; Haylock, 1987; Ellerton, 1986; Leung, 1993).

La actividad de formular enunciados por parte de los alumnos depende de la formación de los profesores, así los profesores de secundaria en prácticas tendían claramente a preferir el método algebraico, incluso en aquellos casos en los que la solución aritmética era la más evidente; mientras que los profesores de primaria en prácticas tendían a usar exclusivamente el método aritmético aunque dicho método les llevase a cometer numerosos fallos (Van Dooren et al, 2002). En consecuencia, es de suponer que la formulación de enunciados es una actividad que pueden abordar los profesores de secundaria, pero no lo de primaria. Es más, teniendo en cuenta que los alumnos encuentran más dificultades en enunciar problemas algebraicos que en enunciar problemas aritméticos, la creatividad de formular problemas algebraicos disminuye cuanto más alto es el curso de la enseñanza secundaria que estén cursando puesto que los alumnos se encuentran cada vez más lejos del método aritmético (Kilpatrick, 1987; Lester, 1989; Resnick y Resnick, 1992)

I.6.5. Campo 5: Destrezas de cálculo en el lenguaje algebraico

Tirosh, Even y Robinson (1998), a partir de una observación parcial sobre la tendencia del alumnado a no ver las expresiones algebraicas simplificadas como algo acabado, destacaron que también los profesores, principalmente los profesores noveles, no son conscientes de los errores que cometen los alumnos ni, en consecuencia, de las causas del comportamiento de los alumnos.

En los trabajos de Demby (1997) se categorizan los procedimientos de cálculo algebraico utilizados por estudiantes de 13-15 años, haciendo notar que los estudiantes con mayor éxito son los que utilizan procedimientos semánticos, por lo que reclama una enseñanza que equilibre los aspectos sintácticos y semánticos del álgebra escolar.

Palarea y Socas Robayna (1999 y 2000) señalan que los alumnos tienden a utilizar reglas prácticas fijas aprendidas que predominan sobre el conocimiento conceptual. A pesar de haber incorporado un cierto conocimiento conceptual del nuevo registro, las habilidades operacionales subyacentes (Sistema de Representación Semiótica

Formal Aritmético) les hacen escribir errores porque no comprenden su significado en el nuevo registro.

En cuanto a los errores cometidos por los estudiantes hay divergencias entre los investigadores. Una parte de ellos se producen porque los alumnos manipulan las expresiones algebraicas sin respetar las rigurosas reglas del álgebra, produciendo un fenómeno denominado "*formalismo degenerado*" (Krygowska, 1977); este fenómeno aparece como consecuencia de que los estudiantes no tienen una referencia aritmética para contrastar la corrección de sus cálculos algebraicos y, en consecuencia, los estudiantes formulan unas reglas propias que son muy diferentes de las reglas algebraicas correctas (Cwik, 1984).

Para otros autores los errores surgen como consecuencia de que los alumnos utilizan unos resultados memorísticos, que no van acompañada de una adecuada comprensión de las estructuras algebraicas que dotan de significado a las operaciones y a las manipulaciones que realizan con las expresiones algebraicas; es más, los errores son habituales entre alumnos de todas las edades y no existen diferencias en las habilidades de alumnos de distintas edades (Hart, 1981; Booth, 1981, 1983-1984, 1984b; Kuchemann, 1981b; Kaput, 1992; Kieran, 1992; Yerushalmy y Chazan, 2002; Radford y Bardini, 2007; Huntley, Marcus, Kahan y Miller, 2007).

Consideramos importante que los alumnos usen métodos informales de resolución de ecuaciones, pues el método aritmético nos parece rico en estrategias y relaciones. Desde esta posición se podrá construir de forma cognitivamente significativa una estructura matemática con leyes y significados diferentes a los aritméticos. Esta posición conlleva un cambio en la enseñanza de la aritmética escolar en el sentido de que la aritmética sirva para que los alumnos apliquen y usen las reglas propias de este ámbito, y para que no se fuerce a los alumnos a utilizar unas reglas (la propiedad distributiva, extraer factor común,…), que se emplean para adelantar las reglas que se utilizarán en el ámbito algebraico.

I.6.6. Campo 6: Propuestas didácticas

Hay propuestas que se sustentan en la idea de trabajar las expresiones algebraicas en contextos realistas (Tirosh, Even y Robinson, 1998), entre los que unos autores seleccionan el entorno económico (Galagovsky y Cittadini, 2008), o entornos científicos de la Física (García Carmona, 2006)

Otras tendencias analizadas en propuestas didácticas ponen el énfasis en los recursos materiales apropiados para facilitar el aprendizaje. Así, Sutherland (1991) trabajó con el lenguaje informático Logo y concluyó que la mayoría de los estudiantes encontraban normal la falta de finalización de las expresiones algebraicas. Y al mismo resultado llegaron Tall y Thomas (1991) utilizando un programa informático denominado "Módulo de álgebra Dinámica".

En el mismo sentido cabe incluir el trabajo de Huntley, Rasmusen, Villarubi, Sangtong y Fey (2000) que elaboran una propuesta sobre el aprendizaje del álgebra utilizando un entorno informático gráfico enmarcado en el “Core-Plus Mathematics Project”, y observaron que dicho recurso hace que los alumnos sean más hábiles cuando hay que resolver problemas de palabras presentados en contextos reales y cuando se les permite el uso de la calculadora gráfica, aunque son menos hábiles cuando se trata de manipular expresiones algebraicas abstractas y cuando no se les permite usar la calculadora gráfica. También cabe citar el trabajo de Swee Fong y Lee (2009), quienes utilizan un proceso instructivo de carácter autodidacta, al que denominan “Método del Modelo”, que utiliza diagramas para ayudar e los alumnos que tienen dificultades de aprendizaje. Y en el mismo sentido cabe situar el trabajo de Kirshner y Awtry (2004), que proponen utilizar un esquema de ayuda que visualiza el significado de las reglas y procedimientos que se han de aplicar en las expresiones algebraicas.

También destacamos la propuesta de Thompson y Senk (2001), quienes proponen utilizar conjuntamente la tecnología, la formulación de tareas en contextos reales, la revisión continúa de lo enseñado y una metodología adaptada al uso de distintos recursos.

Por último reseñamos las propuestas del NCTM (1989, 2000), por la importancia de este organismo, y porque su propuesta está sustentada en el uso conjunto de distintos sistemas de representación: expresiones verbales, tablas numéricas, ecuaciones algebraicas y representaciones gráficas. En esta propuesta se apuesta por incrementar la comprensión de los alumnos trabajando las conexiones entre distintos sistemas de representación; es más, también se propone potenciar la que los alumnos, en cada caso, evalúen la pertinencia de los sistemas de representación utilizados.

Vemos, por tanto, que la complejidad del problema de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar, ofrece perspectivas muy variadas para los investigadores.

I.6.7. Balance

De la revisión de los documentos que hemos analizado hemos obtenido las siguientes conclusiones:

- 1) Hay una literatura clásica sobre la enseñanza del álgebra escolar, que puede asociarse al periodo final de la enseñanza de la llamada Matemática Moderna, cuyos resultados han marcado las investigaciones posteriores. Estas investigaciones, en buena medida, se abordan desde posiciones cercanas a la Psicología, y en menor medida en el ámbito de la pedagogía. A partir de las producciones de estos autores se tiene la sensación de que el estudio sobre el álgebra escolar casi se ha completado, que hay pocas aportaciones nuevas desde la Didáctica de la Matemática.

- 2) Desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática, las aportaciones de muchos de los trabajos revisados tienen una relevancia poco notable, pues hay importantes lagunas en el análisis de los conceptos matemáticos puestos en juego, así como de las potencialidades y limitaciones de las alternativas que se proponen.

- 3) Es de destacar que muchos de los documentos consultados justifican la pertinencia de su investigación en la necesidad de superar las dificultades de comprensión que tienen los escolares con la manipulación del lenguaje algebraico como sistema formal de relaciones entre entes abstractos. Resulta llamativo que buena parte de los investigadores se limiten a modificar algunos aspectos parciales de la enseñanza pues, en su opinión, estos cambios serán suficientes para mejorar el rendimiento del proceso educativo.

- 4) En buena parte de los trabajos analizados se refleja una preocupación de los investigadores por sustentar la enseñanza en la contextualización de los problemas en el mundo real. Pero, en general, no se hace un análisis de las potencialidades y limitaciones que pueden presentar los contextos considerados realistas; en consecuencia, una herramienta conceptual de esta importancia puede quedar desvirtuada por que el contexto buscado crea más dificultades en los alumnos; así, por ejemplo, los alumnos encuentran dificultades de interpretación de los enunciados cuando se usan magnitudes del ámbito de la física que no son tangibles, como es el caso de la velocidad o de la densidad.

- 5) En muchos artículos se aborda la realidad de que el lenguaje algebraico tiene unas características sintácticas y simbólicas cuyo análisis es esencial para determinar los aspectos del concepto que potencia cada uno de los sistemas de representación, así como aquellos aspectos que quedan ocultos o cuya percepción es obstaculizada por el propio sistema de representación.

- 6) No hemos encontrado, en las investigaciones revisadas, que los autores muestren algún grado de preocupación por las tareas de comprobación de los resultados obtenidos en la resolución de ecuaciones algebraicas. Ausencia que, en nuestra opinión, resulta llamativa por cuanto la comprobación constituye un recurso apropiado para que los aprendices puedan controlar un trabajo que realizan con entes abstractos y aplicando reglas formales que han memorizado.

I.7. Objetivos de la investigación

En este trabajo estamos interesados en hacer indagaciones con estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria para observar si la implementación de una propuesta didáctica alternativa les permite mejorar las conexiones entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico. El resultado de esta investigación será útil para diseñar un currículo escolar que promueva el incremento de los conocimientos matemáticos.

Para la consecución de nuestros propósitos, esta investigación -que enfoca la comprensión de unos determinados estudiantes-, se debe diseñar de manera que proporcione un análisis detallado de cómo interaccionan los elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje (Hiebert y Carpenter, 1992). Consecuentemente, en este trabajo indagatorio se aborda la elaboración de una propuesta didáctica, su posterior implementación en un grupo natural de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria, el análisis posterior de la información obtenida y una evaluación final de la propuesta implementada.

Con ese fin se contempla, en primer lugar, una revisión bibliográfica. La documentación estudiada ha permitido que el investigador elabore esta propuesta desde una perspectiva multidimensional: las características matemáticas del álgebra escolar; los obstáculos y dificultades que condicionan el aprendizaje de este tópico matemático; las concepciones y errores más frecuentes que se han detectado en los estudiantes; y las propuestas didácticas que han experimentado otros investigadores.

En segundo lugar se contempla, desde el punto de vista de la investigación, que es ineludible observar la construcción del conocimiento en los entornos en que se produce y a los que tiene acceso el investigador (Resnick et al., 1989, pag 11). Por ello, concedemos prioridad al aula como espacio natural en que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje y en el que se contempla toda la riqueza y multiplicidad de las variables que lo conforman. Queda así marcado como objetivo prioritario estudiar el proceso constructivo de los contenidos del álgebra escolar en la situación formal en la que dicho proceso tiene lugar. Pensamos que este enfoque permite, desde una dimensión social, una mayor aproximación e integración entre la teoría y la práctica (Bauersfeld, 1994, pág. 134); aunque somos también conscientes de que abordar el estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el contexto en que se producen es compleja y problemática.

En tercer lugar, y atendiendo a las recientes investigaciones sobre Psicología del aprendizaje, se contempla situar al estudiante como agente principal en la construcción de sus conocimientos. Esto supone utilizar estrategias metodológicas en las que se prioricen los trabajos de estos estudiantes: *"Las presentaciones claras por si mismas son inadecuadas para sustituir los errores por ideas claras. Lo que los estudiantes construyen por si mismos, aunque pueda ser inadecuado, está con frecuencia lo suficientemente arraigado como para no ser erradicado con una explicación seguida de unos pocos ejercicios"* (National Research Council, 1989, pág. 60). Estas producciones de los escolares, junto a otras informaciones, nos permitirán observar cómo éstos adquieren y organizan los conocimientos, y cómo esa organización se modifica con el tiempo y con las experiencias del que aprende (Resnick y Ford, 1991; Coob, 1987; Brousseau, 1986); y también nos permitirán caracterizar sus concepciones y afrontar la superación de sus errores (Radatz, 1980; Movshovitz-Hardar et al, 1987).

Igualmente se contempla la posición del investigador a lo largo del proceso. En este trabajo el investigador se sitúa como miembro pleno de la situación que estudia, pues es el investigador el que asume el trabajo de campo como profesor de aula en el Instituto de Educación Secundaria "Goya" de Zaragoza. Más concretamente, el investigador ocupa la posición de profesor integrado en un grupo de trabajo que adopta el método de Investigación-Acción (Elliot, 1990; Kemis y McTaggart, 1988; Mcniff, 1991). Desde esta posición hay que entender que las preocupaciones del investigador tienen el propósito de mejorar el trabajo diario y de encontrar soluciones inmediatas a los problemas que aparecen en la realidad cotidiana; mientras que los resultados de la investigación tienen un sentido personal de validación y de mejora de la tarea profesional pues el investigador realiza una indagación de tipo práctico (Romero, 1995).

Por lo tanto, el autor de esta tesis asume el papel de investigador en Didáctica de las matemáticas y el de profesor de un grupo natural de estudiantes de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Esta posición del investigador nos ha exigido tomar las cautelas necesarias para garantizar la fiabilidad y validez de la investigación. En tal sentido, y como se detalla el Capítulo III, se han cuidado con especial atención las exigencias de fiabilidad y validez del proceso atendiendo a aspectos tales como los métodos de recogida y análisis de los datos, la autovigilancia del investigador; y la descripción rica, detallada y completa del proceso.

Respecto al proceso instructivo destacamos los trabajos de investigación en Didáctica de las matemáticas que han puesto de manifiesto la complejidad de conceptos, relaciones, operaciones y propiedades que conforman el aprendizaje y comprensión del álgebra escolar. En este sentido, y situados en el campo del Pensamiento Numérico, abordamos el estudio sobre la formación matemática de los futuros ciudadanos desde distintas reflexiones:

- Para que el proceso de construcción del conocimiento sea efectivo es preciso disponer de un medio físico y natural, utilizado como escenario idóneo para la formación de conceptos y, además, como área de aplicación de los mismos. Así, a partir de la comprensión aritmética de las situaciones reales descritas en los enunciados de los problemas de álgebra y combinando pensamiento con experiencia, la formación de ideas sobre el lenguaje algebraico aparece conectada con la realidad.

- Ahora bien, para que los estudiantes incrementen sus conocimientos es necesario que los esfuerzos se centren en la resolución de situaciones problemáticas: "*es a través de la resolución de problemas como un concepto cualquiera adquiere sentido para un alumno. Este proceso de elaboración pragmática es esencial para la psicología y la didáctica, como es esencial para la historia de las ciencias*" (Vergnaud, 1990, pág. 135). Estas situaciones problemáticas deben tener sentido para dichos estudiantes y ser generadoras de conflictos que favorezcan el sentido y usos del lenguaje algebraico y no habilidades rutinarias y reglas para su aplicación.

- Además, es necesario fomentar un "aprendizaje intencionado" (Scardamalia et al., 1989), o aprendizaje en el que la construcción del conocimiento sea un proceso abierto y en el que los estudiantes tomen responsabilidades sobre el mismo. Para ello, se favorece un clima de la clase libre de presiones externas en el que los estudiantes puedan examinar sus propios errores, tengan oportunidades para el diálogo, y acepten que la comprensión de las ideas algebraicas exige de un esfuerzo personal importante y de un tiempo amplio para la acomodación de los nuevos conocimientos con los que ya tenían (Hatano e Inagaki, citados por Sowder et al, 1993, pág. 258).

En base a todas las consideraciones anteriores precisamos los objetivos generales que orientan nuestra investigación:

Objetivo I:

Diseñar una Propuesta Didáctica para la enseñanza del lenguaje algebraico en la Educación Secundaria obligatoria, que constituya una alternativa a la enseñanza habitual del lenguaje algebraico que está sustentada en dar la prioridad a los contenidos procedimentales. Para alcanzar este objetivo se marcan los siguientes objetivos parciales:

I.a: Revisar el significado que los alumnos conceden a las letras y a las expresiones algebraicas haciendo especial énfasis en los aspectos sintácticos y semánticos del lenguaje algebraico.

II.b: Incorporar la comprobación de las soluciones como componente esencial en la resolución de problemas algebraicos, destacando la comprobación semántica como la más adecuada.

II.c: Articular secuencias de enseñanza para potenciar las conexiones entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, potenciando especialmente la traducción del lenguaje algebraico al lenguaje natural pero trabajando la traducción en ambos sentidos.

Objetivo II:

Explorar las potencialidades y limitaciones de la Propuesta Didáctica cuando se implementa con grupos naturales de alumnos de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Este objetivo queda desglosado en los objetivos parciales siguientes:

II.a: Precisar los medios, los recursos y la organización necesarios para la recogida de la información.

II.b: Definir las unidades de análisis para procesar la información, atendiendo a la comprensión de los alumnos, a la eficacia de la propuesta didáctica y las estrategias metódicas utilizadas.

II.c: Analizar y valorar los resultados obtenidos.

I.8. Marco de la investigación

Este trabajo se sitúa en un campo general que denominamos Pensamiento Numérico y Algebraico, que constituye una de las líneas de investigación que articulan el desarrollo de la investigación en Didáctica de la Matemática en España en el momento presente, y que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos numéricos en el sistema educativo y en el medio social.

La línea de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas (Rico y Castro, 1995; pág. 167).

El marco conceptual en que se sitúa esta línea de investigación se sustenta en los siguientes principios (Castro, Rico y Romero, 1997):

-Asume que la construcción del conocimiento matemático es un fenómeno social y cultural y que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad.

-Centra su objeto de reflexión en el campo de las matemáticas que comienza con la aritmética escolar, avanza por los sistemas numéricos superiores y continúa con el estudio sistemático de las relaciones numéricas.

-Tiene una orientación esencialmente curricular.

-El estudio de los errores y dificultades en la compresión de los escolares sobre los campos conceptuales reseñados es parte esencial de la tarea de análisis e interpretación que se lleva a cabo en esta línea de investigación.

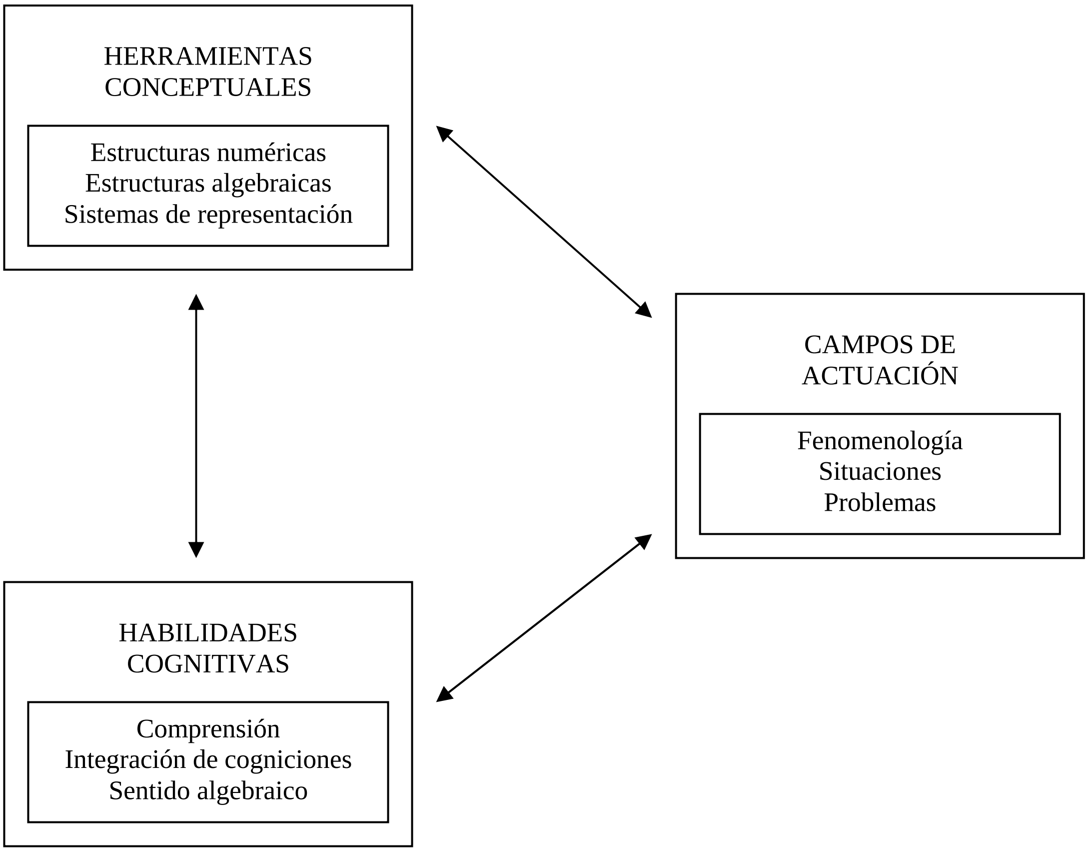
El Pensamiento Numérico y Algebraico realiza una aproximación analítica al estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales sobre la base de un esquema funcional con tres componentes (Castro, 1994; pág.1):

- Unas herramientas, donde destacan la elaboración, codificación y comunicación de sistemas simbólicos con los que expresar los conceptos y relaciones de una estructura numérica.

- Unas competencias, donde resaltan la organización, sistematización y desarrollo de diferentes actividades cognitivas que surgen y encuentran un modo de actuación en el marco de una estructura numérica.

- Un campo de problemas, en donde se consideran los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos y cuestiones que admiten ser analizados mediante los conceptos y procedimientos que forman parte de una determinada estructura numérica.

En esta investigación vamos a utilizar el esquema funcional que proponen Rico, Castro, Castro, Coriat y Segovia (1997), tal y como indicamos en el siguiente cuadro:



I.9. Metodología de investigación

Para alcanzar uno de los objetivos de nuestra investigación, el diseño de una propuesta didáctica curricular alternativa a la que actualmente se suele implementar en la enseñanza habitual del álgebra escolar, hemos considerado tres elementos o componentes que se recogen en los métodos de investigación denominados Análisis Didáctico (Gómez, 2006; Godino et al, 2006; Gallardo y González, 2006) y Modelos Teóricos Locales (Puig, 2006; Contreras y Gómez, 2006): análisis conceptual (referido al contenido matemático), análisis cognitivo (referido al aprendizaje matemático) y análisis didáctico (referido a la instrucción).

Además, hemos incorporado un análisis sobre la práctica educativa que, sobre el álgebra escolar, se desarrolla actualmente en Educación Secundaria Obligatoria. Este análisis, que no se contempla en los métodos de investigación citados en el párrafo anterior, nos resulta esencial para establecer relaciones entre el rendimiento de los alumnos y la enseñanza que reciben. Conocer estas relaciones orienta para el estudio de alternativas didácticas cuyas metas sean las de mejorar la comprensión de los escolares.

En cuanto a la implementación de la propuesta en el aula hemos adoptado la metodología de trabajo denominada Investigación-Acción por ser la más adecuada a nuestras necesidades; metodología que se enmarca en el paradigma cualitativo, puesto que acentúa la consideración de la naturaleza socialmente construida de la realidad, la íntima relación entre el investigador y el problema investigado y los condicionantes situacionales que dan forma a la investigación (Denzin y Lincoln, 1994, pág. 4).

En nuestro trabajo utilizaremos el carácter recursivo de esta metodología que nos permite diseñar e implementar una propuesta curricular sobre el álgebra escolar para alumnos de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria (14-15 años) y en la que cubriremos las fases de Planificación, Acción, Observación y Reflexión. Este estudio de Investigación-Acción nos permite profundizar en la interpretación de los resultados y, atendiendo a los fenómenos que aparecen, ajustar la propuesta curricular. Esta metodología de investigación se desarrolla con mayor amplitud y profundidad en el Capítulo III

I.10. Diseño de la investigación

El trabajo de investigación se organiza en torno a tres ámbitos: teórico (Capítulo I y II), metodológico (Capítulo III) y de aplicación (Capítulo IV, V y VI).

El trabajo termina con el análisis de unas pruebas de evaluación de nuestra propuesta curricular alternativa y con las conclusiones de la investigación y las perspectivas para futuras investigaciones sobre la enseñanza del lenguaje algebraico en la Educación Secundaria Obligatoria.

A continuación adelantamos los aspectos más destacados de cada uno de los capítulos de esta memoria de investigación:

-<u>Capítulo I: El problema de investigación:</u>

En el primer capítulo, como ya hemos visto, analizamos las dificultades que encuentran los alumnos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en la comprensión del lenguaje algebraico desde la perspectiva teórica de la investigación de la Didáctica de las matemáticas. Para realizar dicho análisis, hemos examinado previamente una amplia bibliografía sobre la investigación de la enseñanza del lenguaje algebraico que abarca aproximadamente los últimos 20 años (desde el 01-01-1990 hasta el 01-12-2009).

-<u>Capítulo II: El álgebra escolar:</u>

En este capítulo estudiamos la gestación del lenguaje algebraico en el mundo de las Matemáticas, la enseñanza de dicho lenguaje en las Enseñanzas Medias del pasado (desde la fundación de los primeros institutos a mediados del siglo XIX hasta el año 2001), y su enseñanza en la práctica docente de la ESO (12-16 años) desde el año 2001 hasta el momento presente.

-<u>Capítulo III: Metodología de investigación:</u>

En este capítulo: desarrollamos el marco metodológico de la "Investigación-

Acción" en el que se desenvuelve esta tesis doctoral; concretaremos los tres focos de nuestra investigación sobre la enseñanza del lenguaje algebraico en la ESO -el significado de las letras según la expresión matemática en la que aparezcan (Primer Foco), la comprobación de las soluciones (Segundo Foco) y el fortalecimiento de las conexiones entre el lenguaje natural o materno y el lenguaje algebraico en ambos sentidos (Tercer Foco)-. Terminamos el capítulo especificando las respectivas unidades de Organización de Contenidos (OC) y unidades de análisis de Comprensión de Contenidos (CC) de los tres focos para el estudio de las potencialidades y limitaciones de nuestra propuesta.

-Capítulo IV: Fase de planificación y Acción:

En una primera parte del capítulo, la dedicada a la Fase de planificación, exponemos los objetivos, los contenidos, la metodología, los criterios de evaluación y el calendario previsto de las actividades que propondremos en nuestra propuesta curricular de enseñanza del lenguaje algebraico que va dirigida al nivel de enseñanza de Tercer Curso de Educación Secundaria Obligatoria (14-15 años).

En una segunda parte del capítulo, la dedicada a la Fase de acción, describimos la realidad psicológica y sociológica del grupo de 33 alumnos de 3º de ESO con el que experimentamos la propuesta en el Instituto "Goya" de Zaragoza durante el curso 2007-2008, así como el calendario realmente implementado durante dicha experimentación.

-Capítulo V: Fase de observación:

En este capítulo exponemos la observación y el análisis de los resultados que obtuvimos al implementar nuestra propuesta curricular de enseñanza del lenguaje algebraico –constituida por unas actividades que van numeradas del 1 al 9- en un grupo de 33 alumnos de 3º de ESO del Instituto "Goya" de Zaragoza durante el curso 2007-08. Lo que nos interesa es estudiar –a través del examen de las tablas de resultados y de las respuestas individuales que sean representativas- cuál es el grado de comprensión de contenidos que alcanzó el grupo de estudio con el que realizamos la experimentación de nuestra propuesta en el aula.

-Capítulo VI: Fase de reflexión:

En la primera parte de este capítulo reflexionamos sobre la perdurabilidad -a corto plazo (una semana después) y a largo plazo (unos tres meses después)- de los contenidos de nuestra propuesta curricular alternativa en el grupo de estudio, mediante la observación y el análisis de los resultados de una prueba individual y escrita que les hicimos repetir dos veces.

En la segunda parte de este capítulo exponemos las conclusiones a las que llegamos sobre la comprensión y la aplicabilidad de la propuesta y las perspectivas de investigación que consideramos que nuestro trabajo ha abierto.

Capítulo II:

El Álgebra escolar

II.1. Introducción

En este capítulo abordamos el análisis del contenido, en este caso el álgebra escolar, porque constituye uno de los elementos característicos del método de investigación denominado Análisis Didáctico que, como ya señalábamos en el Capítulo I, es el método que hemos adoptado en este trabajo.

El análisis del contenido que hemos realizado lo organizamos en tres grandes apartados:

- <u>El desarrollo del Álgebra como disciplina científica.</u>

  Hemos utilizado la denominación *álgebra matemática* en referencia a la disciplina que utiliza la comunidad matemática, y cuya historia empieza en la Edad Antigua y llega hasta nuestros días.

  Para estudiar la gestación del álgebra matemática hay que recurrir a los estudios de los especialistas en la Historia de las Matemáticas. A través de tales trabajos se puede seguir la evolución del lenguaje algebraico desde sus primeros balbuceos en la Antigüedad hasta el álgebra moderna -o álgebra de estructuras- de nuestro tiempo.

- <u>La evolución de la enseñanza del álgebra en la enseñanza no universitaria</u>

  Denominamos *álgebra escolar* a los contenidos de Álgebra que se enseñan en los primeros cursos de la enseñanza secundaria de nuestro país, y su historia empieza a mediados del siglo XIX con la fundación de los primeros institutos públicos y llega hasta el presente. El estudio histórico sobre la enseñanza del álgebra escolar lo realizamos desde una triple perspectiva

-Análisis sobre la organización del sistema educativo español desde que se consolidó, hacia 1857, hasta nuestros días.

-Análisis de los datos demográficos sobre la población estudiantil de Zaragoza.

-Análisis de manuales y libros de texto de los diferentes sistemas educativos españoles.

- Las características de la enseñanza del álgebra escolar en el actual sistema educativo español.

  En el actual sistema educativo español, la instrucción sobre el *álgebra escolar* se realiza en la Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años).

  En este trabajo focalizaremos nuestro análisis en el curso de 3º de ESO (14-15 años) porque ese es el nivel educativo para el que diseñamos específicamente nuestra propuesta de enseñanza

II.2. Historia del álgebra matemática

El álgebra de los "sabios", de los investigadores matemáticos, se ha ido formando desde los primeros balbuceos en la Antigüedad hasta el desarrollo de las abstractas estructuras algebraicas de los dos últimos siglos XIX y XX.

Para nuestro estudio histórico, hemos elegido los períodos más decisivos y, dentro de cada uno de éstos, hemos seleccionado su personalidad más representativa. Así, estudiaremos:

- La Edad Antigua
- La Edad Media
- La Edad Moderna
- El álgebra moderna o álgebra de estructuras

Para la redacción de este breve apartado II.2 nos hemos basado fundamentalmente en los historiadores matemáticos Boyer (1999) y Wussing y Arnold (1989).

II.2.1. La Edad Antigua

Dentro de este período histórico distinguimos dos hitos: el "*álgebra retórica*" de las primeras civilizaciones de Mesopotamia y Egipto y el "*álgebra sincopada*" de Diofanto de Alejandría.

a) El álgebra retórica de Mesopotamia y Egipto

Mesopotamia y Egipto crearon complejos estados basados en la agrimensura, los impuestos, los volúmenes de los depósitos de cereal, las grandes construcciones, etc.… que propiciaron la creación de un álgebra retórica muy ligada a la resolución práctica de problemas muy concretos.

Dicha álgebra retórica de Mesopotamia y Egipto tuvo las siguientes características:

-Resolvía ecuaciones muy concretas de primer, segundo y tercer grado muy estrechamente vinculadas a problemas prácticos muy concretos.

-La resolución de tales ecuaciones se expresaban oralmente, tal y como sugieren los escritos encontrados en las escuelas de formación de los funcionarios mesopotámicos y de los escribas egipcios. Por ello hablamos de un álgebra “retórica”.

b) El álgebra intermedia o sincopada de Diofanto de Alejandría

En un mundo matemático dominado por la geometría griega -de carácter teórico y deductivo e independiente de realidades prácticas- surgió la figura aislada, sin predecesores ni continuadores, de Diofanto de Alejandría (entre el 150 y el 350 d.c) que presenta las siguientes características:

-Se apartó del desarrollo de la geometría griega de carácter teórico-deductivo.

-En vez de buscar la solución aproximada de ecuaciones concretas de hasta tercer grado, tal y como había hecho la escuela babilónica, buscó la solución exacta de ecuaciones concretas y generales de hasta tercer grado.

-Ideó una novedosa notación simbólica basada en abreviaturas y en el uso de las propiedades de las operaciones de potencias. Tal notación no utilizaba símbolos especiales para las operaciones y relaciones y la expresión de las potencias no era tan sencilla como la nuestra, de carácter exponencial. Así, según Boyer (1999), Diofanto expresaba un número desconocido como s, su cuadrado como Δ^{γ}, su cubo como K^{γ}, su cuarta potencia como $\Delta^{\gamma}\Delta$, su quinta potencia como ΔK^{γ}, su sexta potencia como $K^{\gamma}K$, etc.

Desafortunadamente, la obra de Diofanto fue poco influyente porque fue percibida como una colección de problemas que se alejaba de la exposición deductiva, típica de la geometría euclidiana, que tanto atraía a los matemáticos de cultura greco-helena de la Antigüedad clásica.

II.2.2. La Edad Media

Durante la Edad Media, el álgebra se desarrolló en el mundo árabe. En especial, destaca Al-Khowarizmi (fallecido en Bagad en el 850 d.c.) que escribió la obra **“**De numero indorum**”**, que introdujo en Europa el sistema de numeración inventado en la India que actualmente utilizamos, y la obra “Al-jabr wa´l muqabalah” que originó la palabra “álgebra” y que es la obra más relevante de este período en lo que a álgebra se refiere. La obra “Al-jabr wa´l muqabalah” presenta las siguientes características:

-Era de carácter retórico: en ella no se utilizaba la notación intermedia o sincopada de Diofanto e incluso los números estaban escritos con palabras, en vez de usar los símbolos numéricos hindúes que el mismo autor de esta obra había introducido en Europa en otra obra suya.

-Estaba dedicaba a la resolución de problemas de carácter mucho más elemental que los de Diofanto.

-Se realizaba una exposición directa y elemental de la resolución de las ecuaciones de segundo grado.

-Se seguía una argumentación lógica, correcta y clara desde unas premisas a una conclusión.

-Estaba organizada sistemáticamente.

Podemos resumir lo anterior diciendo que la obra “Al-jabr wa´l muqabalah”, a pesar de su carácter retórico, trajo a Europa un álgebra basada en una argumentación lógica que partía de unas premisas y acaba en unas conclusiones, y que estaba organizada sistemáticamente.

II.2.3. La Edad Moderna

Dentro de este período distinguimos las tres etapas del álgebra renacentista, de la geometría algebraica y del álgebra de la Ilustración. Pasamos ahora a destacar las características más importantes de cada una de las tres etapas anteriores:

a) El álgebra renacentista

El Renacimiento, originario de Italia y difundido luego por toda Europa, dio lugar a un interés creciente por el saber. El álgebra no fue una excepción. El italiano Jerónimo Cardano (1501-1576) publicó en 1545 la obra “Ars magna” en la que divulgó la solución de la ecuación cúbica, descubierta por Niccolo Tartaglia, y la de la cuártica, descubierta por Ludovico Ferrari. El impacto que produjo la publicación de la obra de Cardano fue tal que, según Boyer (1999, página 362), “*el año de 1545 se suele considerar a menudo como el que marca el comienzo del período moderno en la matemática*”.

b) La Geometría algebraica y la notación simbólica de Descartes

El siglo XVII, un siglo durante el cual los matemáticos se comunicaron entre ellos como nunca antes, aparece dominado por la figura del matemático francés René Descartes (1596-1650) que, con justicia, puede ser considerado el padre de la geometría algebraica y de la notación simbólica del álgebra moderna. De hecho, su obra “La Géometrie” es significativa porque abrió el camino a la geometría analítica actual en la que la geometría se reduce al álgebra. Así, según Boyer (1999), Descartes decía en las primeras líneas de “La Géometrie” que “*Cualquier problema* *de geometría puede reducirse fácilmente a términos tales que el conocimiento de las longitudes de determinados segmentos es suficiente para su construcción*".

Además, Descartes introdujo una notación simbólica moderna, que ha llegado casi exactamente tal cual hasta hoy, en la que:

- -Aún utilizaba el símbolo arcaico $\propto$ (en vez del moderno =) para la igualdad.
- -Usaba los símbolos germánicos de + y – para la suma y la resta, tal y como hacemos en la actualidad.
- -Empleaba las primeras letras del alfabeto (a, b, c,…) para los parámetros constantes.
- -Dedicaba las últimas letras del alfabeto (x, y, z,…) para las variables y las incógnitas.
- -Utilizaba la notación exponencial para las potencias de las letras ($x^2, x^3, a^2b^2 - b$).

c) El álgebra en el siglo XVIII

El álgebra matemática se desarrolló poco en el siglo XVIII pues los grandes investigadores matemáticos del siglo se dedicaron esencialmente a la nueva y potente rama de las matemáticas llamada "Análisis Infinitesimal" (o "Cálculo Diferencial" o "Calculus") que Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) habían creado en el siglo XVII y dejaron de lado, salvo excepciones, las cuestiones algebraicas.

En el ambiente de la Ilustración, del siglo de las luces, sí que hubo un gran interés por divulgar los conocimientos existentes de todo tipo y se escribieron una enorme cantidad de libros didácticos sobre álgebra.

En el siglo XVIII ya se tendía a enfatizar lo procedimental sobre lo conceptual en los libros de matemáticas. De hecho, Boyer (1999, página 577) afirma: "*Los textos de álgebra del siglo XVIII ilustran de manera clara la tendencia hacia un énfasis creciente en los aspectos algorítmicos de la materia mientras que sus fundamentos lógicos permanecían aún sumergidos en una incertidumbre considerable. La mayor parte de los autores consideraba necesario insistir largamente sobre las reglas que regían la multiplicación de números negativos, ¡y algunos rechazaban categóricamente la posibilidad de multiplicar dos números negativos!*".

II.2.4. El álgebra moderna o álgebra de estructuras

De los dos últimos siglos XIX y XX destacamos la obra de Galois, que cambió el saber del álgebra para siempre, y el grupo de Bourbaki, que influyó poderosamente en la Pedagogía de las Matemáticas durante los años 70.

Pasamos ahora a destacar las características más importantes de cada una de las dos etapas anteriores:

a) La obra de Galois

Évariste Galois (1811-1832), cuya trágica biografía encaja perfectamente en el molde romántico de la época, transformó radicalmente el álgebra. El objetivo principal de Galois era determinar cuando las ecuaciones polinómicas eran resolubles por radicales y acabó creando un álgebra de carácter estructural, totalmente nueva, basada en el concepto de grupo. Tras la publicación de la obra de Galois en 1846, 14 años después de su muerte, el álgebra desplazó su interés desde la resolución de ecuaciones por radicales hacia la creación de estructuras algebraicas cada vez más generales y abstractas. Se puede hablar, sin exagerar, del álgebra de antes de Galois y del álgebra de después de Galois, la de los dos últimos siglos, conocida como álgebra Moderna o álgebra de Estructuras.

b) Bourbaki y la "matemática moderna" de los años 60 y 70

Bourbaki es el nombre de un grupo de matemáticos casi exclusivamente franceses cuyo primer volumen de los "Eléments" de Bourbaki apareció en 1939 y que se caracteriza, según Boyer (1999, página 770), por "*una adhesión inflexible al planteamiento axiomático y a una forma general y completamente abstracta de desarrollo que refleje claramente la estructura lógica*".

La adhesión a los anteriores planteamientos también se difundió en todos los niveles de la enseñanza, incluida la enseñanza primaria y media, durante el último tercio del siglo XX bajo el nombre de "matemática moderna" o "matemática de estructuras" con la esperanza, según Boyer (1999, página 770), de que "*el énfasis puesto en la estructura general traiga como consecuencia una economía de pensamiento considerable*". De hecho, en la España de los años 60 y 70 del siglo XX, se introdujeron en la enseñanza conceptos tan abstractos como conjuntos, aplicaciones, relaciones de equivalencia, grupos, anillos y cuerpos ¡para explicar matemáticas a niños de 12 años!

II.3. Historia de la enseñanza del álgebra (1857-2001)

Empezamos esta revisión histórica en el año 1857, el año de la promulgación de la Ley Moyano que crea, por primera vez en España, una enseñanza regulada por el estado y dirigida a la población general. Y terminamos dicha revisión en el año 2001, con el actual sistema educativo plenamente implantado.

a) Períodos de estudio

Ateniéndonos a los grandes cambios legislativos y a que el Instituto Nacional de Estadística realiza un censo al principio de cada década, hemos establecido los siguientes períodos de estudio:

- El período 1857-1930
- El período 1930-1950

- El período 1950-1970
- La Ley General de Educación (LGE)
- La Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE)

b) Variables analizadas en cada período

- A) EL SISTEMA EDUCATIVO ESPAÑOL: En esta variable incluimos la organización del sistema educativo español del período y algunas informaciones sobre los resultados, a nivel nacional, de dicho sistema. Para el análisis de esta primera variable nos basamos en los estudios de Capitán (2000), de Pérez-Díaz y Rodríguez (2003), de Mas (2003) y de Cantón (2004).

- B) EL ALUMNADO DE ZARAGOZA CAPITAL: En esta variable estudiamos la población total, la que cursaba estudios de secundaria y la que tenía un título en enseñanza secundaria en el ámbito de Zaragoza capital. Para el análisis de esta segunda variable nos basamos en los estudios de Garriga (2011) sobre la difusión de la enseñanza secundaria en la población de Zaragoza capital durante el siglo XX. Garriga extrajo los datos de los censos del INE (Instituto Nacional de Estadística) sobre Zaragoza capital.

- C) LA PRÁCTICA DOCENTE: Dentro de esta variable hemos estudiando los siguientes aspectos:

  -C1) Las características generales de los libros de álgebra

  -C2) Los contenidos del álgebra

  -C3) La metodología de la enseñanza del álgebra

  Para el análisis de esta tercera variable, nos basamos en el análisis de los libros de texto y manuales de antes de 1970 que se encuentran en la biblioteca del IES "Goya" de Zaragoza, el único instituto existente en Zaragoza capital hasta 1933, y también en el de los libros de texto posteriores 1970 que se hallan, por ser más actuales, en las bibliotecas del Departamento de Matemáticas del IES "Goya" y del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

II.3.1. El período 1857-1930

Durante este largo período, España, un país agrícola, se incorporó a la revolución industrial que estaba transformando las naciones occidentales. Además, entonces, se pusieron las bases de un sistema educativo moderno que es la base del actualmente vigente en nuestros días.

De este período (1857-1930), estudiamos especialmente los treinta primeros años del siglo XX (1900-1930) porque son los únicos años sobre los que poseemos suficiente cantidad de datos demográficos y bibliográficos.

A) El Sistema educativo

El sistema educativo del período 1857-1930 fue configurado esencialmente por la ley Moyano de 1857. En la década de los 20, el Plan Callejo de 1925 introdujo reformas organizativas de cierto calado.

A1) La Ley Moyano de 1857

La Ley Moyano de 1857 -o Ley de Instrucción Pública de 1857- fue promulgada en una España rural y agrícola que tenía 15.000.000 de habitantes y con una tasa del 75% de analfabetismo. Esta primera gran ley educativa de nuestra historia resultó especialmente trascendente porque:

- Proclamó la obligatoriedad y la gratuidad de la Instrucción Primaria de los 6 a los 9 años. En la práctica la plena escolarización de la población infantil no se logró hasta los años 70 del siglo XX, casi un siglo después.
- Fijó los niveles de Primaria, Secundaria y Universitaria con una cadencia que, con modificaciones más o menos importantes, se ha mantenido hasta hoy.
- Proclamó la gratuidad de la enseñanza en todos los niveles para los estudiantes excepcionalmente dotados. En la práctica, dado el escaso número de becas y de ayudas económicas, fueron pocos aquellos con escasos recursos económicos que llegaron hasta los niveles superiores de enseñanza.
- Estableció exámenes de ingreso y de revalidación final de etapas que comprendían varios cursos de la enseñanza recibida.
- Reguló que las plazas de maestro de Primaria, de catedrático de Instituto, de enseñanza profesional y de facultad se ocuparían por oposición y que los ascensos y los nombramientos futuros se obtendrían por antigüedad y por méritos.
- El sistema educativo diseñado por la Ley Moyano de 1857 sobrevivió, con leves retoques legislativos, incluso a varios cambios de régimen político, hasta que fue profundamente reconfigurado por la Ley Villar Palasí de 1970.
- En lo que a las Matemáticas se refiere, la Ley Moyano estableció los siguientes contenidos:

PRIMERA ENSEÑANZA (6-9 años)	
Elemental	Principios de Aritmética (y Sistema Métrico Decimal)
Superior	Principios de Geometría, Dibujo lineal y Agrimensura Ejercicios de Aritmética

SEGUNDA ENSEÑANZA (9-15 y 10-16 años)		
Estudios generales (9 -15 años)	1º Período (9 -11 años) 2º Período (11-15 años)	Aritmética y dibujo Elementos de aritmética, álgebra y geometría
Estudios de aplicación a las profesiones industriales (10 a 16 años)	(10-16 años)	Aritmética mercantil

Tabla II.1. Sistema Educativo de la Ley Moyano de 1857

De la anterior tabla II.1, destacamos que:
-En Primaria todos los niños estudiaban aritmética.
-En la rama propedéutica, esto es, en los "Estudios generales", se estudiaba aritmética, álgebra, geometría y dibujo.
-En la rama profesional, esto es, en los "Estudios de aplicación a las profesiones industriales", se estudiaba aritmética mercantil.
-La agrimensura, parte importante de las matemáticas de aquellos años, ha desaparecido desde hace años de los programas. Tal desaparición es lógica en un país que ya no es esencialmente agrícola y rural sino industrial y urbano.
-El dibujo, parte importante de las matemáticas de aquellos lejanos años, se ha trasladado desde hace años, en los planes de estudio, desde el ámbito matemático al ámbito del área de dibujo y de plástica. Tal desplazamiento está muy relacionado con la casi total supresión de la geometría euclidiana en la escuela desde la Ley Villar Palasí de 1970 hasta nuestros días.
-La inexistencia de la probabilidad y la estadística en el currículo de la Ley Moyano de 1857. Destacamos que son especialidades de las matemáticas que, en gran medida, se han desarrollado y que han adquirido relevancia a partir de la II Guerra Mundial (1939-1945).

A2) El Plan Callejo de 1925

En la década de los años 20 se aprobó el Plan Callejo de 1925 que fue importante porque dio al Bachillerato un carácter más técnico e hizo que éste fuese más asequible porque lo dividió en dos niveles -el Bachillerato Elemental -los tres primeros años- y el Bachillerato Superior -los cuatro últimos años-, cada uno con su reválida y con su correspondiente titulación.

Este Bachillerato de las dos reválidas del Plan Callejo de 1925, más asequible, estuvo en vigor hasta 1938.

B) El alumnado

Los primeros 30 años del siglo XX fue un período de crecimiento demográfico que se aceleraría notablemente en las décadas posteriores de los años 60 y 70 y que acabó estancándose al final del siglo XX. Veamos la tabla correspondiente:

	Número de habitantes en la ciudad de Zaragoza
Censo de 1900	98.125
Censo de 1910	109.635
Censo de 1920	141.350
Censo de 1930	173.987

Tabla II.2. Población 1900-1930. Garriga (2011)

Destacamos que Zaragoza pasó de tener 100.000 habitantes en 1900 a tener unos 174.000 habitantes en 1930, esto es, experimentó un aumento demográfico de casi un 75% en 30 años.

A continuación, veamos las tablas la población estudiantil y la titulada secundaria:

Número de estudiantes cursando la enseñanza secundaria en la ciudad de Zaragoza			
	Total	Varones	Mujeres
Censo de 1900	2.047	1.893	154
Censo de 1910	2.368	2.037	306
Censo de 1920	3.152	2.564	571
Censo de 1930	3.999	3.070	929

Tabla II.3. Estudiantes 1900-1930. Garriga (2011)

Porcentaje de titulados en enseñanza secundaria en Zaragoza capital			
	Total	Varones	Mujeres
Censo de 1900	1,72%	3,10%	0,40%
Censo de 1910	1,99%	3,58%	0,49%
Censo de 1920	2,27%	4,06%	0,58%
Censo de 1930	2,54%	4,55%	0,68%

Tabla II.4. Titulados 1900-1930. Garriga (2011)

De las anteriores tablas II.3 y II.4, destacamos que:
-Se pasó de unos 2000 estudiantes de secundaria en 1900 a unos 4000 en 1930. Es un aumento del 100% en una ciudad cuya población total aumentó sobre un 75%. Sólo una minoría ilustrada enviaba a sus hijos a cursar estudios de secundaria.
-Fue significativa la incorporación de la mujer a las aulas de secundaria: del 10% del alumnado total (154 de 2047) en 1900, se pasó al 25% del alumnado total (929 de 3.999) en 1930. Estaba cambiando el papel de la mujer en la sociedad.

-El porcentaje de titulados en secundaria pasó de ser el 1,72% de la población total en 1900 a ser el 2,54% en 1930. Es un incremento del 50% en una ciudad que ha creció demográficamente un 75%. El número de titulados creció a un ritmo más lento que el de la población total.

C) La práctica docente

Para estudiar la práctica docente analizamos la siguiente muestra de manuales escolares: Briot (1879), Fernández y Cardín (1900), De Comberousse (1911), Bruño (1912), F. G. -M (1902-1912), Bruño (1914), Une Réunion de Professeurs (1920), Rey Pastor (1927a) y Rey Pastor (1927b).

C1) Características generales de los libros

- 4 de los 9 libros de la muestra están escritos en francés. Los otros 5 están escritos en castellano, pero 2 de ellos fueron impresos en Francia. Esto apunta a que el álgebra escolar española se "importó" de Francia.

- El nombre del autor se suele resaltar mediante algún recurso tipográfico (negrita, cursiva, caligrafías llamativas,…). Además, se suelen explicitar sus méritos académicos -licenciaturas o doctorados-, y los escalafones que ocupaban en la enseñanza oficial -catedrático de instituto o profesor de universidad-.

- Se suele declarar que los textos respetan el currículo oficial. Así, por ejemplo, en Briot (1879) se afirma, en francés, que las lecciones respetan los programas oficiales de enseñanza de los liceos, y en Fernández y Cardín (1900) se dice, en castellano, que "*es una obra declarada de texto para segunda enseñanza*".

- Suelen ser libros reeditados varias veces -hay 10ª y hasta 16ª ediciones- . Además se suele decir que es una edición "*aumentada*" o "*notablemente mejorada*".

- No figura el nombre de editorial alguna. Sí aparecen los nombres y las direcciones postales de librerías o de imprentas. Son negocios ubicados en París y en Tours y, en menor medida, en Madrid, Buenos Aires y México y suelen ser pequeñas empresas de carácter familiar.

- Son manuales escolares que no están destinados específicamente a un determinado curso, como se puede observar en la siguiente lista de títulos:

TÍTULO DEL MANUAL ESCOLAR	AUTOR (FECHA)
Leçons D´Algèbre	Briot (1879)
Elementos de Matemáticas	Fernández y Cardín (1900)
Manuel D´Algèbre d´aprés les programmes de 1902 et de 1912	F.G.-M (1902-1912)

Elementos de álgebra	Bruño (1914)
Algèbre et notions de Trigonométrie practique d´apres le programme de 1920	Une Réunion de Professeurs (1920)
Álgebra. Primera parte	Rey Pastor (1926a)

Tabla II.5. Títulos de libros 1900-1930.

- Son libros en blanco y negro. Presentan textos compactos. No contienen ilustraciones. Sólo aparece, a veces, algún riguroso y reducido dibujo geométrico en algún problema de carácter geométrico-algebraico.

- Los textos de álgebra adoptan frecuentemente el formato típico de los textos legales, es decir: empiezan en el artículo nº 1 del primer capítulo y terminaban en el artículo ciento y pico del último capítulo. En cada artículo se desarrolla, en unos pocos párrafos, una definición, un teorema, una propiedad, un ejercicio, un problema…

C2) Los contenidos

- El álgebra solía presentarse como una aritmética generalizada en un capítulo inicial llamado "*Preliminares*". Veamos un par de ejemplos:

  -Fernández y Cardín, 1900, página 3: "*El Álgebra es una ciencia que trata de las propiedades generales de la cantidad, expresada por símbolos en los que se prescinde de todo valor numérico. Se llama por esta razón Aritmética universal*"

  -Bruño, 1912, página 335: "*Álgebra es la parte de las Matemáticas que tiene por objeto generalizar las operaciones que pueden proponerse sobre las cantidades*"

- Los tipos de problemas algebraicos eran, en su mayoría, muy semejantes a los actuales: mezclas, recuentos, móviles, progresiones, interés compuesto…Sin embargo, también había problemas algebraicos de tipo geométrico-euclidiano (en aquel entonces la geometría euclidiana constituía una parte importante del currículo escolar), que han desaparecido del álgebra actual.

- Muchas de las soluciones de los problemas algebraicos eran números decimales y estaban expresadas en unidades anteriores al sistema métrico decimal. Esto es normal porque en el sistema monetario de la época se empleaban mucho los decimales y el sistema métrico decimal aún no estaba tan implantado como hoy en día.

- No se solía explicitar los diferentes significados de las letras como variables, incógnitas o abreviaturas. Sólo se solía indicar que las últimas letras del alfabeto eran "*incógnitas*" o "*cantidades desconocidas*" o "*cantidades a conocer*" y que las primeras letras del abecedario eran "*cantidades conocidas*" o "*valores fijos.* Así, por ejemplo, Rey Pastor (1926a, página 5) declaraba: "*A veces hay letras* *(suelen usarse las primeras del abecedario) que se supone que representan números fijos y otras: x, y, z, t,… números variables”.*

- Las ecuaciones se dividían en:
  -“*generales*” (o “*pertenecientes al lenguaje algebraico*”): aquellas cuyas incógnitas eran las últimas letras del alfabeto x, y, z, etc, y cuyos valores fijos eran representados por las primeras letras del alfabeto a, b, c, etc.
  -“*particulares*” (o “*pertenecientes al lenguaje aritmético*”): aquellas cuyas incógnitas eran las últimas letras del alfabeto x, y, z, etc y cuyos valores fijos eran números.

  Veamos un texto que ilustra lo anterior:

8. Dividir un número dado en tres partes tales, que el exceso de la mediana sobre la menor y el de la mayor sobre la mediana sean números dados.

Resolución.

1.º *En lenguaje común.*	2.º *En lenguaje aritmético.*	3.º *En lenguaje algebráico.*
	Si es 20 el número que se va á dividir, 2 el exceso de la parte mediana sobre la menor, 4 el exceso de la mayor sobre la mediana y x la parte menor.	Si a designa el número que se va á dividir, b el exceso de la parte mediana sobre la menor, c el exceso de la parte mayor sobre la mediana y x la parte menor.
La parte mediana será igual á la menor más el exceso de la mediana sobre la menor.	La mediana será $x+2$.	La mediana será $x+b$.
La mayor será la mediana más el exceso de la mayor sobre la mediana.	La mayor será $x+2+4$.	La mayor será $x+b+c$.
Las tres partes reunidas componen el número propuesto.		
Luego la menor, más la menor, más el exceso de la mediana sobre la menor, más la menor, más el exceso de la mediana sobre la menor, más el exceso de la mayor sobre la mediana, componen el número que se ha de dividir.	Luego $x+x+2+x+2+4=20$.	Luego $x+x+b+x+b+c=a$.
Luego tres veces la parte menor, más dos veces el exceso de la mediana sobre la menor, más el exceso de la mayor sobre la mediana, componen también este número.	Luego $3x+2+2+4=20$. ó $3x+8=20$.	Luego $3x+2b+c=a$.

Figura II.1. Fernández y Cardín (1900), página 8

Luego tres veces la parte menor equivalen al número dado, menos dos veces el exceso de la mediana sobre la menor y menos una vez el exceso de la mayor sobre la mediana.	Luego $3x = 12$.	Luego $3x = a - 2b - c$.
Luego, en fin, la parte menor es igual al tercio de lo que queda después que del número que se va á dividir, se reste dos veces el exceso de la mediana sobre la menor y una vez el exceso de la mayor sobre la mediana.	Luego $x = \frac{12}{3}$, ó $x = 4$.	Luego $x = \frac{a - 2b - c}{3}$.

El lenguaje común es largo, difuso y casi imposible de retener por los esfuerzos de la memoria. Su excesiva vaguedad ó indeterminación lo inhabilitan para la solución del problema propuesto, que es de los más sencillos.

El lenguaje aritmético es más breve que el común. Ejecutando, sin embargo, inmediatamente con los números todas las operaciones indicadas, al llegar al resultado se habrían como borrado los datos, y no podría descubrirse la relación general que tienen con este resultado. La solución sería esencialmente *particular* y limitada á aquellos datos determinados.

El lenguaje algebráico es breve, compendioso y rápido; presenta á la mirada del espíritu, casi reducida á un punto, toda la marcha del raciocinio y del procedimiento resolutivo. No ejecutando, sinó simplemente indicando las operaciones con las letras, se conservan siempre los datos en su natural relación con la cantidad que se busca, y el resultado es por necesidad *general* y aplicable á toda clase de datos numéricos.

El resultado que se obtiene es una *fórmula*.

9. *Se entiende por* FÓRMULA *la expresión general del procedimiento que ha de seguirse para resolver un problema, ó de una propiedad general que puede consignarse en un teorema.*

$$x = \frac{a - 2b - c}{3}$$

es la fórmula que enseña la manera de hallar la parte

Figura II.2. Fernández y Cardín (1900), página 9.

De las anteriores páginas 8 y 9 de Fernández y Cardín (1900), destacamos que:

-Se afirma que $x+x+b+x+b+c=a$" pertenece al ámbito del "*lenguaje algebraico*" porque "*presenta al espíritu, casi reducida a un punto, toda la marcha del raciocinio y del procedimiento resolutivo. No ejecutando, sino simplemente indicando las operaciones con las letras, se conservan siempre los datos en su natural relación con la cantidad que se busca, y el resultado es por necesidad general y aplicable á toda clase de datos numéricos*".

-Se afirma que $x+x+2+x+2+4=20$ pertenece al "*lenguaje aritmético*" porque "*al llegar al resultado se habrían borrado todos los datos y no podría descubrirse la relación general que tienen con ese resultado*" y porque "*la solución sería esencialmente particular*".

-Se eleva $x=\dfrac{a-2b-c}{3}$ al rango de "*fórmula*" porque "*es aplicable a toda clase de datos numéricos*".

- La comprobación de las soluciones, la denominada "*prueba*", sólo se solía realizar en los primeros problemas. Luego (como ocurre en la práctica escolar actual) los problemas siguientes se planteaban y resolvían pero no se comprobaban. De esta manera, se transmitía la idea de que la comprobación es un paso prescindible en el proceso de resolución de los problemas.

  Veamos un ejemplo representativo de la pauta de comprobar sólo los primeros problemas que se planteaban y resolvían:

923. **Problema II.** *Divídanse \$72 entre tres personas de modo que la 2ª tenga \$3 más que la 1ª. y la 3ª el triple de la 2ª.*

Representemos la parte de la 1ª por x

La 2ª será $x+3$

Y la 3ª $3(x+3)$

Tendremos pues la ecuación :

$$x+x+3+3(x+3)=72$$

Ejecutemos la multiplicación indicada por el paréntesis

$$x+x+3+3x+9=72 \qquad (908)$$

ó

$$5x+12=72$$

quitemos 12 de ambos miembros; para esto basta suprimirlo en el 1er miembro, y escribir -12 después de 72, en el 2º

$$5x=72-12 \text{ ó } 60$$

$$x=\frac{60}{5}=12$$

La 1ª tendrá pues	\$ 12
La 2ª, 12 + 3, ó.	15
Y la 3ª, 3 × 15, ó.	45
Prueba . . .	72

925. **Problema III.** *Una persona compra los $\frac{2}{3}$ de una pieza de tela, menos 15 metros; otra compra la $\frac{1}{4}$ parte de la misma pieza más 4 met., y recibe 21 met. menos que la 1ª; ¿cuál es la longitud de la pieza?*

Sea x la longitud de la pieza.

La 1ª persona ha comprado $\frac{2x}{3}-15$

y la 2ª $\frac{x}{4}+4$

Si restamos la compra de la 2ª. de la compra de la 1ª. (905), tendremos 21 por diferencia; de donde resulta la ecuación :

$$\frac{2x}{3}-15-\left(\frac{x}{4}+4\right)=21$$

Quitemos el paréntesis; para esto, ejecutemos la resta indicada (905).

$$\frac{2x}{3}-15-\frac{x}{4}-4=21$$

Para quitar los denominadores, se multiplican todos los términos por 3×4 ó 12, producto de los denominádores.

$$8x-180-3x-48=252$$

Trasladando los términos incógnitos al primer miembro y los conocidos al 2º, tenemos :

$$8x-3x=252+180+48$$
$$5x=480$$
$$x=\frac{480}{5}=96.$$

La pieza tiene 96 metros.

926. **Problema IV.** *Una campesina tenía una canasta de*

Bruño (1912), página 341 y 342

De las anteriores páginas 341 y 342 de Bruño (1912), señalamos que:

-La solución x = 12$ del problema II (página 341) se comprueba. Además, es de tipo semántico porque las cuentas adoptan una presentación aritmética (en columnas) que está muy próxima a la situación real descrita en el enunciado del problema, y muy alejado de la presentación algebraica (en línea) de la ecuación planteada.

-La solución x = 96 m del problema III (página 342) no se comprueba, ni en la ecuación ni en el enunciado del problema.

- Las progresiones y los logaritmos, con importantes aplicaciones bancarias para la resolución de problemas de interés compuesto, solían ser la parte final de la secuenciación del álgebra escolar.
- Las reglas de tres aparecían aún como parte del álgebra en algunos de los libros de la época.
- Por lo demás, los contenidos y su secuenciación eran muy parecidos a los actuales. Veamos, como ilustración, los capítulos del índice de un libro de la época:

"*I. Preliminares.*
II. Cálculos con expresiones algebraicas
III. Quebrados o fracciones literales
IV. Ecuaciones de 1º grado
V. Problemas de primer grado con una incógnita
VI. Resolución de los sistemas de ecuaciones de primer grado con dos o más incógnitas
VII. Resolución de los problemas de primer grado con dos o más incógnitas
VIII. Cuadrado de las cantidades algebraicas
IX. Raíz cuadrada de las cantidades algebraicas
X. Cálculo de los radicales de 2º grado
XI. Ecuaciones de 2º grado y bicuadradas
XII. Razones y proporciones
XIII. Problemas que se resuelven por medio de proporciones
XIV. Otros problemas que se resuelven por medio de una o dos proporciones
XV. Progresiones
XVI. Logaritmos
XVII. Aplicaciones de los logaritmos" (Fernández y Cardín, 1900)

C3) Metodología

- Las páginas dedicadas a las operaciones solían ser muchas más que las dedicadas a los problemas.
- La presentación de los contenidos es ostensiva, no se justifica. En cada artículo numerado, se introducía un elemento algebraico cada vez más complejo, hasta llegar a las expresiones algebraicas, las ecuaciones lineales, los sistemas, etc.

II.3.2. El período 1930-1950

Durante estos años el sistema educativo siguió siendo, en lo esencial, el diseñado por la Ley Moyano de 1857. Eso sí, la Ley de Bachillerato de 1938 endureció el sistema porque suprimió las titulaciones intermedias del bachillerato que el Plan Callejo de 1925 había creado y estableció un examen de estado -o reválida única de todo el bachillerato-, en la que el estudiante se sometía a una prueba que abarcaba todo el Bachillerato.

A) El Sistema educativo

La enseñanza que creó la Ley de Bachillerato de 1938 presentaba las siguientes características:

- Existía una Primaria Elemental o General (6-10 años) que era común para todos los niños, y una Primaria Superior o Especial (10-12 años) que era obligatoria para aquellos que no estudiasen bachillerato.
- El plan de estudios de este Bachillerato de 1938 se basaba en 7 asignaturas fundamentales y obligatorias de carácter predominante humanístico (Lengua y Literatura, Latín, Griego, Idioma extranjero, Cosmología y Filosofía, Geografía e Historia y Matemáticas), que se desarrollaban cíclicamente a lo largo de los 7 cursos de Bachillerato (10-17 años), salvo el Griego que sólo se desarrollaba en los últimos 4 años.
- Se concebía el Bachillerato (10-17 años) como una unidad al final de la cual, para obtener el título, había que aprobar un temido "*examen de estado*" ante un tribunal formado por catedráticos de universidad. Se trataba de un bachillerato totalmente propedéutico, esto es, se concebía como una etapa de tránsito hacia los estudios universitarios. De hecho, casi todos los que lo aprobaban cursaban carreras universitarias. En esto, representaba una ruptura total con el plan Callejo de 1925 que había creado dos titulaciones de Bachillerato: la del Elemental y la del Superior.
- El examen de ingreso en los institutos, a los 10 años de edad, era fácil de pasar: aproximadamente el 90% de los presentados lo aprobaban. Sin embargo, muchos estudiantes quedaban por el camino, sin llegar a presentarse al Examen de Estado. Además, dicho Examen de Estado, a los 17 años de edad, era una criba durísima: los aprobados sobre el total de presentados oscilaron entre un 33,33% en los primeros años y un 45% en los últimos años. Al final, sólo entre un 25% y un 33,33% de los matriculados en 1º de Bachillerato conseguían el título de Bachiller.

B) El alumnado

La tabla de la población total de Zaragoza durante la década de los 30 y de los 40 es la siguiente:

	Número de habitantes en la ciudad de Zaragoza
Censo del 1930	173.987
Censo de 1940	245.777
Censo de 1950	264.256

Tabla II.6. Población 1930-1950. Garriga (2011)

Como se puede ver, la población aumentó en 71.790 habitantes más (un incremento del 41,26%) en los años 30 y aumentó en 18.479 más (un aumento del 7,51%) en los años 40. El menor crecimiento durante los años 40 es atribuible a la difícil situación internacional que vivió durante esos años España y el resto de Europa.

Las tablas sobre el número de estudiantes y de titulados son las siguientes:

Número de estudiantes cursando la enseñanza secundaria en la ciudad de Zaragoza			
	Total	Varones	Mujeres
Censo de 1930	3.999	3.070	929
Censo de 1940	6.796	5.168	1.628
Censo de 1950	7.764	5.659	2.105

Tabla II.7. Estudiantes 1930-1950. Garriga (2011)

Porcentaje de titulados en enseñanza secundaria en la ciudad de Zaragoza			
	Total	Varones	Mujeres
Censo de 1930	2,54%	4,55%	0,68%
Censo de 1940	2,60%	4,64%	0,86%
Censo de 1950	5,47%	8,41%	2,79%

Tabla II.8. Titulados 1930-1950. Garriga (2011)

De las tablas II.7 y II.8, destacamos que:
-El número de estudiantes aumenta desde unos 4.000 en 1930 hasta 6.796 en 1940, y hasta 7.764 en 1950. Son incrementos importantes para los escasas instituciones educativas de la época pero son aumentos del 69,90% y del 14,24% que resultan relativamente pequeños en una ciudad que demográficamente creció un 41,26% y un 6,90% respectivamente.
-La presencia femenina en el aula casi se duplicó en los años 30 -de 929 a 1.628- y siguió aumentando en los años 40 a un ritmo más lento. Así, en 1950 las mujeres eran ya el 27,11% del total del alumnado de secundaria.

C) La práctica docente

Para estudiar la práctica docente hemos analizado los siguientes libros de texto: Sabrás (1931), Ruiz Tapiador (1932), Crantz (1932) y Oñate (1942).

C1) Características generales de los libros

- Todos los libros de la muestra están ya escritos en castellano y han sido impresos en ciudades españolas. Una obra se imprimió, simultáneamente, en

Madrid, Barcelona y Buenos Aires, otra obra en Barcelona y las otras dos en Zaragoza.

- Se sigue resaltando el nombre y los méritos académicos (doctorados y licenciaturas) y profesionales (profesor de instituto, profesor de facultad,…). Tales méritos avalaban la calidad de la obra.
- En 2 de los 4 libros aparecen los nombres de las editoriales que los publican: el libro de Crantz (1932) es de la Editorial Labor SA de Madrid, Barcelona y Buenos Aires; el libro de Ruiz Tapiador (1932) es de la editorial Gambón de Zaragoza.
- Los 3 textos de los años 30 todavía empiezan en el artículo 1 del capítulo 1 y terminan en el ciento y pico del último capítulo. Sin embargo, cada artículo no desarrolla sólo un concepto, como el pasado, sino varios. En el texto de los años 40, además, la numeración de los artículos empieza y acaba en cada lección, como en la actualidad.
- Todos los libros de los años 30 y años 40 eran en blanco y en negro, sin ilustraciones y sin dibujos. Los textos eran compactos.
- Los libros de los años 30 seguían siendo manuales de álgebra, sin especificar a qué curso estaban dirigidos. Sin embargo, el libro de los 40 es el libro de texto de una asignatura (Matemáticas) y está dirigido a un curso específico (3º de Bachillerato), tal y como ocurre hoy en día. Todo lo anterior lo podemos apreciar en la tabla siguiente:

TÍTULOS DE LOS LIBROS	AUTOR (FECHA)
Principios de álgebra y Trigonometría	Sabrás (1931)
Elementos de álgebra	Ruiz Tapiador (1932)
Aritmética y álgebra	Crantz (1932)
Matemáticas. Tercer Curso	Oñate (1942)

Tabla II.9. Títulos de libros 1930-1950.

C2) Los contenidos

- Seguían apareciendo ecuaciones y problemas en los que los valores fijos eran las letras a, b, c,.. y en los que la solución obtenida, de tipo general, se elevaba a la categoría de fórmula... Veamos el siguiente caso ilustrativo:

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO 131

Si los representamos por x e y, deben satisfacer al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=b \end{array}\right\} \quad (1)$$

que es equivalente a este otro:

$$\left.\begin{array}{l} 2x=a+b \\ 2y=a-b \end{array}\right\} \quad (2)$$

de donde: $x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, \quad y=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$.

Estas fórmulas nos dicen que, cuando se conoce la suma y la diferencia de dos números, el minuendo es igual a la mitad de la suma más la mitad de la diferencia y el sustraendo es igual a la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.

Ejemplo. Si la suma es 12 y la diferencia 4, los números serán: $x=\frac{12}{2}+\frac{4}{2}=8 \qquad y=\frac{12}{2}-\frac{4}{2}=4.$

Figura II.4. Sabrás (1931), página 131.

- Aparecían problemas cuyo planteamiento lleva a ecuaciones incompatibles o compatibles determinadas. Veamos un texto representativo:

203. 2º *Hallar un número tal que su mitad, más su tercera parte y su sexta parte aumentadas en uno, iguale a dicho número.*

La ecuación será: $x=\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+1.$

Quitando denominadores se tiene $6x=3x+2x+x+6$ y de aquí $0.x=6$ de donde $x=\frac{6}{0}=\infty$, que nos dice que no existe número alguno que satisfaga las condiciones del problema.

204. 3º *Hallar un número tal que sea igual a su mitad, más su tercera más su sexta parte.*

La ecuación será: $x=\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}$ de donde $6x=6x$ y $0x=0$, de donde $x=\frac{0}{0}$ que prueba que todos los números satisfacen las condiciones del problema.

205. 4º *La suma de dos números es* a *y su diferencia es* b: *hallar esos números.*

Figura II.3. Sabrás (1931), página 130.

Destacamos que los problemas 203 y 204 concluyen con las afirmaciones "… $x=6/0=\infty$, *que nos dice* que *no existe número que satisfaga las condiciones del problema*" y "… $x=0/0$ *que prueba que todos los números satisfacen las condiciones del problema*". Es decir, en vez de razonar aritméticamente cuáles son las soluciones de $0 \cdot x=6$ y $0 \cdot x=0$, se establece una relación axiomática entre las formas $x=6/0=\infty$ y $x=0/0$ y cuántas soluciones hay.

- En general, la comprobación sólo se realiza en algunos problemas, tal y como ocurre en la actualidad.

  También la comprobación se sigue practicando en algunas ecuaciones, no en todas, transmitiendo la idea de que la comprobación sintáctica de una ecuación es algo opcional. Veamos un ejemplo representativo de ecuación comprobada:

EJEMPLOS:

I. *Resolver la ecuación*

$$x + 13 = 2\left(\frac{x-1}{3} + 14\right)$$

Preparación.

$$x + 13 = \frac{2x-2}{3} + 28$$

$$3x + 39 = 2x - 2 + 84$$

$$3x + 39 - 2x + 2 - 84 = 0$$

$$x - 43 = 0.$$

Solución.

$$x = 43.$$

Comprobación.

$$43 + 13 = 2\left(\frac{43-1}{3} + 14\right) = 2(14 + 14)$$

$$56 = 56$$

Figura II.5. Ruiz Tapiador (1932), página 174.

- La introducción al álgebra (el capítulo "*Preliminares*" de las décadas anteriores) ha perdido su identidad como capítulo propio. La proporcionalidad –con las reglas de tres- se ha desplazado definitivamente del álgebra a la aritmética. Los demás contenidos algebraicos del pasado se mantienen.

C3) Metodología

- El álgebra se presentaba formal y deductivamente. Veamos un ejemplo:

RESOLUCIÓN Y DISCUSIÓN DE LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

208. Toda ecuación de primer grado con una incógnita tiene, después de preparada, la forma

$$ax + b = 0, \qquad [1]$$

en la que a y b representan cantidades numéricas o literales monomias o polinomias, independientes de la incógnita.

Para resolverla, pasando b al segundo miembro, se tiene

$$ax = -b, \qquad [2]$$

y dividiendo los dos miembros de esta ecuación por a, resulta

$$x = -\frac{b}{a}. \qquad [3]$$

Las ecuaciones [1], [2] y [3] son equivalentes mientras a sea distinta de cero, y la [3] nos dice que *en toda ecuación de primer grado con una incógnita, el valor de ésta es igual al término independiente cambiado de signo dividio por el coeficiente de la incógnita.*

209. **Discusión de la fórmula**—Es evidente que el valor obtenido para la incógnita en la ecuación [1] depende de los valores de a y b.

Discutamos, pues, estos valores suponiendo que a y b toman valores reales y que a es positivo, pues si fuera negativo, con cambiar de signo a toda la ecuación, quedaria convertido en positivo.

Hipótesis.

I. Si $b \gtrless 0$ y $a > 0$, será $x \lessgtr 0$.
II. Si $b = 0$ y $a > 0$, será $x = 0$.
III. Si $a = 0$ y $b \gtrless 0$, la ecuación dada se convierte en

$$0x + b = 0.$$

Figura II.6. Ruiz Tapiador (1932), página 173.

- La metodología de aprendizaje propuesta es reiterativa. Veamos un párrafo muy revelador:

  "*El planteo de los problemas no está sujeto a reglas fijas; decir que se representen las incógnitas por las últimas letras del alfabeto y que se efectúen con ellas y los datos las operaciones necesarias para comprobar su valor suponiéndolas conocidas, es decir muy poca cosa, y solamente el hábito adquirido resolviendo muchos problemas nos podrá dar facilidades en su planteo.*" (Ruiz Tapiador, 1932, página 190)

II.3.3. El período 1950-1970

El sistema educativo durante este período que abarcó, aproximadamente, los años 50 y años 60, continuó siendo, esencialmente, el diseñado por la Ley Moyano de 1857. Lo más destacable es que la Ley de 1953 estableció un bachillerato con dos reválidas que posibilitó que muchos obtuvieran una titulación intermedia. Además, el despegue económico fue importante en los 60: España se convirtió en un país urbano e industrial y aumentó la diversidad social en sus aulas.

A) El Sistema educativo

La Ley de 1953 introdujo importantes cambios en la estructura del Bachillerato porque:

- El Bachillerato de 1953 era menos humanístico que el anterior de 1938 -por la reducción del peso del latín y del griego- y más técnico -por el aumento del peso de las asignaturas de Ciencias-. Este carácter técnico se acentuaba aún más para los que cursaban la especialidad de Ciencias.

- El Bachillerato de 1953 recuperó los dos niveles del de 1925, que no tenía el de 1938, si bien, ahora, el Bachillerato Elemental (10-14 años) comprendía cuatro cursos, en vez de los tres del de 1925, y el Bachillerato Superior (14-16 años) comprendía dos cursos, en vez de los cuatro del de 1925, y se añadió un curso preuniversitario (16-17 años), el PREU, cuya finalidad era facilitar el tránsito de la enseñanza media a la universidad.

- El currículo del Bachillerato Elemental (10-14 años) era único. El Bachillerato Superior (14-16 años) tenía una rama de Ciencias y otra de Letras. Con el tiempo, en la segunda mitad de los 60, según Pérez-Díaz y Rodríguez (2003), casi el 80% de los de 6º de Bachillerato cursaban la rama de Ciencias.

- Se duplicó el número de exámenes de etapa que se realizaban: en vez de hacer uno de ingreso a los 10 años y una reválida única a los 17 años, con la Ley de 1953, se hacían uno de ingreso a los 10 años, una reválida de Bachillerato Elemental -en 4º curso- a los 14 años, una reválida de Bachillerato Superior -en 6º curso- a los 16 años, y una prueba de madurez al final del PREU a los 17 años.

- Según Pérez-Díaz y Rodríguez (2003), los resultados de la aplicación de los cuatro filtros del bachillerato de 1953 fueron los siguientes:
  -El examen de ingreso siguió siendo un filtro blando: sobre el 90% lo aprobaba. En los últimos cursos, con el aumento de matriculados, dicho porcentaje bajó un poco: 83% fue el mínimo que se alcanzó.
  -La reválida de Bachillerato Elemental era fácilmente superada en los años 50 por los pocos alumnos que se matriculaban en la prueba -por ejemplo: el 76,50% lo aprobaron en 1954-, pero, luego, en los años 60, acabó siendo una prueba difícil para los muchos alumnos que se presentaban a la prueba -por ejemplo: sólo el 44,60% lo aprobaron en el curso 1969-.
  -La reválida de este Bachillerato Superior era más superable que el Examen de Estado del bachillerato anterior. Así mientras que sólo el 45% aprobó el examen de estado en los últimos cursos del bachillerato anterior, el 65% aprobaba esta reválida en los años 50 y, luego, con la llegada masiva de estudiantes a las aulas en los años 60, el porcentaje descendió pero nunca bajó del 50%.
  -La prueba de madurez del PREU comenzó siendo más blanda en los años 50, con un 65% de aprobados, que el examen de estado anterior, con un 45% de aprobados al final, pero acabó alcanzando, con el aumento de los matriculados en los años 60, porcentajes de aprobados inferiores a dicho 45%.

  En total, en este período, en el Bachillerato de 1953 –el de las dos reválidas y la prueba de madurez-, sólo titularon sobre un 20% de los que lo iniciaron, mientras que, en el pasado, en el Bachillerato de 1938 –el de la reválida única-, titularon entre el 25% y el 33,33% de los que lo empezaron. Pero en el sistema de 1953 de las dos reválidas estudiaron muchos más alumnos que nunca y se introdujeron unos filtros en los que muchos obtuvieron titulaciones intermedias que eran útiles -en el mercado laboral y en la administración pública-, y que resultaban satisfactorias para los alumnos y las familias.

B) El alumnado

La tabla de la población total de Zaragoza es la siguiente:

	Número de habitantes en la ciudad de Zaragoza
Censo de 1950	264.256
Censo de 1960	325.828
Censo de 1970	469.365

Tabla II.10. Población 1950-1970. Garriga (2011)

Destacamos que la población aumentó en más de 60.000 habitantes (el 23,33%) en los 50 y que el crecimiento aún fue más espectacular en los 60: 143.537 habitantes (el 44,05%). Fue una emigración masiva que abandonó el medio rural para trabajar en la industria y los servicios de una pujante ciudad.

Las tablas de la población estudiantil y de la titulada son las siguientes:

Número de estudiantes cursando la enseñanza secundaria en la ciudad de Zaragoza			
	Total	Varones	Mujeres
Censo de 1950	7.764	5.659	2.105
Censo de 1960	13.437	8.046	5.391
Censo de 1970	49.181	27.460	21.721

Tabla II.11. Estudiantes 1950-1970. Garriga (2011)

Porcentaje de titulados en enseñanza secundaria en la ciudad de Zaragoza			
	Total	Varones	Mujeres
Censo de 1950	5,47%	8,41%	2,79%
Censo de1960	4,99%	6,79%	3,17%
Censo de 1970	11,23%	13,14%*	8,90%*

Tabla II.12. Titulados 1950-1970. Garriga (2011)

Del examen de las tablas II.11 y II.12, destacamos que:

-En los años 50, el crecimiento del 73% del número de estudiantes triplicó el incremento del 23,33% de la población total. Es claro que empezaba a aumentar el número de familias que se interesaban por los estudios de secundaria.

-En los años 60, el crecimiento del 266% en el número estudiantes casi sextuplicó el incremento del 45% de la población total. Es claro que la enseñanza secundaria se generalizó muy rápidamente en la década del desarrollismo.

-La incorporación de la mujer a las aulas se aproximó a un igualitario 50%: en 1970 eran ya el 44,16% del alumnado.

-A pesar de los filtros del sistema educativo, la masiva afluencia de alumnos a las aulas y la creación de dos títulos intermedios –el de Bachillerato Elemental y el de

Bachillerato Superior-, permitió que el porcentaje de titulados en secundaria subiese desde el 5,47% de la población total en 1950 al 11,23% en 1970.

C) La práctica docente

Para estudiar la práctica docente hemos analizado la muestra formada por los siguientes libros de texto: Baratech (1955), Ruiz y Rodríguez (1959), Puig Adam (1960), Baratech (1962), Sales (1963), Baratech (1966), Marcos y Martínez (1967), Vila y Agustí (1968), Tapia (1969) y López Sierra (1969).

C1) Características generales de los libros

- Todos los libros fueron impresos en España: 3 en Madrid, 3 en Barcelona, 3 en Zaragoza y 1 en Murcia. El grupo anterior se divide en 2 partes:
  -La parte formada por los 6 libros que fueron publicados por grandes empresas editoriales que siguen siendo importantes en la actualidad: “Ediciones SM” (Madrid), el “Servicio de Publicaciones del Ministerio” (Madrid), “Vicens-Vives” (Barcelona) y “Casals” (Barcelona).
  -La parte formada por los 4 libros que fueron publicados por sus autores: Tres de ellos en Zaragoza y uno en Murcia.

- La calidad de los libros aún viene avalada, habitualmente, por los méritos académicos y por los cargos docentes de sus autores. Sin embargo, en los libros de las grandes editoriales, el nombre de la empresa empieza a ser más importante que la calidad del autor. Por ejemplo: en el libro de Marcos y Martínez (1967) se destaca -en letra grande y en negrita- “*Ediciones SM*”, añadiendo luego sólo que sus autores –en letra pequeña y sin negrita- eran un licenciado en físicas y un licenciado en matemáticas.

- En los libros de texto se fue generalizando la especificación de que se trataba de obras aprobadas oficialmente. Veamos algunos ejemplos:

AUTOR (FECHA)	DECLARACIÓN DE IDONEIDAD OFICIAL
Baratech (1954)	Obra adaptada al cuestionario oficial vigente (Orden de 21 de enero de 1954. BOE número 37)
Ruiz y Rodríguez (1959)	Problemas y cuestiones propuestos en los exámenes de Reválida del Bachiller Elemental
Baratech (1962)	Obra adaptada al cuestionario oficial vigente (Orden de 5 de junio de 1957). Aprobada por el Ministerio de Ecuación Nacional (Orden de 27 de junio de 1959 - BOMEN número 59 de 23 de julio de 1959)

Vila y Agustí (1968)	Obra autorizada por el Ministerio de Educación y Ciencia OM de 25-III-1969 (BOE de 1-IV-69)
Tapia (1969)	Obra adaptada al Plan de Estudios del Bachillerato Elemental por Decreto de 31 de mayo de 1967

Tabla II.13. Autorizaciones de libros 1950-1970.

- Los libros en los que aparecía el álgebra escolar no eran manuales de álgebra sino libros de texto en los que se indicaba la asignatura ("Matemáticas") y el curso al que iban dirigidos. Veamos algunos ejemplos:

TÍTULO	AUTOR (FECHA)
Matemáticas para el Tercer curso de Bachillerato	Baratech (1955)
Matemáticas. Reválida de Grado Elemental	Ruiz y Rodríguez (1959)
Matemáticas. Tercer curso de Bachillerato	Baratech Montes (1962)
Matemáticas. Tercer curso de Bachillerato	Baratech Montes (1966)

Tabla II.14. Títulos de libros (1950-1967).

- Los artículos de los libros de los años 50 y 60 eran ya unos largos apartados cuya numeración empezaba y acababa cada capítulo del libro, tal y como ocurre en la actualidad.
- Durante los años 50 y casi todos los años 60, los libros seguían siendo en blanco y negro y no contenían ilustraciones ni dibujos que no fueran de carácter geométrico-matemático. Sin embargo, al final de los años 60, se empezó a utilizar solamente un color más (rojo o azul o verde,…) para destacar los títulos de los capítulos y para hacer más atractivos los dibujos de balanzas, de ladrillos, de ciclistas, de fábricas, etc que también se empezaron a añadir.
- A finales de los años 60, los títulos de los libros incorporaron palabras relacionadas con la Matemática moderna -o de Estructuras- que propugnaba la Ley General de Educación de 1970 que se estaba elaborando. Veamos algunos ejemplos:

TÍTULO	AUTOR (FECHA)
Matemática moderna. Tercer curso de Bachillerato	Marcos y Martínez (1967)
Aplicación y Semejanza. Matemáticas. Tercer curso de Bachillerato	Vila y Agustí (1968)
Anillo. Tercer curso de Bachillerato	López Sierra (1969)

Tabla II.15. Títulos de libros (1967-1969).

C2) Los contenidos

- Durante los años 50 y casi todos los años 60, los contenidos y su secuenciación era los de principios del siglo XX, esto es: "Polinomios $\rightarrow$ Fracciones Algebraicas $\rightarrow$ Ecuaciones y Sistemas Lineales $\rightarrow$ Ecuaciones de Segundo grado $\rightarrow$ Funciones y gráficas".

- A finales de los años 60, la irrupción de la Matemática moderna en la escuela, propugnada por la Ley General de Educación de 1970, introdujo importantes cambios en los contenidos y en la secuenciación. Veamos la tabla comparativa entre los índices de los libros "Matemáticas. Tercer Curso de Bachillerato" de Baratech (1962) y "Anillo. Tercero de Bachillerato" de López Sierra (1969):

Baratech (1962)	López Sierra (1969)
-Expresiones algebraicas -Operaciones con monomios y polinomios -División algebraica -Potenciación algebraica -Operaciones con fracciones algebraicas -Ecuaciones de primer grado -Coordenadas cartesianas -Representaciones gráficas -Continuación de lo anterior -Resolución gráfica de sistemas	-Noción de aplicación. Aplicación lineal $y = ax$. Proporcionalidad. ejemplos -La aplicación afín: $y = ax + b$ -Representación. El movimiento uniforme y otros ejemplos -Noción de ecuación. Resolución de ecuaciones lineales -Inecuaciones -Ecuación con dos incógnitas. Sistemas sencillos de dos ecuaciones lineales -Resolución de problemas lineales relativos a cuestiones de la vida práctica: porcentajes; interés; descuento comercial; repartos proporcionales; mezclas

Tabla II.16. Comparación entre un índice de 1962 y uno de 1969.

De la tabla II.16 anterior destacamos que:
-En el libro de 1962 se mantiene la tradicional secuencia "Polinomios y fracciones racionales $\rightarrow$ Ecuaciones de primer grado $\rightarrow$Representación gráfica de rectas". Es decir, primero, se presentan los polinomios y las fracciones algebraicas como objetos abstractos, luego, se explican las ecuaciones lineales como casos particulares de expresiones algebraicas y, finalmente, se presenta cómo se visualizan dichas ecuaciones lineales.
-En el libro de 1969, primero, se presentan los conjuntos y las aplicaciones, luego, se explican las representaciones gráficas de las rectas y, finalmente, desde éstas últimas se presentan las ecuaciones lineales. Evidentemente se trataba de conectar las ecuaciones a las estructuras de la Matemática moderna (conjuntos y aplicaciones).

- En los problemas de los años 50 y 60 se solía explicitar la asignación de variables, se planteaban y resolvían las ecuaciones y, a veces, sólo a veces, también se comprobaba el resultado. Veamos un par de ejemplos:

-Ruiz y Rodríguez, 1959, página 104: "*Al invertir el orden de las cifras de un número de dos cifras, este número queda disminuido en 36 unidades. Sabiendo que dichas cifras suman 12, hallar el número.*

$$\begin{matrix} Decenas = x \\ Unidades = y \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} x + y = 12 \\ 10y + x = 10x + y - 36 \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} x + y = 12 \\ -9x + 9y = -36 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 9x + 9y = 108 \\ -9x + 9y = -36 \end{matrix} ;$$

$y = \dfrac{72}{18} = 4$; $y = 4$; $x = 12 - y = 12 - 4 = 8$ $\quad 18y = 72$ *El número es, pues, 84*"

-Baratech, 1962, página 83: *"El perímetro de un rectángulo es 38 m; la diferencia de los dos lados es 7 m. ¿Cuánto mide cada lado?*
Sabemos por Geometría que los lados de un rectángulo son iguales, dos a dos, luego la suma de dos consecutivos expresada en metros, será $38 : 2 = 19$*, y su diferencia 7.*
Llamando x *al menor de los lados, como 7 es la diferencia, el lado mayor medirá* $x + 7$*, y entre los dos 19, es decir,* $x + x + 7 = 19$ *de donde* $x = 6$
Luego el lado menor medirá $6\ m$ *y el mayor* $13\ m$.
Comprobación: $6 + 13 + 6 + 13 = 38$*;* $13 - 6 = 7$ *"*

Destacamos que:
-En el libro de Ruiz y Rodríguez (1959) se explicita la asignación de variables pero no se realiza comprobación alguna de la solución.
-En el libro de Baratech (1962) se explicita la asignación de las variables y se realiza la comprobación "$6 + 13 + 6 + 13 = 38$; $13 - 6 = 7$". Además, $6 + 13 + 6 + 13 = 38$ es una comprobación semántica pues la solución 6 se sustituye en el perímetro que se cita en el enunciado y no se sustituye en la ecuación planteada $x + x + 7 = 19$, que está basada en el valor de la mitad del perímetro.

C3) Metodología

- Durante los años 50 y casi todos los años 60, la metodología extremó su carácter tradicionalmente expositivo, deductivo y formal. Veamos un ejemplo:

"1.DEFINICIÓN. -Se llaman expresiones algebraicas a todo conjunto de números y letras enlazados por las operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación).
Las letras que forman una expresión algebraica se llaman INDETERMINADAS porque pueden recibir valores arbitrarios.
2. CLASIFICACIÓN. -Las expresiones algebraicas se clasifican en ENTERAS o FRACCIONARIAS, RACIONALES o IRRACIONALES.
Son enteras las que no tienen letras en ningún divisor o denominador (aunque los tengan numéricos) y fraccionales las que sí que los tienen.
Son racionales las que no tienen letras bajo ningún radical e irracionales las que sí que las tienen.

3. MONOMIOS Y POLINOMIOS. –Se llaman polinomios algebraicos a las expresiones racionales y enteras.
Por ser enteras no deben tener indeterminadas en ningún divisor ni denominador.
Por consiguiente, las indeterminadas que figuran en un polinomio algebraico sólo pueden estar enlazadas por los signos de sumar, restar, multiplicar y potenciar.
Las partes de un polinomio, separadas por los signos + y -, se llaman TÉRMINOS.” (Sales, 1963, página 163)

- Durante los años 50 y casi todos los años 60, los problemas de álgebra eran sistemáticamente razonados por el profesor. A veces, se realizaban interesantes interpretaciones de las soluciones en el mundo real. Veamos un ejemplo:

  “Problema 11. *–Un padre tiene 40 años y su hijo 8. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea 9 veces las del hijo?*
  Llamemos x al número de años buscado. Dentro de x años el padre tendrá $40+x$ y el hijo $8+x$, y como entonces la edad del primero es 9 veces la del segundo, se verifica que $40+x=9(8+x)$ cuya solución es $x=-4$
  El problema, tal y como se ha enunciado es imposible, porque sólo admite solución positiva; pero podemos sustituirlo por este otro equivalente: Un padre tiene 40 años y su hijo 8. ¿En qué época la edad del padre es 9 veces la del hijo?
  Con este enunciado, tomando los tiempos a partir de la época actual, los venideros como positivos, y negativos los pasados, la solución -4 indica que hace 4 años la edad del padre fue nueve veces la del hijo y. en efecto, el padre tenía 36 y el hijo 4.” (Baratech, 1955, página 111)

  Del problema anterior, destacamos que:
  -No se explicita la resolución de la ecuación $40+x=9(8+x)$. Probablemente, porque se supone que es fácil para alumnos que ya han operado con polinomios, fracciones racionales, radicales, ecuaciones, sistemas…
  -Se interpreta el significado del signo negativo de $x=-4$ como que era algo que ocurrió hace 4 años.
  -Se propone un cambio en el texto del enunciado para que la solución $x=-4$ hallada tenga sentido. No se proponer un ajuste de los datos numéricos dados en el problema.

- Durante los años 50 y casi todos los años 60, en este bachillerato de las dos reválidas, se insistía en que el alumno debía sistematizar y repasar sus conocimientos matemáticos para que recordase todo lo estudiado cuando llegasen la terribles reválidas. Veamos un prólogo muy revelador:

  “*Ahora bien, cuando este estudiante de Grado Elemental se prepare para realizar los ejercicios de la reválida ha de repasar todo lo que estudió en los cuatro cursos anteriores, puesto que el examen versa sobre la materia de los*

cuatro cursos. Esto quiere decir que el estudiante necesitará entonces disponer de los cuatro libros de Matemáticas, que utilizó en el bachillerato. Lo más probable es que no los conserve, pero aunque los tenga en buen estado sucederá con frecuencia que cada libro sea de un autor, cada uno con su peculiar modo de exponer las cuestiones. Todo esto dificulta y entorpece la preparación del examen de reválida. En cambio si el estudiante dispusiera de un libro, uno solo, en el que se expusiera de manera sistemática y comprendiera toda la matemática de los cuatro cursos del bachillerato elemental, no cabe duda de que encontraría en ese libro una ayuda para realizar el repaso general que debe preceder al examen de reválida.
Esto es precisamente lo que le ofrecemos con esta obra del catedrático D. Manuel Sales Boli. En este libro se ha recogido ampliamente todo el contenido fundamental de los cuatro cursos del Grado Elemental del bachillerato." (Sales, 1963, Presentación)

- Durante los años 50 y casi todos los años 60, esto es, hasta que se abolieron las reválidas, existían unas cuestiones-tipo y unos problemas-tipo que habitualmente se preguntaban en las reválidas y en los cursos de la enseñanza oficial. Veamos un texto que explicita lo anterior:

  "*Creemos que los alumnos de 3.º y 4.º de Bachiller que estudien el contenido de este libro, se encontrarán preparados para resolver las cuestiones y problemas que puedan proponerles en los exámenes de Reválida del Grado Elemental, y al mismo tiempo, adquirirán una sólida base para emprender con éxito el estudio de las Matemáticas del Bachiller Superior.*" (Ruiz y Rodríguez, 1959, Prólogo)

- A finales de los años 60 se empezó a introducir la nueva metodología inductiva de la Ley General de Educación de 1970. Veamos algunos ejemplos representativos:

  -Prólogo de Tapia (1969): "*En la elaboración de este libro de Matemáticas 3º se ha intensificado nuestra preocupación por aplicar los aciertos de la didáctica activa.*
  Como punto de partida de cada lección o pregunta se presentan aquellas realidades, ejemplos vivos, que rodean a los chicos: "Ir de lo conocido a lo desconocido".
  Como en nuestros libros anteriores, el desarrollo de cada materia supone un diálogo sencillo y cordial con el alumno.
  Por otra parte, es preciso advertir algo apropósito del método adoptado: con arreglo a las normas de la didáctica activa y nocional hemos intentado que el alumno lleve a cabo un aprendizaje por sí mismo, es decir, actuando un poco como investigador.
  La mayor parte de las series de ejercicios están ideadas para que de hallazgo en hallazgo, progrese hasta alcanzar unas conclusiones teóricas que deben obtener en cada caso ayudado por el autor. Por otra parte, en ningún momento se dejan de hacer los desarrollos necesarios de cada demostración.

La realización de estos ejercicios es absolutamente necesaria; de otro modo, el alumno corre el riesgo de no asimilar plenamente lo aprendido. Si así lo hace, habremos conseguido que utilice papel y lápiz, cosa que, como todos sabemos es imprescindible a la hora de estudiar Matemáticas."

-Prólogo de Vila y Agustí (1968): "*La finalidad de un curso de matemáticas no es la asimilación de unas reglas, o la aplicación de unas fórmulas, o el aprendizaje de unos métodos que el profesor impone o transmite.*
Ha de llegar el momento en que el alumno ante un problema, tal vez sencillo, tome una posición personal, y sea él el responsable de su solución.
La actividad matemática del alumno no ha de apoyarse en la autoridad del profesor o del texto. Un problema, una nueva situación presentada convenientemente, debiera suscitar en el chico de trece años la curiosidad y el interés por acometer tal solución.
Búsqueda e investigación personal constituyen el primer paso, el más importante en la formación matemática del alumno."

De los dos ejemplos anteriores, destacamos que:
-En el prólogo de Tapia (1969) se propugna un proceso inductivo sustentado en el mundo físico.
También se sostiene que el alumno debe aprender "*por sí mismo*", buscar sus propias soluciones personales, "*actuando un poco como un investigador*".
-En el prólogo de Vila y Agustí (1968) se habla de "*suscitar en el chico de trece años la curiosidad y el interés por acometer tal solución"* y se rechaza la metodología tradicional basada en "*la asimilación de unas reglas, o la aplicación de unas fórmulas, o el aprendizaje de unos métodos que el profesor impone o transmite*". En su lugar se propugna que "*Búsqueda e investigación personal constituyen el primer paso, el más importante en la formación matemática del alumno".*

II.3.4. La Ley General de Educación (LGE)

La Ley General de Educación (LGE) de 1970 -o ley Villar Palasí- supuso la reforma más profunda del sistema educativo español desde que en 1857 fuera fundado mediante la Ley Moyano. Podemos considerar que este período abarcó, aproximadamente, los años 70 y 80.

En este sistema de la Ley de 1970 estudiaron grandes cantidades de niños y adolescentes porque los nacidos durante el "baby boom" del desarrollismo (1960-73) llegaron a las aulas en los 70 y 80, y porque España era un país desarrollado en el que los estudios universitarios se percibieron como medio de promoción social.

A) El Sistema educativo

Como ya hemos dicho, el sistema es el diseñado por la Ley Villar Palasí de1970.

A1) Estructura del sistema:

- La nueva primaria pasó a denominarse Educación General Básica (EGB) y comprendía 8 cursos (6-14 años). La EGB era una nueva primaria (6-14 años) obligatoria que unificó los tres tipos de enseñanza existentes del sistema anterior: la Primaria General (6-10 años) -obligatoria y común-, la Primaria Especial (10-14 años) -destinada para los que no estudiaban bachillerato-, y el Bachillerato Elemental (10-14 años) –destinado a los que tenían aspiraciones a cursar estudios superiores-.

- Los cursos de 1º, 2º, 3º y 4º del Bachillerato elemental (10-14 años) de los institutos se transformaron en los cursos de 5º, 6º, 7º y 8º de EGB de los colegios. Además, sus nuevos docentes no eran los profesores de instituto, licenciados especialistas en su asignatura, sino maestros, con una formación de carácter general.

- Los dos cursos del Bachillerato Superior (14-16 años) y el curso preuniversitario –PREU- (16-17 años) se transformaron en los cursos 1º, 2º y 3º de Bachillerato Unificado Polivalente (BUP) y los profesores de instituto, licenciados especialistas en su asignatura, los impartían en los llamados Institutos Nacionales de Bachillerato (INB).

- El Curso de Orientación Universitaria (COU) fue añadido a la enseñanza secundaria. Los profesores de instituto también impartían el COU (17-18 años) en los institutos. Este COU (17-18 años) venía a ser un sustituto del curso preuniversitario –PREU- (16-17 años) pero estaba dirigido a alumnos de un año más de edad.

- La prueba de madurez, que se realizaba tras el PREU (16-17 años), se transformó en la prueba de Selectividad, que se realizaba ahora tras el COU (17-18 años). La Selectividad resultó ser un filtro blando: según Pérez-Díaz y Rodríguez (2003), la aprobaban más del 70% en los años 80 y más del 80% en los años 90.

- El examen de ingreso, la reválida de Bachillerato Elemental y la reválida de Bachillerato Superior fueron abolidos. Habían desaparecido tres de los cuatro filtros del Bachillerato de las reválidas de 1953.

- El sistema educativo de la LGE permitía pasar de curso con algunas asignaturas pendientes pero utilizaba la repetición de curso como método habitual de recuperación. Así, según Pérez-Díaz y Rodríguez (2003), los repetidores eran: el 13% en el BUP en los años 80, el 17% en el BUP en los 90, el 16% en el COU en los 80 y el 22% en el COU en los años 90.

- Los que aprobaban EGB obtenían el título de Graduado Escolar y los que aprobaban 1º, 2º y 3º de BUP obtenían el título de Bachillerato. Ambos eran, y siguen siendo en la actualidad, requisitos exigidos para trabajar en muchos puestos de las administraciones públicas.

- Los que suspendían EGB obtenían el Certificado de Escolaridad que sólo acreditaba que habían estado escolarizados hasta los 14 años. Sólo podían matricularse en Formación Profesional (14-19 años). Dicha Formación Profesional (FP) se impartía en los denominados Institutos de Formación Profesional (IFP) en los que había profesores licenciados que eran especialistas en asignaturas de tipo general -Matemáticas, Lengua, Inglés,…-, y profesores técnicos que eran especialistas de tipo profesional -Peluquería, Electricidad, Administrativo,…-.

- Los profesores licenciados podían ser de Bachillerato o de Formación Profesional. Cada grupo –cuerpo- de profesores tenía oposiciones de ingreso, sueldos y atribuciones diferentes.

- La LGE de 1970 introdujo los siguientes cambios en las asignaturas:
  -Suprimió la enseñanza de las Lenguas Clásicas de los 10 a los 14 años. Sólo el Latín permaneció como asignatura obligatoria y común en el currículo de 2º de BUP (15-16 años).
  -Introdujo la Matemática moderna (teoría de conjuntos, estructuras como los grupos, anillos y cuerpos, relaciones de orden,…), en la segunda etapa de EGB (11-14 años). Hubo incluso intentos de introducir algunos de los conceptos de la Matemática moderna incluso en los cursos de la 1ª etapa de EGB (6-11 años).
  -Impulsó la introducción del análisis sintáctico moderno en Lengua durante la segunda etapa de EGB (11-14 años).

- La LGE de 1970 introdujo los siguientes cambios metodológicos:
  -Se desterró el excesivo memorismo de otros tiempos (Se hizo célebre la expresión de que "ya no se memoriza la lista de los reyes godos"). El alumno debía "*aprender a aprender*": se enseñaban métodos de estudio -subrayado, esquematización,…-, se exigía la búsqueda de información en libros de consulta, diccionarios y enciclopedias,...
  -Se fomentó que el alumno tuviese un papel más activo en su proceso de aprendizaje: Aparecieron las fichas, los trabajos propuestos, los ejercicios de auto-evaluación…
  -Se favoreció el desarrollo de la expresividad (oral, escrita, plástica, musical, dramática,…) del alumno.
  -Se fomentó la creatividad y la originalidad del alumno.
  -Se generalizó el uso de múltiples recursos didácticos (diapositivas, murales, excursiones, conferencias,…) como instrumentos de formación.

A2) Resultados prácticos

Según Díaz-Pérez y Rodríguez (2003), tenemos que:

- La tasa de niños que obtenían el Graduado Escolar, esto es, que aprobaban la EGB, era del 68% en los primeros años (1973, 1974,…), bajó hasta un mínimo del 62,40% en 1980 y aumentó hasta el 80% al final de los años 80.
- El número de matriculados en bachillerato bajó (por la sustitución del bachillerato anterior de 7 cursos por el del BUP-COU de 4 cuatro cursos) desde 1.500.000 alumnos en el curso 1970-71 hasta un mínimo de 800.000 en el curso 1974-75; luego subió hasta alcanzar 1.140.000 estudiantes en el curso 1979-80; volvió a subir hasta 1.270.000 en el curso 1986-87 y, desde entonces, subió rápidamente hasta 1.500.000 estudiantes al final de los años 80.
- La tasa de repetición fue muy elevada: Más de la mitad de los aprobados de COU habían repetido algún curso en su historia escolar.
- La población universitaria no dejó de crecer, en los años 70 y 80, hasta alcanzar máximos históricos a finales de los años 80. Lo anterior se debe a que había muchos que, sin vocación alguna, cursaban una carrera universitaria por "hacer algo". Pensaban, equivocadamente, que la mera posesión de un título universitario mejoraría sus oportunidades de empleo y promoción social.

A3) La LODE de 1985:

En 1985, se aprobó la LODE -Ley Orgánica Reguladora del Derecho a la Educación- que:

- Estableció un nuevo sistema de gestión de centros a través de los *consejos escolares* que estaban formados por representantes de los profesores, de los padres, de los alumnos, del personal de servicios y del municipio. Tal estructura participativa de los consejos escolares ha llegado hasta nuestros días.
- Consolidó y estableció una doble red de centros financiados con el erario público:
  -C*entros públicos* gestionados por las administraciones educativas y en las que los profesores son funcionarios de carrera o interinos
  -C*entros privados concertados* gestionados por entidades no públicas y en las que los profesores son contratados por tales entidades. La más importante de tales entidades es, sin duda, la Iglesia Católica que posee diferentes congregaciones (jesuitas, agustinos, maristas,…) dedicadas a la enseñanza.

  Así, se creó un sistema educativo, vigente en la actualidad, en el que hay tres tipos de centros educativos: públicos, privados concertados y privados no concertados.

B) El alumnado

La tabla de la población total de la ciudad de Zaragoza durante la década de los años 70 y 80 es la siguiente:

	Número de habitantes en Zaragoza capital
Censo de 1970	469.365
Censo de 1981	590.750
Censo de 1991	594.394

Tabla II.17: Población 1970-1990. Garriga (2011)

De la anterior tabla II.17, destacamos que:
-La población aún creció en 121.385 habitantes, el 25,86 %, durante la década de los años 70: eran los estertores finales de la emigración rural a la ciudad y de una tasa de natalidad moderadamente alta en los últimos años del desarrollismo.
-La población se estanca durante los años 80: sólo crece en 3.644 habitantes, el 0,61%. Lo anterior es atribuible a que el campo ya se había vaciado, a que la economía no generaba nuevos puestos de trabajo y a la caída de la natalidad.

Las tablas del número de estudiantes y de titulados son las siguientes:

Número de estudiantes cursando la enseñanza secundaria en Zaragoza capital			
	Total	Varones	Mujeres
Censo de 1970	49.181	27.460	21.721
Censo de 1981	64.569	35.627	30.588
Censo de 1991	75.469	37.982	37.487

Tabla II.18: Estudiantes 1970-1990. Garriga (2011)

Porcentaje de titulados en enseñanza secundaria en Zaragoza capital			
	Total	Varones	Mujeres
Censo de 1970	11,23%	13,14%	8,90%
Censo de 1981	19,11%	21,60%	16,54%
Censo de 1991	44,11%	48,05%	40,43%

Tabla II.19: Titulados 1970-1990. Garriga (2011)

De las tablas II.18 y II.19, destacamos que:
-En los años 70, el número de estudiantes creció de 49.181 a 64.569 -un aumento del 31,28%- en una ciudad que incrementó su población total en un 25,86%. Es un incremento moderadamente elevado del número de estudiantes.
-En los años 80, el número de estudiantes creció de 64.569 a 75.469 -un aumento del 16,88%- en una ciudad con un insignificante crecimiento demográfico del 0,86%. Es un incremento muy elevado del número de estudiantes.
-El porcentaje de titulados pasó de suponer el 11,23% de la población en 1970 a suponer el 19,11% en 1981 y el 44,11% en 1991. La conclusión es clara: una amplia mayoría de los jóvenes nacidos en el desarrollismo (1960-73) tituló en secundaria en los años 70 y, más aún, en los años 80.
-Las mujeres, el 44,16% de los estudiantes en 1970, pasaron a ser el 47,35% en 1981 y el 49,67% en 1991. En los años 70 y, más aún en los años 80, se puede hablar de que en las aulas de secundaria había tantos chicos como chicas.

C) La práctica docente

Para estudiar cómo era la práctica docente, hemos analizado los siguientes libros de texto: Agustí y Vila (1973), Rubies y otros (1973), Pons (1976), Marsinyach (1978), Valdés y Marsinyach (1980), Martínez y otros (1979), González (1979), González y Cappa (1982), Valles y otros (1983), Díaz y otros (1984), Edebé (1988) y Lazcano y Barolo (1989).

C1) Características generales de los libros

- En la tapa de cada libro aparece la asignatura -"*Matemáticas*"- y el curso al que va dirigido -por ejemplo, "*7º EGB*"-. Las palabras alusivas a la Matemática de estructuras (anillo, aplicación, semejanza,…), tan habituales a finales de los 60, desaparecieron en muchos libros de los años 70 y, más aún, de los años 80.
- Los libros de texto son publicados por grandes editoriales de Madrid y Barcelona: Vicens-Vives, Casals, Teide, Bruño, Anaya, SM, Edelvives, Barcanova, Edebé… Hoy en día, la mayoría de ellas siguen dominando el mercado.
- Los nombres de las editoriales aparecen destacadamente en las tapas de los 11 libros de la muestra. Sin embargo, los nombres de los autores sólo constan, y en letra pequeña, en las tapas de 7 de los 11 libros. En los restantes 4 libros, tales nombres sólo pueden averiguarse si se leen las primeras páginas.

  Es decir, los libros son conocidos por la editorial que los publica y no por el escritor o los escritores que los redactan.
- Cada libro suele estar redactado por entre 2 y 5 autores, sin indicar, muchas veces, los méritos académicos de tales autores. Esto es, los libros son configurados por equipos de redactores al servicio de tal o cual editorial.
- En casi todos los libros solían declararse, en la primera página, que estaban aprobados por el Ministerio de Educación y Ciencia. Evidentemente, tal autorización avalaba que la obra respetaba el currículo oficial.
- Los textos de los años 70 y 80 suelen ser menos compactos que los del pasado: Entre línea y línea se guarda cierta separación, los márgenes suelen ser amplios y los títulos y subtítulos de cada capítulo aparecen en diferentes colores.
- En los años 70 y en el primer lustro de los 80, los libros suelen seguir sin tener otros dibujos que las figuras geométricas, los diagramas de Venn y gráficas de coordenadas cartesianas. En realidad, son libros básicamente en blanco y negro, si bien los títulos y los subtítulos eran en negrita, rojo, azul,…

  Sin embargo, desde mediados de los años 80, los libros ya introducen atractivas fotografías y dibujos del mundo real que están relacionados con los temas matemáticos que se explicaban en los textos.

C2) Los contenidos

- En los libros de los años 70 y en algunos de los libros de los 80, la secuenciación de los contenidos de álgebra es: “Conjuntos $\rightarrow$ Aplicaciones $\rightarrow$ Representaciones gráficas de las rectas $\rightarrow$ Ecuaciones de 1º grado”. De hecho, tal secuenciación se basaba en las estructuras de la matemática moderna introducida durante el ambiente reformista de la Ley de 1970. Veamos un par de ejemplos representativos:

-Teoría en el libro de Pons, 1976, páginas 205 y 206:
“*14 ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA*
14.1 Ecuaciones lineales de coeficientes enteros
En el anillo de los números enteros (Z, +, .) hemos estudiado lo siguiente:
a) Suma de enteros: $a+b$
La suma de enteros tiene las propiedades
asociativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$
conmutativa: $a+b=b+a$
posee elemento neutro 0: $a+0=0$
todo elemento posee elemento simétrico (opuesto): $a+(-a)=a-a=0$
b) Multiplicación de enteros: $a\cdot b$
La multiplicación de enteros tiene las propiedades
asociativa: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
conmutativa: $a\cdot b=b\cdot a$
posee elemento neutro 1: $1\cdot a=a$
es distributiva respecto de la suma: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
Los números que figuran en la ecuación se llaman coeficientes
En una ecuación de coeficientes enteros solamente figuran números enteros:

$$3+x^2=2$$

La ecuación se llama lineal, si la x *aparece elevada al exponente* 1*, que no hace falta escribir*

$$5+2x^1=8 \qquad \text{o bien} \qquad 5+2x=8$$

En una ecuación lineal de coeficientes enteros, aparecen solamente las operaciones de anillo: suma y multiplicación.”

-Teoría en el libro de Lazcano y Barolo, 1989, página 73:
“*8. Ecuaciones de primer grado*
8.1 Noción de ecuación de primer grado
Para conocer la imagen de un número en la aplicación afín $f(x)=-x+5$ *basta sustituir la variable independiente* x *por dicho número. Así la imagen de 2 es 3, pues:* $f(2)=-2+5=3$
y la imagen de -4 *es* 9*, pues:* $f(-4)=-(-4)+5=4+5=9$
El problema que ahora se plantea es el inverso: si se conoce la imagen, ¿cómo se hallará su antecedente?

Para calcular el antecedente de 3, es necesario buscar un número x para el que verifique: $-x+5=3$
Esta igualdad recibe el nombre de ecuación de primer grado; la letra x se llama incógnita y el valor de x que satisface la igualdad se llama solución de la ecuación. En nuestro caso es 2, pues: $-2+5=3$"

De los dos textos anteriores, destacamos que:
-En el texto de Pons (1976) se explicita la estructura de anillo de los números enteros para decir que $5+2x^1=8$ (o $5+2x=8$) es una ecuación lineal con coeficientes enteros.
-En el texto de Lazcano y Barolo (1989) se parte de la definición de aplicación afín para definir la resolución de la ecuación $-x+5=3$ como la búsqueda del número x que al aplicarle la función afín $f(x)=-x+5$ dé 3.

- En algunos de los libros de los años 80, se vuelve a una secuenciación más tradicional: "Lenguaje algebraico $\rightarrow$Ecuaciones $\rightarrow$ Función lineal". Como ilustración de lo anterior, presentamos la siguiente tabla comparativa entre una secuenciación reformista y una secuenciación tradicional:

SECUENCIACIÓN REFORMISTA: Libro de Marsinyach (1978) 7º EGB (12-13 años)	SECUENCIACIÓN TRADICIONAL: Libro de Díaz y otros (1984) 7º EGB (12-13 años)
6. FUNCIONES 6.1 Ejes de coordenadas rectangulares 6.2 Función de variable entera 6.3 Función de variable racional positiva 6.4 Formas de presentar una función 6.5 Función lineal 6.6 Función afín 7. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA 7.1 Identidades y ecuaciones 7.2 Propiedades fundamentales de los números enteros 7.3 Ecuaciones equivalentes 7.4 Resolución de ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros 7.5 Ecuaciones que no tienen solución en Z. Casos particulares. 7.6 Resolución de ecuaciones en el conjunto de los números racionales positivos 8. PROBLEMAS DE PRIMER GRADO 8.1 Problemas de primer grado 8.2 Problemas resueltos 8.3 Problemas de móviles 9.PROPORCIONALIDAD SIMPLE DE MAGNITUDES	7. EL LENGUAJE ALGEBRAICO -Introducción -Operaciones con letras -El lenguaje del álgebra 8. LA IGUALDAD -Las igualdades -Conservación de las igualdades 9. LAS ECUACIONES -Qué son las ecuaciones -Resolución de ecuaciones. I -Resolución de ecuaciones. II -Resolución de ecuaciones. III -Resolución de ecuaciones. IV -Resolución de ecuaciones. V 10. EL VOLUMEN. III -Relación entre las unidades de volumen y las de capacidad -Equivalencias capacidad-masa 11. LA FUNCIÓN -Introducción -Estudio de la función y su nomenclatura 12. FUNCIÓN LINEAL -Ecuación de las funciones lineales -Pendiente de una recta 13. PROPORCIONALIDAD

Tabla II.19. Comparación entre un índice de un libro de 1978 y uno de 1984.

De la tabla II.19, destacamos que:
-En el índice del libro de 1978, la secuenciación es: "función lineal$\rightarrow$función afín$\rightarrow$ecuación de primer grado con una incógnita". Es decir, se va desde conceptos de la matemática moderna (función lineal y afín) a conceptos del álgebra tradicional (ecuación de primer grado con una incógnita).
-En el índice del libro de 1984, la secuenciación es: "lenguaje algebraico$\rightarrow$igualdades$\rightarrow$ecuaciones$\rightarrow$funciones lineales". Es decir, se introducen las ecuaciones de forma más tradicional a partir del lenguaje algebraico y las igualdades y, una vez expuestos los conceptos del álgebra tradicional, se introducen los de la matemática moderna (las funciones lineales).

- En los años 70 y 80 la proporcionalidad volvía aparecer tras las ecuaciones algebraicas, esto es, como caso particular de las ecuaciones de primer grado.

- En los años 70 y 80, en la resolución de los problemas, se proponían cuatro pasos consecutivos: 1º) Elección de la incógnita, 2º) Planteo de la ecuación, 3º) Resolución de la ecuación y 4º) Comprobación.

  No obstante, habitualmente, en los primeros ejemplos se ejecutaban todos los pasos pero, luego, se omitía el 4º) paso, esto es, la comprobación.

C3) Metodología

- En los años 70 y 80, se solía proponer que el alumno participase inductivamente en la asimilación de la teoría, mediante la realización de ejercicios. Esto era romper con un pasado en el que la teoría era expuesta por el profesor y la práctica era repetida luego por el alumno.

  Veamos la siguiente tabla que esquematiza las dos metodologías inductivas que más se solían proponer en aquellos tiempos:

TIPO 1 (INDUCCIÓN EN FEED BACK)	TIPO 2 (INDUCCIÓN DIRECTA)
CONCEPTO GENERAL (EXPUESTO POR PROFESOR) $\downarrow$ EJEMPLO PARTICULAR (EXPERIMENTADO POR EL ALUMNO) $\downarrow$ CONCEPTO GENERAL (COMPRENDIDO INDUCTIVAMENTE POR EL ALUMNO)	EJEMPLO PARTICULAR (EXPERIMENTADO POR EL ALUMNO) $\downarrow$ CONCEPTO GENERAL (QUE EL PROFESOR EXPONE Y QUE EL ALUMNO COMPRENDE INDUCTIVAMENTE)

Tabla II.20. Comparación entre la inducción en feed-back y la inducción directa

Veamos un par de ejemplos que representan, respectivamente, los dos anteriores tipos de participación inductiva del alumno en su proceso de aprendizaje:

-Ejemplo nº 1 de Bruño, 1978, página 117:
"*Un número **a** es solución de una ecuación de primer grado si al sustituir la incógnita por el número **a** y efectuar operaciones resulta una igualdad numérica.*
Ejercicios:
13. Comprueba que $x = 2$ *es solución de la ecuación* $2x - 7 = -3$
14. Comprueba que $x = 2$ *no es solución de la ecuación* $2x + 3 = x - 11$
Resolver una ecuación es hallar sus soluciones."

-Ejemplo nº 2 de Bruño, 1978, página 117: "*Comprueba que* $x = 4$ *es solución de estas tres ecuaciones:*

$$1 + 3x = 4x - 3$$
$$x + 14 = 2x + 10$$
$$1 + 3x = x + 9$$

Dos o más ecuaciones se dicen equivalentes si tienen la misma solución."

De lo anterior, destacamos que:
-En el ejemplo nº 1 de Bruño (1978), la metodología inductiva en feed back es: (1º) el profesor define el concepto general "*solución de una ecuación*" $\Rightarrow$ (2º) el alumno debe comprobar que, en particular, $x = 2$ es solución de $2x - 7 = -3$ pero que no es solución de $2x + 3 = x - 11 \Rightarrow$ (3º) el profesor vuelve, en feed back, al concepto general "*solución de una ecuación*."
-En el ejemplo nº 2 de Bruño (1978), la metodología inductiva directa es: (1º) El alumno debe comprobar que, en particular, $x = 4$ es solución de $1 + 3x = 4x - 3$, $x + 14 = 2x + 10$ y $1 + 3x = x + 9 \Rightarrow$ (2ª) El profesor expone el concepto general de ecuación equivalente.

- En los años 70 y 80, al final de cada capítulo, se ponía el énfasis en la realización de muchas operaciones algebraicas y de problemas algebraicos. Tales actividades estaban agrupadas además en casos-tipo con una dificultad creciente. Es una metodología conductista.

II.3.5. La Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE)

En la década de los 90, el sistema educativo español vivió una segunda gran reforma educativa: la de la LOGSE (Ley Orgánica General del Sistema Educativo) que extendió la enseñanza obligatoria hasta los 16 años.

Además, durante la década de los 90, España recibió numerosos contingentes de inmigrantes. Esto hace que los extranjeros supongan hoy más del 10% de la población residente en nuestro país y un porcentaje mayor aún, dada su juventud y su alta tasa de natalidad, de la población estudiantil de la enseñanza secundaria.

A) El sistema educativo

La LOGSE -Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo- de 1990 es sumamente importante porque, aunque en los últimos 20 años se han promulgado varias grandes leyes, todos los autores consultados –Capitán (2000), Pérez-Díaz (2003), Mas (2003) y Cantón (2004)- coinciden en que el sistema educativo actual de la LOE de 2006 es, esencialmente, el diseñado por la LOGSE de 1990.

A1) El sistema educativo de la LOGSE

- Ha creado una enseñanza obligatoria, gratuita y común que está dividida en los dos tramos: la Primaria (6-12 años) y la Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años), denominada con las siglas E.S.O, que han absorbido los siguientes cursos del anterior sistema de la LGE de 1970:
  -Los cursos de 1º a 6º de EGB (6-12 años) se han transformado en los respectivos 1º a 6º de Primaria (6-12 años) que los maestros siguen impartiendo en los colegios de primaria.
  -Los cursos de 7º y de 8º de EGB (12-14 años) han regresado a la enseñanza secundaria, transformándose en los respectivos 1º y 2º de ESO que son impartidos por licenciados, especialistas en su asignatura, en los institutos. También han sido -y serán impartidos durante un período transitorio- por algunos maestros que se han trasladado a los institutos.
  -Los cursos de 1º y de 2º de BUP (14-16 años) y los dos cursos de FP I (14-16 años) se han transformado en los respectivos 3º y 4º de ESO. Todos los alumnos reciben ahora una enseñanza común y obligatoria hasta los 16 años, en vez de hasta los 14 años.
  -Los alumnos que aprueban la ESO obtienen el título de Graduado en Secundaria que les permite cursar el Bachillerato, la Formación Profesional de Grado Medio o el acceso a puestos de funcionarios del grupo D.

- Ha configurado una enseñanza post-obligatoria que está dividida en los tramos de Bachillerato (16-18 años), Formación profesional de Grado Medio (16-18 años) y Formación Profesional de Grado superior (18-20 años) que ha sustituido a los siguientes cursos del anterior sistema de la LGE de 1970:
  -Los cursos 3º BUP (16-17 años) y COU (17-18 años) se han transformado en 1º de Bachillerato (16-17 años) y 2º de Bachillerato (17-18 años). La prueba de Selectividad, de acceso a la Universidad, que se realizaba al final del COU, se sigue llamando Selectividad y se realiza al final de 2º de Bachillerato.
  -Los que aprueban 1º y de 2º de Bachillerato obtienen el título de Bachillerato que permite el acceso: a la Universidad -si también se supera la Selectividad-, a la Formación Profesional de grado Superior y a los puestos de funcionario del grupo C.
  -Los 5 cursos consecutivos (14-19 años) de la antigua Formación Profesional divida en la FP I (14-16 años) y en la FP II (16-19 años)-, que llevaban a una titulación única, se ha transformado en una nueva Formación Profesional de 4 cursos (14-18 años) que está dividida en dos ciclos -Grado Medio (14-16 años) y

Grado Superior (16-18 años)- que pueden cursarse independientemente y conducen a titulaciones propias. Además, la actual Formación Profesional de Grado Medio (16-18 años) se considera parte de la enseñanza secundaria post-obligatoria mientras que la de Grado Superior (16-18 años) se considera parte de la enseñanza superior y sigue permitiendo el acceso a ciertos estudios universitarios. Ambas FP (la de Grado Medio y la de Grado Superior) son impartidas por el Cuerpo de los Profesores Técnicos de Educación Secundaria de las diferentes familias profesionales (administrativa, hostelería y restauración,…) en los institutos de secundaria.

En resumen:

-La nueva Primaria ha perdido los dos últimos cursos (12-14 años) de la antigua primaria EGB.
-El nuevo Bachillerato ha perdido los dos primeros cursos (14-16 años) del antiguo bachillerato BUP-COU.
-La nueva Formación Profesional ha perdido un curso, se ha retrasado en dos años y se ha dividido en dos ciclos, el Grado Medio (16-18 años) y el Grado Superior (18-20 años), que son independientes y cada uno de los cuales tiene valor en el mercado laboral.
-Con los cursos suprimidos de la antigua primaria y del antiguo BUP-COU y de la antigua FP se ha creado una enseñanza secundaria ESO (12-16 años) que es obligatoria y común.

- La LOGSE de 1990 ha integrado los diversos cuerpos de catedráticos y los de agregados de los institutos de bachillerato y de los institutos de formación profesional de la LGE de 1970 en el único "Cuerpo de profesores de Enseñanza Secundaria" que imparte la Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años) y el Bachillerato (16-18 años).

- En la enseñanza secundaria obligatoria de la LOGSE, las decisiones sobre el paso de curso y sobre la obtención del título de Graduado en Secundaria se toman colegiadamente en las juntas de evaluación, dentro de los márgenes que dictan las leyes sobre el número máximo de materias suspendidas y el número máximo de cursos que se pueden repetir. En la práctica, el alumno que haya repetido uno o dos cursos en Primaria o/y en Secundaria puede ser enviado a cursar 3º y 4º de ESO en un Programa de Diversificación Curricular donde puede obtener el título de Graduado en Secundaria.

- En el sistema de la LOGSE existen diversos puentes, mediante pruebas de acceso o mediante experiencia laboral acreditada, para que los alumnos que no consigan el título de Graduado en Secundaria puedan entrar en la F P de Grado Medio y en la de Grado superior si tienen cierta edad mínima.

- Matemáticas es una asignatura común y obligatoria en 1º, 2º y 3º de ESO (12-15 años). Sin embargo, aunque es obligatoria en 4º de ESO (15-16 años), los

estudiantes tienen la posibilidad, inexistente en las demás asignaturas, de elegir entre dos opciones:
-Las *Matemáticas de la Opción A*, es decir, las “fáciles” o “terminales”: están dirigidas a aquellos alumnos que van a salir a los 16 años al mercado laboral, o a aquellos que van a cursar estudios post-obligatorios que no incluyen las Matemáticas en su currículo.
-Las *Matemáticas de la Opción* B, esto es, las “difíciles” o “no-terminales”: están dirigidas a aquellos alumnos que cursarán estudios post-obligatorios que sí incluyen las Matemáticas en su currículo.

- La metodología propugnada por la LOGSE es la del constructivismo: primero, el alumno debe ser enfrentado a una serie de situaciones problemáticas que le obliguen a alterar sus esquemas cognitivos previos y, luego, el profesor debe organizar y formalizar los contenidos al final del proceso. Es una metodología que se basa en la investigación y la colaboración y en la que el alumno debe ser el protagonista activo de su propio aprendizaje.

  En lo que a las Matemáticas se refiere, la LOGSE propugna la construcción inductiva del conocimiento matemático, esto es, considera que la Matemática formal, acabada y deductiva debe ser el producto final al que el alumno llegue tras una investigación inductiva previa de carácter experimental.

A2) Resultados prácticos

Los años 90 fueron una década de transición. Durante la misma, el sistema educativo de la Ley de 1970 fue reemplazado, gradualmente, por el de la LOGSE. Los resultados, según Pérez Díaz y Rodríguez (2003), fueron:

- El título de Graduado Escolar del anterior sistema fue obtenido por el 80% de los alumnos en los primeros años 90, hasta que la desaparición de la EGB a mediados de los años 90.
- El número de matriculados en el antiguo bachillerato del BUP-COU alcanzó máximos absolutos históricos cercanos al 1.500.000 en el curso 1990-91 y en el 1991-92. Luego, el decrecimiento del número de matriculados en bachillerato fue muy rápido. En un primer momento, por la brusca caída de la natalidad a finales de los años 70 y, en un segundo momento, por el paso gradual de un bachillerato del BUP-COU de 4 cuatro cursos (14-16 años) al Bachillerato de la LOGSE de 2 cursos (16-18 años).
- En la Secundaria Obligatoria se implementaron una serie de medidas -reducción de la ratio profesor/alumno, creación de grupos de apoyo, de grupos de diversificación, de español para inmigrantes,…- que eran necesarias para atender a la gran diversidad de alumnos que ahora cursan la nueva Educación Secundaria Obligatoria común para todos los estudiantes de 12-16 años.
- El creciente incremento de la población universitaria hasta bien entrados los años 90, hasta alcanzar máximos históricos, está relacionado con la llegada a la

universidad de las últimas oleadas de la explosión de la natalidad del desarrollismo y con que, socialmente, se seguía considerando que la titulación universitaria era la mejor opción posible. La progresiva disminución de la población universitaria que empezó a producirse al final de la década, y que se intensificaría en la década siguiente (2000-2010), está relacionada con la caída de la natalidad de los años posteriores al desarrollismo, y con que ahora se valora socialmente la nueva formación profesional de la LOGSE como una puerta de acceso al mercado laboral más rápida y más segura que la de los estudios universitarios.

B) El alumnado

La tabla de la población total de Zaragoza durante los 90 es la siguiente:

	Número de habitantes en la ciudad de Zaragoza
Censo de 1991	594.394
Censo de 2001	614.905

Tabla II.21. Población 1991-2001. Garriga (2011)

Destacamos que la población de Zaragoza creció en sólo 20.511 habitantes durante los años 90. Esto supuso un incremento porcentual del 3,45%. Como, según el padrón municipal de 2001, el número de extranjeros subió desde 24.473a 92.491 en el de 2008, es evidente que el crecimiento poblacional es atribuible a la llegada de los primeros grandes contingentes de inmigrantes.

Pasemos ahora a estudiar la evolución del número de estudiantes y del porcentaje de titulados en la enseñanza secundaria en la ciudad de Zaragoza durante los años 90:

Número de estudiantes cursando la enseñanza secundaria en la ciudad de Zaragoza (basado en el Instituto Nacional de Estadística)			
	Total	Varones	Mujeres
Censo de 1991	75.469	37.982	37.487
Censo de 2001	28.066	13.304	14.762

Tabla II.22. Estudiantes 1991-2001. Garriga (2011)

Porcentaje de titulados en enseñanza secundaria en la ciudad de Zaragoza (basado en el Instituto Nacional de Estadística)			
	Total	Varones	Mujeres
Censo de 1991	44,11%	48,05%	40,43%
Canso de 2001	60,13%	62,86%	57,61%

Tabla II.23. Titulados 1991-2001. Garriga (2011)

Destacamos que:

-El brusco descenso en el número de estudiantes de secundaria al comparar 1991 con 2001. Tal disminución es atribuible a la caída de la natalidad y a que los adolescentes de 14-16 años, considerados estudiantes de secundaria en el censo de 1991 (con el sistema de la LGE de 1970 aún vigente), no fueron considerados de secundaria en el censo de 2001 porque se les incluyó en la nueva enseñanza básica obligatoria (6-16 años) de la LOGSE de 1990.
-El porcentaje de titulados pasó de suponer el 44,11% de la población total en 1991 a suponer 60,13% en 2001. Como el BUP-COU se extinguió (aproximadamente) en el curso 97-98, el anterior sistema educativo de la Ley de 1970 fue el artífice fundamental de tan gran incremento.
-La proporción entre varones y mujeres en las aulas cambió a favor de las segundas, por primera vez, en esta década: En 1991, había 37.982 varones y 37.487 mujeres cursando el BUP-COU de los 4 años y la FP de los 5 años de la LGE. Sin embargo, en 2001 había 13.304 varones y 14.762 mujeres cursando el Bachillerato de los 2 años y las FP de los 2 y los 4 años de la LOGSE.

C) La práctica docente

Para estudiar la práctica docente, hemos analizado los siguientes libros de texto: Vizmanos y Anzola (1991), Anaya (1994), Valdés y otros (1995), Vizmanos y Anzola (1995), Becerra y otros (1996), Vizmanos y Anzola (1995), Pérez y otros (1997), Vizmanos y Anzola (1998), Vizmanos y Anzola (1999), Pancorbo y otros (2000).

C1) Características generales de los libros

- Los libros de antes de 1994 pertenecen aún al sistema del BUP-COU de la Ley General de Educación de 1970. Los publicados después de 1994 pertenecen ya al sistema nuevo de la LOGSE de 1990.

- Todos los libros son de grandes editoriales: Anaya, Ediciones S. M., Anaya, McGraw-Hill,...

- En la tapa de cada libro aparece: la asignatura (“Matemáticas”), el curso al que van dirigidos (1º de BUP, 3º ESO,…) y la editorial que lo publicaba. En los libros destinados exclusivamente a los profesores se añaden las palabras “guía didáctica”, “guía didáctica y solucionario”,…

- Los libros suelen ser redactados por equipos de 2 a 5 miembros que trabajan, de forma estable, al servicio de una determinada editorial. Esto facilitó la continuidad de los contenidos, a pesar de los cambios legislativos. Por ejemplo: Vizmanos y Anzola utilizaron muchos ejercicios y problemas de sus libros de 1º de BUP (14-15 años) del sistema anterior de la Ley General de Ecuación en sus libros de 3º de ESO (14-15 años) de la LOGSE.

- Los libros destinados a los alumnos están divididos en unidades con apartados y subapartados debidamente numerados. Además presentan abundantes recuadros, dibujos y fotografías. Su aspecto es ameno y atractivo.

- Se solía seguir declarando que los libros respetaban el currículo oficial. Veamos algunos ejemplos representativos:

AUTOR	DECLARACIÓN
Vizmanos y Anzola (1991)	Aprobado por el Ministerio de Educación y Ciencia, O. M. del 18-6-1990, BOE del 25-7-1990
Anaya(1994)	Este libro correspondiente al curso de 7º de EGB y forma parte de los materiales curriculares del proyecto editorial de Anaya Educación, que ha sido debidamente supervisado y autorizado.
Vizmanos y Anzola (1995)	Este libro corresponde al segundo ciclo de Ecuación Secundaria, área de Matemáticas, y forma parte de los materiales curriculares del proyecto editorial de Ediciones SM, que ha sido debidamente supervisado y autorizado.
Becerra y otros (1996)	-Libro de texto para la etapa de Educación Secundaria Obligatoria ciclo primero, área de Matemáticas, elaborado según el proyecto editorial supervisado por el Ministerio de Educación y Ciencia y aprobado por orden de 9 de junio de 1995. -Libro para la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, ciclo primero, área de Matemáticas, elaborado según el proyecto editorial supervisado por Orden de 4 de julio de 1995. (Comunidad Autónoma de Andalucía). -Texto autorizado por el Gobierno de Navarra por Resolución 791/1995, de 26 de Junio -Material didáctico curricular homologado para primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, elaborado según el proyecto editorial aprobado por Resolución de 19 de junio de 1995 de la Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa, de la Consellería de Educación y Ciencia. (Comunidad Valenciana). -Texto autorizado por el Departamento de Educación, Universidades e investigación por resolución de fecha 30 de junio de 1995. (Comunidad Autónoma del País Vasco).
Pancorbo y otros (2000)	Libro de texto, correspondiente al Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, área de Matemáticas, que forma parte de los materiales curriculares del Proyecto editorial McGraw-Hill y ha sido debidamente presentado a supervisión.

Tabla II.24. Autorizaciones de libros 1991-2001.

Destacamos que la transferencia de las competencias educativas desde el estado a las autonomías hizo muy engorroso explicitar en qué boletín autonómico estaba la orden de autorización. Por ello, se acabó declarando que sus textos habían sido "debidamente supervisados y autorizados" o "debidamente presentados a supervisión".

C2) Los contenidos

- Durante los primeros años de aplicación de la LOGSE (1995, 1996, 1997,…) se mantuvo la secuenciación tradicional "ecuaciones → funciones", pero se procedió a una importante reducción de los contenidos algebraicos: los polinomios, las fracciones racionales, los radicales y las ecuaciones de 2º grado desaparecieron. Veamos, como muestra, la siguiente tabla comparativa:

ÚLTIMOS AÑOS DEL BUP Vizmanos y Anzola (1991) 1º BUP (14-15 años)	PRIMEROS AÑOS DE LA ESO Vizmanos y Anzola (1995) 3º ESO (14-15 años)
6. Expresiones enteras 7. División. Raíces de un polinomio 8. Expresiones fraccionarias 9. Expresiones radicales 10. Ecuaciones de primer grado 11. Ecuaciones de segundo grado 12. Sistemas de ecuaciones 13. Desigualdades 14. Funciones 15. Primeras propiedades 16. Funciones polinómicas 17. Progresiones aritméticas 18. Progresiones geométricas 19. Matemática financiera	4. Ecuaciones de primer grado 5. Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas 6. Proporcionalidad numérica 15. Funciones 16. Propiedades globales de las funciones 17. Proporcionalidad directa. Funciones lineales 18. Proporcionalidad inversa

Tabla II.25. Comparación entre un índice de 1991 y uno de 1995.

- Al final de los años 90, se reintrodujeron los contenidos algebraicos que la LOGSE había suprimido. Veamos la siguiente tabla comparativa:

PRIMEROS AÑOS DE LA ESO Vizmanos y Anzola (1995) 3º ESO (14-15 años)	LA ESO AL FINAL DE LOS 90 Vizmanos y Anzola (1998) 3º ESO (14-15 años)
4. Ecuaciones de primer grado 5. Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas 6. Proporcionalidad numérica 15. Funciones 16. Propiedades globales de las funciones 17. Proporcionalidad directa Funciones lineales 18. Proporcionalidad inversa	4. Expresiones enteras. Polinomios 5. División de polinomios. Raíces 6. Expresiones fraccionales y radicales 7. Ecuaciones de primer grado 8. Ecuaciones de segundo grado 9. Sistemas de ecuaciones 10. Proporcionalidad directa e inversa 15. Funciones 16. Funciones lineales y funciones cuadráticas 17. Funciones racionales: hipérbolas

Tabla II.26. Comparación entre un índice de 1995 y uno de 1998.

- En los libros de la ESO solían aparecer explicaciones, inexistentes en los del BUP, con las que se intentaba que el proceso de aprendizaje fuera significativo. Veamos un ejemplo representativo, las indicaciones de Vizmanos y Anzola, 1995, página 44:

  "La idea de ecuación y las propiedades, que permiten pasar de una a otra equivalente, tienen una interpretación intuitiva en la clásica balanza de paltillos.
  La balanza permite tratar la ecuación como una igualdad simétrica. Tanto los datos como la incógnita se pueden materializar y colocarse en ambos platillos, lo que permite su manipulación.
  La balanza en equilibrio da sentido al signo igual (equivalencia de los dos paltillos), y la manipulación de los pesos, asignados a los datos y a la incógnita, permite descubrir las leyes en que se basa la resolución de ecuaciones, utilizando el sencillo método de hacer lo mismo en los dos platillos."

- Ni en los libros del BUP del primer lustro ni en los de la ESO del segundo lustro de los años 90 estaba claro el significado de las letras. Veamos un par de ejemplos representativos:

  -El libro de BUP de Vizmanos y Anzola, 1991, página 197: "…-*El signo + o – que precede a una letra es un signo de operación; no indica que el valor que toma la letra es positivo o negativo.*
  En la expresión $3x - a$ *el signo – es de operación.*
  Si $a = 3$, *entonces* $3x - a = 3x - 3$
  Si $a = -3$, *entonces* $3x - a = 3x - (-3) = 3x + 3$
  Las letras a, b, c, e, v, t,…, representan números; cuando operamos con ellas es como si operásemos con los números que representan.
  Un principio que no conviene olvidar:
  Las operaciones que se realizan con letras son las mismas que se realizan con números y cumplen las mismas reglas"

  -El libro de ESO de Pérez y otros, 1997, página 56 y 57:
  "*…El álgebra, como sabes, es un lenguaje de símbolos:*
  Símbolos de operaciones $(+,-,\cdot,/)$. *El signo "por" suele omitirse.*
  Símbolos numéricos o números.
  Letras que representan números cualesquiera (a, b, x, y, t, etc.).
  Una expresión algebraica es una combinación de números, letras y, al menos, una operación que los una entre sí.…"

  Destacamos que, sobre el significado de las letras, tenemos que:
  -En el libro de BUP de Vizmanos y Anzola (1991), sólo se dice que las "*letras a, b, c, e, v, t,… representan números*". Nada se explica sobre la letra x. Menos aún, se explican las diferencias entre parámetros y variables.

-En el libro de ESO de Pérez y otros (1997), sólo se habla de "*Letras que representan números cualesquiera (a, b, x, y, t, etc.)*". Tampoco se explica nada sobre la diferencia entre los parámetros (a y b) y las incógnitas (x, y, t, ...)

- Tanto en los libros del BUP del primer lustro como en los de la ESO del segundo lustro, la actitud ante la comprobación de las ecuaciones y de los problemas es la tradicional: rara vez se realiza y cuando se realiza, muchas veces es sintáctica y no semántica.

C3) Metodología

- En el BUP del primer lustro de los años 90, pasados los intentos -típicos de los años 70 y 80- de aumentar el protagonismo del alumno, la metodología había vuelto a ser expositiva, formal y deductiva. En tales libros, el profesor era protagonista absoluto. Veamos un ejemplo:

"*EXPRESIONES ALGEBRAICAS*
Las expresiones algebraicas provienen de fórmulas físicas, geométricas, de economía, etc.
Expresión algebraica es toda combinación de números y letras ligados por los signos de las operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
Son expresiones algebraicas:

$$3abc,\ 5x^2ty+2xy,\ 7\sqrt{xy}+z^3,\ \frac{x^2-3y}{a+b^3}$$

En la escritura de las expresiones algebraicas conviene tener presente las siguientes observaciones
El signo de la multiplicación no suele ponerse entre las letras.
Así: $3ab = 3\cdot a\cdot b = 3\times a\times b$
De este modo se evita confundir la letra x con el signo de multiplicación $\times$
El signo + o – que precede a una letra es un signo de operación; no indica que el valor que toma la letra es positivo o negativo.
En la expresión $3x-a$ *el signo – es de operación.*
Si $a=3$*, entonces* $3x-a=3x-3$
Si $a=-3$*, entonces* $3x-a=3x-(-3)=3x+3$
Las letras a, b, c, e, v, t,..., representan números; cuando operamos con ellas es como si operásemos con los números que representan.
Un principio que no conviene olvidar:
Las operaciones que se realizan con letras son las mismas que se realizan con números y cumplen las mismas reglas" (Vizmanos y Anzola, 1991, página 1970)

Sobre lo anterior, destacamos que:
-En primer lugar, el profesor define, en general, el concepto de expresión algebraica.
-En segundo lugar, el profesor proporciona varios ejemplos particulares de expresiones algebraicas.

-En tercer lugar, el profesor explica, en general, la notación de las expresiones algebraicas.
-En cuarto lugar, el proporciona varios ejemplos particulares del uso de la notación algebraica.

- En la ESO del 2º lustro de los años 90, a veces, el alumno debía realizar unos ejercicios previos antes de que el profesor expusiera una teoría relacionada con dichos ejercicios. Veamos un ejemplo:

  "PARA EMPEZAR: INVESTIGUEMOS…
  (1)
  (a) Si $a+b=51$*, entonces* $2(a+b)+3=$
  (b) Si $m-25=323$*, entonces* $3m+1=$
  (c) Si $x+y=8$*, entonces* $x+y+z=$
  (d) Si $\frac{1}{2}a+5=\frac{1}{3}a$*, entonces* $a=$
  (e) Si $\frac{1}{2}p+\frac{1}{3}p=\frac{5}{6}p$*, entonces* $\frac{1}{4}a+\frac{3}{5}a=$
  (f) Si $5m=2(n+1)-\frac{3}{4}$ *y* $n=\frac{1}{6}$*, entonces* $m=$
  3.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS
  El álgebra, como sabes, es un lenguaje de símbolos:
  Símbolos de operaciones $(+,-,\cdot,/)$*. El signo "por" suele omitirse.*
  Símbolos numéricos o números.
  Letras que representan números cualesquiera (a, b, x, y, t, etc.).
  Una expresión algebraica es una combinación de números, letras y, al menos, una operación que los una entre sí.
  Por ejemplo, son expresiones algebraicas:
  $y=3x-1$ $\qquad$ $V=\prod\cdot r^2\cdot a$ $\qquad$ $2x^3+4=6x$
  Existen diferentes tipos de expresiones algebraicas:
  Las funciones y las fórmulas expresan relaciones entre variables; estas últimas son cantidades sin determinar previamente que se representan mediante letras.
  Una expresión del tipo $y=3x-1$*, como verás en las unidades siguientes, es una función.* $V=\prod\cdot r^2\cdot a$ *es la fórmula del volumen de un cilindro de altura* a *y radio de su base* r*.*
  Las identidades son expresiones algebraicas que son ciertas para todos los valores de las letras que aparecen." (Pérez y otros, 1997, página 56 y 57)

II.4. La enseñanza del álgebra en la actualidad

El equipo investigador se refiere al álgebra escolar actual como el álgebra que viene enseñándose en la Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años) desde 2001 hasta el presente año 2011.

En este apartado, abordamos el estudio del álgebra escolar actual concentrándonos especialmente en el Tercer Curso de la Educación Secundaria Obligatoria (14-15 años), puesto que es el nivel de enseñanza para el cual hemos diseñado nuestra propuesta curricular alternativa de enseñanza del lenguaje algebraico.

II.4.1. El sistema educativo

Durante los últimos veinte años se han promulgado cuatro grandes leyes educativas que, junto a la LODE de 1985 que configuró los consejos escolares, han modelado nuestro actual sistema educativo. Basándonos en Mas (2004), enunciamos y comentamos las cuatro grandes leyes de las dos últimas décadas:

A1) LOGSE (Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo) de 1990:

- Estableció que todos los alumnos debían recibir una enseñanza común, gratuita y obligatoria hasta los 16 años. La ley anterior de 1970 sólo establecía tal tipo de enseñanza hasta los 14 años.
- Reordenó el sistema educativo en la enseñanza primaria y en la secundaria, estableciendo que la Primaria (6-12 años) sería impartida por el Cuerpo de Maestros, con una formación de carácter general, en los colegios y que la Secundaria (12-16 años) sería impartida por el Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, que eran licenciados especialistas en su asignatura.
- Introdujo modificaciones en el currículo y propugnó el constructivismo como metodología de enseñanza.

A2) LOPEG (Ley Orgánica de la Participación, la Evaluación y el Gobierno de los Centros Docentes) de 1995:

- Reforzó la figura del director del centro.
- Aumentó la autonomía de los centros.
- Promovió la mejora de la formación del profesorado.
- Promovió la evaluación de centros, profesores y directores.

A3) LOCE (Ley Orgánica de Calidad de la Ecuación) de 2002:

- Reformó algunas cuestiones organizativo-técnicas de la LOGSE.
- Promovió la recuperación de algunos cambios curriculares.
- Intentó la reimplantación de reválidas y el establecimiento de itinerarios en la ESO.

A4) LOE (Ley Orgánica de Educación) de 2006:

- Derogó el intento de la reimplantación de las reválidas y el del establecimiento de itinerarios en la ESO.
- Introdujo las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación.
- Estableció nuevos mecanismos de evaluación.
- Intentó adaptar la situación legislativa a la descentralización de la educación, una vez que las transferencias del estado a las Comunidades autonómicas concluyeron en el año 2000. Es la última ley educativa promulgada.

Actualmente estamos en el sistema educativo de la LOE de 2006. Sin embargo, si se analiza lo esencial –lo que se enseña, cómo se enseña, cómo se evalúa, a quién se enseña y quién lo enseña-, tenemos que el sistema de la LOE sigue siendo básicamente, salvo detalles, el diseñado por la LOGSE. Por ello, para entender la estructura del sistema educativo actual, remitimos al lector al apartado II.3.5 en el que detallamos la estructura del sistema de la LOGSE.

II.4.2. El alumnado zaragozano

Veamos las tablas que hemos elaborado a partir de los datos editados por el Ayuntamiento de Zaragoza (2000 y 2007) y que están basados en el padrón municipal:

1ª Década del siglo XXI (2000-2010)	Número de habitantes de la ciudad de Zaragoza
Población total en el padrón de 2001	622.602
Extranjeros en el padrón de 2001	24.473
Población total en el padrón de 2008	682.283
Extranjeros en el padrón de 2008	92.491

Tabla II.27. Población 2001-2008. Ayuntamiento de Zaragoza (2000) y (2007)

Continente de origen	Inmigrantes en el padrón de 2008
Europa	36.856
América	30.700
África	20.567
Asia	4.306
Total	92.491

Tabla II.28. Inmigrantes por continentes en 2008. Ayuntamiento de Zaragoza (2007)

País de origen	Inmigrantes en el padrón de 2008
Rumania	27.620
Ecuador	10.997
Marruecos	6.402
Colombia	5.421
China	3.691

Tabla II.29. Inmigrantes por países en 2008. Ayuntamiento de Zaragoza (2007)

Distribución por edades en el padrón de 2008			
Edad (años)	Total habitantes	Total inmigrantes	% de inmigrantes
0-4	32.857	4.962	15,10%
5-9	29.871	4.463	14,94%
10-14	29.142	4.354	14,94%
15-19	31.868	5.480	17,20%
20-24	40.549	10.067	24,83%

Tabla II.30. Inmigrantes por edades en 2008. Ayuntamiento de Zaragoza (2007)

Sobre las anteriores tablas, destacamos que:

- La población total ha pasado de 622.602 habitantes en el padrón de 2001 a 682.283 en el de 2008, registrando un importante aumento del 9,58%.
- La población inmigrante ha crecido desde 24.473 (el 3,94% de la población total) en 2001, hasta 92.491 (el 8,74% de la población total) en 2008. Es decir, es una inmigración reciente, con todos los problemas de integración de los alumnos en el sistema educativo que esto conlleva.
- De Europa y de América, continentes con una cultura semejante a la española, proceden respectivamente 36.856 y 30.700 residentes, es decir, el 39,84% y el 33,19% del total de la inmigración.

  La inmigración europea es fundamentalmente rumana (27.620 residentes), con una lengua materna que, al igual que el castellano, también procede del latín. (Este hecho facilita que los alumnos rumanos, en general, aprendan rápidamente el castellano). La inmigración americana es fundamentalmente hispanoamericana, por lo que su lengua materna es el castellano. Por nacionalidades, destaca el contingente ecuatoriano (10.997 residentes) y el colombiano (5.421 residentes).

- De fuera de Europa y de América, lugares con una cultura muy diferente de la española, proceden el resto de los inmigrantes, es decir, el 26,97% del total de la inmigración.

  La inmigración africana es variada, si bien en ella destaca el contingente marroquí (6.402 residentes). La inmigración asiática es casi exclusivamente china: del total de 4.306 asiáticos hay un importante contingente de 3.691 chinos.

- La inmigración es fundamentalmente joven: supone, aproximadamente, el 15% de la población total de 0-4 años, de 5-9 años y de 10-14 años y el 17% de la de 15-19 años. Es decir, su representación en las aulas de infantil, primaria y secundaria casi duplica el 8,74% de porcentaje de inmigrantes en la población total.

II.4.3. La práctica docente

Para estudiar la práctica docente de la enseñanza del lenguaje algebraica en la actualidad nos basamos en el análisis detallado de los libros de texto de la Educación Secundaria Obligatoria de las editoriales Santillana y Anaya. Son dos empresas editoriales de prestigio, con una importante y continua presencia en el mercado de los libros de texto desde los años 70 hasta la actualidad, y que gozan de una amplia difusión en los centros de enseñanza secundaria de Aragón y de España.

En concreto, los libros analizados son: Santillana (2004a), Santillana (2004b), Santillana (2004c), Santillana (2003) y Santillana (2005) –de la Editorial Santillana- y Colera y Gaztelu (2003a), Colera y Gaztelu (2003b), Colera y otros (2002), Colera y otros (2003a) Colera y otros (2003b) –de la Editorial Anaya-. Dichos libros los presentamos organizados por cursos, de la Educación Secundaria Obligatoria, mediante la siguiente tabla:

CURSO	SANTILLANA	ANAYA
1º ESO (12-13 años)	Título: Matemáticas 1º ESO. Serie Práctica Autor: Departamento de Matemáticas de Santillana *(Santillana 2004a)*	Título: Matemáticas de 1º de Educación Secundaria Autor: Colera, J. y Gaztelu, I. *(Colera y Gaztelu 2003a)*
2º ESO (13-14 años)	Título: *Matemáticas 2º ESO. Serie Práctica* Autor: Departamento de Matemáticas de Santillana *(Santillana 2004b)*	Título: *Matemáticas de 2º de Educación Secundaria* Autor: Colera, J. y Gaztelu, I. *(Colera y Gaztelu 2003b)*

3º ESO (14-15 años)	Título: *Matemáticas 3º ESO. Serie Práctica* Autor: Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación *(Santillana 2004c)*	Título: *Matemáticas de 3º de Educación Secundaria* Autor: Colera, J., García R., Gaztelu, I. y Oliveira, M. J. *(Colera y otros 2002)*
4º ESO OPCIÓN A (15-16 años)	Título: *Matemáticas Opción A. 4º ESO* Autor: Departamento de Matemáticas de Santillana *(Santillana 2003)*	Título: *Matemáticas de 4º Opción A de Educación Secundaria* Autor: Colera, J., Gaztelu, I., García R., Oliveira, M. J. y Martínez, M. M. *(Colera y otros 2003a)*
4º ESO OPCIÓN B (15-16 años)	Título: *Matemáticas Opción B. 4º ESO. Serie Práctica* Autor: Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación *(Santillana 2005)*	Título: *Matemáticas de 4º Opción B de Educación Secundaria* Autor: Colera, J., Gaztelu, I., García R., Oliveira, M. J. y Martínez, M. M. *(Colera y otros 2003b)*

Tabla II.31. Libros analizados

El curso de 3º de ESO, el nivel de enseñanza al que va dirigida nuestra propuesta curricular alternativa, es el curso en torno al que pivota nuestro estudio de la enseñanza actual del álgebra escolar. Por ello, los contenidos de los cursos anteriores (1º y 2º de ESO) se considerarán contenidos previos, los de los cursos posteriores (4º Opción A y 4º Opción B de ESO) se considerarán contenidos posteriores y siempre que hablemos de actuación del profesor, actividades de los alumnos y problemas de álgebra nos referimos a los correspondientes al curso de 3º de ESO. Así, los aspectos analizados de la práctica docente son:

- Contenidos previos
- Contenidos de tercer curso
- Contenidos posteriores
- Actuación del profesor
- Actividades de los alumnos
- Problemas de álgebra

II.4.3.1 Contenidos previos

Los contenidos previos son los impartidos en 1º de ESO (12-13 años), cuando el alumno inicia el estudio de l álgebra, y los enseñados en 2º de ESO (13-14 años), curso en el que el álgebra ocupa una parte central y extensa del currículo. Para el estudio de dichos contenidos previos, hemos dividido los títulos de los índices de ambas editoriales en unos bloques de contenidos equivalentes que van numerados desde el P1 al P5 en 1º de ESO (la P es la inicial de Primero) y numerados desde S1 al S11 en 2º de ESO (la S es la inicial de Segundo). Veamos dicha tabla:

1º ESO (12-13 años). SANTILLANA

Unidad nº 9: Iniciación al álgebra

1.El lenguaje algebraico	**P1**
2. Igualdad, identidad y ecuación 3. Ecuaciones equivalentes	**P2**
4. Resolución de una ecuación	**P3**
5.Resolución de problemas	**P4**

1º ESO (12-13 años). ANAYA

Unidad nº 9: álgebra

1. Letras en vez de números 2. Expresiones algebraicas 3. Primeras operaciones con expresiones algebraicas	**P1**
4. Ecuaciones	**P2**
5. Primeras técnicas para la resolución de ecuaciones 6. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita 7. Ecuaciones con denominadores	**P3**
8. Resolución de problemas con ayuda de ecuaciones	**P4**

2º ESO (13-14 años). SANTILLANA

Unidad nº 5:Ecuaciones

1. Iniciación al álgebra	**S1**
2. Monomios	**S2**
3. Igualdad, identidad y ecuación 4. Ecuaciones de primer grado	**S4**
5. Resolución de una ecuación	**S5**
6. Resolución de problemas	**S6**

Unidad nº 6: Introducción a las ecuaciones de 2º grado.

1. Polinomios 2. Operaciones con polinomios 3. Sacar factor común 4. Igualdades notables	**S3**
5. Ecuaciones de segundo grado 6. Ecuaciones de segundo grado: Casos Particulares	**S7**

2º ESO (13-14 años). ANAYA

Unidad nº 6:Expresiones Algebraicas

1. Utilidad del álgebra	**S1**
2. Monomios	**S2**
3. Polinomios 4. Extracción de factor común 5. Productos Notables	**S3**

Unidad nº 7:Ecuaciones

1. ¿Qué es resolver una ecuación? 2. Ecuaciones: elementos y nomenclatura	**S4**
3. Transposición de términos 4. Ecuaciones con denominadores 5. Resolución de ecuaciones de primer grado	**S5**
6. Resolución de problemas	**S6**
7. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita 8. Resolución de ecuaciones de segundo grado	**S7**

Unidad nº 7: Sistemas de ecuaciones		*Unidad nº 8: Sistemas de Ecuaciones Lineales*	
1. Ecuaciones lineales	**S8**	1. Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas	**S8**
2. Sistemas de ecuaciones lineales	**S9**	2. Sistemas de ecuaciones lineales	**S9**
3. Métodos de resolución de ecuaciones lineales	**S10**	3. Método para la resolución de sistemas de ecuaciones	**S10**
4. Resolución de Problemas con sistemas	**S11**	4. Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones	**S11**

Tabla II.32. Contenidos de 1º y de 2º de Santillana y Anaya

De la tabla II.32, destacamos que:
-Estamos ante una enseñanza de carácter cíclico en la que, en cada curso, se trabajan los mismos contenidos de los cursos anteriores pero ampliados. Así, en 1º de ESO se explican las ecuaciones lineales y los problemas de álgebra de ecuaciones lineales y, luego, en 2º de ESO se explican, otra vez, las ecuaciones lineales y los problemas de álgebra de ecuaciones lineales pero se añaden los sistemas de ecuaciones lineales, las ecuaciones cuadráticas y los problemas de álgebra de sistemas de ecuaciones lineales y de ecuaciones cuadráticas.
-Los contenidos y la secuenciación de los mismos son idénticos en 1º en ambas editoriales.
-Los contenidos en 2º son los mismos en ambas editoriales.
-La secuenciación de contenidos en 2º es ligeramente diferente en ambas editoriales. De hecho sólo los polinomios (S3) ocupan una ubicación diferente en la secuenciación. Así:

> -La editorial Anaya opta por una secuenciación tradicional del tipo "utilidad del álgebra (S1) → monomios (S2) → polinomios (S3) → ecuaciones lineales (S4, S5, S6) → ecuaciones cuadráticas (S7))".
> -La editorial Santillana opta por una secuenciación menos tradicional del tipo "introducción al álgebra (S1) → monomios (S2) → ecuaciones lineales (S4, S5, S6) → polinomios (S3) → ecuaciones cuadráticas (S7))".

II.4.3.2. Contenidos de Tercer curso

Para el análisis de los contenidos de 3º de ESO (14-15 años), el curso en el cual experimentamos, con un grupo de 33 alumnos del IES Goya durante el curso 2007-08, nuestra propuesta alternativa curricular de enseñanza de enseñanza del lenguaje algebraico, también hemos dividido los títulos de los índices de los textos de las editoriales Santillana y Anaya en los respectivos bloques equivalentes de contenidos que van numerados desde el T1 al T14 (con la "T de tercero").

Veamos dichos contenidos en ambas editoriales:

3º ESO (15-16 años). SANTILLANA

Unidad nº 3:Polinomios

1. Monomios. Operaciones	**T2**
2. Polinomios 3. Operaciones con polinomios	**T3**
4. Regla de Ruffini	**T4**
5. Igualdades notables	**T5**

Unidad nº 4: Ecuaciones de 1º y 2º grado

1. Ecuaciones	**T7**
2. Ecuaciones de 1º grado	**T8**
3. Ecuaciones de 2º grado	**T9**
4. Resolución de problemas con ecuaciones	**T10**

Unidad nº 5: Sistemas de ecuaciones

1.Ecuaciones lineales con dos incógnitas	**T11**
2. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas	**T12**
3. Métodos de resolución de sistemas	**T13**
4. Resolución de problemas con sistemas	**T14**

3º ESO (15-16 años). ANAYA

Unidad nº 4:El Lenguaje Algebraico

1. Expresiones algebraicas	**T1**
2. Monomios	**T2**
3. Polinomios	**T3**
4. Identidades	**T5**
5. Fracciones algebraicas	**T6**

Unidad nº 5:Ecuaciones

1. Ecuaciones	**T7**
2. Ecuaciones de 1º grado	**T8**
3. Ecuaciones de 2º grado 4. Ecuaciones de segundo grado incompletas 5. Reglas para resolver ecuaciones de 2º grado	**T9**
6. Resolución de problemas mediante ecuaciones	**T10**

Unidad nº 6: Sistemas de Ecuaciones

1. Ecuaciones con dos incógnitas	**T11**
2. Sistemas de ecuaciones 3. Sistemas equivalentes 4. Número de soluciones de un sistema lineal 5. En que consiste la resolución de un sistema	**T12**
6. Método de sustitución 7. Método de igualación 8. Método de reducción 9. Regla práctica para resolver sistemas lineales	**T13**
10. Traducción de enunciados a sistemas de ecuaciones	**T14**

Tabla II.33. Contenidos de 3º de Santillana y Anaya

Tras el examen de la anterior tabla II.32 (sobre los contenidos de 1º y 2º de ESO) y de esta tabla II.33 (sobre los contenidos de 3º ESO) tenemos que:
-Los contenidos de 3º son casi los mismos que los de 2º en ambas editoriales, sólo que con cierta complejidad operacional mayor. Los únicos contenidos realmente nuevos que se añaden son: la regla de Ruffini en la editorial Santillana y la resolución de sistemas 2x2 compuestos por una ecuación lineal y una cuadrática en ambas editoriales Santillana y Anaya.

-La editorial Anaya sigue la misma secuenciación de contenidos en 2º y en 3º. La editorial Santillana también sigue la misma secuenciación de contenidos en ambos cursos, salvo en lo que a la ubicación de los polinomios se refiere.
-Los contenidos de 3º son ligeramente diferentes Santillana y Anaya en lo que al tema de polinomios se refiere. Puntualizamos tales diferencias:

- -En la editorial Anaya aparece, al principio del tema de polinomios, una introducción al lenguaje algebraico (T1), de la que carece la editorial Santillana.
- -En la editorial Anaya aparece, al final del tema de polinomios, un apartado sobre las fracciones algebraicas (T6), del que carece la editorial Santillana.
- -En la editorial Santillana aparece, al final del tema de polinomios, un apartado sobre la regla de Ruffini (T4) del que carece editorial Santillana.

-A su vez, ambas editoriales optan en 3º por la secuenciación de contenidos que tradicionalmente se ha seguido en el álgebra escolar desde hace décadas, esto es: "polinomios (T2, T3, T4 y T5)$\rightarrow$ecuaciones lineales y cuadráticas (T7, T8, T9 y T10)$\rightarrow$sistemas (T11, T12, T13 y T14)".

II.4.3.3. Contenidos posteriores

Como ya explicamos en el apartado II.3.5 sobre la LOGSE, las Matemáticas es la única asignatura de 4º de ESO (15-16 años) que puede cursarse en dos versiones diferentes desde la reforma educativa de 1990 hasta nuestros días:

> -Las Matemáticas de 4º de ESO de la Opción A, conocidas popularmente como "las Matemáticas fáciles", que están dirigidas a aquellos estudiantes que no vayan a cursar asignaturas de matemáticas en estudios posteriores.
>
> -Las Matemáticas de 4º de ESO de la Opción B, conocidas popularmente como "las Matemáticas difíciles, que están dirigidas a aquellos alumnos que sí vayan a cursar asignaturas de matemáticas en estudios posteriores.

Los títulos de los índices de las Opciones A y B de 4º los hemos dividido en los respectivos bloques de contenidos equivalentes que van numerados desde el A1 al A10 en la Opción A de 4º de ESO (la A alude a la Opción A) y que van numerados desde el B1 al B7 en la opción B de 4º de ESO (la B alude a la Opción B). Veamos la tabla de equivalencia de contenidos:

4º ESO-Opción A (15-16 años) **SANTILLANA**	**4º ESO-Opción A (15-16 años)** **ANAYA**
	Unidad nº 5Polinomios. Operaciones 1.Monomios 2. Polinomios 3. Identidades notables 4.División de polinomios 5. Regla de Ruffini para dividir un polinomio por $x-a$ — A1

		Unidad nº 6:Factorización de polinomios	
		1. Sacar factor común 2. Identidades notables para factorizar un polinomio 3. Un criterio de divisibilidad por $x-a$ 4. Valor de un polinomio para $x=a$ 5. Factorización de polinomios 6. Divisibilidad de polinomios	A2
Unidad nº 3:Ecuaciones e inecuaciones		*Unidad nº 7:Ecuaciones e inecuaciones*	
1. Ecuaciones de 1º grado 2. Resolución de problemas	A3	1. Identidades y ecuaciones 2. Ecuaciones de 1º grado	A3
3. Ecuaciones de 2º grado 4. Método de completar cuadrados 5. Fórmula de la ecuación de 2º grado	A4		
6. Inecuaciones de 1º grado 7. Resolución de problemas de inecuaciones	A5	3.Inecuaciones de 1º grado	A5
		4. Ecuaciones de 2º grado 5. Otras ecuaciones 6. Resolución de problemas con ecuaciones	A4
Unidad nº 4:Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones		*Unidad nº 8: Sistemas de ecuaciones*	
1. Sistemas de ecuaciones 2. Sistemas equivalentes	A6	1. Ecuaciones lineales con dos incógnitas 2. Sistemas de ecuaciones lineales	A6
3. Métodos de resolución	A7	3. Resolución de sistemas: método de sustitución 4. Resolución de sistemas: método de igualación 5. Resolución de sistemas: método de reducción 6. Sistemas de ecuaciones lineales más complejos	A7
4. Resolución de problemas mediante sistemas	A8	7. Resolución de problemas mediante sistemas	A8
5. Inecuaciones lineales con dos incógnitas 6. Sistemas de inecuaciones lineales 7. Resolución de problemas de inecuaciones	A9		
		8. Sistemas no lineales	A10

Tabla II.34. Contenidos de 4º-Opción A de Santillana y Anaya.

4º ESO-Opción B (15-16 años) SANTILLANA		**4º ESO-Opción B (15-16 años) ANAYA**	
Unidad nº 3: Polinomios y fracciones algebraicas		*Unidad nº 2: Polinomios y fracciones algebraicas*	
1. Polinomios 2. Regla de Ruffini 3. Factorización 5. Valor numérico de un polinomio	**B1**	1. Sacar factor común 2. Cociente de polinomios 3. Regla de Ruffini para dividir un polinomio por $x-a$ 4. Factorización de polinomios 5. Divisibilidad de polinomios	**B1**
4. Fracciones algebraicas	**B2**	6. Fracciones algebraicas	**B2**
Unidad nº 4:Ecuaciones e inecuaciones		*Unidad nº 3:Ecuaciones*	
1. Ecuaciones de 1º grado	**B3**		
2. Ecuaciones de 2º grado	**B4**	1. Ecuaciones de 2º grado	**B4**
3. Ecuaciones bicuadradas 4. Otros tipos de ecuaciones	**B5**	2. Otros tipos de ecuaciones	**B5**
5. Sistemas de ecuaciones	**B6**	3. Sistemas de ecuaciones lineales	**B6**
		4. Sistemas de ecuaciones no lineales	**B7**
6. Inecuaciones	**B8**	5. Inecuaciones. 6. Inecuaciones con una incógnita	**B8**

Tabla II.35. Contenidos de 4º-Opción B de Santillana y Anaya.

Tras el examen de la anterior tabla II.34, sobre 3º, y de esta tabla II.35, sobre 4º, tenemos que:

-En ambas editoriales, los contenidos de la Opción A de 4º y de 3º son casi los mismos pero algo ampliados. De hecho, los únicos contenidos que se añaden son:

-Las inecuaciones lineales (A5) y los sistemas de inecuaciones lineales (A9) en la opción A de 4º de ESO en la editorial Santillana.

-La regla de Ruffini (parte del A1), los sistemas de ecuaciones no lineales (A10) y las inecuaciones lineales (A5) en la opción A de 4º de ESO en la editorial Anaya.

-Los contenidos de la Opción A de 4º en la editorial Santillana y los de la de la Opción A de 4º en Anaya sólo difieren en que:

-El apartado de inecuaciones (A9) aparece en la editorial Santillana pero no en la editorial Anaya.

-Los polinomios (A1 y A2) y las ecuaciones no lineales (A10) aparecen en la editorial Anaya pero no en la editorial Santillana.

-La secuenciación de contenidos de la Opción A de 4º en la editorial Santillana y de la Opción A de 4º en la editorial Anaya sólo se diferencia en la ubicación de las inecuaciones (A4):

-La editorial Santillana opta por una secuenciación tradicional del tipo: “ecuaciones lineales (A3) $\rightarrow$ ecuaciones cuadráticas (A4) $\rightarrow$ inecuaciones (A5)”.

-La editorial Anaya opta por una secuenciación más inusual del tipo: "ecuaciones lineales (A3) → inecuaciones (A5) → ecuaciones cuadráticas (A4)".

-En ambas editoriales, los contenidos de la Opción B de 4º y los del curso de 3º son casi los mismos pero algo ampliados. De hecho, los únicos contenidos que se añaden son:

-Las fracciones algebraicas (B2), otros tipos de ecuaciones (B5) y las inecuaciones (B8) en la editorial Santillana.

-La regla de Ruffini (parte del B1), las fracciones algebraicas (B2), otros tipos de ecuaciones (B5), los sistemas de ecuaciones no lineales (B7) y las inecuaciones (B8) en la editorial Anaya.

-Los contenidos de la Opción B de 4º en la editorial Santillana y los de la Opción B de 4º de en la editorial Anaya son casi los mismos. Sólo se diferencian en que:

-La editorial Santillana recuerda las ecuaciones lineales en un apartado (el B3) del que carece Anaya.

-La editorial Anaya tiene un apartado dedicado a los sistemas de ecuaciones no lineales (B7) del que carece Santillana.

-La secuenciación de contenidos de la Opción B en la editorial Santillana y la de la Opción B en la editorial Anaya es la misma.

II.4.3.4. Actuación del profesor

Para estudiar el papel del profesor analizamos la teoría y los problemas resueltos en los libros de 3º de ESO de las editoriales Santillana y Anaya. Realizado dicho análisis, destacamos que hemos observado que la labor del profesor se estructura en las siguientes tres partes en cada unidad didáctica:

- **A) Parte inicial**: Es la actuación del profesor que se corresponde con las dos primeras páginas de cada unidad en los libros de texto de ambas editoriales. En tales páginas, se introducen los conceptos que se van a desarrollar en dicha unidad.
- **B) Parte central**: Es la actuación del profesor que se corresponde con las páginas centrales de cada unidad. En tales páginas se desarrolla la teoría de la unidad y se presentan algunos ejercicios y problemas resueltos.
- **C) Parte final**: Es la actuación del profesor que se corresponde con las cuatro o cinco últimas páginas de cada unidad. En la primera de tales páginas se realiza un resumen de la teoría de la unidad. En las restantes páginas, dedicadas a los enunciados de ejercicios y problemas propuestos a los alumnos, aparecen intercalados algunos ejemplos de ejercicios y problemas resueltos.

A) Parte inicial

Esta Parte del comienzo es muy similar en cada editorial. La principal diferencia entre ambas editoriales en las dos páginas iniciales, como veremos en el siguiente apartado II. 5.3.5 sobre las actividades de los alumnos, es que el profesor es el único protagonista de la enseñanza en la editorial Santillana, mientras que el alumno realiza algunas investigaciones iniciales de tipo recordatorio en la editorial Anaya.

A continuación, detallamos los elementos relacionados con la actividad inicial del profesor:

A1) Imágenes

Representan objetos de situaciones reales que están relacionados con los contenidos algebraicos de la unidad didáctica en cuestión. Las imágenes son fotografías de calidad en la editorial Santillana y dibujos a todo color en la editorial Anaya.

A2) Textos

Están relacionados con las imágenes anteriores. En ellos, se explica que los objetos o las situaciones algebraicos están presentes en la realidad. Veamos un ejemplo representativo:

"*Si el precio de 6 entradas de cine es 34,80 €, ¿Cuánto cuesta cada una?*
Las ecuaciones nos sirven para resolver muchos problemas de la vida cotidiana. Para resolver el problema anterior, utilizaremos una ecuación de primer grado.
Las ecuaciones de segundo grado se hallan presentes, por ejemplo, en las antenas parabólicas. Otro ejemplo famoso es la fórmula de Einstein." (Santillana, 2004c, página 76)

Del anterior texto, destacamos que:
-Se usa el problema "*Si el precio de 6 entradas de cine es 34,80 €, ¿Cuánto cuesta cada una?*", que todos resolveríamos, en la vida cotidiana, con la sencilla operación aritmética $34{,}80 : 6 = 5{,}80$, para justificar la introducción de las ecuaciones de primer grado.
-Se dice que "*Las ecuaciones de segundo grado se hallan presentes, por ejemplo, en las antenas parabólicas. Otro ejemplo famoso es la fórmula de Einstein*". En su afán de justificar las ecuaciones de 2º grado como algo real, se sacrifica el rigor: ni las antenas parabólicas ni la fórmula de Einstein son ecuaciones de 2º grado.

A3) Objetivos didácticos

La editorial Santillana, bajo el epígrafe "*En esta unidad aprenderás a...*", enumera los objetivos didácticos de cada unidad. Anaya opta por lo tradicional: reservar la enumeración de los objetivos para las guías didácticas del profesorado. Veamos un ejemplo de cómo Santillana propone que el profesor enseñe los objetivos didácticos al alumno en la actividad inicial:

"*En esta unidad aprenderás a…*
-Reconocer los elementos y la nomenclatura utilizada en las ecuaciones.
-Usar las técnicas de la suma y el producto en la resolución de ecuaciones.
-Resolver ecuaciones de primer grado.
-Resolver ecuaciones completas e incompletas de segundo grado.

-Plantear y resolver problemas con ecuaciones de primer y segundo grado." (Santillana, 2004c, página 77)

B) Parte central

Esta Parte es semejante en ambas editoriales. Cada unidad se divide en varios apartados numerados. Cada apartado ocupa, casi siempre, una sola página. Pues bien, cada apartado -o página- contiene:

B1) Número y título del apartado

Ambos se destacan mediante letras mayúsculas de considerable tamaño. El número aparece sobre un recuadro coloreado (azul en la editorial Santillana y naranja en la editorial Anaya) y el título aparece en negrita.

B2) Recuadro coloreado del texto

Siempre aparece. Está dedicado a la definición de los conceptos algebraicos principales y es destacado mediante un fondo coloreado (sepia en la editorial Santillana y amarillo en la editorial Anaya). Veamos un par de ejemplos representativos:

-Recuadro de color sepia de Santillana, 2004c, página 78:
"Una igualdad algebraica está formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo =. Las igualdades algebraicas son de dos tipos:
-Identidad: Es una igualdad cierta para cualquier valor de las letras o variables.
-Ecuación: Es una igualdad cierta sólo para algunos valores de las letras."

-Recuadro de color amarillo de Colera y otros, 2002, página 106:
"Una ecuación, más que una igualdad, es una propuesta de igualdad en la que interviene una letra llamada incógnita.
La solución de la ecuación es el valor o valores de la incógnita (o de las incógnitas) que hacen que la igualdad sea cierta.
Resolver una ecuación es hallar su solución, o soluciones, o llegar a la conclusión de que no tiene."

De los anteriores textos, destacamos que:
-En el texto de la editorial Santillana (2004c) y en el Colera y otros (2002) de la editorial Anaya, el álgebra se presenta como una ciencia formal, deductiva y acabada.
-En el texto de la editorial Santillana (2004c) se dice que "*Una igualdad algebraica está formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo =*". Esto es, el signo = se identifica incorrectamente como un separador de expresiones.
-En el texto de Colera y otros (2002) de la editorial Anaya se dice que "*Una ecuación, más que una igualdad, es una propuesta de igualdad en la que interviene una letra llamada incógnita*". Esto es, el papel de la incógnita no es claro. De ella, sólo se dice que "*interviene*".

B3) Recuadro del margen

No aparece en todas las páginas. Cuando existe, está dedicado a la definición de conceptos secundarios relacionados con el concepto principal del apartado, y se destaca mediante un fondo coloreado (verde en la editorial Santillana y azul en la editorial Anaya).Veamos 2 ejemplos representativos:

-Recuadro del margen de la página 80 de la editorial Santillana (2004c): *"Ecuaciones incompatibles: Si al resolver una ecuación llegas a una expresión de la forma* $b \cdot x = 0$ *con* b *un número distinto de cero, la ecuación no tiene solución. Se dice que el sistema es incompatible."*

-Recuadro del margen de la página 91 Colera y otros (2002) de la editorial Anaya: *"Cuando en un sumándole factor común está solo, al sacar el factor común queda, en su lugar, la unidad.*
$xy + x^2 + x = x(y + x + 1)$ "

De los anteriores textos, destacamos que:
-En el recuadro de la editorial Santillana (2004c) no se razona, aritméticamente, porqué la ecuación *"*$b \cdot x = 0$ *con* b *un número distinto de cero"* no tiene solución. Simplemente, se afirma una regla más.
-En el recuadro de Colera y otros (2002), de la editorial Anaya, no se razona, aritmética o algebraicamente, porqué si x es el factor común que se extrae, la x se transforma en 1. De nuevo, simplemente, se afirma una regla más.

B4) Uno o dos ejercicios -o problemas- resueltos

Aparecen en casi todas las páginas centrales de ambas editoriales. Son ejemplos de cómo se deben aplicar los procedimientos a los conceptos algebraicos que se definen en los recuadros coloreados. Veamos dos ejemplos representativos:

- Editorial Santillana, 2004c, página 63:
"(8) *Halla el valor numérico para* $x = 1$ *del polinomio:*
$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 2$
Sustituimos la variable x *por el valor* $x = 1$ *y operamos:*
$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 - 2 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1 - 2 = = 2 - 3 + 1 - 2 = -2$
El valor numérico de $P(x)$ *para* $x = 1$*,* $P(1)$*, es igual a* -2"

-Colera y otros, 2002 de la editorial Anaya, página 92:
"1. Desarrollar $(2x - 7)^2$.
Es el cuadrado de una diferencia:
$(2x - 7)^2 = (2x)^2 + 7^2 - 2 \cdot 2x \cdot 7 = 4x^2 + 49 - 28x$
2. Poner en forma de producto $4x^2 - 9$.
$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$
3. Poner en forma de producto $16x^2 - 25$.
$16x^2 - 25 = (4x + 5)(4x - 5)$"

C) Parte Final

Esta Parte final es muy parecida en ambas editoriales y está constituida por un resumen de la teoría de la unidad y por unos ejercicios y problemas resueltos que aparecen intercalados entre las actividades propuestos a los alumnos en las últimas páginas de la unidad.

C1) Resumen de la teoría

En una página en la que se realiza un resumen de la teoría que se ha desarrollado en las páginas centrales de la unidad. En la editorial Santillana, tal resumen aparece bajo el título "*Resumen*". Destacamos que en la editorial Anaya, aunque el título utilizado es "*Haz un esquema*", se trata de un resumen que está completado hasta el último detalle, es decir: es una actividad hecha, no una actividad propuesta al alumno. Veamos un ejemplo representativo:

HAZ UN ESQUEMA

ECUACIONES

↓

Hay muy diversos tipos de ecuaciones.
Sólo algunas de ellas pueden ser resueltas por métodos aritméticos.

↓ ↓

ECUACIONES DE PRIMER GRADO	*ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO*
Las ecuaciones de primer grado son de la forma: $ax + b = 0$	*Las ecuaciones de segundo grado son del tipo:* $ax^2 + bx + c = 0$

↓ ↓

Resolución de las ecuaciones de primer grado	*Resolución de las ecuaciones de segundo grado*
Las ecuaciones de primer grado tienen una única solución: $x = -\frac{b}{a}$ *Habitualmente, para llegar a esta expresión, hay que dar varios pasos.* *Regla práctica. Pasos para despejar la* x *:* *1. Quitar denominadores, si los hay, multiplicando los dos miembros por el mismo número.* *2. Suprimir paréntesis, si los hay.* *3. Pasar a un miembro los términos en* x *y al otro miembro los demás.* *4. Simplificar en cada miembro.* *5. Despejar la* x *y hallar su valor (solución).* *6. Comprobar la solución en cada miembro de la ecuación lineal.*	*Ecuaciones completas:* *Las ecuaciones de segundo grado tienen como soluciones:* $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *El número de soluciones es dos, una o ninguna, según que* $b^2 - 4ac$ *sea positivo, cero o negativo, respectivamente.* *Ecuaciones incompletas:* *Si* $b = 0$ *o* $c = 0$*, la ecuación se llama incompleta y resulta muy sencilla su resolución sin necesidad de aplicar la fórmula.* $ax^2 + c = 0 \rightarrow$ *Se despeja* x^2 *Ejemplo:* $3x^2 - 18 = 0$ $x^2 = 18 : 3 = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$ $ax^2 + bx = 0 \rightarrow (ax + b)x = 0 \rightarrow$

(No tomes esta secuencia como algo rígido. A veces conviene seguir otro orden).	$\to x=0\,,\ ax+b=0$ *Ejemplo:* $3x^2-18x=0\to$ $(3x-18)x=0\to x=0\,,\ x=-6$

↓

TRADUCCIÓN A LENGUAJE ALGEBRAICO *Para plantear una ecuación a partir de un problema enunciado conviene proceder organizadamente:* • *Identificar y nombrar la incógnita.* • *Relacionarla, mediante una ecuación, con los datos conocidos.* • *Dar la solución en los términos del problema.*

(Colera y otros, 2002, página 113)

Destacamos que en el anterior resumen:
-No hay referencia alguna al concepto de ecuación ni al papel de la letra como incógnita en las ecuaciones de primer o segundo grado.
-Sí que hay detalles sobre los procedimientos de resolución de las ecuaciones de primer y de segundo grado.
-En el apartado final de la traducción desde el lenguaje materno al algebraico, esto es, en los pasos de resolución de problemas algebraicos, no se enumera la comprobación de la solución.

C2) Ejercicios o problemas o resueltos al final de la unidad

Las últimas páginas de cada unidad están dedicadas a ejercicios y problemas en los que el alumno debe aplicar la teoría aprendida en las páginas centrales. En tales páginas, aparecen intercalados unos ejercicios o problemas resueltos. Veamos un par de ejemplos representativos:

-Editorial Santillana, 2004c, página 91:
"62 *Θ Θ Θ ACTIVIDAD RESUELTA: Mario dice. "La mitad, el tercio y la cuarta parte de mis años suman la edad que tengo más tres". Averigua la edad de Mario.*
Resolución
Si llamamos x *a la edad, la ecuación que obtenemos al plantear el problema es:*

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=x+3$$

m.c.m (2,3,4) = 12

$$12\cdot\frac{x}{2}+12\cdot\frac{x}{3}+12\cdot\frac{x}{4}=12(x+3)$$

$$6x+4x+3x=12x+36$$

$$13x=12x+36$$

$$x=36$$

El valor $x=36$ *es solución de la ecuación y tiene sentido en el problema. Mario tendrá, por tanto,* 36 *años de edad*."

-Colera y otros (2002), página 116:
"24 Δ Δ Δ *EJERCICIO RESUELTO: María tiene 5 años más que su hermano Luis, y su padre tiene 41 años. Dentro de 6 años, entre los dos hermanos igualarán la edad del padre. ¿Qué edad tiene cada uno?*

EDAD DE…	HOY	DENTRO DE 6 AÑOS
LUIS	x	$x+6$
MARÍA	$x+5$	$x+11$
PADRE	41	47

Resolución:
La suma de las edades de los hermanos debe ser igual a 47.

$$x+6+x+11=47 \rightarrow x=...$$

¿Cuál es la edad de cada uno?"

Destacamos que:
-En el problema resuelto de la editorial Santillana (2004c) se declara que se llama x a la edad, se plantea la ecuación, se detallan los procedimientos de resolución de la misma y se declara que la solución obtenida *"tiene sentido en el problema"*, sin realizar la comprobación de la misma ni en la ecuación, ni en el enunciado. Probablemente, decir que la solución obtenida *"tiene sentido en el problema"* sólo significa que 36 años es un número entero, positivo y dentro del intervalo de lo que podemos vivir los seres humanos.
-En el problema resuelto de Colera y otros (2002), de la editorial Anaya, se le proporciona, como parte del enunciado, una tabla en la que se representa algebraicamente la situación real de las edades y se le da, como parte de la resolución, la ecuación planteada $x+6+x+11=47$. Al alumno se le pide que resuelva la ecuación, no que compruebe la solución ni en la ecuación ni en el enunciado.

II.4.3.5. Actividades de los alumnos

Para estudiar las actividades de los alumnos examinamos los ejercicios y los problemas sin resolver de las editoriales Santillana y Anaya. Realizado dicho examen, las actividades de los alumnos se pueden estructurar en los siguientes tipos:

- **A) Actividades iniciales:** Son las que aparecen en la parte introductoria de cada unidad didáctica, esto es, en las dos primeras páginas.
- **B) Actividades centrales:** Son las que aparecen al final de cada apartado teórico de la unidad, y como cada apartado casi siempre ocupa una página, vienen a ser las que aparecen al final de cada página de la parte central de la unidad.
- **C) Actividades finales:** Son las que aparecen en las cuatro o cinco últimas páginas, tras el resumen de la teoría de la unidad.

A) Actividades iniciales

En la editorial Santillana no se le propone, al alumno, actividad inicial alguna.

En la editorial Anaya, sí que se le proponen actividades introductorias en las dos primeras páginas de cada unidad. En la primera página, bajo el epígrafe "*Reflexiona*", se le presenta una situación algebraica, más o menos relacionada con la realidad, sobre la que, luego, se le plantean unas cuestiones. En la segunda página, bajo el epígrafe "*Te conviene recordar*", se le enuncian formalmente unas propiedades y unas reglas y, luego, se le plantean unos ejercicios sobre dichas propiedades y reglas. Veamos un par de ejemplos representativos:

-Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 104:
"*REFLEXIONA*
¡Caminante!
Aquí yacen los restos de Diofanto
Los números pueden mostrar,
¡Oh, maravilla!
La duración de su vida x

Cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia. $\frac{x}{6}$

Había transcurrido además una duodécima parte
de su vida cuando se cubrió de vello su barba. $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}$

A partir de ahí, la séptima parte de su existencia
transcurrió en un matrimonio estéril. $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}$

Pasó un quinquenio y entonces le hizo dichoso
el nacimiento de su primogénito. $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5$

Éste entregó su existencia a la tierra habiendo
vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir. $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}$

Diofanto descendió a la sepultura habiendo
sobrevivido cuatro años a su hijo. $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto
hasta que llegó la muerte. $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$

Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. De su vida no se sabe mucho, pero el epitafio de su tumba proporciona algunos detalles sobre ella. Está escrito como problema algebraico.
A la izquierda, tienes el texto del epitafio, a la derecha, su traducción al idioma del álgebra.
¿Qué significado tiene la x en la traducción que se ha hecho?

Comprueba que Diofanto murió con 84 años
¿Cuántos años estuvo Diofanto casado y sin hijos?
¿A qué edad murió su primogénito?”

-Colera y otros, 2002, , de la editorial Anaya, página 87:
“*TE CONVIENE RECORDAR:*
EN QUÉ CONSISTE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA
El producto de un número por una suma (o resta) es igual a la suma (o resta) de los productos parciales ese número por casa uno de los sumandos.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

4. Calcula de dos formas diferentes: a) $4 \cdot (6 - 2)$*; b)* $5 \cdot (8 - 6 + 4)$*; c)* $3 \cdot 6 - 3 \cdot 8 + 3 \cdot 4$”

De los 2 anteriores ejemplos, destacamos que:
-En el ejemplo de la página 104, bajo el epígrafe “*Reflexiona*”, al alumno se le resuelve el clásico problema sobre la vida de Diofanto. Luego, se le especifica que “*A la izquierda, tienes el texto del epitafio, a la derecha, su traducción al idioma del álgebra.*”. Sin embargo, cuando, al final, se le pide que compruebe que Diofanto vivió 84 años o que averigüe cuántos años estuvo casado y sin hijos o a qué edad murió su primogénito, no está claro si los cálculos deben ser semánticos, esto es, utilizando sólo *“el texto del epitafio*” o sintácticos, esto es, utilizando “*su traducción al idioma del álgebra*”.
-En el ejemplo de la página 87, bajo el epígrafe “*Te conviene recordar*”, al alumno se le enuncia gramatical y simbólicamente la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, que se supone que ha estudiado en el pasado. Luego se le pide que compruebe dicha propiedad en ejemplos puramente aritméticos, sin aprovechar la ocasión para introducir ejemplos más interesantes desde un punto de vista algebraico.

B) Actividades centrales

Son aplicaciones de la teoría expuesta en la parte superior de cada página. Aparecen en unos recuadros resaltados con un fondo coloreado (de color violeta en la editorial Santillana y de color naranja en la editorial Anaya) al final de cada página de las hojas centrales de cada unidad. Veamos un ejemplo representativo:

-Página 79 de la editorial Santillana (2004c):

“*2 ECUACIONES DE PRIMER GRADO*

Decimos que dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

2.1. Reglas de la suma y del producto

Estas reglas nos permiten obtener ecuaciones equivalentes a la de partida y mucho más sencillas de resolver.

Regla de la suma. Si a los dos miembros de una ecuación les sumamos o restamos un mismo número, o una expresión semejante a las que aparecen en la ecuación, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

Regla del producto. Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente.

EJEMPLO

(3) Resuelve la ecuación $6x-7=2x$.

Sumamos 7 *a ambos miembros (regla de la suma):*

$$6x-7+7=2x+7$$

Reducimos términos semejantes: $6x=2x+7$.

Restamos $2x$ *(regla de la suma):* $6x-2x=2x-2x+7$.

Reducimos términos semejantes: $4x=7$.

Dividimos por 4 *los dos miembros (regla del producto):*

$$\frac{4x}{4}=\frac{7}{4};\quad x=\frac{7}{4}$$

Ejercicios

(5) Escribe tres ecuaciones equivalentes a la ecuación $x=6$ *aplicando la regla de la suma y otras tres aplicando la regla del producto.*

(6) Resuelve:

a) $x+4=5$ *c)* $3-x=21$

b) $-6x=72$ *d)* $-4x=-24$

7) Resuelve:

a) $2x+4=16$ *c)* $5x-5=25$

b) $7x+8=57$ *d)* $-6x-1=-13$

(8) Resuelve:

a) $-11x=-4x+15$

b) $-1-2x=-3x-11$

c) $7x-4=-5-6x$

d) $4x-8=6x+2$

De la anterior página, destacamos que:

-El ejercicio número (5) del último recuadro de la página es la aplicación de la definición de ecuaciones "*equivalentes*" que se enuncia en el primer recuadro.

-Los ejercicios (6), (7) y (8), ordenados de más sencillos a más complejos a nivel operacional, son la aplicación de la "*Regla de la suma*" y de la "*Regla del producto*" que aparecen en el segundo recuadro de la teoría.

C) Actividades finales

Por actividades finales entendemos los ejercicios y los problemas propuestos a los alumnos que hay en las últimas 4 o 5 páginas de cada unidad de ambas editoriales, tras el resumen de la teoría. En tales páginas, hay también ejercicios y problemas resueltos, tal y como indicamos en el anterior apartado II.5.3.4.

A partir del análisis de los textos de las editoriales Santillana y de Anaya, hemos elaborado la siguiente tabla:

ACTIVIDADES FINALES (propuestas a los alumnos)	
Santillana (2004c)	**Colera y otros (2002) de la editorial Anaya**
Unidad 3: Polinomios -Las páginas 70, 71, 72, 73 y 74 están dedicadas a OPERACIONES DE POLINOMIOS. -El 50% de la página 75 está dedicada a CUESTIONES DE AUTOEVALUCIÓN	**Unidad 4: El lenguaje algebraico** -Las páginas 97, 98, 99 y el 50% de la página 100 están dedicadas a OPERCACIONES DE polinomios. -El 50% de la páginas 100 y la página 101 está dedicada a PROBLEMAS DE POLINOMIOS. -Las páginas 102 y 103, con ilustraciones que ocupan mucho espacio, están dedicadas a "PROBLEMAS DE ESTRATEGIA" y "JUEGOS PARA PENSAR".
Unidad 4: Ecuaciones de 1º y 2º grado -Las páginas 88, 89, 90 y el 50% de la 91 están dedicadas a la RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. -El 50% de la página 91 y la página 92 están dedicadas a la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. -El 50 % de la página 93 está dedicada a CUESTIONES DE AUTOEVALUCIÓN.	**Unidad 5: Ecuaciones** -Las páginas 114 y 115 están dedicadas a la RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. -Las páginas 116, 117, 118, 119 están dedicadas a la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. -Las páginas 120 y 121, con ilustraciones que ocupan mucho espacio, están dedicadas a "PROBLEMAS DE ESTRATEGIA" y "JUEGOS PARA PENSAR".
Unidad 5: Sistemas de ecuaciones -Las páginas 104, 105, 106 y el 25% de la 107 están dedicadas a la RESOLUCIÓN DE SISTEMAS. -El 75% de la página 107 y la página 108 están dedicadas a la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. -El 50% de la página 109 está dedicada a CUESTIONES DE AUTOEVALUCIÓN.	**Unidad 6: Sistemas de ecuaciones** -La página 135 están dedicada a la RESOLUCIÓN DE SISTEMAS. -La página 136, 137, 138 están dedicadas a la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. -Las páginas 139 y 141, con ilustraciones que ocupan mucho espacio, están dedicadas a "PROBLEMAS DE ESTRATEGIA" y "JUEGOS PARA PENSAR".

Tabla II.36. Actividades finales de Santillana (2004c) y Anaya (2002)

Tras examinar la anterior tabla II.36, destacamos que:

-En ambas editoriales, se trabajan ejercicios de resolución de polinomios, de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones así como problemas algebraicos resolubles mediante ecuaciones y mediante sistemas de ecuaciones. Son los tradicionales ejercicios de polinomios y de resolución de ecuaciones y de sistemas, y los tradicionales problemas que se resuelven mediante el planteamiento de ecuaciones y sistemas.

-En la editorial Santillana el número de las páginas de ejercicios de resolución de ecuaciones y de sistemas es mayor que el número de las páginas de problemas algebraicos de ecuaciones y sistemas, pero en la editorial Anaya sucede exactamente lo contrario.
-El final de cada unidad es diferente en ambas editoriales:

-La editorial Santillana presenta media página en la que aparecen unas "*cuestiones de autoevaluación*". Son cuestiones sobre los conceptos algebraicos que se han manejado en la unidad.

-La editorial Anaya contiene dos páginas, con ilustraciones que ocupan mucho espacio, en la que hay unos "*problemas de estrategia*" y "*juegos para pensar*". Son problemas que se apartan de las clásicas estrategias algebraicas de resolución.

II.4.3.6. Problemas algebraicos

Los problemas algebraicos, enunciados referidos a situaciones reales que deben resolverse mediante la formulación de ecuaciones o de sistemas, son importantes en la formación del alumno porque conectan el mundo real, el de los enunciados, con el mundo matemático, el de las ecuaciones. El estudio de los problemas se desglosa en los siguientes aspectos:

- **A) El peso de los problemas en la actuación del profesor**
- **B) El peso de los problemas en las actividades de los alumnos**
- **C) Tipos de problemas propuestos**
- **D) Metodología de resolución de problemas.**

A) El peso de los problemas en la actuación del profesor

Para estudiar el peso de los problemas en la actuación del profesor hemos elaborado unas tablas en la que estudiamos el número y porcentaje de páginas dedicadas a la teoría sobre resolución de problemas respecto al número total de las páginas dedicadas a la teoría de la unidad didáctica y el número y porcentaje de problemas resueltos respecto al número total de las actividades resueltas en total en la unidad didáctica. Veamos ambas tablas:

UNIDAD DIDÁCTICA (Editorial)	TEORÍA DEDICADA A LOS PROBLEMAS	TEORÍA TOTAL DE LA UNIDAD
POLINOMIOS (Santillana) POLINOMIOS (Anaya)	0 páginas (0%) 0 páginas (0%)	12 páginas (100%) 11 páginas (100%)
ECUACIONES (Santillana) ECUACIONES (Anaya)	1 página (9%) 1 página (10%)	12 páginas (100%) 10 páginas (100%)
SISTEMAS (Santillana) SISTEMAS (Anaya)	1 página (10%) 1 página (8%)	10 páginas (100%) 13 páginas (100%)

Tabla II.37. Páginas dedicadas a la teoría sobre la resolución de problemas

UNIDAD DIDÁCTICA (Editorial)	PROBLEMAS RESUELTOS	ACTIVIDADES RESUELTAS
POLINOMIOS (Santillana) POLINOMIOS (Anaya)	0 problemas (0%) 5 problemas (29%)	21 actividades (100%) 17 actividades (100%)
ECUACIONES (Santillana) ECUACIONES (Anaya)	4 problemas (27%) 5 problemas (36%)	15 actividades (100%) 14 actividades (100%)
SISTEMAS (Santillana) SISTEMAS (Anaya)	1 problemas (8%) 5 problemas (36%)	12 actividades (100%) 14 actividades (100%)

Tabla II.38. Páginas dedicadas a los problemas resueltos

Tras el examen de las tablas II.37 y II.38, destacamos que:
-El número total de páginas dedicadas a la teoría ronda las 12 en cada una de las tres unidades de las dos editoriales. Así, en la editorial Santillana son 12, 12 y 10 y en Anaya son 11, 10, y 13.
-El número de páginas dedicadas a la teoría sobre resolución de problemas en las tres unidades es el mismo en las dos editoriales: 0 páginas sobre teoría de resolución de problemas de polinomios, 1 página sobre resolución de problemas de ecuaciones y 1 página sobre resolución de sistemas.
-El número total de actividades resueltas en cada unidad es similar en la editorial Santillana (21 en la unidad de polinomios, 15 en la de ecuaciones y 12 en la de sistemas) y en la editorial Anaya (17 en la unidad de polinomios, 14 en la de ecuaciones y 14 en la de sistemas).
-El número de problemas resueltos es diferente en cada editorial. Así:

> -En la unidad de polinomios, la editorial Santillana no contiene ningún problema resuelto. Sin embargo, la editorial Anaya dedica a los problemas cerca de la tercera parte de las actividades resueltas: 5 de 17.
>
> -En la unidad de ecuaciones, las editoriales Santillana y Anaya dedican a los problemas, más o menos, la tercera parte de las actividades resueltas: 4 de 15 y 5 de 14.
>
> -En la unidad de sistemas, la editorial Santillana sólo dedica a los problemas 1 de las 12 actividades resueltas mientras que la editorial Anaya les dedica cerca de la tercera parte: 5 de 14.

-Considerando las tres unidades –polinomios, ecuaciones y sistemas- como un todo, tenemos que, en la editorial Santillana, los 5 problemas resueltos suponen aproximadamente el 10% de las 48 actividades resueltas y que, en la editorial Anaya, los 15 problemas resueltos suponen aproximadamente el 33% de las 45 actividades resueltas.

B) El peso de los problemas en las actividades de los alumnos

Para el análisis de este peso de los problemas en las actividades de los alumnos, estudiamos la cantidad y el porcentaje de problemas propuestos respecto al total de actividades propuestas. Para estudiar lo anterior, hemos elaborado la siguiente tabla:

UNIDAD DIDÁCTICA (Editorial)	PROBLEMAS PROPUESTOS	ACTIVIDADES PROPUESTAS
POLINOMIOS (Santillana)	1 problemas (1 %)	85 actividades (100%)
POLINOMIOS (Anaya)	29 problemas (35 %)	84 actividades (100%)
ECUACIONES (Santillana)	27 problemas (33%)	82 actividades (100%)
ECUACIONES (Anaya)	54 problemas (66%)	82 actividades (100%)
SISTEMAS (Santillana)	22 problemas (31%)	70 actividades (100%)
SISTEMAS (Anaya)	51 problemas (66 %)	77 actividades (100%)

Tabla II.39. Problemas propuestos.

Tras observar la tabla II.39, tenemos que:

-El número de actividades propuestas en cada unidad es similar en la editorial Santillana -85 en la unidad de polinomios, 82 en la de ecuaciones y 70 en la de sistemas- y en la editorial Anaya -84 en la unidad de polinomios, 82 en la de ecuaciones y 77 en la de sistemas-.

-En lo que se refiere a los problemas propuestos, hay diferencias entre ambas editoriales:

> -En la unidad sobre polinomios, la editorial Santillana sólo propone 1 problema. Sin embargo, en dicha unidad, la editorial Anaya propone 29 problemas de un total de 84 actividades.
>
> -En las unidades sobre ecuaciones y sistemas, la editorial Santillana dedica a los problemas sobre un 33% de las actividades propuestas. Sin embargo, en dichas unidades, dicho porcentaje es el 66%.

-Considerando las tres unidades sobre polinomios, ecuaciones y sistemas, tenemos que:

> -En la editorial Santillana, los 50 problemas resueltos suponen el 21% de las 237 actividades propuestas.
>
> -En la editorial Anaya, los 134 problemas resueltos suponen el 55% de las 243 actividades propuestas.

C) Tipos de problemas propuestos

Los problemas propuestos a los alumnos que hemos encontrado son de dos tipos: Problemas de álgebra (los que son resolubles mediante el planteamiento y la resolución de ecuaciones algebraicas), y problemas de estrategia (los que no son resolubles mediante el planteamiento y la resolución de ecuaciones algebraicas, sino usando estrategias de carácter lógico). Teniendo en cuenta lo anterior, hemos realizado la siguiente tabla:

UNIDAD (Editorial)	PROBLEMAS ALGEBRAICOS (PROPUESTOS)	PROBLEMAS DE ESTRATEGIA (PROPUESTOS)
POLINOMIOS (Santillana)	1 problemas	0 problemas
POLINOMIOS (Anaya)	18 problemas	11 problemas
ECUACIONES (Santillana)	27 problemas	0 problemas
ECUACIONES (Anaya)	43 problemas	11 problemas
SISTEMAS (Santillana)	22 problemas	0 problemas
SISTEMAS (Anaya)	41 problemas	10 problemas

Tabla II.40. Problemas propuestos a los alumnos

Tras examinar la tabla II.40, tenemos que:
-Todos los problemas de la editorial Santillana son algebraicos. Sin embargo, en Anaya, hay 102 problemas algebraicos y 32 de estrategia.
-En lo que se refiere a los problemas algebraicos, las editoriales presentan las siguientes diferencias:

-En la unidad de polinomios, la editorial Santillana sólo presenta 1 problema. Sin embargo, en esa unidad, la editorial Anaya presenta 18 problemas.
-En las unidades de ecuaciones y de sistemas, la editorial Santillana propone respectivamente 27 y 22 problemas, mientras que la editorial Anaya propone bastantes más: 43 y 41.
-Considerando conjuntamente las tres unidades sobre polinomios, ecuaciones y sistemas, la editorial Santillana sólo contiene sólo 50 problemas frente a los 102 de la editorial Anaya.

Pasamos ahora a estudiar detalladamente los problemas algebraicos y los problemas de estrategia que aparecen en las actividades propuestas a los alumnos.

a) Problemas algebraicos

Tras examinar los problemas de álgebra de ambas editoriales, destacamos que éstos son muy semejantes a los de los libros de épocas pasadas. Tales problemas de álgebra de ambas editoriales pueden clasificarse en:

- Problemas de números: Son aquellos en los que se habla escuetamente de relaciones entre números. Veamos un par de ejemplos representativos:

  -Editorial Santillana, 2004c, página 92: "*(66) ΘΘΘ Halla dos números consecutivos, sabiendo que la diferencia de sus cuadrados es 567.*"

  -Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 116: "*(18) ΔΔΔ La suma de tres números naturales consecutivos es igual al cuádruple del menor. ¿De qué números se trata?*"

- Problemas de aumentos o disminuciones de cantidades: Son aquellos en los que se habla de cantidades que aumentan o disminuyen. Veamos un par de ejemplos representativos:

  -Editorial Santillana, 2004c, página 92: "*(73) ΘΘΘ Luis ha leído 216 páginas en cuatro días. Cada día lee 12 páginas más que el día anterior. ¿Cuántas páginas leyó el primer día?*"

  -Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 116: "*(27) ΔΔΔ Un depósito está lleno el domingo. El lunes se vacían sus 2/3 partes, el martes se gastan 2/5 de lo que quedaba, y el miércoles, 300 litros. Si aún quedó 1/10, ¿cuál es su capacidad?*"

- Problemas de comparación: Son aquellos en los que se comparan edades o cantidades de objetos que tienen dos personas. Veamos un par de ejemplos representativos:

  -Editorial Santillana, 2004c, página 108: "*(60) ΘΘΘ Hace siete años la edad de un padre era el cuádruple de la de su hijo y actualmente es el triple. ¿Cuál es la edad de cada uno?*"

  -Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 116: "*(26) ΔΔΔ La suma de las edades de los cuatro miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre, que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años. ¿Qué edad tiene cada uno?*"

- -Problemas con porcentajes involucrados: Son aquellos en los que se habla de porcentajes. Veamos un par de ejemplos representativos:

  -Editorial Santillana, 2004c, página 108: "*(59) ΘΘΘ En una ONG de ayuda a los ancianos, las chicas voluntarias representaban el 18% del total. En el último año, su número ha aumentado en 222 y el de chicos en 58. De esta forma el porcentaje de chicas ha aumentado al 30%. ¿Cuántos voluntarios hay ahora? ¿Cuántas de ellos son chicas?*"

  -Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 11: "*(35) ΔΔΔ Un inversor que dispone de 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 8%, y el resto, en otro banco, al 6%. Si la primera parte le produce anualmente 210 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?*"

- Problemas de recuentos: Son aquellos en los que se cuentan cantidades de dos objetos y cantidades de elementos de esos dos objetos. Veamos un par de ejemplos representativos:

  -Editorial Santillana, 2004c, página 108:*"(64) ΘΘΘ En un corral hay 25 ovejas y gallinas, y contando las patas hay 80 en total. ¿Cuántas ovejas y gallinas hay en total?*"

  -Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 136: *"(11) ΔΔΔ Un fabricante de bombillas obtiene un beneficio de 0,3 € por cada pieza que sale del taller para la venta, pero sufre una pérdida de 0,4 € por cada pieza defectuoso que debe retirar. En una jornada ha fabricado 2100 bombillas, obteniendo unos beneficios de 484,4 €. ¿Cuántas bombillas válidas y cuántas defectuosas se han fabricado ese día?*"

- Problemas de mezclas: Son aquellos en los que se unen dos productos diferentes de precios distintos para conseguir una mezcla con un precio nuevo. Veamos un par de ejemplos representativos:

  -Editorial Santillana, 2004c, página 107: "*55 ΘΘΘ En una fábrica de zumos se mezclan dos tipos de calidades, una de 50 céntimos de euro el litro y otra de 80 céntimos de euro el litro. ¿Cuántos litros de zumo han de mezclarse para obtener 120 litros con un coste total de 85,50 €?*"

  -Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 137: "*26 ΔΔΔ Un bodeguero ha mezclado dos cubas de vino, la de mejor calidad a 3 €/litro y la segunda, de calidad inferior, a 2,2 €/litro. De esta forma ha obtenido 16 hl de un vino de calidad intermedia que sale a 2,5 €/litro. ¿Cuál era el contenido de cada cuba?*"

- Problemas de cocientes: Son aquellos que se plantean mediante la fórmula "Dividendo es igual a divisor por cociente más resto". Veamos un par de ejemplos representativos:

  -Editorial Santillana, 2004c, página 107: *"(54) ΘΘΘ Una empresa de alquiler de coches ofrece dos modelos, uno de cuatro plazas y otro de cinco. Durante un día la empresa alquila 10 coches en los que viajan 42 personas, quedando dos plazas sin ocupar. ¿Cuántos coches se alquilaron de cada tipo?*"

  -Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 117: *"(45) ΔΔΔ Una peña deportiva contrató un autobús para seguir a su equipo. Si el autobús se hubiera llenado, cada uno habría pagado 8,50 €; pero quedaron 3 plazas vacías, y el viaje costó 9 €. ¿Cuántas plazas tenía el autobús?*"

- Problemas de cifras: Son aquellos que se formulan usando la expresión de un número en base 10. Veamos un par de ejemplos representativos:

  -Editorial Santillana, 2004c, página 108: *"(61) ΘΘΘ La cifra de las decenas de un número es el triple de la cifra de sus unidades; además, si se invierte el orden de las cifras de este número, el número de partida disminuye en 36 unidades. Halla ambos números.*"

-Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 138: *"(36) ΔΔΔ La suma de las cifras de un número es 12. Si lo invertimos, obtenemos otro número igual al doble del anterior menos 12 ¿Cuál es el número inicial?*"

- Problemas de geometría: Son aquellos que se plantean mediante fórmulas geométricas. Veamos un par de ejemplos representativos:

  -Editorial Santillana, 2004c, página 92: *"(78) ΘΘΘ Calcula el radio de un círculo sabiendo que si aumentamos el radio en 3, se cuadriplica su área.*"

  -Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 117: *"(46) ΔΔΔ Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 cm menos que la altura y la diagonal mide 10 cm.*"

- Problemas de móviles: Son aquellos en los que para su planteamiento se usa la fórmula física "velocidad es igual a espacio dividido entre tiempo". Veamos un par de ejemplos representativos:

  -Editorial Santillana, 2004c, página 92: *"(74) ΘΘΘ A las 9 de la mañana, sale un coche de un punto A a una velocidad de 80 km/h y, dos horas más tarde, sale otro coche desde el mismo punto a una velocidad de 120 km/h. ¿A qué distancia del punto A alcanzará el segundo coche al primero?*"

  -Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 117: "*(40) ΔΔΔ Un ciclista que va a 18 km/h tarda 45 minutos en alcanzar a otro, que le lleva una ventaja de 6 km. ¿Qué velocidad lleva el que iba delante?*"

Como se observa, los problemas del álgebra escolar actual son los mismos que los del siglo XX, salvo en pequeños detalles tales como el cambio de unidades monetarias (antes la peseta, ahora el euro).

b) Problemas de estrategia:

En la editorial Santillana no existen problemas de estrategia.
En la editorial Anaya, al final de cada unidad, hay un par de páginas tituladas "*problemas de estrategia*" y "*juegos para pensar*", con muchas ilustraciones, en las que aparecen esos problemas que nosotros hemos definido como problemas de estrategia. Veamos un par de ejemplos representativos:

-Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 102:
"*PROBLEMAS DE ESTRATEGIA*
(4) Pájaros
Mi tío Pío tiene en casa varios pájaros.
-Todos menos dos son canarios.
-Todos son jilgueros, menos dos.
-Solo dos no son periquitos.
¿Cuántos pájaros tiene mi tío Pío?"

-Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 141:
"*JUEGOS PARA PENSAR*

(1) Incógnita difícil de despejar
¿Sabes qué es una paradoja? Ahora puedes observar una.
Escribe en uno y otro lado de una tarjeta los siguientes mensajes:

LO QUE SE DICE AL OTRO LADO DE ESTA TARJETA ES VERDAD	*LO QUE SE DICE AL OTRO LADO DE ESTA TARJETA ES MENTIRA*

Y ahora pregúntate:
¿Hay alguna verdad o alguna mentira en alguno de los lados de la tarjeta?"

D) Metodología de resolución de problemas

Cada editorial desarrolla una propuesta teórica sobre como deben resolverse los problemas de álgebra y añade en esa misma página unos ejemplos de problemas resueltos en los que aplica –más o menos coherentemente- dicha teoría.

Mostramos primero la propuesta teórica de las editoriales Santillana y Anaya sobre resolución de problemas de álgebra, así como su aplicación en los primeros problemas resueltos de cada editorial. Luego, con esa teoría y esos primeros problemas resueltos puestos a disposición del lector, procederemos a analizar los aspectos que –por se los más relacionados con los tres focos de nuestra investigación- más nos interesan sobre la metodología de resolución de problemas:

- **D1) El significado de las letras que se utilizan**
- **D2) La comprobación de las soluciones**
- **D3) El análisis de las soluciones**
- **D4) planteamiento de las ecuaciones**

-Propuesta teórica de metodología de resolución de problemas de álgebra de la editorial Santillana, página 86:
"*4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:*
Numerosos problemas se pueden resolver planteando una ecuación, de primer o segundo grado, para llegar a la solución buscada.
En general, hay que seguir estos pasos o fases:
1º Comprensión del problema. Se debe leer detalladamente el enunciado del problema para identificar los datos y lo que debemos obtener, la incógnita x.
2º Planteamiento. Consiste en traducir el enunciado del problema al lenguaje matemático mediante expresiones algebraicas, para obtener una ecuación.
3º Resolución de la ecuación obtenida.
4º Comprobación y análisis de la solución. Es necesario comprobar si la solución obtenida es correcta, y después, analizar si esa solución obtenida tiene sentido en el contexto del problema." (Santillana, 2004c, pagina 86)

-Problema resuelto nº 10 de la editorial Santillana (2004c), página 86:
"(10) *Reparte 24 € en dos partes, de forma que una sea triple que la otra.*
1º Datos: 24 €, 2 partes, una triple que al otra.

Una parte tendrá x *€. La otra tendrá* $3x$ *€, el triple.*
2º Planteamos la ecuación, sabiendo que la suma de ambas partes es 24:

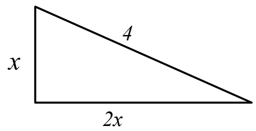
$$x + 3x = 24$$

3º Resolución de la ecuación:

$$x + 3x = 24\,;\ 4x = 24\,;\ x = \frac{24}{4} = 6$$

Una parte tendrá 6 € y la otra $3 \cdot 6 = 18$ *€.*
4º Comprobación y análisis.
La solución es correcta ya que $6 + 3 \cdot 6 = 6 + 18 = 24$ *y, además, tiene sentido en el contexto del problema.*"

-Problema resuelto nº 11 de la editorial Santillana (2004c), páginas 86 y 87:
"*(11) En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 4 cm. Calcula los catetos sabiendo que la longitud de uno es el doble de la del otro.*



Aplicamos el teorema de Pitágoras, por ser un triángulo rectángulo: $4^2 = x^2 + (2x)^2\,;\ 16 = x^2 + 4x^2\,;\ 16 = 5x^2$
La ecuación de segundo grado que obtenemos es incompleta ($b = 0$*).*

Despejamos la incógnita x *:* $x^2 = \frac{16}{5}\,;\ x = \sqrt{\frac{16}{5}} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{16}{5}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{16}{5}} \end{cases}$

Ambas son soluciones de la ecuación, pero la solución $-\sqrt{16/5}$ *no es solución del problema ya que la longitud del lado de un triángulo no puede ser negativa. La solución del problema es entonces el valor positivo.*
El cateto menor mide $\sqrt{16/5}$ *cm y el cateto mayor* $2\sqrt{16/5}$ *cm.*"

-Propuesta teórica de metodología de resolución de problemas de álgebra de Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 112:
"6 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES
Plantear una ecuación a partir de un problema es traducir a lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer. Conviene proceder de forma organizada, por lo que es útil dar estos pasos:
(1) Identificar los datos conocidos, los que deseamos conocer y dar nombre a la incógnita.
(2) Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo desconocido mediante lo conocido.
(3) Resolver la ecuación.
(4) Interpretar la solución ajustándola al enunciado." (Colera y otros, 2002, página 112)

-Problema resuelto nº 1 de Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 112:

"*1. La base de un rectángulo es 10 cm más larga que la altura. Su área mide 600 cm^2. Calcular las dimensiones del rectángulo.*

(1) $Área = base \cdot altura$. *Llamamos* x *a la altura, y* $x+10$ *a la base.*

(2) $600 = (x+10)\cdot x \rightarrow 600 = x^2 + 10x \rightarrow x^2 + 10x - 600 = 0$

(3) $x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100+2400}}{2} = \dfrac{-10 \pm 50}{2} = 20$ *(solo vale la raíz positiva)*

(4) Solución: ALTURA = 20 cm, BASE = 30 cm

-Problema resuelto nº 2 de Colera y otros, 2002, de la editorial Anaya, página 112:

"*2. Se mezclan 30 kg de café de 6 €/kg con cierta cantidad de café superior de 8 €/kg, resultando una mezcla de 7,25 €/kg. ¿Qué cantidad de café superior se ha utilizado?*

	1º CAFÉ	*CAFÉ SUPERIOR*	*MEZCLA*
CANTIDAD	30	x	$30+x$
PRECIO	6	8	7,25
COSTE	$30\cdot 6 = 180$	$8x$	$180+8x$

$\Pr eciomezcla = \dfrac{Costemezcla}{Cantidadmezcla}$

Ecuación: $7{,}25 = \dfrac{180+8x}{30+x} \rightarrow 217{,}5 + 7{,}25x = 180 + 8x$

Resolviendo la ecuación se obtiene $x = 50$.

Interpretación: Se han utilizado 50 kg de café superior."

Del examen de las teorías propuestas y los problemas resueltos anteriores, destacamos lo siguiente:

D1) El significado de las letras que se utilizan

- En la teoría de la editorial Santillana (2004c) se afirma que se deben "*identificar los datos y lo que debemos obtener, la incógnita* x". En la teoría de Colera y otros (2002), de la editorial Anaya, también se declara que hay que *"Identificar los datos conocidos, los que deseamos conocer y dar nombre a la incógnita".*

- En los problemas resueltos de ambas editoriales Santillana y Anaya se explicita el significado de las letras y el de las expresiones algebraicas.

En resumen: en ambas editoriales Santillana y Anaya el significado de las letras está bien explicitado tanto en la teoría como en los problemas resueltos. Además, la asignación de unidades (€, cm, kg) a los números algebraicamente calculados, que aparece en los 4 problemas, es pertinente porque así se facilita la conexión del mundo real del enunciado con el mundo de las ecuaciones.

D2) La comprobación de las soluciones

- En la editorial Santillana (2004c) se declara que *"Es necesario comprobar si la solución obtenida es correcta"*, sin aclarar si la comprobación debe ser semántica o sintáctica, esto es, si se debe realizar en el enunciado del problema o en la ecuación planteada.
- Por el contrario, en Colera y otros (2002), de la editorial Anaya, ni siquiera se nombra la comprobación cuando se exponen los pasos de resolución de un problema.
- En la editorial Santillana se realiza una comprobación en el problema nº 10 pero no se realiza ninguna comprobación en el problema nº 11, transmitiendo así la idea de que la comprobación es un paso prescindible.
- En la editorial Anaya no realiza comprobación alguna ni en el problema nº 1 ni en el nº 2.

En resumen:
-En la editorial Santillana la comprobación se cita en la teoría, se aplica en el primer problema y se deja de aplicar en el segundo. Además, no se aclara, ni en la teoría ni en los problemas resueltos, si debe ser semántica o sintáctica.
-En la editorial Anaya la comprobación ni se cita teóricamente ni se práctica en los problemas resueltos

D3) El análisis de las soluciones

- En la editorial Santillana (2004c) se habla en la teoría de "*analizar si esa solución obtenida tiene sentido en el contexto del problema.*".
- Análogamente, en Colera y otros (2002), de la editorial Anaya, se dice en la teoría que el último paso consiste en "*Interpretar la solución ajustándola al enunciado.*"
- En las editoriales Santillana y Anaya el análisis -o interpretación- de la solución es muy limitado (no se estudiar en el intervalo de acotación de las posibles soluciones, no se analizan soluciones aproximadas,…):
  -En el problema nº 10 de la editorial Santillana sólo se dice que la solución "*tiene sentido en el contexto del problema.*". No se aclara a qué aspectos de la solución se refieren los redactores del libro.
  -En el problema nº 11 de la editorial Santillana y en el problema nº 1 de la editorial Anaya el análisis de la solución se reduce a indicar que hay que descartar las soluciones negativas de las ecuaciones de 2º grado planteadas porque las soluciones son longitudes geométricas.
  -En el problema nº 2 de la editorial Anaya no se efectúa ningún análisis de la solución.

En resumen, ni en la editorial Santillana ni en la editorial Anaya se explica bien en qué consiste el análisis o la interpretación de la solución, a veces, se realiza un análisis muy limitado y, a veces, no se realiza análisis alguno, transmitiendo la idea de que el análisis es un paso prescindible.

D4) El planteamiento de las ecuaciones

- En la editorial Santillana (2004c) se dice en la teoría que el planteamiento "*Consiste en traducir el enunciado del problema al lenguaje matemático mediante expresiones algebraicas, para obtener una ecuación*". Tan ambigua definición puede favorecer que el alumno interprete las ecuaciones algebraicas como la transcripción abreviada –palabra a palabra- de las oraciones gramaticales del enunciado.
- En la teoría de Colera y otros (2002), de la editorial Anaya, se dice que el planteamiento consiste en "*Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo desconocido mediante lo conocido*". Tan ambigua definición puede favorecer que el alumno interprete el signo = como un símbolo de relación o de correspondencia entre conjuntos de objetos.
- En los problemas resueltos de las editoriales Santillana y Anaya sí que se aprecia un esfuerzo para que el alumno comprenda la relación existente entre las cantidades desconocidas y conocidas de los enunciados de los problemas de álgebra. Así:

  -Se realizan unos dibujos y se explicitan las fórmulas geométricas usadas en los problemas geométricos nº 11 de Santillana y nº 1 de Anaya.

  -Se realiza una tabla auxiliar y se explicita la fórmula del cálculo del precio de cada kilo y se construye una tabla auxiliar en el problema nº 2 de Anaya.

En resumen, el concepto de problema de álgebra como unas cantidades conocidas y desconocidas que se relacionan mediante unas operaciones que nacen del mundo real no está bien explicado en la teoría, aunque se realizan esfuerzos –mediante tablas, dibujos y fórmula-, para que el alumno pueda establecer las relaciones que le permitan plantear los problemas de álgebra.

II.5. Resumen sobre el álgebra escolar

Tras haber analizar la Historia del álgebra matemática, el álgebra escolar del pasado (1857-2001) y el álgebra escolar actual (2001-2010), ahora resumimos aquellas facetas de la historia de las matemáticas y de la enseñanza del álgebra escolar que son más relevantes para nuestra investigación sobre la enseñanza del lenguaje algebraico en la Educación Secundaria Obligatoria:

- El lenguaje algebraico, tal y como se enseña hoy en la escuela, es una adquisición reciente desde una perspectiva histórica: la notación algebraica actual nació en el siglo XVII con Descartes. Esto refuerza la idea de que el lenguaje simbólico-algebraico es mucho más complejo que el aritmético por el alto nivel de abstracción, generalización y rigor notacional que implica.

- El "álgebra moderna" o "álgebra de estructuras" es una creación aún más moderna: fue creada por Galois en el siglo XIX y la investigación algebraica actual sigue en esta línea. Es un álgebra que no se basa en la resolución de ecuaciones sino en el concepto de grupo y por ello requiere un grado de abstracción extremadamente elevado que implica una gran maduración y desarrollo cerebral. Esto ayuda a explicar porqué no cuajó el intento realizado durante los años 70 de llevar el "álgebra moderna" a escolares de 12-16 años.

- La Ley Moyano de 1857 decretó la obligatoriedad de la enseñanza hasta los 9 o 10 años. La Ley Villar Palasí de 1970 extendió la obligatoriedad de la enseñanza hasta los 14 años y la LOGSE de 1990 la amplió hasta los 16 años. Tales cambios legislativos, unidos al progreso económico, han hecho que el alumnado de los primeros cursos de la enseñanza secundaria –el que recibe la enseñanza del álgebra escolar- sea cada vez más diverso. De hecho, en la enseñanza secundaria, se ha pasado de tener -a principios del siglo XX- un alumnado casi totalmente masculino, homogéneamente español y mayoritariamente perteneciente a las minorías ilustradas, a tener -a principios del siglo XXI- a un alumnado masculino y femenino al 50%, con una minoría de inmigrantes superior al 10% y extraído de todas las clases sociales.

- La enseñanza de los primeros cursos del álgebra escolar pasó de los profesores licenciados de los institutos a los maestros de los colegios con la Ley Villar Palasí de 1970 pero ha retornado a los primeros desde la LOGSE de 1990 hasta nuestros días. Es decir: salvo durante el paréntesis del sistema de la LGE (1970-1990), la enseñanza del lenguaje algebraico ha estado y está en manos de profesores licenciados de instituto que son especialistas en su materia y no en manos de maestros de colegio con una formación de tipo general.

- En el sistema de la Ley Moyano de 1857, la enseñanza del lenguaje algebraico se realizaba mediante una metodología de tipo deductivo-expositivo: el profesor definía unos conceptos de tipo general y resolvía unos ejemplos particulares. El alumno tenía luego que aplicar lo anterior en multitud de más ejemplos particulares.

- En lo que a la enseñanza del lenguaje algebraico se refiere, la Ley Villar Palasí de 1970 fue contradictoria:

  -Por una parte, propugnó que la metodología de enseñanza del álgebra fuese inductiva, experimental y próxima al alumno. El alumno debía "investigar" ejercicios particulares y, por generalización, comprender los conceptos generales del álgebra.

-Por otra parte, intentó introducir el álgebra moderna o álgebra de estructuras en la escuela. Evidentemente, esto implicaba un grado de abstracción excesivamente elevado para la edad del alumno.

En la práctica, con el tiempo, se abandonó la Matemática moderna y se adoptó una metodología de tipo conductista: se pensaba que aprender álgebra equivalía a realizar muchos ejercicios y problemas de un mismo tipo. Se puede decir que, pasados los primeros años de la ley de 1970, se retornó, a los contenidos de siempre y a la metodología de enseñanza tradicional (de tipo expositivo y deductivo y en la que el profesor es el principal protagonista del proceso de enseñanza).

- En lo que a la enseñanza del lenguaje algebraico se refiere, la LOGSE de 1990:

  -Procedió a eliminar contenidos algebraicos que se consideraba que el alumno no podía comprender. Así, se eliminaron los polinomios, las fracciones algebraicas y las ecuaciones de segundo grado en la Educación Secundaria Obligatoria.

  -Propugnó una enseñanza de tipo constructivista en la que el alumno fuese asentando los nuevos conceptos sobre sus estructuras cognitivas previas, con la ayuda expositiva final del profesor.

  En la práctica, pasados los primeros años de la LOGSE, los contenidos algebraicos eliminados -polinomios, fracciones algebraicas y ecuaciones de segundo grado- volvieron a los libros, y la metodología empleada ha vuelto a ser de tipo conductista, desapareciendo las propuestas en las que realmente se intentaba que el alumno confrontase sus esquemas cognitivos con los nuevos conceptos. Se puede decir que, pasados los primeros años de la reforma de 1990, se retornó, en gran medida, -como ocurrió tras la reforma de 1970- a los contenidos de siempre y a la metodología de enseñanza tradicional (de tipo expositivo y deductivo y en la que el profesor es el principal protagonista del proceso de enseñanza).

- El sistema educativo español actual, aunque es conocido como el de la LOE de 2006, básicamente es el que diseñó la LOGSE de 1990 en lo que se refiere a la composición del alumnado, la del profesorado y la de las materias que se imparten. En lo que al álgebra se refiere, los contenidos han vuelto a ser los tradicionales y la metodología es también de tipo tradicional: expositiva, formal y deductiva y, en ella, el profesor asume el protagonismo y el alumno debe imitar lo que realiza el enseñante.

- El diferente significado de las letras como variables, como incógnitas o como abreviaturas de palabras según la expresión matemática en la que se hallen (el Primer Foco de investigación) nunca se ha explicitado bien en el álgebra escolar:

  -no se explicita claramente que las letras pueden desempeñar diferentes papeles como variables, como incógnitas o como abreviaturas.

  -tampoco está clara la denominación de las letras. En el pasado, se les denominaba indeterminadas, variables o incógnitas, independientemente de si aparecían en un polinomio o en una ecuación. En el presente, se les sigue denominando variables o incógnitas, independientemente del ente matemático en el que aparecen.

- La comprobación de la solución de los problemas y de las ecuaciones (el Segundo Foco de investigación) sí que se propone, ocasionalmente, en el álgebra escolar del pasado y del presente. Pero:

  -No se suele matizar claramente si es una comprobación semántica o sintáctica, esto es, si se está comprobando la solución en la situación real descrita en el enunciado del problema o si se está sustituyendo la solución en una ecuación o en un sistema que puede estar bien o mal planteados.

  -La comprobación sólo se suele realizar en los primeros ejemplos resueltos. Luego, aparecían ejemplos resueltos sin comprobación. Esto transmite la idea de que la comprobación es un paso prescindible en el proceso de resolución de los problemas de álgebra.

- La utilización del tanteo aritmético para resolver ecuaciones, un método de ensayo-error, apenas se ha utilizado en el álgebra escolar del pasado y del presente. Desechar ese método de resolución equivale a desaprovechar un excelente recurso para entender los tres conceptos de incógnita, ecuación y solución, tan intrínsecamente ligados entre sí.

  En el álgebra escolar del pasado y del presente tampoco se suelen usar justificaciones aritméticas para explicar porqué las ecuaciones incompatibles no tienen solución, o porqué las ecuaciones compatibles indeterminadas tienen muchas soluciones. En su lugar, o se declara axiomáticamente que la ecuación "*no tiene solución*" o que la ecuación "*tiene infinitas soluciones*" o se alude a razonamientos analíticos de "paso al límite". Así, se desaprovecha el entender los tres conceptos de incógnita, ecuación y solución mediante el análisis de los casos extremos –los de no tener solución o los de tener infinitas soluciones-.

- Las conexiones entre el lenguaje natural -o materno- y el lenguaje algebraico (el Tercer Foco de investigación) sólo se abordan, habitualmente, en una única dirección en el álgebra escolar del pasado y del presente: se trabaja el planteamiento de problemas reales como ecuaciones algebraicas, pero no se enseña el proceso contrario de la invención de enunciados de problemas reales a partir de unas ecuaciones algebraicas dadas.

- La enseñanza del lenguaje algebraico es, en el álgebra escolar del pasado y del presente, un proceso cíclico en el que, además de añadir algún contenido, se repiten, en cada nivel de enseñanza, los contenidos del nivel anterior pero con procedimientos de cálculo más complejos. Así, centrándonos ya en el sistema educativo español actual, concretamos lo que se estudia a lo largo de los cuatro cursos que constituyen la Educación Secundaria Obligatoria o ESO (12-16 años):

  -En el curso de 1 º de ESO (12-13 años), tras una Educación Primaria (6-12 años) en la que han estudiado unas matemáticas de carácter aritmético y no algebraico, se introducen –por primera vez- las identidades algebraicas, las ecuaciones de 1º grado y los problemas de ecuaciones de 1º grado.

  -En el curso de 2º de ESO (13-14 años), se repite todos lo de 1º de ESO pero utilizando algoritmos de cálculo más complicados, y se añaden conceptos algebraicos tales como los polinomios, los sistemas lineales 2x2, los problemas de sistemas lineales 2x2, las ecuaciones de 2º grado y los problemas de ecuaciones de 2º grado.

  -En el curso de 3º de ESO (14-15 años), se vuelven a repetir todos los contenidos de 2º de ESO pero se enseñan procedimientos de cálculo más complejos, y sólo se añaden conceptos tales como las fracciones algebraicas.

  -En el curso de 4º de ESO (15-16 años), se les reitera todo lo anterior de 3º de ESO pero empleando cálculos más complejos y, a veces, se añaden –dependiendo de si es la Opción A (la “fácil”) o la B (la “difícil”)- las desigualdades y las ecuaciones bicuadradas.

Para ilustrar este **carácter cíclico** de la **enseñanza habitua**l del lenguaje algebraico en el álgebra escolar, hemos realizado un gráfico, el II.1 de la página siguiente, en el que:

- Lo que hay en el interior de cada “*hexágono*” representa los contenidos que se trabajan en cada uno de los cursos de la ESO.
- El carácter “*concéntrico*” de los hexágonos representa que en cada nivel se vuelven a repetir los contenidos del curso anterior.
- Los contenidos que aparecen debajo del nombre y la edad de cada curso -1º ESO (12-13), 2º ESO (13-14), 3º ESO (14-15) y 4º ESO (15-16)- son las aportaciones nuevas que se añaden en ese curso.
- El “*creciente grosor de las líneas poligonales”* representa la creciente dificultad de los procesos de cálculo que se practican con los contenidos.

Con tal simbología, se puede visualizar que en 3º de ESO –el curso al que va dirigida nuestra propuesta- se trabajan los mismos contenidos algebraicos que en 2º de ESO, muchos de los cuales, a su vez, también fueron trabajados en 1º de ESO.

Lo que cambia es el creciente grosor de los hexágonos que simboliza que las operaciones de cálculo son más complejas a medida que se sube de curso.

Teniendo en cuenta las anteriores aclaraciones presentamos el siguiente gráfico:

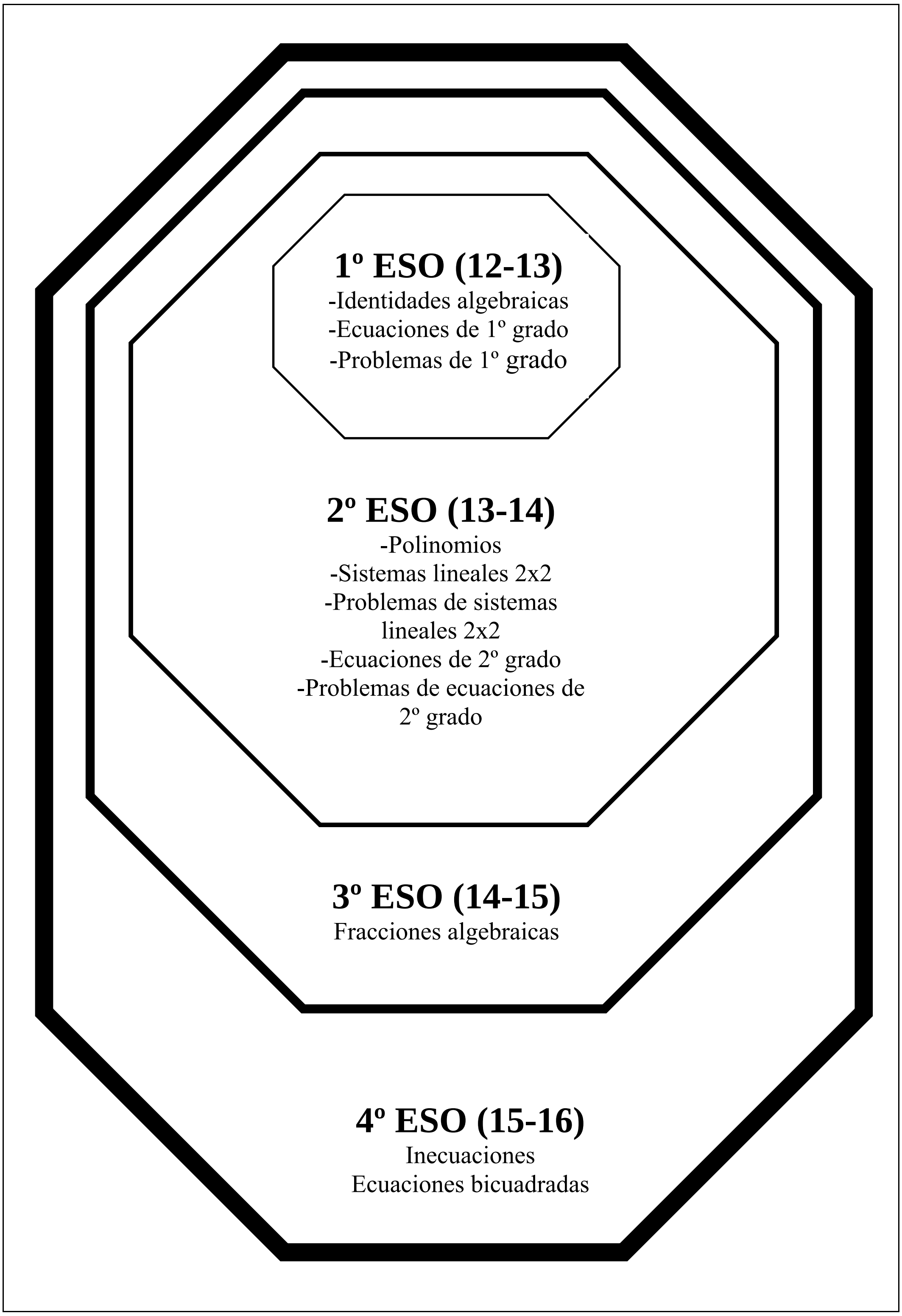


Gráfico II.1. El carácter cíclico de la enseñanza habitual del lenguaje algebraico la ESO

Capítulo III:

Metodología de investigación

III.1. Introducción

El objetivo de nuestra investigación es diseñar una propuesta didáctica que mejore la enseñanza del lenguaje algebraico en 3º de Educación Secundaria Obligatoria, y estudiar experimentalmente las posibilidades y las limitaciones de tal propuesta.

Previamente realizamos una extensa investigación bibliográfica que abarcaba los trabajos que sobre la enseñanza del lenguaje algebraico en la Enseñanza Secundaria se han publicado durante los últimos veinte años aproximadamente. Los resultados de tal indagación en el mundo de la Didáctica de la Matemática los expusimos en el anterior Capítulo I. También realizamos una minuciosa tarea de examen y análisis de manuales y de libros de texto escolares para conocer como fue y, lo que es más importante, cómo es la práctica docente de la enseñanza del lenguaje algebraico en la Educación Secundaria de nuestro país. Los resultados de tal indagación en el mundo de la Praxis escolar española los expusimos en el anterior Capítulo II.

Ahora, procedemos a explicitar en este capítulo III el marco metodológico de "Investigación-Acción" desde el que abordamos nuestro trabajo de investigación que consiste en la elaboración, la experimentación, la observación y la reflexión sobre una propuesta curricular alternativa de enseñanza del lenguaje algebraico que está dirigida a alumnos de 3º de ESO (14-15 años). La estructura general de nuestro marco metodológico se ajusta a los siguientes principios:

- Este trabajo de investigación es exploratorio e interpretativo y se enmarca en el paradigma cualitativo.

- El estudio se articula en una experimentación en el aula sobre una innovación curricular en la enseñanza del lenguaje algebraico, en la línea de la Investigación-Acción diagnóstica y empírica.

Para la mejora de la enseñanza del lenguaje algebraico, en nuestra propuesta curricular trabajamos:

- El diferente significado de las letras como variables, incógnitas o abreviaturas según sea la expresión matemática en la que aparecen y que implica que una letra sea variable, incógnita o abreviatura, según se ubique en una expresión algebraica abierta (sin signo =), en una ecuación (con signo =) o a continuación de un dato numérico como las iniciales de una unidad de medida.

- La valoración o evaluación de expresiones algebraicas abiertas según sea el valor numérico que sustituye a la variable de la expresión algebraica dada. Esto permite la comprensión de una expresión algebraica abierta como un ente matemático que representa una serie de operaciones a realizar con infinitos valores numéricos concretos.

- La búsqueda por tanteo aritmético, mediante un método de ensayo-error, del valor numérico que verifica una ecuación dada. Esto permite la comprensión de la solución de una ecuación como el valor numérico concreto que hace posible que se verifique la igualdad entre las cantidades situadas a la izquierda y a la derecha del signo igual.

- La comprensión de la notación algebraica y de las reglas utilizadas para operar y para despejar que hacen posible la resolución de las ecuaciones. Son muchas las convenciones notacionales que complican la comprensión del lenguaje algebraico. Muchas de tales convenciones están relacionadas con la invisibilidad del uno cuando actúa como factor, denominador o exponente.

- La resolución de ecuaciones compatibles determinadas del tipo $a \cdot x = 0$ (con $a \neq 0$), de ecuaciones incompatibles del tipo $0 \cdot x = a$ (con $a \neq 0$) y de ecuaciones compatibles indeterminadas del tipo $0 \cdot x = 0$ mediante razonamientos aritmético-lógicos (basados en el tanteo aritmético) sobre si tienen una única solución (el cero), no tienen solución o sobre si cualquier número es solución. Tales razonamientos tienen un carácter aritmético porque se basan en la sustitución de la incógnita x por números concretos cualesquiera, y tienen un carácter lógico porque conectan las cantidades finitas de tanteos aritméticos realizados con las nociones generales del tipo “sólo el cero es solución”, o del tipo “ninguno de los números verifican la ecuación”, o del tipo “todos los números verifican la ecuación”.

- La realización de todos los pasos -planteamiento de las ecuaciones, resolución de las ecuaciones, expresión de las unidades de las soluciones y comprobación de las soluciones en el enunciado- cuando hay que resolver un problema algebraico.

En la enseñanza habitual del álgebra, la comprobación o no aparece o sólo aparece en los primeros problemas resueltos. De esta forma se transmite la idea de que no es una parte obligatoria del proceso de resolución. Nosotros intentamos incorporar la comprobación, mediante la petición explícita de la misma, como parte final del proceso de resolución de los problemas algebraicos.

- La diferenciación entre comprobación semántica -la de la solución del problema algebraico en los enunciados- y comprobación sintáctica -la de la solución del problema algebraico en unas ecuaciones quizá mal planteadas-.

  En la enseñanza habitual del álgebra, no se distingue claramente entre comprobación semántica y sintáctica de la solución del problema algebraico. Nosotros les presentamos problemas algebraicos resueltos en que están mal redactados o mal planteados o con las ecuaciones mal resueltas y les preguntamos sobre el enunciado, el planteamiento, las soluciones a fin de que diferencien entre comprobación semántica y sintáctica.

- El planteamiento de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones a partir de enunciados que describen situaciones reales en los que aparecen cantidades numéricas conocidas y desconocidas.

  Esta traducción desde el lenguaje natural al algebraico se trabaja en la enseñanza habitual pero puede ser, en muchos casos, una traducción sintáctica, es decir, interpretando los símbolos matemáticos de las ecuaciones como abreviaturas de palabras. Nosotros intentamos que la traducción desde el lenguaje materno al algebraico sea semántica, es decir, interpretando los símbolos matemáticos de las ecuaciones como cantidades conocidas, como cantidades desconocidas y como operaciones aritméticas entre cantidades. Para ello, trabajamos la sustitución de las letras por números concretos en la resolución por tanteo, la comprobación sintáctica de las ecuaciones y la comprobación semántica de los enunciados.

- La redacción de enunciados inventados que sean coherentes con unas ecuaciones dadas y en un contexto real indicado. En otras palabras: la traducción inversa desde el lenguaje algebraico al lenguaje natural.

  En la enseñanza habitual, sólo se suele trabajar la traducción entre lenguajes en el sentido más utilizado en la aplicación práctica de la herramienta algebraica a las ciencias, esto es, desde el lenguaje natural al algebraico. Nosotros consideramos que la traducción inversa desde el lenguaje algebraico al natural, favorece una adecuada comprensión de las relaciones existentes entre ambos lenguajes y, por tanto, mejora la competencia para plantear y resolver problemas algebraicos.

- La utilización de una metodología didáctica de aula en la que existen tres fases:
  - 1ª Fase: El alumno tantea, explora, investiga… sobre unas cuestiones que se le ponen delante. Es una fase de trabajo individual.

- 2ª Fase: El grupo del aula realiza un debate, moderado por el profesor, para la puesta en común. Es una fase de trabajo colectivo.
- 3ª Fase: El profesor realiza una explicación final, de carácter magistral, para la organización y la formalización de los contenidos.

Nuestra investigación se enmarca en el paradigma cualitativo y, más concretamente en la metodología de la Investigación-Acción. Tal metodología, típica de las Ciencias Sociales, ya ha sido utilizada en la Didáctica de las Matemáticas por Castro (1994), Escolano (2007), Romero (1995), Cubillo (1998) y Gairín (1999) en la elaboración, implementación, análisis y reflexión de sus respectivas propuestas didácticas curriculares sobre contenidos aritméticos que experimentaron con alumnos de Primaria (en las propuestas de Castro y de Escolano), de Secundaria Post-obligatoria (en las propuestas de Romero y de Cubillo) y de alumnos de Universidad (en la propuesta de Gairín). Nuestra propuesta comparte con las de los investigadores anteriores un similar diseño metodológico de Investigación-Acción, si bien se diferencia de ellas en su contenido -nuestra propuesta es de carácter algebraico, las de los autores anteriores son de carácter aritmético- y en el nivel educativo del alumnado al que se dirige -nuestra propuesta es para adolescentes de 3º de ESO de 14-15 años, las de los autores anteriores eran para niños de Primaria, adolescentes de la Secundaria Post-obligatoria y jóvenes universitarios-.

La experimentación de nuestra propuesta curricular de enseñanza del lenguaje algebraico se realizó durante el curso escolar 2007-2008 en el Instituto de Educación Secundaria “Goya” de Zaragoza con un grupo de 33 alumnos de 3º de ESO (14-15 años) que pertenecían a la enseñanza oficial y que constituían lo que, a nivel organizativo de centro, llamábamos los subgrupos 3.1 y 3.2 de 3º de ESO.

III.2. Experimentación de la propuesta

Nuestra investigación está centrada en el desarrollo y la evaluación de una propuesta de enseñanza innovadora del álgebra con un grupo de alumnos de 3º de ESO (14-15 años). Dichos alumnos de tercer curso poseen experiencia previa con el lenguaje algebraico puesto que el álgebra forma parte del currículo oficial de los dos cursos anteriores: 1º de ESO (12-13 años) y de 2º de ESO (13-14 años).

El objetivo de esta propuesta de enseñanza curricular es incrementar la comprensión de los alumnos sobre la relación existente entre los contextos reales de los que se habla en los enunciados de los problemas algebraicos y las ecuaciones algebraicas que se utilizan para su resolución.

Nuestra investigación sigue las líneas generales del modelo de investigación ya desarrollado con anterioridad por Castro (1995), por Romero (1996), por Gairín (1999) y por Escolano (2007).

Dicha investigación viene delimitada por los descriptores que se explicitan a continuación:

- El método de investigación en que se ubica
- Las fases que se siguen
- El grupo de alumnos objeto de la experimentación
- El papel específico del investigador
- Las técnicas de recogida y selección de datos
- El control de la fiabilidad y de la validez de la experiencia

III.3. Encuadre en la línea de la Investigación-Acción

La metodología de Investigación-Acción, aplicada a la Didáctica, consiste fundamentalmente en una reflexión sobre la práctica educativa cuya intencionalidad principal es la mejora de la calidad educativa (McNiff, 1992) y que se basa en una indagación colectiva (Kemmis y McTaggart, 1988). La Investigación-Acción limita su campo de acción a entornos muy reducidos en los que se pueden introducir modificaciones de la práctica educativa y cuyas consecuencias pueden ser analizadas por un reducido equipo de investigadores.

En nuestro trabajo, el equipo investigador está formado por el docente-investigador que experimenta activamente en el aula (en vez de ser un observador externo) y por su director de tesis que mantiene un seguimiento continuo de la labor de investigación. Es decir, la división entre el práctico y el investigador desaparece (Lewin, citado por Elliot, 1990), uniéndose en la persona del docente-investigador los intereses del práctico, que quiere avanzar en su profesionalidad y los del investigador, que quiere encontrar respuestas a sus inquietudes científicas.

Para delimitar con mayor precisión la metodología de investigación que utilizaremos recurriremos a la clasificación de Arnal et al. (1992). De este modo, nuestro trabajo se encuentra en la intersección de dos de las categorías de la escuela lewiniana:

> -Lo consideramos incluido en la categoría de la investigación-acción diagnóstica porque está enfocado a la recogida de datos, a la interpretación de los mismos, a la realización de un diagnóstico y al enunciado de unas medidas de acción.
>
> -Lo consideramos incluido en la categoría de la investigación-acción empírica porque estudia un problema social mediante una acción que supone un cambio y, además, trata de valorar de forma sistemática los efectos producidos.

En cuanto a la caracterización del diseño de esta investigación, y atendiendo a la tipología de Stake (1994), podemos calificarla como estudio de un caso instrumental puesto que se trata de una experiencia curricular: mejorar la enseñaza del lenguaje algebraico mediante el estudio de los diferentes significados de las letras en el álgebra, la comprobación semántica de las soluciones de los problemas algebraicos y la redacción de enunciados de problemas de álgebra a partir de unas ecuaciones y unos contextos reales dados.

Por último, y utilizando los trabajos de Arnal et al. (1992), nuestro trabajo se delimita en los términos siguientes:

-En cuanto a su finalidad, es una investigación aplicada porque trata de dar respuesta a un problema práctico -la deficiente comprensión del lenguaje algebraico que presentan muchos alumnos de la Educación Secundaria Obligatoria-, mejorando la calidad educativa mediante la transformación de las condiciones de enseñanza con la introducción de unos cambios en los contenidos que se enseñan sobre el lenguaje algebraico, y de unos cambios en la metodología didáctica que se emplea en el aula.

-Atendiendo al objeto perseguido nuestro objetivo es de tipo descriptivo, pues existe interés en el descubrimiento y la interpretación de fenómenos producidos en el aula.

-Por el marco, nuestra investigación es de campo porque se trabaja en el aula con los dos subgrupos naturales de alumnos -el 3.1 y el 3.2- de alumnos de 3º de ESO -Educación Secundaria Obligatoria- (14-15 años) del I.E.S "Goya" de Zaragoza, que forman el grupo de experimentación o de estudio de esta tesis doctoral.

-Es una investigación evaluativa puesto que pretendemos introducir un cambio en el currículo de matemáticas y valorar los efectos que produce.

III.4. Fases de la Investigación-Acción

El método de investigación utilizado en nuestra labor de indagación, conocido como la Metodología de la Investigación-acción, está constituido por cuatro fases fundamentales:

- **Fase de planificación** o diseño de una propuesta curricular de enseñanza.
- **Fase de acción** o implementación de la propuesta en el aula.
- **Fase de observación** y análisis de los efectos de la experimentación de la propuesta en el aula.
- **Fase de reflexión** sobre los efectos de la experimentación de la propuesta en el aula, sobre las conclusiones a las que llegamos sobre la totalidad del trabajo de investigación y sobre las perspectivas que consideramos que la tarea de investigación realizada ha abierto.

Pasamos ahora a describir detalladamente cada fase en los cuatro subapartados siguientes III.4.1, III.4.2, III.4.3 y III.4.4 de esta memoria de investigación.

III.4.1. Fase de planificación

En primer lugar, realizamos un amplio estudio bibliográfico de las investigaciones realizadas -a nivel internacional- durante los últimos veinte años sobre el lenguaje algebraico que se imparte en la enseñanza secundaria. Los resultados de tal estudio están expuestos en el anterior Capítulo I “El Problema de Investigación” de esta tesis.

En segundo lugar, estudiamos el pasado y el presente de la enseñanza habitual de lenguaje algebraico en la Enseñanza Secundaria Obligatoria de nuestro país a través del examen de manuales y de libros de texto escolares. Los resultados de este estudio ocupan la casi totalidad del anterior Capítulo II “El Álgebra Escolar” de esta tesis.

En tercer lugar, con la información obtenida elaboramos una propuesta curricular de enseñanza del lenguaje algebraico alternativa dirigida a alumnos de 3º de ESO (14-15 años), que se articula en torno a tres aspectos básicos que constituyen lo que denominamos los tres focos de investigación y que desarrollamos en el apartado III.5 de este capítulo:

> -El diferente significado de las letras como variables, como incógnitas o como abreviaturas según la expresión algebraica en la que aparecen.
>
> -El uso de la comprobación de la solución.
>
> -El fortalecimiento de las conexiones entre el lenguaje natural o materno y el lenguaje algebraico en ambos sentidos.

- De acuerdo con estos aspectos básicos o focos de investigación, realizamos la programación de las sesiones de clase que se llevarán a cabo en la fase siguiente. Para cada sesión, la programación se organizará en torno a los componentes curriculares de objetivos, contenidos, actividades propuestas, metodología y evaluación.

- Los tres aspectos básicos que articulan esta propuesta curricular de enseñanza del lenguaje algebraico, alternativa a la enseñanza habitual que se practica en el aula, son idea del investigador y fueron concebidos explícitamente para este trabajo. La redacción definitiva de la propuesta llevó muchos años y fue implementada en el aula por el equipo de investigación tras realizar varias pruebas piloto en el aula.

III.4.2. Fase de acción

En esta fase se implementó la propuesta curricular alternativa diseñada en el aula, introduciendo las modificaciones que el equipo investigador consideró que había que introducir según lo que se observaba en el aula.

Los alumnos realizaron su trabajo en dos fases:

- Una primera fase -de carácter habitualmente individual en casi todas las actividades y ocasionalmente realizada en pequeños equipos de cuatro alumnos en una de las actividades- durante la cual los alumnos respondían por escrito a unas actividades en las que se trabajan los aspectos básicos de nuestra propuesta.
- Una segunda fase -de carácter colectivo, con la clase organizada en forma de gran grupo y con el profesor actuando como organizador y moderador del debate y como ponente resolutivo final- durante la cual los alumnos debaten en la pizarra la resolución de algunas de las actividades trabajadas individualmente en la primera fase anterior. El profesor aparece al final de esta fase y realiza su aportación magistral para toda la clase, a modo de conclusión final.

De esta forma, la metodología resulta muy próxima a la de las Ciencias Experimentales por cuanto que insiste en que haya una fase previa de exploración de las cuestiones, una fase media de debate de las respuestas exploradas y una fase final de obtención de conclusiones y leyes generales.

III.4.3. Fase de observación

Como resultado de las fases de planificación y de acción tenemos unas hojas de respuestas de los alumnos y unas anotaciones del docente-investigador sobre lo acontecido en el aula.

Durante esta fase se realiza un vaciado de la información existente en tales hojas de respuestas de los alumnos y se organizan los datos recogidos según las puntuaciones del 0 al 4 establecidas en los criterios de evaluación de cada actividad. Tal información se representa en las tablas del Anexo III “Tablas de Resultados” en los que aparecen los resultados individuales de cada alumno del grupo de estudio en cada una de las actividades de la propuesta.

Durante esta fase el docente-investigador que imparte las clases, a partir de las anotaciones sobre lo acontecido en el aula, elabora el Diario de Clase que redacta inmediatamente después de la implementación de cada sesión de la propuesta. Este Diario de Clase es el contenido del Anexo II y en él se reflejan y valoran las incidencias ocurridas en cada sesión.

El equipo investigador (formado por el profesor que implementa la propuesta en el aula y actúa también como observador y por el director de tesis que está permanente informado sobre la experimentación), se reúne cada semana para realizar un seguimiento detallado de la experimentación de la propuesta.

Durante esta fase se analizan y se valoran los resultados obtenidos y se seleccionarán aquellas respuestas que deban ser escaneadas, bien porque sean muy representativas o muy originales, bien porque contengan errores muy reveladores o llamativos.

III.4.4. Fase de reflexión

Durante esta fase los alumnos repetirán una misma prueba individual y escrita pero en dos ocasiones diferentes: inmediatamente después de la implementación de la propuesta en el aula y más de tres meses después de dicha implementación. Los datos obtenidos en ambas pruebas se vaciarán en las tablas de resultados del Anexo III y las anotaciones sobre las incidencias en la realización de las pruebas se escribirán en el Anexo II "Diario de Clase". Lo anterior se encamina a evaluar la perdurabilidad -a corto plazo y a largo plazo- de los contenidos de nuestra propuesta curricular alternativa en el grupo de estudio. Se trata de un proceso de evaluación, de comparación evaluativa y de reflexión sobre los resultados obtenidos.

Posteriormente, realizamos una revisión de la totalidad de nuestra labor investigadora y elaboramos las conclusiones que extraemos sobre el nivel de comprensión que alcanzó el grupo de experimentación y sobre la aplicabilidad de la propuesta para otros grupos de alumnos y en otras circunstancias diferentes.

Terminamos esta fase con el estudio de las perspectivas de investigación que ha abierto nuestro trabajo sobre la enseñanza del lenguaje algebraico en la Educación Secundaria Obligatoria.

III.5. Focos de investigación

Nuestro trabajo de investigación tiene una clara intencionalidad formativa: mejorar la comprensión de los alumnos de la Educación Secundaria Obligatoria sobre el álgebra, fomentando la utilización de las conexiones existentes entre la realidad física -o económica- relatada en los enunciados y la realidad matemática expresada en las ecuaciones que plantean tales enunciados. Para ello, nuestra propuesta curricular de enseñanza innovadora se articula en torno a tres núcleos del contenido o focos de investigación.

III.5.1. Primer foco de investigación

El Primer Foco de investigación se destina a la comprensión del diferente significado de las letras como variable, como incógnita o como abreviatura según sea la expresión matemática en la que se ubique: son variables en las expresiones algebraicas abiertas (esto es, las que no tienen un miembro a cada lado del signo =), son incógnitas en las ecuaciones (esto es, las que tienen un miembro a cada lado del signo =) y son abreviaturas en expresión de las unidades de medidas (esto es, cuando vienen a continuación de un resultado numérico y las letras son abreviaturas de unidades de medida).

La evaluación de los valores que toma un polinomio cuando la variable va siendo sustituida por diferentes valores numéricos facilita la comprensión del concepto de variable (como letra que puede ser sustituido por valores diferentes) y del concepto de polinomio (como fórmula matemática que relaciona unos valores numéricos de salida -input- con unos valores numéricos de salida -output-).

La resolución de ecuaciones mediante tanteo aritmético es un instrumento útil para abordar la resolución de ciertas ecuaciones no resolubles mediante las habituales técnicas operativas (como las compatibles indeterminadas o las incompatibles) y, además, favorece la comprensión del concepto de ecuación (como expresión matemática en la que unos números conocidos concretos y unos números desconocidos concretos –pero sustituidos por letras- se relacionan entre si mediante unas operaciones aritméticas y un signo =) y del concepto de incógnita (como letra que representa al número concreto que verifica la igualdad que la ecuación expresa).

III.5.2. Segundo foco de investigación

El segundo foco de investigación se destina a resaltar el uso de la comprobación semántica –la sustitución de las soluciones de los problemas en las situaciones reales descritas en los enunciados-, la comprobación sintáctica –la sustitución de las soluciones de las ecuaciones en las propias ecuaciones para ver si se convierten en igualdades-, y la utilización del tanteo aritmético para la resolución de problemas.

La comprobación semántica debería ser siempre la parte final de todo proceso de resolución de una situación problemática como garantía de un trabajo bien hecho. Además, comprobar semánticamente, esto es, estudiar cómo se relacionan las soluciones –antes desconocidas, ahora números conocidos- con los datos del enunciado implica analizar las relaciones operacionales y de igualdad que se establecen entre las cantidades involucradas en el problema al dictado de la situación real descrita por el enunciado de dicho problema. Y la comprensión de las relaciones reales (físicas, económicas, geométricas,…) entre cantidades es la única base sobre la que se puede realizar un planteamiento semántico –comprensivo- de los problemas de álgebra.

Por todo ello –para fomentar el amor al trabajo bien acabado y para facilitar el planteamiento semántico de los problemas algebraicos- insistimos en el uso de la comprobación semántica como un paso más de la resolución de los problemas, y proponemos la corrección de problemas resueltos en los que el error está sólo en el planteamiento del problema o sólo en la resolución de las ecuaciones o en ambos a la vez.

La comprobación sintáctica de una ecuación es un útil instrumento para verificar si los cálculos efectuados en su resolución algebraica han sido correctos y, además, favorece –de forma análoga a como lo favorece la resolución de ecuaciones mediante tanteo aritmético- la comprensión del concepto de ecuación y del de incógnita.

La resolución de problemas mediante tanteo aritmético es útil para enfrentarse a ciertos problemas algebraicos que no son abordables mediante el habitual método algebraico de plantear y resolver ecuaciones. Además, la resolución de problemas mediante tanteo aritmético favorece –de forma análoga a como lo hacía la comprobación semántica de las soluciones en las situaciones reales descritas en los enunciados- la comprensión de las relaciones operacionales y de igualdad que dicta la realidad de la situación y que son la base para realizar un planteamiento semántico –comprensivo- de los problemas de álgebra.

III.5.3. Tercer foco de investigación

El tercer foco de investigación aborda el fortalecimiento de la conexión entre el lenguaje natural -o materno- y el lenguaje algebraico en ambos sentidos.

La conexión desde el lenguaje natural o materno al lenguaje algebraico la trabajamos mediante el planteamiento de problemas de álgebra. Pero nosotros buscamos que el planteamiento sea semántico (basado en las relaciones entre cantidades que se establecen en el mundo real) y no sintáctico (basado en la transcripción literal del texto del enunciado como si los símbolos algebraicos fueran palabras escritas abreviadamente). Para ello trabajamos la realización de los problemas paso a paso, esto es, reflexionando sobre la naturaleza de las cantidades involucradas –que se manifiesta en las unidades de medida de las mismas- y realizando la comprobación semántica de las soluciones.

La conexión desde el lenguaje algebraico al lenguaje natural o materno la trabajamos mediante la invención de enunciados de álgebra que sean coherentes con un contexto real que les proporcionamos (un garaje, una librería,…). Unas veces (las más) los problemas inventados tienen que ser coherentes además con unas ecuaciones que les proporcionamos y otras veces (las menos) no tienen que se coherentes con ecuación alguna sino que las ecuaciones las tienen que crear los alumnos mediante su descripción en el lenguaje natural.

La invención de enunciados de problemas supone practicar la capacidad para pasar de lo general (el mundo abstracto de las ecuaciones matemáticas) a lo particular (el mundo concreto de un caso real) y, por tanto, ayuda a comprender el significado real (físico o económico) de los símbolos numéricos, algebraicos y operacionales de las ecuaciones que sirven para plantear los problemas algebraicos.

III.6. Participantes

La experimentación en el aula de nuestra propuesta curricular innovadora de enseñanza del lenguaje algebraico se llevó a cabo en un grupo de alumnos de 3º de ESO (Educación de Secundaria Obligatoria), pertenecientes a la enseñanza oficial, del IES (Instituto de Educación Secundaria) “Goya” de Zaragoza durante el curso 2007-2008. La organización de los grupos de alumnos, de los horarios, de los espacios y de los medios materiales en el centro educativo, así como las características sociológicas y psicológicas del grupo de estudio las detallamos en el siguiente Capítulo IV “Fases de Planificación y Acción”.

III.7. Papel del investigador

El investigador principal, con muchos años de experiencia docente como Profesor de Enseñanza Secundaria en varios institutos públicos de la provincia de Zaragoza, era el profesor oficial de la asignatura de Matemáticas de la totalidad de los alumnos del grupo de experimentación en el IES “Goya” de Zaragoza durante el curso 2007-2008 y actúa también como el docente-investigador que experimenta en el aula la propuesta curricular innovadora de enseñanza de este trabajo de investigación. Esta doble posición, como investigador y docente, le otorga, al autor principal de esta tesis, un papel específico dentro del proceso investigador que le permite realizar las siguientes actuaciones:

- Introducir modificaciones en los contenidos del programa de la asignatura, porque la extensión temporal de la experimentación abarca sólo 11 sesiones de clase (9 sesiones dedicadas a la implementación de la propuesta más dos sesiones dedicadas a la prueba para la evaluación de la perdurabilidad de los contenidos de la propuesta en el grupo de estudio) y porque las modificaciones son compatibles con los objetivos y con los contenidos oficiales de la asignatura de Matemáticas.

- Aplicar estrategias metodológicas, en la línea del carácter inductivo y experimental propio de la Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, que son coherentes con los contenidos y con la intencionalidad -la mejora de la comprensión del lenguaje algebraico- de nuestro trabajo.

- Crear un clima de normalidad y de buena motivación para trabajar en el aula porque el docente-investigador es el mismo profesor de la enseñanza oficial que les explica y les evalúa la asignatura de Matemáticas desde principio hasta fin de curso.

- Obtener directamente los datos de la experimentación en el lugar y en las condiciones en las que tales datos se producen.

- Analizar las situaciones particulares de la implementación de la experimentación y poder tomar las decisiones en el momento en que sean necesarias.

- Mejorar su formación profesional puesto que está diseñando y experimentando una propuesta de mejora didáctica para superar el problema de la falta de comprensión del lenguaje algebraico que lleva observando en muchos alumnos curso tras curso. Es decir, está mejorando la calidad de su actividad docente mediante unos cambios en los contenidos y en la metodología de la enseñanza que imparte.

- Dar respuesta a unas inquietudes científicas que, como investigador tenía sobre la posible introducción de ciertos contenidos y de ciertas metodologías diferentes en la enseñanza del lenguaje algebraico, y sobre los efectos que tales cambios curriculares producirían en los alumnos.

- Avanzar en su formación científica como investigador tanto de la Didáctica de la Matemática como de la aplicación de una metodología de enseñanza de carácter inductivo y experimental, propio de las Ciencias Experimentales, en la enseñanza de las Matemáticas.

Esta doble faceta de investigador y de profesor que asume el autor principal de este trabajo nos obliga a arbitrar algunas precauciones que garanticen la fiabilidad y la validez del estudio realizado. Tales precauciones son:

- Contrastar la obtención, la delimitación y la objetivación de los datos obtenidos con su director de tesis, el Dr. José María Gairín que pertenece al Área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza y que tiene una amplia experiencia como investigador y como enseñante de las Matemáticas en Escuelas Universitarias de Magisterio y en Facultades de Matemáticas.

- Contrastar los datos obtenidos mediante el empleo de distintas fuentes de información: el diario de clase que el profesor escribió tras cada sesión en el aula; las hojas escritas que los alumnos entregaron en cada sesión; las tablas de resultados, elaboradas a partir de la calificación de tales hojas con unos criterios de evaluación sobre el grado de comprensión alcanzado, y que están fijados a priori.

- Ofrecer toda la información sobre el status del investigador como profesor de la asignatura de Matemáticas en la enseñanza secundaria oficial, sobre las premisas teóricas que enmarcan este estudio, sobre los métodos de recogida y análisis de datos y sobre la situación sociológica y psicológica del grupo de alumnos con los que se desarrolló la experimentación.

- Desarrollar la investigación dentro del escenario natural -físico y horario- del aula. Esto permite estudiar las experiencias y las transformaciones de los participantes en un entorno natural, sin las distorsiones que introduciría su experimentación en escenarios y en horarios más artificiales.

- Ejecutar una auto-vigilancia del investigador consistente en el cuestionamiento y la evaluación permanente de sus actuaciones.

III.8. Técnicas para recoger información y elaborar los datos

Al observar la experimentación en el aula de una propuesta de enseñanza, se obtienen informaciones sobre el papel desempeñado por profesor en el aula, sobre la construcción del conocimiento por parte de los alumnos y sobre las interacciones didácticas que se producen en el proceso de enseñanza. A partir de tales informaciones, se obtienen unos datos y, a partir de éstos y de la interpretación de los mismos, se obtienen los resultados de la experimentación de la propuesta innovadora de enseñanza y se elaboran las conclusiones. Por tanto es importante concretar las fuentes de información y los criterios utilizados en la selección de los datos obtenidos.

La recogida de información, en el paradigma cualitativo, puede realizarse a través de distintas técnicas (el estudio de casos particulares, las entrevistas personales, el empleo de medios audiovisuales, la observación participante, etc.).

El autor principal de este trabajo, en su doble papel de investigador y de docente, se ve obligado a realizar una observación participante de la interacción social que se produce en el aula. Por ello, para la recogida de datos, utiliza las siguientes técnicas:

- La observación de las respuestas escritas por los alumnos durante la primera fase de cada sesión del proceso de enseñanza. Tales hojas son casi siempre el resultado de un trabajo de carácter individual y ocasionalmente –solamente en una actividad- del trabajo de pequeños equipos de 4 alumnos.

  Contra la práctica escolar habitualmente imperante en el aula:

  -Se insiste en que los alumnos tachen sus equivocaciones con un aspa que permita una fácil lectura por parte del equipo investigador, en vez de tacharlas totalmente o borrarlas con tipex o goma.

  -Tales respuestas escritas son siempre recogidas antes del comienzo de la 2ª fase de cada sesión del proceso de enseñanza, 2ª fase que comprende la corrección en común (delante de toda la clase y con el profesor como organizador) y la explicación final del profesor. Así podemos conocer el nivel de comprensión alcanzado por cada alumno del grupo de estudio antes de la corrección de las actividades.

  El vaciado, corrección e interpretación de los resultados escritos permiten la elaboración del Anexo III “Tablas de Resultados” sobre las puntuaciones individuales de cada alumno del grupo en cada una de las actividades de la propuesta y en cada una de las cuestiones de las dos pruebas diseñadas para reflexionar sobre la perdurabilidad de los contenidos de la propuesta alternativa- a corto y a largo plazo- en el grupo de experimentación.

- La anotación escrita en el Diario de Clase sobre las incidencias más destacadas que suceden durante las dos fases de cada sesión: la 1ª fase de trabajo individual y la 2ª fase durante la cual las actividades de la sesión son corregidas en común bajo la dirección organizativa del profesor y con la aportación magistral final de éste.

Las anotaciones de las incidencias registradas en las sesiones de la propuesta y de las pruebas, así como su valoración e interpretación permiten la elaboración del Anexo II “Diario de Clase” sobre el desarrollo de la experimentación sesión a sesión.

De este modo pretendemos que la observación sea sistemática -afecta a todos los alumnos del grupo y a todas las actividades realizadas- y que el grado de inferencia del observador sea débil puesto que los datos se extraen de las respuestas que los alumnos han escrito individualmente. Tales datos pueden ser revisados y contrastados cuantas veces sea necesario.

Los datos obtenidos de la experimentación constituirán el soporte del que esperamos poder obtener conceptos y planteamientos teóricos que sean el resultado del análisis y de la reflexión sobre tales datos. La construcción, análisis e interpretación de los datos necesita unas categorías que permita codificar, para su tratamiento, la información obtenida.

El tipo de análisis de la información que utilizaremos tiene un carácter inductivo, pues las categorías, que surgen de las observaciones anotadas en el Diario de Clase y de las hojas escritas por los alumnos, no son impuestas a priori a los datos. Por el contrario, el examen de las observaciones de aula y de las informaciones analizadas en los documentos escritos permitirá la reformulación de las categorías de los fenómenos observados y de las relaciones entre ellos y, si es necesario, se reelaborarán o modificarán las clasificaciones iniciales como consecuencia de los casos que hayan aparecido.

Para llevar a efecto este análisis recurrimos a la técnica de triangulación que trata de diferenciar entre los datos objetivos de la investigación y los datos subjetivos que se generan cuando sólo hay una sola observación. De este modo se quiere ajustar las observaciones recurriendo al empleo de diferentes técnicas para estructurar los datos y para analizar la información desde distintas perspectivas.

Para precisar la técnica de triangulación que utilizaremos en nuestro análisis, nos atenemos a la tipología que aparece en los trabajos de Janesick (1994) y que es la siguiente:

-Triangulación de datos: la objetivación de los datos se realiza mediante el empleo de distintas fuentes de información.

-Triangulación de investigadores: el análisis de los datos se realiza por varios investigadores.

-Triangulación teórica: un mismo conjunto de datos se interpreta desde perspectivas diferentes.

-Triangulación metodológica: el problema de la investigación se aborda desde distintas estrategias metodológicas.

Nosotros, dado los recursos humanos de los que disponíamos, utilizamos una doble técnica de triangulación para la obtención, acotación y objetivación de los datos que obtenemos:

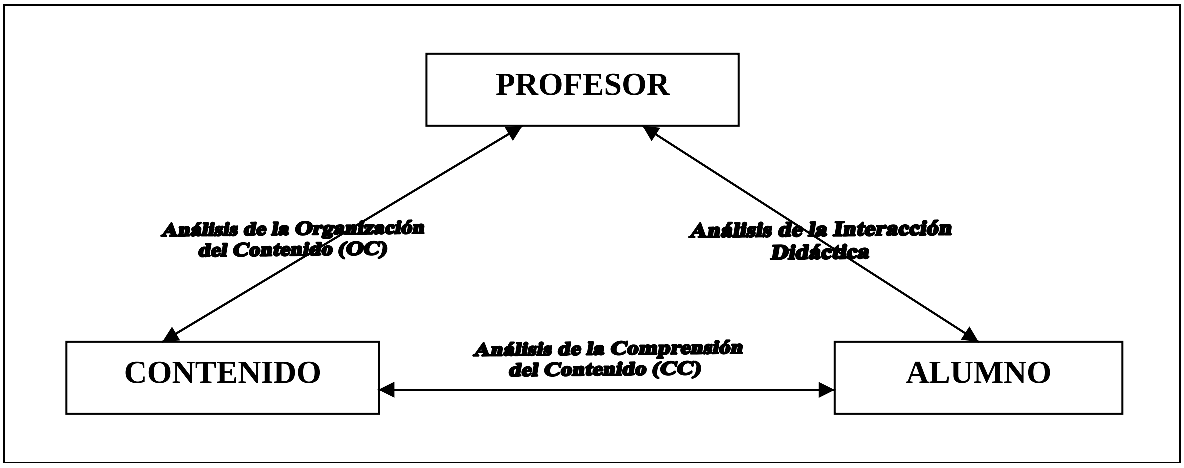
-Triangulación de datos: la objetivación de los datos se realiza mediante el empleo de distintas fuentes de información: documentos escritos individualmente por los alumnos, tablas de resultados elaboradas a partir de tales documentos que permiten tener una visión de conjunto del grupo y anotaciones del cuaderno de clase.

-Triangulación de investigadores: el análisis de los documentos escritos por los alumnos, la elaboración de las tablas de datos y el análisis de la observaciones del Diario de Clase se realiza conjuntamente por el autor principal de este trabajo de investigación (el investigador-docente que la experimentó en el aula) y por su director de tesis.

III.9. Categorías para construir y analizar los datos

La implementación de la propuesta de enseñanza se experimenta con unos alumnos determinados y en un contexto escolar concreto y esta realidad es determinante para la organización de nuestro trabajo. La inserción en el marco curricular es obligada y así nuestro trabajo se encuentra delimitado por: el entorno sociocultural de las personas cuya formación se estudia, el tipo de formación que se propone, las peculiaridades de las personas, medios y recursos que configuran la institución social en la que se produce esta formación, las necesidades formativas a cubrir y el control que se realiza de la formación alcanzada (Rico, 1990a).

En la planificación del currículum consideramos al profesor, los alumnos, el contenido y la institución como componentes o dimensiones del sistema curricular (Rico, 1990b; Romberg, 1992). Considerando el aula como el marco en el que se desarrolla la investigación, identificamos tres componentes interrelacionados: contenidos, alumno y profesor, tal y como muestra el gráfico:



Cuadro III.1. Relaciones entre los tres componentes del triángulo didáctico.

La información que recogimos y los datos que elaboramos en nuestra investigación estarán centrados en la relación entre profesor y contenido y en la relación entre alumno y contenido. Para analizar la primera relación observaremos la Organización del Contenido (OC) por parte del docente-investigador y para estudiar la segunda relación estudiaremos la Comprensión del Contenido (CC) por parte de los estudiantes.

La sistematización de la información obtenida aportará datos sobre las relaciones profesor-contenido y alumno-contenido. Para realizar la construcción y el análisis de dichos datos son necesarias unas categorías o unidades de análisis, que sistematicen la información sobre las relaciones profesor-contenido y alumno-contenido. Estas unidades, que detallamos en el apartado siguiente III.13 de este capítulo, son de dos tipos y se sustentan en las que estableció Escolano (2007) que, a su vez, eran una adaptación de las ya establecidas por Romero (1995) y Castro (1994):

- Unidades de Análisis para la Organización del Contenido (OC): permiten estudiar la organización y la secuenciación de los contenidos que se tratan en el proceso didáctico. Estas unidades sistematizan toda la información sobre las interacciones Profesor-Contenido y la analizan; están fijadas antes de la implementación del proceso instructivo, si bien contemplan las observaciones y las reflexiones que aporta la experimentación realizada por el investigador.
- Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido (CC): permiten estudiar los fenómenos de comprensión del contenido matemático por parte de los alumnos, así como analizar los datos resultantes.

III.10. Fiabilidad y validez del estudio

En el paradigma científico cualitativo la evaluación de la calidad científica de un trabajo de investigación debe también contemplar, como en el cuantitativo, los criterios de fiabilidad y validez del mismo (Janesick, 1994).

Las ideas principales sobre la fiabilidad y validez de nuestra investigación se basan en la reflexión realizada por Romero (1995).

A) Fiabilidad

La fiabilidad es una cualidad de una investigación relativa a la exactitud y a la constancia de la misma. Se dice que una investigación es altamente fiable cuando ésta mide con precisión los resultados obtenidos, es decir, cuando se obtienen los mismos resultados al aplicar los mismos métodos en sucesivas investigaciones realizadas en condiciones semejantes. Cuando es posible, la fiabilidad debe determinarse mediante técnicas que cuantifiquen la correlación entre los resultados de dos investigaciones que se obtienen de repetir dos veces la misma prueba, de dos pruebas equivalentes o de la partición de la prueba en dos mitades.

La reiteración de los trabajos plantea grandes dificultades en las investigaciones de las Ciencias Sociales sobre comportamientos naturales o sobre fenómenos únicos. En estos casos parece inviable medir la fiabilidad de un estudio cualitativo por cuanto la unicidad y la idiosincrasia de lo estudiado imposibilitan la reiteración del proceso, sobre todo cuando se intentan registrar las transformaciones que se producen.

En nuestra investigación sobre una propuesta de enseñanza innovadora del álgebra en el aula, se están analizando las respuestas emitidas por un grupo humano -el investigador-profesor y los alumnos- que evoluciona dinámicamente y, por tanto, no es posible la replicación exacta del estudio. Por tanto la fiabilidad de nuestro trabajo sólo puede venir determinada por la generación, el perfeccionamiento y la validación de unos postulados que hagan innecesaria la réplica de las situaciones. Y en este sentido, y siguiendo los trabajos de Goetz y Lecompte (1988), mejoraremos la fiabilidad tanto interna como externa de nuestra investigación del siguiente modo:

- La fiabilidad interna se mejora con la presencia de varios investigadores que actúan sobre un mismo estudio. Las estrategias seguidas para incrementar la fiabilidad interna son:

    -Utilizar descriptores de bajo nivel inferencial: la transcripción literal o la reproducción escaneada de muchas de las respuestas escritas por los alumnos constituyen el soporte principal para que el lector de esta memoria pueda aceptar, rechazar o modificar las conclusiones extraídas por el observador.

    -Facilitar la revisión por otros investigadores: El director de tesis intervino en el proceso de construcción y análisis de los datos; La presente memoria, como documento público que es, constituye un material idóneo que puede ser revisado por otros expertos.

- La fiabilidad externa se fortalece con la aportación de información relativa a:

    -El status del investigador.

    -Las premisas sobre las que se asienta este trabajo.

    -Los métodos de recogida y análisis de datos.

    -La selección de los alumnos que forman el grupo de estudio, eliminando del estudio aquellos que distorsionarían la experimentación, por desconocimiento del idioma, por problemas psicológicos extremos, etc….

    -La situación y las condiciones sociales en las que se desarrolla la experiencia.

B) Validez

La validez de una investigación es una apreciación del grado de aproximación entre la realidad y los resultados obtenidos.

En el paradigma cuantitativo se diferencian la validez interna -o condiciones de control experimental- y la validez externa -o posibilidad de generalización de datos.

En el paradigma cualitativo también se diferencia ente ambos tipos de validación. En nuestra indagación cualitativa, siguiendo los trabajos de Goetz y Lecompte (1988), acreditaremos la validez tanto interna como externa de nuestra investigación del siguiente modo:

- La validez interna está avalada por:

  -La convivencia del autor principal de este trabajo, en su doble papel como investigador y profesor, con el grupo de alumnos estudiado a lo largo de todas las sesiones de la experimentación. Tal convivencia permite el análisis y la comparación permanente de los datos con el fin de perfeccionar los conceptos.

  -La realización de la investigación en el aula ordinaria, dentro del horario escolar y con el profesor de la asignatura como investigador-docente permite obtener respuestas sin las distorsiones que producirían escenarios más artificiales o laboriosos.

  -El proceso de autovigilancia del investigador que le ha llevado a cuestionarse y a autoevaluarse permanentemente su actuación.

- La validez externa o generalización de los resultados presenta una gran dificultad, tal y como advierte Firestone (1993) que sucede en todas las investigaciones cualitativas.

  En las investigaciones cuantitativas se emplean tres técnicas para la generalización de los resultados obtenidos: la extrapolación desde una muestra a la población a partir de análisis estadísticos, la generalización analítica y la transferencia de un caso a otro. En las investigaciones cualitativas, aunque se han hecho esfuerzos para utilizar las dos primeras técnicas, se usa habitualmente la tercera.

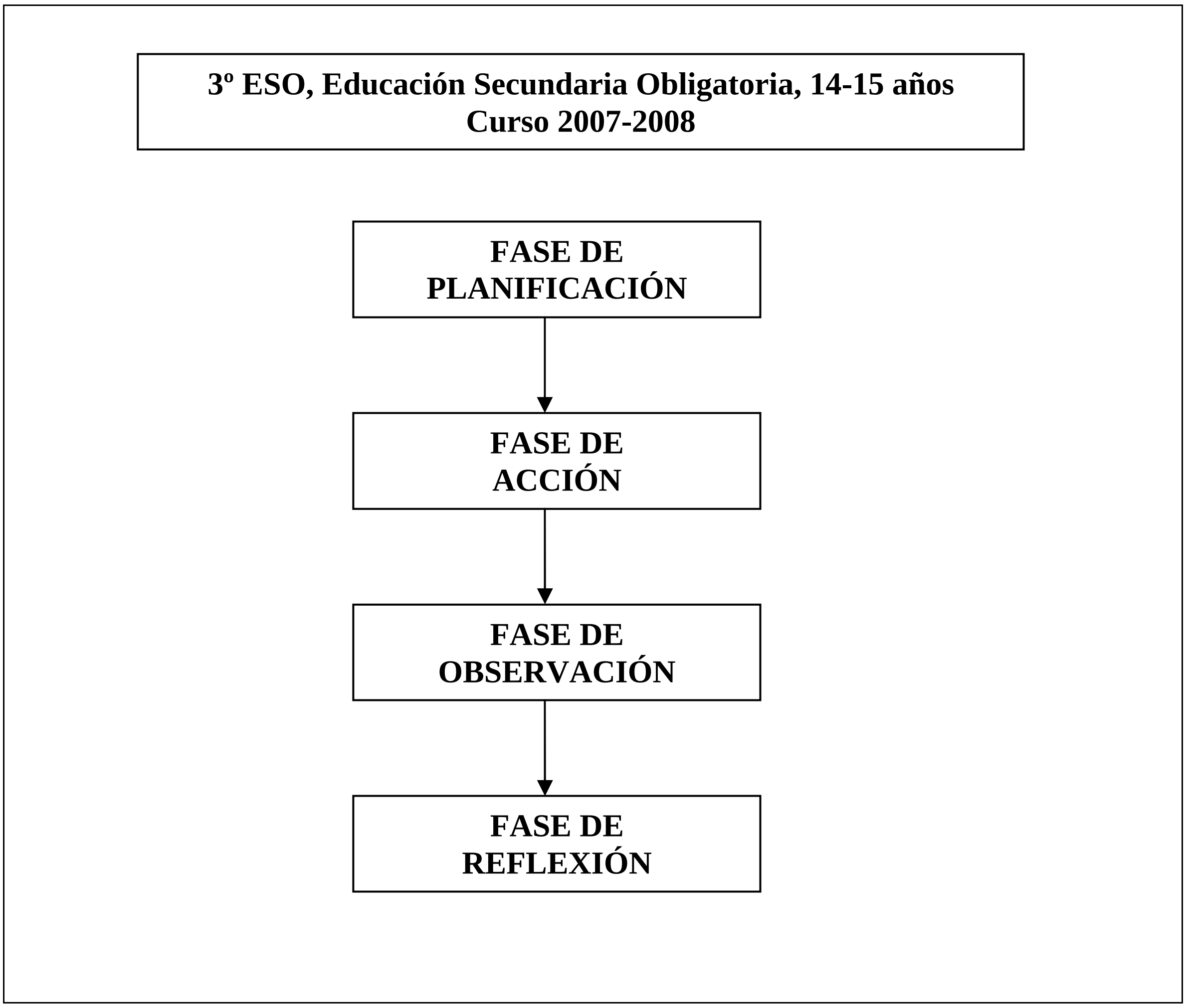
  En el caso de nuestra investigación cualitativa, incrementamos la validez externa mediante la descripción detallada de la situación real de aula en la que se realizó el estudio, de la evolución del proceso de experimentación y de los métodos de recogida y análisis de datos y mediante la presentación de las tablas de resultados y la reproducción de muchos ejemplos significativos de respuestas de los alumnos. Así el investigador cumple con su deber de proporcionar detallada información al lector que quiera utilizar los resultados de este trabajo en otra situación.

  No es factible una generalización de resultados desde la muestra de nuestra investigación a una población general mediante datos estadísticos porque no se ha trabajado con esa intencionalidad -no ha habido una selección representativa de alumnos sino un grupo de alumnos que trabajan en un escenario natural- sino con una finalidad exploratoria. Tampoco parece oportuna la generalización analítica de los resultados por el carácter exploratorio de la investigación.

III.11. Esquema general del diseño

Para resumir el diseño de la experimentación que ya hemos detallado en el apartado III.2, hemos elaborado un esquema general de nuestra propuesta didáctica. En el mismo figura nuestro esquema de Investigación-Acción construido a partir del esquema propuesto por Elliot (citado por Mcniff, 1988) en el que se especifican las ideas básicas de las etapas cíclicas de la metodología de investigación.

El esquema siguiente muestra la síntesis de todo el proceso de investigación de nuestra propuesta curricular alternativa de enseñanza del lenguaje algebraico dirigida al nivel educativo de 3º de ESO (14-15 años). Así explicitamos una estructura que, en determinados aspectos, permaneció siempre implícita a lo largo de la realización de todo el trabajo de indagación.



Cuadro III.2. Esquema general de la metodología de investigación.

III.12. Unidades de análisis

En el apartado anterior III.9, mencionamos las categorías para la construcción, análisis e interpretación de los datos, estructuradas como un sistema para codificar y sistematizar la información obtenida. Presentamos ahora el sistema de categorías o unidades de análisis que vamos a utilizar en nuestro trabajo y detallaremos cada una de esas unidades de acuerdo con la tipología preestablecidas.

III.12.1. Unidades de análisis para la Organización del Contenido

Nuestro objetivo es mejorar la comprensión del lenguaje algebraico entre los alumnos de tercero de Educación Secundaria Obligatoria. Proponemos tres focos de investigación:

- El diferente significado de las letras según la expresión algebraica en la que aparecen (Primer Foco).
- La comprobación de las soluciones (Segundo Foco).
- El fortalecimiento de las conexiones entre el lenguaje natural o materno y el lenguaje algebraico en ambos sentidos (Tercer Foco).

III.12.1.1. Unidades OC para el Primer Foco

En este foco, nuestro objetivo es que el estudiante reflexione sobre los diferentes papeles que puede jugar una letra según se encuentre en una expresión algebraica abierta, en una ecuación o a continuación de un número como abreviatura de una unidad de medida.

Presentamos las distintas Unidades de análisis sobre este primer Foco, desglosadas en los siguientes puntos:

- **Punto 1: Las letras como variables, incógnitas y abreviaturas (OC. I)**

  En nuestro trabajo de investigación consideramos:

  -El significado de las letras como variables en las expresiones algebraicas abiertas tales como los polinomios, las fórmulas geométricas y las ecuaciones de las rectas.

  -El significado de las letras como incógnitas en las ecuaciones.

  -El significado de las letras como abreviatura de unidad en la expresión de las soluciones de un problema aritmético o algebraico.

  En esta unidad explicitamos la relación existente entre el significado de las letras y la expresión matemática en la que éstas aparecen.

- **Punto 2: Resolución de las ecuaciones por tanteo aritmético (OC. II)**

  Cuando se resuelven las ecuaciones -compatibles determinadas o compatibles indeterminadas o incompatibles- por tanteo aritmético, se reflexiona explícitamente sobre si determinados números cumplen o no cumplen las condiciones indicadas en la ecuación.

  En esta unidad utilizamos la resolución de ecuaciones mediante el tanteo aritmético para favorecer la comprensión del concepto de solución de una ecuación y por tanto para favorecer la comprensión del concepto de ecuación.

- **Punto 3: Significado de la notación algebraica (OC. III)**

  Cuando se está trabajando con una expresión algebraica es necesario conocer ciertas convenciones -de carácter específicamente algebraico- sobre qué operaciones y qué números no son explicitados habitualmente (el 1 no se escribe delante de paréntesis, ni en los denominadores, ni como exponente, el punto del producto sólo se escribe entre número y número,...)

  En esta unidad incluimos las convenciones sobre qué operaciones y qué números no son explicitados habitualmente en las expresiones algebraicas.

- **Punto 4: Reglas para despegar y operar en las ecuaciones (OC. IV)**

  Para resolver una ecuación se utilizan ciertas reglas (de carácter algebraico) para despejar, esto es, para pasar los términos al otro lado de la igualdad y se usan ciertas reglas (de carácter aritmético y lógico) para operar, esto es, para manipular paréntesis, números enteros, números fraccionarios y para resolver los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante los métodos de igualación, de sustitución y de reducción.

  En esta unidad incluimos las reglas que se utilizan para despejar y para operar en la resolución de ecuaciones lineales y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante el método algebraico.

III.12.1.2. Unidades OC para el Segundo Foco

En este foco, dedicado a la comprobación de la solución, nuestros objetivos son:

-Incorporar la comprobación semántica (o sustitución de la solución en la situación real descrita en el enunciado) como la parte final de un proceso de resolución bien acabado.

-Utilizar la comprobación semántica como recurso para que el estudiante entienda las relaciones establecidas entre los números -conocidos y desconocidos- del enunciado y que se basan en la realidades (físicas, económicas, geométricas…) descritas en dichos enunciados.

-Incorporar la comprobación sintáctica (o sustitución de la solución en la una ecuación para ver si se verifica la igualdad) como instrumento para verificar si los cálculos son correctos.

-Utilizar la comprobación sintáctica como recurso para la comprensión de los conceptos de ecuación, de incógnita y de solución de una ecuación.

-Incorporar el uso del tanteo aritmético como recurso para la resolución y la comprensión de las situaciones problemáticas reales descritas en los enunciados de los problemas algebraicos.

Presentamos las distintas Unidades de Análisis sobre este Segundo Foco, desglosadas en los siguientes puntos:

- **Punto 5: Comprobación semántica (OC. V)**

  Como ya dijimos, por comprobación semántica entendemos la sustitución de las soluciones en las condiciones reales de los enunciados de los problemas algebraicos que se hayan resuelto.

  Las unidades de medida de los datos (conocidos o desconocidos) de un problema es lo que permite la conexión de los números con la realidad (física o económica). Y dicha realidad es la que define que tipo de operaciones (suma, resta, producto,…) se han de establecer entre los datos del enunciado y las soluciones del problema.

  En esta unidad utilizamos la comprobación de la solución en el enunciado como la parte final de un trabajo bien hecho en la resolución de una situación problemática real, y como recurso didáctico que favorece la comprensión de las relaciones aritméticas reales de las que se habla en el enunciado.

- **Punto 6: Comprobación sintáctica (OC. VI)**

  Como ya dijimos, por comprobación sintáctica entendemos la sustitución de las soluciones numéricas halladas en las ecuaciones, bien o mal planteadas, de un problema algebraico. Esta comprobación sintáctica sólo permite asegurarse de que no se han cometido errores al despegar o al operar cuando se han resuelto las ecuaciones.

  En esta unidad utilizamos la comprobación de la solución en las ecuaciones como instrumento que sirve para verificar la corrección de los cálculos de resolución, y como recurso didáctico que favorece la comprensión del significado de solución de una ecuación y, por tanto, para favorecer la comprensión del significado de ecuación.

- **Punto 7: Resolución de los problemas por tanteo aritmético (OC. VII)**

  Por resolución de los problemas por tanteo aritmético entendemos aquella que se basa en acotar –más o menos- el conjunto de números candidatos a ser solución e ir sustituyendo dichos candidatos en la situación real que describe el enunciado hasta hallar aquel número que cumple todas las condiciones de dicho enunciado.

En esta unidad incluimos todo método, más o menos organizado, del tipo "ensayo-error" que se utilice para resolver aritméticamente un problema algebraico.

III.12.1.3. Unidades para el Tercer Foco

En este foco, dedicado al fortalecimiento de las conexiones entre el lenguaje natural o materno y el lenguaje algebraico en ambos sentidos, nuestro objetivo es:

-Que el alumno plantee los problemas de una forma semántica, esto es, basándose en las relaciones que entre las cantidades conocidas y desconocidas (ambas con unidades de medida) se establecen en las situaciones reales que son descritas en los enunciados de los problemas de álgebra.

-Que el alumno invente enunciados de problemas de álgebra en unos contextos predeterminados. Unas veces tal invención deberá ser coherente con unas ecuaciones que le proporcionemos. Otras veces, no le proporcionaremos ecuación alguna y será el estudiante el que tendrá que analizar qué ecuaciones está describiendo en los problemas que inventa.

Presentamos las distintas Unidades de Análisis sobre este Tercer Foco, desglosadas en los siguientes puntos:

- **Punto 8: Planteamiento de ecuaciones (OC. VIII)**

  Por planteamiento de ecuaciones entendemos la formulación de los enunciados de los problemas algebraicos como ecuaciones, que expresan las relaciones aritméticas reales existentes entre las cantidades conocidas y desconocidas de las que se habla en dichos enunciados. Las unidades de medida de los datos (conocidos o desconocidos) de un problema es lo que permite la conexión de los números con la realidad (física o económica). Y dicha realidad es la que define que tipo de operaciones (suma, resta, producto,…) se han de establecer entre los números y las incógnitas de las ecuaciones.

  En esta unidad utilizamos el planteamiento de las ecuaciones para la expresión simbólica de las relaciones aritméticas establecidas por la realidad descrita en los enunciados de los problemas..

- **Punto 9: Invención de enunciados (OC. IX)**

  Por tal invención de enunciados entendemos la redacción de enunciados de problemas algebraicos que expresan las relaciones indicadas en las ecuaciones algebraicas que les proporcionamos.

En *esta Unidad utilizamos la invención para dotar de un significado real a las relaciones expresadas simbólicamente mediante ecuaciones.*

De este modo, quedan definidas 13 Unidades de análisis para la Organización del Contenido (OC), que están referidas a los tres focos de la investigación y que resumimos mediante el cuadro siguiente:

Organización de los Contenidos (OC)	
Primer Foco de investigación	**OC. I.** Las letras como variables, como incógnitas y como abreviaturas. **OC. II.** Resolución de las ecuaciones por tanteo aritmético. **OC. III.** Significado de la notación algebraica. **OC. IV.** Reglas de despejar y de operar en las ecuaciones.
Segundo Foco de investigación	**OC. V.** Comprobación semántica. **OC. VI.** Comprobación sintáctica. **OC. VII.** Resolución de los problemas por tanteo aritmético.
Tercer Foco de investigación	**OC. VIII.** Planteamiento semántico de ecuaciones. **OC. IX.** Invención de enunciados.

Cuadro III.3. Unidades de análisis para la Organización del Contenido (OC).

III.12.2. Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido

En este trabajo utilizamos el término de comprensión en el sentido de Hiebert y Carpenter (1992), que se interpreta como ligar los nuevos conocimientos a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes. Estas Unidades de Análisis se han elaborado para indagar sobre la comprensión de los alumnos sobre los contenidos algebraicos, que se han enumerado anteriormente y cuya concreción se ha detallado mediante las Unidades de Análisis para la Organización del Contenido (Unidades OC). A continuación describimos estas Unidades de Análisis de Comprensión del Contenido (Unidades CC), desglosadas en tres apartados, que se corresponden con los tres Focos de investigación.

III.12.2.1. Unidades CC para el Primer Foco

En este foco de investigación se aborda el hecho de que las letras pueden desempeñar diferentes papeles en matemáticas según sea la expresión matemática en la que aparecen. En concreto nos centramos en que las letras pueden ser:

variables que pueden tomar valores cualesquiera, incógnitas a calcular en las ecuaciones algebraicas y abreviaturas de unidades de medida en las cantidades que aparecen en los enunciados y las soluciones de los problemas.

Para indagar sobre la comprensión de los estudiantes sobre estos aspectos hemos elaborado unas Unidades de análisis de Comprensión de Contenidos, que denominaremos genéricamente con las siglas CC, que detallamos a continuación.

- **1. Diferentes significados de las letras**

  El punto de partida de nuestro trabajo es definir cuáles son los diferentes papeles que juegan las letras según sea la expresión matemática en la que aparecen. Nosotros tenemos los siguientes propósitos:

  -Explorar si los alumnos asocian el significado de la letra como variable a la ausencia o a la presencia de un signo = en la expresión algebraica.

  -Estudiar cómo gestionan el uso de la terminología variable-incógnita-abreviatura.

  Para ello, indicamos las Unidades de Comprensión del Contenido (CC) correspondientes a este apartado mediante el cuadro siguiente:

Criterios de valoración de las Unidades CC	Argumentaciones sobre	Terminología utilizada:
Interpretaciones de las letras como valores cualesquiera. **CC. I**	Las letras de polinomios. **CC. I. 1.1** Las letras de las fórmulas geométricas. **CC. I. 1.2** Las letras de las fórmulas físicas. **CC. I. 1.3** Las letras de las identidades. **CC. I. 1.4** Las de la ecuación de la recta. **CC. I. 1.5**	Variable. **CC. I. 2.1** Variable. **CC. I. 2.2** Variable. **CC. I. 2.3** Variable. **CC. I. 2.4** Variable. **CC. I. 2.5**
Interpretaciones de las letras como valores concretos que verifican la igualdad. **CC. II**		Incógnita. **CC. II. 2**
Interpretaciones de las letras como abreviaturas de unidades de medida o de sustantivos. **CC. III**	Las abreviaturas de las unidades de medida. **CC. III. 1.1** Las abreviaturas de sustantivos. **CC. III. 1.2**	Unidades de medida. **CC. III. 2.1** Sustantivos. **CC. III. 2.2**

Cuadro III.4. Unidades de Análisis de Comprensión de Contenido CC. I, CC. II y CC. III.

- **2. Tanteo aritmético para la resolución de las ecuaciones**

  Nos centramos en cómo los estudiantes utilizan el tanteo aritmético para comprender cuáles son las soluciones de las ecuaciones algebraicas. Por ello, nuestro objetivo es:

  -Explorar cómo los estudiantes utilizan e interpretan el método aritmético de tanteo para hallar la única solución existente en las ecuaciones compatibles determinadas.

  -Estudiar si los alumnos utilizan el método aritmético de prueba-error para comprender que las ecuaciones incompatibles no tienen solución, y que las compatibles indeterminadas admiten cualquier número real como solución.

  Para ello, hemos realizado el cuadro siguiente:

Criterios de valoración de las Unidades CC	Argumentaciones sobre:	Terminología utilizada:
Tanteo aritmético en ecuaciones compatibles determinadas. **CC. IV**	Evaluación numérica de expresiones algebraicas. **CC. IV. 1**	Prueba-error/ Tanteo aritmético **CC. IV. 2**
Interpretación de las ecuaciones incompatibles. **CC. V**	Evaluación numérica de la inexistencia de soluciones numéricas. **CC. V. 1**	Incompatible/ No tiene solución **CC. V. 2**
Interpretación de las ecuaciones compatibles indeterminadas. **CC. VI**	Evaluación numérica de que todos los números son solución. **CC. VI. 1**	Compatible indeterminada/ Todo número es solución **CC. VI. 2**

Cuadro III.5. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido CC. IV, CC. V y CC. VI

- **3. Significado de la notación algebraica**

  En este punto nos centramos en ciertas convenciones notacionales que se utilizan habitualmente en las expresiones algebraicas, y cuyo dominio es necesario para la correcta interpretación y manipulación de las mismas. De esas convenciones destacamos, por su trascendencia, la invisibilidad del número 1 en denominadores, coeficientes, exponentes y como factor delante de un paréntesis; la invisibilidad del signo “por” del producto cuando uno de los factores es una letra o es un paréntesis; y la equivalencia de la existencia de una barra de fracción a la existencia de un paréntesis.

  Nuestro objetivo será explorar si los alumnos entienden el significado de la notación algebraica con la que operar, especialmente en lo referido a la invisibilidad del 1 y del signo “por” del producto. Por ello hemos realizado el siguiente cuadro:

Criterios de valoración de las Unidades CC	Argumentaciones sobre:
Invisibilidad del número 1 en determinados objetos matemáticos **CC. VII**	Invisibilidad del 1 en los denominadores. **CC. VII. 1.1** Invisibilidad del 1 en los coeficientes. **CC. VII. 1.2** Invisibilidad del 1 en los exponentes. **CC. VII. 1.3** Invisibilidad del 1 delante de los paréntesis. **CC. VII. 1.4**
Invisibilidad del punto del producto **CC. VIII**	Invisibilidad del punto del producto si uno de los factores es una letra. **CC. VIII. 1.1** Invisibilidad del punto del producto si uno de los factores es un paréntesis. **CC. VIII. 1.2**
Equivalencia de la barra de fracción a un paréntesis **CC. IX**	

Cuadro III.7. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido CC. IX, CC. X y CC. XI

- **4. Reglas de despejar y operar en las ecuaciones**

Nosotros nos interesamos por la capacidad de los estudiantes para resolver las ecuaciones algebraicas utilizando los procedimientos analíticos de resolución que habitualmente se utilizan. Tales procedimientos analíticos los dividimos en dos grupos:

-Reglas utilizadas para despejar: son las que indican cómo las expresiones algebraicas pasan al otro lado de la igualdad en las ecuaciones.

-Reglas utilizadas para operar: son las que indican cómo se realizan las operaciones con paréntesis, las operaciones entre números enteros, las operaciones entre fracciones, el orden de prioridad de operaciones y las técnicas de operación de sistemas por igualación, sustitución y reducción.

Nuestro objetivo es:

-Explorar si los estudiantes dominan las reglas algebraicas que se utilizan para despejar en las ecuaciones.

-Estudiar si los estudiantes dominan las reglas aritméticas que se utilizan para operar con los paréntesis, los denominadores, con los números enteros; y además estudiar si los alumnos dominan las técnicas de tipo aritmético-lógico que se utilizan en los métodos de resolución de sistemas por igualación, sustitución y reducción.

Por ello, hemos realizado el siguiente cuadro:

Criterios de valoración de las Unidades CC	Argumentaciones sobre:	Terminología utilizada:
Reglas usadas para despejar en las ecuaciones. **CC. X**	Regla de despejar para lo que está sumando. **CC. X. 1.1**	Lo que está sumando pasa restando. **CC. X. 2.1**
	Regla de despejar para lo que está restando. **CC. X. 1.2**	Lo que está restando pasa sumando. **CC. X. 2.2**
	Regla de despejar para lo que está multiplicando. **CC. X. 1.3**	Lo que está multiplicando pasa dividiendo. **CC. X. 2.3**
	Regla de despejar para lo que está dividiendo. **CC. X. 1.4**	Lo que está dividiendo pasa multiplicando. **CC. X. 2.4**
Reglas usadas para operar en las ecuaciones. **CC. XI**	Aplicación de la propiedad distributiva delante de paréntesis. **CC. XI. 1.1**	
	Reglas de operaciones con números enteros. **CC. XI. 1.2**	-Reglas de la suma de números enteros. **CC. XI. 2.2.1** -Reglas de los signos para el producto y el cociente. **CC. XI. 2.2.2**
	Reglas de operaciones con números fraccionarios. **CC XI 1.3**	-Reducción a mínimo común denominador. **CC. XI. 2.3.1** -Eliminación de denominadores. **CC. XI. 2.3.2**
	Prioridad de operaciones. **CC XI 1.4**	
	Métodos de resolución de sistemas. **CC XI 1.5**	-Resolución por igualación. **CC. XI. 2.5.1** -Resolución por sustitución. **CC. XI. 2.5.2** -Resolución por reducción. **CC. XI. 2.5.3**

Cuadro III.6. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido CC. VII y CC. VIII

III.12.2.2. Unidades CC para el Segundo Foco

En este foco de investigación se pretende que se comprendan las relaciones aritméticas reales que se establecen entre las cantidades de los enunciados a través de la comprobación de las soluciones halladas.

1. Comprobación semántica.

La comprobación semántica -de la solución en el enunciado- obliga a relacionar las cantidades explicitadas en el enunciado y las cantidades calculadas en el proceso de resolución algebraico. Tales relaciones se establecen según sea el contexto real del que se habla en el enunciado del problema.

Los siguientes puntos resumen nuestros propósitos:

-Explorar si los alumnos son conscientes de que lo importante es que la solución lo sea del texto del enunciado, no el que lo sea de unas ecuaciones que pueden estar bien o mal planteadas.

-Conocer si los alumnos asumen la comprobación semántica como la parte final de la resolución algebraica que les asegure de la respuesta del problema es la correcta.

Para ello, hemos realizado el cuadro siguiente:

Criterios de valoración de las Unidades CC	Argumentaciones utilizadas sobre:	Terminología utilizada:
Comprobación semántica. **CC. XII**	Comprobación, por sustitución de las soluciones en el enunciado. **CC. XII. 1**	Problema bien resuelto. **CC. XII. 2**

Cuadro IV.7 Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido CC. XII

2. Comprobación sintáctica.

La comprobación sintáctica -de la solución en las ecuaciones- obliga a relacionar aritméticamente los números conocidos y los desconocidos de las ecuaciones. Tales relaciones se establecen según los símbolos operacionales que aparecen en las ecuaciones.

Los siguientes puntos resumen nuestros propósitos:

-Explorar si los alumnos son conscientes de que la comprobación sintáctica sólo asegura que las reglas de despejar y de operar han sido bien aplicadas en el proceso de resolución de las ecuaciones y nada informa sobre si el problema ha sido bien o mal resuelto.

-Conocer si los alumnos asumen la comprobación sintáctica como parte de la comprobación parcial del proceso de resolución de un problema algebraico.

Para ello, hemos realizado el cuadro siguiente:

Criterios de valoración de las Unidades CC	Argumentaciones utilizadas sobre:	Terminología utilizada:
Comprobación sintáctica. **CC. XIII**	Comprobación de las soluciones de una ecuación en la ecuación **CC. XIII. 1.1**	Ecuación bien resuelta. **CC. XIII. 2.1**
	Comprobación de las soluciones de un problema en la ecuación planteada. **CC. XIII. 1.2**	Ecuación bien resuelta. **CC. XIII. 2.2**

Cuadro IV.8. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido CC. XIII

3. Resolución aritmética de los problemas algebraicos.

La resolución aritmética de los problemas algebraicos obliga a reflexionar sobre cómo las cantidades (conocidas o desconocidas) que aparecen involucradas en la situaciones reales descritas en los enunciados se relacionan entre sí mediante las operaciones de suma, resta, producto, división y el signo de igualdad. Tales relaciones vienen determinadas por el mundo real, esto es, por las unidades de medida de las cantidades.

El siguiente punto resume nuestro propósito: Estudiar si los alumnos son capaces de resolver mediante tanteo aritmético (un método de prueba-error) ciertos problemas algebraicos que no son resolubles mediante el habitual método de plantear y resolver unas ecuaciones.

Atendiendo a lo anterior hemos elaborado las siguientes Unidades de Comprensión de Contenidos:

Criterios de valoración de las Unidades CC	Argumentaciones utilizadas sobre:	Terminología utilizada:
Resolución aritmética de los problemas algebraicos. **CC. XIV**	Tanteo aritmético en la situación problemática real **CC. XIV.1**	

Cuadro IV.6 Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido CC. XIV.

III.12.2.3. Unidades CC para el Tercer Foco

En este foco de investigación estudiamos si los estudiantes son capaces de traducir del lenguaje natural o materno al lenguaje algebraico en ambos sentidos –planteamiento de ecuaciones e invención de problemas-, e intentamos fortalecer dicha traducción en ambos sentidos.

Atendiendo a lo anterior hemos elaborado las siguientes Unidades de Comprensión de Contenidos:

1. Planteamiento de ecuaciones.

El planteamiento de ecuaciones a partir de un enunciado dado se dice semántico si las letras son interpretadas como incógnitas (sustitutos de números concretos desconocidos), los signos operacionales como indicadores de operaciones aritméticas y el signo = como un símbolo de igualdad entre cantidades.

Sin embargo, dicho planteamiento se dice sintáctico si los símbolos de las ecuaciones son interpretadas como abreviaturas de palabras (las ecuaciones son interpretadas como la repetición del texto del enunciado pero escrito abreviadamente) o si el signo = es interpretado como un signo $\rightarrow$ de correspondencia entre subconjuntos de objetos. Respecto a este tipo de planteamiento hay que señalar que:

> -Permite convertir muchos de los problemas algebraicos en ecuaciones formalmente correctas que conducen a las soluciones correctas del problema, sin que el alumno comprenda que lo planteado es una relación entre cantidades en una situación problemática real.
>
> -Lleva a cometer lo que los investigadores anglosajones llaman los errores de inversión para la suma, para la resta, para el producto y para el cociente en los problemas algebraicos de comparación entre cantidades.
>
> -No permite plantear directamente las ecuaciones de aquellos problemas que requieren una elaboración de los datos del enunciado.

Los siguientes puntos resumen nuestros propósitos en lo que al planteamiento de ecuaciones se refiere:

> -Explorar si los estudiantes plantean correctamente no sólo aquellos problemas en los que su traducción semántica y sintáctica coinciden (y que por tanto conducen a planteamientos que son formalmente correctos si los símbolos algebraicos son interpretados como abreviaturas de palabras), sino también aquellos problemas que sólo pueden ser planteados de forma formalmente correcta sólo si se ha realizado una traducción semántica, pues su traducción sintáctica conduce a cometer el error de inversión para la suma, la resta, el producto o el cociente.
>
> -Averiguar si los alumnos reaccionan adecuadamente, es decir, si revisan la formulación de las ecuaciones o intentan la resolución de la situación problemática real mediante tanteo aritmético, cuando el planteamiento algebraico de un problema no les lleva a la solución correcta.

Para ello, hemos realizado el cuadro siguiente:

Criterios de valoración de las Unidades CC	Argumentaciones utilizadas sobre:	Terminología utilizada:
Interpretación de los símbolos de las ecuaciones como incógnitas, signos de operaciones aritméticas o de igualdad entre cantidades. **CC. XV**	Manipulación de las unidades de medida que aparecen en el enunciado **CC. XV. 1.1** Relación aritmética entre las cantidades que aparecen en el enunciado **CC. XV. 1.2**	Planteamiento semántico **CC. XV. 2.2**
Interpretación de las letras y operaciones de las ecuaciones como palabras abreviadas o del = como signo $\rightarrow$ de correspondencia entre cantidades. **CC. XVI**	Error de inversión para la suma. **CC. XVI. 1.1** Error de inversión para la resta. **CC. XVI. 1.2** Error de inversión para el producto. **CC. XVI. 1.3** Error de inversión para el cociente. **CC. XVI. 1.4**	Planteamiento sintáctico. **CC. XVI. 2**

Cuadro IV.9. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido CC. XV y CC. XVI

2. Invención de enunciados.

La invención de enunciados siempre la planteamos en un contexto real previamente delimitado -granjas, librerías, etc-. Se trata de evitar la redacción de enunciados que consistan sólo en una descripción literales de números y de operaciones matemáticas –suma, resta, producto, etc-. En otras palabras, queremos que escriban enunciados que impliquen una comprensión de relaciones entre cantidades en contextos reales –biológicos, económicos, etc-.

Una vez delimitado el contexto real del problema les proponemos a los alumnos dos tipos de invención enunciados:

-Enunciados que están condicionados por unas ecuaciones que les proporcionamos.

-Enunciados que no están condicionados por ecuación alguna.

En ambos casos nuestros objetivos son:

-Explorar si los alumnos perciben la traducción desde el lenguaje natural o materno al lenguaje algebraico como la expresión simbólica de las relaciones aritméticas reales de las que se habla en el enunciado del problema.

-Analizar si los alumnos interpretan unas ecuaciones dadas como la expresión de una situación real expresable mediante el lenguaje natural o materno.

Para ello, hemos realizado el cuadro siguiente:

Criterios de valoración de las Unidades CC	Argumentaciones utilizadas sobre:	Terminología utilizada:
Invención de enunciados en un determinado contexto. **CC. XVII**	Invención de enunciados en un determinado contexto que están condicionados por ecuaciones dadas previamente. **CC. XVII. 1.1**	Enunciados condicionados por ecuaciones que nosotros les proporcionamos. **CC. XVII. 2.1**
	Invención de enunciados en un determinado contexto que no están condicionados por ecuaciones dadas previamente. **CC. XVII. 1.2**	Enunciados que no están por ecuación alguna. **CC. XVII. 2.2**

Cuadro IV.10 Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido CC. XVII

III.13. Organización de la información

En la primera parte de esta memoria de investigación hemos abordado los siguientes aspectos:

-En el Capítulo I “El Problema de Investigación” planteamos los objetivos de nuestra investigación y realizamos amplio un estudio bibliográfico sobre el estado del problema en el mundo de la Didáctica de las Matemáticas.

-En el Capítulo II “El Álgebra Escolar” estudiamos cómo ha sido en el pasado y cómo es en la actualidad el estado del problema de investigación que nos ocupa en el mundo de la Praxis escolar de nuestro país.

-En este Capítulo III “La Metodología de Investigación” hemos expuesto que la metodología en torno a la cual se organiza nuestra labor es la de la Investigación-Acción (que se desarrolla mediante las Fases de Planificación, de Acción, de Observación y de Análisis) y hemos detallado los tres focos de investigación, así como las unidades de medida de los datos de experimentación.

Concluida esta primera parte previa de fundamentación, abrimos –en los próximos capítulos IV, V y VI- una segunda parte que abarca el diseño de la propuesta curricular alternativa, su experimentación en el aula, la observación e interpretación de los resultados obtenidos y la reflexión sobre la totalidad de nuestra labor de investigación. Así tendremos que:

-El Capítulo IV desarrollará las Fases de Planificación y de Acción.

-El Capítulo V estará dedicado a la Fase de observación.

-El último Capítulo VI, con el que cerramos esta memoria, se centrará en la Fase de reflexión.

Capítulo IV:

Fases de planificación y de acción

IV.1. Introducción

En la parte teórica de esta memoria de la tesis doctoral, los anteriores capítulos I, II y III, hemos expuesto, respectivamente: el problema de investigación (la mejora de la enseñanza del lenguaje algebraico en la Educación Secundaria Obligatoria) y el estado de la cuestión en la investigación de la Didáctica de la Matemática; el análisis de contenidos del álgebra escolar; la metodología de investigación elegida (la Investigación-Acción).

Ahora, en la parte práctica (capítulos IV, V y VI) de la memoria, procedemos a desarrollar las cuatro fases del método de Investigación-Acción. En este Capítulo IV abordamos las dos primeras fases (planificación y acción), dejando los capítulos V y VI para las respectivas fases de observación y reflexión.

Así, en la primera parte de este Capítulo IV, explicamos cómo esperamos mejorar la enseñanza del lenguaje algebraico en 3º de ESO (14-15 años) mediante la articulación de una propuesta curricular alternativa, que tenga en cuenta los condicionantes temporales que su experimentación, en el entorno natural de un centro educativo, nos impone. También, detallamos la programación didáctica de las actividades que vamos a desarrollar en el aula, finalizando esta Fase de planificación con el calendario previsto para la implementación de la propuesta en el aula.

En la Fase de acción, a la que dedicamos la segunda parte de este Capítulo IV, estudiamos las características del centro educativo y del grupo de alumnos en el que experimentamos nuestra propuesta curricular. El centro educativo fue el Instituto de Educación Secundaria "Goya" de la ciudad de Zaragoza durante el curso 2007-2008 y el grupo de alumnos estaba constituido por 33 adolescentes de 3º ESO-A y 3º ESO-C.

Terminamos este capítulo IV contrastando el calendario que fue finalmente implementado en el aula en la Fase de acción, con el inicialmente previsto en la planificación de la propuesta curricular.

IV.2. Fase de planificación

En este apartado IV.2, concretamos: los objetivos de la propuesta curricular alternativa que experimentaremos en el aula; el curso al que va dirigida; las limitaciones temporales que imponemos a la extensión de la propuesta para perturbar lo menos posible la dinámica del centro educativo en el que va a realizarse la experimentación; la programación didáctica de las actividades y de las pruebas de tal propuesta.

Terminamos, como ya adelantamos, presentando el calendario previsto para la experimentación de la propuesta en el aula.

IV.2.1. Necesidad de una propuesta innovadora

El punto de partida que motivó nuestra labor de investigación fue las dificultades que observábamos, curso tras curso, cuando los alumnos de secundaria tenían que plantear lo que a los profesores nos parecen sencillos problemas de álgebra.

Profundizando un poco más, constatamos que el álgebra es un lenguaje difícil que la mayoría de los alumnos de secundaria no manejan de manera comprensiva, lo que se traduce en unos bajos rendimientos, tanto en la resolución de ecuaciones sencillas como en el planteamiento de problemas que no permiten una traducción literal -palabra a palabra- de los textos del lenguaje natural o materno como ecuaciones algebraicas. Todo lo anterior viene avalado por:

- La amplia bibliografía dedicada al álgebra de la enseñanza secundaria que existe en el mundo de la investigación sobre la Didáctica de las Matemáticas y que hemos citado en el Capítulo I.

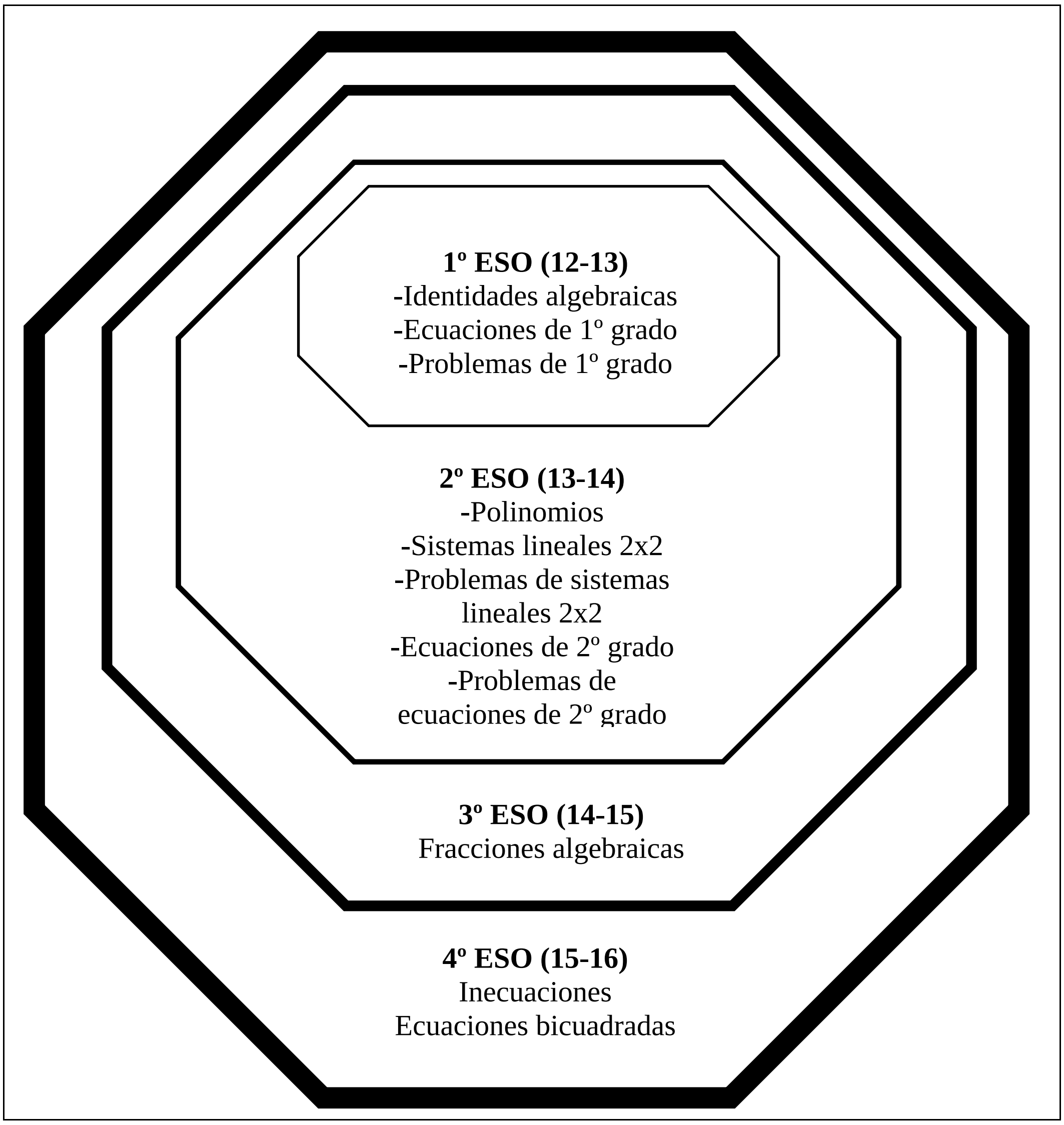
- La amplia experiencia docente respectiva de los dos componentes del equipo investigador, tutorando y director de tesis; el primero como profesor de alumnos de secundaria en diversos institutos de la provincia de Zaragoza, y el segundo como formador de futuros maestros y profesores en la Facultades de Educación y de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

Cuanto más analizábamos tales dificultades, más nos convencíamos de que era necesario elaborar una propuesta que mejorase la enseñanza del lenguaje algebraico que actualmente se suele impartir en el aula.

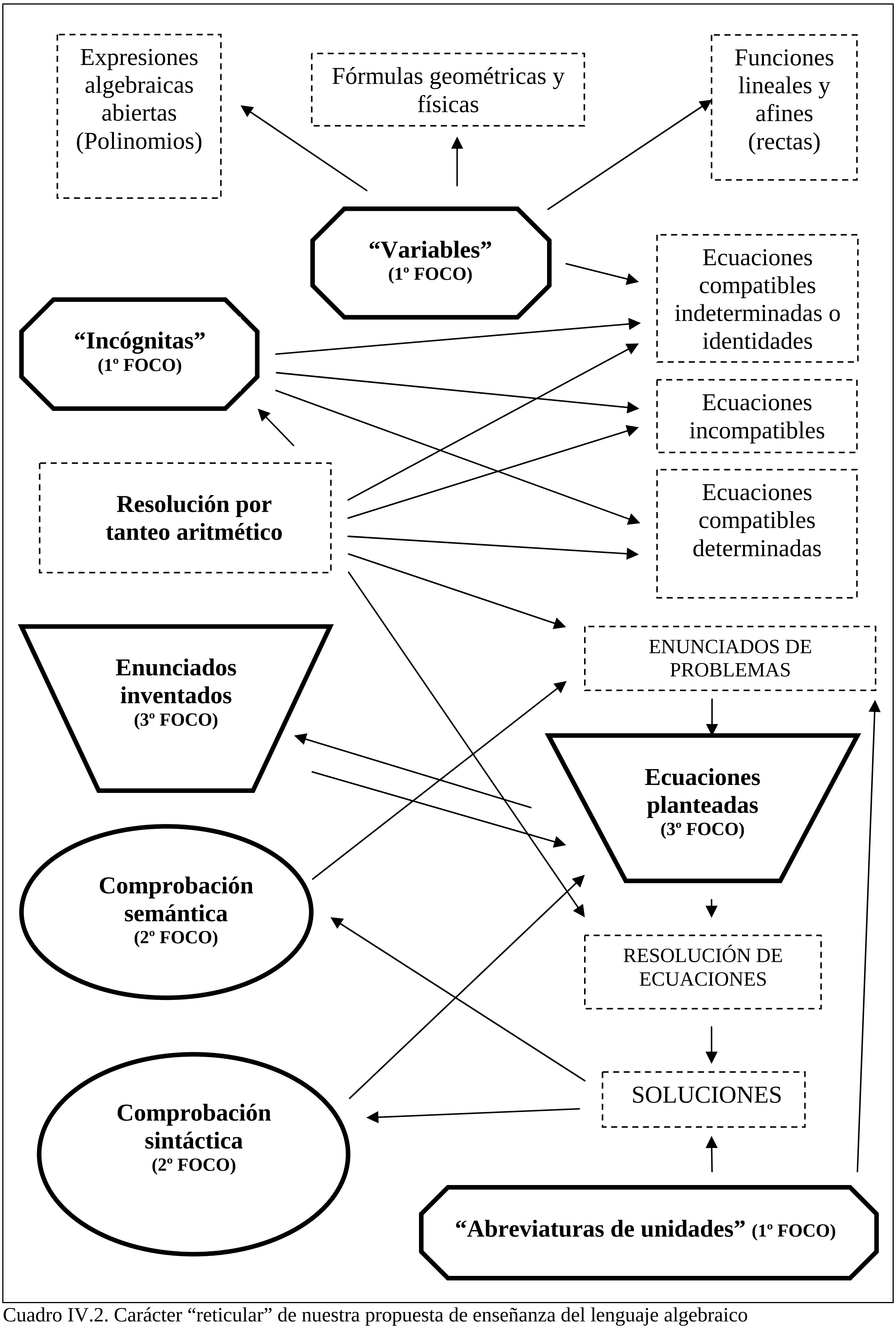
IV.2.2. Objetivo principal

El objetivo principal de nuestra investigación es la elaboración y experimentación de una propuesta innovadora de enseñanza que mejore la comprensión del lenguaje algebraico, en la Educación Secundaria Obligatoria, adecuando los contenidos y la metodología a las peculiaridades de los alumnos y a las del álgebra escolar.

A continuación, mostramos dos gráficos (los cuadros IV.1 y IV.2) en los que resumimos, respectivamente, cómo se enseña habitualmente y cómo proponemos que se enseñe el lenguaje algebraico:



Cuadro IV.1. El carácter cíclico de la enseñanza habitual del lenguaje algebraico en la ESO



Cuadro IV.2. Carácter "reticular" de nuestra propuesta de enseñanza del lenguaje algebraico

Cuadro IV 1:

El cuadro IV.1, con el que terminamos el Capítulo II en el que analizamos los contenidos del álgebra escolar, simboliza el carácter cíclico del proceso de enseñanza-aprendizaje que se implementa habitualmente en el aula: en cada curso se revisan los contenidos del curso anterior, se introduce un conjunto pequeño de nuevos contenidos, y se hacen más complejos los procedimientos de cálculo.

Cuadro IV 2:

Nuestra propuesta curricular alternativa se sustenta en concebir el álgebra escolar como una red de conceptos y procedimientos interconectados y, en consecuencia, focalizar el aprendizaje en el fortalecimiento y ampliación de las conexiones cognitivamente significativas de dicha red conceptuales.

Al considerar la aparición de un lenguaje novedoso para el alumno, entendemos que hay que provocar una ruptura conceptual con las letras utilizadas en la aritmética y en el álgebra: las letras pasan de tener un valor cualitativo a tener un valor cuantitativo. Además, hay que arbitrar medios didácticos para que el alumno entienda aspectos esenciales del lenguaje algebraico: en qué contextos tiene sentido la composición de números y letras; los papeles diferentes que juegan las letras como variables funcionales o como expresiones polinómicas; explicitar y usar correctamente las reglas sintácticas que permiten evaluar semánticamente las expresiones algebraicas; valorar la pertinencia de las operaciones entre expresiones algebraicas y dar sentido al resultado de tales operaciones, etc…

En el cuadro IV.2 se recogen los elementos y las relaciones conceptuales entre los elementos que vamos a abordar en la propuesta curricular alternativa, esto es:

- Los **rectángulos,** cuyo contorno es delgado y discontinuo, indican los **objetos** y **procedimientos** matemáticos que se contemplan en nuestra propuesta didáctica: resolución por tanteo aritmético; expresiones algebraicas abiertas (polinomios); fórmulas geométricas y físicas; funciones lineales y afines (rectas); ecuaciones compatibles indeterminadas o identidades; ecuaciones incompatibles; ecuaciones compatibles determinadas; enunciados de problemas; resolución de ecuaciones; soluciones de ecuaciones y de problemas.

  Desde el rectángulo “Resolución por tanteo aritmético” salen flechas hacia los rectángulos “Ecuaciones compatibles indeterminadas o identidades”, “Ecuaciones incompatibles”, “Ecuaciones compatibles determinadas”, que simbolizan que el tanteo aritmético permite comprender la resolución de ecuaciones extremas tales como $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot x = a$ con $a \neq 0$ y $a \cdot x = 0$.

  También desde el rectángulo “Resolución por tanteo aritmético” salen flechas hacia los rectángulos “Enunciados de problemas” y “Resolución de ecuaciones” que simboliza que el tanteo aritmético se puede –incluso a veces, se debe-aplicar en la resolución de algunos problemas de álgebra y de algunas ecuaciones.

Desde el rectángulo "Enunciados de problemas" parte una flecha hacia el trapecio "Ecuaciones planteadas", que simboliza la traducción desde el lenguaje natural o materno de los enunciados de los problemas al lenguaje algebraico de las ecuaciones planteadas.

Desde el rectángulo "Resolución de ecuaciones" sale una flecha hacia el rectángulo "Soluciones" que indica que las soluciones obtenidas provienen de una serie de cálculos algebraicos.

Del rectángulo "Soluciones" sale una flecha hacia la elipse "Comprobación semántica" y otra hacia la elipse "Comprobación sintáctica". Tales flechas simbolizan que las soluciones obtenidas mediante el habitual método de plantear y resolver ecuaciones pueden ser comprobadas totalmente en las condiciones reales de la situación problemática o parcialmente –sólo se comprueba la corrección de los cálculos, no la coherencia del planteamiento con la situación problemática- en las ecuaciones planteadas.

- Los **octógonos,** cuyo contorno es grueso y continuo, recogen las ideas implicadas en el **Primer foco de investigación**: El diferente significado de las letras según la expresión matemática en la que se ubiquen como variables, como incógnitas y como abreviaturas.
- Las **elipses,** cuyo contorno es grueso y continuo, representan el **Segundo Foco de investigación**: La comprobación semántica de la solución en el enunciado; la comprobación sintáctica de la solución en las ecuaciones.
- Los **trapecios** representan el **Tercer Foco de investigación**: El fortalecimiento de las conexiones entre el lenguaje natural o materno y el lenguaje algebraico en ambos sentidos.

En resumen, nuestra propuesta alternativa de enseñanza del lenguaje algebraico dirigida al curso de 3º de ESO (14-15 años) no consiste en la repetición, como en la enseñanza cíclica que habitualmente se imparte en el aula, de los contenidos de 2º y 1º de ESO, pero con operaciones de cálculo más complejas, sino en tejer una red de nodos interrelacionados en la que las nuevas perspectivas sobre los contenidos conceptuales y procedimentales del lenguaje algebraico se relacionan entre sí.

IV.2.3. Objetivos parciales

Recordamos que el objetivo de nuestra investigación se formuló en el Capítulo I, en los siguientes términos: Diseñar una Propuesta Didáctica para la enseñanza del lenguaje algebraico en la Educación Secundaria obligatoria, que constituya una alternativa a la enseñanza habitual sustentada en dar la prioridad a los contenidos procedimentales. La consecución de este objetivo se alcanza con la consecución de de los siguientes objetivos parciales:

- Presentar las letras desempeñando los siguientes papeles: el de variables que pueden tomar cualquier valor numérico en polinomios y en fórmulas; el de incógnitas que sustituyen a determinados valores en las ecuaciones; el de abreviaturas para escribir ciertas palabras.

- Incorporar la comprobación semántica, consistente en la sustitución de las soluciones de los problemas en los enunciados, como actividad de auto-evaluación de la corrección de la resolución del problema, y como actividad que refuerza la comprensión de las relaciones aritméticas entre las cantidades involucradas en el contexto real del enunciado de cada problema. Dichas relaciones nacen de las realidades físicas del contexto y su conocimiento es lo que permite la formulación del enunciado en forma de unas ecuaciones.

- Incorporar la comprobación sintáctica, consistente en la sustitución de las soluciones en las ecuaciones como actividad de auto-evaluación de la corrección de las operaciones de despeje y de cálculo realizadas en la resolución de las ecuaciones, y como actividad que refuerza la comprensión de las relaciones entre los números, las letras, los signos operaciones y el signo igual que aparecen en las ecuaciones, así como de la comprensión del papel de las letras en las ecuaciones como sustitutos de los valores numéricos concretos, que hay que hallar, que cumplen determinadas condiciones.

- Utilizar las expresiones algebraicas para traducir relaciones entre cantidades expresadas verbalmente en el lenguaje materno.

- Incorporar a la actividad de aula la invención de enunciados de problemas a partir de unas relaciones algebraicas dadas.

- Utilizar una metodología en la que se fomente la discusión entre los alumnos, y de éstos con el profesor; que se potencie la exploración del alumno; y que se institucionalice el papel de auto-corrección del grupo.

IV.2.4. Curso al que va dirigida nuestra propuesta

El curso al que va dirigido nuestra propuesta de enseñanza es el de Tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria o 3º ESO (14-15 años) del sistema educativo español. Las razones por las cuales hemos dirigido nuestra propuesta a tal curso son las siguientes:

- Es un curso en el cual los alumnos ya poseen ciertos conocimientos previos sobre el lenguaje algebraico que adquirieron en 1º de ESO (12-13 años) y, sobre todo, en 2º de ESO (13-14 años).

La existencia de tales conocimientos previos nos permite abordar, en un lapso de experimentación de unos pocos días, una amplia temática de contenidos algebraicos.

- Es el último curso de Matemáticas de la enseñanza obligatoria, que comienza a los 6 años y termina a los 16 años, que es común para todos los alumnos. En el siguiente y último curso de la enseñanza obligatoria, esto es, en 4º de ESO (15-16 años), los alumnos elegirán entre cursar las Matemáticas de la Opción A o las Matemáticas de la Opción B, según consideren que no vayan o que sí vayan a cursar asignaturas de matemáticas en sus estudios posteriores.

IV.2.5. Limitaciones temporales de la propuesta

Como la propuesta se implementa en el aula en un curso que tiene una programación oficial de la asignatura de Matemáticas y como, además, dicha programación está relacionada con las de los cursos siguientes de la enseñanza obligatoria y post-obligatoria, no queremos que la experimentación de la propuesta perturbe excesivamente la enseñanza que el centro educativo tiene planificada. Por ello:

- Limitamos nuestra propuesta a un número máximo de 11 períodos lectivos (9 de ellos dedicadas a las actividades de la propuesta y 2 de ellos utilizadas para las pruebas para la evaluación de la perdurabilidad de los contenidos de la propuesta a corto y largo plazo).

  Teniendo en cuenta que, en la enseñanza oficial actual de 3º de ESO, las Matemáticas ocupan 3 sesiones lectivas cada semana y que las 2 pruebas se realizarán en las sesiones lectivas de la tutoría, nuestra propuesta supone un alejamiento de la programación oficial de Matemáticas que abarca 3 semanas.

- Ubicamos las sesiones de nuestra propuesta en las fechas respetando la secuenciación de contenidos y los contenidos mismos de la programación oficial de la asignatura de Matemáticas en 3º de ESO. Esto es:

  -Ubicamos las tres primeras actividades (numeradas de la actividad 1 a la 3), las dedicadas al significado de las letras y a la resolución aritmética y algebraica de ecuaciones, antes de la enseñanza habitual de los procedimientos de resolución algebraicos.

  -Colocamos las seis actividades centrales (numeradas de la actividad 4 a la 9) –las dedicadas a la comprobación semántica y sintáctica, al planteamiento de ecuaciones y a la invención de enunciados- después de dicha enseñanza habitual de los procedimientos de resolución.

  -Realizamos las 2 pruebas (numeradas de la I a la II) –que están dedicadas a evaluar, a corto y a largo plazo, la perdurabilidad de los contenidos de nuestra propuesta en el grupo de estudio- en períodos lectivos dedicados a la tutoría con alumnos en el horario oficial. De esta forma, la realización de las pruebas ni interrumpe ni retrasa el desarrollo de la programación oficial a la que se vuelve tras el fin de la experimentación de nuestra propuesta alternativa.

IV.2.6. Actividades de la propuesta

Sobre cada una de las actividades que constituyen nuestra propuesta de enseñanza detallamos los objetivos que pretendemos alcanzar, los contenidos que abordamos, la metodología que empleamos, y los contenidos conceptuales y procedimentales que evaluamos.

IV.2.6.1. Actividad 1.1

La actividad 1.1 será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Actividad 1.1: LA LETRA COMO ABREVIATURA, COMO VARIABLE Y COMO INCÓGNITA.

1.1) Marca con una cruz X según se trate de una letra usada como abreviatura, como variable o como incógnita.

Actividad	Entidad matemática	Letra como abreviatura	Letra como variable	Letra como Incógnita
1.1.1	$\mathbf{x}^2 - 5\mathbf{x} + 6 = 0$			
1.1.2	$\mathbf{x}^2 - 5\mathbf{x} + 6$			
1.1.3	$3\mathbf{x} – 4 = 7$			
1.1.4	“El barco llegó 30 **h** antes de lo previsto”			
1.1.5	$30\ \mathbf{h} = 60$			
1.1.6	“Probaron el nuevo prototipo el 5-10-07, que era **V**”			
1.1.7	Recta $\mathbf{y} = 3\mathbf{x} - 1$			
1.1.8	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$			
1.1.9	$4\mathbf{x}^5 = 4$			
1.1.10	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2 +2\mathbf{ab}$			
1.1.11	$\mathbf{a}^3 – 4\mathbf{a}^2 - 1$			
1.1.12	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{a}$			

Tabla IV.1. Ficha de la Actividad 1.1

A) Objetivos

- Que los alumnos comprendan el significado de las letras como abreviaturas de palabras en ciertas oraciones gramaticales o como abreviaturas para expresar las unidades de medida.
- Que los alumnos comprendan el significado de las letras como variables que pueden tomar cualquier valor numérico en las identidades, en las fórmulas y en los polinomios.
- Que los alumnos comprendan el significado de las letras como incógnitas cuyo valor numérico concreto hay que calcular en las ecuaciones para que se verifiquen las igualdades que se indican en tales ecuaciones.
- Que los alumnos diferencien entre letra como abreviatura, como variable y como incógnita.

B) Contenidos

El diferente significado de las letras (OC. I) como abreviaturas (en la expresión de unidades de medidas y en las palabras escritas abreviadamente), como variables (en las identidades, las fórmulas geométricas, las fórmulas físicas, en los polinomios y en las ecuaciones de las rectas), y como incógnitas (en las ecuaciones).

C) Metodología

Esta actividad 1.1 abarca:

-Una 1ª parte de la primera mitad de la sesión nº 1 (la mitad que se dedica a la actividad 1.1) en la que los alumnos trabajan individualmente la actividad 1.1. Al final de esta 1ª parte, el profesor recoge los documentos escritos de los alumnos.

-Una 2ª parte de la primera mitad de la sesión nº 1 (la mitad que se dedica a la actividad 1.1) en la que se pone en común la corrección de la actividad 1.1. Al final de esta 2ª parte, el profesor da su explicación magistral.

D) Evaluación

Valoraremos si los alumnos diferencian entre:

- Letra como abreviatura que sustituye a una palabra.
- Letra como variable que representa a cualquier número en una identidad, una fórmula geométrica, una fórmula física, un polinomio o una ecuación de una recta.
- Letra como incógnita que sustituye a un número concreto en una ecuación algebraica.

IV.2.6.2. Actividad 1.2

La actividad 1.2 será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Actividad 1.2: LA LETRA COMO INCÓGNITA.
(Para realizar en grupos de cuatro)

Actividad 1.2.1:
¿Cuál de estos números es solución de la ecuación $5x-9=4(x-5)$? Razónalo sin resolver la ecuación por métodos algebraicos.
a) $x=4$ b) $x=-3$
c) $x=14$ d) $x=-11$
Cálculos que realizas:

Actividad 1.2.2:
Dada la ecuación $7x+4=60$.
-Calcula:
Si $x=0$ $7x+4=$
Si $x=1$ $7x+4=$
Si $x=5$ $7x+4=$
Si $x=6$ $7x+4=$
Si $x=7$ $7x+4=$
Si $x=8$ $7x+4=$
Si $x=9$ $7x+4=$
Si $x=10$ $7x+4=$
-¿Has encontrado soluciones de la ecuación $7x+4=60$? ¿Puedes encontrar todas las que haya?

Tabla IV.2. Ficha de la Actividad 1.2

A) Objetivos

- Identificar solución de una ecuación como aquel número que verifica dicha ecuación.
- Buscar soluciones de ecuaciones muy sencillas mediante la utilización del tanteo aritmético.

B) Contenidos

- Concepto de solución de una ecuación (OC. I).
- Comprobación sintáctica de ecuaciones (OC. VI).
- El método del tanteo aritmético para resolución de ecuaciones (OC. II).

C) Metodología

Esta actividad 1.2 abarca:

- Una 1ª parte de la mitad de la sesión nº 1 (la mitad que se dedica a la actividad 1.2) en la que los alumnos, organizados en pequeños equipos de cuatro, realizan la actividad 1.2. Al final de esta 1ª parte, cada equipo debe entregar el documento escrito del equipo.
- Una 2ª parte del tiempo de la mitad de la sesión nº 1 (la mitad que se dedica a la actividad 1.2) en la que sólo –por cuestiones de tiempo- se pone en común la corrección de la representativa actividad 1.2.2. Al final, el profesor da su clase magistral después de que los alumnos hayan expresado sus opiniones.

D) Evaluación

Valoraremos que se utilice el tanteo aritmético para solucionar ecuaciones sencillas, identificando la solución de una ecuación como aquel número que verifica dicha ecuación.

IV.2.6.3. Actividad 2

La actividad 2 será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Actividad 2: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES.

2.1) Resuelve:

2.1.a) $x+4=5$ 2.1.b) $x-7=8$ 2.1.c) $5x=100$

2.1.d) $-6x=72$ 2.1.e) $\frac{x}{4}=12$ 2.1.f) $\frac{4x}{20}=3$

2.2) Resuelve:

2.2.a) $7x-19=5x-27$ 2.2.b) $-1-2x=-3x-11$

2.3) Resuelve:

2.3.a) $7+3(2x-1)=0$ 2.3.c) $3x=4+(3-x)$

2.3.b) $x-5(x-2)=6x$ 2.3.d) $120=2x-(15-7x)$

2.4) Resuelve:

2.4.a) $\frac{4(x-1)}{3}-\frac{2(x-3)}{6}=5$ 2.4.b) $x+\frac{2(x-3)}{4}-\frac{5(x+1)}{10}=1$

Tabla IV.3. Ficha de la Actividad 2

A) Objetivos

- Repasar las reglas de resolución sobre cómo despejar en las ecuaciones lineales
- Repasar las reglas operacionales que se aplican en las ecuaciones lineales con paréntesis y con denominadores.
- Repasar el significado de la notación algebraica.

B) Contenidos

- Reglas de despejar y de operar en las ecuaciones algebraicas (OC. IV).
- Notación algebraica. (OC. III)

C) Metodología

Esta actividad comprende:

- Una 1ª parte de la sesión nº 2 en la que los alumnos trabajan individualmente la actividad 2. Al final de esta parte, se recogen los documentos escritos de los alumnos.

- Una 2ª parte de la sesión nº 2 en la que sólo –por cuestiones de tiempo- se pone en común la corrección de las representativas actividades 2.1.d, 2.2.a, 2.3.c y 2.4.a. Al final de esta 2ª parte, el profesor da su clase magistral.

D) Evaluación

Valoramos que:

- Se interprete adecuadamente la notación algebraica.

- Se apliquen bien las reglas utilizadas para despejar en las ecuaciones.

- Se apliquen bien las reglas utilizadas para operar en las ecuaciones

IV.2.6.4. Actividad 3

La actividad 3 será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Actividad 3: CLASES DE ECUACIONES LINEALES.

3.1) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x = 27$ que existen.

3.2) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x = x + 2x$ que existen.

3.3) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x = 0$ que existen.

3.4) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x = x + 2x + 5$ que existen.

3.5) Escribe todas las soluciones de la ecuación $0x = 7$ que existen.

3.6) Escribe todas las soluciones de la ecuación $0x = 0$ que existen.

Tabla IV.4. Ficha de la Actividad 3

A) Objetivos

Que los alumnos comprendan que:

- Las ecuaciones del tipo $a \cdot x = 0$ (con $a \neq 0$) sólo tienen una única solución.
- Las ecuaciones del tipo $0 \cdot x = 0$ tienen cualquier número real como solución.
- La ecuaciones del tipo $0 \cdot x = a$ (con $a \neq 0$) no tienen solución.

B) Contenidos

- Utilización del tanteo aritmético (OC. II) para la resolución de ecuaciones compatibles determinadas del tipo $a \cdot x = 0$ (con $a \neq 0$), con la justificación de porqué hay sólo una solución y ésta es única.
- Utilización del tanteo aritmético (OC. II) para la resolución de ecuaciones compatibles indeterminadas del tipo $0 \cdot x = 0$, con la justificación de porqué cualquier número real es solución.
- Utilización del tanteo aritmético (OC. II) para la resolución de ecuaciones incompatibles del tipo $0 \cdot x = a$ (con $a \neq 0$), con la justificación de porqué no existe solución.
- Reglas de despejar y de operar en las ecuaciones algebraicas (OC. IV).

C) Metodología

Esta actividad comprende:

- Una 1ª parte de la sesión en la que los alumnos trabajan, individualmente la actividad 3. Al final de esta parte se recogen los documentos escritos de los alumnos.
- Una segunda parte de la sesión en la que los alumnos realizan una puesta en común de la resolución de todas las ecuaciones de la actividad 3. El profesor interviene, al final, para organizar y formalizar los contenidos.

D) Evaluación

Valoraremos que:

- Se comprenda que las ecuaciones del tipo $a \cdot x = 0$ (con $a \neq 0$) tienen una única solución.
- Se comprenda que las ecuaciones del tipo $0 \cdot x = 0$ tienen cualquier número real como solución.
- Se comprenda que las ecuaciones del tipo $0 \cdot x = a$ (con $a \neq 0$) no tienen ninguna solución.

IV.2.6.5. Actividad 4

La actividad 4 será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Actividad 4: TRADUCCIÓN DE EXPRESIONES.

Actividad 4.1: En el garaje tenemos un número desconocido de coches. Si llamamos x al número desconocido de coches que hay, contesta a las siguientes preguntas:
4.1a) ¿Cuántos coches hay en ese garaje?______
4.1b) ¿Cuántos faros delanteros hay en ese garaje?______
4.1c) ¿Cuántos volantes hay en ese garaje?______
4.1d) ¿Cuántas ruedas delanteras izquierdas hay en ese garaje?________
4.1e) ¿Cuántas ruedas hay en ese garaje sin contar las de repuesto?______
4.1f) ¿Cuántas ruedas hay en ese garaje contando las de repuesto?_______
4.1g) ¿Cuántas ruedas delanteras hay en ese garaje?_______

Actividad 4.2: Relaciona, escribiendo el número correspondiente, las expresiones del lenguaje natural con las expresiones algebraicas:
4.2.a) En el garaje hay el mismo número de motos que de coches._______
4.2.b) Pedro duplica en edad a su hijo._______
4.2.c) El área de un triángulo._______
4.2.d) En un garaje hay doble número de coches que de motos.________
4.2.e) La tercera parte del total de los alumnos de un centro estudian alemán. ________
4.2. f) Dos padres y un hijo._______

1) $\frac{x}{3}$ 2) $\frac{xy}{2}$ 3) $x = 2y$ 4) $xy = A$
5) $x = y$ 6) $2y = x$ 7) $3x = y$

Actividad 4.3: En una fiesta hay un número **x** desconocido de chicos y un número **y** desconocida de chicas. Explica lo que significan las siguientes expresiones:
a) $x - 5$
b) $2x + 3y$
c) $3x + 3y$
d) $x = 2y$

Actividad 4.4: En un almacén tenemos un refresco de limón embotellado en dos tipos de envase: latas de 33 cc y botellas de 2 litros. Utilizando respectivamente las letras a y b, expresa algebraicamente las situaciones siguientes:
a) Tenemos doble número de latas que de botellas.
b) Tenemos 20 botellas más que latas.
c) Tenemos la mitad de latas que de botellas.

Actividad 4.5: Inventa frases del lenguaje natural en contextos de la vida real que se refieran a las siguientes expresiones:
a) $5x + 2y = 220$ (en un garaje)
b) $\frac{x}{5} = y$ (edades)
c) $1.5x + 2y = 9$ (en una papelería)

Tabla IV.5. Ficha de la Actividad 4

A) Objetivos

- Plantear polinomios a partir de descripciones expresadas mediante el lenguaje natural o materno.
- Plantear ecuaciones a partir de descripciones expresadas en el lenguaje natural o materno.
- Relacionar situaciones reales, que están expresadas mediante el lenguaje natural o materno, con los correspondientes polinomios que son el planteamiento algebraico de tales situaciones.
- Relacionar situaciones reales, que están expresadas mediante el lenguaje natural o materno, con las correspondientes ecuaciones que son el planteamiento algebraico de tales situaciones.
- Relacionar situaciones reales de comparación, que están expresadas mediante el lenguaje natural o materno, con las correspondientes ecuaciones que son el planteamiento algebraico de tales situaciones, evitando el error de inversión para la suma, la resta, el producto y el cociente.
- Inventar enunciados, que sean expresados mediante el lenguaje natural o materno, sobre situaciones reales que sean coherentes con los contextos reales (garaje, edades, papelería,…) y las ecuaciones que les proporcionamos.

B) Contenidos

- Planteamiento algebraico de polinomios y de ecuaciones (OC. VIII).
- Invención de enunciados (OC. IX).

C) Metodología:

Esta actividad comprende:

- Una 1ª parte de la sesión nº 4 en la que los alumnos trabajan, individualmente la actividad 4. Al final de esta parte se recogen los documentos escritos de los alumnos.
- Una 2ª parte de la sesión nº 4 en la que los alumnos realizan sólo –por falta de tiempo- una puesta en común de la representativa actividad 4.5 en la pizarra. Al final de esta parte, el profesor da su clase magistral.

D) Evaluación:

Valoramos que:

- Se planteen correctamente polinomios y ecuaciones a partir de descripciones de situaciones reales que están expresadas mediante el lenguaje natural o materno.

- Se inventen descripciones de situaciones reales que estén expresadas mediante el lenguaje natural o materno y que sean coherentes con los contextos reales y las ecuaciones algebraicas que les proporcionamos.

IV.2.6.6. Actividad 5

Esta actividad será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Actividad 5: PROBLEMAS DESGLOSADOS EN PREGUNTAS CORTAS.

Actividad 5.1: Un examen de tipo test consta de 50 preguntas y se evalúa del siguiente modo: se suman 2 puntos por cada pregunta acertada y se restan 1.5 puntos por cada pregunta no acertada. Queremos averiguar cuántas preguntas ha acertado y cuántas no ha acertado.
5.1.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.1.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.1.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.1.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.

Actividad 5.2: Sabemos que el perímetro de un rectángulo mide 50 metros y que la base es 5 metros más larga que la altura. Queremos saber lo que mide la base y la altura.
5.2.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.2.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.2.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.2.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.2.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.2.6) Comprobación:
5.2.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.2.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Actividad 5.3: Juan tiene 28 años menos que su padre y 24 años más que su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 100 años?
5.3.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.3.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.3.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.3.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.3.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.3.6) Comprobación:
5.3.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.3.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Actividad 5.4: Jaime compró 3 jabones y 2 botes de colonia por 12 euros, y Elena compró 4 jabones y 3 botes de colonia por 17 euros. Averigua el precio de cada producto.
5.4.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.4.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.4.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.4.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.4.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.4.6) Comprobación:
5.4.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.4.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Actividad 5.5: Hace siete años la edad de un padre era el cuádruplo de la de su hijo y actualmente es el triple. Averigua cuál es la edad de cada uno. 5.5.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades) 5.5.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades) 5.5.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades) 5.5.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces. 5.5.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados. 5.5.6) Comprobación: 5.5.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado? 5.5.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido. **Actividad 5.6:** Paloma tiene monedas de 2 euros y 1 euros y billetes de 10 euros. Sabiendo que tiene 20 monedas y que el valor de todas juntas es 33 euros, calcula el número de monedas que tiene de cada tipo. 5.6.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades) 5.6.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades) 5.6.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades) 5.6.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces. 5.6.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados. 5.6.6) Comprobación: 5.6.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado? 5.6.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Tabla IV.6. Ficha de la Actividad 5

A) Objetivos:

- Resolver los problemas de álgebra con la ayuda de unas preguntas cortas que son una guía de los pasos del método algebraico: Toma de datos; Asignación de variables; Planteamiento de ecuaciones; Resolución de ecuaciones; Análisis de la solución; Comprobación semántica de la solución.
- Incorporar el análisis de las unidades de medida de todos los números (conocidos y desconocidos) implicados en la situación problemática real como requisito imprescindible para el correcto planteamiento y resolución de los problemas algebraicos.
- Incorporar la comprobación semántica como una auto-corrección que debe ser realizada cuando se resuelve un problema de álgebra.

B) Contenidos:

- Análisis de unidades de las cantidades conocidas y desconocidas (OC. V y OC. VIII).
- Concepto de incógnita (OC. I).
- Planteamiento de ecuaciones (OC. VIII).
- Reglas de despejar y de operar en las ecuaciones algebraicas (OC. IV).

- Comprobación semántica de las soluciones (OC. V).

C) Metodología:

Esta actividad comprende una única parte que abarca la totalidad de la sesión nº 5 y que está dedicada a que los alumnos trabajen individualmente la actividad 5. Al final de la sesión el profesor recoge los documentos escritos de los alumnos.
Hemos puesto más actividades de las que previsiblemente pueden hacerse en una sesión para que ningún alumno permanezca inactivo.

D) Evaluación:

Valoramos que:

- Se perciba cuáles son las unidades de medidas de los números (conocidos y desconocidos) implicados en la situación real del problema.
- Se planteen ecuaciones algebraicas que sean coherentes con los enunciados de los problemas de álgebra propuestos.
- Se resuelvan las ecuaciones planteadas, aplicando correctamente las reglas que se deban utilizar para despejar y para operar en dichas ecuaciones.
- Se compruebe la solución obtenida en las condiciones reales de la situación problemática, esto es, que la comprobación sea semántica.

IV.2.6.7. Actividad 6

La actividad 6 será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Actividad 6: NECESIDAD DE COMPROBAR EL ENUNCIADO.

Actividad 6.1: Raquel compra 5 melones y 2 sandías y paga 13 euros. Alfredo compra 3 melones y 4 sandías y paga 12 euros. Averigua el precio en euros de cada melón y el precio en euros de cada sandía.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 18 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1.5 \end{cases}$$

6.1.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.1.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.1.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Actividad 6.2: Amelia tiene el triple de edad que Enrique. Dentro de cinco años Amelia tendrá sólo el doble de años que Enrique. ¿Qué edad tiene cada uno?
Llamamos x la edad de Amelia
Llamamos y la edad de Enrique

$$\begin{cases} 3x = y \\ x + 5 = 2(y + 5) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

6.2.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.2.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.2.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Actividad 6.3: Se desea obtener 60 Kilos de café molido, mezcla a base de café torrefacto, a 80 céntimos de euro el kilo, y de café natural, a 60 céntimos de euro el Kilo. Si queremos que el precio del kilo de mezcla sea 0.72 euros, Llamamos x a la cantidad de café torrefacto en Kilogramos y llamamos y a la cantidad de café natural en Kilogramos. Averigua qué cantidad de cada café debemos mezclar.

$$\begin{cases} x+y=60 \\ 80x+60y=4320 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=36 \\ y=24 \end{cases}$$

6.3.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.3.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.3.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Actividad 6.4: José le dice a Inés: “Mi colección de discos compactos es mayor que la tuya, ya que si te doy 10, tendrías la misma cantidad que yo”. Inés le responde: “Tienes razón. Sólo te faltan 10 para doblarme en número”. ¿Cuántos compactos tiene cada uno?

$$\begin{cases} x-10=2y \\ x+10=3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x=50 \\ y=20 \end{cases}$$

6.4.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.4.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.4.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Tabla IV.7. Ficha de la Actividad 6

A) Objetivos:

- Diferenciar entre problema bien resuelto, problema bien planteado y ecuaciones bien resueltas.
- Comprobar semánticamente (en el enunciado) las soluciones que les proporcionamos.
- Comprobar sintácticamente (en el sistema de ecuaciones) las soluciones que les proporcionamos.
- Analizar, repasando, la coherencia entre la situación problemática expresada en el enunciado y los sistemas de ecuaciones que les proporcionamos.

B) Contenidos:

- Planteamiento de ecuaciones (OC. VIII).
- Comprobación semántica de la solución (OC. V).
- Comprobación sintáctica de la solución (OC. VI).

C) Metodología:

Esta actividad abarca:

- Una 1ª parte de la sesión nº 6 en la que los alumnos trabajan individualmente la actividad 6. Al final de esta parte se recogen los documentos escritos de los alumnos.

- Una 2º parte de la sesión nº 6 en la que los alumnos ponen en común la corrección de toda la actividad 6. Al final, el profesor da la explicación magistral sobre lo anterior.

D) Evaluación:

Valoraremos que:

- Se compruebe semánticamente cuando se analiza la resolución del problema.
- Se compruebe sintácticamente cuando se analiza la resolución del sistema de ecuaciones.
- Se repase la coherencia entre los enunciado y los sistemas que les proporcionamos cuando se analiza el planteamiento del problema.

IV.2.6.8. Actividad 7

La actividad 7 será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Actividad 7: PLANTEAR, RESOLVER Y COMPROBAR.

Actividad 7.1: Calcula cuatro números consecutivos, de forma que su suma sea 326.
7.1.1) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces?
7.1.2) Formula las ecuaciones.
7.1.3) Resuelve la ecuación o sistema.
7.1.4) Comprobación en el enunciado.

Actividad 7.2: Un padre tiene seis veces la edad de su hijo y la suma de las edades de ambos es igual a 91. Averigua la edad del padre y del hijo.
7.2.1) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces?
7.2.2) Formula las ecuaciones.
7.2.3) Resuelve la ecuación o sistema.
7.2.4) Comprobación en el enunciado.

Actividad 7.3: En una terraza sirven bocadillos y refrescos. Se sabe que 3 bocadillos y 2 refrescos cuestan 8 euros y que 2 bocadillos y 1 refresco cuestan 5 euros. Calcula el precio del bocadillo y el precio del refresco.

Actividad 7.4: Una bodega ha exportado, el primer semestre del año, la mitad de sus barriles y, en los dos meses siguientes, un tercio de lo que le quedaba. ¿Cuántos barriles tenía la bodega al comienzo de año si ahora le quedan un total de 40000 barriles?

Actividad 7.5: En una estantería tenemos apilados CD de música y libros, y entre todos hay 100 unidades. Calcula cuántos hay de cada clase, si están en proporción de 3 a 1.

Actividad 7.6: Un vendedor de coches tiene sólo dos modelos en su tienda: el modelo A y el modelo B. Por cada coche del modelo A y del modelo B que vende obtiene un beneficio de 6000 euros y de 5000 euros respectivamente. ¿Cuántos coches ha vendido de cada modelo si ha obtenido 17000 euros de beneficio?

Tabla IV.8. Ficha de la Actividad 7

A) Objetivos

- Aplicar correctamente el método algebraico de plantear y resolver ecuaciones en la resolución de los problemas de álgebra.
- Comprobar semánticamente las soluciones obtenidas mediante el método algebraico de plantear y resolver ecuaciones.
- Resolver el problema algebraico mediante tanteo aritmético cuando la situación problemática no puede ser resuelta mediante el método algebraico habitual de plantear y resolver ecuaciones.

B) Contenidos

- Planteamiento de ecuaciones (OC. VIII).
- Reglas de despejar y de operar en las ecuaciones algebraicas (OC. IV).
- Comprobación semántica (OC. V).
- Resolución de problemas mediante tanteo aritmético (OC. II).

C) Metodología

Esta actividad comprende dos partes:

- Una 1ª parte de la sesión nº 7 en la que los alumnos resulten individualmente la actividad 7. Al final de esta 1ª parte se recogen los documentos escritos por los alumnos.
- Una 2ª parte de la sesión nº 7 en la que sólo –por falta de tiempo- se pone en común en la pizarra la corrección de las representativas actividades 7.3, 7.4, 7.5 y 7.6. Al final de esta 2ª parte el profesor da su clase magistral, organizando y formalizando el contenido.

D) Evaluación

Valoramos que:

- Se planteen ecuaciones que sean coherentes con los enunciados de los problemas de álgebra.
- Se resuelvan bien las ecuaciones planteadas.
- Se comprueben semánticamente las soluciones obtenidas.
- Se considere la comprobación semántica de los problemas algebraicos como un proceso de auto-corrección que se debe realizar siempre, aunque no se nos exija explícitamente.
- Se resuelvan problemas de álgebra mediante tanteo aritmético cuando el método habitual de plantear y resolver ecuaciones no es aplicable a algunos problemas.

IV.2.6.9. Actividad 8

La actividad 8 será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Actividad 8: INVENCIÓN DE ENUNCIADOS DE PROBLEMAS.

Actividad 8.1: Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

Rellena adecuadamente los espacios en blanco de forma que el anterior sistema de ecuaciones sería el que tendrás que escribir para plantear el siguiente problema con dos ecuaciones y dos incógnitas: "En una terraza sirven bocadillos y refrescos. Se sabe que ___ bocadillos y ___ refrescos cuestan ___ euros y que ___ bocadillos y ___ refresco cuestan ___ euros. Calcula el precio de ______________ y de _____________."

Actividad 8.2: Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y=150 \\ 1.5x-0.5y=125 \end{cases}$

Rellena adecuadamente los espacios en blanco de forma que el anterior sistema de ecuaciones sería el que tendrás que escribir para plantear el siguiente problema con dos ecuaciones y dos incógnitas: "Un examen tipo test consta de __ preguntas y se evalúa sumando __ puntos por cada acierto y restando __ puntos por cada fallo. Llamamos x al número de preguntas acertadas y llamamos y al número de preguntas falladas. Hemos tenido como puntación final de __ puntos."

Actividad 8.3: Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y=25 \\ 4x+2y=80 \end{cases}$

Inventa un enunciado en el utilices las siguientes palabras:
-granja
-ovejas
-gallinas

Actividad 8.4: Dado el sistema $\begin{cases} 2.5x+1.5y=32.5 \\ x+y=15 \end{cases}$

Inventa un enunciado en el utilices las siguientes palabras:
-vendidos
-bocadillos de jamón
-bocadillos de tortilla
-euros

Actividad 8.5: Dado el sistema $\begin{cases} x-5=3(y-5) \\ x+1=2(y+1) \end{cases}$

Inventa un enunciado en el que hables de:
-edad de Juan
-edad de Pedro

Actividad 8.6: Inventa un enunciado en el que hables de:
-coches
-motos
-faros delanteros

Tabla IV.9. Ficha de la Actividad 8

A) Objetivos:

- Rellenar enunciados incompletos de problemas de álgebra a partir de los datos de las ecuaciones planteadas de tales problemas que les proporcionamos.
- Inventar enunciados de problemas de álgebra que sean coherentes con el contexto real y con las ecuaciones que les proporcionamos.
- Inventar enunciados de problemas de álgebra que sean coherentes con el contexto real que les indicamos, sin proporcionarles ecuación alguna.

B) Contenidos

- Finalización de enunciados de problemas de álgebra cuyas ecuaciones de planteamiento les proporcionamos completas.
- Invención de enunciados de problemas de álgebra (OC. IX) que sean coherentes con una situación real que les proporcionamos.

  Unas veces (las más) también les proporcionamos unas ecuaciones algebraicas con las que tales enunciados han de ser coherentes. Otras veces no les proporcionamos ecuación algebraica alguna.

C) Metodología

Esta actividad comprende:

- Una 1ª parte de la sesión nº 8 en la que los alumnos trabajan individualmente la actividad 8. Al final de esta parte se recogen los documentos escritos de los alumnos.
- Una 2ª parte de la sesión nº 8 en la que sólo –por falta de tiempo- se pone en común, delante de todo el grupo, las representativas actividades 8.3, 8.4 y 8.5. El profesor realiza su aportación final, organizando y formalizando los contenidos.

D) Evaluación

Valoraremos que:

- Se completen datos en los textos de enunciados de problemas algebraicos, de forma que tales enunciados sean coherentes con unas ecuaciones algebraicas que les proporcionamos.
- Se inventen enunciados de un problema algebraico que sean coherentes con un contexto real y con unas ecuaciones algebraicas que les proporcionamos.
- Se inventen enunciados de un problema algebraico que sean coherentes con un contexto real, sin que les proporcionemos ecuación alguna con la que tales enunciados tengan que ser coherentes.

IV.2.6.10. Actividad 9

Esta actividad será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Actividad 9: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS INVENTADOS.

Actividad 9.1: Un alumno ha inventado el siguiente enunciado: **“**Juan le dice a Pedro: En estos momentos yo llevo en mi camión diez sacos más que tú en el tuyo, pero si cada uno dejamos cinco sacos tú llevarás el triple que yo”
9.1.1) Resuelve el problema
9.1.2) ¿Qué respuestas has encontrado?
9.1.3) ¿Cómo mejorarías tú ese enunciado?
9.1.4) ¿Qué respuestas te salen con ese enunciado tuyo?

Actividad 9.2: Un alumno ha inventado el siguiente enunciado: “El área de un rectángulo es 24 metros cuadrados. Un lado mide 2 metros más que el otro. Calcula la longitud de los lados”.
9.2.1) Resuelve el problema
9.2.2) ¿Qué respuestas has encontrado?
9.2.3) ¿Cómo mejorarías tú ese enunciado?
9.2.4) ¿Qué respuestas te salen con ese enunciado tuyo?

Actividad 9.3: Un alumno ha inventado el siguiente enunciado: “Pedro tiene 60 años, y su hija Luisa 24. ¿Dentro de cuántos años la edad de Luisa será cuatro veces la de Pedro?”
9.3.1) Resuelve el problema
9.3.2) ¿Qué respuestas has encontrado?
9.3.3) ¿Cómo mejorarías tú ese enunciado?
9.3.4) ¿Qué respuestas te salen con ese enunciado tuyo?

Tabla IV.10. Ficha de la Actividad 9

A) Objetivos

- Plantear y resolver unos problemas de álgebra que les proporcionamos y que, al haber sido inventados, pueden estar mal redactados.
- Analizar si las soluciones de los problemas de álgebra que les proporcionamos son posibles en la situación problemática real de tales problemas.
- Mejorar los enunciados de los problemas de álgebra que les proporcionamos.
- Plantear y resolver los problemas de álgebra mejorados.
- Analizar si las soluciones de los problemas de álgebra mejorados son posibles en la situación problemática real de tales problemas.

B) Contenidos

- Planteamiento de ecuaciones (OC. VIII).
- Reglas de despejar y de operar en las ecuaciones algebraicas (OC. IV).
- Comprobación semántica de las soluciones (OC. V)

- Análisis de las soluciones obtenidas. (OC. V)

C) Metodología

Esta actividad comprende:

- Una 1ª parte de la sesión nº 9 en la que los alumnos trabajan individualmente la actividad 9. Al final de esta 1ª parte se recogen los documentos escritos por los alumnos.
- Una 2ª parte de la sesión nº 9 en la que se ponen en común la corrección de todas las actividades de la actividad 9. Al final de esta 2ª parte el profesor da su explicación magistral.

D) Evaluación

Valoraremos que:

- Se planteen y resuelvan los problemas que se les proporcionan y los problemas que hayan mejorado.
- Se mejoren los enunciados de los problemas que se les proporcionan.
- Se analicen correctamente -en las situaciones problemáticas descritas en los problemas proporcionados y en los problemas mejorados- las soluciones de los problemas proporcionados y de los mejorados.

IV.2.6.11 Pruebas

Como ya dijimos, los alumnos del grupo de estudio repetirán dos veces la misma prueba individual y escrita. La 1ª prueba (denominada Prueba I) será realizada inmediatamente después del final de la experimentación de la propuesta en el aula. La 2ª prueba (denominada Prueba II), esto es, la repetición de la 1ª prueba, será realizada más de tres meses después. Se trata de reflexionar sobre la perdurabilidad - a corto y largo plazo- de los contenidos de nuestra propuesta curricular alternativa en el grupo de estudio.

IV.2.6.11.1 Prueba I

La Prueba I será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Prueba I

Cuestión I.1: Carmen tiene 42 años y su hijo 10: ¿Cuántos años han de pasar para que la edad de Carmen sea el triple de la de su hijo?

Cuestión I.2: En una droguería se venden 3 jabones y 2 botes de colonia por 12 euros, y también 4 jabones y 3 botes de colonia por 17 euros. Averigua el precio de cada producto.

Cuestión I.3: La dueña de la droguería de la actividad anterior no tiene el éxito esperado con las ofertas, y por ello lanza una oferta de 6 jabones y 4 botes de colonia por 22 euros. Explica razonadamente si ha rebajado o no ha rebajado los productos.

Cuestión I.4: ENUNCIADO (dado por el profesor): La suma de cuatro números consecutivos es 114. Calcula dichos números.
FORMULACIÓN (trabajo del alumno): $x + x + 1 + x + 2 = 114$
RESOLUCIÓN (trabajo del alumno): $x = 37$
Realiza la comprobación para saber si el alumno se merece un punto (por hacerlo bien), un cero (por hacerlo mal) o medio punto (por hacerlo bien pero no terminarlo).

Cuestión I.5: Dado el sistema $\begin{cases} x - 5 = 3(y - 5) \\ x + 1 = 2(y + 1) \end{cases}$. Inventa un enunciado en el que hables de:
-librería -libros en inglés -libros en francés

Tabla IV.11. Ficha de la Prueba I

A) Objetivos

- Evaluar a corto plazo si se utiliza adecuadamente el método algebraico de plantear y resolver ecuaciones para la resolución de problemas algebraicos.
- Evaluar a corto plazo si se realiza una comprobación semántica de las soluciones obtenidas mediante el método algebraico.
- Evaluar a corto plazo si se utiliza adecuadamente el tanteo aritmético para la resolución de problemas algebraicos que no sean resolubles mediante el habitual método algebraico de plantear y resolver ecuaciones.
- Evaluar a corto plazo si se sabe inventar un enunciado que sea coherente con un contexto real y con un sistema de ecuaciones que les proporcionamos.

B) Contenidos

- Planteamiento de ecuaciones (OC. VIII).
- Reglas de despejar y de operar en las ecuaciones algebraicas (OC. IV).
- Comprobación semántica (OC. V).
- Invención de enunciados (OC. IX).

C) Metodología

La sesión nº 10 se dedica a la realización de esta prueba individual y escrita que denominamos Prueba I.

La prueba se realiza con las mesas separadas y en estricto silencio, para evitar que los alumnos se copien las respuestas de sus compañeros.

D) Evaluación

Valoramos que:

- Se utilice adecuadamente el habitual método algebraico de plantear y resolver ecuaciones para la resolución de problemas de álgebra.
- Se compruebe semánticamente la solución de los problemas algebraicos que se hallan resuelto mediante el habitual método algebraico de plantear y resolver ecuaciones.
- Se utilice adecuadamente el tanteo aritmético para la resolución de problemas algebraicos que no son resolubles mediante el habitual método algebraico de plantear y resolver ecuaciones.
- Se inventen enunciados de problemas de álgebra que sean coherentes con un contexto real y con unas ecuaciones que les proporcionamos.

IV.2.6.11.2 Prueba II

La Prueba II, cuyas cuestiones son la repetición de las de la prueba I, será presentada a los alumnos con el siguiente formato:

Prueba II

Cuestión II.1: Carmen tiene 42 años y su hijo 10: ¿Cuántos años han de pasar para que la edad de Carmen sea el triple de la de su hijo?

Cuestión II.2: En una droguería se venden 3 jabones y 2 botes de colonia por 12 euros, y también 4 jabones y 3 botes de colonia por 17 euros. Averigua el precio de cada producto.

Cuestión II.3: La dueña de la droguería de la actividad anterior no tiene el éxito esperado con las ofertas, y por ello lanza una oferta de 6 jabones y 4 botes de colonia por 22 euros. Explica razonadamente si ha rebajado o no ha rebajado los productos.

Cuestión II.4: ENUNCIADO (dado por el profesor): La suma de cuatro números consecutivos es 114. Calcula dichos números.
FORMULACIÓN (trabajo del alumno): $x+x+1+x+2=114$
RESOLUCIÓN (trabajo del alumno): $x=37$
Realiza la comprobación para saber si el alumno se merece un punto (por hacerlo bien), un cero (por hacerlo mal) o medio punto (por hacerlo bien pero no terminarlo).

Cuestión II.5: Dado el sistema $\begin{cases} x-5=3(y-5) \\ x+1=2(y+1) \end{cases}$. Inventa un enunciado en el que hables de:

-librería -libros en inglés -libros en francés

Tabla IV.12. Ficha de la Prueba II

A) Objetivos

- Evaluar a largo plazo si se utiliza adecuadamente el método algebraico de plantear y resolver ecuaciones para la resolución de problemas algebraicos.
- Evaluar a largo plazo si se realiza una comprobación semántica de las soluciones obtenidas mediante el método algebraico.
- Evaluar a largo plazo si se utiliza adecuadamente el tanteo aritmético para la resolución de problemas algebraicos que no sean resolubles mediante el habitual método algebraico de plantear y resolver ecuaciones.
- Evaluar a largo plazo si se sabe inventar un enunciado que sea coherente con un contexto real y con un sistema de ecuaciones que les proporcionamos.

B) Contenidos

Son los mismos que los de la Prueba I.

C) Metodología

La sesión nº 11 se dedica a la realización de esta prueba individual y escrita que denominamos Prueba II. La prueba se realiza con las mesas separadas y en estricto silencio, para evitar que los alumnos se copien las respuestas de sus compañeros.

D) Evaluación

Valoramos que:

- Se siga utilizando adecuadamente el habitual método algebraico de plantear y resolver ecuaciones para la resolución de problemas de álgebra.
- Se siga comprobando semánticamente la solución de los problemas algebraicos que se hallan resuelto mediante el habitual método algebraico de plantear y resolver ecuaciones.
- Se siga utilizando adecuadamente el tanteo aritmético para la resolución de problemas algebraicos que no son resolubles mediante el habitual método algebraico de plantear y resolver ecuaciones.
- Se sigan inventando enunciados de problemas de álgebra que sean coherentes con un contexto real y con unas ecuaciones que les proporcionamos.

IV.2.7. Calendario previsto.

Una vez que hemos desarrollado detalladamente cuál es nuestra propuesta alternativa de enseñanza del lenguaje algebraico, dirigida a alumnos del nivel de enseñanza de 3º de Educación Secundaria Obligatoria, mostramos ahora el calendario previsto para la experimentación en el aula de la propuesta durante el curso 2007-08 en el IES "Goya" de Zaragoza:

CALENDARIO PREVISTO (Fase de planificación)		
	SESIONES	**TÍTULOS DE LAS ACTIVIDADES**
de 15-10-07 a 19-10-07	Sesión 1 (50 minutos)	Actividad 1.1: La letra como abreviaturas, como variable y como incógnita. Actividad 1.2: La letra como incógnita.
	Sesión 2 (50 minutos)	Actividad 2: Resolución de ecuaciones lineales.
	Sesión 3 (50 minutos)	Actividad 3: Clases de ecuaciones lineales.
de 19-11-07 a 30-11-07	Sesión 4 (50 minutos)	Actividad 4: Traducción de expresiones.
	Sesión 5 (50 minutos)	Actividad 5: Problemas desglosados en preguntas cortas.
	Sesión 6 (50 minutos)	Actividad 6: Necesidad de comprobar el enunciado.
	Sesión 7 (50 minutos)	Actividad 7: Plantear, resolver y comprobar.
	Sesión 8 (50 minutos)	Actividad 8: Invención de enunciados de problemas.
	Sesión 9 (50 minutos)	Actividad 9: Resolución de problemas inventados.
03-12-07	Sesión 10 (60 minutos)	Prueba I
03-03-08	Sesión 11 (60 minutos)	Prueba II

Tabla IV.13. Calendario propuesto para la experimentación de la propuesta en el curso 2007-2008.

Del anterior calendario destacamos que, para no perturbar excesivamente la programación oficial del curso (tal y como explicamos en el anterior apartado IV.2.6), dividimos la experimentación de la propuesta didáctica en dos partes:

> -Una primera parte -las tres primeras actividades- abarca del 15 al 19 de octubre de 2007, entre las unidades dedicadas a la aritmética y las dedicadas a la resolución de ecuaciones algebraicas.
>
> -Una segunda parte -las seis siguientes y últimas actividades- comprende del 19 al 30 de noviembre de 2007. Cada actividad de la propuesta será impartida en un período lectivo del horario de la asignatura de Matemáticas de 3º de ESO, por lo que ocupará una sesión de 50 minutos.

También destacamos que la 1ª prueba está programada para el 3 de diciembre de 2007 –una semana después del fin de la experimentación- y la 2ª prueba lo está para el 3 de marzo, más de tres meses después de dicho fin y tras la vuelta a la enseñanza habitual del álgebra escolar (progresiones, funciones lineales y afines, geometría algebraica,…). Cada prueba será realizada en la hora de tutoría y tomará unos 10 minutos de recreo –para asegurar que no haya problemas de falta de tiempo-, por lo que ocupará una sesión de 60 minutos.

Con este calendario previsto para la experimentación en el aula de la propuesta cerramos la parte del presente capítulo que hemos dedicado a la exposición de la Fase de planificación.

IV.3. Fase de acción

En esta 2ª parte de este Capítulo IV desarrollamos la Fase de acción o de experimentación de la propuesta en el aula, que tuvo lugar en el Instituto de Educación Secundaria "Goya" de Zaragoza durante el curso escolar 2007-08.

Para perturbar lo menos posible la labor del centro educativo y no alejar demasiado a los alumnos de la programación oficial: respetamos la organización de horarios, de grupos de alumnos y de aulas que estaba establecida por la jefatura de estudios del centro desde principio de curso; nuestra experimentación sólo abarcó 9 sesiones lectivas de la clase de Matemáticas (para las 9 actividades didácticas) y 2 sesiones lectivas de Tutoría (para la realización de las pruebas).

En este apartado IV.3 describimos las circunstancias de tipo organizativo –grupos de alumnos, horarios de la asignatura y asignación de aulas- en las que se desarrolló la experiencia y las características sociológicas y psicológicas del grupo de 33 alumnos de 3ª de ESO en el que experimentamos nuestra propuesta alternativa de enseñanza del lenguaje algebraico.

Terminamos el apartado contrastando el calendario previsto en la Fase de planificación de la propuesta con el calendario que realmente fue implementado en la Fase de acción.

IV.3.1. El centro educativo del grupo de estudio

Nuestra propuesta curricular, dirigida a alumnos de 3º de ESO (14-15 años), fue experimentada en el Instituto de Educación Secundaria “Goya” de la ciudad de Zaragoza durante el curso 2007-08. En dicho centro educativo, la jefatura de estudios había establecido la siguiente organización de grupos para el nivel de enseñanza de tercero durante el curso 2007-08:

- Para cuestiones administrativas (notas, estadísticas, etc), para la organización de las tutorías y para recibir las asignaturas de Educación Física, Educación Plástica-Visual y Tecnología los alumnos de tercero fueron distribuidos en tres grupos: 3º A, 3º B y 3º C.

- Para recibir todas las demás asignaturas –incluidas las Matemáticas- los alumnos de tercero fueron distribuidos en cuatro subgrupos: 3.1, 3.2, 3.3 y Diversificación I.

    -El Subgrupo 3.1 comprendía aquellos alumnos de 3º A que cursaban Programa Bilingüe en alemán.

    -El Subgrupo 3.2 comprendía aquellos alumnos de 3º A que no cursaban el Programa Bilingüe en alemán y algunos alumnos de 3º C elegidos al azar.

    -El Subgrupo 3.3 comprendía aquellos alumnos de 3º ESO-B que no cursaban el Programa de Diversificación Curricular I y por el resto de alumnos de 3º C que no habían sido incluidos en el Subgrupo 3.2.

    -El Grupo de Diversificación I comprendía, evidentemente, aquellos alumnos que cursaban las asignaturas de Ámbito Científico-Técnico, Ámbito Socio-Lingüístico y Ámbito Práctico. Todos ellos demás habían sido incluidos en el grupo de 3º B para recibir las asignaturas de Ecuación Física y Educación Plástica y Visual.

Nosotros realizamos la experimentación en los horarios y en las aulas de los dos respectivos subgrupos 3.1 y 3.2, es decir, impartimos la misma propuesta curricular pero en horarios y aulas diferentes. Sólo realizamos conjuntamente las dos pruebas. No obstante, como veremos, a efectos de la metodología de investigación (observación y análisis de los resultados y reflexión sobre la totalidad de la labor de indagación), consideramos un solo grupo de estudio a la unión de los subgrupos 3.1 y 3.2.

IV.3.2. Acotación del grupo de estudio

Nuestro grupo de estudio lo definimos como el formado por:

- Los 16 alumnos que constituían la totalidad del subgrupo 3.1 y que numeramos, por orden alfabético, del A1 al A16.

- 17 de los 21 alumnos que constituían la totalidad del subgrupo 3.2 y que numeramos, por orden alfabético, del A17 al A33, tras haber excluido a 4 alumnos que –por su muy específica problemática individual- hubieran distorsionado demasiado los resultados de la investigación.

Pasamos a estudiar ahora las características de los anteriores subgrupos 3.1 y 3.2 que integran nuestro grupo de estudio.

A) El Subgrupo 3.1

- Como ya hemos indicado, este subgrupo era el formado por aquellos alumnos de 3º ESO-A que cursaban al Programa de Enseñanza Bilingüe en alemán. La pertenencia a dicho programa implica estudiar lengua alemana (4 clases a las semana, 2 de ellas fuera del horario habitual), y cursar una de las asignaturas del currículo en alemán (las Ciencias Sociales en el curso 2007-08). Lo anterior explica, en parte, porqué los adolescentes del subgrupo 3.1 eran, en general, estudiantes muy motivados que solían obtener buenos resultados académicos.
- El Subgrupo 3.1 tenía un total de 16 alumnos. Los 16 fueron incluidos en nuestro grupo de estudio. El subgrupo presentaba la siguiente composición:

  -15 españoles. A priori, ninguno presentaba una problemática especial.

  -1 moldavo. Hablaba perfectamente el castellano y llevaba más de tres años escolarizado en el sistema educativo español.

B) El "Subgrupo 3.2"

- Como ya hemos dicho, este subgrupo estaba formado por aquellos alumnos de 3º A que no estaban en el Programa de Enseñanza Bilingüe en alemán y por algunos alumnos de 3º C que habían sido elegidos aleatoriamente. Era una clase muy heterogénea en cuanto a motivación y resultados académicos.
- Tenía un total de 21 alumnos. 17 de ellos fueron incluidos en nuestro estudio. El subgrupo presentaba la siguiente composición:

  -16 españoles. 14 de ellos fueron incluidos en nuestro grupo de estudio y 2 de ellos fueron excluidos. Uno no venía casi nunca y otro tenía un grave problema psicológico que le impelía a vivir aislado, sin molestar pero sin comunicarse con nadie.

  -3 ecuatorianos. Todos fueron incluidos en nuestro grupo de estudio porque el castellano era su lengua materna y porque llevaban más de tres años escolarizados en el sistema educativo español.

  -2 chinos. Ambos fueron excluidos de nuestro grupo de estudio porque era imposible comunicarse con ellos por su desconocimiento del castellano. Se dedicaron a trabajar, en absoluto silencio, cuadernos de aprendizaje elemental de lengua castellana.

IV.3.3. Características del grupo de estudio

Tras haber analizado el marco organizativo del centro en el que se desarrolló la experimentación de la propuesta y haber acotado el grupo de estudio de la misma, pasamos ahora a estudiar las características de dicho grupo desde una perspectiva sociológica y desde una perspectiva psicológica –ésta última centrada en su percepción y valoración de las Matemáticas-. Los datos sociológicos fueron obtenidos a partir de una encuesta diseñada por el Departamento de Orientación del Instituto “Goya”, que los alumnos contestaron en la hora de tutoría. Los datos psicológicos los obtuvimos de una encuesta diseñada por el equipo investigador, que los alumnos respondieron en la hora de tutoría.

IV.3.3.1. Análisis sociológico

En este análisis estudiamos las siguientes variables:

- A) Sexo
- B) Edad
- C) Nacionalidad,
- D) Profesión-estudios del padre
- E) Profesión-estudios de la madre.

A) Variable Sexo

Sexo	Nº Alumnos	%
Varones	15	45%
Mujeres	18	55%
Total	33	100%

Tabla IV.14. Sexo

B) Variable Edad

Año de nacimiento	Nº cursos repetidos	Nº alumnos	%
1991	2	1	3%
1992	1	4	12%
1993	0	28	85%
Total		33	100%

Tabla IV.15. Edad

C) Variable Nacionalidad

Nacionalidad	Nº alumnos	%
España	29	88%
Ecuador	3	9%
Moldavia	1	3%
Total	33	100%

Tabla IV.16. Nacionalidad

D) Variable Profesión-Estudios del padre y de la madre

Profesión-Estudios del padre	Alumnos	%
Profesiones que requieren estudios generales (Tipo Bachillerato y Universidad)	13	39%
Profesiones que requieren estudios profesionales (Tipo Formación Profesional)	5	15%
Profesiones que no requieren estudios	13	39%
No contesta	2	6%
Total	33	100%

Tabla IV.17. Profesión-Estudios del padre

Profesión-Estudios de la madre	Alumnos	%
Profesiones que requieren estudios generales (Tipo Bachillerato y Universidad)	9	27%
Profesiones que requieren estudios profesionales (Tipo Formación Profesional)	5	15%
Profesiones que no requieren estudios	8	24%
Ama de casa	9	27%
No contesta	2	6%
Total	33	100%

Tabla IV.18. Profesión-Estudios de la madre

Retrato sociológico del grupo de estudio:

- La proporción entre los sexos está ligeramente desequilibrada hacia las mujeres: 45% de hombres y 55% de mujeres.
- El porcentaje de repetidores es del 15% de los 33 alumnos del grupo.
- Los inmigrantes constituyen el 12% de los 33 alumnos del grupo. Es una inmigración fundamentalmente castellano-hablante, sin problemas para comprender la lengua vehicular de enseñanza.
- El porcentaje de padres que trabajan en profesiones que requieren estudios generales (Bachillerato o Universidad), el 39% del total de los 33 padres varones, supera al respectivo de madres, el 27% del total de las 33 madres.
- El porcentaje de padres y madres que trabajan en profesiones que requieren estudios profesionales (Tipo Formación Profesional) es el mismo, el 15% de los 33 padres varones y el 15% de las 33 madres.
- El porcentaje de padres que trabajan en profesiones que no requieren estudios, el 39% del total de 33 padres varones, supera al respectivo de las madres, el 24% del total de las 33 madres, pero téngase en cuenta que hay otro elevado porcentaje de mujeres, el 27% de las 33 madres, que son amas de casa.

En resumen, podemos decir que estamos ante un grupo heterogéneo de clase media y de clase trabajadora, a partes casi iguales, y con una cierta persistencia en la familia de los roles de género tradicionales: el varón desempeña profesiones de más nivel cultural que la mujer y hay muchas mujeres que no trabajan fuera del hogar, esto es, que son amas de casa.

IV.3.3.2. Análisis psicológico

En este análisis estudiamos las siguientes variables:

- A) Dificultad-esfuerzo
- B) Amenidad-afecto
- C) Metodología de estudio
- D) Utilidad en la vida del alumno
- E) Utilidad en la vida cotidiana
- F) Utilidad en los institutos
- G) Utilidad en la sociedad actual

A) Variable dificultad-esfuerzo

¿Las matemáticas son difíciles?	**Alumnos**	**%**	**¿Las matemáticas hay que estudiarlas?**	**Alumnos**	**%**
Muy difíciles	4	12%	Más que otras materias	3	9%
Regular	23	69%	Lo mismo que otras materias	9	27%
Muy fáciles	5	15%	Nada o menos que otras materias	19	57%
No contesta	1	3%	No contesta	2	6%
Total	33	100%	Total	33	100%

Tabla IV.19. Dificultad-esfuerzo.

B) Variable amenidad-afecto

¿Las matemáticas son amenas o aburridas?	**Alumnos**	**%**	**¿Las matemáticas te gustan?**	**Alumnos**	**%**
Son aburridas	2	6%	Poco	5	15%
Ni amenas ni aburridas	20	60%	Regular	18	54%
Son amenas	8	24%	Mucho	9	27%
No contesta	3	9%	No contesta	1	3%
Total	33	100%	Total	33	100%

Tabla IV.20. Amenidad-afecto.

C) Variable metodología de estudio

¿Cómo estudias las matemáticas?	**Número de veces que lo dicen:**
Haciendo los ejercicios y los problemas	21
Estudiando la teoría	6
No estudio	2

Tabla IV.22. Metodología de estudio.

D) Variable utilidad para la vida del alumno

¿Son útiles las matemáticas para tu vida?	**Alumnos**	**%**
No son útiles	1	3%
Regular	16	48%
Son muy útiles	15	45%
No contesta	1	3%
Total	33	100%

Tabla IV.21. Utilidad.

E) Variable utilidad en la vida cotidiana

¿Para qué son útiles las matemáticas en la vida cotidiana?	**Número de veces que lo dicen**
Para las compras, para manejar dinero, para que no te engañen…	26
Para resolver problemas, para el laboratorio, para pensar	4
Para nada	1

Tabla IV.23. Utilidad en la vida cotidiana

F) Variable utilidad en los institutos

¿Para qué se estudian las matemáticas en los institutos?	**Número de veces que lo dicen**
Para la vida adulta, para tener conocimientos básicos,…	18
Para estudios posteriores	7
Porque son obligatorias	3
Para nada	2

Tabla IV.24. Utilidad en los institutos

G) Variable utilidad en la sociedad actual

¿Para qué son útiles las matemáticas en la sociedad actual?	**Número de veces que lo dicen**
Para las compras, para la economía…	21
Para las carreras o profesiones	6
Para tener cultura	3
Para nada	1

Tabla IV.25. Utilidad en la sociedad actual

Retrato psicológico del grupo de estudio

- Son minoría los que consideran las matemáticas como difíciles, el 12% del total de 33 alumnos, o como fáciles, el 15% del total de 33 alumnos. Un mayoritario 69% del total de 33 alumnos no las considera ni fáciles ni difíciles.

- Son minoría los que consideran que las matemáticas deben ser estudiadas igual que otras materias (el 27% del total de 33 alumnos) o más que otras materias el (el 9% del total de 33 alumnos).

- La mayoría, el 57% del total de 33 alumnos, piensa que las matemáticas no se estudian nada o si se estudian, se estudian menos que otras materias.

- Hay una minoría, el 6% del total de 33 alumnos, a la que las matemáticas le resultan aburridas, si bien hay una minoría aún más amplia, el 15% del total de 33 alumnos, a las que las matemáticas les gustan poco.

- Hay una mayoría, el 54% del total de 33 alumnos, a la que las matemáticas ni les resultan aburridas ni amenas y una mayoría semejante, el 60% del total de 33 alumnos, a la que las matemáticas ni les gustan ni les disgustan.

- Hay una minoría, el 24% del total de 33 alumnos, a la que las matemáticas les resultan amenas y una minoría semejante, el 27% del total de 33 alumnos, a la que le gustan las matemáticas.

- Respecto a la metodología utilizada para estudiar matemáticas, 21 veces dicen que haciendo ejercicios y problemas frente a 6 veces que dicen que estudiando teoría.

- Respecto a la utilidad de las matemáticas para la vida cotidiana del alumno, la clase se divide casi en dos mitades: un 45% del total de 33 alumnos piensa que son útiles y un 48% del total de 33 alumnos piensa que regular de útiles.
- Respecto a cuál es la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana, 26 alumnos (de 33) dicen que son útiles para las compras, los negocios,... Como se ve, la identificación de las matemáticas con el mundo de la compra-venta es casi total.
- Respecto a porqué se estudian las matemáticas en los institutos, 18 alumnos (de 33) dicen que para la vida adulta, para tener conocimientos básicos y 7 (de 33) veces dicen que para estudios superiores. Podemos decir que piensan más en las matemáticas para la vida que en las matemáticas para sus estudios futuros.
- Respecto a la utilidad de las matemáticas en la sociedad actual, 21 alumnos (de 33) vuelven hablar de la compra-venta, la economía, los bancos…y 6 alumnos (de 33) vuelven hablar de carreras. Es evidente que sólo ven las matemáticas en las compra-ventas y (menos) en los estudios universitarios de hermanos, padres, conocidos…

En resumen, en general, los alumnos piensan que:

-Las Matemáticas no son ni fáciles ni difíciles, ni agradables ni desagradables.

-Las Matemáticas no hay que estudiarlas y si, acaso, estudiar es realizar ejercicios y problemas.

-Las Matemáticas son útiles en las compras de la vida cotidiana y, en menor medida, en los estudios posteriores.

Opinamos que la anterior percepción de las Matemáticas es atribuible, en parte, a una Matemática escolar excesivamente centrada en los procedimientos de cálculo y bastante alejada de la resolución de situaciones problemáticas reales.

IV.3.4. Espacio físico y horario de la Fase de acción

En este apartado estudiamos el marco espacial y temporal en el cual experimentamos nuestra propuesta de enseñanza.

IV.3.4.1. Espacio físico

- Las actividades didácticas de la propuesta (numeradas de la 1 a la 9) fueron realizadas en las aulas de 3º A y de 3º C, en las que los respectivos subgrupos 3.1 y 3.2 solían recibir las clases de Matemáticas. Ambas aulas eran físicamente indistinguibles y presentaban las siguientes características físicas durante el curso 2007-08:

-La pizarra y la mesa del profesor estaban situadas sobre una tarima desde la que se divisaba toda la clase.

-Carecían de ordenadores o de cañones de proyección.

-Las mesas de los alumnos sólo podían ordenarse, por falta de espacio, de 2 en 2, formando, en total, 3 columnas de ancho por 5 filas de profundidad. Resultaba un aula de tamaño muy ajustado. Era difícil pasar entre las mesas.

- La Prueba I y la Prueba II fueron realizadas simultáneamente por ambos subgrupos en el "Aula Cero", un espacio específicamente diseñado para la realización de exámenes y que presentaba las siguientes características físicas durante el curso 2007-08:

-La pizarra y la mesa del profesor estaban situadas sobre una tarima desde la que se divisaba toda el aula.

-Las mesas estaban ordenadas en 5 largas columnas de mesas individuales. En cada columna, cada mesa estaba separada de la anterior y de la siguiente mediante barras fijas de hierro.

IV.3.4.2. Horario

El horario oficial de los subgrupos 3.1 y 3.2 fue el siguiente durante el curso 2007-08:

HORAS	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
de 8:15 a 9:05 (1ª Hora)			Matemáticas Subgrupo **3.1**		
de 9:10 a 10 (2ª Hora)		Matemáticas Subgrupo <u>3.2</u>			
de 10:05 a 10:55 (3ª Hora)	Matemáticas Subgrupo <u>3.2</u>			Matemáticas Subgrupo **3.1**	Matemáticas Subgrupo <u>3.2</u>
de 10:55 a 11:25	RECREO	RECREO	RECREO	RECREO	RECREO
de 11:25 a 12:15 (4ª Hora)	Matemáticas Subgrupo **3.1**				
de 12:20 a 13:10 (5ª Hora)	Tutoría 3º ESO A				
de 13:15 a 14:05 (6ª Hora)					

Tabla IV.26. Horario oficial de las clases de Matemáticas y de la clase de Tutoría

Además hay que indicar que:

- Las actividades didácticas de la propuesta (numeradas de la 1 a la 9) se implementaron en las horas de matemáticas de los respectivos subgrupos 3.1 y 3.2.

- Las pruebas fueron realizadas (numeradas como Prueba I y Prueba II) simultáneamente por ambos subgrupos 3.1 y 3.2 en la hora de tutoría de 3º A. Como casi todos los alumnos de ambos subgrupos pertenecían al grupo de 3º A sólo unos pocos alumnos de 3º C se perdieron un par de clases de otras asignaturas para realizar las dos pruebas.

IV.3.5. Calendario de la Fase de acción

Ahora, comparamos el calendario previsto en la Fase de planificación con el que realmente implementado en la Fase de acción. Veamos la tabla que hemos elaborado para tal comprobación:

CALENDARIO FASE DE PLANIFICACIÓN		**TÍTULO DE LA ACTIVIDAD**	**CALENDARIO FASE DE ACCIÓN**	
	SESIONES		**SESIONES**	
de 15-10-07 a 19-10-07	Sesión 1	Actividad 1.1: La letra como abreviatura, como variable y como incógnita. Actividad 1.2: La letra como incógnita.	Sesión 1	de 15-10-07 a 19-10-07
	Sesión 2	Actividad 2: Resolución de ecuaciones lineales.	Sesión 2	
	Sesión 3	Actividad 3: Clases de ecuaciones lineales.	Sesión 3	
de 20-11-07 a 05-12-07	Sesión 4	Actividad 4: Traducción de expresiones.	Sesión 4	de 08-01-08 a 21-01-08
	Sesión 5	Actividad 5: Problemas desglosados en preguntas cortas.	Sesión5	
	Sesión 6	Actividad 6: Necesidad de comprobar el enunciado.	Sesión 6	
	Sesión7	Actividad 7: Plantear, resolver y comprobar.	Sesión 7	
	Sesión 8	Actividad 8: Invención de enunciados de problemas.	Sesión 8	
	Sesión 9	Actividad 9: Resolución de problemas inventados.	Sesión 9	
10-12-07	Sesión 10	Prueba I.	Sesión 10	28-01-08
03-03-08	Sesión 11	Prueba II.	Sesión 11	12-05-08

Tabla IV.26. Tabla de comparación entre el calendario planificado y el calendario implementado

Respecto a la comparación entre el calendario previsto y el realmente implementado en el aula durante la experimentación, destacamos que:

- Las 9 actividades y las 2 pruebas ocuparon un total de 11 sesiones, tal y como habíamos planificado.
- Las tres primeras sesiones de la propuesta curricular (las numeradas de la 1 a la 3) se experimentaron en las fechas previstas: del 15-10-07 al 19-10-07.
- Las seis siguientes sesiones de la propuesta curricular (las numeradas de la 4 a la 9) se experimentaron 6 semanas después de lo previsto: en vez de implementarse del 20-11-07 al 05-12-07, se implementó del 08-01-08 al 21-01-08.

  Tal desfase de seis semanas es atribuible a que, como la enseñanza oficial de los procedimientos de resolución de ecuaciones se prolongó dos semanas más allá de la fecha prevista (20-11-07), el equipo investigador optó por posponer la experimentación de las seis sesiones de la propuesta didáctica alternativa (numeradas de la 4 a la 9) para la vuelta de las vacaciones de Navidad, en enero de 2008, para evitar que las perturbaciones de los últimos días del primer trimestre (exámenes, excursiones, festivales navideños,…) alterasen gravemente los resultados de nuestra experimentación.
- La realización de las 2 pruebas, puesto que la implementación de la propuesta didáctica se había retrasado, tuvo que ser también pospuesta: la realización de la Prueba I se pasó del 10-12-07 al 28-01-08, inmediatamente después de terminar la experimentación, y la de la Prueba II se pasó del 03-03-08 al 12-05-08, más de tres meses del fin de la experimentación.

En resumen, salvo en el retraso de 6 semanas en el comienzo de la implementación de las sesiones numeradas del 4 al 9 –achacable al desarrollo del programa oficial y a la organización de la vida escolar en el final del 1º trimestre- y el subsiguiente e inevitable retraso de la realización las 2 pruebas, el grado de cumplimiento del calendario planificado ha sido total en esta Fase de acción: Se han experimentado todas las actividades y las pruebas previstas; Todas las actividades y las pruebas han ocupado el número de sesiones planeado.

Y así, con la comparación entre el calendario diseñado en la Fase de planificación y el calendario que realmente desarrollamos en la Fase de acción en el IES Goya de Zaragoza durante el curso 2007-08, terminamos este Capítulo IV que hemos dedicado a las Fases de Planificación y de Acción de nuestra propuesta alternativa de enseñanza del lenguaje algebraico dirigida a alumnos de 3º de ESO. En los dos capítulos restantes de la tesis (el V y el VI) abordamos, respectivamente, la Fase de observación de los resultados obtenidos en nuestra experimentación y la Fase de reflexión sobre la totalidad de nuestra labor de investigación.

Capítulo V:

Fase de observación

V.1. Introducción

En capítulos anteriores ya explicamos que la metodología de trabajo que hemos escogido, para el desarrollo de esta tesis doctoral, es la de “Investigación-Acción”, que comprende: la Fase de planificación de nuestra propuesta de enseñanza alternativa del lenguaje algebraico dirigida a alumnos del nivel de enseñanza de 3º de Educación Secundaria Obligatoria (14-15 años); la Fase de acción que fue experimentada en un grupo de estudio de 33 alumnos de 3º de ESO del Instituto “Goya” de Zaragoza durante el curso 2007-08; la Fase de observación y análisis de los resultados obtenidos en la experimentación que va a ser expuesta en el presente Capítulo V; la Fase de reflexión sobre la totalidad de nuestra labor investigadora que será desarrollada en el siguiente y último Capítulo VI.

La experimentación en el aula nos proporcionó dos tipos de informaciones: las anotaciones que el profesor en el aula realizó en el momento sobre el desarrollo de cada sesión de enseñanza y las hojas de trabajo escritas que recogimos a los alumnos. Con las anotaciones elaboramos el Anexo II “Diario de Clase” Y con la corrección de las hojas, utilizando los criterios de evaluación previstos en la Fase de planificación, confeccionamos el Anexo III “Tablas de Resultados” Pues bien, a partir esencialmente del análisis de las tablas del Anexo III, matizado por el estudio de las anotaciones del Diario de Clase y por el retorno –cuando la ocasión lo requería- a la observación directa de las hojas de trabajo escritas por los alumnos, hemos podido observar el grado de comprensión alcanzado por el grupo de estudio.

Este Capítulo V se organiza en torno al análisis de los resultados de las nueve actividades que constituyen nuestra propuesta de enseñanza. A cada una de las mencionadas actividades se destina un apartado que, a su vez, se conforma con los siguientes cuatro epígrafes:

A) **Actividad propuesta:** En esta parte recordamos los enunciados de las actividades propuestas. Tales enunciados están también especificados en el subapartado IV.2 "Fase de planificación" del anterior Capítulo IV y en el Anexo I "Enunciados de las Actividades".

B) **Criterios de Evaluación:** En esta parte especificamos los criterios de evaluación comunes de las actividades propuestas. Tales criterios de evaluación de las actividades propuestas están también explicitados en el subapartado IV.2 "Fase de planificación" del anterior Capítulo IV. Las puntuaciones, grosso modo, son las siguientes: un 1 si la respuesta es correcta, un 2 si es casi correcta, un 3 si es incorrecta, un 4 si se entregó en blanco y un 0 si no se vino a clase.

C) **Resultados:** En esta parte presentamos las tablas que indican las valoraciones obtenidas por los 33 alumnos que intervienen en el estudio de campo.

D) **Análisis de la comprensión de los contenidos (CC)**. Utilizando las unidades de análisis de Comprensión del Contenido, CC, previamente definidas en el apartado III.12.2, evaluamos el grado de comprensión alcanzado por los alumnos.

V.2. Actividad 1

A) Actividad propuesta

ACTIVIDAD 1.1: LA LETRA COMO ABREVIATURA, COMO VARIABLE Y COMO INCÓGNITA.

Marca con una cruz X según se trate de una letra usada como abreviatura, como variable o como incógnita:

Actividad	Entidad matemática	Letra como abreviatura	Letra como variable	Letra como Incógnita
1.1.1	$\mathbf{x}^2 - 5\mathbf{x} + 6 = 0$			
1.1.2	$\mathbf{x}^2 - 5\mathbf{x} + 6$			
1.1.3	$3\mathbf{x} – 4 = 7$			
1.1.4	"El barco llegó 30 **h** antes de lo previsto"			
1.1.5	$30\,\mathbf{h} = 60$			
1.1.6	"Probaron el nuevo prototipo el 5-10-07, que era **V**"			

1.1.7	Recta **y** = 3**x** - 1			
1.1.8	**a** + **b** = **b** + **a**			
1.1.9	4$\mathbf{x}^5$ = 4			
1.1.10	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab}$			
1.1.11	$\mathbf{a}^3 - 4\mathbf{a}^2 - 1$			
1.1.12	***A* = *b* * *a***			

ACTIVIDAD 1.2: LA LETRA COMO INCÓGNITA.
(Para realizar en grupos de cuatro)

Actividad 1.2.1:
¿Cuál de estos números es solución de la ecuación $5x-9=4(x-5)$? Razónalo sin resolver la ecuación por métodos algebraicos.
a) $x=4$ b) $x=-3$ c) $x=14$ d) $x=-11$

Cálculos que realizas:

Actividad 1.2.2:
Dada la ecuación $7x+4=60$.
-Calcula:
Si $x=0$ $7x+4=$
Si $x=1$ $7x+4=$
Si $x=5$ $7x+4=$
Si $x=6$ $7x+4=$
Si $x=7$ $7x+4=$
Si $x=8$ $7x+4=$
Si $x=9$ $7x+4=$
Si $x=10$ $7x+4=$

-¿Has encontrado soluciones de la ecuación $7x+4=60$? ¿Puedes encontrar todas las que haya?

Cuadro V.1. Enunciados de la actividad 1

B) Criterios de evaluación

-Criterios de evaluación de la actividad 1.1

- 0) No asiste a clase.
- 1) Responde correctamente.
- 3) Responde incorrectamente.
- 4) No contesta.

-Criterios de evaluación de la actividad 1.2

- 0) No asiste a clase.
- 1) Utiliza el método aritmético indicado sin cometer errores de cálculo.
- 2) Utiliza el método aritmético indicado pero comete algún error de cálculo.

- 3) Utiliza el método algebraico para resolver la ecuación.
- 4) No contesta.

C) Resultados

Actividad 1.1.1					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	26	5	0	33
%	6%	79%	15%	0%	100%

Actividad 1.1.2					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	8	21	2	33
%	6%	24%	64%	6%	100%

Actividad 1.1.3					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	25	5	1	33
%	6%	76%	15%	3%	100%

Actividad 1.1.4					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	28	3	0	33
%	6%	84%	9%	0%	100%

Actividad 1.1.5					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	4	27	0	33
%	6%	12%	81%	0%	100%

Actividad 1.1.6					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	20	10	1	33
%	6%	60%	30%	3%	100%

Actividad 1.1.7					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	14	16	1	33
%	6%	42%	48%	3%	100%

Actividad 1.1.8					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	21	9	1	33
%	6%	64%	27%	3%	100%

Actividad 1.1.9					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	27	3	1	33
%	6%	82%	9%	3%	100%

Actividad 1.1.10					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	19	12	0	33
%	6%	58%	36%	0%	100%

Actividad 1.1.11					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	14	14	3	33
%	6%	42%	42%	9%	100%

Actividad 1.1.12					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	20	11	0	33
%	6%	61%	33%	0%	100%

Actividad 1.2.1						
Calificaciones	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	8	0	3	20	33
%	6%	24%	0%	9%	60%	100%

Actividad 1.2.2						
Calificaciones	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	2	3	16	0	12	33
%	6%	9%	48%	0%	36%	100%

Tabla V.1. Resultados de la actividad 1

D) Análisis de la comprensión de contenidos (CC)

- Algunos estudiantes identificaron correctamente las letras de los polinomios (CC. I. 1.1), de las fórmulas geométricas (CC. I. 1.2), de las fórmulas físicas (CC. I. 1.3), de las identidades notables (CC. I. 1.4) y de las ecuaciones geométricas de rectas (CC. I. 1.5) como variables. Realizaron dicha identificación aunque las letras involucradas no sean las habituales x e y.

  Pensamos que dicha comprensión estuvo favorecida, en parte, por el hecho de que, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, los alumnos suelen sustituir las letras por números cualesquiera en polinomios, fórmulas geométricas, fórmulas físicas, identidades notables y en ecuaciones de rectas.

- Fueron varios los alumnos que identificaron correctamente las letras de las ecuaciones como incógnitas (CC. II. 2), incluso aunque las letras involucradas no sean las habituales “x” e “y”.

  Opinamos que son alumnos que comprenden que la ausencia o la presencia del signo = es lo que determina que una expresión algebraica sea un polinomio o una ecuación.

- Hubo estudiantes que identificaron las variables de los polinomios (CC. I. 2.1) y las incógnitas de las ecuaciones (CC. II. 2) como abreviaturas de palabras (CC. III. 2).

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que, como muchos problemas permiten transcripciones literales –palabra a palabra- que llevan a planteamientos que son formalmente correctos, es fácil concebir las letras de las ecuaciones de los problemas algebraicos como abreviaturas de los sustantivos (CC. III. 1.2) que aparecen en los enunciados de tales problemas y también es fácil extender tan errónea concepción, por generalización, a toda letra de cualquier polinomio (CC. I) o ecuación (CC. II).

- Ciertos alumnos identificaron las variables de las fórmulas geométricas (CC. I. 1.2) y físicas (CC. I. 1.3) como abreviaturas de sustantivos (CC. III. 2.2), en vez de sustitutos de las medidas de tales sustantivos.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que tales fórmulas se suelen enunciar oralmente citando los sustantivos involucrados (por ejemplo: "base por altura") –en vez de citar las medidas de tales sustantivos ("longitud de la base por la de la altura")- para facilitar su transmisión oral y memorización.

- Algunos estudiantes identificaron las incógnitas de las ecuaciones (CC. II. 2) como variables (CC. I. 2).

  El error anterior puede ser sólo verbal (no conceptual) puesto que, en la enseñanza actual del álgebra escolar, el primer paso de la resolución de un problema de álgebra suele denominarse "asignación de variables".

- Hubo alumnos que identificaron erróneamente la variable x de polinomios de la forma ax^2+bx+c -e incluso de la forma ax^3+bx^2+c- como incógnita (CC. II) porque, probablemente, identificaron tales polinomios de 2º grado (e incluso de 3º grado) como ecuaciones de 2º grado.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, se insiste más en lo procedimental (la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas), que en lo conceptual (la comprensión del concepto de ecuación lineal y cuadrática).

- La mayoría del grupo de estudio no estaba familiarizados con la resolución de las ecuaciones mediante tanteo aritmético (CC. IV). Lo anterior es atribuible, en parte, a que, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, no se practica casi nunca la resolución de ecuaciones mediante tanteo aritmético.

- Algunos alumnos del grupo de estudio que comprendieron fácilmente el método de resolución de ecuaciones mediante tanteo aritmético (CC. IV), cuando se les sugirió en qué consiste.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a la intrínseca sencillez conceptual del método aritmético de tanteo, y, en parte, a la presentación del método de tanteo como evaluación numérica de ecuaciones (CC. IV. 1), que hemos realizado en nuestra propuesta curricular alternativa.

V.3. Actividad 2

A) Actividad propuesta

ACTIVIDAD 2: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES.

2.1) Resuelve:

2.1.a) $x+4=5$ 2.1.b) $x-7=8$ 2.1.c) $5x=100$

2.1.d) $-6x=72$ 2.1.e) $\frac{x}{4}=12$ 2.1.f) $\frac{4x}{20}=3$

2.2) Resuelve:

2.2.a) $7x-19=5x-27$ 2.2.b) $-1-2x=-3x-11$

2.3) Resuelve:

2.3.a) $7+3(2x-1)=0$ 2.3.c) $3x=4+(3-x)$

2.3.b) $x-5(x-2)=6x$ 2.3.d) $120=2x-(15-7x)$

2.4) Resuelve:

2.4.a) $\frac{4(x-1)}{3}-\frac{2(x-3)}{6}=5$ 2.4.b) $x+\frac{2(x-3)}{4}-\frac{5(x+1)}{10}=1$

Cuadro V.2. Enunciados de la actividad 2

B) Criterios de evaluación

- 0) No asiste a clase.
- 1) Despeja y calcula correctamente.
- 2) Despeja correctamente pero comete errores de cálculo.
- 3) Despeja incorrectamente.
- 4) No contesta.

C) Resultados

Actividad 2.1.a: $x+4=5$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	32	0	0	0	33
%	3%	97%	0%	0%	0%	100%

Actividad 2.1.b: $x-7=8$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	29	1	2	0	33
%	3%	88%	3%	6%	0%	100%

Actividad 2.1.c: $5x=100$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	30	0	2	0	33
%	3%	91%	0%	6%	0%	100%

Tabla V.2. Resultados de las actividades 2.1.a, 2.1.b y 2.1.c

De las **actividades 2.1.a, 2.1.b y 2.1.c** destacamos la siguiente respuesta del alumno A17: "$5x = 100 \quad x = 100 - 5 \quad x = 95$". Es muy posible que dicho alumno opere así porque interpreta $5x = 100$ como $5 + x = 100$.

Actividad 2.1.d: $-6x = 72$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	22	1	7	2	33
%	3%	67%	3%	21%	6%	100%

Tabla V.3. Resultados de la actividad 2.1.d

De la **actividad 2.1.d** destacamos que las 7 respuestas incorrectas se dividen en dos grupos:

- Hay 5 respuestas como la del alumno A17: "$-6x = 72 \qquad x = 72 + 6 \qquad x = 78$".

  Es muy posible que $-6x = 72$ se interpreta como $-6 + x = 72$.

- Hay 2 respuestas como la del alumno A17: "$-6x = 72 \qquad x = 6/72$"

  El -6 (que está multiplicando a la x) se pasa como 6 al otro miembro de la ecuación porque, probablemente, $-6x$ se lee como $-6 + x$.

Actividad 2.1.e: $\frac{x}{4} = 12$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	Total
Nº de respuestas:	1	22	2	5	3	33
%	3%	67%	6%	15%	9%	100%

Actividad 2.1.f: $\frac{4x}{20} = 3$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	Total
Nº de respuestas:	1	21	2	2	7	33
%	3%	64%	6%	6%	21%	100%

Tabla V.4. Resultados de la actividad 2.1.e y 2.1.f

De las **actividades 2.1.e y 2.1.f**, destacamos la siguiente respuesta del alumno A11 en la que se aplica sin comprensión una técnica de eliminación de denominadores:

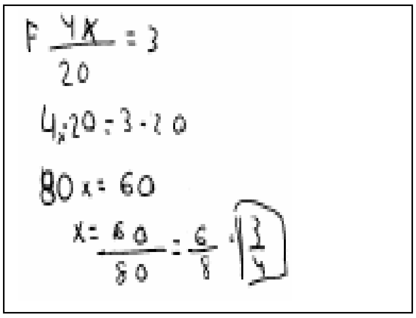


Figura V.1. Respuesta del alumno A11

Actividad 2.2.a: $7x-19=5x-27$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	18	11	3	0	33
%	3%	55%	33%	9%	0%	100%

Tabla V.5. Resultados de la actividad 2.2.a

De la **actividad 2.2.a** destacamos que:

- El conjunto de las 11 respuestas calificadas con un 2 se divide en dos subconjuntos de 7 y 4 respuestas en las que, respectivamente, se calcula mal el resultado de $-27+19$ y -8/2. Es decir, tales alumnos tienen dificultades al operar con números enteros.
- Hay una respuesta en la que se llega a la expresión correcta $2x=-8$ pero en la que luego se escribe $x=-8-2$. Es muy posible que porque $2x=-8$ se interprete como $2+x=-8$.

Actividad 2.2.b: $-1-2x=-3x-11$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	22	7	3	0	33
%	3%	67%	21%	9%	0%	100%

Tabla V.6. Resultados de la actividad 2.2.b

Sobre la **actividad 2.2.b** destacamos que hay 5 respuestas en las que se calcula mal la operación $-11+1$, que hay otra respuesta en la que se calcula mal la operación $-10/1$ y que hay 3 respuestas (calificadas con un 3) con errores al despejar.

Veamos dos ejemplos representativos de las respuestas calificadas con un 3:

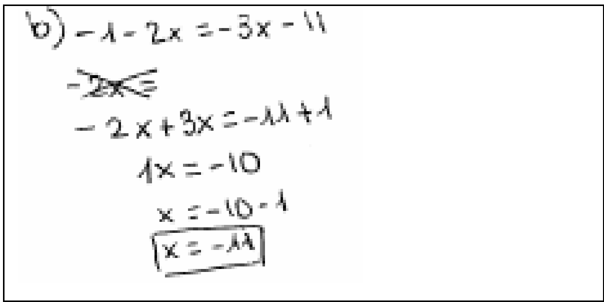


Figura V.2. Respuesta del alumno A17

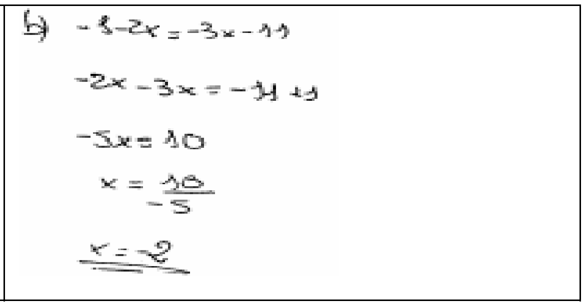


Figura V.3. Respuesta del alumno A26

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A17, el 1 de $1x$ se pasa (al otro lado de la igualdad) como -1. Probablemente, $1x$ se interpreta como $1+x$.

-En la respuesta del alumno A26, el $-3x$ se pasa (al otro lado de la igualdad) como $-3x$ aunque el -1 sí que se pasa como $+1$. Probablemente, tal incoherencia sea atribuible a un despiste.

Actividad 2.3.a: $7+3(2x-1)=0$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	18	3	9	2	33
%	3%	55%	9%	27%	6%	100%

Tabla V.7. Resultados de la actividad 2.3.a

De la **actividad 2.3.a** destacamos que hay 5 respuestas en las que las ecuaciones resultantes $6x=-4$ o $-6x=4$ están sin resolver o tienen $x=4/6$ y $x=-6/4$ como soluciones. Lo anterior es atribuible, en parte, a que, las reglas utilizadas para despejar se aplican de memoria, sin entender su significado.

Actividad 2.3.b: $x-5(x-2)=6x$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	19	6	5	2	33
%	3%	58%	18%	15%	6%	100%

Tabla V.8. Resultados de la actividad 2.3.b

De la **actividad 2.3.b** destacamos que hay 6 respuestas en las que $x-5x-6x$ se convierte respectivamente en $2x$, $-2x$, $12x$, $-12x$, $10x$ y $10x$. Es decir, el 18% del grupo tiene dificultades para sumar números enteros.

Actividad 2.3.c: $3x=4+(3-x)$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	19	6	3	4	33
%	3%	58%	18%	9%	12%	100%

Tabla V.9. Resultados de la actividad 2.3.c

De la **actividad 2.3.c** destacamos que hay 6 respuestas en las que $4+(3-x)$ se interpreta como $4\cdot(+(3-x))$. Opinamos que tal error es favorecido porque el 1 no se escribe cuando es un factor delante de un paréntesis.

Actividad 2.3.d: $120=2x-(15-7x)$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	16	8	6	2	33
%	3%	49%	24%	18%	6%	100%

Tabla V.10. Resultados de la actividad 2.3.d

De la **actividad 2.3.d** destacamos que hay 4 respuestas en las que $2x-(15-7x)$ se lee como "$2x$ multiplicado por $-(15-7x)$" y hay 2 respuestas en las que $2x-(15-7x)$ se convierte en $2x-15-7x$.

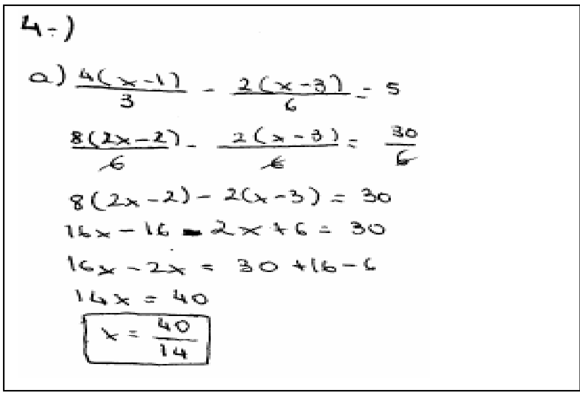
Lo primero es atribuible, probablemente, a que no se comprende la notación convencional de las operaciones suma, resta y producto que aparecen en las expresiones algebraicas. Lo segundo es atribuible, en parte, a la aplicación memorística, sin comprensión, de las reglas de supresión de paréntesis.

Actividad 2.4.a: $\frac{4(x-1)}{3}-\frac{2(x-3)}{6}=5$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	6	16	5	5	33
%	3%	18%	48%	15%	15%	100%

Tabla V.11. Resultados de la actividad 2.4.a

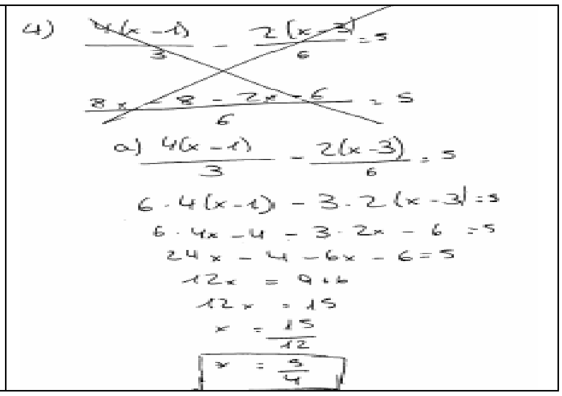
De la **actividad 2.4.a** destacamos que:

- Hay 10 respuestas en las que no se reduce bien a mínimo común denominador. Veamos dos ejemplos representativos:


4.-)

$$\text{a) } \frac{4(x-1)}{3}-\frac{2(x-3)}{6}=5$$
$$\frac{8(2x-2)}{6}-\frac{2(x-3)}{6}=\frac{30}{6}$$
$$8(2x-2)-2(x-3)=30$$
$$16x-16-2x+6=30$$
$$16x-2x=30+16-6$$
$$14x=40$$
$$\boxed{x=\frac{40}{14}}$$

Figura V.4. Respuesta del alumno A01


4)

$$\text{a) } \frac{4(x-1)}{3}-\frac{2(x-3)}{6}=5$$
$$6\cdot 4(x-1)-3\cdot 2(x-3)=5$$
$$6\cdot 4x-4-3\cdot 2x-6=5$$
$$24x-4-6x-6=5$$
$$12x=9+6$$
$$12x=15$$
$$x=\frac{15}{12}$$
$$\boxed{x=\frac{5}{4}}$$

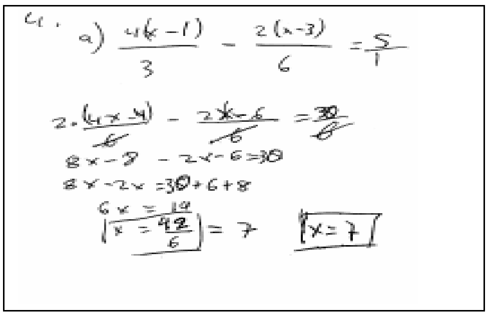
Figura V.5. Respuesta del alumno A29

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A01, los dos factores de $4(x-1)$ son multiplicados por 2. Probablemente las reglas de cálculo aplicables a $2\cdot 4(x-1)$ se confunden con las aplicables a $2\cdot[4+(x-1)]$ porque no se entiende el significado de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

-En la respuesta del alumno A29, no se reduce a mínimo común denominador el miembro derecho de la ecuación. No obstante, luego, se suprimen los denominadores del miembro izquierdo de la ecuación. Es muy probable que este alumno no entienda porqué se pueden eliminar los denominadores.

- Hay 5 respuestas en las que se reduce bien a mínimo común denominador pero en las que no se comprende que la supresión de la barra de fracción, al eliminar denominadores, equivale a la eliminación de un paréntesis. Son respuestas como la siguiente:


4.

$$\text{a) } \frac{4(x-1)}{3}-\frac{2(x-3)}{6}=\frac{5}{1}$$
$$\frac{2\cdot(4x-4)}{\cancel{6}}-\frac{2x-6}{\cancel{6}}=\frac{30}{\cancel{6}}$$
$$8x-8-2x-6=30$$
$$8x-2x=30+6+8$$
$$6x=42$$
$$\boxed{x=\frac{42}{6}}=7 \qquad \boxed{x=7}$$

Figura V.6. Respuesta del alumno A18

Obsérvese como, en la respuesta del alumno A18, la fracción $-\frac{2x-6}{6}$ de la 2ª línea se convierte en la expresión $-2x-6$ de la 3ª línea, en vez de convertirse en la expresión $-2x+6$.

- Hay 5 respuestas (el 15% del total) que están en blanco. Como las fichas nº 3 y nº 4 del Anexo II "Diario de Clase" indican que sobró tiempo y que hubo una buena disposición al trabajo, tales respuestas están sin contestar porque no se supo cómo operar.

Actividad 2.4.b: $x+\frac{2(x-3)}{4}-\frac{5(x+1)}{10}=1$						
Calificaciones:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	5	12	5	10	33
%	3%	15%	36%	15%	30%	100%

Tabla V.12. Resultados de la actividad 2.4.b

- Hay 5 respuestas en las que no se reduce bien a mínimo común denominador y hay 6 respuestas en las que $-\frac{5x+5}{10}$ se convierte en $-5x+5$ al eliminar denominadores.
- Hay 12 respuestas (el 36% del total) que están en blanco.

  La lectura de las fichas nº 3 y nº 4 del Anexo II "Diario de Clase" nos permite saber que sobró tiempo y que el grupo, en general, se esforzó. Por tanto, concluimos que la mayor parte de tales estudiantes no contestaron porque no supieron resolver la ecuación.

D) Análisis de la comprensión de contenidos (CC)

- En ninguna respuesta apareció una ecuación que fuera resuelta aritméticamente (CC. IV) o que fuese comprobada aritméticamente (CC. XIII.1) tras su resolución algebraica.

  Atribuimos lo anterior, en parte, a que en la enseñanza habitual del álgebra, no se suele practicar ni la resolución de ecuaciones por tanteo ni la comprobación sintáctica de las ecuaciones.

- Se cometieron varios errores en la suma de números enteros (CC. XI. 2.2.1).

  Atribuimos tales errores operacionales, en parte, a que no se trabaja suficientemente la comprensión de la aritmética de los números enteros en la enseñanza habitual.

- Abundaron los errores facilitados por las siguientes convenciones de la notación algebraica:

-No escribir el 1 en el denominador (CC. VII. 1.1).

-No escribir el 1 (o el -1) delante de paréntesis (CC. VII. 1.4).

-No escribir el signo de producto (CC. VIII).

-Suprimir la barra de una fracción, al suprimir denominadores en las ecuaciones, equivale a eliminar un paréntesis (CC. IX).

- Se cometieron errores por una aplicación incorrecta de las siguiente reglas operacionales:

  -Las reglas de reducción a mínimo común denominador (CC. XI. 2.3.1).

  -Las reglas de eliminación de los denominadores (CC. XI. 2.3.2).

  Atribuimos esta errónea aplicación de las reglas, a que no se trabaja suficientemente la compresión de las operaciones.

- Se cometieron errores al despejar (CC. X) y al operar (CC. XI) que fueron debidos a despistes y que no se corrigieron.

  Atribuimos lo anterior, en parte, a que no les inculcan hábitos ni de repaso ni de comprobación en la enseñanza habitual del álgebra escolar.

- Aparecieron errores al resolver ecuaciones que muestran que, frecuentemente, los alumnos percibían las ecuaciones como objetos carentes de significado a los que había que aplicar unas reglas sintácticas también carentes de significado.

  A continuación, relatamos una anécdota ilustrativa que, casualmente, sucedió cuando estábamos experimentando nuestra propuesta en el aula: Una profesora de 27 años, licenciada en Filosofía y Letras que, según dijo ella, había elegido, cursado y aprobado las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales de 1º y 2º de Bachillerato, no supo resolver la sencilla ecuación $x+7=9$. De hecho, afirmó: “he olvidado las Matemáticas” Sin embargo, esta misma profesora, rellenó, sin vacilar, el hueco en blanco de la expresión $(\ )+7=9$ cuando le dijimos que escribiese qué número hay que sumar a 7 para que la suma sea 9. Probablemente dicha profesora nunca comprendió el concepto de ecuación.

V.4. Actividad 3

A) Actividad propuesta

ACTIVIDAD 3: CLASES DE ECUACIONES LINEALES

3.1) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x=27$ que existen.

3.2) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x=x+2x$ que existen.

3.3) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x=0$ que existen.

3.4) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x = x + 2x + 5$ que existen.
3.5) Escribe todas las soluciones de la ecuación $0x = 7$ que existen.
3.6) Escribe todas las soluciones de la ecuación $0x = 0$ que existen.

Cuadro V.3. Enunciados de la actividad 3.

B) Criterios de evaluación

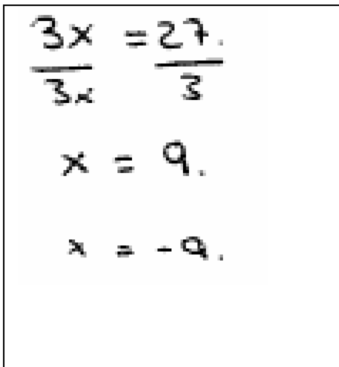
- 0) No asiste a clase.
- 1) Responde correctamente y justifica su respuesta.
- 2) Responde correctamente pero no justifica su respuesta.
- 3) Responde incorrectamente.
- 4) No contesta.

C) Resultados

Actividad 3.1: Soluciones de $3x = 27$						
Calificación:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	29	0	3	0	33
%	3%	87%	0%	9%	0%	100%

Tabla V.13. Resultados de la actividad 3.1

De la **actividad 3.1** destacamos dos respuestas en las que se dice que las soluciones son 9 y -9:



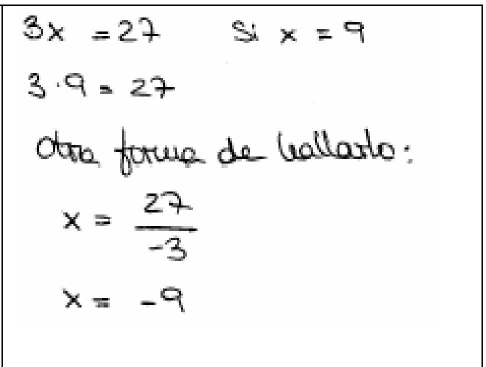


Fig. V.7. Respuesta de A30 Fig. V.8. Respuesta de A31

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A30, la solución correcta ($x = 9$) se obtiene mediante un procedimiento algebraico bien aplicado. Sin embargo, la solución incorrecta ($x = -9$) se escribe escuetamente, sin justificación alguna.

-En la respuesta del alumno A31, la solución correcta ($x = 9$) se obtiene mediante un tanteo aritmético bien aplicado. Sin embargo, la solución incorrecta ($x = -9$) se obtiene mediante un procedimiento algebraico mal operado.

-Es muy posible que ambos alumnos creyesen estar resolviendo una ecuación de 2º grado incompleta del tipo $ax^2 + c = 0$ o $ax^2 + bx = 0$.

Actividad 3.2: Soluciones de $3x = x + 2x$						
Calificación:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	5	6	21	0	33
%	3%	15%	18%	63%	0%	100%

Tabla V.14. Resultados de la actividad 3.2

De la **actividad 3.2**, una vez examinada la anterior tabla V.14 y la tabla nº 5 del Anexo III, destacamos que:

- Hay 3 respuestas en las que se usa el tanteo aritmético para justificar que todo número es solución.

- Hay 2 respuestas en las que se opera, se llega a una ecuación equivalente y se dice que cualquier número es solución:

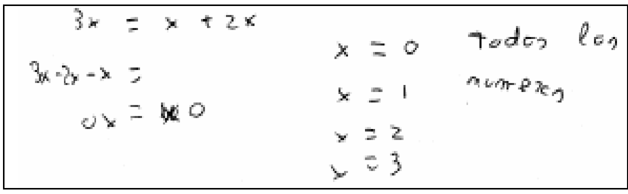


Figura V.9. Respuesta del alumno A22

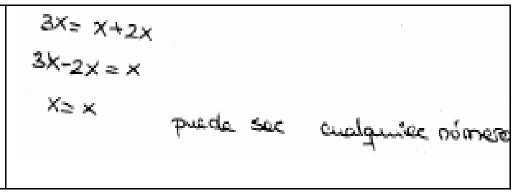


Figura V.10. Respuesta del alumno A32

- Hay 3 respuestas en las que se dice -sin justificación alguna- que "*la solución es 0/0*", "*hay muchas soluciones*" e "*infinitas soluciones*".

- Hay 3 respuestas en las que, usando el tanteo aritmético, se dice que "*hay muchas soluciones*" o que "*hay infinitas soluciones*" Veamos, por ejemplo, la respuesta del alumno A23:

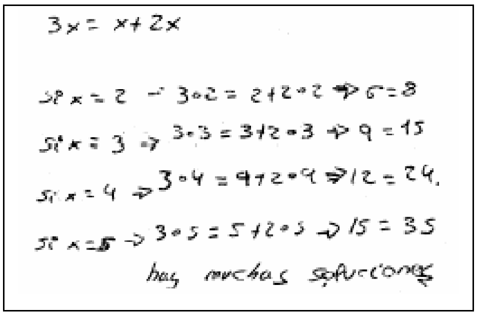


Figura V.11. Respuesta del alumno A23

- Hay 7 respuestas (el 21% del total) en las que se dice que la solución es $x = 0$.

- Hay 14 respuestas (el 42% del total) en las que se expresan diversas concepciones erróneas: "*no es una ecuación*", "*no tiene solución*", "*la solución es infinito*", "$x = 1$",...

Actividad 3.3: Soluciones de $3x = 0$						
Calificación:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	19	2	8	3	33
%	3%	57%	6%	24%	9%	100%

Tabla V.15. Resultados de la actividad 3.3

De la **actividad 3.3** destacamos que el grupo de las 8 respuestas incorrectas se divide en:

- Tres respuestas en las que la ecuación $3x = 0$ se convierte en $x = -3$. Probablemente, $3x = 0$ se lee como $3 + x = 0$ y, por ello, se concluye que $x = -3$.
- Cinco respuestas en las que aparecen razonamientos incorrectos que son expresados en el lenguaje natural o materno. Veamos un ejemplo representativo:

no es posible realiza la ecuación
por que la x no tine valor por que
el 0 no vale nada.

Figura V.12. Respuesta del alumno A18

Actividad 3.4: Soluciones de $3x = x + 2x + 5$						
Calificación:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	3	15	14	0	33
%	3%	9%	45%	42%	0%	100%

Tabla V.16. Resultados de la actividad 3.4

De la **actividad 3.4** destacamos que:

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se razona correctamente porqué la ecuación no tiene solución:

$3x = x+2x+5 \rightarrow 3x - x - 2x = 5 \rightarrow 0x = 5 \rightarrow$
$\rightarrow$ La solución no existe, porque $0 \neq 5$

Figura V.14. Respuesta del alumno A21

~~3x = x+2x+5 =~~

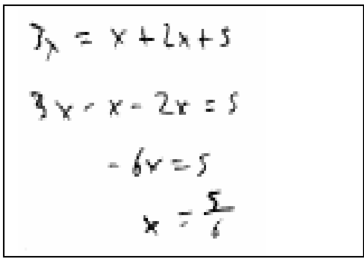
No tiene ninguna solución   Por que $3x = x + 2x$ pero cuando se suma el
5 ya no

Figura V.13. Respuesta del alumno A13

$3x = x + 2x + 5$
$3x - x - 2x = 5$
$0x = 5$
Imposible en mi forma de pensar ya que 0 por algún número
(x) nunca nos daría 5

Figura V.15. Respuesta del alumno A19

- Hay 5 respuestas en las que se despeja mal y, por tanto, no se llega a una ecuación del tipo $ox = a$ con $a \neq 0$.Veamos dos ejemplos representativos:



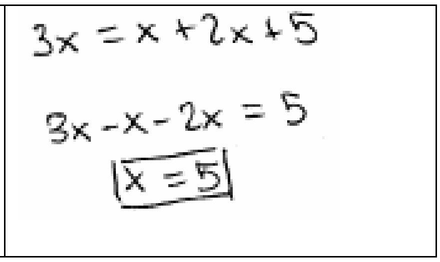
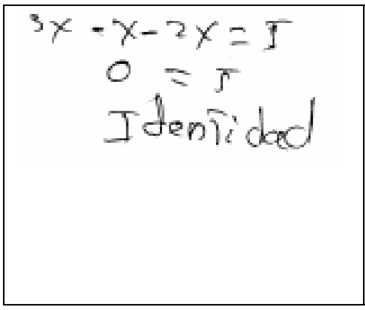


Figura V.16. Respuesta de A07 Figura V.17. Respuesta de A17

- Hay 6 respuestas en las que se afirma que x=5/0=0. Probablemente, no se comprende que $5/0$ no es un número.

- Hay 3 respuestas incorrectas. Veamos dos de ellas:



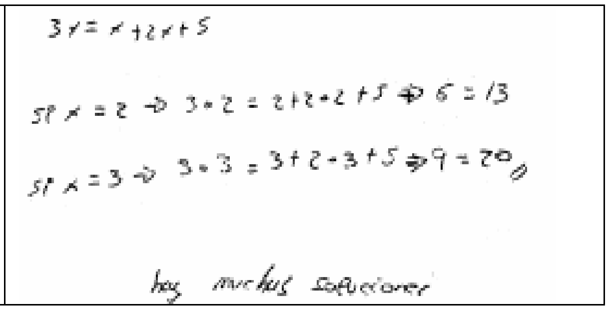


Figura V.18. Respuesta de A20 Figura V.19. Respuesta de A23

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A20 se hace patente que no se comprende el concepto de identidad.

-En la respuesta del alumno A23 se hace patente que no se comprende el concepto de solución de una ecuación.

Actividad 3.5: Soluciones de $0x = 7$						
Calificación:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	3	5	17	7	33
%	3%	9%	15%	51%	21%	100%

Tabla V.17. Resultados de la actividad 3.5

Sobre la **actividad 3.5** destacamos que:

- Hay 7 y 4 respuestas (el 21% y el 12% del total) en las que, respectivamente, se escribe que x = 7/0 = 0 y que x = 7/0 = 7. Lo anterior es atribuible, en parte, a una memorización sin comprensión de los resultados.

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que se escriben otras soluciones erróneas. Veamos tres ejemplos:

Figura V.20. Respuesta de A03

Figura V.21. Respuesta de A20

Figura V.22. Respuesta de A08

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A03, se afirma que 0 entre 7 da 1,428. Es decir, aparece una muy deficiente comprensión del concepto de división.

-En la respuesta del alumno A20, se afirma que $0x = 7$ "*Es una identidad*" Esto es, probablemente, consecuencia de una memorización carente de comprensión.

-En la respuesta del alumno A08 se concluye que $x = -1$ y que $-x = -1$ son soluciones. Es muy posible que este alumno piense que $0x = 7$ es una ecuación de 2º grado.

Actividad 3.6: Soluciones de $0x = 0$						
Calificación:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	2	7	19	4	33
%	3%	6%	21%	57%	12%	100%

Tabla V.18. Resultados de la actividad 3.6

De la **actividad 3.6** destacamos que:

- Hay una respuesta en la que se escriben varias soluciones concretas y un etc. Probablemente, este alumno que tanteó aritméticamente cuál era la solución y comprendió que hay varias soluciones.

- Hay 3 respuestas en las que se dice acertadamente, pero sin justificación alguna, que hay infinitas soluciones.

- Hay 15 respuestas (el 45% del total) en las que se afirma que x=0/0=0. Lo anterior es atribuible, probablemente, a una memorización no comprensiva de las soluciones de las ecuaciones que contienen algún 0.

- Hay otras 4 respuestas (el 12% del total) en las que se realizan otros razonamientos:

-"$0x = 0 \quad x = 1$" (Alumno A08)

-"$0x = 0 \quad x = 0 - 0$" (Alumno A24)

-"$0x = 0 \quad x = \frac{0}{0} = 0$ *(no hay solución)*" (Alumno A33)

-"*ninguna*" (Alumno A18)

Destacamos que:

-En la respuesta del A08, se obtiene $x=1$ como solución porque, probablemente, se simplifica el 0 de $0x=0$.

-En la respuesta del A24, se obtiene $x=0-0$ porque, probablemente, se interpreta $0x=0$ como $0+x=0$.

-En la respuesta del A33, se escribe que $0/0=0$ y que no hay solución porque, probablemente, relaciona simultánea e incoherentemente $0/0=0$ con 0 y con no tener solución, basándose en una memoria no comprensiva.

-En la respuesta del A18 se dice que no hay ninguna solución porque, probablemente, relaciona $0/0=0$ con 0, basándose en una memoria no comprensiva.

D) Análisis de la comprensión de contenidos (CC)

- La mayoría de los alumnos desconocía tanto el significado de las fracciones aritméticas del tipo $0/a$ o del tipo $a/0$, con $a \neq 0$, como el significado del concepto de ecuaciones compatibles determinadas (CC. IV. 2) del tipo $ax=0$, con $a \neq 0$, y de ecuaciones incompatibles (CC. V. 2) del tipo $0x=a$, con $a \neq 0$.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que ni el concepto de que no es posible dividir entre 0 ni el de ecuación compatible determinada homogénea ni el de ecuación incompatible son suficientemente trabajados en la enseñanza habitual del álgebra escolar. De hecho, habitualmente, las fracciones suelen tener numeradores y denominadores que no son nulos y las ecuaciones suelen ser compatibles determinadas no homogéneas.

- Frecuentemente, los alumnos tendían a afirmar que $x=0$ era la solución de ecuaciones incompatibles (CC. V. 2) del tipo "$0x=a$" (con $a \neq 0$) o de ecuaciones compatibles indeterminadas (CC. VI. 2) del tipo "$0x=0$".

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, casi todas las ecuaciones son compatibles determinadas.

- Una minoría de alumnos afirmó que si el segundo miembro de una ecuación es cero entonces la ecuación debe tener necesariamente dos soluciones.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que, en la enseñanza habitual, las ecuaciones igualadas a cero suelen ser ecuaciones de segundo grado y éstas tienen dos soluciones.

- Sólo una minoría de alumnos utilizó métodos de tanteo aritmético (CC. IV. 1, CC. V. 1, CC. VI. 1) para la resolución de las ecuaciones compatibles determinadas homogéneas del tipo $ax=0$ con $a \neq 0$, de las ecuaciones incompatibles del tipo $0x=a$ con $a \neq 0$ y de las ecuaciones compatibles indeterminadas del tipo $0x=0$.

Lo anterior es atribuible, en parte, a que en una actividad anterior de nuestra propuesta (la nº 1) se había trabajado el método de tanteo para la resolución de ecuaciones.

V.5. Actividad 4

A) Actividad propuesta

ACTIVIDAD 4: TRADUCCIÓN DE EXPRESIONES

Actividad 4.1: En el garaje tenemos un número desconocido de coches. Si llamamos x al número desconocido de coches que hay, contesta a las siguientes preguntas:
4.1a) ¿Cuántos coches hay en ese garaje?______
4.1b) ¿Cuántos faros delanteros hay en ese garaje?______
4.1c) ¿Cuántos volantes hay en ese garaje?______
4.1d) ¿Cuántas ruedas delanteras izquierdas hay en ese garaje?________
4.1e) ¿Cuántas ruedas hay en ese garaje sin contar las de repuesto?______
4.1f) ¿Cuántas ruedas hay en ese garaje contando las de repuesto?_______
4.1g) ¿Cuántas ruedas delanteras hay en ese garaje?_______

Actividad 4.2: Relaciona, escribiendo el número correspondiente, las expresiones del lenguaje natural con las expresiones algebraicas:
4.2.a) En el garaje hay el mismo número de motos que de coches._______
4.2.b) Pedro duplica en edad a su hijo._______
4.2.c) El área de un triángulo._______
4.2.d) En un garaje hay doble número de coches que de motos.________
4.2.e) La tercera parte del total de los alumnos de un centro estudian alemán. ________
4.2. f) Dos padres y un hijo._______

1) $\frac{x}{3}$ 2) $\frac{xy}{2}$ 3) $x = 2y$ 4) $xy = A$
5) $x = y$ 6) $2y = x$ 7) $3x = y$

Actividad 4.3: En una fiesta hay un número **x** desconocido de chicos y un número **y** desconocido de chicas. Explica lo que significa la siguiente expresión:

4.3.a) $x-5$ 4.3.b) $2x+3y$ 4.3.c) $3x+3y$ 4.3.d) $x=2y$

Actividad 4.4: En un almacén tenemos un refresco de limón embotellado en dos tipos de envase: latas de 33 cc y botellas de 2 litros. Utilizando respectivamente las letras a y b, expresa algebraicamente la situación siguiente:

4.4.a) Tenemos doble número de latas que de botellas.
4.4.b) Tenemos 20 botellas más que latas.
4.4.c) Tenemos la mitad de latas que de botellas.

Actividad 4.5: Invente una frase del lenguaje natural en un contexto de la vida real que se refiera a la siguiente expresión:

a) $5x+2y=220$ (en un garaje) b) $\frac{x}{5}=y$ (edades) c) $1.5x+2y=9$ (en una papelería)

Cuadro V.4. Enunciados de la actividad 4

B) Criterios de evaluación

-Criterios de evaluación de las actividades 4.1 y 4.2

- 0) No asiste a clase.
- 1) Escribe la expresión correcta.
- 3) Escribe una expresión incorrecta.
- 4) No contesta.

-Criterios de evaluación de la actividad 4.3

- 0) No asiste a clase.
- 1) Interpretación correcta de las incógnitas como cantidades.
- 3) Interpretación incorrecta de las incógnitas como cantidades.
- 4) No contesta.

-Criterios de evaluación de la actividad 4.4

- 0) No asiste a clase.
- 1) Escribe expresiones algebraicas correctas.
- 3) Escribe expresiones algebraicas incorrectas.
- 4) No contesta.

-Criterios de evaluación de la actividad 4.5

- 0) No asiste a clase.
- 1) Escribe una oración correcta.
- 2) Escribe una oración coherente pero habla de las incógnitas como si fueran abreviaturas de sustantivos de objetos.
- 3) Escribe una oración gramatical incorrecta.
- 4) No contesta.

C) Resultados

Actividad 4.1.a: x = "número de coches" ¿Cuántos coches hay?					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	32	0	0	33
%	3%	97%	0%	0%	100%

Actividad 4.1.b: x = "número de coches" ¿Cuántos faros delanteros hay?					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	32	0	0	33
%	3%	97%	0%	0%	100%

Actividad 4.1c: x = "número de coches" ¿Cuántos volantes hay?					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	32	0	0	33
%	3%	97%	0%	0%	100%

Actividad 4.1.d: **x = "número de coches" ¿Cuántas ruedas delanteras izquierdas hay?**					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	30	0	2	33
%	3%	91%	0%	6%	100%

Actividad 4.1.e: **x = "número de coches" ¿Cuántas rueda hay sin contar las de repuesto?**					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	32	0	0	33
%	3%	97%	0%	0%	100%

Actividad 4.1.f: **x = "número de coches" ¿Cuántas ruedas hay contando las de repuesto?**					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	31	1	0	33
%	3%	94%	3%	0%	100%

Actividad 4.1.g: **x = "número de coches" ¿Cuántas ruedas delanteras hay?**					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	31	1	0	33
%	3%	94%	3%	0%	100%

Tabla V.19. Resultado de las actividades 4.1.a, 4.1.b, 4.1.c, 4.1.d, 4.1.e, 4.1.f y 4.1g.

De las **actividades 4.1.a, 4.1.b, 4.1.c, 4.1.d, 4.1 e, 4.1 f y 4.1.g** destacamos que sólo hay 2 respuestas incorrectas (las del alumno A27 en las actividades 4.1.f y 4.1.g) en las que se afirma que "*si hay x coches, hay* ***4x*** *ruedas contando la de repuesto en ese garaje*" y que "*si hay x coches, hay* ***x*** *ruedas delanteras en ese garaje*" Es decir, casi todos supieron expresar algebraicamente las relaciones entre las cantidades en un contexto automovilístico.

Actividad 4.2.a: **Relaciona: Hay el mismo número de motos que de coches**………………………… $x = y$					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	32	0	0	33
%	3%	97%	0%	0%	100%

Actividad 4.2.b: **Relaciona: Pedro duplica en edad a su hijo**……………………………. $x = 2y$ **ó** $2y = x$					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	31	1	0	33
%	3%	94%	3%	0%	100%

Tabla V.20. Resultado de las actividades 4.2.a y 4.2.b

De las **actividades 4.2.a y 4.2.b** destacamos que sólo hay una respuesta incorrecta (la del alumno A25) en la que la solución es $3x = y$, esto es, en la que confunde "*doble*" con "*triple*".

Actividad 4.2.c: Relaciona: El área de un triángulo……………………………………………………….. $\frac{xy}{2}$					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	31	1	0	33
%	3%	94%	3%	0%	100%

Tabla V.21. Resultado de la actividad 4.2.c

De la **actividad 4.2.c** destacamos que sólo hay una respuesta incorrecta (la del alumno A19) en la que se dice que la solución es "*x y = A*" Probablemente, tal alumno confundió el área del rectángulo con la del triángulo.

Actividad 4.2.d: Relaciona: En un garaje hay doble número de coches que de motos… $x = 2y$ **ó** $2y = x$					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	31	0	1	33
%	3%	94%	0%	3%	100%

Actividad 4.2.e: Relaciona: La tercera parte del total de los alumnos de un centro estudian alemán …… ……………………………………………………………………………. $x/3$ **ó** $3x = y$					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas	1	31	0	1	33
%	3%	94%	0%	3%	100%

Actividad 4.2.f: Relaciona: Dos padres y un hijo……………………………………………. (Ninguna de las opciones).					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas	1	3	22	7	33
%	3%	9%	66%	21%	100%

Tabla V.22. Resultado de la actividad 4.2.d, 4.2.e y 4.2.f

De las **actividades 4.2.d, 4.2.e y 4.2.f** destacamos que:

- Son correctas casi todas las respuestas de las actividades 4.2.d y 4.2.e, esto es, los estudiantes supieron escoger cuál era la expresión algebraica que expresaba lo que se decía en el lenguaje natural o materno.
- Sólo hay 3 respuestas correctas en la actividad 4.2.f: En una de ellas se escribe "*Sin solución*" y en las otras dos se dice que "*No está escrita la solución*".

  Esta actividad requería comprender que la expresión del lenguaje natural ("Dos padres y un hijo") no tenía su correspondiente expresión algebraica entre las de la lista dada.
- Hay 7 respuestas (el 21% del total) que están en blanco. Como sabemos (por la lectura del Diario de Clase) que no faltó tiempo ni motivación y como ninguna

de las expresiones algebraicas era la solución, dejar la actividad sin contestar puede indicar cierto grado de comprensión de la situación.

- Hay 18 respuestas (un 54% del total) en las que “Dos padres y un hijo” se relaciona con *x y =A*, la única expresión algebraica que no se ha utilizado en ninguno de los apartados anteriores.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que no suele haber preguntas sin respuesta en la práctica escolar habitual.

- Hay 4 respuestas en las que “Dos padres y un hijo” se relaciona con $x = 2y$ o con $2y = x$.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que se confunde que haya “Dos padres y un hijo” con que haya una proporción de dos padres por hijo.

Actividad 4.3.a: Significado de “ $x-5$ ” en el contexto de “x” chicos y de “y” chicas en una fiesta.					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas	1	25	6	1	33
%	3%	75%	18%	3%	100%

Tabla V.23. Resultados de la actividad 4.3.a

De la **actividad 4.3.a** destacamos que:

- Hay 14 respuestas (el 42% del total) en las que se habla literalmente de la operación matemática implicada (la sustracción). Veamos dos ejemplos representativos:

  -“*al número de chicos le quitamos cinco*” (Alumno A01)

  -“*número desconocido de chicos menos cinco*” (Alumno A17)

- Hay 11 respuestas (el 33% del total), de mejor calidad, en las que se habla del significado físico de la operación. Veamos dos ejemplos representativos:

  -“*se van 5 chicos*” (Alumno A04)

  -“*De los chicos que había en un principio se van 5*” (Alumno A26)

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que $x-5$ se interpreta como si fuese una comparación. Veamos el representativo ejemplo del alumno A20: “*Ahí cinco chicas menos que chicos*”

  De la respuesta anterior, destacamos que:

  -Se comete la falta de ortográfica de escribir “*hay*” como “*ahí*”.

  -Se interpreta $x-5$ como si pusiera $x-5=y$. Esto es atribuible, en parte, a que en la enseñanza habitual se suelen plantear ecuaciones pero no polinomios.

- Hay 2 respuestas en las que se inventa todo un enunciado referido a la expresión x - 5. Veamos ambos casos:

  -"*Para hallar el número de chicos que hay en una clase hay que restar 5*" (Alumno A23)

  -"*Para calcular el número de chicas (y) hay que restarle al número de chicos (x) cinco*" (Alumno A28)

Actividad 4.3.b: **Significado de "$2x+3y$" en el contexto de "x" chicos y de "y" chicas en una fiesta.**					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	22	6	4	33
%	3%	66%	18%	12%	100%

Tabla V.24. Resultados de la actividad 4.3.b

De la **actividad 4.3.b** destacamos que:

- Hay 16 respuestas (el 48% del total) en las que se habla literalmente "*del doble del número de chicos más el triple del número de chicas*".

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) que son más interesantes que las anteriores porque en ellas se alude a la situación física de una fiesta mediante el uso de expresiones como "*se duplica el número de chicos y se triplica el número de chicas*"

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que $2x+3y$ se interpreta como "*2 chicos y 3 chicas*", identificándose las letras x e y como abreviaturas de los sustantivos chicos y chicas.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que $2x+3y$ se describe como un problema:

  -"*Para hallar los alumnos de una clase hay que multiplicar el número de chicos por dos y el número de chicas por tres*" (Alumno A23)

  -"*El doble del número de chicos más 3 veces el número de chicas son 100*" (Alumno A13)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A23 se inventa un enunciado sin sentido en el que se relaciona duplicar o triplicar números desconocidos con averiguar directamente el valor de tales números desconocidos.

  -En la respuesta del alumno A13 se inventa un enunciado que es la trascripción de la expresión dada $2x+3y$, pero añadiendo $=100$.

Actividad 4.3.c: **Significado de "$3x+3y$" en el contexto de "x" chicos y de "y" chicas en una fiesta.**					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas	1	19	8	5	33
%	3%	57%	24%	15%	100%

Tabla V.25. Resultados de la actividad 4.3.c

De la **actividad 4.3.c** destacamos que:

- Hay 13 respuestas (el 39% del total) en las que se habla de operaciones aritméticas y hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que se alude a contextos reales de chicos y chicas que vienen a la fiesta.
- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que x e y se identifican como abreviaturas de los sustantivos "*chicos*" y de "*chicas*"
- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que $3x+3y$ se describe como si fuera la formulación de un problema o una ecuación completa.

Actividad 4.3.d: **Significado de "$x=2y$" en el contexto de "x" chicos y de "y" chicas en una fiesta.**					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas	1	28	2	2	33
%	3%	84%	6%	6%	100%

Tabla V.26. Resultados de la actividad 4.3.d

De la **actividad 4.3.d** destacamos que:

- Hay 28 respuestas (el 84%) en las que las letras se interpretan como cantidades. Destacamos que dicho 84% es superior a los respectivos 75%, 66% y 57% de las anteriores actividades 4.3.a, 4.3.b y 4.3.c en el que las letras de las expresiones polinómicas eran interpretadas como cantidades.

  Esta mejor comprensión del carácter cuantitativo de las incógnitas es atribuible, en parte, a que las ecuaciones se trabajan más que los polinomios en la enseñanza habitual del álgebra.

- Hay 7 respuestas (incluidas dentro del anterior conjunto de las 28 respuestas) en las que se comete el error de inversión para el producto. Tal error puede atribuirse a una traducción sintáctica o a una interpretación del = como un signo de correspondencia.
- Hay 2 respuestas incorrectas (el 6% del total) en las que se cometen errores distintos del de inversión:

  -"*nº de chicos = 2 chicas*" (Alumno A18)

  -"*Cada chico es igual a dos chicas*" (Alumno A20)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A18, x se describe bien como "*nº de chicos*" pero $2y$ se describe mal como abreviatura de "2 chicas"

-En la respuesta del alumno A20, $x=2y$ se literalmente como "*Cada chico es igual a dos chicas*" Es decir, $x = chico$ y $2y = 2chicas$.

Actividad 4.4.a: Dados "a = nº de latas" y "b = nº de botellas", expresa "Tenemos doble número de latas que de botellas".					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	14	18	0	33
%	3%	42%	54%	0%	100%

Tabla V.27. Resultados de la actividad 4.4.a

De la **actividad 4.4.a** destacamos que:

- El conjunto de las 14 respuestas correctas (el 42% del total) está formado por 11 respuestas en las que se escribe "$a = 2b$", por 2 respuestas (el 6% del total) en las que se escribe "$x = 2y$" (a pesar de que las letras dadas eran a y b) y por una respuesta en la que se escribe la ecuación $a/2 = b$
- El conjunto de las 18 respuestas incorrectas (el 54% del total) está constituido por 16 respuestas en las que se contesta que $2a = b$ (esto es, en las que se comete el error de inversión para el producto) y por 2 respuestas (el 6% del total) en las que se escribe $2a + b$, mostrando un muy bajo nivel de comprensión del enunciado.

Actividad 4.4.b: Dados "a = nº de latas" y "b = nº de botellas", expresa "Tenemos 20 botellas más que latas"					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	14	18	0	33
%	3%	42%	54%	0%	100%

Tabla V.28. Resultados de la actividad 4.4.b

De la **actividad 4.4.b** destacamos que:

- El grupo de las 14 respuestas correctas (el 42%) está constituido por

  -8 respuestas en las que se escribe a + 20 = b

  -2 respuestas en las que escriben $x + 20 = y$, utilizando las letras habituales en el álgebra escolar.

  -3 respuestas en las que se escribe la ecuación equivalente $a = b - 20$

  -1 en la que se escribe la ecuación equivalente $b - a = 20$.

Probablemente, son alumnos comprende que hay que sumar 20 al número de latas o que hay que restar 20 al número de botellas para que haya una situación de igualdad.

- Dentro del grupo de las 18 respuestas incorrectas (el 54% del total) destacamos que:

  -Hay 10 respuestas en las que se comete el error de inversión para la suma y hay una respuesta en la que se comete el error de inversión para la resta.

  Lo anterior es atribuible, probablemente, a que se realiza una traducción literal, palabra a palabra, sin comprender la relación entre las cantidades implicadas.

  -Hay 5 respuestas en las que se escribe $20b = a$. Esto es: se interpreta *"tenemos 20 botellas más que latas"* como si pusiese "*tenemos 20 veces más botellas que latas*" y se comete, además, el error de inversión para el producto.

  Probablemente, lo primero es atribuible a un fallo de comprensión lectora del enunciado y lo segundo es atribuible o a una traducción literal (palabra a palabra) sin comprensión o a una identificación del signo = como signo de correspondencia entre cantidades.

  -Hay 2 respuestas en las que se escribe $a + 20b$. Es una respuesta en la que se escribe un signo aditivo y una multiplicación por 20 que son incoherentes con el enunciado dado.

  Lo anterior es atribuible, probablemente, a un muy bajo nivel de comprensión de la situación descrita en el enunciado.

Actividad 4.4.c: Dados "a = nº de latas" y "b = nº de botellas",expresa "Tenemos la mitad de latas que de botellas"					
Calificación:	0	1	3	4	**Total**
Nº de respuestas:	1	11	21	0	33
%	3%	33%	63%	0%	100%

Tabla V.29. Resultados de la actividad 4.4.c

De la **actividad 4.4.c** destacamos que:

- Dentro del conjunto de las 11 respuestas correctas (el 33% del total):

  -Hay 7 respuestas en las que se escribe la ecuación "a = b/2".

  Probablemente, se entiende que dividir el número de botellas "b" entre 2 sirve para establecer una igualdad.

  -Hay una respuesta correcta en la que, en vez de utilizar las letras que se le indican (a y b), se usan las letras que habitualmente se utilizan en la práctica escolar (x e y).

-Hay 3 respuestas en las que, en vez de (o además de) escribir la ecuación $a = b/2$, se escribe la correcta ecuación $2a = b$.

Lo anterior es atribuible, probablemente, a que, aunque en el enunciado se hablaba de "*mitad*" -no de "*doble*"- y se comprende mejor el significado de la multiplicación que el de la división.

- Hay 17 respuestas (el 51% del total) en las que se comete el error de inversión para el cociente, hay una respuesta en la que se comete el error de inversión para el producto y hay otra respuesta en la que, además de cometer el error de inversión para el producto, se utilizan las habituales letras x e y (en vez de las letras a y b que se indicaban en el enunciado).

  Probablemente, el error de inversión es atribuible a que se traduce el enunciado literalmente (palabra a palabra) o a que se percibe el signo = como un signo de relación entre subconjuntos de elementos.

- Hay 2 respuestas con errores distintos del error de inversión:

  -"$2a - b$" (Alumno A09)

  -"$\frac{a}{2} + b$" (Alumno A10)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A09 se duplica el número de latas pero luego, en vez de escribirse el signo =, se escribe el signo –, que es incoherente con la igualdad descrita en el enunciado.

  -En la respuesta del alumno A10 se divide el número de latas entre dos pero luego, en vez de escribirse el signo =, se escribe el signo + que es incoherente con la igualdad descrita en el enunciado.

Actividad 4.5.a: **Inventa una frase sobre** $5x + 2y = 220$ **(en un garaje)**						
Calificación:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas	1	12	5	9	6	33
%	3%	36%	15%	27%	18%	100%

Tabla V.30. Resultados de la actividad 4.5.a

De la **actividad 4.5.a** destacamos que:

- En 6 de las respuestas correctas los coeficientes 5 y 2 de las ecuaciones dadas son el número de ruedas de cada coche, el de faros de cada coche, el de ruedas de cada moto, etc. Veamos dos ejemplos representativos:

  -*"El nº de ruedas por cada coche más el nº de ruedas por cada moto suman 220"* (Alumno A26)

-“*tenemos 5 ruedas por cada coche y 2 por cada moto y en total son 220 ruedas*” (Alumno A29)

Destacamos que son interpretaciones que están basadas en la realidad física de los vehículos.

- Hay 4 respuestas correctas en las que los coeficientes 5 y 2 de las ecuaciones dadas son “*5 veces el número de coches*”, “2 veces el número de motos”, etc. Veamos una respuesta representativa: “*cinco veces el número de coches más dos veces el número de motos es igual a 220*” (Alumno A01)

  Destacamos que, en la respuesta anterior, los verbos aparecen en modo indicativo (en vez de en subjuntivo y condicional) porque, probablemente, este estudiante no piensa en una situación hipotética, sino que lee literalmente la ecuación dada.

- Hay una respuesta en la se identifican 5 y 2 como los precios respectivos a pagar por aparcar coches y motos en un parking. Veámosla:

  “*En un Parking el aparcamiento a las motos cuesta 2 euros y a los coches 5 euros. En total han conseguido 220 euros*” (Alumno A10)

  Destacamos que la anterior respuesta es correcta, pero poco realista: sólo se pagaría por usar una plaza, independientemente del tiempo durante el cual se utilice la plaza.

- Hay una respuesta en la que se identifican $5x$ y $2y$ como el quíntuple y el doble del respectivo número de platos y de servilletas. Tal respuesta tiene sentido porque algunas peñas de los pueblos celebran fiestas en los garajes.

- Hay 5 respuestas (el 15% del total) en las que las características particulares de un coche o de un coche y una moto se relacionan directamente con cantidades totales de elementos que hay en un garaje, denotando un muy bajo nivel de comprensión:

  -“*Las ruedas de un coche con la repuesto y los dos faros de delante suman 220*” (Alumno A02)

  -“*cinco ruedas de coche más 2 ruedas de moto = 220*” (Alumno A31)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A02, $5x$ y $2y$ se interpretan como abreviaturas respectivas de las expresiones “*Las ruedas de un coche con la repuesto*” *y* “*los dos faros de delante*”.

  -En la respuesta del alumno A31, $5x$ y $2y$ se interpretan como abreviaturas respectivas de la expresiones gramaticales “*cinco ruedas de coche*” y “*2 ruedas de moto*”.

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que se omite el dato 220. Veamos dos casos representativos:

  -"*Las ruedas totales, contando las de repuesto, más los faros delanteros*" (Alumno A12)

  -"*En un garaje, calcula el número total de ruedas, contando la de repuesto, de un coche más las ruedas de una moto*" (Alumno A28)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A12, se omite el número 220. Además, en la redacción de ese problema se denota un nivel de comprensión muy bajo pues no se proporciona dato numérico alguno.

  -En la respuesta del alumno A28 también se omite dicho número 220 pero se pregunta por él como dato a calcular. Probablemente, se confunde el significado del "= 220" de una ecuación algebraica (el término derecho de una ecuación) con el significado del "= 220" en una expresión aritmética (el resultado de unas operaciones aritméticas).

- Hay 2 respuestas en las que se omite el 220 y en las que se redactan problemas aritméticos cuya solución sería 220:

  -"*40 coches 5 ruedas cada uno dos camiones 10 ruedas cada uno*" (Alumno A06)

  -"*en cada planta (x=4) hay 5 secciones y en cada sección caben 2 coches (y=100)*" (Alumno A19)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A06 se redacta un correcto problema aritmético, en el que sólo faltaría la pregunta sobre cuantas ruedas habría en total.

  -En la respuesta del alumno A19 se redacta un incorrecto problema aritmético en el que se multiplicarían 4 plantas por 5 secciones se multiplicarían 2 coches por 100 secciones y se sumarían –como si tuviese algo significado real- las 20 secciones con los 200 coches.

  -En ambas respuestas, probablemente, se confunde el significado del "= 220" en una ecuación algebraica (el término derecho de una ecuación) con el significado de "= 220" en una expresión aritmética (el resultado de unas operaciones aritméticas).

- Hay 6 respuestas en blanco (el 18% del total). Como por las fichas nº 7 y nº 8 del Anexo II "Diario de Clase" sabemos que no hubo falta de tiempo ni de motivación, las respuestas anteriores son atribuibles, en parte, a que la invención de problemas es una actividad novedosa que no se suele practicar en la enseñanza habitual del álgebra escolar.

Actividad 4.5.b: Inventa una frase sobre $x/5=y$ (edades)						
Calificación:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas	1	27	0	2	3	33
%	3%	81%	0%	6%	9%	100%

Tabla V.31. Resultados de la actividad 4.5.b

De la **actividad 4.5.b** destacamos que:

- Hay 27 respuestas correctas (el 81% del total) en las que todos son conscientes de que x e y son edades de sujetos.

  Atribuimos el anterior éxito, en parte, a que los alumnos de 3º de ESO están muy familiarizados, en la vida escolar y en la vida cotidiana, con el cómputo y la comparación aritméticos de las edades de las personas.

- Hay 2 respuestas incorrectas (el 6% del total):

  -"*Un chico tiene la quinta parte que su hermana (*aparece también tachado lo que antes había escrito*: Un chico tiene 5 años más que su hermana)*" (Alumno A24)

  -"*María supera una quinta parte de la edad de Luis*" (Alumno A28)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A24 no se especifica en qué cantidad un chico tiene la quinta parte que su hermana.

  -En la respuesta del alumno A28, en vez de describirse un enunciado de edades correspondiente a la ecuación dada $x/5=y$, se inventa un enunciado de edades que corresponde a otra ecuación: x+x/5=y.

Actividad 4.5.c: Inventa una frase sobre $1.5x+2y=9$ (en una papelería)						
Calificación:	0	1	2	3	4	**Total**
Nº de respuestas	1	11	6	5	10	33
%	3%	33%	18%	15%	30%	100%

Tabla V.32. Resultados de la actividad 4.5.c

De la **actividad 4.5.c** destacamos que:

- Hay 8 respuestas en las que se dice que los coeficientes 1.5 y 2 son los precios de cada bolígrafo, cada lápiz, cada goma,… y en las que x e y son el número de bolígrafos, de lapiceros, de gomas,… Evidentemente, tal interpretación se basa en el contexto real de la cuentas de una papelería.

- Hay 3 respuestas en las que se dice que los coeficientes 1.5 y 2 son los números de veces por los que se multiplican, respectivamente, los precios desconocidos x e y de cada bolígrafo, cada lápiz, cada goma,… Además, en tales respuestas, los verbos se emplean en modo indicativo. Evidentemente, tal interpretación se basa en una lectura literal –símbolo a símbolo- de la ecuación dada.

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que x e y son abreviaturas de bolígrafos, lapiceros, gomas,…, en las que 1.5 y 2 son el número de bolígrafos, lapiceros, gomas,… y en las que el signo = se interpreta como una correspondencia entre un conjunto de artículos de una papelería y el conjunto de los euros que cuestan. De hecho, en vez de decirse que "*cuestan*", "*valen*", etc se dice que "*es igual a*", "*son*", etc. Veamos dos ejemplos representativos:

  -"*1.5 paquetes de folios + 2 cuadernos es igual a 9 €*" (Alumno A18)

  -"*1.5 gramos de goma mas dos bolis son 9 euros*" (Alumno A22)

- Hay 3 respuestas en las que se habla de precios, pero se omite alguno de los datos numéricos dados.

- Hay una respuesta en la que se alteran los datos dados y se interpretan las letras como abreviaturas de unidades. Veámosla: "*1.5 gramos de goma mas dos bolis son 9 euros*" (Alumno A10)

  Destacamos que, en la anterior respuesta, las incógnitas x e y se interpretan respectivamente como abreviaturas de "*gramos de goma*" y de "*bolis*".

- Hay una respuesta en la que se habla de folios pequeños y folios enteros. Veámosla: "*un número desconocido de folios de medida pequeña más un número desconocido de tamaño de folio entero es igual a nueve*" (Alumno A28)

  Destacamos que, en la anterior respuesta, las expresiones $1.5x$ y $2y$ se identifican, respectivamente, como el número desconocido de folios pequeños y el número desconocido de folios enteros y se dice que, en total, son 9. Esto es, 1.5 y 2 son percibidas como etiquetas que identifican a los folios pequeños y grandes.

- Hay 10 respuestas (el 30% del total) que están en blanco. Como sabemos (por la lectura de las fichas nº 7 y nº 8 del diario de clase) que no faltó tiempo ni motivación, probablemente, este 30% se debe a que la invención de enunciados les resulta difícil porque no se suele practicar en la enseñanza habitual.

D) Análisis de la comprensión de contenidos (CC)

- Fue frecuente que los alumnos realizaran un planteamiento sintáctico de las expresiones algebraicas (CC. XVI. 2), esto es, hicieran un transcripción en la que cada palabra –o cada grupo de palabras- del enunciado se transformaba, literalmente y en el mismo orden, en un símbolo algebraico. Así pues, las letras de las ecuaciones se interpretaban como abreviaturas de sustantivos (CC. III. 1.2).

- Fue frecuente que los estudiantes consideraran que la expresión algebraica mayor (o menor) era la que estaba físicamente más próxima al factor o sumando de corrección en las ecuaciones de comparación, tal y como suele suceder en los textos de los problemas algebraicos de comparación.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que se realiza una traducción literal –palabra a palabra- de los problemas de álgebra.

- Hay alumnos que, al inventar enunciados (CC XVII), interpretaron el signo igual como un símbolo de correspondencia entre conjuntos de objetos. Por ejemplo: la ecuación $1.5x+2y=9$ se interpreta como *"1.5 gramos de goma mas dos bolis son 9 euros*", estableciéndose así una correspondencia entre un conjunto de objetos de papelería y el conjunto de euros que cuestan.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a una deficiente comprensión del concepto de incógnita y del concepto mismo de ecuación. (CC. XVII).

- El planteamiento sintáctico (CC. XVI) provocó frecuentes errores de inversión para la suma (CC. XVI. 1.1), la resta (CC. XVI. 1.2), el producto (CC. XVI. 1.3) y el cociente (CC. XVI. 1.4).

  El error de inversión para el cociente fue más frecuente que el error de inversión para el producto y éste último fue más frecuente que el error de inversión para la suma. Esto es atribuible, en parte, a que, cuanto más abstracta es la operación involucrada, resulta más difícil percibir el error de inversión cometido en el significado cuantitativo de la ecuación correspondiente.

- Existen dificultades para inventar enunciados (CC. XVII) a partir de ecuaciones que contienen números decimales. Atribuimos lo anterior, en parte, a deficiencias de comprensión sobre el significado de los números decimales.

V.6. Actividad 5

A) Actividad propuesta

ACTIVIDAD 5: PROBLEMAS DESGLOSADOS EN PREGUNTAS CORTAS

Actividad 5.1: Un examen de tipo test consta de 50 preguntas y se evalúa del siguiente modo: se suman 2 puntos por cada pregunta acertada y se restan 1.5 puntos por cada pregunta no acertada. Queremos averiguar cuántas preguntas ha acertado y cuántas no ha acertado.
5.1.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.1.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.1.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.1.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.

Actividad 5.2: Sabemos que el perímetro de un rectángulo mide 50 metros y que la base es 5 metros más larga que la altura. Queremos saber lo que mide la base y la altura.
5.2.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.2.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.2.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.2.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.2.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.2.6) Comprobación:
5.2.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.2.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Actividad 5.3: Juan tiene 28 años menos que su padre y 24 años más que su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 100 años?
5.3.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.3.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.3.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.3.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.3.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.3.6) Comprobación:
5.3.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.3.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Actividad 5.4: Jaime compró 3 jabones y 2 botes de colonia por 12 euros, y Elena compró 4 jabones y 3 botes de colonia por 17 euros. Averigua el precio de cada producto.
5.4.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.4.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.4.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.4.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.4.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.4.6) Comprobación:
5.4.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.4.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Actividad 5.5: Hace siete años la edad de un padre era el cuádruplo de la de su hijo y actualmente es el triple. Averigua cuál es la edad de cada uno.
5.5.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.5.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.5.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.5.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.5.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.5.6) Comprobación:
5.5.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.5.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Actividad 5.6: Paloma tiene monedas de 2 euros y 1 euros y billetes de 10 euros. Sabiendo que tiene 20 monedas y que el valor de todas juntas es 33 euros, calcula el número de monedas que tiene de cada tipo.
5.6.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.6.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)

5.6.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.6.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.6.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.6.6) Comprobación:
5.6.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.6.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Cuadro V.5. Enunciados de la actividad 5

B) Criterios de evaluación

- 1) Responde correctamente.
- 2) Responde incompletamente o comete errores de cálculo.
- 3) Responde incorrectamente o comete errores al despejar.
- 4) No contesta.
- 0) No asiste a clase.

C) Resultados:

Este apartado de resultados está dividido en 6 partes en cada una de las que estudiamos las respectivas cuestiones (1, 2, 3, 4, 5, 6a y 6b) que se formulan en cada una de las respectivas actividades 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6.

Eso sí, omitimos el de aquellas cuestiones de los últimos problemas de las que no pudimos extraer información porque fueron entregadas en blanco por falta de tiempo, tal y como se señala en el Anexo II "Diario de Clase".

Cuestión 1: ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
5.1.1	1 (3%)	27 (81%)	5 (15%)	0 (0%)	0 (0%)
5.2.1	1 (3%)	10 (30%)	18 (54%)	3 (9%)	1 (3%)
5.3.1	1 (3%)	9 (27%)	16 (48%)	1 (3%)	6 (18%)
5.4.1	1 (3%)	12 (36%)	7 (21%)	1 (3%)	12 (36%)
5.5.1	1 (3%)	6 (18%)	2 (6%)	1 (3%)	24 (72%)
5.6.1	1 (3%)	1 (3%)	0 (0%)	1 (3%)	30 (90%)

Tabla V.33. Resultados de la actividad 5.1.1, 5.2.1, 5.3.1, 5.4.1, 5.5.1 y 5.6.1

Examinada la anterior tabla V.33, tenemos que:

- El porcentaje de respuestas correctas (calificadas con un 1) está cerca del 33%, salvo en la 5.1.1 (bien respondida por el 81%) y en las dos últimas actividades 5.5.1 y 5.6.1 (poco significativas porque faltó tiempo según consta en el Diario de clase).

- El porcentaje de respuestas incompletas (calificadas con un 2) es elevado en todas las actividades. Lo anterior es atribuible, en parte, a que en la enseñanza habitual no se suele dar importancia a señalar qué datos son conocidos.

- El número de respuestas incorrectas (calificadas con un 3) ha sido muy reducido -0 en la 5.1.1, 3 en la 5.2.1 y 1 en las demás-.
- El número de respuestas en blanco aumenta rápidamente. Lo anterior es atribuible, probablemente, a la falta de tiempo de la que hablamos en las fichas nº 8 y nº 9 del Anexo II "Diario de Clase".

-Actividad 5.1.1:

- Hay 21 respuestas (el 63% del total) en las que se especifican los sustantivos y los adjetivos numerales de los datos conocidos del enunciado. Son respuestas muy informativas. Veamos un ejemplo representativo:

  "*50 preguntas* *2 puntos por acierto*
-1.5 puntos por fallo".
(Alumno A08)

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que se indican sólo los sustantivos de los datos conocidos del enunciado. Son respuestas correctas pero menos informativas que las 21 respuestas anteriores. Veamos una respuesta representativa: "*nº de preguntas*
Puntos por pregunta acertada
Puntos que se restan por cada pregunta equivocada".
(Alumno A05)

-Actividad 5.2.1:

- Hay 8 respuestas correctas (el 24% del total) en las que se especifican los sustantivos y los adjetivos numerales de los datos conocidos del enunciado. Veamos una respuesta representativa:
"*el perímetro 50 m*
La base es 5 m más larga que la altura" (Alumno A27)
- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que sólo se dejan sin especificar los adjetivos numerales de algunos de los datos conocidos del enunciado. Veamos una respuesta representativa:
"*perímetro del rectángulo*
Base 5m + larga que altura" (Alumno A32)

  Destacamos que, en la anterior respuesta, se omite indicar que el perímetro mide 50 metros.

- Hay 15 respuestas (el 45% del total) en las que no se indican las relaciones existentes entre la base y la altura. Veamos dos respuestas representativas:

  -"*P rectángulo = 50 m*" (Alumno A03)

  -"*P = 50 m* *Base: x = h + 5*" (Alumno A09)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A03 se omite escribir que la base mide 5 m más que la altura.

-En la respuesta del alumno A09 sólo se omite escribir que las 5 unidades en que la base supera a la altura vienen medidas en metros.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que no especifican ninguna de cantidades de los datos conocidos.
- Hay 3 respuestas incorrectas (el 9% del total):

-"*El perímetro y los metros de la base*" (Alumno A02)

-"*base altura perímetro*" (Alumno A13)

-"*nº de metros de la altura nº de metros de la base*" (Alumno A07)

Destacamos que, en las tres respuestas anteriores, los datos que hay que hallar, la longitud de la base y la de la altura, son erróneamente identificados como conocidos. Lo anterior es atribuible, en parte, a que, en la práctica escolar habitual, base y altura suelen ser datos conocidos y el área suele ser el dato a calcular.

-Actividad 5.3.1:

- Hay 9 respuestas correctas (el 27% del total). Veamos una respuesta representativa, la del alumno A16:

"*Edad del padre +28 años más que Juan*
Juan 24 años más que su hijo
Entre los 3 suman 100 años".

- Hay 13 respuestas (el 42% del total), en las que se escriben los sustantivos y los adjetivos numerales de los datos conocidos y hay 2 (el 6% del total) en las que sólo mencionan los sustantivos de los datos conocidos.
- Sólo hay una respuesta incorrecta: "*Juan 28 años*" (Alumno A10)

Destacamos que se interpreta que "el padre tenga 28 años más que Juan" como si se dijera que "Juan tiene 28 años de edad". Opinamos que se trata de un caso aislado: Los estudiantes suelen estar muy familiarizados con la realidad aritmética de los problemas sobre edades.

-Actividad 5.4.1:

- Hay 8 respuestas (el 24% del total) en las que se escriben las cantidades de los datos conocidos. Veamos dos respuestas representativas:

-"*3 jabones + 2 botes de colonia = 12*
4 " " + 3 " " = 17 €" (Alumno A14)

-"*3 jabones, 2 botes de colonia por 2 euros*
4 jabones, 3 colonias por 17 euros" (Alumno A16)

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que sólo se dice qué cantidades son las conocidas y las unidades en que se expresan, sin concretar cantidades. Veamos una respuesta representativa, la del alumno A17: "*El número de jabones y botes de colonia que compraron Jaime y Elena y los euros que le costaron*".

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las cuales no escriben las cantidades de los datos que se han mencionado. Veamos tres respuestas representativas:

  -"*numero de botes y botes de colonia*" (Alumno A08)

  -"*El número total de Euros que gastó Jaime, y el número total de Euros que gastó Elena*" (Alumno A28)

  -"*Lo que compró Jaime y lo que compró Elena*" (Alumno A32)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A08 se habla sólo de los coeficientes conocidos de la x y de la y.

  -En las respuestas de los alumnos A28 y A32 se habla sólo de los términos independientes.

- Hay una respuesta incorrecta:

  "*Jaime 3 + 2 = 12 €*
  Elena 4 + 3 = 17 €" (Alumno A25)

  Destacamos que, probablemente, se entiende bien el contexto comercial del enunciado, muy familiar para ellos, pero se expresa mal dicho contexto.

-Actividad 5.5.1:

- Hay 6 respuestas correctas (el 18 % del total).

- Hay 2 respuestas incompletas (el 6% del total). Veamos un ejemplo representativo:

  "*solo datos relacionados*" (Alumno A05)

  Destacamos que en la anterior respuesta se alude a que existen unas relaciones entre las edades de los personajes que aparecen en el enunciado, pero no se especifica cuáles son tales relaciones.

Cuestión 2:¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
5.1.2	1 (3%)	26 (78%)	2 (6%)	1 (3%)	3 (9%)
5.2.2	1 (3%)	2 (6%)	27 (81%)	2 (6%)	1 (3%)
5.3.2	1 (3%)	3 (9%)	23 (69%)	0 (0%)	6 (18%)
5.4.2	1 (3%)	0 (0%)	19 (57%)	1 (3%)	12 (36%)
5.5.2	1 (3%)	1 (3%)	8 (24%)	0 (0%)	23 (69%)
5.6.2	1 (3%)	1 (3%)	0 (0%)	1 (3%)	30 (90%)

Tabla V.34. Resultados de la actividad 5.1.2, 5.2.2, 5.3.2, 5.4.2, 5.5.2 y 5.6.2

Analizando la anterior tabla V.34, tenemos que:

- El porcentaje de respuestas correctas, en las que se indica bien cuáles son los datos desconocidos de los enunciados, es inferior al 10%, salvo en la actividad 5.1.2 (bien respondida por el 78%).
- El número de respuestas incompletas (calificadas con un 2) es muy elevado en todas las actividades.
- El número de respuestas incorrectas ha sido muy reducido. (0, 1 ,ó 2) en todas las actividades.
- El número de respuestas en blanco (calificadas con un 4) ha aumentado rápidamente. Este dato se explica fácilmente por lo que indica en el Diario de Clase del Anexo: no hubo tiempo para realizar las actividades 5.5 y 5.6.

-Actividad 5.1.2:

- Hay 13 respuestas (el 39% del total) en las que se habla del número de "respuestas" (acertadas y no acertadas) y hay otras 13 respuestas (el otro 39% del total) en las que se habla de número de "preguntas" (acertadas y no acertadas).
- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que falta hablar de las preguntas acertadas o de las no acertadas.
- Hay una respuesta incorrecta: "*El número de respuestas que hay*" (Alumno A12)

  Destacamos que esta respuesta es confusa: ¿Se hace referencia al número total de respuestas? ¿O al número de correctas e incorrectas por separado?

-Actividad 5.2.2:

- Sólo aparecen 2 respuestas correctas (el 6% del total). En ellas se dice que se desconoce la altura y la base y que están medidas en metros.
- Hay 21 respuestas (el 63% del total) en las que se dice que se desconoce la altura y la base sin indicar que están medidas en metros y hay 6 respuestas (el

18% del total) en las que se dice que sólo se desconoce la altura. El que se hable de la altura y la base, en vez de hablar de la longitud de la altura y de la longitud de la base, es atribuible, en parte, a que en las fórmulas geométricas, para facilitar su memorización, se suele hablar de los elementos geométricos, no de las longitudes de los mismos.

- Hay dos respuestas incorrectas (el 6% del total):

  -"*El perímetro, la base y la altura*" (Alumno A20)

  -"*El perímetro, la base*" (Alumno A22)

  Destacamos que en ambas respuestas se pasa por alto que en el enunciado se indica que el perímetro es un dato conocido (5 metros). Lo anterior es atribuible, en parte, a que están acostumbrados, en los problemas de geometría de la práctica escolar habitual, a que los perímetros y las áreas sean los datos a calcular.

-Actividad 5.3.2:

- Hay 3 respuestas correctas (el 9% del total) en las que se dice que se desconocen las edades de los tres miembros de la familia y que dichas edades están medidas en años.
- Hay 17 respuestas (el 51% del total) en las que se habla de las edades de los tres miembros de la familia pero no se dice que dichas edades se miden en años. No obstante, varios de ellos sí que indican las unidades –años- en el siguiente apartado 5.3.5 en el que dan las soluciones. Probablemente, la mayoría de los alumnos identifica el año como unidad intrínsecamente unida a la edad.
- Hay 5 respuestas (el 15% del total) en las que sólo se habla de las edades de dos de los tres miembros de la familia. O son despistes o hay un déficit de comprensión del texto del enunciado.

-Actividad 5.4.2:

- No hay respuestas en las que se diga que lo desconocido son los precios -medidos en euros- de cada pastilla de jabón y de cada bote de colonia.

  Sí que hay 19 respuestas incompletas (el 57% del total) en las se dice que lo desconocido son los precios de cada producto pero sin especificar que el euro es la unidad monetaria de medida. No obstante, como varios de ellos escriben $x = 2$€ al dar las soluciones en el siguiente apartado 5.4.5, la mayoría de los alumnos considera que se sobrentiende que la unidad de los precios es el euro.
- Hay una respuesta incorrecta: "*1 jabón = x   1 bote de colonia = y*" (Alumno A03)

Observamos que, en esta respuesta, se identifican las incógnitas como abreviaturas de sustantivos.

Cuestión 3:¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
5.1.3	1 (3%)	14 (42%)	12 (36%)	2 (6%)	4 (12%)
5.2.3	1 (3%)	1 (3%)	30 (90%)	1 (3%)	0 (0%)
5.3.3	1 (3%)	4 (12%)	19 (57%)	1 (3%)	8 (24%)
5.4.3	1 (3%)	1 (3%)	18 (54%)	1 (3%)	12 (36%)
5.5.3	1 (3%)	0 (0%)	8 (24%)	0 (0%)	24 (72%)
5.6.3	1 (3%)	1 (3%)	0 (0%)	1 (3%)	30 (90%)

Tabla V.35. Resultados de las actividades 5.1.3, 5.2.3, 5.3.3, 5.4.3, 5.5.3 y 5.6.3

Analizando la anterior tabla V.35, tenemos que:

- El porcentaje de respuestas correctas, en las que se asignan bien las incógnitas, es inferior al 3%, salvo en la actividad 5.1.3 -bien respondida por el 42%- y en la actividad 5.3.3 -bien respondida por el 12%-.

- El número de respuestas incompletas, calificadas con un 2, es muy elevado en todas las actividades. Se trata de porcentajes que oscilan ente el 50% y el 90%, salvo en las dos últimas actividades 5.5.3 y 5.6.3 que pocos contestaron por falta de tiempo.

- El número de respuestas incorrectas ha sido muy reducido -0, 1 o 2- en todas las actividades.

- El número de respuestas en blanco -calificadas con un 4- ha aumentado rápidamente. Dicho aumento es atribuible a que muchos alumnos no tuvieron tiempo ni de intentar realizar las actividades 5.5 y 5.6, tal y como se puede leer en las fichas nº 9 y nº 10 del Anexo II “Diario de Clase”.

-Actividad 5.1.3:

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que se habla apropiadamente de x = número de acertadas y de y = número de no acertadas. Veamos dos respuestas representativas:

  -“*x = nº fallos* *y = nº aciertos*” (Alumno A08)

  -“*x = nº aciertosy = nº fallos*” (Alumno A31)

- Hay 10 respuestas (el 30% del total) en las que se habla de x = acertadas y de y = no acertadas. Esto es, en ellas, se interpretan las incógnitas -al menos expresivamente- como abreviaturas de sustantivos de objetos. Veamos dos respuestas representativas:

-"*Preguntas acertadas: x*
Preguntas no acertadas: y " (Alumno A05)

-"*x = acertadas y = falladas*" (Alumno A09)

- Hay dos respuestas incorrectas (el 6% del total):

-"*x Puntos por preguntas acertadas*
y a los puntos fallidos" (Alumno A06)

-"*datos no conocidos = y*" (Alumno A24)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A06 se asignan las incógnitas a las cantidades de puntos dados o quitados, en vez de a las cantidades de respuestas correctas e incorrectas.

-En la respuesta del alumno A24 se asigna la incógnita *y* a un genérico "*datos no conocidos*" carente de significado.

-Actividad 5.2.3:

- Sólo hay una respuesta calificada con un 1 (la del alumno A14) en la que se explicita que las incógnitas *x* e *y* son las medidas de la altura y de la base en metros: "*medida de la altura (metros)* *x = m. altura*
base (metros) *y = m base*".

- Hay 18, 6 y 12 respuestas (el 54%, el 18% y el 36% del total) en las que, respectivamente, se escribe que los datos desconocidos son: "*x = base, y = altura*"; "*x, y*"; "*la base es x + 5 y la altura es x*" Destacamos que:

-En las respuestas del primer tipo se identifica, al menos expresivamente, las incógnitas como abreviaturas de base y altura.

-En las del segundo tipo sólo se dice la generalidad de que los datos desconocidos son *x* e *y*.

-En las del tercer tipo se expresa la base (*x+5*) en función de la altura (*x*).

- Sólo hay una respuesta incorrecta: "*x = altura y + 5 = base*" (Alumno A08)

Destacamos que, en la respuesta anterior, se intenta poner la base en función de la altura pero, incoherentemente, se utilizan dos letras diferentes.

-Actividad 5.3.3:

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se identifican bien las edades de los tres sujetos con sus correspondientes expresiones algebraicas

- Hay una respuesta en la que se identifica el nombre de los sujetos con las expresiones algebraicas correspondientes: "*Juan = x hijo = x – 24 padre = x + 28*" (Alumno A08)

  Destacamos que, en la respuesta anterior, se identifica el nombre del sujeto con la expresión algebraica de su edad. Como los alumnos están muy familiarizados con la naturaleza cuantitativa de las edades, es probable que se trate sólo de un error expresivo.

- Hay 8 respuestas (el 24% del total) en las que sólo se identifican las edades de uno o de 2 de los 3 miembros de la familia con sus expresiones algebraicas correspondientes, en vez de identificar la de los 3.

- Hay 5 respuestas incompletas (el 15% del total) en las que se identifican los nombres de uno o 2 de los 3 miembros de la familia con sus expresiones algebraicas correspondientes, en vez de identificar la de los 3. Como los alumnos están muy familiarizados con la naturaleza cuantitativa de las edades es probable que sean sólo errores expresivos.

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que sólo se escribe alguna letra, dos letras o dos expresiones. Lo anterior es atribuible, probablemente, a que, en la enseñanza habitual, no se suele valorar el rigor de la asignación de las incógnitas sino la correcta formulación de las ecuaciones y su resolución.

- Hay una respuesta incorrecta: "*Su padre = x Juan = x – 28 Su hijo = x – 28 + 24*" (Alumno A11)

  Destacamos que, en la anterior respuesta, se escribe que el hijo de Juan tiene más años que el mismo Juan. Lo anterior, probablemente se debe a que se realiza una traducción demasiado apegada al enunciado "*Juan tiene 24 años más que su hijo*", en vez de analizarse el significado numérico de las expresiones algebraicas que se escriben.

-Actividad 5.4.3

- Hay una única respuesta correcta en la que, además de hablar de precios, se puntualiza que las unidades de los precios son euros.

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que x e y son los precios de cada jabón y de cada colonia, sin escribir que la unidad es el euro. Veamos una respuesta representativa: "*x = precio jabones y = precio colonias*" (Alumno A13)

- Hay 10 respuestas (el 30% del total) en las que x e y se expresan como abreviaturas de los sustantivos "*jabones*" y "*colonias*" Veamos una respuesta representativa: "*x jabones y colonias*" (Alumno A16)

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que sólo se escriben las incógnitas x e y, sin decir lo que significan.
- Sólo hay una respuesta incorrecta: "*1 jabón = x 1 bote de colonia = y*" (Alumno A03)

  Destacamos que en esta respuesta se identifica x con un jabón e y con un bote de colonia.

-Actividad 5.5.3:

- Hay 8 respuestas incompletas (el 24% del total) que son todas -salvo una en la que "x = *papá*" e "y = hijo"- como las siguientes respuestas:

  -"*años del padreaños del hijo*" (Alumno A14)

  -"*la edad del padre la edad del hijo*" (Alumno A05)

Cuestión 4: Formula las ecuaciones					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
5.1.4	1 (3%)	6 (18%)	3 (9%)	8 (24%)	15 (45%)
5.2.4	1 (3%)	19 (57%)	0 (0%)	8 (24%)	5 (15%)
5.3.4	1 (3%)	20 (60%)	0 (0%)	3 (15%)	9 (27%)
5.4.4	1 (3%)	19 (57%)	0 (0%)	0 (0%)	13 (39%)
5.5.4	1 (3%)	2 (6%)	5 (15%)	25 (75%)	1 (3%)
5.6.4	1 (3%)	2 (6%)	0 (0%)	0 (0%)	30 (90%)

Tabla V.36. Resultados de las actividades 5.1.4, 5.2.4, 5.3.4, 5.4.4, 5.5.4 y 5.6.4

Analizando la anterior tabla V.36, tenemos que:

- El porcentaje de respuestas correctas, en las que se plantean bien las ecuaciones, es cercano al 60%, salvo en la actividad 5.1.4 y en las dos últimas actividades 5.5.4 y 5.6.4: La actividad 5.1.4, bien respondida sólo por el 18%, era atípica porque en el enunciado faltaba el término independiente de la 2ª ecuación; La actividad 5.5.4 les resultó difícil y la actividad 5.6.4 no fue intentada por casi nadie, según las fichas nº 9 y nº 10 del Anexo II.
- El número de respuestas incompletas, calificadas con un 2, es nulo en todas las actividades 5.2.4, 5.3.4 y 5.4.4. Es más elevado en la actividad 5.1.4, que se refiere a un enunciado atípico en el que falta un dato, y en la actividad 5.5.4, que les ha resultado excepcionalmente difícil.
- El número de respuestas incorrectas oscila entre el 0% de las actividades 5.4.4 y 5.6.4 y el elevado 75% de la actividad 5.5.4, que tan difícil les ha resultado, pasando por el 24% de la 5.1.4 y la 5.2.4 y el 15% de la 5.3.4.

- El número de respuestas en blanco, calificadas con un 4, ha sido muy elevado en la primera actividad 5.1.4, con un enunciado atípico, y en la última actividad 5.6.4, que casi nadie pudo intentar tal actividad por falta de tiempo. En las demás actividades, el porcentaje de las contestaciones en blanco oscila entre el 3% y el 39%.

-Actividad 5.1.4:

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que se especifica cuál es el dato que falta en el enunciado. Veamos dos respuestas representativas:

  -"*No se puede plantear; faltan datos falta la nota que sacó*" (Alumno A04)

  -"*2 x – 5y =____ no se puede terminar porque faltan números de datos*" (Alumno A32)

- Hay 2 respuestas correctas (el 6% del total) en las que sólo se dice que falta un dato en el enunciado:

  -"*x + y = 50   faltan datos   no se puede resolver*" (Alumno A05)

  -"*Faltan datos*" (Alumno A02)

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que sólo se escriben expresiones del tipo "*No se puede*" o "*No se puede hacer*", sin explicar porqué no se puede formular como un sistema habitual de dos ecuaciones con dos incógnitas.

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que se escriben expresiones del tipo "*falta el número de respuestas acertadas*" o "*el número de acertadas y de falladas*", es decir, en las que se dice equivocadamente que, en el enunciado, faltan las cantidades que corresponden a las incógnitas.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se escriben ecuaciones incoherentes con el enunciado:

  -" $\frac{x-y}{50}$ " (Alumno A01)

  -" $2x - 1.5y = 50$ " (Alumno A15)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A01 se escribe una expresión algebraica que expresa la diferencia entre el número de respuestas acertadas y el de erradas, dividido entre 50 -el número total de respuestas-. Semejante operación no tiene ningún significado real.

  -En la respuesta del alumno A15 se calcula la puntuación obtenida -se dan 2 puntos por cada pregunta acertada y se quitan 1.5 por cada pregunta errada- se iguala a 50, que es el número total de preguntas. Igualar la puntuación obtenida con el número total de preguntas indica un bajo nivel de comprensión.

-Actividad 5.2.4:

- Hay 5 respuestas (3 correctas y 2 incorrectas) en las que sí se dibuja un rectángulo. Sin embargo, hay 22 respuestas (16 correctas y 6 incorrectas) en las que no se dibuja nada.

  Como se ve, la estrategia de utilizar dibujos para resolver problemas de geometría sólo es utilizado por una minoría de alumnos.

- Hay 8 respuestas (el 24% del total) en las que no se formula bien una de las ecuaciones. Veamos tres ejemplos representativos:

  -“ $\begin{cases} 5x = y \\ 2x + 2y = 50 \end{cases}$ “ (Alumno A14)

  -“ $\begin{cases} x + 5 = y \\ 2x + 5y \end{cases}$ “ (Alumno A23)

  -“ $\begin{cases} 2(y+5) + 2x = 50 \\ 5 + x = y \end{cases}$ “ (Alumno A24)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A14 se traduce erróneamente “*la base sea 5 metros más larga que la altura*” como $5x = y$.

  -En la respuesta del alumno A23 se formula la expresión $2x + 5y$, en vez de la ecuación $2x + 2y = 50$, que nos hace concluir que no se domina el concepto de ecuación.

  -En la respuesta del alumno A24 se formula la ecuación $2(y+5) + 2x = 50$, referida al perímetro, que nos hace concluir que se domina el concepto de perímetro pero que no se comprende el concepto de sustituir una incógnita por una expresión algebraica.

-Actividad 5.3.4:

- Hay 20 respuestas correctas (el 60% del total). Veamos una respuesta representativa: “ $x + x + 28 + x - 24 = 100$ “ (Alumno A14)

- Hay 3 respuestas incorrectas (el 9% del total):

  -“ $x + (x - 28) + (x - 28 + 24) = 100$ ” (Alumno A11)

-“$\left.\begin{array}{l} x = y - 28 \\ x - 24 = h \end{array}\right\}$” (Alumno A13)

-“*No se puede resolver hay tres incógnitas*” (Alumno A16)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A11 se comete el error de sumar 24 años a la edad de Juan, en vez de restar 24 años, para representar la edad del hijo de Juan.

-En la respuesta del alumno A13 se escribe un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas en el que falta la ecuación “$x + y + h = 100$“ En cualquier caso, los alumnos de tercero de ESO sólo saben resolver ecuaciones con una incógnita y sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

-En la respuesta del alumno A16 se afirma que los problemas con 3 incógnitas no son resolubles, a pesar de que, en la enseñanza habitual, sí que habrá visto problemas de más de dos incógnitas resolubles si todas las incógnitas se ponen en función de una sola incógnita.

-Actividad 5.4.4:

- Hay 19 de respuestas correctas (el 57% del total), no hay ninguna respuesta incorrecta ni incompleta, y hay 13 respuestas en blanco (el 39% del total).

  El alto porcentaje de respuestas acertadas puede deberse, en parte, a que este enunciado permite que cada palabra -o cada grupo de palabras- se traduzca literalmente en un número, una letra, un símbolo operacional…, sin requerir una comprensión semántica de la situación comercial del enunciado del problema.

  El también alto porcentaje de respuestas en blanco puede deberse a la falta de tiempo que hicimos constar en las fichas nº 9 y nº 10 del Anexo II “Diario de Clase”.

-Actividad 5.5.4

- Hay 2 respuestas correctas (el 6% del total):

  -“$\left\{\begin{array}{l} x - 7 = 4(y - 7) \\ x = 3y \end{array}\right.$„ (Alumno A14)

  -“$3x - 7 = 4(x - 7)$” (Alumno A05)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A14 las incógnitas x e y representan las edades de padre e hijo y se escriben dos ecuaciones sobre la relación entre las edades de padre e hijo en el pasado -1ª ecuación- y en el presente -2ª ecuación-. Estamos ante una formulación casi literal –sólo hay que evitar el error de inversión- del enunciado del problema, que requiere poca comprensión del lenguaje algebraico.

-En la 2º respuesta, la del alumno A05, las expresiones $3x$ y x representan las edades de padre e hijo en el presente y se escribe, empleando las anteriores expresiones, una única ecuación sobre la relación entre las edades de padre e hijo en el pasado. Estamos ante una formulación que requiere bastante comprensión del lenguaje algebraico: hay que manejar la expresión $3x$ como edad del padre.

- Hay 5 respuestas incorrectas (el 15% del total):

-“$\{x-7=4y$” (Alumno A13)

-“$\begin{cases} x-7=4y \\ x=3y \end{cases}$” (Alumno A29)

-“$\begin{cases} -7x=7+4x \\ x=3y \end{cases}$” (Alumno A24)

-“$\begin{cases} -7x=-7+4y \\ x=3y \end{cases}$” (Alumno A33)

-“$\begin{cases} -7+x=-7+4y \\ x=3y \end{cases}$” (Alumno A31)

Destacamos que:

-En las respuestas de los alumnos A13 y A29 se escribe que la edad en el pasado del padre cuadriplica la actual del hijo, en vez de escribir que la edad del padre en el pasado cuadriplica la del hijo edad.

-En las respuestas de los alumnos A24 y A33 se escribe erróneamente $-7x$, en vez de escribir $-7+x$. Probablemente, es un error provocado por una deficiente comprensión de la notación algebraica.

-En las respuestas de los alumnos A33 y A314 se escribe erróneamente $-7+4y$, en vez de $4(y-7)$. Probablemente, es otro error provocado por una deficiente comprensión de la notación algebraica.

Cuestión 5:Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
5.2.5	1 (3%)	21 (63%)	0 (0%)	2 (6%)	9 (27%)
5.3.5	1 (3%)	21 (63%)	0 (0%)	0 (0%)	11 (33%)
5.4.5	1 (3%)	14 (42%)	1 (3%)	1 (0%)	16 (48%)
5.5.5	1 (3%)	2 (6%)	1 (3%)	0 (0%)	29 (87%)
5.6.5	1 (3%)	0 (0%)	1 (3%)	0 (0%)	31 (63%)

Tabla V.37. Resultados de las actividades 5.1.5, 5.2.5, 5.3.5, 5.4.5, 5.5.5 y 5.6.5

De la tabla V.37, destacamos que:

- La actividad 5.1, en cuyo enunciado faltaba un dato, no incluye la tarea 5.1.5 porque no tiene sentido resolver un sistema que no puede ser planteado por la ausencia de dicho dato.
- De la observación del desarrollo de la clase, tenemos que los porcentajes referidos a las actividades 5.5.5 y 5.6.5 no son significativos porque fueron muy pocos los alumnos que pudieron intentar tales actividades.
- El porcentaje de respuestas correctas en las actividades 5.2.5, 5.3.5 y 5.4.5, en las que se resuelven bien las ecuaciones, oscila entre el 63% de la 5.2.5 y de la 5.3.5 y el 42% de la 5.4.5.
- El porcentaje de respuestas con errores de cálculo, calificadas con un 2, o con errores al despejar, calificadas con un 3, es muy reducido -habitualmente el 0% o el 3%-.
- El porcentaje de respuestas en blanco oscila, salvo en las dos últimas actividades, entre el 27% y el 48%. Dicho porcentaje es debido, en algunos casos, a que no han sabido plantear un sistema resoluble en la actividad anterior y es debido, en otros casos, a una posible falta de tiempo –tal y como se deduce de la lectura de las fichas nº 9 y nº 10 del Anexo II “Diario de Clase”

-Actividad 5.2.5:

- Hay 21 respuestas correctas (el 63% del total) en las que se resuelven bien las ecuaciones, hay 0 respuestas con errores de cálculo y sólo hay 2 respuestas con errores al despejar. Atribuimos el éxito en la resolución de ecuaciones, en parte, al mucho tiempo dedicado a la operatoria de ecuaciones en la enseñanza habitual.

  Veamos las 2 únicas respuestas incorrectas:

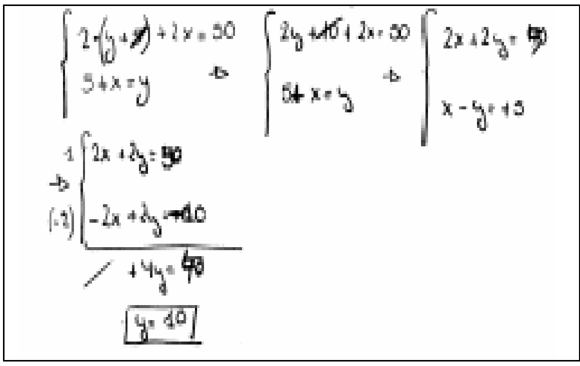


Figura V.23. Respuesta del alumno A27

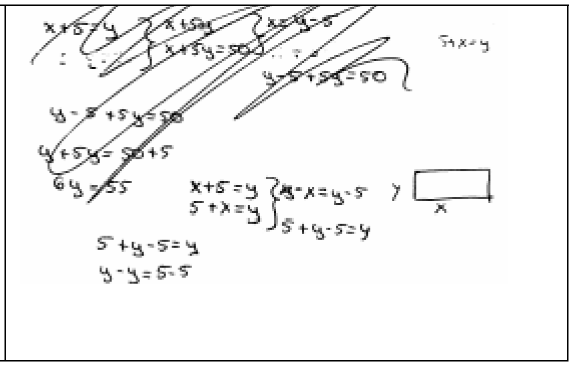


Figura V.24. Respuesta del alumno A28

  Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A27, la eliminación del 10 en el miembro izquierdo, sin modificar el 50, en la ecuación $2y+10+2x=50$ y la posterior omisión del cálculo de la x, sugieren que no se dominan comprensivamente las técnicas de resolución de sistemas.

-En la respuesta del alumno A28 se formula dos veces la misma relación entre la base y la altura y, luego, no se sabe interpretar el sistema compatible indeterminado que se ha planteado.

-Actividad 5.3.5:

- Hay 20 respuestas (el 60% del total) en las que el planteamiento y la resolución de las ecuaciones son correctos.
- Hay una respuesta en la que el planteamiento de las ecuaciones es incorrecto y la resolución de las mismas es correcta.

-Actividad 5.4.5:

- Hay 14 respuestas (el 42% del total) con las ecuaciones bien resueltas.
- Hay una respuesta en la que hay un error de memoria de cálculo y hay otra respuesta en la que se comete un error al despejar:

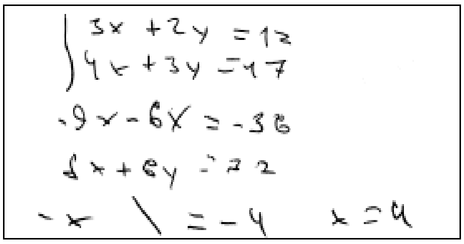


Figura V.25. Respuesta del alumno A16

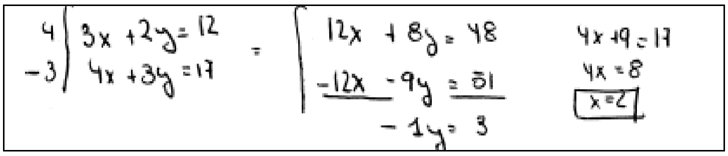


Figura V.26. Respuesta del alumno A27

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A16 se dice que $2 \cdot 17$ es 32 y no se halla el valor de y, probablemente, porque no sabe cómo calcularlo.

-En la del alumno A27 se multiplica por -1 sólo el miembro izquierdo de $4x+3y=17$. Y, luego, $4x+3y=17$ se transforma en $4x+9=17$ porque se procede como si se tuviese que $1y=3$, en vez de tener que $-1y=3$. Tales errores en el uso del signo – sugieren que no se sabe operar con enteros negativos.

Cuestión 6a:¿En que unidades se expresan las soluciones?					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
5.2.6a	1 (3%)	20 (60%)	0 (0%)	2 (6%)	10 (30%)
5.3.6a	1 (3%)	19 (57%)	0 (0%)	1 (3%)	12 (36%)
5.4.6a	1 (3%)	13 (39%)	0 (0%)	1 (3%)	18 (54%)
5.5.6a	1 (3%)	1 (3%)	0 (0%)	0 (0%)	31 (93%)
5.6.6a	1 (3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	32 (96%)

Tabla V.38. Resultados de las actividades 5.2.6a, 5.3.6a, 5.4.6a, 5.5.6a y 5.6.6a

De la anterior tabla V.38, destacamos que:

- No existe actividad 5.1.5 porque, como en el enunciado faltaba un dato que llevaba a la formulación de un sistema incompleto, no tiene sentido preguntar sobre las unidades de las soluciones de tal problema.
- De la lectura de las fichas nº 9 y nº 10 del Anexo II "Diario de Clase", tenemos que los porcentajes referidos a las actividades 5.5.6a y 5.6.6a no son significativos porque fueron muy pocos los que intentaron tales actividades por falta de tiempo.
- El porcentaje de respuestas correctas en las actividades 5.2.6a, 5.3.6a y 5.4.6a, en las que se indican bien las unidades de las soluciones, oscila entre el 60% de la 5.2.6a, el 57% de la 5.3.6a y el 39% de la 5.4.6a.
- El porcentaje de respuestas con errores de cálculo, calificadas con un 2, o con errores al despejar, calificadas con un 3, es muy reducido -habitualmente el 0% o el 3%-. Esto es una manifestación de que nuestros alumnos si son conscientes de cuáles son las unidades de las soluciones halladas.
- El porcentaje de respuestas en blanco oscila crece desde el 30% en la 5.2.6a hasta el 54% en la 5.4.6a, dejando aparte los porcentajes superiores al 90% en las dos últimas actividades 5.5.6a y 5.6.6a que fueron intentadas por muy pocos alumnos por falta de tiempo, como podemos constatar por la lectura de Diario de Clase del Anexo.

-Actividad 5.2.6.a:

- Hay dos respuestas incorrectas (el 6% del total):

  -"*b = 15   h = 10*" (Alumno A24)

  -"b = 15   /   h = 10" (Alumno A25)

  Destacamos que las anteriores respuestas a la pregunta *"¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?*" parecen indicar que no se comprende el concepto de unidad.

-Actividad 5.3.6.a:

- Hay 19 respuestas correctas (el 57% del total). Examinando las calificaciones de cada uno en las tablas del Anexo, observamos que todos los que resuelven bien el problema -en la anterior actividad 5.3.5- son conscientes de que las edades se miden en años.

- Hay una respuesta incorrecta: "*J = 32 A = 60 H = 8*" (Alumno A24)

  Destacamos que, en la anterior respuesta, se identifica la abreviatura del nombre de cada uno (J para Juan, A para el padre de Juan o abuelo de la familia y H para el hijo de Juan) con la edad del sujeto y no se escriben las unidades en que se miden dichas edades. Lo anterior es atribuible, en parte, a que, en la enseñanza habitual, no se valora realizar una asignación precisa de las incógnitas, sino formular y resolver bien.

-Actividad 5.4.6.a:

- Hay 13 respuestas (el 39% del total) en las que se afirma correctamente que las unidades de los resultados obtenidos son euros.

- Hay una respuesta incorrecta: "*1 jabón = 2 € 1 bote de colonia = 3 €*" (Alumno A03)

  Destacamos que, en esta respuesta, se utiliza el signo = como un símbolo de correspondencia entre objetos y precios de los objetos. Lo anterior es atribuible, en parte, a que en el lenguaje ordinario decimos habitualmente, refiriéndonos a un objeto que queremos comprar, que "*son tantos euros*", en vez de decir que "*cuesta tantos euros*".

Cuestión 6b: Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
5.2.6b	1 (3%)	0 (0%)	10 (30%)	0 (0%)	22 (66%)
5.3.6b	1 (3%)	0 (0%)	10 (30%)	1 (3%)	21 (63%)
5.4.6b	1 (3%)	3 (9%)	0 (0%)	1 (3%)	27 (81%)
5.5.6b	1 (3%)	0 (3%)	1 (3%)	0 (0%)	31 (93%)
5.6.6b	1 (3%)	0 (3%)	0 (0%)	0 (0%)	32 (96%)

Tabla V.39. Resultados de las actividades 5.2.6b, 5.3.6b, 5.4.6b, 5.5.6b y 5.6.6b

De la anterior tabla V.39, destacamos que:

- No tiene actividad 5.1.5 porque no tiene sentido hablar de comprobar las soluciones de un problema que no puede ser planteado por la ausencia de un dato en el enunciado.

- De la observación del desarrollo de la clase, tenemos que los porcentajes referidos a las actividades 5.5.6b y 5.6.6b no son significativos porque fueron muy pocos los alumnos que pudieron intentar tales actividades.
- El porcentaje de respuestas correctas es muy reducido. Oscila siempre entre el 0% y el 9%.
- Salvo en las actividades 5.2.6b y 5.3.6.b (con un 30% de comprobaciones incompletas o con errores de cálculo), el porcentaje de comprobaciones incompletas o con errores de cálculo es casi inexistentes: oscila entre el 0% y el 3%.
- El porcentaje de respuestas en blanco oscila entre el 66% de la actividad 5.2.6b, el 63% de la 5.3.6b, el 81% de la 5.4.6b y los porcentajes superiores al 90% de las dos últimas actividades que fueron intentadas por muy pocos alumnos (Esto lo sabemos por la lectura de las fichas nº 9 y nº 10 del Anexo II “Diario de Clase”). El aumento progresivo de problemas sin comprobación puede deberse, en parte, a que, ante las prisas por el paso del tiempo, muchos alumnos consideraron que era más importante plantear y resolver los problemas restantes que comprobar los ya resueltos.

-Actividad 5.2.6.b:

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se comprueba que el perímetro es 50 m pero se comete el error de decir que la base (15 m) es cinco veces mayor que la altura (5 m). Veamos un ejemplo representativo:

  “*10 + 10 + 15 + 15 = 20 + 30 = 50 m perímetro*
  La base (15) es 5 veces mayor que la altura (10)” (Alumno A21)

  Destacamos que, de hecho, se afirma que 15 es 5 por 10 pero, probablemente, dada la sencillez del enunciado y de las operaciones implicadas, se trata de un error expresivo y se cree estar diciendo que 15 es 5 más 10.

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que sólo se comprueba una de las dos condiciones del enunciado –o que el perímetro es 50 m o que la base mide 5 m más que la altura-. Veamos dos ejemplos:

  -“*la base mide 5 mas que la altura*
  base mide 15 m y la altura 10 m” (Alumno A10)

  - “h

  $$\downarrow$$
  $$b = 10 + 15 = 25$$
  $$h = 10$$“ (Alumno A25)

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que sólo se comprueban las ecuaciones planteadas:

-“ $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 2y = 50 \end{cases}$ $\begin{cases} 15 - 10 = 5 \\ 30 + 20 = 50 \end{cases}$ ” (Alumno A16)

-“ $\begin{array}{l} 5x = y \\ 5 \cdot 4{,}16 = 20{,}8 \\ 20{,}80 = 20{,}8 \end{array}$ $\begin{array}{l} 2x + 2y = 50 \\ 2 \cdot 4{,}16 + 20{,}8 \cdot 2 = 50 \\ 8{,}36 + 41{,}6 = 50 \\ 49{,}96 \cong 50 \end{array}$ ” (Alumno A14)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A16 se planteó bien el sistema y, probablemente, dada la presentación de la comprobación, sólo se comprueba que la resolución del sistema es correcta.

-En la respuesta del alumno A14 se planteó mal el sistema (se escribe $5x = y$, en vez de $5 + x = y$) y, evidentemente, dada la disparidad entre el enunciado y el sistema planteado, sólo se comprueba que la resolución del sistema es correcta.

-Actividad 5.3.6.b:

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se comprueba que las edades de los tres implicados suman 100 años, pero no se comprueba ni la diferencia entre las edades del abuelo, del padre y del nieto:

  -“*100 años = 32 años + 60 años + 8 años*” (Alumno A04)

  -“*32 + 60 +8 = 100 años*” (Alumno A05)

- Hay 7 respuestas incompletas (el 21% del total) en las que se comprueba que la diferencia entre la edad de Juan y la de su padre y la diferencia entre la edad de Juan y la de su hijo, sin comprobarse que la suma de las edades de los tres implicados es 100. Veamos un ejemplo representativo: “*Que Juan tenía 32 años, si le sumas 28 te da la edad del padre, que tiene 60 años y si le restas 24 te da la edad del hijo que es 8 años*” (Alumno A23)

- Hay una respuesta en la que sólo se comprueba la resolución de la ecuación: “ $(32 + 28) + 32 + (32 - 24) = 100$ “ (Alumno A29)

- Sólo hay una respuesta incorrecta: “*en la edad*” (Alumno A27)

  Destacamos que esta respuesta tan genérica sugiere así que no se comprende el concepto de comprobación.

-Actividad 5.4.6.b:

De esta actividad destacamos que:

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que, como los datos del enunciado se corresponden literalmente con las ecuaciones que lo formulan, se pueden estar comprobando el enunciado o el sistema o ambos a la vez. Veamos un respuesta representativa:

  "$3 \cdot 2\ € + 2 \cdot 3\ € = 12\,€ \qquad 4 \cdot 2\ € + 3 \cdot 3\ € = 17\,€$
  $12\,€ = 12\,€ \qquad 17\,€ = 17\,€$" (Alumno A05)

  Destacamos que, en la respuesta anterior, se escribe la unidad de las soluciones calculadas: el €. Dicha referencia al € indica que, probablemente, las soluciones se están comprobando en el contexto comercial del enunciado y no en el sistema planteado.

- Hay una respuesta en la que sólo se explica cómo comprobar la solución: "*Multiplicando cada bote de colonia y jabones y luego sumándolos*" (Alumno A29)

- Hay una sola respuesta incorrecta: "*Las colonias valen 3 € Los jabones 2 €*" (Alumno A31)

  Destacamos que en la anterior respuesta, cuando se pide la comprobación, sólo se escribe la solución.

D) Análisis de la comprensión de contenidos (CC)

- Los alumnos, en general, identificaron las letras que sustituyen las longitudes desconocidas de ciertos elementos geométricos (CC. I. 1.2) como letras que sustituyen los nombres de los correspondientes elementos geométricos (CC. III. 1.2).

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que los profesores usan dicha identificación para facilitar la transmisión oral y la memorización de las fórmulas geométricas y físicas.

- Fue minoritaria la realización de dibujos para facilitar el planteamiento de los problemas de álgebra de contenido geométrico.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que el planteamiento se basa más en la traducción literal de las palabras del texto del enunciado (CC. XVI) que en la comprensión de la situación geométrica (CC. XV).

- Hubo alumnos que omitieron expresar las unidades de medida en las soluciones, aún cuando son éstas las que dan sentido real a dichas soluciones. Lo anterior es atribuible, en parte, a que no se trabaja suficientemente, en la enseñanza habitual, la importancia de las unidades como parte del significado real de los números.

- Hubo alumnos que identificaron las letras como abreviaturas de sustantivos que designan a objetos (CC. III. 1.2) e identificaron el signo = como un signo de correspondencia entre conjuntos de objetos.

  Lo anterior es atribuible, en parte, tanto a la forma de expresarnos en la vida ordinaria -por ejemplo: "*2 coca-colas son 3 €*"- como a la forma de expresarnos en la clase de matemáticas -por ejemplo: "*el signo igual es lo que separa los dos miembros de toda ecuación*"-.

- Aparecieron planteamientos erróneos porque, quizás, no se entendieron las reglas de las operaciones algebraicas (CC. XI. 1.1). Por ejemplo, no se diferenció entre $4(x-7)$ y $4x-7$.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que hay alumnos que se basan en una memoria carente de comprensión cuando operan en las expresiones algebraicas.

- En general, los alumnos no comprobaron las soluciones ni en el enunciado (CC. XII. 1) -para saber si el problema está bien resuelto-, ni en las ecuaciones (CC. XIII. 1.2) -para estudiar si el sistema está bien resuelto-.

  Lo anterior es, en parte, atribuible a que no se suele practicar, en la enseñanza recibida, ni la comprobación semántica de enunciados ni la sintáctica de ecuaciones.

- Fue frecuente que sólo se sustituyera la solución obtenida en una de las 2 condiciones del enunciado o en una de las 2 ecuaciones del sistema cuando se realizaba una comprobación semántica (CC. XII. 1) o sintáctica (CC. XIII. 1.2).

  Lo anterior es, en parte, atribuible a que no se comprende bien el concepto de comprobación.

- Está muy generalizada la pericia para resolver los sencillos sistemas lineales 2x2, esto es, la pericia para manejar los aspectos más sencillos de las reglas para despejar (CC. X) y para operar (CC. XI).

  Probablemente, lo anterior es atribuible a que se dedica mucho tiempo, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, a la resolución de ecuaciones y de sistemas mucho más complejos que los que usan para plantear las situaciones reales de los problemas algebraicos.

- La resolución de problemas algebraicos explicitando detalladamente todos los pasos -análisis de datos conocidos y desconocidos, asignación de las incógnitas, planteamiento de ecuaciones, resolución de las mismas y comprobación de las soluciones en el enunciado- requiere mucho tiempo. Además, esa cantidad de tiempo varía mucho de unos alumnos a otros.

V.7. Actividad 6

A) Actividad propuesta

ACTIVIDAD 6: NECESIDAD DE COMPROBAR EL ENUNCIADO

Actividad 6.1: Raquel compra 5 melones y 2 sandías y paga 13 euros. Alfredo compra 3 melones y 4 sandías y paga 12 euros. Averigua el precio en euros de cada melón y el precio en euros de cada sandía.

$$\begin{cases} 5x+2y=18 \\ 3x+4y=15 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x=3 \\ y=1.5 \end{array}$$

6.1.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.1.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.1.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Actividad 6.2: Amelia tiene el triple de edad que Enrique. Dentro de cinco años Amelia tendrá sólo el doble de años que Enrique. ¿Qué edad tiene cada uno?
Llamamos x la edad de Amelia
Llamamos y la edad de Enrique

$$\begin{cases} 3x=y \\ x+5=2(y+5) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array}$$

6.2.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.2.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.2.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Actividad 6.3: Se desea obtener 60 Kilos de café molido, mezcla a base de café torrefacto, a 80 céntimos de euro el kilo, y de café natural, a 60 céntimos de euro el Kilo. Si queremos que el precio del kilo de mezcla sea 0.72 euros, Llamamos x a la cantidad de café torrefacto en Kilogramos y llamamos y a la cantidad de café natural en Kilogramos. Averigua qué cantidad de cada café debemos mezclar.

$$\begin{cases} x+y=60 \\ 80x+60y=4320 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x=36 \\ y=24 \end{array}$$

6.3.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.3.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.3.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Actividad 6.4: José le dice a Inés: "Mi colección de discos compactos es mayor que la tuya, ya que si te doy 10, tendrías la misma cantidad que yo" Inés le responde: "Tienes razón. Sólo te faltan 10 para doblarme en número" ¿Cuántos compactos tiene cada uno?

$$\begin{cases} x-10=2y \\ x+10=3y \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x=50 \\ y=20 \end{array}$$

6.4.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.4.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.4.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Cuadro V.6. Enunciados de la actividad 6

B) Criterios de evaluación

- 1) Responde correctamente y lo justifica.
- 2) Responde correctamente pero no lo justifica.
- 3) Responde correcta o incorrectamente pero realiza razonamientos o cálculos erróneos.

- 4) No contesta.
- 0) No asiste a clase.

C) Resultados

Apartado 1: ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Actividad 6.1.1	2 (6%)	3 (9%)	2 (6%)	25 (75%)	1 (3%)
Actividad 6.2.1	2 (6%)	4(12%)	3 (9%)	15 (45%)	9(27%)
Actividad 6.3.1	2 (6%)	7(21%)	6(18%)	6 (18%)	12(36%)
Actividad 6.4.1	2 (6%)	4 (12%)	1 (3%)	9(27%)	17(51%)

Tabla V.40. Resultados de las actividades 6.1.1, 6.2.1, 6.3.1 y 6.4.1

Tras analizar la tabla V.40, observamos que:

- El porcentaje de respuestas correctas, en las cuales se comprueban las soluciones dadas en el enunciado, se mueve entre un mínimo 9% en la actividad 6.4.1 y un máximo no muy elevado del 21% en la actividad 6.3.1.

- El porcentaje de respuestas incompletas, en las que se responde acertadamente pero sin escribir razonamiento alguno, es muy similar, en cada actividad, al porcentaje de las respuestas correctas en las que se escribía la argumentación de la respuesta.

- El porcentaje de respuestas incorrectas decrece desde un máximo del 75% en la actividad 6.1.1 hasta un mínimo del 18% en la 6.3.1. Ese decrecimiento no es positivo porque está asociado al correlativo crecimiento del porcentaje de respuestas en blanco, que no es atribuible, tras leer las leer las fichas nº 11 y nº 12 del Anexo II "Diario de Clase", a la falta de tiempo o de motivación.

- La suma de los porcentajes de las respuestas incorrectas y de las no contestadas son respectivamente, en las actividades 6.1.1, 6.2.1, 6.3.1 y 6.4.1 los siguientes: 78%, 72%, 54% y 78%. Lo anterior supone que -salvo en la actividad 6.3.1 en la que el porcentaje es del 50%- alrededor del 75% del grupo, o comprueba mal el problema o no contesta cuando se le pide que compruebe el problema.

-Actividad 6.1.1:

- Hay 3 respuestas correctas (el 9% del total):

-"*No, porque*

$5\cdot 3+2\cdot 1{,}5=13$

$3\cdot 3+4\cdot 1{,}5=12$

$18\neq 13$

$15\neq 12$" (Alumno A05)

-"$5x3+2\cdot 1{,}5=$

$15+3=18$

$3 \cdot 3 + 4 \cdot 1{,}5 =$

$9 + 6 = 15$ *Está mal resuelto*" (Alumno A11)

-"*No, está mal porque cuando multiplico los melones ya sale mas dinero del total*" (Alumno A06)

Destacamos que:

-En las respuestas de los alumnos A05 y A11, los precios de los lotes, 18 y 15, calculados a partir de las soluciones dadas, $x = 3$ e $y = 1{,}5$, no se contrastan con los términos independientes del sistema mal planteado, 18 y 15, sino con los precios de los lotes según el enunciado, 13 y 12.

-En la respuesta del alumno A06 se señala que la solución no es correcta porque detecta que si sólo 5 melones, a 3 € el melón, valen 15 € es contradictorio con que el precio total del primer lote, con 5 melones y con 2 sandías, sea 13 € en el enunciado.

- Hay 2 respuestas insuficientemente razonadas (el 6% del total):

-"*No, está mal porque*" (Alumno A12)

-"*No porque no me salen las cuentas*" (Alumno A20)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A12 no se escribe razonamiento alguno.

-En la respuesta del alumno A20 no se concreta a que cuentas se refiere.

- Hay 14 respuestas (el 42% del total) en las que se argumenta que el problema está mal resuelto porque el enunciado y el sistema formulado son incoherentes y en las que no se comprueba la solución dada, que puede ser correcta. Veamos tres ejemplos representativos de tal tipo de respuestas:

-"*No, porque está mal planteado*" (Alumno A01)

-"*No, no concuerda el precio del enunciado con el del sistema*" (Alumno A08)

-"*No, porque los precios totales no son esos*" (Alumno A32)

- Hay 5 respuestas (el 15% del total) en las que se comprueba la solución en el sistema dado, identificándose "*sistema bien resuelto*" con "*problema bien resuelto*".

- Hay 2 respuestas incorrectas (el 6% del total) en las que se resuelve el sistema dado para ver si su solución coincide con la solución dada, identificándose también "*sistema bien resuelto*" con "*problema bien resuelto*".

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que responden que el problema está bien resuelto, sin argumentación alguna.

- Hay una respuesta atípica: "*Los melones están mal pero las sandías están bien*" (Alumno A10)

  Destacamos que la anterior respuesta indica que no se ha comprendido el contexto que describe el enunciado del problema.

-Actividad 6.2.1:

- Hay 4 respuestas correctas (el 12% del total) en las que se razona que las soluciones incumplen condiciones dadas en el enunciado:

  -"*No al sumarle 5 años a las edades no sale el doble*" (Alumno A06)

  -"*No, porque si x es la edad de Amelia, y Amelia tiene el triple de edad que Enrique, es imposible que Amelia tenga 1 año y Enrique tres*" (Alumno A21)

  -"*No porque la edad Amelia debería ser mayor que la de Enrique*" (Alumno A26)

  -"*No porque la edad de Amelia tendría que ser mayor que la de el y no menor*" (Alumno A29)

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se afirma que el problema está mal resuelto pero no se dice en que basan tal afirmación. Como el problema y el sistema están ambos mal resueltos, pueden haberse basado tanto en la comprobación del uno como del otro.

- Hay 6 respuestas incorrectas (el 18% del total) en las que se afirma que el problema está necesariamente mal resuelto porque está mal planteado. Probablemente, la resolución de los problemas algebraicos mediante la realización de una serie de pasos consecutivos induce a muchos estudiantes a pensar, erróneamente, que si el planteamiento está mal entonces la solución del problema necesariamente está mal.

- Hay 6 respuestas en las que se afirma que el problema está mal resuelto porque la comprobación del sistema da mal y hay una respuesta en la que se afirma que el problema está mal resuelto porque se vuelve a resolver el sistema y se ve que obtiene soluciones distintas de las dadas.

- Hay 2 respuestas incorrectas en las que se afirma erróneamente, sin dar razones, que está bien resuelto.

- Hay 9 respuestas en blanco (el 27% del total). Destacamos que aumentamos del 3% de respuestas en blanco en la actividad anterior 6.1.1 a un 27% en blanco en esta 6.2.1. Como por la lectura de las fichas nº 11 y nº 12 del Anexo II "Diario de Clase" sabemos que no hubo falta de tiempo ni de motivación, el significativo aumento del porcentaje de respuestas en blanco se debe, en parte, a que es conceptualmente más sencillo expresar algebraicamente una situación real sobre precios –la de la anterior actividad 6.1.1- que expresar algebraicamente una situación hipotética sobre edades futuras –la de esta actividad 6.2.1-.

-Actividad 6.3.1:

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que, aunque no se justifica el 4320, esto es, no se dice que 72 céntimos/Kg por 60 Kg de mezcla da 4320 céntimos, sí que se comprueba que $36+24=60$ y que $80\cdot 36+60\cdot 24=4320$. Destacamos que, como el enunciado dado puede transcribirse literalmente –salvo en lo que al 4320 se refiere- en el sistema dado, tal comprobación puede ser sintáctica o semántica.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se comprueba la operación realizada para calcular los 4320 céntimos y además es claro que las soluciones dadas son comprobadas en el enunciado:

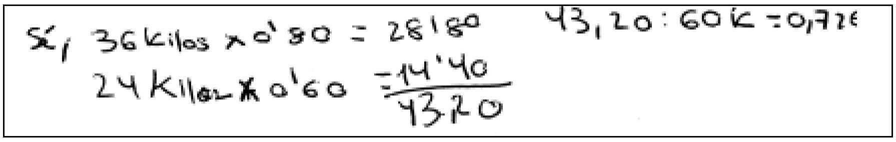


Figura V.27. Respuesta del alumno A11

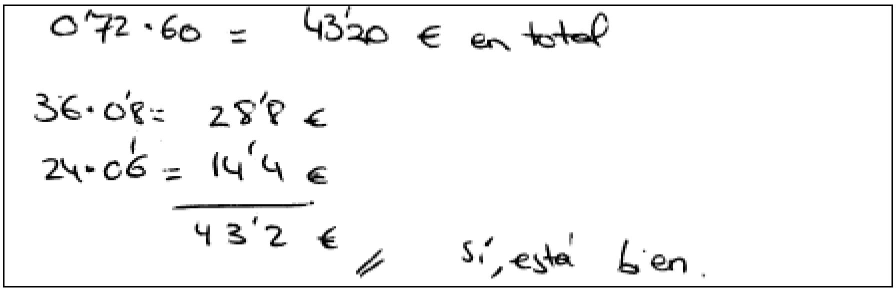


Figura V.28. Respuesta del alumno A14

Destacamos que, evidentemente, en ambas respuestas, se realiza una comprobación aritmética, del mismo tipo que la que los tenderos realizaban en sus libretas hace unos años, cuando el uso de la calculadora o del ordenador no estaba tan extendido.

- Hay una respuesta en la que se argumenta, con buen criterio, que si el planteamiento y la resolución del sistema son correctos, entonces el problema está bien resuelto. Veámosla:

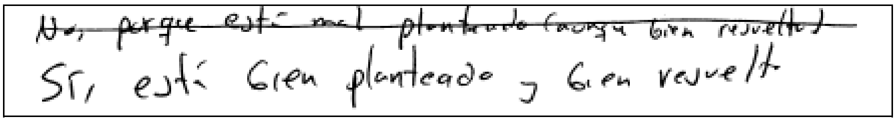


Figura V.29. Respuesta del alumno A04

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que sólo se dice que está bien resuelto, sin aportar cálculo ni razonamiento alguno.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que, equivocadamente se piensa que la 2ª ecuación está mal planteada y en la que, además, se argumenta que por estar mal planteado, el problema necesariamente está mal resuelto:

  -“*no el enunciado 2ª de el sistema esa mal*” (Alumno A08)

  -“*No porque el 2º sistema esta mal planteado*” (Alumno A26)

  -“*No porque la solución del 2º sistema no es 4320 sino 43,20*” (Alumno A29)

  Destacamos que:

  -En las tres respuestas anteriores se puntúan mal las oraciones.

  -En las tres respuestas anteriores se manifiesta un deficiente dominio del vocabulario terminológico referido al álgebra escolar. Así, respectivamente, en cada una de las tres respuestas se habla de “*enunciado 2º del sistema*”, en vez ecuación 2ª del sistema, de “*2º sistema*”, en vez de 2ª ecuación del sistema, y de “*4320 como solución” del “2º sistema*”, en de 4320 como término independiente de la 2ª ecuación del sistema.

  -En las dos primeras respuestas, las de los alumnos A08 y A26, se dice que la 2ª ecuación está mal planteada. Probablemente, se dice eso porque no se entiende que 4320 es el producto de 60 Kg por 72 céntimos/Kg.

  -En la tercera respuesta, la del alumno A29, se manifiesta que el alumno no entiende que 4320 céntimos de € equivalen a 43,20 €.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que no se dice que la 2ª ecuación esté mal planteada, sino que se cometen otros errores:

  -“*No, porque el resultado está mal*” (Alumno A03)

  -“*no porque no es así*” (Alumno A20)

  -“*Sí. Está bien planteado*” (Alumno A09)

  Destacamos que:

  -Las dos primeras respuestas, las de los alumnos A03 y A20, son muy ambiguas. No sabemos a qué se refieren.

  -En la respuesta del alumno A09 se identifica “problema bien resuelto” con “problema mal planteado”.

- Hay 12 respuestas en blanco (el 36% del total). Por la lectura de las fichas nº 11 y nº 12 del Anexo II “Diario de Clase” sabemos que no hubo falta de tiempo ni de motivación. Probablemente, este alto porcentaje de respuestas en blanco es atribuible, en parte, a la existencia de un numeroso grupo que no comprende como la relación entre los precios -en euros o en céntimos de euro- y las cantidades -en kilos- en los problemas de mezclas.

-Actividad 6.4.1:

- Hay 4 respuestas (el 12% del total), en las que se comprueban las soluciones en el enunciado:

  -"*NO.*

  $$\begin{array}{l} 50-10=20+10 \\ 40\neq 30 \\ 50+10=2*20 \\ 60\neq 40 \end{array}$$ " (Alumno A05)

  -"*No por lo que he comprobado*

  $$\begin{array}{l} 50-10\neq 20+10 \\ 40\neq 30 \end{array}$$ " (Alumno A13)

  -"*No, porque si le da 10 no tienen los mismos Cd´s*" (Alumno A16)

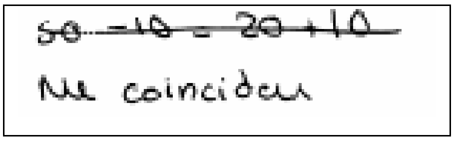


Figura V.30. Respuesta del alumno A19

  Destacamos que las cuatro respuestas anteriores se refieren a la relación $50-10=20+10$ que se obtiene a partir del enunciado. No se refieren a las relaciones $50-10=2\cdot 20$ ó $50+10=3\cdot 20$ que se obtendrían a partir del sistema.

- Hay una respuesta en la que sólo se contesta que el problema está mal resuelto, sin aportar cálculo ni razonamiento alguno. Dada la sencillez de los números involucrados, es posible que se haya realizado una comprobación mental de las soluciones en el enunciado.

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que se afirma que el problema está necesariamente mal resuelto porque está mal planteado.

- Hay una respuesta en la que las dos condiciones del enunciado están mal comprobadas:

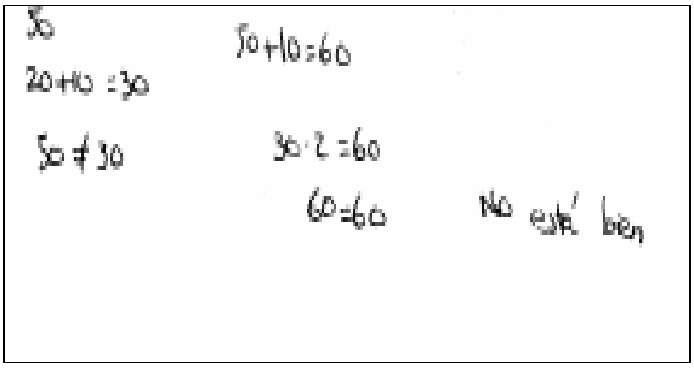


Figura V.31. Respuesta del alumno A14

De la anterior respuesta destacamos que:

-En la columna de la izquierda, se comprueba mal la 1ª igualdad hipotética del enunciado porque se entiende que el receptor pasa a tener $20+10$ discos pero no se comprende que el donante pasa a tener $50-10$ discos.

-En la columna de la derecha, se comprueba mal la 2ª igualdad hipotética del enunciado porque no se comprende que el punto de partida es la situación de desigualdad real (José 50 discos e Inés 20 discos), no la situación modificada para la 1ª igualdad hipotética.

- Hay 2 respuestas incorrectas (el 6% del total) en las que, para responder si el problema está bien resuelto, se resuelve el sistema dado para estudiar si sus soluciones coinciden con las soluciones dadas. Es decir, se identifica "*problema bien resuelto*" con "*sistema bien resuelto*" y, además, no sustituyen las soluciones dadas en el sistema dado sino que intentan repetir la resolución del sistema.

- Hay 17 respuestas en blanco (un 51% del total). El porcentaje es bastante mayor que el respectivo 36% de la anterior actividad 6.3.1. Como por las fichas nº 11 y nº 12 del Anexo II "Diario de Clase" sabemos que no hubo falta de tiempo o de motivación, atribuimos este aumento, en parte, a que conceptualmente es más fácil la representación mental de situaciones reales de relación entre cantidades -como en la actividad anterior 6.3.1 sobre mezclas- que la de situaciones hipotéticas de comparación entre cantidades desiguales basadas en una situación de desigualdad real -como en esta actividad 6.4.1 sobre cantidades de discos-.

Apartado 2: ¿Está bien planteado? Razónalo					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Actividad 6.1.2	2 (%)	31 (93%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Actividad 6.2.2	2 (%)	14(42%)	2 (6%)	9 (27%)	6 (18%)
Actividad 6.3.2	2 (%)	3(9%)	8(32%)	9 (27%)	11 (33%)
Actividad 6.4.2	2 (%)	9(27%)	0 (0%)	8 (24%)	15 (45%)

Tabla V.41. Resultados de las actividades 6.1.2, 6.2.2, 6.3.2 y 6.4.2

Tras examinar la anterior tabla V.41, observamos que:

- El porcentaje de respuestas correctas, en las cuales se dice acertada y razonadamente si el problema está bien o mal planteado, alcanza un máximo del 93% en la actividad 6.1.2 -un problema que permite una traducción literal sobre una situación comercial real- y se mueve, en las demás actividades, entre el 9% en la 6.3.2 –un problema sobre mezclas- y el 42% en la 6.2.2 –un problema sobre una situación hipotética de edades-.

- El porcentaje de respuestas incompletas, en estas preguntas que se refieren a si el planteamiento está bien o mal, es muy reducido -entre el 0% y el 6%- salvo en la actividad 6.3.2, en la que se alcanza un 32%. Destacamos que esta actividad 6.3.2 era la única que no permitía contrastar directamente todos los datos numéricos del enunciado con los de la formulación, porque era necesario el cálculo previo de que 60 Kg a 0.72 €/Kg costaban 43.20 € y la transformación de los 0.80 €, 0.60 € y 43.20 € en 80, 60 y 4320 céntimos de €.

- El porcentaje de respuestas incorrectas está en torno al 25% en todas las actividades, excepto en la actividad 6.3.1, cuyo planteamiento sobre una situación comercial cotidiana de cálculo de precios le ha resultado muy fácil de analizar.

- El porcentaje de respuestas no contestadas se incrementa desde el 0% en la actividad 6.1.2, al 18% en la 6.2.2, al 33% en la 6.3.2 y finalizando en un 45% en la 6.4.2. Destacamos que, como sabemos, por la lectura de las fichas nº 11 y nº 12 del Anexo II "Diario de Clase", que ni falló la motivación ni faltó el tiempo, opinamos que este crecimiento de los porcentajes de respuestas en blanco refleja probablemente que los problemas les resultaban cada vez más difíciles:

  -La actividad 6.1.2 se basaba en un enunciado que permitía una traducción literal sobre una situación comercial real.

  -La actividad 6.2.2 se basaba en un enunciado que exigía una traducción no literal sobre una situación comparativa de edades actuales y futuras,

  -La actividad 6.3.2 se basaba en un enunciado que exigía una traducción no literal sobre una situación de mezclas y además requería una elaboración previa de los datos.

  -La actividad 6.4.2 se basaba en un enunciado que exigía una traducción no literal sobre una situación en la que se realizan dos hipótesis comparativas.

- La suma de los porcentajes de las respuestas incorrectas y de las no contestadas, en las actividades 6.1.1, 6.2.1, 6.3.1 y 6.4.1 son, respectivamente, los siguientes: 78%, 72%, 54% y 78%. Esto supone que, salvo en la actividad 6.3.1, en alrededor del 75% de las respuestas se comprueba mal el problema o no se contesta cuando se les pide que comprueben el problema.

-Actividad 6.1.2:

- Hay 30 respuestas (el 90% del total) en las que se detecta la incongruencia entre el enunciado y el sistema dado que lo formula. Atribuimos este alto porcentaje de aciertos, en parte, a que es un problema sobre una situación comercial cotidiana de cálculo de precios y, en parte, el orden sintáctico de las palabras coincide con el orden algebraico de los elementos de las ecuaciones. Veamos dos ejemplos representativos:

  -"*No tendría que ser*
  $5x + 2y = 13$
  $3x + 4y = 12$" (Alumno A06)

-“*No, porque son 18 € y 15 € el total que han puesto y son 13 y 12€*” (Alumno A29)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A06 se comete un error de puntuación ortográfica pues de hecho escribe el planteamiento correcto.

-En la respuesta del alumno A29 se expresa mal, pero es claro que se ha detectado que, al formular el sistema, donde pone 18 y 15 debería poner 13 y 12.

-Actividad 6.2.2:

- Hay 15 respuestas (el 45% del total) en las que se dice acertadamente que la formulación sobre situaciones comparativas de edades -actuales y futuras- no está bien realizada. Veamos dos respuestas representativas:

  -“*No, porque tendría que ser* $x = 3y$” (Alumno A03)

  -“*No porque la edad de amelia es el triple que la de Enrique, no viceversa*” (Alumno A29)

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se indica acertadamente que está mal planteado pero sin escribir razonamiento ni cálculo alguno:

  -“*no la de arriba esta mal*” (Alumno A20)

  -“*No se ha equivocado en la primera ecuación*” (Alumno A33)

  Destacamos que, en ambas respuestas, aunque se cometen faltas de puntuación ortográfica, se indica acertadamente cuál de las 2 ecuaciones del sistema es la que está mal planteada. Por ello, pensamos que, probablemente, ambos estudiantes han razonado bien.

- Hay 6 respuestas (el 24% del total) en las que se afirma equivocadamente que el problema está bien planteado.

  Probablemente, esos seis alumnos sólo analizaron que hubiese una cierta correspondencia entre el enunciado y las ecuaciones, sin entrar en el significado de estas últimas.

- Hay una respuesta en la que, en vez de analizarse la relación enunciado-sistema, se analizan las respuestas obtenidas: “*No, porque la edad de Amelia no es 1 año*” (Alumno A02)

-Actividad 6.3.2:

- Hay una respuesta en la que se justifica detalladamente el planteamiento de las ecuaciones dadas. Esto es, se explica que la 1ª ecuación se refiere a los Kilos, que la 2ª ecuación se refiere a los céntimos de euros y que 4320 resulta de multiplicar 0.72 por 60.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que sólo se justifica que 72 por 60 da 4320. Veamos un caso representativo:

  "*Si. Por que* $\left.\begin{array}{l} x+y=60 \\ 80x+60y=72\cdot 60 \end{array}\right\}$" (Alumno A33)

  Destacamos que, como se entiende lo difícil -que 4320 proviene de multiplicar el precio de la mezcla, 72 céntimos de €/Kg, por el peso de la mezcla, 60 Kg-, es de suponer que se entiende lo fácil -que la 1ª y la 2ª ecuaciones representan respectivamente la suma de las cantidades y el cálculo de los precios-.

- Hay una respuesta en la que sólo se dice que la 1ª y la 2ª ecuaciones son respectivamente sobre cantidades y precios, sin detallar el origen del término 4320 como resultado del producto de 60 Kg y de 72 céntimos de euros/Kg.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que sólo se justifica la 1ª ecuación sobre cantidades, esto es, se deja sin explicar la 2ª ecuación sobre precios que es la más interesante desde una perspectiva semántica.

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que sólo se contestaba que el planteamiento era correcto, sin aportar cálculo o razonamiento alguno.

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que se afirma erróneamente que el 4320 es incorrecto. Veamos tres casos representativos:

  -"*No, porque en la segunda ecuación no nos dan el dato 4320*" (Alumno A21)

  -"*No en el de abajo el numero detras del = deveria ser 0.72*" (Alumno A13)

  -"*No porque en vez de 4320 es 43,20*" (Alumno A29)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A21 no se comprende cómo se calcula el 4320, el precio total de la mezcla, y, por ello, se piensa que ese dato sobra.

  -En la respuesta del alumno A13 tampoco se comprende cómo se calcula el 4320, el precio total de la mezcla, y, por ello, se piensa que en su lugar debe escribirse 0.72.

  -En la respuesta del alumno A29 sí se comprende cómo se calcula el 4320, el precio total de la mezcla pero no se domina el manejo de las unidades monetarias (euros y céntimos de euro) y, por ello, se piensa que en su lugar debe escribirse $43{,}20$.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se expresan razonamientos erróneos que no se refieren al 4320:

-"*Si porque x (un cafe) + y (otro cafe) = 6 Kilos en total*" (Alumno A15)

-"*Si, pero el resultado está mal*" (Alumno A03)

-"*no porque el 60 de la segunda ecuación no tiene ningun sentido*" (Alumno A20)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A15 se habla de las incógnitas como objetos (en vez de como cantidades) se copia mal el dato 6 kilos (en vez de 60 kilos) y se afirma que el sistema está bien planteado porque una de las dos ecuaciones está bien planteado.

-En la respuesta del alumno A03 se afirma que el planteamiento está bien y se refiere al resultado, en vez de a la relación enunciado-planteamiento.

-En la respuesta del alumno A20 se dice que no tiene sentido multiplicar 60 (el precio en céntimos de cada kilo de café natural) por la y (el número de Kilos de café natural), demostrándose así que no comprende la situación económica del enunciado.

-Actividad 6.4.2:

- Hay 5 respuestas (el 15% del total) en las que se dice que está mal planteado y se corrigen bien las dos ecuaciones. Veamos un ejemplo representativo:

  "*No, sería:* $\begin{cases} x-10 = y+10 \\ x+10 = 2y \end{cases}$" (Alumno A04)

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que se razona porqué está mal planteado. Veamos dos ejemplos representativos:

  -"*No, porque si le da 10 tendrían el mismo numero, no como dice el sistema*" (Alumno A16)

  -"*No, porque si José le da 10 no tendrá el doble que Inés sino igual y si tuviera 10 más tendría el doble no el triple*" (Alumno A32)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A16 se explica sólo cómo debería ser la 1ª ecuación.

  -En la respuesta del alumno A32 se explica cómo deberían ser las dos ecuaciones.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se corrige bien la 2ª ecuación y mal la 1ª ecuación. Veamos un ejemplo representativo:

  "*No, porque* $\begin{cases} x-10 = y \\ x+10 = 2y \end{cases}$" (Alumno A01)

  Destacamos que:

-La oración gramatical “*si te doy 10, tendrías la misma cantidad que yo*” ha sido mal formulada mediante la 1ª ecuación $x-10=y$, porque se omite que dar implica también ganancia para el receptor.

-La oración gramatical “*Tienes razón. Sólo te faltan 10 para doblarme en número*” ha sido bien formulada mediante la 2ª ecuación $x+10=2y$.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se corrigen mal ambas ecuaciones. Veamos un ejemplo representativo:

  “*No, debería ser* $\begin{matrix} x-10=y \\ x+10=3y \end{matrix}$ ”. (Alumno A26)

  Destacamos que, en la respuesta anterior:

  -La 1ª ecuación está mal porque dar 10 discos implica también una ganancia de 10 discos para el que recibe.

  -La 2ª ecuación está mal porque multiplica por 3 cuando se habla de doblar en número.

- Hay 2 respuestas en las que se cometen otros errores:

  -“*No, porque resolviendo ese problema*
  la x da 2 y la y da 4” (Alumno A10)

  -“*No*
  porque debería poner $\begin{cases} x-10=2(y+10) \\ x+10=2y \end{cases}$ “ (Alumno A13)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A10 se da una solución falsa y se viene a decir que si el problema está mal resuelto está necesariamente mal planteado.

  -En la respuesta del alumno A13 se corrige mal la 1ª ecuación -sobra el 2 de duplicación cuando en el enunciado se habla de igualdad- y se corrige bien la 2ª ecuación.

Apartado 3: ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Actividad 6.1.3	2 (6%)	15(45%)	3 (9%)	9(27%)	4(12%)
Actividad 6.2.3	2 (6%)	10(30%)	3 (9%)	8(24%)	10(30%)
Actividad 6.3.3	2 (6%)	16(48%)	1 (3%)	3 (9%)	11(33%)
Actividad 6.4.3	2 (6%)	5 (15%)	2 (6%)	6(18%)	18(54%)

Tabla V.42. Resultados de las actividades 6.1.3, 6.2.3, 6.3.3 y 6.4.3

Tras examinar la anterior tabla V.42, observamos que:

- El porcentaje de respuestas correctas, en las cuales se responde acertadamente si el sistema dado está bien o mal resuelto y se argumenta lo anterior -mediante la comprobación de las soluciones o mediante la repetición de la resolución del sistema- oscila entre un mínimo del 15% en la actividad 6.4.3 y un máximo del 48% en la 6.3.3. Obsérvese también que los mayores porcentajes de respuestas correctas -el 45% y el 48%- se corresponden con las actividades 6.1.3 y 6.3.3, que se refieren a situaciones comerciales de precios y de mezclas que pueden formularse sintácticamente, mientras que los menores porcentajes de respuestas correctas -el 30% y el 15%- se corresponden con las actividades 6.2.3 y 6.4.3, que se refieren a situaciones hipotéticas de edades y de números de objetos que requieren una formulación semántica. Esto es, hay alumnos que sólo comprueban la resolución de aquellos sistemas cuyo planteamiento entienden. Lo anterior es atribuible, probablemente, a que, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, no se les suele valorar la resolución de sistemas que estén mal planteados.

- El porcentaje de respuestas incompletas, en las cuales se responde acertadamente si el sistema está bien o mal resuelto y sin aportar cálculos o argumentación alguna, es muy reducido -entre el 3% y el 9%-.

- El porcentaje de respuestas incorrectas, en las cuales realizan argumentaciones erróneas o en las cuales cometen errores de cálculo oscila entre un mínimo del 9% en la 6.3.3 y un máximo del 27% en la 6.1.3.

- El porcentaje de respuestas en blanco crece desde un 12% en la 6.1.3 hasta un 54% en la 6.4.3, pasando por un 30% y un 33% en la 6.2.3 y en la 6.3.3. La lectura de las fichas nº 11 y nº 12 del Anexo II “Diario de Clase” nos permite descartar la falta de tiempo como causa del incremento de las respuestas en blanco. Opinamos que este incremento creciente se corresponde, probablemente, con la progresiva dificultad del planteamiento de los enunciados dados. Esto es atribuible, en parte, a que muchos de los alumnos que no comprenden el planteamiento del sistema, desisten de estudiar si el sistema está bien o mal resuelto porque, en la enseñanza habitual del algebra escolar, no se les suele valorar la resolución de sistemas que estén mal planteados.

-Actividad 6.1.3:

- Hay 7 respuestas (el 21% del total) en las que se comprueban las soluciones en el sistema. Veamos un ejemplo representativo:

$$“\begin{cases} 5*3+2*1{,}5=18 \\ 3*3+4*1{,}5=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} 15+3=18 \\ 9+6=15 \end{cases}” \text{ (Alumno A05)}$$

- Hay 8 respuestas (el 24% del total) en las que se resuelve el sistema, para ver si las soluciones obtenidas coinciden con las soluciones dadas. Para el sistema de esta actividad, el método de reducción es más rápido y cómodo que el de igualación o de sustitución. Sin embargo, como se puede ver en la tabla nº 15 del Anexo III, sólo fue escogido en el 50% de las 8 respuestas. Atribuimos lo anterior, en parte, a que muchos alumnos no comprenden las ventajas de la comprobación de las soluciones sobre la repetición de la resolución del sistema –mayor seguridad y simplificación de cálculos- ni las ventajas e inconvenientes de cada método de resolución de sistemas.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que sólo afirman que el sistema está bien resuelto, sin dar razones. Dada la sencillez de los números involucrados en el sistema dado, es posible que hayan realizado una comprobación basada en un sencillo cálculo mental.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se dice que el sistema está bien resuelto porque han comprobado sólo una de las ecuaciones del sistema.

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que se dice, equivocadamente, que el sistema dado no está bien resuelto y se plantea y se resuelve bien el problema.

  Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se dice equivocadamente que el sistema dado no está bien resuelto, sin escribir cálculo ni argumentación alguna.

  Los anteriores 12% y 6% de respuestas anteriores son atribuibles, probablemente, a que, como en la enseñanza habitual no se valora la resolución de sistemas que estén mal planteados, esos alumnos no han entendido lo que se les pedía: que estudiasen si el sistema mal planteado estaba bien resuelto.

- Hay una respuesta en la que también se dice equivocadamente que el sistema está mal resuelto y sólo se escribe un cálculo inconcluso sobre el que no es posible extraer conclusión alguna.

- Hay 4 respuestas en blanco (el 12% del total). Del examen de las calificaciones de cada alumno en la tabla nº 15 del Anexo III, observamos que todas las respuestas en blanco pertenecen a alumnos que han sido calificados con un 1 en la anterior actividad 6.1.2, porque argumentaron correctamente que el problema estaba mal formulado. Probablemente, estos 4 alumnos han abandonado la actividad 6.1.3, comprobación de las ecuaciones, porque estaba mal la anterior actividad 6.1.1, la formulación de las ecuaciones. Es una actitud que sería la lógica en una enseñanza habitual en la que no se suele valorar la resolución de sistemas mal formulados.

-Actividad 6.2.3:

- Hay 8 respuestas (el 24% del total) en las que se afirma acertadamente que el sistema está mal resuelto, basándose en la comprobación de las soluciones en las ecuaciones.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se afirma acertadamente que el sistema está mal resuelto, basándose en la resolución del sistema y viendo que las soluciones obtenidas no coinciden con las soluciones dadas. Atribuimos, en parte, la trabajosa resolución del sistema a que no se entiende el concepto de comprobación sintáctica, esto es, el significado de la sustitución de las letras x e y por las soluciones en las ecuaciones del sistema.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que sólo afirman que el sistema está mal resuelto, sin aportar cálculo o razonamiento alguno.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se dice que el sistema está mal resuelto porque el planteamiento está mal o porque el problema está mal resuelto. Opinamos que, otra vez, estamos ante alumnos que, influidos por una enseñanza habitual en la que no se valora la correcta resolución de los sistemas mal planteados, no se ciñen a estudiar si el sistema está bien o mal resuelto. Veamos dos casos representativos:

  -"*No, porque tendría que ser* $x = 3y$ " (Alumno A03)

  -"*No por que si no el problema saldria bien*" (Alumno A06)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A03 se argumenta que el sistema está mal resuelto porque está mal planteada la 1ª ecuación.
  -En la respuesta del alumno A06 se argumenta que el sistema está mal resuelto porque la solución del problema no es correcta.

- Hay una respuesta en la que se afirma equivocadamente que el sistema está bien resuelto, basándose en una comprobación errónea del sistema:

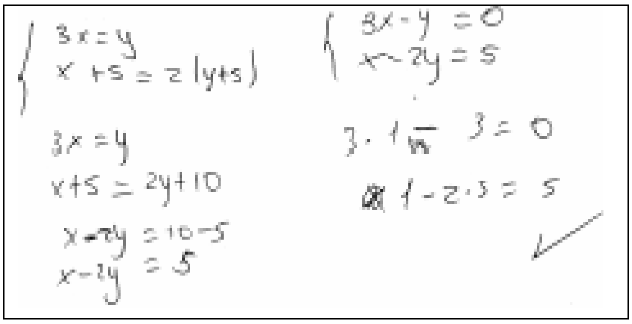


Figura V.32. Respuesta del alumno A25

  Destacamos que:

  -En la columna de la izquierda se realizan varias operaciones correctas, totalmente innecesarias para la comprobación, para transformar el sistema dado en un sistema equivalente.

  -En la columna de la derecha, se sustituye la solución dada ($x = 1$ e $y = 3$) en el sistema equivalente calculado y se escribe un símbolo en forma de V que parece de aprobación. Probablemente, se piensa que $1-2\cdot 3=5$, esto es, se cree que el sistema equivalente verifica la comprobación.

- Hay 2 respuestas en las que sólo se intenta resolver el sistema y hay una respuesta en la que sólo se intenta comprobar y resolver el sistema.
- Hay una respuesta en la que se afirma que está bien resuelto basándose sólo en la comprobación de la 1ª ecuación.
- Hay 10 respuestas en blanco (el 30% del total). Basándonos en la lectura de las fichas nº 11 y nº 12 del Anexo II "Diario de Clase", descartamos la falta de tiempo y de motivación como causa de ese % de respuestas en blanco. Del estudio de las calificaciones de cada alumno, en la tabla nº 15 del Anexo III, observamos que los que no han escrito nada sobre si el sistema estaba bien o mal resuelto han sido:

  -Los que no escriben nada sobre si el sistema está bien o mal planteado.

  -Algunos de los que afirman que el sistema está mal planteado, basándose en un razonamiento falso.

  -Uno que afirma que el sistema está mal planteado, basándose en un razonamiento falso.

  Es decir, muchos alumnos, probablemente influidos por una práctica escolar tradicional en la que no se valora la resolución de sistemas mal planteados, no han entendido que se les pedía que estudiasen sólo si el sistema estaba bien o mal resuelto.

-Actividad 6.3.3:

- Hay 9 respuestas (el 27% del total) en las que se afirma que el sistema está bien resuelto basándose en la resolución del sistema dado. También observamos que este 27% se divide en un 21% y un 6% en las que se utilizan, respectivamente, los métodos de reducción y de sustitución (Ambos métodos son igual de adecuados en este caso concreto).
- Hay 7 respuestas (el 21% del total) en las que se afirma que el problema está bien resuelto basándose en la comprobación de las soluciones.
- Hay una respuesta incompleta en la que se afirma, acertadamente, que el sistema está bien resuelto sin aportar argumentación o cálculo alguno.
- Hay 3 respuestas incorrectas (el 9% del total). Veamos dos de ellas:

  -"*No, porque el resultado está mal*" (Alumno A03)

  -"*No, no concuerda el enunciado y el sistema*" (Alumno A08)

  Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A03 no se aporta ni cálculo ni argumentación alguna.

-En la respuesta del alumno A08, en vez de estudiarse la relación sistema-solución, se estudia la relación enunciado-sistema.

- Hay 11 respuestas en blanco (el 33% del total).

  Del examen de las calificaciones de cada alumno, en la tabla nº 16 del Anexo III, se observa que el grupo que dejó en blanco la comprobación del problema en la actividad 6.3.1 y la comprobación del planteamiento en la actividad 6.3.2 es casi el mismo que el que ha dejado en blanco la comprobación del sistema en esta actividad 6.3.3.

-Actividad 6.4.3:

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que se comprueban las soluciones dadas en el sistema. Veamos dos ejemplos representativos:

  -“*Si. Porque:*

  $50-10=2\cdot 20 \qquad 50+10=3\cdot 20$”

  $40=40 \qquad 60=60$ (Alumno A05)

  $x-10=2y \qquad x+10=3y$

  -“$50-10=2\cdot 20 \qquad 50+10=3\cdot 20$” (Alumno A29)

  $40=40 \qquad 60=60$

- Hay una respuesta en la que se resuelve bien el sistema, usando el método de reducción, y se ve que sus soluciones coinciden con las dadas.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que sólo se afirma que el sistema está bien resuelto, sin aportar razonamiento o cálculo alguno. Dada la sencillez de los coeficientes del sistema, el equipo investigador no descarta que se haya realizado una comprobación mental.

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que se cometen errores en la resolución del sistema. Del examen de la tabla nº 16 del Anexo III, observamos que dicho 12% se divide en un 9% de sistemas mal resueltos por reducción y en un 3% de sistemas mal resueltos por sustitución. Veamos un ejemplo representativo de los sistemas mal resueltos por reducción:

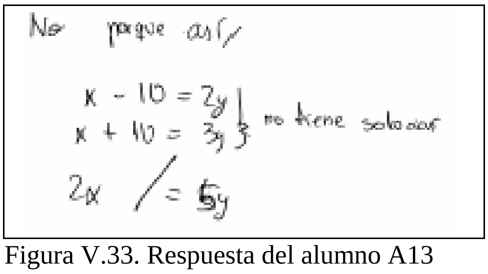


Figura V.33. Respuesta del alumno A13

Destacamos que, en la respuesta anterior, se elimina el término independiente, en vez de los términos en x o en y, y luego se afirma que la ecuación obtenida ($2x = 5y$) no tiene solución. Lo anterior es atribuible, probablemente, a una memorización, carente de comprensión, de los métodos de resolución de sistemas.

- Hay una respuesta en la que se calcula, usando el método de reducción, que $x = 50$, lo cual es cierto, pero se deja la y sin calcular.

- Hay una respuesta en la que se escribe otra formulación del planteamiento. Lo anterior es atribuible, probablemente, a que no se entiende qué sólo se preguntaba si el sistema estaba bien o mal resuelto.

- Hay 18 respuestas en blanco (el 54% del total). Basándonos en la lectura de las fichas nº 11 y nº 12 del Anexo II “Diario de Clase”, descartamos la falta de tiempo o de motivación para explicar tan alto porcentaje.

  A partir del estudio de las calificaciones en la tabla nº 16 del Anexo III, nos percatamos de que los alumnos que dejaron en blanco esta actividad 6.4.3 son, en general, los mismos que los que también dejaron en blanco las actividades 6.4.1 –sobre la corrección del problema- y 6.4.2 –sobre la corrección del planteamiento. Probablemente, muchos alumnos, creen que si no entienden el problema, es inútil estudiar si el sistema está bien o mal resuelto.

D) Análisis de la comprensión de contenidos (CC)

- Fueron frecuentes los errores en el planteamiento de los problemas algebraicos de comparación, esto es, aquellos en los que se describen “igualdades hipotéticas establecidas a partir de la comparación entre cantidades desiguales”.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que tales enunciados demandan una comprensión de las ecuaciones como igualdades, o dicho de otra forma, una comprensión de las incógnitas como cantidades de objetos.

- Abundaron los alumnos que no supieron plantear un problema de álgebra cuando en el enunciado de éste aparece un dato numérico que requiera alguna elaboración operativa previa (una multiplicación por otro dato, una suma con otro dato, un cambio de unidades,…).

  Opinamos que lo anterior es debido, en parte, a que, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, los datos de los problemas no suelen requerir una elaboración previa.

- Una elevada cantidad de estudiantes no dominaba los métodos de resolución analítica de sistemas -igualación (CC. XI. 1.5.1), sustitución (CC. XI. 1.5.2) y reducción (CC. XI 1.5.3)-, a pesar de la insistencia en la práctica de la resolución procedimental de sistemas en la enseñanza habitual del álgebra escolar.

Lo anterior es atribuible, en parte, a que, en el álgebra escolar habitual, no se trabajan suficientemente las ventajas y los inconvenientes de las técnicas que en tales métodos de resolución se aplican.

- En general, el estudiante no comprendió qué método de resolución analítica de sistemas -igualación (CC. XI. 1.5.1), sustitución (CC. XI. 1.5.2) o reducción (CC. XI 1.5.3)- le interesaba aplicar, por comodidad de cálculo, según fuese la presentación del sistema a resolver.

  Lo anterior puede atribuirse, en parte, a que no se profundiza suficientemente, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, sobre las ventajas y los inconvenientes de los diferentes métodos de resolución de sistemas.

- Abundaron los alumnos que no entendieron el concepto de comprobación sintáctica de un sistema de ecuaciones (CC. XIII) y que se limitaron a resolver el sistema, para ver si las soluciones por ellos calculadas, coincidían con las soluciones proporcionadas a priori.

- Aparecieron errores -en uso del vocabulario referido al álgebra, en la utilización de las reglas sintácticas del lenguaje natural y en la puntuación ortográfica- que privaban de sentido a lo que se quería decir.

  Opinamos que lo anterior es atribuible, en parte, a que apenas se exige rigor expresivo en la enseñanza habitual del álgebra escolar, sino que se insiste en las destrezas procedimentales.

- Fue frecuente que los alumnos percibiesen la resolución de un problema algebraico como una sucesión unidireccional de pasos consecutivos y, en consecuencia, pensasen que comprobar la solución del problema (CC. XII) era repasar sucesivamente el planteamiento y la resolución de las ecuaciones.

  Atribuimos lo anterior, en parte, a que, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, se pone el énfasis en la correcta ejecución de los pasos y apenas se da importancia al análisis de la situación descrita en el enunciado.

- Una minoría de alumnos sí que comprendió que la solución de un problema algebraico puede ser comprobada directamente en el enunciado (CC. XII. 1), sin necesidad de volver a repasar los pasos intermedios dados en su resolución mediante el método algebraico.

  Atribuimos lo anterior, en parte, a que el diseño de las actividades 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4 de nuestra propuesta favorece que el alumno sea consciente de que había dos relaciones parciales (enunciado-ecuaciones y ecuaciones-soluciones) y una relación global (enunciado-soluciones).

- Fue frecuente que los alumnos no estudiaran la corrección de la resolución de sistemas que pertenecían a problemas cuyo planteamiento no entendían o cuyo planteamiento consideran erróneo.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que no se valora la resolución correcta de los sistemas que hayan sido mal planteados en la enseñanza habitual del álgebra escolar.

V.8. Actividad 7

A) Actividad propuesta

ACTIVIDAD 7: PLANTEAR, RESOLVER Y COMPROBAR

Actividad 7.1: Calcula cuatro números consecutivos, de forma que su suma sea 326.
7.1.1) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces?
7.1.2) Formula las ecuaciones.
7.1.3) Resuelve la ecuación o sistema.
7.1.4) Comprobación en el enunciado.

Actividad 7.2: Un padre tiene seis veces la edad de su hijo y la suma de las edades de ambos es igual a 91. Averigua la edad del padre y del hijo.
7.2.1) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces?
7.2.2) Formula las ecuaciones.
7.2.3) Resuelve la ecuación o sistema.
7.2.4) Comprobación en el enunciado.

Actividad 7.3: En una terraza sirven bocadillos y refrescos. Se sabe que 3 bocadillos y 2 refrescos cuestan 8 euros y que 2 bocadillos y 1 refresco cuestan 5 euros. Calcula el precio del bocadillo y el precio del refresco.

Actividad 7.4: Una bodega ha exportado, el primer semestre del año, la mitad de sus barriles y, en los dos meses siguientes, un tercio de lo que le quedaba. ¿Cuántos barriles tenía la bodega al comienzo de año si ahora le quedan un total de 40000 barriles?

Actividad 7.5: En una estantería tenemos apilados CD de música y libros, y entre todos hay 100 unidades. Calcula cuántos hay de cada clase, si están en proporción de 3 a 1.

Actividad 7.6: Un vendedor de coches tiene sólo dos modelos en su tienda: el modelo A y el modelo B. Por cada coche del modelo A y del modelo B que vende obtiene un beneficio de 6000 euros y de 5000 euros respectivamente. ¿Cuántos coches ha vendido de cada modelo si ha obtenido 17000 euros de beneficio?

Cuadro V.7. Enunciados de la actividad 7

B) Criterios de evaluación

-Criterios de evaluación de las actividades 7.1 y 7.2

- 0) No asiste a clase.
- 1) Responde correctamente.
- 2) Responde incompletamente o comete errores de cálculo.
- 3) Responde incorrectamente o comete errores al despejar en las ecuaciones.
- 4) No contesta.

-Criterios de evaluación de las actividades 7.3, 7.4, 7.5 y 7.6

- 0) No asiste a clase.
- 1) Calcula la solución correcta mediante el método algebraico, interpreta bien las soluciones halladas y realiza bien la comprobación de todas las condiciones del enunciado e interpretando bien la solución calculada. O calcula la solución correcta mediante tanteo aritmético.
- 2) Calcula la solución correcta mediante el método algebraico pero no realiza la comprobación de todas las condiciones del enunciado. O deja escritas unas ecuaciones algebraicas bien formuladas si el problema no es resoluble algebraicamente mediante una ecuación o sistema compatible determinados.
- 3) Se equivoca en la formulación o en la resolución o en la comprobación de las ecuaciones o no interpreta las soluciones halladas o se equivoca en la interpretación de las mismas. O se equivoca en el tanteo aritmético.
- 4) No contesta.

C) Resultados

Apartado 1: ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces?					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Actividad 7.1.1	1 (3%)	23 (69%)	5 (15%)	4 (12%)	0 (0%)
Actividad 7.2.1	1 (3%)	16 (48%)	13 (39%)	3 (9%)	0 (0%)

Tabla V.43. Resultados de las actividades 7.1.1 y 7.2.1

Destacamos que:

- La suma de los porcentajes de respuestas correctas e incompletas son elevados y son similares en las actividades 7.1.1 y 7.2.1: el 84% y el 87% del total.

- Los porcentajes de respuestas incorrectas son reducidos y son similares en las actividades 7.1.1 y 7.2.1: el 12% y el 9% del total.

-Actividad 7.1.1:

- Hay 19 respuestas correctas (el 57% del total) que son como la siguiente respuesta: “x, $x+1$, $x+2$, $x+3$” (Alumno A17)

  Destacamos que, en la respuesta anterior, se escribe, abreviadamente, $x+2$ y $x+3$, en vez de $x+1+1$ y $x+1+1+1$. Esto indica cierta experiencia en el manejo de la notación algebraica.

- Hay 3 respuestas correctas (el 9% del total) que son como la siguiente respuesta: “$1^o N \Rightarrow x$ $2^o n \Rightarrow x+1$ $3^o n \Rightarrow x+1+1$ $4^o n \Rightarrow x+1+1+1$” (Alumno A03)

- Hay una respuesta peculiar: “$x,(x+1),(x+2),(x+3)$” (Alumno A04)

  Destacamos que, en esta respuesta, se escriben unos correctos pero innecesarios paréntesis.

- Hay 5 respuestas (el 15% del total) en las que sólo se escribe la x, sin indicar cómo cada uno de los cuatro números consecutivos se expresan en función de x.
- Hay 4 respuestas incorrectas (el 12% del total):

  -"$x+x+x+x=326$" (Alumno A19)

  -"$Suma=326$" (Alumno A24)

  -"$x+y$" (Alumnos A20 y A22)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A19, en vez de asignar las variables, se formula una ecuación que, además, es incorrecta.

  -En la respuesta del alumno A24, en vez de asignar las variables, se contesta repitiendo un dato del enunciado.

  -En las respuestas de los alumnos A20 y A22, en vez de asignar las variables, se formula la expresión $x+y$.

-Actividad 7.2.1:

- Hay 2 respuestas correctas (el 6% del total) en las que aparece una incógnita: se escribe que "$6x=$ *edad del padre*" y que "$x=$*edad del hijo*".
- Hay 14 respuestas correctas (el 42% del total) en las que aparecen dos incógnitas: se escribe que "x" = edad del padre y que "y" = la edad del hijo.
- Hay 7 y 4 respuestas en las que respectivamente se escribe que "*x = hijo y = padre*", "*x y*" Y hay dos respuestas en las que respectivamente se escribe que "*x = hijo 6x = padre*" y "*x y 6x*" Como el tema de las edades es muy próximo para el alumno, probablemente, se es consciente de que se refieren a las edades, medidas en años, del padre y del hijo.
- Hay 3 respuestas incorrectas (el 9% del total):

  -"$x=$ *edad del padre*
  $6x=$*edad del hijo*

  $$\begin{aligned}&x+6x=91\\&7x=91\\&x=13\textit{ años del hijo}\\&x\cdot 6=68\textit{ años del padre}\end{aligned}$$
  " (Alumno A08)

  -"$x+y$".(Alumnos A20 y 22)

  Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A08: Se comete el error de inversión para el producto en la asignación de variables; se calcula mal $13 \cdot 6$; se tergiversa la interpretación del resultado para que los números calculados tengan sentido como edades del hijo y del padre.

-En las respuestas de los alumnos A20 y A22 sólo se escribe la expresión $x + y$, esto es, la edad del hijo más la del padre.

Apartado 2:Formula las ecuaciones				
Calificación	**0**	**1**	**3**	**4**
Actividad 7.1.2	1 (3%)	31 (93%)	1 (3%)	0 (0%)
Actividad 7.2.2	1 (3%)	30 (90%)	2 (6%)	0 (0%)

Tabla V.44. Resultados de las actividades 7.1.2 y 7.2.2

De la observación de la tabla V.44, tenemos que:

- El porcentaje de respuestas en las que se formula bien el enunciado es, respectivamente, el 93% y el 90% del total en las actividades 7.1.2 y 7.2.2.
- El número de respuestas en las que se plantean mal el enunciado es muy reducido en ambas actividades: una en la actividad 7.1.2 y dos en la actividad 7.2.2.

-Actividad 7.1.2:

- Hay 23 respuestas correctas (el 69% del total) en las que se escribe que $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 326$.
- Hay 6 respuestas correctas (el 18% del total) en las que se escribe $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 326$.
- Hay 2 respuestas correctas (el 6% del total) en las que se escribe $x + x + 1 + x + 1 + 1 + x + 1 + 1 + 1 = 326$.
- Hay una respuesta incorrecta (el 3 % del total) en la que se escribe $x + x + x + x = 326$.

-Actividad 7.2.2:

- Hay 12 respuestas (el 72% del total) en las que se plantea bien un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que se plantea bien una ecuación con una incógnita.
- Hay 2 respuestas incorrectas (el 6% del total):

-“x = *edad del padre*
y = edad del hijo

$$\begin{cases} 6x = y \\ x + y = 91 \end{cases}$$

x = 13 años　　　*y = 78 años*” (Alumno A10)

-“ $x =$ *edad del padre*
$6x =$ *edad del hijo*

$$x + 6x = 91$$
$$7x = 91$$

$x = 13$ *años del hijo*
$x * 6 = 68$ *años del padre*” (Alumno A08)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A10 se comete el error de inversión para el producto y se obtiene una solución absurda -un padre de 13 años con un hijo de 78 años- sobre la que nada se dice.

-En la respuesta del alumno A08, ya analizada en la anterior actividad 7.1.2, se comete el error de inversión para el producto, se multiplica mal 13 por 6 y se tergiversa la interpretación del significado de las incógnitas, para que 13 años sea la edad del hijo y 68 años sea la del padre.

Apartado 3:Resuelve la ecuación o sistema					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Actividad 7.1.3	1 (3%)	32 (96%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Actividad 7.2.3	1 (3%)	28 (84%)	1 (3%)	2 (6%)	1 (3%)

Tabla V.45. Resultados de las actividades 7.1.3 y 7.2.3

Destacamos que hay 32 respuestas, el 96% del total, en las que se resuelve bien la ecuación planteada. Este éxito es atribuible, en gran medida, a que se ha practicado, en la enseñanza habitual, la resolución de ecuaciones mucho más complejas.

-Actividad 7.2.3:

- Hay 28 respuestas (el 84% del total) en las que resuelven bien la ecuación o el sistema planteados. Ese 84% se divide:

  -En un 39% de respuestas en las que se resuelve el sistema mediante el método de reducción.

  -En un 21% de respuestas en las que se resuelve el sistema mediante el método de sustitución.

  -En un 6% de respuestas en las que se resuelve el sistema mediante el método de igualación.

  -En un 18% de respuestas en las que se resuelve la ecuación con una incógnita.

Este elevado porcentaje de respuestas correctas es atribuible, en gran medida, a que se ha practicado, en la enseñanza habitual, la resolución de ecuaciones y de sistemas mucho más complejos que los que aparecen en esta actividad. Obsérvese además que, si formulamos el enunciado como un sistema de ecuaciones, tenemos que, en este caso, el método más recomendable, por requerir muy pocas transformaciones, es el de sustitución. No obstante, la mayoría ha optado por el método de reducción para resolver el sistema. Atribuimos la mayoritaria elección del método de reducción, en parte, a que, en la práctica escolar habitual, se estudian poco las ventajas y los inconvenientes de cada método según sea la presentación del sistema.

- Hay una respuesta en la que se comete un error de memoria de cálculo.
- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se cometen errores al despejar en la resolución del sistema:

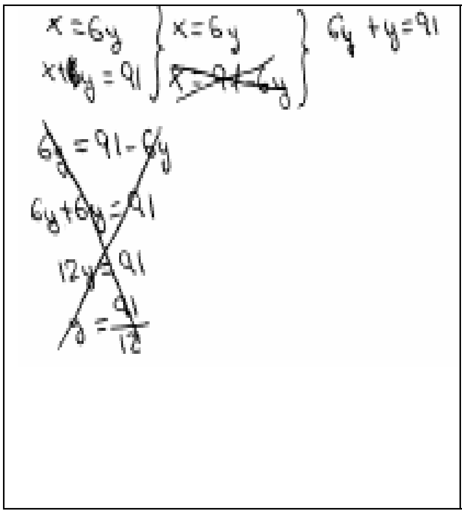


Figura V.34. Respuesta del alumno A17

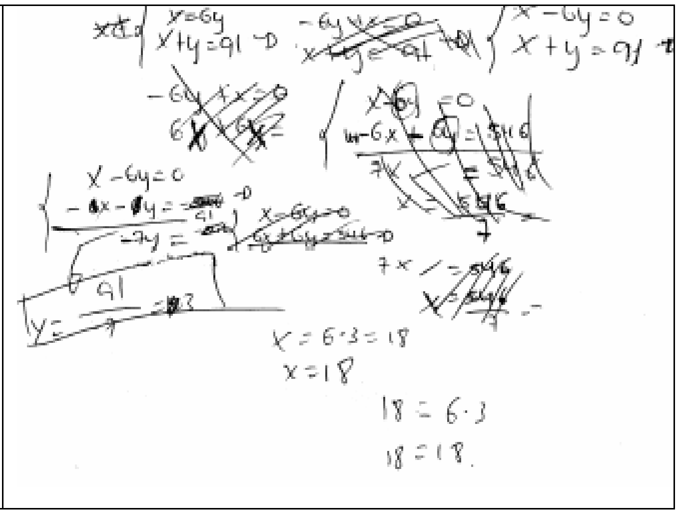


Figura V.35. Respuesta del alumno A25

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A17 se escribe el sistema mal planteado $\begin{cases} x = 6y \\ x + 6y = 91 \end{cases}$, en vez del sistema correcto $\begin{cases} x = 6y \\ x + y = 91 \end{cases}$, se obtiene la solución $x = \dfrac{91}{12}$ y se tacha todo con un aspa. Probablemente se tacha porque, se piensa que las edades suelen ser números enteros.

-En la respuesta del alumno A25 se escribe el sistema bien planteado $\begin{cases} x = 6y \\ x + y = 91 \end{cases}$, y tras otros intentos fallidos que son tachados con un aspa, se despeja mal, se escribe que $x = \dfrac{91}{-7} = 3$ e $y = 6 \cdot 3 = 18$. Además, realiza sólo la comprobación parcial $18 = 6 \cdot 3$. Lo anterior hace patente una deficiente comprensión de las técnicas de cálculo y del concepto de la comprobación de las soluciones.

Apartado 4:Comprobación en el enunciado				
Calificación	**0**	**1**	**3**	**4**
Actividad 7.1.4	1 (3%)	21 (63%)	8 (24%)	3 (9%)
Actividad 7.2.4	1 (3%)	12 (36%)	14 (42%)	6 (18%)

Tabla V.46. Resultados de las actividades 7.1.4 y 7.2.4

-Actividad 7.1.4:

- Hay 21 respuestas (el 63% del total) en las que, probablemente, se comprueba que la suma de los cuatro números consecutivos hallados da 326, tal y como decía el enunciado. Veamos dos ejemplos representativos:

  -“ $80+81+82+83=326$ ” (Alumno A12)

  -“ $\begin{array}{r} 80 \\ +81 \\ +82 \\ +83 \\ \hline 326 \end{array}$ ” (Alumno A20)

  Destacamos que, como en ambas respuestas se escribe directamente que los cuatro números consecutivos 80, 81, 82 y 83 suman 326, en vez de escribir que las expresiones 80, 80+1, 80+2 y 80+3 suman 326. Probablemente, se comprueba la solución en el enunciado, no en la ecuación $x+x+1+x+2+x+3=326$.

- Hay 8 respuestas (el 24% del total) en las que se comprueba la solución en la ecuación $x+x+1+x+2+x+3=326$ o en una ecuación equivalente. Veamos dos ejemplos representativos:

  -“ $\begin{array}{l} 80+80+1+80+2+80+3=326 \\ 4*80+6=326 \\ 320+6=326 \\ 326=326 \end{array}$ ” (Alumno A28)

  -“ $\begin{array}{l} 80+80+1+80+1+1+80+1+1+10326 \\ 320+6=326 \\ 326=326 \end{array}$ ” (Alumno A13)

- Hay 3 respuestas en blanco (el 9% del total).

  Como por las fichas nº 13 y nº 14 del Anexo II “Diario de Clase” sabemos que no hubo falta de tiempo ni de motivación, ese 9% de respuestas es atribuible, probablemente, a que no se comprende ni el concepto de comprobación semántica ni el de comprobación sintáctica.

-Actividad 7.2.4:

- Hay 12 respuestas (el 36% del total) en las que, probablemente, se comprueba la solución en el enunciado. Veamos dos casos representativos:

  -“$\begin{array}{l} 78+13=91 \\ 13*6=78 \end{array}$”. (Alumno A09)

  -“*Un padre tiene 6 veces la edad de su hijo:* $\begin{array}{r} 13 \\ \cdot 6 \\ \hline 78 \end{array}$

  la suma de las edades es 91*:* $78+13=91$” (Alumno A11)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A09, como las ecuaciones planteadas coinciden literalmente (salvo por un posible error de inversión consistente en que sea la edad de hijo la que sextuplique la del padre), con las oraciones gramaticales del enunciado, la solución se puede estar comprobando en el enunciado, en el sistema o en ambos a la vez.

  -En la respuesta del alumno A11, tal y como se expresan las cuentas, de forma claramente aritmética, es casi seguro que se está comprobando que las soluciones cumplen las condiciones del enunciado.

- Hay 7 respuestas incompletas (el 21% del total) en las que sólo se comprueba que $13+78=91$. Veamos dos casos representativos:

  -“$13+78=91$” (Alumno A26)

  -“$\begin{array}{l} x+y=91 \\ 13+78=91 \\ 91=91 \end{array}$” (Alumno A29)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A26, como el orden gramatical de esa condición del enunciado y el orden algebraico de esa ecuación del sistema coinciden, se puede estar comprobando una condición del enunciado o una ecuación del sistema.

  -En la respuesta del alumno A29, como se escribe que $x+y=91$, es casi seguro que la solución se está comprobando en una ecuación.

  -En ambas respuestas, probablemente, se piensa que, si se verifica una de las condiciones o una de las ecuaciones, el problema o el sistema respectivos están comprobados.

- Hay 6 respuestas incompletas (el 18% del total) en las que sólo se comprueba el producto $6\cdot 13=78$. Veamos dos casos representativos:

-“$18 \cdot 6 = 78$” (Alumno A18)

-“$x = 6y$
$78 = 6 \cdot 13$
$78 = 78$” (Alumno A03)

Destacamos que en la respuesta del alumno A18 se puede estar comprobando sólo una de las 2 condiciones del enunciado o sólo una de las 2 ecuaciones del sistema y que en la respuesta del alumno A03, como se escribe $x = 6y$, es casi seguro se está comprobando sólo una de las 2 ecuaciones del sistema.

- Hay una respuesta en la que se cometen dos errores de cálculo:

$13 + (13 \cdot 6) = 91$
“$13 + 68 = 91$” (Alumno A08)
$91 = 91$

Obsérvese que ni $13 \cdot 6$ es igual a 68 ni $13 + 68$ da 91.

- Hay 6 respuestas en blanco (el 18% del total). Por la lectura de las fichas nº 13 y nº 14 del Diario de Clase descartamos que ese porcentaje sea atribuible a la falta de tiempo o de motivación. Lo anterior es atribuible, probablemente, a que no se comprende ni el concepto de comprobación semántica ni el de comprobación sintáctica.

Calificación	0	1	2	3	4
Actividad 7.3	1 (3%)	6(18%)	17(51%)	9(27%)	0 (0%)
Actividad 7.4	1 (3%)	3(9%)	10(30%)	12(36%)	7(21%)
Actividad 7.5	1 (3%)	3(9%)	12(36%)	13(39%)	4(12%)
Actividad 7.6	1 (3%)	11(33%)	10(30%)	3(9%)	8(24%)

Tabla V.47. Resultados de las actividades 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4

Tras examinar la tabla V.47, observamos que:

- El porcentaje de respuestas en las que se halla la respuesta correcta y se realiza una comprobación adecuada oscila entre el mínimo del 9% en las actividades 7.4 y 7.5 y el máximo del 33% de la actividad 7.5, siendo del 18% y del 21% en la 7.3 y 7.5.

- El porcentaje de respuestas incompletas, en las que se hallaba bien la solución mediante el método algebraico pero no se realizaba una comprobación adecuada oscila entre el 30% y el 36% de las actividades 7.4, 7.5 y el 51% en la 7.3.

- Si, en las actividades 7.3, 7.4, 7.5 y 7.6, sumamos los porcentajes de las respuestas calificadas con un 1 o con un 2 (es decir, de aquellas respuestas en las que se ha encontrado la solución correcta), obtenemos, respectivamente, los siguientes resultados: 69%, 39%, 65% y 63%.

- El porcentaje de respuestas incorrectas, en las que se aplica mal el método de tanteo aritmético, o el método algebraico, o en las que se equivocan en la interpretación de las soluciones, o en las que no se interpretan las soluciones, está en torno al 33% en todas las actividades, salvo en la 7.6 en la que es del 9%.
- El porcentaje de respuestas en blanco no es atribuible ni a la falta de tiempo ni de interés pues la lectura de las fichas nº 13 y nº 14 no permite saber que todos entregaron las hojas voluntariamente antes del final de la sesión y que el ambiente de trabajo fue bueno.

-Actividad 7.3:

- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que se usa bien el método algebraico, se interpreta bien la solución hallada y, como el orden gramatical de las palabras del enunciado coincide con el orden algebraico de las ecuaciones, se realiza lo que puede ser una comprobación del enunciado o del sistema o de ambos a la vez.
- Hay 9 respuestas (el 27% del total) en las que se usa correctamente el método algebraico y se interpreta bien el significado de la solución hallada pero en las que no se realiza comprobación alguna.
- Hay 6 respuestas (el 24% del total) en las que se plantea y se resuelve bien y se interpreta bien el significado de las soluciones pero en las que sólo se realiza una comprobación parcial o de uno de los 2 lotes o de una de las 2 ecuaciones, sin que podamos saber si dicha comprobación es semántica o sintáctica o ambas a la vez pues el orden gramatical del enunciado coincide con el orden algebraico de las ecuaciones.
- Hay 6 respuestas (el 18% del total) en las que se plantea y se resuelve bien el sistema pero en las que no se interpreta el significado de las soluciones calculadas.
- Hay una respuesta en la que se interpreta erróneamente el resultado hallado. Veámosla:

  “ *x = bocadillos*   *y = refresco*

  $$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

  ………..

  $x = 2 \quad y = 1$ *R: 2 bocadillos y 1 refresco*”

  (Alumno A02)

  Destacamos que en la anterior respuesta:

  -Las letras x e y se identifican como abreviaturas de los sustantivos “*bocadillos*” y “*refresco*”.

-Se plantea un sistema formalmente correcto.

-Se resuelve bien el sistema planteado.

-Las soluciones $x=2$ e $y=1$ se interpretan mal como 2 bocadillos y 1 refresco.

Probablemente, es un alumno que aplica bien las técnicas algebraicas pero que comete un error de despiste al final o que no entiende la situación comercial del enunciado.

-Actividad 7.4:

- Hay 3 respuestas correctas (el 9% del total) en las que se resuelve bien el problema, se interpreta bien la solución como número de barriles y se realiza una comprobación que puede ser semántica, o sintáctica, o ambas a la vez, pues el orden gramatical del texto coincide con el orden algebraico de las ecuaciones.

- Hay 10 respuestas (el 30% del total) en las que se aplica bien el método algebraico pero en las que falta la comprobación.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se plantea mal la ecuación, se resuelve dicha ecuación y se tacha lo escrito:

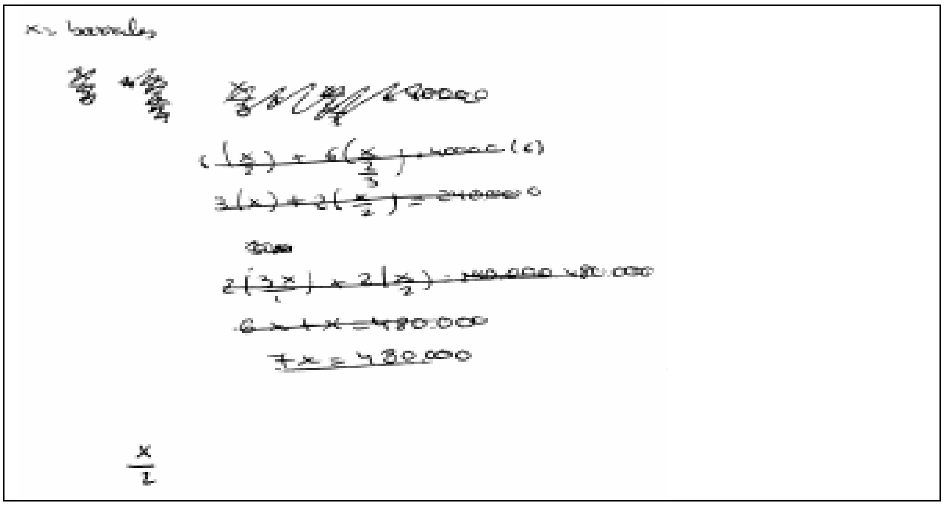


Figura V.36. Respuesta del alumno A10

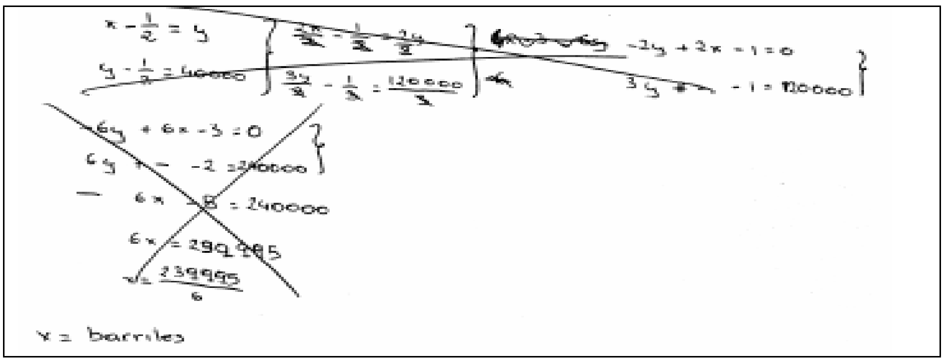


Figura V.37. Respuesta del alumno A33

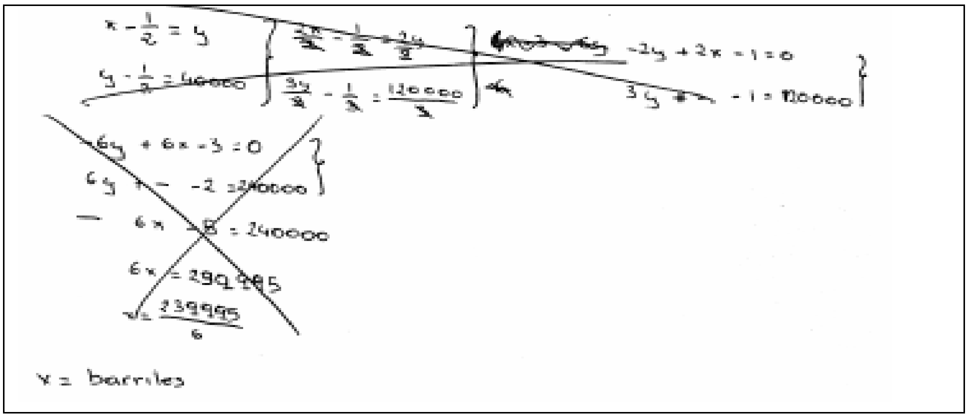


Figura V.38. Respuesta del alumno A25

Destacamos que:

-En las tres respuestas tachadas de los alumnos A10, A33 y A25, se cometen errores de planteamiento que llevan, respectivamente, a las expresiones finales $7x = 480.000$, $x = \dfrac{239995}{6}$ y $2x = 40.000$.

-El que los alumnos A10 y A33 rechacen las respectivas soluciones fraccionarias $480.000/7$ y $239995/6$ puede deberse a que comprendan que el número inicial de barriles debe ser un número natural, o a que crean que la solución ha de ser necesariamente un número natural porque las soluciones de los problemas suelen ser números naturales en el álgebra escolar.

-El que el alumno A28 rechace la solución de $2x = 40.000$, probablemente, se debe a que comprende que el número inicial de barriles no puede ser 20.000 cuando aún quedan 40.000 barriles sin exportar.

- Hay 2 respuestas, en las que se plantea mal la ecuación y se da por buena la solución incorrecta que se ha calculado:

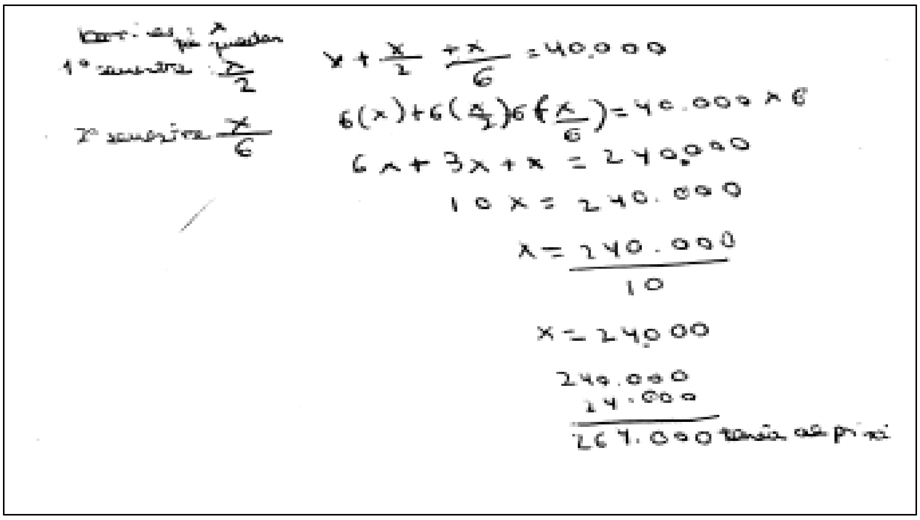


Figura V.39. Respuesta del alumno A11

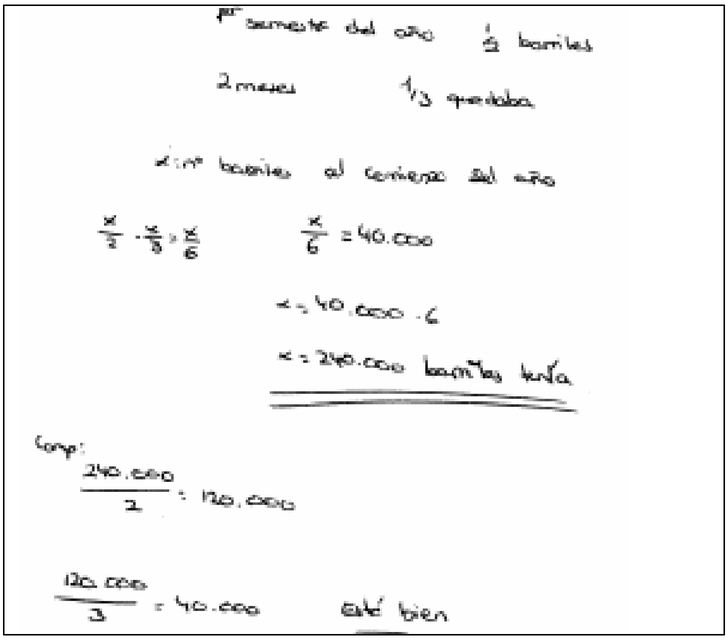


Figura V.40. Respuesta del alumno A14

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A11, 40.000 se interpreta como el número total de barriles que había en la bodega, en vez de cómo el número de barriles que quedan sin exportar.

-En la respuesta del alumno A30, 40.000 se interpreta como el número de barriles exportados en la segunda ocasión.

- Hay una respuesta en la que se plantea mal una ecuación y en la que no se resuelve dicha ecuación. Veámosla:

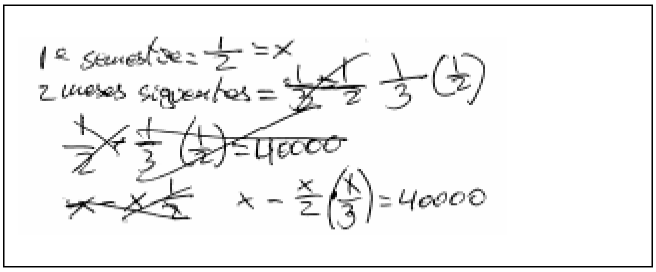


Figura V.41. Respuesta del alumno A24

Destacamos que la ecuación no tachada, en la que $x/2$ se multiplica por $x/3$, no tiene ningún significado real.

- Hay una respuesta en la que el enunciado se escribe abreviadamente mediante una combinación de símbolos algebraicos, números y preoposiciones gramaticales:

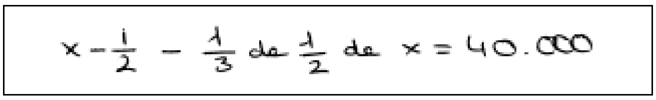


Figura V.42. Respuesta del alumno A12

La anterior respuesta es, probablemente, una exteriorización de la manera en la que muchos alumnos formulan los enunciados de los problemas de álgebra: convertir cada palabra del enunciado en una abreviatura.

- Hay una respuesta en la que se plantea y se resuelve bien pero en las que no se interpreta el resultado que se ha calculado.
- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que sólo se escribe alguno de los datos del enunciado. Veamos dos respuestas representativas:

-“ $x =$ *nº de barriles al comienzo del año* $x - \frac{x}{2} -$” (Alumno A03)

-“ $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} \rightarrow \textit{semestre} \\ \frac{1}{3} \rightarrow 2 \textit{ meses} \end{array}\right\}$ ” (Alumno A28)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A03 se realiza una correcta asignación de la x y se empieza a formular correctamente $x - \frac{x}{2} -$, pero se abandona la actividad.

-En la respuesta del alumno A28 se confunde la fracción de una cantidad ($1/2$ de… y $1/3$ de…) con un número fraccionario ($1/2$ y $1/3$) y se abandona la actividad.

Como, por la lectura de las fichas nº 13 y nº 14 del Anexo II “Diario de Clase”, sabemos que no hubo falta de tiempo ni de motivación, el abandono de la actividad es atribuible, probablemente, a que ni el alumno A03 ni el A28 supieron cómo continuar.

- Hay 7 respuestas en blanco (el 21% del total). Por la lectura de las fichas nº 13 y nº 14 del Anexo II “Diario de Clase” descartamos la falta de tiempo o de motivación. Probablemente esas 7 respuestas son atribuibles a una nula comprensión sobre cómo plantear el enunciado.

-Actividad 7.5:

- Hay 3 respuestas correctas (el 9% del total) en las que el problema, además de estar bien planteado y resuelto, está comprobado.

Sin embargo, la comprobación realizada, tal y como está expresada, puede ser semántica, sintáctica o ambas a la vez, puesto que el orden gramatical de las palabras del texto del enunciado coincide con el de los símbolos de las ecuaciones.

Veamos un ejemplo representativo de las 3 respuestas anteriores:

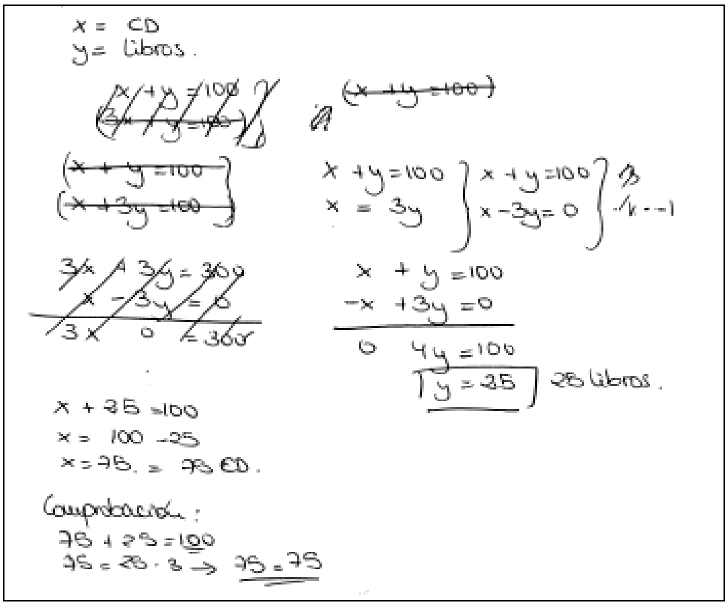


Figura V.43. Respuesta del alumno A31

- Hay 4 respuestas correctas (el 12% del total) en las que el problema está bien resuelto y en las que se realiza unas comprobaciones que, tal y como están expresada, son claramente sintácticas. Veamos dos ejemplos representativos:

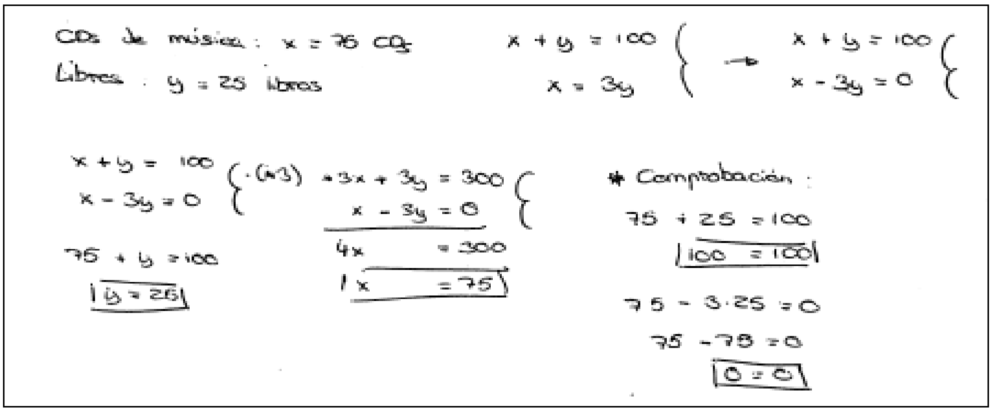


Figura V.44. Respuesta del alumno A05

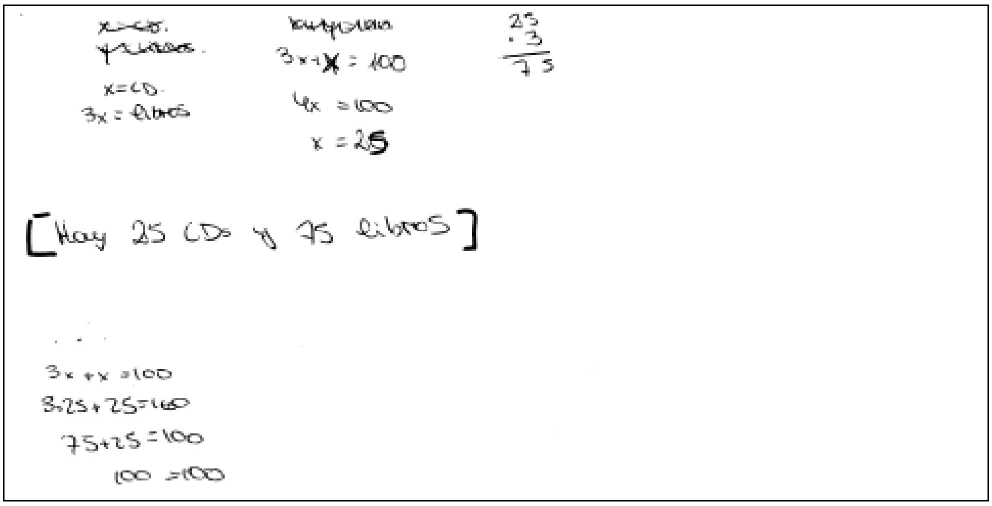


Figura V.45. Respuesta del alumno A29

De las anteriores respuestas destacamos que:

-La expresión $75-3\cdot 25=0$ del alumno A31 es, probablemente, la comprobación sintáctica de la ecuación $x-3y=0$. Sin embargo, la expresión $75=3\cdot 25$ hubiera podido ser tanto la comprobación sintáctica de la ecuación $x=3y$, como la comprobación semántica del hecho real de que el número de CDs (75) triplica al de libros, (25).

-La expresión $3\cdot 25+25=100$ del alumno A29 es, probablemente, la comprobación sintáctica de la ecuación $3x+x=100$, puesto que es una expresión aritmética que está muy alejada de un texto en el que se declaraba que el número de CDs triplicaba al de libros y que el número total de CDs más el de libros era 100.

- Hay 8 respuestas (el 24% del total) en las que se plantea y se resuelve bien el sistema -o la ecuación- y en las que se interpreta bien la solución calculada, pero en las que no se realiza comprobación alguna.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se plantea y se resuelve bien el sistema, se interpreta bien la solución pero en las que sólo se comprueba que 75+25=100, sin verificar que el número de CDs es el triple que el de libros (si la comprobación es semántica) o que $75=3\cdot 25$ (si la comprobación es sintáctica).

- Hay una respuesta en la que se plantea y se resuelve bien el sistema pero en la que ni se interpreta ni se comprueba la solución calculada:

- Hay 7 respuestas (el 15% del total) en las que se concluye que hay 25 CDs y 75 libros, en vez de 75 CD y 25 libros, porque se comete el error de inversión para el producto.

  En 5 de ellas no aparece comprobación alguna y en las otras 2 aparece una comprobación del sistema. Veamos un ejemplo representativo de cada caso:

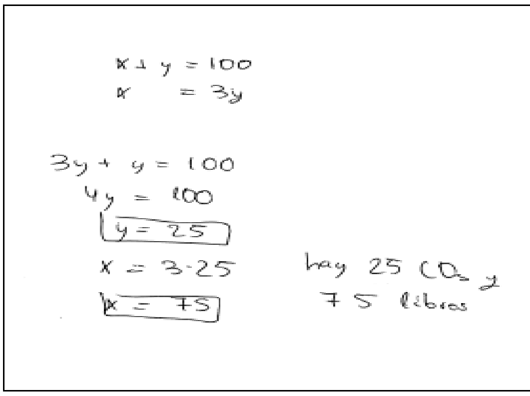


Figura V.47. Respuesta del alumno A13.

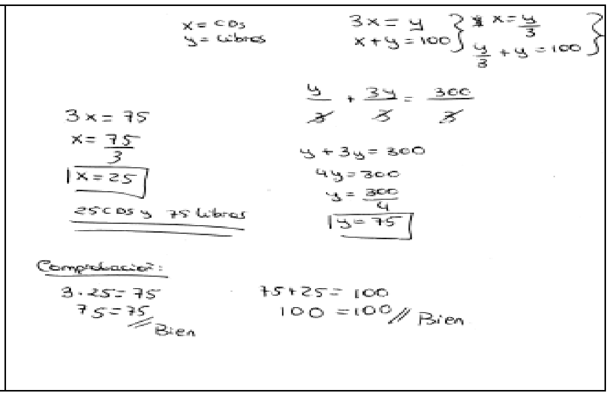


Figura V.48. Respuesta del alumno A28

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A13 no se percibe el error de inversión para el producto porque no se realiza comprobación alguna.

-En la respuesta del alumno A28 no se percibe el error de inversión para el producto porque la solución se comprueba en el sistema mal planteado, no en el texto del enunciado.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se plantea bien el sistema pero se cometen errores en su resolución.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que sólo se escribe el planteamiento. Como sabemos, por la lectura de las fichas nº 13 y nº 14 del Anexo II "Diario de Clase", que no faltó tiempo o motivación, probablemente, ese porcentaje es atribuible a un mal dominio de la técnica de resolución de sistemas.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se escriben planteamientos que luego se tachan. Veamos un ejemplo representativo:

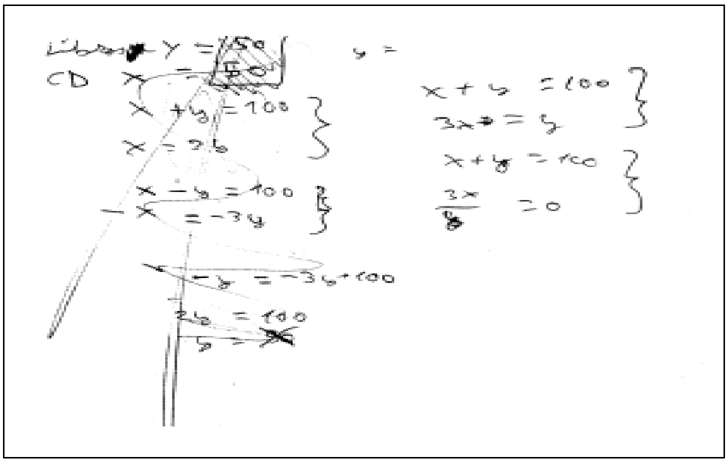


Figura V.49. Respuesta del alumno A21

Destacamos que en la respuesta anterior:

-En un primer intento, se plantea bien el sistema de ecuaciones pero sólo se multiplica por -1 el primer término de la ecuación $x+y=100$, se obtiene la solución $x=50$ e $y=50$ y se tacha todo porque, probablemente, se percibe que esa solución no es coherente con un enunciado en el que se decía que había triple número de CDs que de libros.

-En un segundo intento, se plantea un sistema en el que comete el error de inversión para el producto, la ecuación $3x=y$ se convierte en la ecuación $\frac{3x}{y}=0$ y se abandona la actividad sin obtener solución alguna.

Es decir, las dificultades de este alumno se originan en un deficiente dominio de las técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones.

- Hay 4 respuestas en blanco (el 12% del total). Por la lectura de las fichas nº 13 y nº 14 del Anexo II "Diario de Clase" descartamos que ese porcentaje de respuestas en blanco se deba a la falta de tiempo o de motivación. Ese porcentaje de respuestas es atribuible, probablemente a que no se sabe expresar algebraicamente que el número de CDs y de libros están en proporción de 3 a 1.

-Actividad 7.6:

- Hay 5 respuestas (el 15% del total) en las que -en un primer intento- se escribe la ecuación $6000x + 5000y = 17000$, se escribe que faltan datos para escribir una segunda ecuación y -en un segundo intento- se obtiene la solución por tanteo aritmético.
- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que no se escribe ninguna ecuación y en las que se obtiene la solución por tanteo:

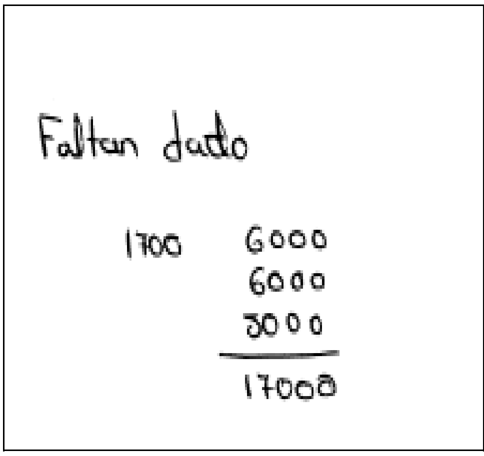


Figura V.50. Respuesta del alumno A27

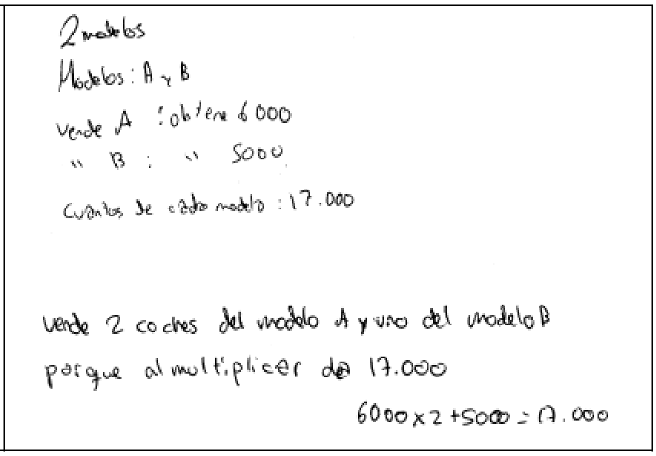


Figura V.51. Respuesta del alumno A18

Destacamos que: en la respuesta del alumno A27 se escribe que "*faltan dato*" porque, probablemente, se ha intentado plantear dos ecuaciones; en la respuesta del alumno A18 no se dice nada al respecto aunque, probablemente, se haya recurrido (como todos han hecho en todas las actividades) al método algebraico como 1ª opción; en ambas respuestas el problema se ha resuelto mediante un sencillo tanteo aritmético.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se inventan ecuaciones incorrectas; se dice que faltan datos y se obtiene la solución correcta por tanteo aritmético.

Nos fijaremos sólo en la parte algebraica de las anteriores respuestas:

-" $x = coches\ A \qquad y = coches\ B \qquad x + y = 17000$ ….." (Alumno A04)

-" $x = coche\ A \qquad y = \ coche\ B$

$$\begin{cases} x \cdot 6000 + y \cdot 5000 = 17000 \\ x \cdot 6000 - y \cdot 5000 = 17000 - y \cdot 5000 \end{cases}$$

$6000x + 5000y = 17000$

…" (Alumno A08)

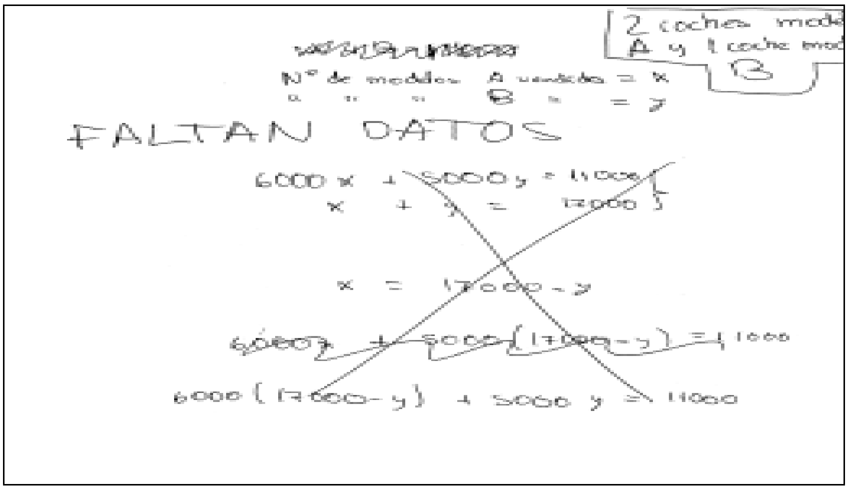


Figura V.52. Respuesta del alumno A13

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A04, aparece la ecuación $x+y=17.000$ en la que, probablemente, el signo = se interpreta como un signo de correspondencia entre el conjunto formado por los x coches del modelo A y los y coches del modelo B y el conjunto formado por todos los euros que se obtienen de beneficio monetario por su venta.

-En la respuesta del alumno A08, la primera ecuación es la traducción correcta al álgebra del enunciado dado pero la segunda ecuación es una invención ajena a la situación comercial del enunciado. Además es una invención que aparenta estar diseñada para poder aplicar fácilmente el método de resolución de Gaüss.

-En la del alumno A13, la primera ecuación es la traducción correcta al álgebra del enunciado dado y la ecuación $x+y=17.000$ parece nacer, como ya hemos dicho, de la interpretación del signo = como un signo de correspondencia entre los coches y los euros que se obtienen de su venta.

- Hay una respuesta en la que también se escriben ecuaciones incorrectas y se obtiene la solución por tanteo, pero sin indicar que faltan datos. Veámosla:

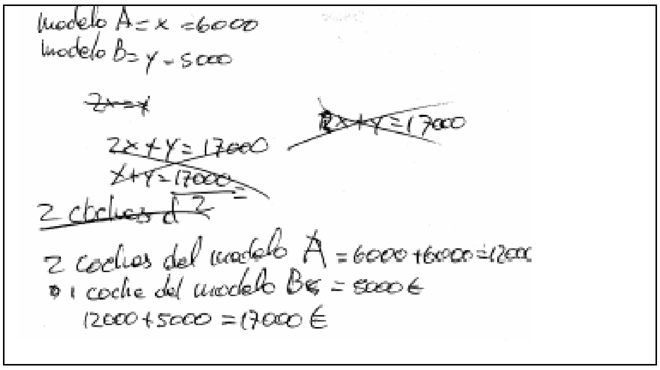
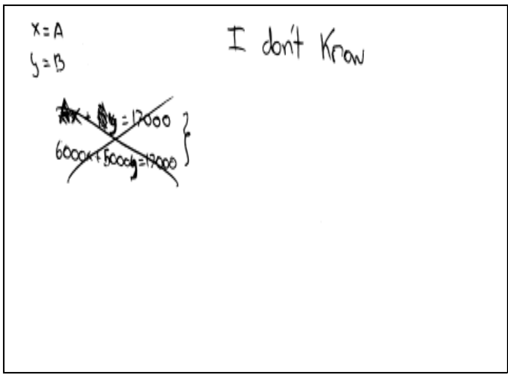


Figura V.53. Respuesta del alumno A24

Destacamos que, en un primer intento, se piensa que los datos conocidos (los 6000 € y los 5000 € de beneficio por cada coche del modelo A y del modelo B) son las incógnitas y que las soluciones (2 coches modelo A y 1 coche modelo B), probablemente calculadas mentalmente por tanteo aritmético, son los coeficientes de la ecuación. Por ello, se escribe $2x + y = 17.000$. Luego, se tacha todo lo anterior y se explica que, vendiendo 2 coches del modelo A y 1 coche del B, obtendrá 17.000 euros de beneficio.

- Hay 5 respuestas (el 15% del total) en las que sólo se escribe que faltan datos. El que se escriba que “faltan datos” indica que, probablemente, se percibe que no puede ser resuelto algebraicamente porque faltan datos para escribir una segunda ecuación.
- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que sólo se escriben la ecuación correcta $6000x + 5000y = 17000$ y hay una respuesta en la que se escribe la ecuación anterior y se añade que “*No se puede hacer*, *porque faltan datos*” Por la lectura de las fichas nº 13 y nº 14 Anexo II, descartamos la falta de tiempo o de motivación. Probablemente, estamos ante alumnos que saben qué es lo que se puede plantear algebraicamente a partir del enunciado del problema, que no inventan falsas ecuaciones incorrectas pero que no ensayan alternativas aritméticas de resolución cuando el método algebraico no puede resolver el problema.
- Hay 3 respuestas incorrectas (el 9% del total):



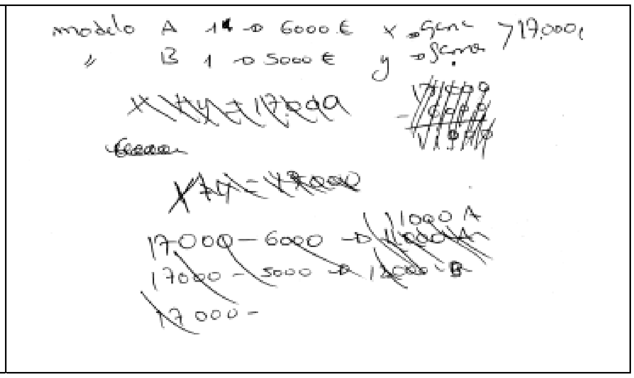


Figura V.54. Respuesta del alumno A33 Figura V.55. Respuesta del alumno A25

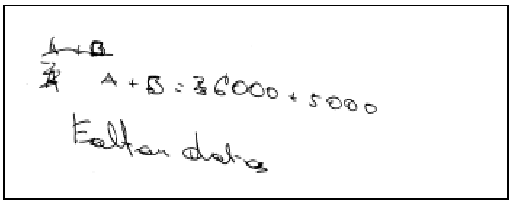


Figura V.56. Respuesta del alumno A16

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A33 se intenta plantear un sistema que contenga la correcta ecuación $6000x + 5000y = 17000$. Luego se tacha dicha ecuación, se escribe que no se sabe (en inglés) y se abandona la actividad.

-En la respuesta del alumno A25 se realiza un intento fallido de resolución algebraica con la incorrecta ecuación $x+y=17.000$. Luego se realiza un tanteo aritmético, bien enfocado, consistente en restar a 17.000 cantidades de 6.000 € -el beneficio de un coche modelo A- y de 5.000€-el beneficio de un coche modelo B-. Finalmente se tacha, tanto la ecuación como el tanteo aritmético y se abandona la actividad.

-En la respuesta del alumno A43 se quiere expresar, escribiendo $A+B=6.000+5.000$, que si se vende un coche del modelo A y uno del B se obtiene un beneficio de $6.000+5.000$€. Finalmente, se dice que faltan datos y se abandona la actividad.

- Hay 8 respuestas en blanco (el 24% del total). Por la lectura de las fichas nº 13 y nº 14 del Anexo II “Diario de Clase”, descartamos que ese porcentaje de respuestas en blanco se deba a falta de tiempo o motivación.

  Probablemente, ese 24% es atribuible a que no supieron resolver un enunciado que no admitía una resolución mediante el método algebraico.

D) Análisis de la comprensión de contenidos (CC)

- Fue frecuente que los alumnos identificaran plantear un problema con volver a escribir abreviadamente mediante letras, números y signos el texto del enunciado (CC. XVI).

  Es decir, fue frecuente que los estudiantes identificaran las letras de las ecuaciones planteadas como abreviaturas de sustantivos de objetos (CC. III. 1.2), en vez de cómo incógnitas que sustituyen cantidades de objetos (CC. II).

  Destacamos que tales alumnos, sin comprender el concepto de ecuación, habitualmente plantearon formalmente bien aquellos problemas del álgebra escolar en los que el orden de las palabras de los textos de los enunciados coincide con el orden de los símbolos de las ecuaciones algebraico.

- La mayoría de los alumnos optó por la formulación del enunciado mediante un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas en los problemas algebraicos en los que hay 2 valores desconocidos, siendo casi inexistentes los alumnos que prefirieron formular una de las incógnitas en función de la otra y formular una ecuación con una sola incógnita.

  Este hecho es atribuible, en gran medida, a que mientras que los sistemas suele permitir un planteamiento sintáctico (CC. XVI) del enunciado, la ecuación exige una reflexión sobre la relación existente entre los 2 valores desconocidos.

- Casi todos los alumnos, cuando hay 3 o más valores desconocidos, usan una sola incógnita y escriben los demás valores desconocidos en función de esa incógnita. Ninguno intenta utilizar 3 o más incógnitas.

Lo anterior es atribuible, en parte, a que en el nivel de enseñanza en el que los alumnos del grupo de estudio se encuentran (3º de ESO) se les suele enseñar a plantear y a resolver tales problemas algebraicos como ecuaciones con una sola incógnita y a que ni se les suele enseñar a plantear ni a resolver sistemas 3x3 de tres ecuaciones con tres incógnitas.

- Aparecieron alumnos que comprobaron voluntariamente las soluciones en las ecuaciones.

  Opinamos que lo anterior es atribuible, en parte, a las actividades desarrolladas anteriormente en nuestra propuesta curricular alternativa. Es positivo que se entienda que las ecuaciones simbolizan relaciones entre números conocidos y desconocidos y que pueden ser comprobadas para saber si los cálculos de resolución han sido correctos. Pero es negativo que no se entienda que el álgebra es sólo un instrumento para encontrar la solución y que lo verdaderamente relevante es la solución del problema real planteado.

- Aparecieron alumnos que comprobaron voluntariamente las soluciones en los enunciados (CC. XII. 1).

  Es casi seguro que lo anterior es atribuible, en parte, a las actividades desarrolladas anteriormente en nuestra propuesta didáctica alternativa. Son alumnos que sí que entienden que el álgebra es un instrumento y que lo importante es solucionar el problema real planteado.

- Algunos alumnos presentaron deficiencias de vocabulario algebraico básico, así como en el uso de la puntuación ortográfica, que privaban de sentido a lo que se escribía.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que la expresión lingüística de los conceptos y de los procedimientos algebraicos está poco valorada en la enseñanza habitual del álgebra escolar.

- Algunos alumnos presentaron deficiencias en el manejo de unidades y deficiencias de comprensión de las relaciones entre las unidades que aparecen en los textos de los problemas algebraicos.

- Abundaron los alumnos que no aplicaron el método de resolución de sistemas (igualación, sustitución o reducción) más adecuado según sea la forma del sistema planteado.

  Pensamos que lo anterior es atribuible, en parte, a que no se suele trabajar, en la enseñanza habitual, qué método es el más adecuado en cada caso.

- Hay alumnos que no dominan los métodos de resolución de sistemas (CC. XI. 1.5.1, CC. XI. 1.5.2 o CC. XI. 1.5.3) debido a que no comprenden las técnicas que en tales métodos se utilizan.

- Hubo alumnos que, en los problemas algebraicos de comparación, interpretaron erróneamente "situaciones hipotéticas de desigualdad paralelas en el tiempo" como "situaciones de desigualdad consecutivas en el tiempo" También hay alumnos que interpretaron la acción hipotética de dar como una ganancia o una pérdida sólo para una de las partes.

  Todo lo anterior es atribuible, en parte, a que es más difícil la representación de situaciones hipotéticas que de situaciones reales presentes y, en parte, a que tales problemas algebraicos de comparación no pueden ser planteados formalmente bien mediante una transcripción literal –palabra a palabra-.

- Todos los alumnos aplicaron el método algebraico de plantear y resolver como primera opción. Algunos incluso plantearon ecuaciones inventadas e incoherentes con el enunciado del problema cuando faltan datos en éste para la aplicación del método algebraico.

  Consideramos que lo anterior es atribuible, en parte, al amplio uso y al prestigio del método algebraico en la enseñanza habitual.

- Hay alumnos que, cuando no pueden resolver un problema algebraico mediante el método algebraico, resuelven el problema mediante el tanteo aritmético (CC. IV. 2) que utilizaron como 2ª opción cuando el método algebraico no sirve.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a la persistencia de una capacidad natural para resolver aritméticamente los problemas sobre situaciones del mundo real cuando el método algebraico no es aplicable y es atribuible, en parte, a nuestra propuesta curricular alternativa que les hace entender los problemas como relaciones entre números conocidos y desconocidos.

V.9. Actividad 8

A) Actividad propuesta

ACTIVIDAD 8: INVENCIÓN DE ENUNCIADOS DE PROBLEMAS

Actividad 8.1: Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Rellena adecuadamente los espacios en blanco de forma que el anterior sistema de ecuaciones sería el que tendrás que escribir para plantear el siguiente problema con dos ecuaciones y dos incógnitas: "En una terraza sirven bocadillos y refrescos. Se sabe que ___ bocadillos y ___ refrescos cuestan ___ euros y que ___ bocadillos y ___ refresco cuestan ___ euros. Calcula el precio de ________ y de ________."

Actividad 8.2: Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 150 \\ 1.5x - 0.5y = 125 \end{cases}$

Rellena adecuadamente los espacios en blanco de forma que el anterior sistema de ecuaciones sería el que tendrás que escribir para plantear el siguiente problema con dos ecuaciones y dos incógnitas: "Un examen tipo test consta de __ preguntas y se evalúa sumando __ puntos por cada acierto y restando __ puntos por cada fallo. Llamamos x al número de preguntas acertadas y llamamos y al número de preguntas falladas. Hemos tenido como puntación final de __ puntos."

Actividad 8.3: Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y=25 \\ 4x+2y=80 \end{cases}$

Inventa un enunciado en el utilices las siguientes palabras:
-granja
-ovejas
-gallinas

Actividad 8.4: Dado el sistema $\begin{cases} 2.5x+1.5y=32.5 \\ x+y=15 \end{cases}$

Inventa un enunciado en el utilices las siguientes palabras:
-vendidos
-bocadillos de jamón
-bocadillos de tortilla
-euros

Actividad 8.5: Dado el sistema $\begin{cases} x-5=3(y-5) \\ x+1=2(y+1) \end{cases}$

Inventa un enunciado en el que hables de:
-edad de Juan
-edad de Pedro

Actividad 8.6: Inventa un enunciado en el que hables de:
-coches
-motos
-faros delanteros

Cuadro V.8. Enunciados de la actividad 8

B) Criterios de evaluación

-Criterios de evaluación de las actividades 8.1 y 8.2

- 0) No asiste a clase.
- 1) Rellena adecuadamente los espacios en blanco.
- 3) Rellena equivocadamente los espacios en blanco.
- 4) No contesta.

-Criterios de evaluación de las actividades 8.3, 8.4 y 8.5

- 0) No asiste a clase.
- 1) Inventa un enunciado bien relacionado con los datos que se le daban.
- 2) Inventa un enunciado bien relacionado con los datos que se le daban pero se expresa mal o no pregunta cuáles son los datos que hay que hallar.
- 3) Escribe un enunciado mal relacionado con los datos que se le daban.
- 4) No contesta.

-Criterios de evaluación de la actividad 8.6

- 0) No asiste a clase.
- 1) Inventa un enunciado bien planteado y la solución de dicho enunciado tendría sentido.
- 2) Inventa un enunciado bien planteado y la solución de ese enunciado tendría sentido pero el alumno se expresa mal.
- 3) Escribe un enunciado mal planteado.
- 4) No contesta.

C) Resultados

Dado cierto sistema de ecuaciones completo y dado cierto enunciado incompleto sin datos numéricos, tenían que rellenar adecuadamente los espacios en blanco del enunciado para que sistema y enunciado fueran coherentes.				
Calificación	**0**	**1**	**3**	**4**
Actividad 8.1	0 (0%)	33 (100%)	0 (0%)	0 (0%)
Actividad 8.2	0	28 (84%)	5 (15%)	0 (0%)

Tabla V.48. Resultados de las actividades 8.1 y 8.2

-Actividad 8.1:

Destacamos que el porcentaje de respuestas correctas baja desde el 100% en la actividad 8.1 al 84% en la actividad 8.2. Además, ese descenso del 15% en el porcentaje de respuestas correctas se correlaciona con el aumento de las respuestas incorrectas desde un 0% en la 8.1 hasta un 15% en la 8.2.

Atribuimos lo anterior, en parte, a que el orden gramatical y el orden algebraico coinciden en la primera actividad pero no en la segunda.

-Actividad 8.2:

- Hay 3 respuestas incorrectas (el 9% del total) que son exactamente como la siguiente respuesta del alumno A06:

  "*Un examen tipo test consta de* *<u>125</u>* *preguntas y se evalúa sumando* *<u>1.5</u>* *puntos por cada acierto y restando* *<u>0.5</u>* *puntos por cada fallo. Llamamos x al número de preguntas acertadas y llamamos y al número de preguntas falladas. Hemos tenido como puntación final de* *<u>150</u>* *puntos*".

  Destacamos que el 125 de la ecuación $1.5x - 0.5y = 125$ se interpreta como el número total de preguntas del examen, en vez de como la puntuación total que obtiene el examinado que acierta "x preguntas" y falla "y preguntas" -dándosele 1.5 puntos por cada pregunta acertada y quitándosele 0.5 puntos por cada pregunta fallada-. Atribuimos el error anterior a que, probablemente, las ecuaciones se interpretan como oraciones gramaticales abreviadas y, por ello, el 125 de la ecuación $1.5x - 0.5y = 125$ se coloca en el espacio en blanco que está físicamente más próximo, en el enunciado, a los espacios en blanco en los que se han escrito los números 1.5 y 0.5, que representan los puntos que dan y quitan por cada pregunta acertada y fallada.

- Hay 2 respuestas incorrectas (el 6% del total) que son exactamente como la siguiente del alumno A21:

  "*Un examen tipo test consta de 100 preguntas y se evalúa sumando 1.5 puntos por cada acierto y restando 0.5 puntos por cada fallo. Llamamos x al número de preguntas acertadas y llamamos y al número de preguntas falladas. Hemos tenido como puntación final de 125 puntos*".

  De la anterior respuesta, destacamos que se inventa un dato nuevo (100) y se deja sin utilizar un dato que sí se les da (150). Como, en los problemas de la enseñanza habitual, no suelen ni faltar ni sobrar datos, probablemente, en ambas respuestas se ha sustituido 150 por 100 por despiste.

Dado cierto sistema de ecuaciones, tenían que inventar un enunciado en un contexto indicado:					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Actividad 8.3	0 (0%)	16 (48%)	9 (27%)	8 (24%)	0 (0%)
Actividad 8.4	0 (0%)	18 (54%)	0 (0%)	10 (30%)	5 (15%)
Actividad 8.5	0 (0%)	9 (27%)	8 (24%)	9 (27%)	7 (21%)

Tabla V.49. Resultados de las actividades 8.3, 8.4 y 8.5

Tras examinar la anterior tabla V.49, destacamos que:

- El porcentaje de respuestas correctas es el 48% en la actividad 8.3 -sobre recuentos de animales- y el 54% en la 8.4 -sobre cálculos de precios- y desciende a un 27% en la 8.5 -sobre igualdades hipotéticas, basadas en factores de corrección, entre las edades pasadas y futuras de dos personas-. El reducido 27% de la 8.5 es atribuible, probablemente, a que es difícil comprender igualdades hipotéticas basadas en factores de corrección.

- El porcentaje de respuestas incompletas del 0% en la actividad la 8.4 es atribuible, en buena medida, a que están acostumbrados a expresarse en contextos comerciales de precios. El 24% de la actividad 8.5 es probablemente atribuible a lo ya indicado en el punto anterior: es difícil comprender igualdades hipotéticas basadas en factores de corrección.

- El porcentaje de respuestas incorrectas oscila, de manera muy uniforme, entre el 25% y el 30% en las tres actividades.

- El porcentaje de respuestas en blanco aumenta desde un 0% en la actividad 8.4 a un 15% en la 8.5 y a un 21% en la 8.6. Por la lectura de la fichas nº 15 y nº 16 del Anexo III, descartamos que las respuestas en blanco sean atribuibles a la falta de tiempo o de interés. Probablemente, las actividades se dejaron en blanco porque no se supo como responderlas.

- El aumento de respuestas en blanco desde el 0% de la actividad 8.3 al 15% de la 8.4 es atribuible, en parte, a que:

  -En la actividad 8.3, al no exigir el uso de la palabra "*patas*", no es necesario comprender la realidad biológica de los animales. Basta con escribir expresiones casi literalmente apegadas a la realidad matemática de las ecuaciones del tipo "cuatro veces el número de tales animales más dos veces el de tales otros suman…".

  -En la actividad 8.4, al exigir el uso de la palabra "*euros*", es necesario comprender la realidad económica de la situación comercial.

- El aumento de respuestas en blanco desde el 15% de la actividad 8.4 al 21% en la 8.5 es atribuible, en buena medida, a que pasamos de la invención de un problema comercial basado en igualdades reales, a la invención de un problema de edades basado en unas igualdades hipotéticas y que, por tanto, exigen la representación simultánea de dos realidades: la que es y la que podría ser.

-Actividad 8.3:

- Hay 15 respuestas (el 45% del total) en las que la ecuación $4x+2y=80$ se describe diciendo que el número total de patas es 80, sin nombrar los coeficientes 4 y 2, esto es, sin dar explicaciones innecesarias sobre el número de patas que tiene cada oveja y cada gallina. Son enunciados inventados que se despegan del mundo matemático de las ecuaciones y se ligan a la realidad biológica de las ovejas y de las gallinas. Veamos dos ejemplos representativos:

  -"*En una granja, si sumas el nº de ovejas y gallinas tienes 25 animales. El nº total de patas es 80. Halla el nº de ovejas y gallinas.*" (Alumno A06)

  -"*En una granja tenemos 25 animales en total: ovejas y gallinas. Las patas de las gallinas y de las ovejas suman 80 patas en total. ¿Cuántas ovejas y gallinas hay?*" (Alumno A09)

- Hay una respuesta en la que la ecuación $4x+2y=80$ se describe en términos hipotéticos de cuadriplicar el nº de ovejas y de duplicar el nº de gallinas.

  Es un enunciado inventado que se despega muy poco del mundo matemático de las ecuaciones. Veamos tal respuesta, la del alumno A04: "*En una granja, entre ovejas y gallinas, hay 25 animales. ¿Cuántos animales hay de cada, si al multiplicar las ovejas por 4 y las gallinas por 2, habría 80 animales?*".

  Destacamos que, en esta respuesta del alumno A04:

  -Es negativo que no se use el significado biológico de la ecuación $4x+2y=80$ como recuento del número total de patas.

  -Es positivo que se exprese bien la hipótesis sobre el número total de animales que habría si se cuadriplicase el número de ovejas y se duplicase el de gallinas.

- Hay una respuesta en la que se describe correctamente el sistema de ecuaciones como el recuento del número de animales y de patas pero en la que omite preguntar cuáles son los valores que deben ser hallados. Atribuimos la omisión, en parte, a que la invención de enunciados es una actividad que no se suele practicar en la enseñanza habitual.

- Hay 5 respuestas incompletas (el 15% del total) en las que la ecuación $4x+2y=80$ se describe bien como el recuento del número total de patas -sin que se nombre los innecesarios 4 y 2- pero en las que la ecuación $x+y=25$ es descrita mediante oraciones mal expresada del tipo "*hay 25 ovejas y gallinas*"

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se habla de cuadriplicar y de duplicar el número de animales, pero con errores expresivos y en las que, además, no se pregunta qué valores deben ser calculados. Son respuestas muy apegadas al mundo matemático de las ecuaciones:

  -"*el nº de ovejas + el nº de gallinas es igual a 25. Más tarde hay el cuadriple de ovejas y el doble de gallinas con un total de 80 animales en la granja*" (Alumno A25)

  -"*en una granja, el numero de ovejas y de gallinas juntas es 25. Si llevan un numero de ovejas y de gallinas a la granja. el numero de ovejas es 4 veces el que habia antes y el de gallinas es el doble del que habia antes y ahora son 80 los animales*" (Alumno A18)

- Hay una respuesta incompleta en la que también se expresa mal la condición de cuadriplicar y de duplicar el número de animales, pero sin olvidar preguntar qué valores deben ser hallados: "*En una granja hay un total de 25 animales y ovejas el doble de ovejas más el cuadruple de gallinas es igual a 80 ¿Cual es el nº de ovejas y gallinas?*" (Alumno A26)

- Hay 2 respuestas (el 6 % del total) en las que el miembro derecho de la ecuación $4x+2y=80$ se describe como el aumento del número de animales y el miembro izquierdo de esa misma ecuación se describe como la suma de los que había más los añadidos, identificándose ambas cantidades como iguales. Veamos una respuesta representativa: "*En una granja hay un nº desconocido de ovejas y de gallinas, en total tiene 25. Le regalan al dueño de la granja 4 veces más ovejas que tenía y 2 veces más de gallinas que tenía. Si en total ahora tiene 80, ¿cuántas ovejas y gallinas había al principio?*" (Alumno A17)

- Hay 2 respuestas (el 6 % del total) en las que se omite el dato 80 en el enunciado inventado y en las que se pregunta por dicho dato como la respuesta a calcular, es decir, preguntan cuántas patas hay en total:

  -"*En una granja hay 25 ovejas y gallinas, ¿Cuántas patas hay entre las dos?*" (Alumno A27)

-“*en una granja hay 25 animales. Averigua cuantas patas hay en total si las ovejas tienen 4 patas y las gallinas 2*” (Alumno A32)

Destacamos que, de hecho, ambos alumnos han redactado problemas con muchas soluciones posibles. Como, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, los problemas suelen tener una única solución, es obvio que, probablemente, no comprenden el tipo de enunciado que han inventado.

- Hay 2 respuestas (el 6 % del total) en las que se describe una comparación incoherente con las ecuaciones dadas:

  -“*En una granja el número de ovejas es x y el número de gallinas es y, si las sumamos dan 25 en total. Unas semanas después el número de ovejas es el doble que el de gallinas*” (Alumno A24)

  -“*en una granja hay x ovejas y “y” gallinas y entre todas suman 25. hay cuatro veces el numero de ovejas que el doble de gallinas y da 80*” (Alumno A33)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A24 se dice que “*el número de ovejas es el doble que el de gallinas*”, esto es, se añade arbitrariamente la ecuación $x = 2y$.Sin embargo, no se describe la ecuación $4x + 2y = 80$ que sí que estaba en la actividad.

  -En la respuesta del alumno A33 se dice que “*hay cuatro veces el numero de ovejas que el doble de gallinas y da 80*”, esto es, se añade arbitrariamente la expresión $4x = 2y = 80$. Lo anterior es atribuible, probablemente, a que se cree que se ha descrito la expresión $4x + 2y = 80$.

- Hay 2 respuestas incorrectas (el 6 % del total) en las que se interpreta erróneamente la ecuación $4x + 2y = 80$ en términos no comparativos:

  “*En una granja hay un nº desconocido de ovejas y de gallinas. Al dueño de la granja le han vendido 4 ovejas más de las que tenía y 2 gallinas más de las que tenía. Si ahora el total de las gallinas y las ovejas son 80. ¿Cuántas ovejas y gallinas habia?*” (Alumno A30)

  -“*Hay 25 animales sumados ovejas y gallinas si unas se cuatriplica y otras paren una cria. Cuantas ovejas y gallinas hay?*” (Alumno A07)

  Destacamos que, en la respuesta del alumno A30, la ecuación $4x + 2y = 80$ se traduce como que “*le han vendido 4 ovejas más de las que tenía y 2 gallinas más de las que tenía. Si ahora el total de las gallinas y las ovejas son 80.*”, esto es, se describe, de hecho, la ecuación $4 + x + 2 + y = 80$, en vez de describirse la ecuación $4x + 2y = 80$.

-Actividad 8.4:

- Hay 17 respuestas correctas (el 54% del total). Veamos dos ejemplos representativos:

  -“*En una cafetería se han vendido 15 bocadillos de jamón y de tortilla: El de jamón se vende a 2.5 € y el de tortilla a 1.5 € si en total se han gastado 32.5 € ¿Cuántos bocadillos de jamón se han vendido? ¿y de tortilla?*” (Alumno A11)

  -“*Sabemos que un bocadillo de jamón cuesta 2´5 € y uno de tortilla 1´5 €. Si en total hemos pagado 32´5 € y hemos comprado 15 bocadillos, ¿cuántos bocadillos de cada tipo hemos comprado.*” (Alumno A01)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A11 aparece un enunciado que es una traducción casi literal -palabra a palabra- de las ecuaciones dadas: la primera oración gramatical describe la ecuación $x+y=15$ y la segunda ecuación gramatical describe la ecuación $2.5x+1.5y=32.5$.

  -En la respuesta del alumno A01 aparece un enunciado que es una traducción no literal de las ecuaciones dadas: la primera oración gramatical describe sólo los coeficientes de 2.5 y 1.5 de la ecuación $2.5x+1.5y=32.5$, y la segunda oración gramatical describe los términos independientes 32.5 y 15 de las dos ecuaciones.

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que falta la descripción de la ecuación $x+y=15$. Puede ser consecuencia de un despiste o de que dicha ecuación no se supo interpretar en el contexto comercial del problema. Veamos un ejemplo representativo: “*averigua cuantos bocadillos de cada se han vendido si los de jamón cuestan 2,5 € y los de tortilla 1,5 € y tienen un total de 32,5 €.*” (Alumno A32)

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que falta el término independiente 32.5. Puede ser consecuencia de un despiste o de que dicho número 32.5 no se sabía encajar en la situación comercial del problema. Veamos un ejemplo representativo: “*En una cafeteria han vendido 15 bocadillos. Los bocadillos de jamón cuestan 2,5 € y los de tortilla 1,5 €. ¿Cuantos bocadillos han vendido de cada?*” (Alumno A02)

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que faltan los coeficientes 2.5 y 1.5:

  -“*Julia ha vendido bocadillos de jamón y de tortilla por 32´5 €. Si ha vendido 15 bocadillos de las dos clases ¿cuánto cuesta cada uno?*” (Alumno A25)

  -“*José ha vendido x bocadillos de jamón y de tortilla, en total ha vendido 15 recaudado 32´5 €. ¿Cuántos bocadillos de jamón ha vendido en total?*” (Alumno A24)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A25 se omite escribir los coeficientes de $2.5x + 1.5y = 32.5$ porque, equivocadamente, se piensa que los precios de cada tipo de bocadillo son los valores a calcular.

-En la respuesta del alumno A24, además de escribirse las letras x e y en el enunciado, se omite escribir los precios respectivos 2.5 € y 1.5 € de cada bocadillo.

- Hay una respuesta en la que los términos independientes descritos son 15 y 15, en vez de 32.5 y 15: "*Pedro compra boc. de jamon por 2.5 € y bocadillos de tortilla a 1.5 € y se ha gastado 15 € y entre todo hay 15 bocadillos que le han vendido*" (Alumno A19)

  Destacamos que, como la redacción del enunciado es correcta, probablemente se cambia 32.5 € por 15 € por despiste.

- Hay una respuesta que no ha sido terminada: "*En un bar. hay un nº desconocido de bocadillos de jamón y de tortilla. El precio del bocadillo de jamon es de*" (Alumno A30)

  Como, por la lectura de las fichas nº 15 y nº 16 del Anexo III, sabemos que no hubo falta de tiempo o de motivación, la no finalización de la respuesta anterior es atribuible a deficiencias de comprensión.

- Hay 5 respuestas en blanco (el 15% del total).

  Por la lectura de fichas nº 15 y nº 16 del Anexo III, descartemos la falta de tiempo o de motivación como explicación de ese 15% de respuestas en blanco, que puede atribuirse, en buena medida, a que hay alumnos que no comprenden la situación comercial a la que alude el problema.

-Actividad 8.5:

- Hay 9 respuestas correctas (el 27% del total). En ellas, se habla de igualdades hipotéticas que podrían establecerse mediante factores de corrección entre las edades futuras y pasadas de dos personas.

- Hay 8 respuestas (el 24% del total) en las que se han descrito gramaticalmente bien las ecuaciones pero se ha omitido la pregunta del enunciado. Atribuimos la ausencia de la pregunta del enunciado, en parte, a que la invención de enunciados de problemas es una actividad que no se suele realizar en la enseñanza habitual del álgebra escolar.

- Hay 2 respuestas incorrectas (el 6% del total) en las que se copia mal algún dato al describir las ecuaciones:

-“*Hace cinco años la edad de Pedro era el doble que la de Juan y dentro de un año la edad de Pedro sera el doble que la de Juan*” (Alumno A03)

-“*La edad de Juan hace 5 años era 3 veces la de Pedro y dentro de 4 años edad de Juan sera el doble que la de Pedro ¿Cuantos años tienen?*” (Alumno A27)

Destacamos que la respuesta del alumno A03 sería correcta si, donde se escribe “…*doble*…y…*doble*…”, se escribiese “…*triple…y…doble*…” y que la respuesta del alumno A27 lo sería si, donde se escribe “…*dentro de 4 años*”, se escribiese “…*dentro de 1 año*” Como el enunciado está bien concebido y expresado, es probable que el error sea consecuencia de un despiste.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que hay dos o tres palabras erróneas que hacen que la descripción sea incoherente con las ecuaciones dadas:

-“*Hace 5 años la edad de juan era 3 veces la edad de Pedro menos 5. Dentro de un año la edad de Juan sera dos veces la de Pedro ¿Cuántos años tiene cada uno?*” (Alumno A12)

-“*hace 5 años Juan tenía el triple de edad que su hijo pedro dentro de un año Juan tendra el doble de la edad de su padre ¿Cuántos años tienen los dos ahora?*” (Alumno A23)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A12, al añadir la expresión “*menos 5*”, al final de la primera oración gramatical, se describe $x-5=3(y-5)-5$, en vez de $x-5=3(y-5)$.

-En la respuesta del alumno A23 se dice que “*Juan tendrá el doble de edad de su padre*” Nadie puede tener el doble de edad que su propio padre.

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que el miembro $x-5$ de la ecuación $x-5=3(y-5)$ se interpreta como si él solo expresase una comparación entre las edades de los dos y, además, se interpretan mal, o no se interpretan, el resto de las expresiones. Veamos dos ejemplos representativos:

-“*Juan tiene 5 años menos que Pedro. Dentro de 3 años Pedro tendrá cinco años menos que Juan. Juan tiene 1 años mas que Pedro. Dentro de 2 años Pedro tiene un año mas que Juan*” (Alumno A02)

-“*Pedro tiene 5 años menos que Juan. Y Juan tiene el triple de años que Pedro ¿Cuántos años tiene cada uno?*” (Alumno A25)

Destacamos que, en ambas respuestas, el polinomio $x-5$ se describe como si de una ecuación completa se tratase. Estamos ante un déficit total de comprensión del significado del signo = y, por tanto, ante un déficit de comprensión del concepto mismo de ecuación.

- Hay 7 respuestas (el 21% del total) en blanco. Por la lectura de las fichas nº 15 y nº 16 del Anexo II "Diario de Clase", descartamos la falta de tiempo o de motivación como causante de este porcentaje de respuestas en blanco. Dicho 21% puede atribuirse, en parte, a que es difícil inventar enunciados sobre igualdades hipotéticas basadas en factores de corrección.

Actividad 8.6: Sin darles ningún sistema de ecuaciones, se tenía que inventar un enunciado en el que utilizasen las palabras coches, motos y faros delanteros en el contexto de un garaje					
Calificación:	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Nº de respuestas	0	17	7	4	5
%	0%	51%	21%	12%	15%

Tabla V.50. Resultados de la actividad 8.6

-Actividad 8.6:

- Hay 12 respuestas (el 36% del total) en las que se inventan enunciados -sobre el número desconocido de coches y el de motos que hay en un garaje- que se plantearían como sistemas de ecuaciones 2x2 y cuya su solución sería dos números enteros positivos. Son enunciados cuyas soluciones, enteras y positivas, tienen sentido físico en un garaje pues, evidentemente, el número desconocido de coches y de motos deben ser números enteros y no negativos.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se inventan enunciados -sobre el número desconocido de coches y el de motos que hay en un garaje- que se plantearían como sistemas de ecuaciones 2x2 y cuya su solución sería un número entero positivo y un cero. Son enunciados formalmente correctos porque la solución "*cero coches*" -o "*cero motos*"- tiene un significado físico correcto. Sin embargo, es dudoso que "*cero*" sea una solución deseada por los que inventaron tales enunciados porque, cuando en un problema escolar se habla de dos tipos de objetos -coches y motos-, suele haber al menos uno de cada tipo.

- Hay una respuesta en la que se inventa un enunciado que se plantearía como una ecuación con una incógnita cuya solución sería que hay un número entero positivo de motos en un garaje. Veamos tal respuesta, la del alumno A01:

  "*En un parking hay 20 coches y x motos, si en total hay 50 faros delanteros ¿cuántas motos hay?*".

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se inventan problemas aritméticos:

  -"*Hay 20 motos y 30 coches. ¿cuantos faros delanteros hay?*" (Alumno A07)

  -"*En un garaje hay un nº desconocido de motos y de coches. Sabiendo que faros delanteros de los coches hay 24 y faros delanteros de motos hay 10. ¿Cuántos coches y motos hay?*" (Alumno A17)

Destacamos que:

-El primer problema, el de la respuesta del alumno A07, puede resolverse mediante las tres sencillas operaciones aritméticas siguientes: $20 \cdot 1 = 20$ faros delanteros de motos, $30 \cdot 2 = 60$ faros delanteros de coches y 20+60= 80 faros delanteros en total.

-El segundo problema, el de la respuesta del alumno A17, puede resolverse mediante las dos sencillas operaciones aritméticas siguientes: $24 : 2 = 12$ coches y $10 : 1 = 10$ motos.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se inventan enunciados, que están bien expresados, pero que se plantearían como sistemas de ecuaciones 2x2 cuya solución sería que hay un número entero negativo de coches o de motos en un garaje, lo cual carece de significado físico real. Veamos un caso representativo: "*El nº de coches y de motos en el taller es 25. El nº de faros en total en el garage es 100. Halla el nº de coches y motos.*" (Alumno A05)

  Destacamos que el enunciado anterior se formularía como el sistema $\begin{cases} 2x + y = 100 \\ x + y = 25 \end{cases}$ cuya solución sería $\begin{cases} x = 75 coches \\ y = -50 motos \end{cases}$.

- Hay una respuesta en la que se inventa un enunciado, que está bien expresado, pero que se plantearía como un sistema de ecuaciones 2x2 cuya solución sería que hay un número fraccional de coches o de motos en un garaje, lo cual carece de significado físico real. Veámosla: "*Hay en total 6 faros delanteros y el nº de coches es el doble que el de motos ¿Cuántos coches y motos hay?*" (Alumno A25)

  Destacamos que el enunciado anterior se formularía como el sistema $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x = 2y \end{cases}$ cuya solución sería $\begin{cases} x = \frac{12}{5} coches \\ y = \frac{6}{5} motos \end{cases}$.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se describe un sistema de una ecuación con dos incógnitas:

  -"*Tenemos x coches y "y" motos y entre los faros nos dan 10. Si los coches tienen 2 faros y las motos 1. Cuantos coches y motos hay.*" (Alumno A33)

  -"*En un garaje hay coches y motos. Averigua el número de coches y motos si hay el triple de coches que de motos*" (Alumno A15)

  -"*En un garaje el número de motos es el doble que el de coche. Y el número de faros delanteros de la moto es igual que los del coche*" (Alumno A24)

  Destacamos que:

-El primer problema, la respuesta del alumno A33, puede formularse como el sistema $\{2x+y=10$, con un número infinito de soluciones.

-El segundo problema, la respuesta del alumno A15, puede formularse como el sistema $\{x=3y$, con un número infinito de soluciones.

-El tercer problema, la respuesta del alumno A24, puede formularse como el sistema $\{x=2y$, con un número infinito de soluciones.

Destacamos que, como los problemas del álgebra escolar suelen ser planteados como sistemas compatibles determinados, es casi seguro que:

-Los alumnos A33 y A15 creen describir un sistema compatible determinado porque redactan dos oraciones gramaticales sobre la situación real del garaje, sin comprender que una de las dos oraciones (la oración "*Si los coches tienen 2 faros y las motos 1*" en el caso del alumno 33 y la oración "*En un garaje hay coches y motos*") son sólo descripciones físicas en las que no se relacionan cantidades desconocidas de objetos mediante el signo =, que es lo que define el concepto de ecuación.

-El alumno A24 también cree describir un sistema compatible determinado porque redacta dos oraciones gramaticales sobre la situación real del garaje, sin comprender que, como decide que x e y sean el número de coches y de motos, la oración gramatical "*el número de faros delanteros de la moto es igual que los del coche*" no se plantearía como una ecuación algebraica sino como una identidad aritmética del tipo 2=2, que, por ejemplo, se correspondería con la idea de que cada coche y cada moto tendrían el mismo número de faros delanteros: 2.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se escribe un enunciado cuyo significado es incorrecto:

-"*Tenemos 5 coches y 9 motos en un garaje. En total tenemos 19 faros delanteros. ¿Cuántos faros tiene cada coche y cada moto?* $\begin{cases}5x+9y=19\\x+y=14\end{cases}$" (Alumno A09)

-"*En un concesionario hay coche y moto, las motos tienen 2 faros y los coches dos ¿Cuantas hay?*" (Alumno A27)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A09, hay una contradicción: Como se dice que hay 5 coches y 9 motos, la ecuación $5x+9y=19$ se formula pensando que $x=2$ e $y=1$ (es decir, que x e y son el número de faros de cada coche y de cada moto) pero la ecuación $x+y=14$ se formula pensando que $x=5$ e $y=9$ (es decir, que x e y son el número de coches y de motos).

-En la respuesta del alumno A27, se pretende que se averigüe cuántas motos en un concesionario a partir de la declaración de que cada moto tiene 2 faros y cada coche tiene 2 faros. Lo anterior denota un muy bajo nivel de comprensión.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que escriben enunciados que se tendrían que formular con tres incógnitas:

  -"*En un garaje hay 200 coches y motos calcula los faros que hay en el garaje sabiendo que los coches tienen dos faros y las motos uno.*" (Alumno A23)

  -"*En un garaje hay un numero de coches y motos ¿Cuántos faros tendrá si el numero de coches es el triple que el de motos?*" (Alumno A10)

  Destacamos que:

  -El primer problema, la respuesta del alumno A23, podría ser formulado como el sistema $\begin{cases} z = 2x + y \\ x + y = 200 \end{cases}$ con $\begin{cases} x = n^{o}\, coches \\ y = n^{o}\, motos \\ z = n^{o}\ faros \end{cases}$.

  -El segundo problema, la respuesta del alumno A10, podría ser formulado como el sistema $\begin{cases} z = 2x + y \\ x = 3y \end{cases}$ con $\begin{cases} x = n^{o}\, coches \\ y = n^{o}\, motos \\ z = n^{o}\ faros \end{cases}$.

  Como se trata de alumnos de 3º de secundaria, que no saben resolver sistemas 3x3, probablemente, en ambos casos, no se comprende bien qué es lo que se ha escrito.

- Hay 5 respuestas en blanco (el 15% del total). De la lectura de las fichas nº 15 y nº 16 del Anexo II "Diario de Clase", descartamos que ese porcentaje de respuestas en blanco se deba a la falta de tiempo o de interés. Ese 15% es atribuible, probablemente, a que no se comprende cómo se podían establecer relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas en un garaje.

D) Análisis de la comprensión de contenidos (CC)

- Fue habitual que los alumnos redactaran mal los textos de los problemas algebraicos que inventaron (CC. XVII): errores de puntuación ortográfica, incorrecta utilización de tiempos verbales…

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que no se suele trabajar bien, en la enseñanza habitual, la corrección del lenguaje natural o materno que se emplea en el aula.

- Fueron mayoría los estudiantes que, al inventar enunciados de problemas algebraicos (CC. XVII), omitieron la realización de la pregunta sobre lo que hay que calcular.

Opinamos que lo anterior es atribuible, en parte, a que la invención de enunciados es una actividad novedosa que no se suele practicar en la enseñanza habitual del álgebra escolar.

- Una minoría de alumnos, al inventar enunciados de problemas algebraicos (CC. XVII), incluyó el primer paso de la resolución -la asignación de las variables x e y - como parte del enunciado que inventaron.

  Este hecho es atribuible, en parte, a que la invención de enunciados es una actividad novedosa que no se suele practicar en la enseñanza habitual del álgebra escolar.

- Hubo algunos alumnos que inventaron enunciados de problemas algebraicos (CC. XVII) que describen sistemas compatibles indeterminados (de 1 ecuación con 2 incógnitas o de 2 ecuaciones con 3 incógnitas) cuando lo que pretendían era describir sistemas compatibles determinados.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que los estudiantes, muchas veces, no analizan lo escrito.

- Algunos alumnos, al inventar enunciados de problemas condicionados por unas ecuaciones que les proporcionamos (CC. XVII. 2.1), refirieron los coeficientes de las ecuaciones a operaciones matemáticas, -por ejemplo: el número de gallinas se duplica, el de ovejas se cuadriplica…-, en vez de referirlos a relaciones físicas entre objetos reales, -por ejemplo: el número de patas de gallina, el número de patas de ovejas…-.

  Este hecho es atribuible, en parte, a que mientras que lo primero sólo requiere una traducción literal –símbolo a símbolo- de la ecuación, lo segundo exige una comprensión precisa de las relaciones cuantitativas en la situación real –física o económica- del problema.

- Algunos alumnos, al inventar enunciados de problemas condicionados por unas ecuaciones que les proporcionamos (CC. XVII. 2.1), pensaron que cada oración gramatical debía ser siempre la expresión de cada una de las ecuaciones, sin entender que, a veces, una oración gramatical puede contener datos de más de una ecuación o puede sólo describir parte de una ecuación o puede no contener dato alguno.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, muchos enunciados de los problemas coinciden literalmente -palabra a palabra- con las ecuaciones mediante las que se plantean.

- La mayoría de los estudiantes, al inventar enunciados de problemas condicionados por unas ecuaciones que les proporcionamos (CC. XVII. 2.1), describió bien las ecuaciones correspondientes a los problemas algebraicos de recuentos pero cometió errores cuando interpretaron las ecuaciones correspondientes a los problemas algebraicos de comparación de cantidades.

Lo anterior es atribuible, en parte, a que mientras que los problemas de recuentos sólo requieren entender situaciones actuales, los problemas de comparación exigen la comprensión de situaciones actuales, la de situaciones hipotéticas que podrían ocurrir y la del papel de los coeficientes de corrección, –aditivos, multiplicativos, …-, como nexos que relacionan las situaciones reales actuales con las hipotéticas.

- Algunos alumnos, al inventar enunciados de problemas condicionados por unas ecuaciones que les proporcionamos (CC. XVII. 2.1), redactaron enunciados correctos que no son transcripciones literales de tales sistemas. En ellos, por ejemplo, se omiten datos fácilmente deducibles del contexto real, -por ejemplo: el número de patas de cada gallina-, o se expresan datos pertenecientes a ecuaciones diferentes dentro de una misma oración gramatical.

  El logro anterior es atribuible, en parte, a que nuestra propuesta favorece, mediante la práctica de la resolución por tanteo aritmético y la práctica de la comprobación, la comprensión de las ecuaciones como relaciones entre cantidades de objetos en un contexto real.

- Son escasos los alumnos que, al inventar enunciados de problemas que no estaban condicionados por ecuación alguna (CC. XVII. 2.2), escribieron problemas aritméticos. Casi todos, en tales situaciones, redactaron problemas algebraicos.

  La anterior tendencia a redactar enunciados algebraicos es atribuible, en parte, a que estamos en un contexto evidentemente algebraico.

- Hubo alumnos que, al inventar enunciados de problemas que no estaban condicionados por ecuación alguna (CC. XVII. 2.2), redactaron problemas en los que los términos independientes de las ecuaciones son valores desconocidos a calcular.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que se perciben los términos independientes de las ecuaciones como resultados porque no se diferencia entre el signo = de la aritmética, que conduce a un resultado y el signo = del álgebra que estable una igualdad entre dos expresiones.

- Una minoría de estudiantes, al inventar enunciados de problemas que no estaban condicionados por ecuación alguna (CC. XVII. 2.2), creyó posible calcular las cantidades de objetos A y B -por ejemplo: coches y motos- a partir de las cantidades de objetos D y E que respectivamente contienen -por ejemplo: 2 faros cada coche y 1 faro cada moto-.

  El error anterior es atribuible, en parte, a un déficit profundo de comprensión lógica.

- Hay alumnos que, al inventar enunciados de problemas que no estaban condicionados por ecuación alguna (CC. XVII. 2.2), redactaron enunciados cuyas soluciones tienen sentido en el contexto real del problema -por ejemplo: un número entero y positivo de coches-.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que algunos alumnos estudian las relaciones aritméticas existentes entre los datos y los valores numéricos de las incógnitas que están estableciendo para inventar los enunciados de los problemas.

- Hay otros alumnos que, al inventar enunciados de problemas que no estaban condicionados por ecuación alguna (CC. XVII. 2.2), redactaron enunciados cuyas soluciones no tienen sentido en el contexto real del problema -por ejemplo: un número fraccional o negativo de coches-.

  El error anterior es atribuible, en parte, a que algunos alumnos sólo prestan atención a la forma algebraica de las ecuaciones que están estableciendo para inventar los enunciados de los problemas, sin estudiar la realidad aritmética de los problemas que están inventando.

V.10. Actividad 9

A) Actividad propuesta

ACTIVIDAD 9: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS INVENTADOS

Actividad 9.1: Un alumno ha inventado el siguiente enunciado:
Juan le dice a Pedro: “En estos momentos yo llevo en mi camión diez sacos más que tú en el tuyo, pero si cada uno dejamos cinco sacos tú llevarás el triple que yo”
9.1.1) Resuelve el problema
9.1.2) ¿Qué respuestas has encontrado?
9.1.3) ¿Cómo mejorarías tú ese enunciado?
9.1.4) ¿Qué respuestas te salen con ese enunciado tuyo?

Actividad 9.2: Un alumno ha inventado el siguiente enunciado:
“El área de un rectángulo es 24 metros cuadrados. Un lado mide 2 metros más que el otro. Calcula la longitud de los lados”.
9.2.1) Resuelve el problema
9.2.2) ¿Qué respuestas has encontrado?
9.2.3) ¿Cómo mejorarías tú ese enunciado?
9.2.4) ¿Qué respuestas te salen con ese enunciado tuyo?

Actividad 9.3: Un alumno ha inventado el siguiente enunciado:
“Pedro tiene 60 años, y su hija Luisa 24. ¿Dentro de cuántos años la edad de Luisa será cuatro veces la de Pedro?”
9.3.1) Resuelve el problema
9.3.2) ¿Qué respuestas has encontrado?
9.3.3) ¿Cómo mejorarías tú ese enunciado?
9.3.4) ¿Qué respuestas te salen con ese enunciado tuyo?

Cuadro V.9. Enunciados de la actividad 9

B) Criterios de evaluación

-Criterios de evaluación de las actividades 9.1.1, 9.1.2, 9.2.1, 9.2.2, 9.3.1 y 9.3.2

- 0) No asiste a clase.
- 1) La resolución del enunciado dado es correcta.
- 2) La resolución del enunciado dado es incompleta o con errores de cálculo.
- 3) La resolución del enunciado dado es incorrecta.
- 4) No contesta.

-Criterios de evaluación de las actividades 9.1.3, 9.1.4, 9.2.3, 9.2.4, 9.3.3 y 9.3.4

- 0) No asiste a clase.
- 1) La mejora del enunciado y la resolución del enunciado mejorado son correctas.
- 2) La mejora del enunciado o la resolución del enunciado mejorado están incompleta o con errores de cálculo.
- 3) La mejora del enunciado o la resolución del enunciado mejorado son incorrectas.
- 4) No contesta.

C) Resultados

9.1.1-9.1.2, 9.2.1-9.2.2 y 9.3.1-9.3.2: Resuelve el problema-¿Qué respuestas has encontrado?					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
9.1.1-9.1.2	0 (0%)	6 (18%)	11(33%)	16 (48%)	0 (0%)
9.2.1-9.2.2	0 (0%)	5 (15%)	8 (24%)	14 (42%)	6 (18%)
9.3.1-9.3.2	0 (0%)	2 (6%)	3 (9%)	4 (12%)	24 (72%)

Tabla V.51. Resultados de las actividades 9.1, 9.2 y 9.3

Tras examinar la anterior tabla V.51, observamos que:

- En todas las actividades anteriores los porcentajes de las respuestas correctas –el 18%, el 15% y el 6% del total- son reducidos y los de las incorrectas -el 48%, el 42% y el 12% del total- son elevados.

  Lo anterior es atribuible, probablemente, a que corregir problemas mal planteados es una actividad que no suele practicar en la enseñanza habitual.

- En la actividad 9.3.1-0.3.2 el porcentaje de respuestas correctas alcanza el mínimo, el 6% del total, y el de respuestas en blanco alcanza el máximo, el 72% del total.

  La lectura de las fichas nº 17 y nº 18 del Anexo II "Diario de Clase" nos informa que no hubo falta de tiempo o de motivación. Probablemente, el anterior 72% de respuestas en blanco es atribuible a que, en los problemas de edades de la enseñanza habitual, el "*número de años que han de transcurrir para que…*" no suele ser una incógnita, sino uno de los datos dados en el enunciado.

-Actividad 9.1.1-9.1.2:

- Hay una respuesta en la que se razona bien porqué ese problema está mal planteado, sin que se planteen las ecuaciones.
- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se plantea bien el problema dado y en las que se afirma que dicho problema está mal planteado. Veamos un ejemplo representativo:

Figura V.57. Respuesta del alumno A29

Destacamos que, en la respuesta anterior, el sistema $\begin{cases} x - y = -10 \\ x - 5 = 3y - 15 \end{cases}$ está bien planteado, que $\begin{cases} x = -10 \\ y = 0 \end{cases}$ son las soluciones correctas de dicho sistema y que se escribe "*Que está mal planteado*". Probablemente, se percibe que el valor de x (el número de sacos que Pedro lleva en su camión) no puede ser negativo y, confiándose en que el planteamiento y la resolución son correctos, se piensa que el error debe de estar en el texto del enunciado.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se intenta plantear las ecuaciones y, sin resolverlas, se razona porqué el problema está mal planteado. Veamos un ejemplo representativo:

"$10x + y - 5x - 5y = 3y \qquad 10x - 5x = 3y + 5y - y \qquad 5x = y$. *Que es imposible que si yo llevo 10 sacos mas que mi compañero y cada uno deja 5 yo* *voy a tener todavía 5 sacos mas y es imposible que el lleva el triple que yo*" (Alumno A18)

- Hay una respuesta en la que se resuelve bien el problema dado y en la que se termina con doble signo de interrogación:

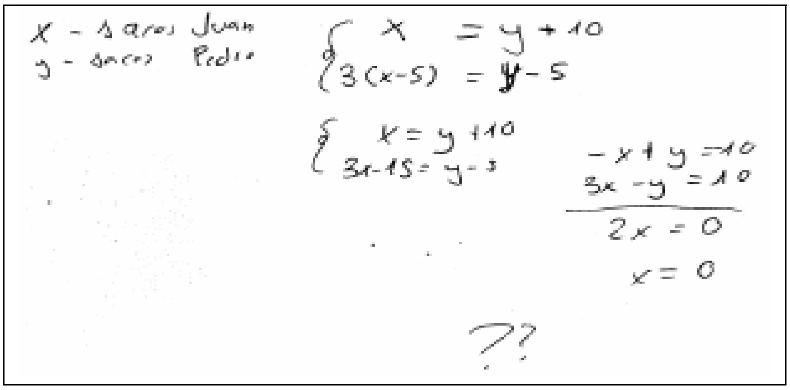


Figura V.58. Respuesta del alumno A04

Destacamos que el sistema $\begin{cases} x - y = -10 \\ x - 5 = 3y - 15 \end{cases}$ está bien formulado, que se obtiene la solución $x = 0$, que no se calcula el valor de la otra incógnita y que se escriben dos signos de interrogación. Probablemente, porque el número 0 no suele aparecer como solución de los problemas de algebra o porque se calcula mentalmente que la letra y -el número de sacos que lleva Pedro- da negativa, se piensa que algo está mal pero no se especifica donde se localiza el error.

- Hay 8 respuestas (el 24% del total) en las que se plantea bien el sistema pero éste se resuelve mal. Veamos la parte final de 3 de esas respuestas:

-"*…-25 y -15 Está mal porque no puede salir negativo.*" (Alumno A14)

-"… $y = 35/2$ *Ninguna, está mal planteado*." (Alumno A28)

-"*…Juan lleva 10 sacos y Pedro 20*" (Alumno A10)

Destacamos que:

-En la 1ª respuesta, la del alumno A14, se percibe que la solución -el número de sacos que se llevan en un camión- no puede ser negativo y, dándose por buena –equivocadamente- la resolución del problema, se considera que el problema está mal redactado. Por eso, se declara que "*está mal*".

-En la 2ª respuesta, la del alumno A28, se percibe que las soluciones de los problemas de álgebra no suelen ser, en la enseñanza habitual, números fraccionarios y, dándose por buena –equivocadamente- la resolución del problema, se considera que el problema está mal redactado. Por eso, se declara que "*está mal planteado*".

-En la 3ª respuesta, la del alumno A10, la solución obtenida –mediante una resolución errónea- se da por buena porque es entera y positiva. No se realiza ningún tipo de comprobación.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se dice que está mal planteado sin aportar argumentación alguna:

  -“*Está mal planteado*” (Alumno A01)

  -“*No se puede hacer, es imposible*” (Alumno A12)

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se comete el error de inversión. Lo anterior es atribuible, probablemente, a que las ecuaciones se interpretan como oraciones gramaticales que han sido escritas abreviadamente, en vez de como igualdades que sólo son ciertas si los factores de corrección se colocan adecuadamente.

- Hay 8 respuestas incorrectas (el 24% del total) en las que se cometen errores distintos del error de inversión. Veamos dos ejemplos representativos:

  -“ $x = CamiónPedro$ $\left.\begin{array}{l} y = 10 + x \\ y - 5 + x - 5 = 3x \end{array}\right\}$ ” (Alumno A19)

  -“ $x = Juan$ $y = Pedro$ $\left\{\begin{array}{l} x = 10 + y \\ x - 5 + y - 5 = 3(x - y) \end{array}\right.$ ” (Alumno A25)

  Destacamos que:

  -Que Juan lleve diez sacos más que Pedro ha sido bien formulado en ambas respuestas.

  -Que si los dos dejan cinco sacos, Pedro lleva el triple de sacos que Juan ha sido mal formulado en ambas respuestas.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que dicen que faltan datos, lo cual es falso. Lo anterior es atribuible, en parte, a que no se sabe plantear el problema.

- Hay una respuesta en la que se plantea bien pero se resuelve mal y en la que se da por buena una solución negativa que no tiene significado real como número de sacos que se llevan en un camión. Veamos la parte final de la respuesta del alumno A11: “*…Juan tiene -10 sacos Pedro tiene 0 sacos*”.
- Hay una respuesta en la que sólo se escribe la asignación de variable.

-Actividad 9.2.1-9.2.2

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que, sin dibujo alguno, el problema geométrico se resuelve bien y hay una respuesta en la que, con la ayuda de un dibujo, el problema geométrico se resuelve bien.

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que se plantea bien el sistema pero no se resuelve bien. Veamos dos ejemplos representativos:

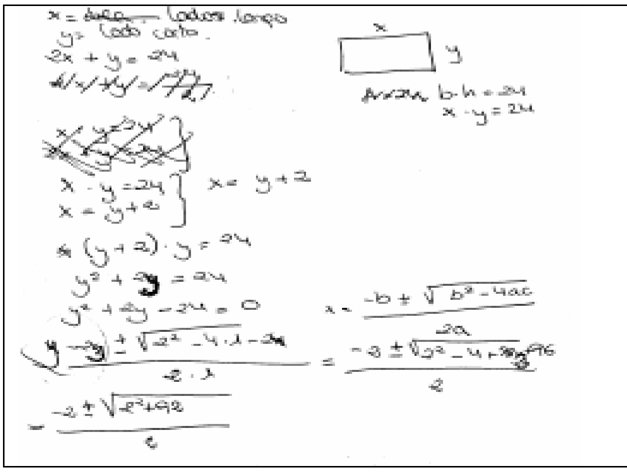


Figura V.59. Respuesta del alumno A31

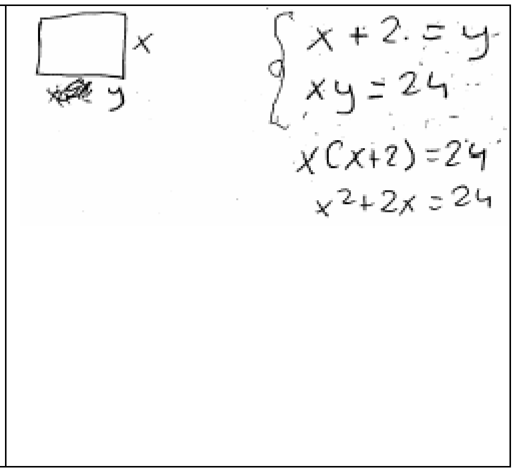


Figura V.60. Respuesta del alumno A04

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A31, se calcula mal el discriminante, escribiéndose 2^2+92, en vez de 100. Lo anterior es atribuible, probablemente, a que no se sabe operar aritméticamente la expresión b^2-4ac cuando a y c son números negativos.

-En la respuesta del alumno A04, no se sabe cómo resolver la ecuación de 2º grado $x^2+2x=24$.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que la ecuación bien planteada $x \cdot y = 24$, al despejar, se transforma en $y = x/24$ Lo anterior es atribuible, en parte, a una aplicación memorística, carente de comprensión, de las reglas para despejar las incógnitas.

- Hay una respuesta en la que sólo plantea bien el sistema, sin intentar resolverlo.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que él área del rectángulo se plantea como $x \cdot x + 2 = 24$ o como $x + 2 \cdot x = 24$ y en las que convierten lo anterior en $x^2 + 2 = 24$ o $3x = 24$. Es decir, no se entiende el significado de la notación algebraica.

- Hay 4 respuestas (el 12% del total) en las que "*que un lado mide 2 m más que el otro*" se expresa como $y = 2x$. Lo anterior es atribuible, en parte, a que la notación algebraica no se domina.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que el área se escribe que formula como $x + x + 2x + 2x = 24$ o como $x + x + 2 = 24$. Es decir, se confunde el área con la del perímetro o con la suma de 2 lados.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se dice, equivocadamente, que "*está mal*", que "*está mal planteado*" y que "*falta una ecuación*" Veamos una de ellas:

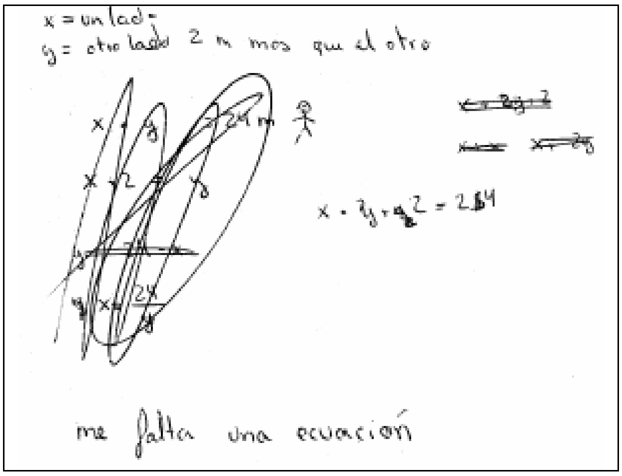


Figura V.61. Respuesta del alumno A19

Destacamos que:

-Se plantea bien el sistema $\begin{cases} x \cdot y = 24 \\ x + 2 = y \end{cases}$ pero, como no se sabe operar con fracciones algebraicas como $x = \dfrac{24}{y}$, se tacha todo. Lo anterior es atribuible a que las fracciones racionales no se han estudiado todavía en este nivel de enseñanza (3º de ESO) en el que se desarrolló nuestra experimentación.

-Se escribe que "*me falta una ecuación*" Lo anterior es atribuible, probablemente, a que considera que la ecuación $x \cdot y = 24$ es inútil porque no puede operar con ella.

- Hay una respuesta en la que sólo se escribe la asignación de incógnitas y la fórmula $A = b \cdot h$.

- Hay 6 respuestas en blanco (el 18% del total). De la lectura de las fichas nº 17 y nº 18 del Anexo II "Diario de Clase", descartamos que ese porcentaje de respuestas en blanco sea atribuible a la falta de tiempo o de motivación. Probablemente, ese 18% de respuestas en blanco es debido, en gran parte, a un déficit de comprensión del contexto geométrico del problema.

-Actividad 9.3.1-9.3.2:

- Hay 2 respuestas correctas (el 6% del total):

-"*Está mal, la hija no podra tener nunca cuatro veces la edad de su padre.*" (Alumno A12)

-“ x: *años que tienen que pasar*
$4(60+x)=24+x$ $240+4x=24+x$ $0x=-216$
Está mal. La edad de Pedro es más del doble que la de Luisa es imposible que pasados los años que sean la edad de Luisa sea mayor” (Alumno A14)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A12, se razona, con buen criterio, que una hija nunca podrá cuadriplicar en edad a su padre.

-En la respuesta del alumno A14, se plantea bien el problema, se resuelve mal y se llega a una ecuación incompatible -que no suele aparecer en los problemas de la enseñanza habitual- y que no se sabe resolver. Luego, se vuelve al enunciado y se razona, acertadamente, que si Pedro –el de 60 años- tiene más del doble de edad que Luisa –la de 24 años-, nunca podrá ocurrir que la edad de Luisa sea mayor que la de Pedro.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que sólo se dice que no se puede resolver o que está mal el planteamiento, sin aportar ni cálculo ni razonamiento alguno.

- Hay una respuesta en la que sólo se plantea bien el problema: “ $4(60+x)=24+x$ $240+x=24+x$ ” (Alumno A11)

Destacamos que, en la anterior respuesta, se aplica mal la propiedad distributiva y se abandona el proceso de resolución, sin que se extraiga conclusión alguna la ecuación incompatible $240+x=24+x$ que aparece.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se dan unas soluciones que son incorrectas, sin que se escriba ni ecuación ni cálculo alguno:

-“*Cuando Pedro se muera, x = nº años que tienen que pasar Pedro tiene 60 le faltan 216 años para tener el cuadruple eso si Pedro tiene que morir*” (Alumno A33)

-“*su padre no puede vivir 200 años hombre si lo congelas puede ser*” (Alumno A07)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A33, probablemente, se realiza la operación aritmética $4\cdot 60$ *años* - 24 *años* = 216 *años*, que emplea los datos ($60 años$ y $24 años$) del enunciado pero mal relacionados.

-En la respuesta del alumno A07, probablemente, se realiza alguna operación aritmética similar a la de la anterior respuesta del alumno A33 pero declarándose jocosamente que no es posible que una persona viva 200 años.

- Hay una respuesta en la que el problema se plantea y resuelve bien, y sale $x=-72$:

" *Años* $: x \qquad 4(60+x)=24+x \qquad 240+4x=24+x \qquad 3x=-216 \qquad x=-72$
Dentro de -72 años" (Alumno A05)

Destacamos que, en la respuesta anterior, no se interpreta que significa el signo negativo del 72 Además, dicha solución no es válida porque, aún si se interpretase como que la relación entre las edades, que se expresa en el problema, se verificó hace 72 años, se estaría hablando de una época en la que ni Pedro (de 60 años) ni Luisa (de 24 años) vivían.

El hecho de que las soluciones calculadas no sean ni interpretadas ni analizadas, es atribuible, en parte, a que en la enseñanza habitual, el énfasis se pone sólo en el planteamiento y en las operaciones de resolución.

- Hay una respuesta incorrecta en la que comete el error de inversión para el producto:

" $(60+x)=4(24+x) \qquad 60+x=96+4x \qquad -3x=36 \qquad x=\dfrac{36}{-3} \qquad x=-12$ "

(Alumno A13)

Destacamos que no se interpreta lo que significa la solución $x=-12$. Sin embargo, dejando aparte el error de inversión para el producto, -12 es una solución que sí sería válida porque, si se interpreta que la relación, expresada en el enunciado, entre las edades de Pedro y de Luisa ocurrió hace 12 años, se estaría hablando de una época en la que Pedro -de 60 años- y Luisa-de 24 años- sí que vivían.

El hecho de que las soluciones calculadas no sean ni interpretadas ni analizadas, es atribuible, en parte, a que en la enseñanza habitual, el énfasis se pone sólo en el planteamiento y en las operaciones de resolución.

- Hay 24 respuestas en blanco (el 72% del total). Por la lectura de las fichas nº 17 y nº 18 del Anexo II "Diario de Clase", descartamos la falta de tiempo o de motivación como causas de ese 72% de respuestas en blanco. Probablemente, hay tantas respuestas en blanco porque, en la enseñanza habitual, las "edades de las personas" suelen ser las "incógnitas" y los "años que han de pasar -o que ya pasaron- "suelen ser un "dato conocido", mientras que, en esta actividad, es al revés: las "edades de las personas" son "datos conocidos" y los "años que han de pasar" es la "incógnitas".

9.1.3-9.1.4, 9.2.3-9.2.4 y 9.3.3-9.3.4: ¿Cómo mejorarías tú ese enunciado? ¿Qué respuestas te salen con ese enunciado tuyo?					
Calificación	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
9.1.3-9.1.4	0 (0%)	8 (24%)	8 (24%)	5 (15%)	12 (36%)
9.2.3-9.2.4	0 (0%)	5 (15%)	0 (0%)	5 (15%)	23 (69%)
9.3.3-9.3.4	0 (0%)	2 (6%)	2 (6%)	3 (9%)	26 (78%)

Tabla V.52. Resultados de las actividades 9.1.3-9.1.4, 9.2.3-9.2.4, 9.3.3-9.3.4

Tras examinar la anterior tabla V.52, observamos que:

- El porcentaje de respuestas correctas decrece desde el 24% del total en la actividad 9.1.3-9.1.4, a un 15% del total en la actividad 9.2.3-9.2.4 y a un 6% en la actividad 9.3.3-9.3.4.

- El de porcentaje de respuestas en blanco sube desde el 36% en la actividad 9.1.3-9.1.4 a un 69% en la actividad 9.2.3-9.2.4 y a un 78% en la actividad 9.3.3-9.3.4.

  Descartada la falta de tiempo y de motivación, tras leer las fichas nº 17 y nº 18 del Anexo II "Diario de Clase", los correlativos decrecimientos y crecimientos anteriores apuntan a que, en general, hay una creciente dificultad al pasar de un problema de comparación (con la dificultad del error de inversión para el producto) a un problema geométrico (con la dificultad de una ecuación de segundo grado), y al pasar de éste a un problema de edades (con la dificultad de que la incógnita es el número de años que han de transcurrir, en vez de las edades de las personas). Hay que puntualizar, no obstante, que el problema geométrico dado, a diferencia del problema de comparación y del de edades, estaba bien redactado. Por ello, muchos alumnos pueden haberlo dejado en blanco esta actividad porque hayan considerado que no sea necesario mejorarlo.

- El porcentaje de respuestas incorrectas está entre el 15% de la actividad 9.1.3-9.1.4 y de la actividad 9.2.3-9.2.4 y el 9% de la actividad 9.3.3-9.3.4. Podemos decir que el porcentaje de nuevos enunciados que son propuestos por los alumnos como mejoras de los ya existentes y que, sin embargo, estén mal redactados, se mantiene estable entre un 9% y un 15%, independientemente de que los enunciados que se les dieron, como punto de partida, sean más o menos fáciles de resolver.

-Actividad 9.1.3-9.1.4:

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se dice, acertadamente, que es Juan es el que lleva el triple de sacos y que luego se resuelven adecuadamente mediante el método algebraico. Veamos un ejemplo representativo:

  "*que Juan tendría el triple si se quitan 5*

  $$\begin{cases} x-y=10 \\ x-5=3(y-5) \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=10 \\ x-3y=-10 \end{cases} \quad \begin{cases} -x+y=-10 \\ x-3y=-10 \end{cases}$$

  $$-2y=-20$$

  $$y=10 \qquad x-y=10 \qquad x=20$$" (Alumno A16)

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se dice, acertadamente, que es Juan es el que lleva el triple de sacos y que luego se resuelven adecuadamente mediante tanteo aritmético. Veamos un ejemplo representativo:

"*Poniendo que yo tenia el triple*
Que yo tengo 15 sacos y el tiene 5
si al principio yo llevava 20 sacos y el 10" (Alumno A22)

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se realiza una modificación imprescindible para la coherencia del enunciado -que Juan sea el que siempre lleva más sacos- y en las que también se realiza un cambio innecesario en otro dato del enunciado, obteniéndose así un problema nuevo que es correcto y que luego se resuelve adecuadamente mediante el método algebraico. Veamos el principio y el final de cada una de las dos respuestas:

  -"*En tu camión llevas 20 saco más que yo pero si cogemos 5 sacos más tú tendras el doble que yo*

  $x = mi\ camión \quad y = tuyo \qquad \left.\begin{array}{l} x+20=y \\ y+5=2(x+5) \end{array}\right\} \quad \dots\ \dots\ \dots\ \dots \left.\begin{array}{l} y=35 \\ x=15 \end{array}\right\}$" (Alumno A26)

  -"*Juan le dice a Pedro: En estos momentos yo llevo en mi camión diez sacos más pero si cada uno dejamos 2 yo tengo el doble*

  $\left\{\begin{array}{l} x=10+y \\ x-2=2(y-2) \end{array}\right. \quad \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \left\{\begin{array}{l} y=12 \\ x=22 \end{array}\right.$" (Alumno A11)

  Destacamos que:

  -En la respuesta del alumno A26, tenemos que:

  > -Es Juan el que lleva más sacos en ambas oraciones gramaticales.
  >
  > -En la segunda oración gramatical se modifica, innecesariamente, el factor de corrección que permite el establecimiento de la igualdad: ahora es el "*doble*", no el "*triple*".

  -En la respuesta del alumno A11, tenemos que:

  > -Es Juan el que lleva más sacos en ambas oraciones gramaticales.
  >
  > -En la segunda oración gramatical se modifica, innecesariamente, el número de sacos que ambos dejan: ahora es 2, en vez de 5.

- Hay una respuesta en la que como se piensa equivocadamente que el enunciado es correcto, se dice que no hace falta mejorarlo.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que se declara que Juan es el que lleva el triple de sacos, obteniéndose unos nuevos enunciados que son correctos pero que, luego, no se resuelven.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que no se redactan nuevos textos pero en las que se cambia acertadamente algún dato del sistema y en las que, luego, tales sistemas son bien resueltos.

  Probablemente, se comprende la situación de comparación sobre los sacos que lleva cada camionero pero sólo se modifica el sistema de ecuaciones, sin trasladar esa modificación al texto del enunciado. Lo anterior es atribuible, en parte, a que no se practica la corrección de enunciados en la enseñanza habitual.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que no se cambia el texto, aunque se plantea un sistema con una ecuación completamente ajena al enunciado. Veamos un ejemplo:

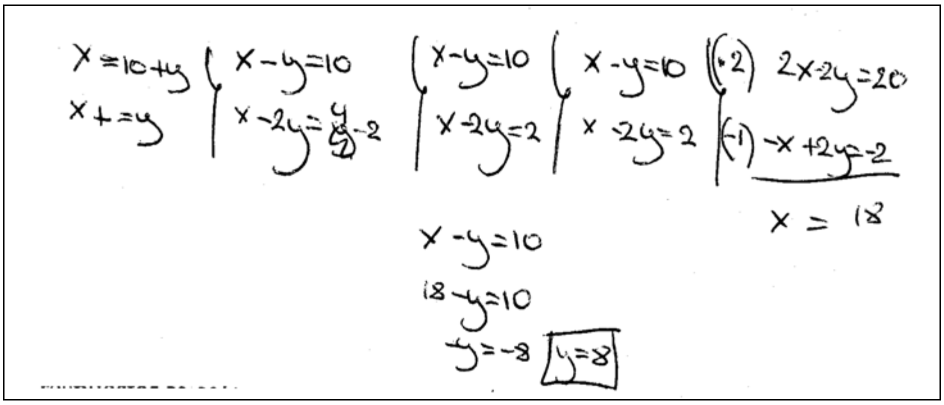


Figura V.62. Respuesta del alumno A32

Destacamos que, en la respuesta anterior:

-La ecuación $x = 10 + y$ -o su equivalente $x - y = 10$- es la traducción de la primera oración gramatical del enunciado dado.

-Se inventa, sucesivamente, las ecuaciones $x + = y$, $x - 2y = y - 2$ y $x - 2y = 2$ que nada tienen que ver con el enunciado dado.

-Finalmente resuelve adecuadamente el sistema $\left.\begin{array}{l} x - y = 10 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\}$ y obtiene las soluciones $\left.\begin{array}{l} x = 18 \\ y = 8 \end{array}\right\}$ que son dos números enteros y positivos que tienen sentido como números de sacos que se llevan en sendos camiones.

- Hay una respuesta en la que se realiza una modificación imprescindible para la coherencia del enunciado -que Juan sea el que lleva el doble de sacos- y en la que también se cambia, innecesariamente, el número de sacos que cada uno deja sin llevar (1 saco en vez de 5 sacos), obteniéndose así un problema nuevo que luego no se resuelve adecuadamente mediante el método algebraico:

"*Juan le dice a pedro: En estos momentos yo llevo en mi camión 10 sacos más que en el tuyo, si dejamos 1, yo tendría el doble que tu*

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 10 \\ x - 1 = 2(y - 1) \end{array}\right\}$$

$y + 10 - 1 = 2(y + 10 - 1)$ $\quad y + 9 = 2y + 20 - 2$ $\quad -y = 9$ $\quad y = -9$

$x = 1$" (Alumno A13)

Destacamos que:

-Se inventa un enunciado que indica que ha entendido que Juan es el que debe llevar más sacos.

-El nuevo enunciado se plantea bien.

-No se resuelve bien el sistema porque $x = y + 10$ no ha sido bien sustituida en la ecuación $x - 1 = 2(y - 1)$.

-Obtiene una solución negativa que no tiene significado real como número de sacos que se llevan en un camión. Ante lo inadecuado de la solución obtenida, ni se repasan las cuentas realizadas ni se intenta plantear un enunciado diferente. Probablemente, lo anterior es atribuible a que, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, el énfasis se sólo pone en formular y resolver.

- Hay 3 respuestas incorrectas (el 9% del total):

-"*Si cada uno deja 5 sacos seguire teniendo 5 sacos mas que tu*" (Alumno A06)

-"*cambiandolo pero poniendolo al reves*
Juan = 12´5 sacos   Pedro = 1´25 sacos" (Alumno A33)

-"*No hay por donde cogerlo*" (Alumno A21)

Destacamos que.

-En la respuesta del alumno A06 se realiza una implicación falsa que denota un déficit de comprensión de la situación.

-En la respuesta del alumno A33 parece que se comprende que Juan es el que tiene que tener más sacos pero no lo expresa bien y la solución que aporta nada tiene que ver con el enunciado dado.

-La respuesta del alumno A21 no es analizable. No podemos saber a qué se refiere cuando dice que no hay por donde cogerlo.

- Hay 2 respuestas incorrectas (el 6% del total) en las que se cambia la palabra "*triple*" por "*doble*", en las que se afirma, si ambos dejan 5 sacos, el que tenía menos –Pedro- tiene ahora más que el que más tenía –Juan-. Veamos un ejemplo representativo:

"*En estos momentos yo llevo en mi camión diez sacos más que tú en el tuyo, pero si cada uno dejamos cinco sacos tu tendrás en doble que yo*" (Alumno A02)

- Hay 6 respuestas en blanco (el 36% del total).

La lectura de las fichas nº 17 y nº 18 del Anexo II "Diario de Clase" nos permite descartar la falta de tiempo o de motivación como causa de esas respuestas en blanco. El alto porcentaje de respuestas en blanco es atribuible, en parte, a que la corrección de enunciados no se suele practicar en la enseñanza habitual y, en parte, a que muchos alumnos no entienden los problemas de comparación entre cantidades.

-Actividad 9.2.3-9.2.4:

- Hay una respuesta que corresponde a un alumno que, acertadamente, cree haber resuelto bien el enunciado dado en la actividad anterior 9.2.1-9.2.2 y en la que, con buen criterio, se dice que no mejoraría el enunciado dado.

- Hay una respuesta que corresponde a un alumno que, equivocadamente, cree haber resuelto bien el enunciado dado en la actividad anterior 9.2.1-9.2.2 y en la que, con buen criterio, se dice que no mejoraría el enunciado dado.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que se cambia el enunciado dado, que era correcto y se inventa un nuevo enunciado, que también es correcto y que, además, se resuelve bien. Veamos tales enunciados:

  -"*El area de un cuadrado es 16 metros cuadrados, los dos lados miden lo mismo, calcula la longitud de los lados.* $x=4 \quad y=4$" (Alumno A16)

  -"*El perímetro de un rectángulo es de 24 m. La base mide el doble que la altura. Calcula la longitud de los lados* $base=16 \quad altura=8$" (Alumno A09)

  -"*la suma del doble de los lados da el area* $2x+2x+4=24$
  $4x=24-4 \qquad 4x=20 \quad x=\frac{20}{4}=5$" (Alumno A11)

  Destacamos que los tres nuevos problemas son muy similares al enunciado dado pero se introducen cambios para que sean planteados mediante ecuaciones más sencillas de resolver. Así:

  -En la respuesta del alumno A16, al hablar de un cuadrado de área $16m^2$, en vez de hablar de un rectángulo de área $24m^2$, la ecuación $x(x+2)=24$ se cambia por la ecuación $x\cdot x=16$.

  -En la respuesta del alumno A09, al hablar de un rectángulo de $24m$ de perímetro, en vez de hablar de un rectángulo de área $24m^2$, la ecuación $x(x+2)=24$ se cambia por la ecuación $x+2x+x+2x=24$.

  -En la respuesta del alumno A11, al pensar en que el doble de la suma de los lados es 24, en vez de hablar de un rectángulo de área $24m^2$, la ecuación $x(x+2)=24$ se cambia por la ecuación $2(x+x+2)=24$.

- Hay 3 respuestas (el 9% del total) en las que la expresión "…$2m$ *más que el otro*" se cambia, innecesariamente, por expresiones del tipo "…*4 m más que el otro*" o del tipo "…*5 m menor que el otro*" y en las que no se modifica el valor del área tras la introducción de dichos cambios. Veamos un caso representativo:

  "*pues que el lado mide 4 mas que el otro* $x=4 \quad y=8$" (Alumno A33)

  Destacamos que, en la respuesta anterior, se omite decir que el área mide 32 m^2, en vez de 24 m^2.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las que sólo se escribe, respectivamente, que "*lo pondría bien*" y que "*daría algún dato más*".

- Hay 23 respuestas en blanco (el 69% del total). Tras examinar la tabla nº 23 del Anexo III, observamos que 20 de esas 23 respuestas pertenecen a alumnos que habían planteado bien -o creído que había planteado bien- el enunciado dado en la anterior actividad 9.21-9.2.2. Probablemente, no escribieron nada porque consideraron, con buen criterio, que el enunciado era correcto y que, por tanto, no necesitaba ser mejorado.

-Actividad 9.3.3-9.3.4.

- Hay 2 respuestas correctas en las que el enunciado del problema ha sido adecuadamente modificado y correctamente planteado y resuelto:

-"*Pedro tiene 60 años y su hija Luisa 24 ¿Dentro de cuántos años la edad de Pedro será 4 veces la de su hija?*
x: nº años que tienen que pasar

$60+x=4(24+x)$

$60+x=96+4x \qquad 60-12=48$

$-3x=96-60 \qquad 24-12=12$

$-3x=36$

$x=-12$ *Hace 12 años Pedro tenía 4 veces los años de Luisa*" (Alumno A14)

-"*Pedro tiene* x *años y Luisa tiene* y *años. Dentro de 6 años la edad de Pedro será 2 veces la de Luisa Sabiendo que en total suman 60. Halla edad de Pedro y Luisa*
Edad Pedro: x *Edad Luisa:* y

$$\left.\begin{array}{l} x+y=60 \\ x+6=2(y+6) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+y=60 \\ x-2y=6 \end{array}\right\} \qquad x+18=60 \qquad x=42$$ *Edad Pedro: 42 años*

$$\left.\begin{array}{l} x+y=60 \\ x-2y=6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} -x-y=-60 \\ x-2y=6 \end{array}\right\} \quad -3y=-54 \qquad -3y=-54$$

$y=18$ *Edad Luisa: 18 años*" (Alumno A05)

Destacamos que:

-En la respuesta del alumno A14: se corrige bien el enunciado cuando se dice que es Pedro -el padre- el que cuadriplica a Luisa -la hija- en edad, en vez de al revés; se resuelve bien el problema; se interpreta bien la solución $x=-12$ en el sentido de que hace 12 años la edad de Pedro cuadriplicaba la de su hija Luisa; se comprueba semánticamente la solución hallada. Es una respuesta en la que se mantiene la estructura del problema dado, corrigiendo sólo el error de redacción del enunciado.

-En la respuesta del alumno A05: se corrige bien el enunciado cuando se dice que es Pedro -el padre- el que cuadriplica a Luisa -la hija- en edad (en vez de al revés); el factor de corrección en la hipótesis se cambia bien, aunque innecesariamente (ahora es 2, en vez de 4); las edades de Pedro y de Luisa pasan a ser x e y y el número de años que han de pasar pasa a ser un dato conocido, 6 años, en vez de que el número de años que han de pasar sea la x y de que las edades de Pedro y Luisa sean los datos conocidos 60 y 24 años; se resuelve bien el sistema; se interpreta bien la solución calculada en el sentido de que Pedro tenía 48 años y Luisa tenía 18 años. Es una respuesta en la que se cambia la estructura del problema, de forma que las edades de las personas vuelven a ser las incógnitas, tal y como suele ocurrir en los problemas de la enseñanza habitual.

- Hay una respuesta en la que se cambia bien el enunciado y se plantea bien la ecuación pero en las que ésta no se termina de resolver. Veámosla:

“*Pedro tiene 60 años y su hija Luisa 24 dentro de cuantos años la edad de pedro será el triple de la de luisa*

$60+x=3(24+x)$

$60+x=72+3x$

$-12=$” (Alumno A13)

Destacamos que, en la respuesta anterior, la ecuación se deja inconclusa porque, probablemente, se percibe que x da un valor negativo que no se sabe interpretar “como que ocurrió en el pasado”, en vez de que “como que ocurrirá en el futuro”. La incapacidad para comprender el significado del signo negativo puede atribuirse, en parte, a que las incógnitas suelen ser positivas –porque suelen ser las edades de las personas- en los problemas de edades de la enseñanza habitual.

- Hay una respuesta en la que lo que se cambia es la ecuación, en vez del enunciado:

“$x=$ *años que han de pasar* $\quad 60+x=4(24+x) \quad 60+x=96+4x$” (Alumno A04)

Destacamos que en la respuesta anterior:

-Se comprende que es Pedro -el padre- el que cuadriplica en edad a Luisa -la hija-, en vez de al revés, y se expresa lo anterior en la ecuación pero se olvida de modificar también el enunciado dado.

-Se deja inconclusa la resolución de la ecuación porque, probablemente, se percibe que la x da un valor negativo que no sabe interpretar como que ocurrió en el pasado, en vez de que ocurrirá en el futuro. Ya hemos señalado antes que la incapacidad para interpretar el signo menos anterior puede atribuirse, en parte, a que las incógnitas suelen ser positivas –porque se trata de las edades de personas- en los problemas de edades de la enseñanza habitual.

- Hay 2 respuestas (el 6% del total) en las se que escribe un enunciado modificado que es correcto pero que, luego, se plantea mal:

  -"*El padre es el que tiene 4 veces mas*
  $60+x=(24+4x)$" (Alumno A08)

  -"*Dentro de cuántos años la edad de Pedro sera el cuadriple*

  $$\begin{array}{ll} 4(60+x)=24+x & 60+x=96+4x \\ 240+4x=24+x & 60-96=4x-x \\ 240-24=x-4x & -36=3x \\ 216=-3x & x=\dfrac{-36}{3}=-12 \end{array}$$

  " (Alumno A33)

  Destacamos que:

  -En ambas respuestas, la del alumno A08 y la del A33, el nuevo enunciado planteado es correcto porque se ha comprendido que es la edad del padre la que cuadruplicará la de la hija, en vez de ser al revés.

  -En la respuesta del alumno A08 la ecuación se plantea mal porque sólo se cuadriplica los años que han de pasar para Luisa y se deja sin cuadriplicar la edad actual de Luisa. Lo anterior es atribuible, probablemente, a un déficit de comprensión de la propiedad distributiva.

  -En la respuesta del alumno A33 se realizan dos planteamientos: uno –el de la columna izquierda- en el que se comete el error de inversión para el producto y otro –el de la columna derecha- en el que se formula bien el enunciado.

  En cualquier caso, ambos planteamientos, llevan a soluciones negativas que se dejan sin interpretar.

- Hay una respuesta incorrecta en la que se escribe un problema modificado que sigue siendo incorrecto y que, además, no se resuelve:

  "*En vez de cuatro veces 2 veces*" (Alumno A07)

  Destacamos que tan imposible es que una hija duplique a su padre en edad, como se dice en esta respuesta incorrecta, como que la cuadriplique, como se decía en el enunciado dado.

- Hay 26 respuestas en blanco (el 78% del total). Por la lectura de las fichas nº 17 y nº 18 del Anexo II "Diario de Clase", sabemos que ese alto porcentaje de respuestas en blanco no es atribuible ni a la falta de tiempo ni de motivación. Probablemente, tanto este 78% de respuestas en blanco en esta actividad 9.3.3-9.3.4 -sobre la mejora del problema dado- como el anterior 72% de respuestas en blanco en la actividad 9.3.1-9.3.2 -sobre la resolución del problema dado- son atribuibles a que no están acostumbrados, en la enseñanza habitual, a que el número de años que han de pasar sea la incógnita de un problema de edades.

V.10.3. Análisis de la comprensión de contenidos (CC)

- Hay alumnos que consideraron que toda solución negativa o fraccionaria es siempre errónea, independientemente de cuál sea la realidad descrita en el enunciado del problema de álgebra.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que las soluciones de los problemas suelen ser soluciones enteras y positivas en la enseñanza habitual del álgebra escolar.

- Varios alumnos no plantearon bien los problemas de comparación porque no entendieron que dar implica simultáneamente ganancia para el que recibe y pérdida para el que da.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que muchos problemas de la enseñanza habitual del álgebra escolar permiten un planteamiento literal, palabra a palabra, de tipo sintáctico (CC. XVI), que es formalmente correcto y que no exige reflexión alguna sobre las cantidades implicadas en las ecuaciones.

- Hay alumnos que no aplicaron bien la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en las ecuaciones algebraicas (CC. XI. 1.1).

  El error anterior es atribuible, en parte, a que en la enseñanza habitual del álgebra escolar muchas veces se aplican mecánicamente reglas operacionales cuyo significado no se comprende.

- Hay alumnos que, al realizar una comprobación sintáctica (CC. XIII), cuando sustituyen una incógnita que toma un valor negativo en una ecuación, interpretaron el producto por dicho valor negativo como la resta de un valor negativo.

  El error anterior de es atribuible, en parte, a que no comprenden las operaciones aritméticas entre números negativos (CC. XI. 1.2).

- Aparecieron alumnos que no dominaban ni los más elementales conceptos o fórmulas geométricas.

  La ignorancia anterior es atribuible, en parte, a una deficiente enseñanza de la geometría escolar, tanto en primaria como en secundaria.

- La mayoría de los alumnos no utilizó la estrategia de dibujar para auydarse en el planteamiento de los problemas geométricos.

  La no utilización de tal estrategia es atribuible, en parte, a que en la enseñanza habitual se practica más la traducción literal del enunciado (CC. XVI) que la comprensión de las relaciones cuantitativas entre los elementos geométricos de dicho enunciado (CC. XV).

- El planteamiento de los problemas de comparación les resultó más difícil a los alumnos que el de los problemas de recuentos.

Lo anterior es atribuible, en parte, a que los problemas de comparación exigen comprender dos situaciones -una situación real de desigualdad y una situación hipotética de igualdad que se logra mediante un sumando o mediante un factor- mientras que los problemas de recuentos sólo requieren comprender una situación real de igualdad y, también es atribuible, en parte, a que, mientras que el planteamiento sintáctico (CC. XVI) lleva a cometer el error de inversión para la suma (CC. XVI. 1.1), o para el producto (CC. XVI. 1.3), en los problemas de comparación, tal tipo de planteamiento sintáctico no comprensivo (CC. XVI) lleva a unas ecuaciones formalmente correctas en los problemas de recuentos.

- Hubo alumnos que encontraron difícil el planteamiento de un problema de edades en los que la incógnita es “el número de años que han de pasar” y los datos conocidos son “las edades de las personas”.

  La dificultad anterior es atribuible, en parte, a que, en la enseñanza habitual, las incógnitas suelen ser “las edades de las personas” y el dato conocido es “el número de años que han de pasar” y no al contrario, tal y como ocurre en esta actividad.

- Hay alumnos que detectaron los errores existentes en ciertos enunciados mal planteados y que saben corregirlos.

  El éxito anterior es atribuible, en parte, a que hay alumnos que reflexionan sobre las relaciones entre las cantidades de las que se habla en el enunciado. Esto es, son alumnos que realizan un planteamiento semántico (CC. XV) de los problemas.

Capítulo VI:

Fase de reflexión

VI.1. Introducción

Dedicamos la primera parte de este capítulo a la Fase de reflexión, que constituye la última de las fases que comprende la metodología de Investigación-Acción. Nuestra intención es valorar la comprensión alcanzada por los alumnos sobre el lenguaje algebraico. Para ello, utilizamos una prueba -elaborada ad hoc- a la que respondieron los alumnos al finalizar el desarrollo de la propuesta didáctica; a esta valoración dedicamos el apartado VI.2.

También queremos analizar las alteraciones que el paso del tiempo provoca en el grado de comprensión de esos mismos alumnos sobre el lenguaje algebraico. Este análisis lo realizamos comparando los resultados que obtienen los alumnos contestando a la misma prueba pero tres meses más tarde. En el apartado VI.3 se recogen los resultados de este análisis.

El apartado VI.4 se dedica a sintetizar las conclusiones obtenidas en este trabajo de investigación. Por una parte se aborda el grado de comprensión que sobre el lenguaje algebraico muestra el grupo de alumnos con los que se ha implementado la propuesta didáctica alternativa; y por otra parte, se analizan las potencialidades y limitaciones puestas de manifiesto al desarrollar la propuesta didáctica en un grupo natural de alumnos de 3º de la Educación Secundaria Obligatoria.

Finalmente, en el apartado VI.5 de este capítulo se incluyen las perspectivas de investigación que, como consecuencia de nuestro trabajo, quedan abiertas a nuevas investigaciones encaminadas a mejorar la comprensión de los escolares sobre el lenguaje algebraico

VI.2. Grado de comprensión alcanzado

Tras haber experimentado en el aula las 9 actividades de la propuesta de enseñanza del lenguaje algebraico, dirigida a alumnos del nivel de enseñanza de 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), consideramos interesante evaluar al grupo de estudio mediante una prueba escrita e individual, que denominamos Prueba I y que comprendía cinco cuestiones de la I.1 a la I.5. La evaluación de tal Prueba I nos permitirá ahora reflexionar sobre cuál fue el grado de asimilación de los contenidos de la propuesta a corto plazo.

El grupo de estudio, formado por un grupo heterogéneo de alumnos de 3º de ESO (14-15 años) del IES Goya del curso 2007-08, realizó una prueba diseñada ad hoc, y que en adelante denominaremos Prueba I, el día 28 enero de 2008, esto es, una semana después del fin de la implementación en el aula de la propuesta curricular alternativa. De hecho, esta Prueba I sólo fue realizada por 28 de los 33 alumnos que componían el grupo de experimentación pues 5 alumnos –por diferentes razones que explicamos en el Anexo II “Diario de Clase”- se ausentaron el día de la prueba.

Este apartado VI.2 está dividido en 5 subapartados (numeradas del VI.2.1 al VI.2.5) que están dedicados a la reflexión sobre las 5 respectivas cuestiones (numeradas de la I.1 a la I.5) de la Prueba I. Sobre cada cuestión de la Prueba I abordaremos los siguientes aspectos:

- **1) Respuestas previsibles:** Contiene un análisis a priori sobre las soluciones más usuales a las preguntas formuladas. Este análisis se realiza atendiendo a los conocimientos de los alumnos y, por tanto, atendemos a una doble vía de resolución:

  A) Resolución aritmética
  B) Resolución algebraica

- **2) Respuestas obtenidas:** En este punto analizamos las respuestas -correctas e incorrectas- que se obtuvieron en el grupo experimental, prestando atención especialmente a la manifestación de aquellos aspectos más relacionados con nuestros tres focos de investigación. Este análisis lo organizamos en los siguientes epígrafes:

  A) Criterios de evaluación
  B) Resultados de evaluación
  C) Respuestas correctas
  D) Respuestas incorrectas

- **3) Análisis de la comprensión de contenidos (CC):** Se incluye una valoración de la comprensión mostrada por los alumnos al resolver cada una de las cuestiones incluidas en la prueba I.

VI.2.1. Cuestión I.1

Cuestión I.1: *Carmen tiene 42 años y su hijo 10: ¿Cuántos años han de pasar para que la edad de Carmen sea el triple de la de su hijo?*

Tabla VI.1. Enunciado de la cuestión I.1

VI.2.1.1. Respuestas previsibles

A) Resolución aritmética

Este problema se puede resolver mediante tanteo aritmético porque: las edades suelen expresarse, tanto en la vida cotidiana como en la escuela, con números naturales que se refieren al número de años; y porque la solución se encuentra con cierta rapidez si se van aumentando las edades en 1 año (pues dentro de 6 años, Carmen, con 48 años, triplicará en edad a su hijo con 16 años).

B) Resolución algebraica

Este problema algebraico sobre edades es resoluble mediante el planteamiento de una ecuación con una incógnita. Dicho planteamiento presenta las siguientes dificultades:
-La elección de las incógnitas puesto que el "*número de años que han de pasar*" suele ser un dato conocido en la mayoría de los problemas de edades, no una incógnita.
-Se parte de una desigualdad entre edades que se convierte en una igualdad hipotética mediante la adecuada colocación de un factor de corrección ("*…la edad de Carmen sea el triple de la de su hijo*"). Es decir, es un problema que si se plantea sintácticamente lleva al error de inversión para el producto.

Este problema también es resoluble mediante el planteamiento de un sistema 3x3 en el que las 3 incógnitas sean la edad futura de Carmen, la edad futura de su hijo y el número de años que han de transcurrir para que Carmen triplique en edad a su hijo. No obstante, el planteamiento de tal sistema 3x3 no es esperable puesto que en este nivel de enseñanza sólo se trabaja con ecuaciones de una incógnita o con sistemas 2x2 de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

VI.2.1.2. Respuestas obtenidas

A) Criterios de evaluación

- 1) Se aplica bien el método algebraico, realizándose alguna comprobación de la solución. O se aplica bien el método aritmético de tanteo.
- 2) Se aplica bien el método algebraico pero no se presenta comprobación alguna de la solución.

- 3) Se aplica mal el método algebraico. O se aplica mal el método aritmético de tanteo.
- 4) Se deja en blanco.

B) Resultados de la evaluación

Cuestión I.1	**1**	**2**	**3**	**4**	Total
Nº de respuestas	13	2	11	2	28
%	46%	7%	39%	7%	100%

Tabla VI.2. Resultados de la cuestión I.1

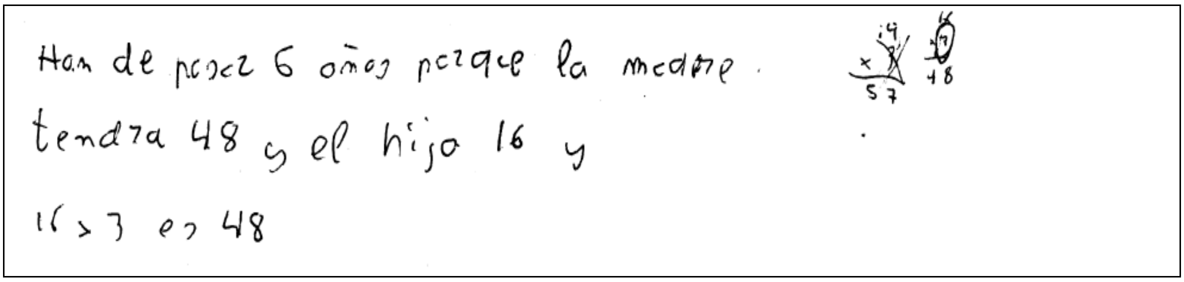
C) Respuestas correctas

-Respuestas algebraicas correctas

Hay 14 respuestas (el 50% del total) en las que se aplicó bien el método algebraico.

-Respuestas aritméticas correctas

Sólo hay una respuesta (el 4% del total) en la que se emplea el tanteo aritmético:



Han de pasar 6 años porque la madre
tendra 48 y el hijo 16 y
16x3 es 48

$\cancel{19 \times 3 = 57}$ $\quad$ $16 \times 3 = 48$

Figura VI.1. Respuesta del alumno A22

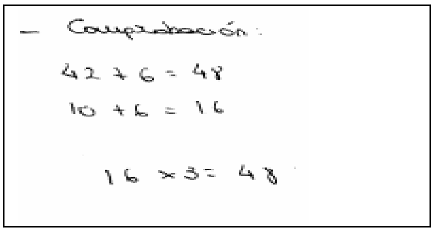
De la respuesta anterior destacamos:

-Las dos operaciones aritméticas de tanteo realizadas a la derecha ($19 \cdot 3 = 57$ y $16 \cdot 3 = 48$), y el hecho de que se tache la operación $19 \cdot 3 = 57$, que no verifica las condiciones del enunciado, mientras que se resalta con un círculo el 3 de la operación $16 \cdot 3 = 48$, que sí que las verifica.

-Que, mediante una deficiente utilización del lenguaje natural o materno, se exprese que, dentro de 6 años, la edad de la madre (48 años) triplicará la del hijo (16 años).

-Comprobación de las respuestas

- Hay 3 respuestas (el 11% del total) en las que las soluciones, calculadas correctamente mediante el método algebraico, fueron comprobadas semánticamente en el enunciado. Veamos un ejemplo representativo:



– Comprobación:
42 + 6 = 48
10 + 6 = 16
16 × 3 = 48

Figura VI.2. Respuesta del alumno A01

De la respuesta anterior destacamos que:

-En las dos primeras líneas, se calculan las edades futuras de la madre y del hijo

-En la tercera línea se comprueba que, en el futuro, la edad de la madre triplicará la del hijo.

Todo lo anterior se refiere semánticamente a la situación real de las edades, no sintácticamente a la ecuación $42+x=3\cdot(16+x)$ que permitió calcular algebraicamente la solución $x=6$.

- Hay 9 respuestas (el 32% del total) en las que las soluciones que fueron bien calculadas mediante el método algebraico y en las que se comprueba que $42+6=3\cdot(10+6)$. Probablemente, como tales comprobaciones se ajustan literalmente a la ecuación $42+x=3\cdot(16+x)$ que se usa para calcular la solución $x=6$, se trata de verificaciones sintácticas de la solución en la ecuación.

- Hay 2 respuestas (el 7% del total) en las que las soluciones que fueron bien calculadas mediante el método algebraico, pero en las que no se escribe comprobación alguna.

D) Respuestas incorrectas

-Errores habituales:

Hay 4 respuestas (el 14% del total) en las que el enunciado se plantea bien como $42+x=3\cdot(10+x)$ pero en las que no se resuelve bien dicha ecuación.

-Errores no habituales:

- Hay una respuesta (el 4% del total) en la que se formulan tres ecuaciones diferentes mal planteadas:

Figura VI.3. Respuesta del alumno A03

Destacamos que:

-El "factor de corrección" 3 no multiplica, en ninguno de los tres intentos, ni al término correcto (como sucede si se realiza un planteamiento semántico) ni al término incorrecto (como sucede si se realiza un planteamiento sintáctico) sino que dicho factor multiplica a las edades actuales del hijo, de la madre o de los dos. Probablemente, porque se usa una memoria carente de comprensión.

-Los tres intentos son tachados. Probablemente, porque, al operar, se percibió que las tres ecuaciones planteadas eran incompatibles y esto contradice la tradición escolar que establece que los problemas algebraicos suelen plantearse mediante ecuaciones compatibles determinadas.

- Hay una respuesta (el 4% del total) en la que se formulan un planteamiento aritmético incoherente con el enunciado del problema:

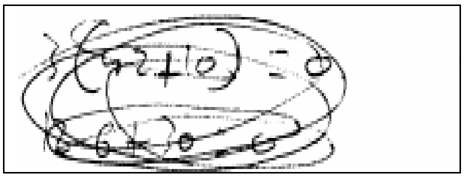


Figura VI.4. Respuesta del alumno A20

Destacamos que se indica que el triple de la suma de las edades de la madre (42) y del hijo (10) es igual a cero. Lo anterior indica un déficit importante de comprensión.

VI.2.1.3. Comprensión de Contenidos (CC)

- Fueron pocos los alumnos que realizaron comprobaciones semánticas (CC. XII), esto es, que comprobaron las soluciones en el enunciado.

  La existencia de una minoría de alumnos que compruebe semánticamente, puede ser considerado un logro de la propuesta curricular alternativa: al menos unos pocos estudiantes identifican los enunciados de los problemas como descripciones de situaciones reales a resolver y cuyas soluciones es preciso verificar en el mundo real.

- Fueron más los alumnos que, probablemente, realizaron comprobaciones sintácticas (CC. XIII), esto es, que comprobaron las soluciones en la ecuación.

  La existencia de un grupo de alumnos que compruebe sintácticamente, puede ser considerada un éxito parcial de la propuesta didáctica alternativa, porque hay una identificación de las ecuaciones como igualdades entre números. Pero, también, es un fracaso porque la solución calculada no se contrasta en el problema real sino en la metodología algebraica utilizada.

- Fueron mayoría los alumnos que plantearon bien la ecuación (CC. XV), sin cometer el error de inversión para el producto (CC. XVI. 1.3).

  Lo anterior supone un buen nivel de comprensión semántica de las relaciones numéricas existentes en la ecuación. A ello, en parte, ha contribuido la propuesta alternativa por la práctica de la comprobación semántica de los problemas y de la invención de enunciados de problemas algebraicos.

- Una minoría importante de alumnos no supieron resolver la ecuación que ellos mismos plantearon.

  Lo anterior apunta a que la enseñanza habitual, a pesar del mucho tiempo dedicado a la resolución de complejas ecuaciones, deja bolsas de alumnos que no comprenden ni la interpretación de la notación algebraica (CC. VII, CC. VIII y CC. IX) ni las reglas de resolución de ecuaciones (CC. X y CC. XI).

VI.2.2. Cuestión I.2

Cuestión I.2:
En una droguería se venden 3 jabones y 2 botes de colonia por 12 euros, y 4 jabones y 3 botes de colonia por 17 euros. Averigua el precio de cada producto.

Tabla VI.3. Enunciado de la cuestión I.2

VI.2.2.1. Respuestas previsibles

A) Resolución aritmética

Este problema es resoluble por tanteo aritmético si se presupone que los precios de los dos productos son números enteros. Si no se presupone lo anterior, aún trabajando sólo con centésimas de euros, sería necesario probar con un número finito pero muy alto de valores.

Si se tantea aritméticamente, la solución aparece con valores muy bajos porque los precios de cada pastilla y de cada bote son 2 y 3 €, respectivamente.

B) Resolución algebraica

La resolución algebraica de este problema presenta las siguientes características:

-El orden gramatical de las palabras del enunciado del problema y el orden algebraico de los símbolos algebraicos de las ecuaciones del sistema 2x2 son coincidentes, con lo cual un planteamiento sintáctico, palabra a palabra, lleva a la formulación de unas ecuaciones formalmente correctas.

-En el enunciado se habla de un cálculo de precios que se realiza frecuentemente en la vida cotidiana.

-Su formulación, el sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$ es sencillo de resolver.

VI.2.2.2. Respuestas obtenidas

A) Criterios de evaluación

- 1) Se aplica bien el método algebraico y se realiza alguna comprobación de la solución. O se aplica bien el método aritmético de tanteo.

- 2) Se aplica bien el método algebraico pero sin realizar comprobación alguna de la solución.
- 3) Se aplica mal el método algebraico o el método aritmético de tanteo.
- 4) Se deja en blanco.

B) Resultados de la evaluación

Cuestión I.2	1	2	3	4	Total
Nº de respuestas	18	9	1	0	28
%	64%	32%	4%	0%	100%

Tabla VI.4. Resultados de la cuestión I.2

C) Respuestas correctas

-Respuestas algebraicas correctas

- El método algebraico se usó bien en 27 respuestas (el 96% del total). Esta correcta utilización del método algebraico y su predominio absoluto sobre el tanteo aritmético son atribuibles, en parte, al contexto algebraico en el que vivía el grupo de estudio.

- En 18 respuestas (el 64% del total) se realizó algún tipo de comprobación. Como el enunciado del problema algebraico puede transcribirse literalmente en un sistema 2x2 formalmente correcto, no es posible saber si las comprobaciones fueron semánticas (en el enunciado) o sintácticas (en las ecuaciones). De las 18 comprobaciones, 13 fueron completas y 5 fueron incompletas (es decir, las soluciones $x = 2$ e $y = 3$ sólo se sustituyeron en una de las dos condiciones del enunciado, si la comprobación era semántica, o en una de las dos ecuaciones del sistema, si la comprobación era sintáctica). En parte, lo anterior es atribuible a que hay alumnos que creen que sólo es necesario comprobar una de las dos condiciones de un problema o una de las dos ecuaciones de un sistema.

- En 9 (el 32% del total) de las 27 respuestas correctas anteriores no aparece ningún tipo de comprobación. Estas respuestas se enmarcan en la práctica escolar habitual que establece que lo importante es plantear y resolver problemas, no comprobarlos.

-Respuestas aritméticas correctas

- Nadie del grupo de experimentación resolvió este problema mediante tanteo aritmético. En parte, porque era un problema fácil de plantear y de resolver algebraicamente y, en parte, porque los alumnos, al hallarse en un contexto escolar algebraico, sólo suelen utilizar el tanteo aritmético como segunda opción, cuando falla el método algebraico.

D) Respuestas incorrectas

Tras examinar la anterior tabla VI.4 y la tabla nº 23 del Anexo III, observamos que: sólo hay una respuesta incorrecta en la que el problema se plantea bien pero se resuelve mal; no hay respuestas en blanco. Sería un excelente resultado si no fuera porque este problema admite una traducción sintáctica, palabra a palabra.

VI.2.2.3. Comprensión de Contenidos (CC)

- Casi todos los alumnos plantearon bien este problema algebraico sobre precios que permite una traducción sintáctica literal -palabra a palabra- que es formalmente correcta.

  Tal éxito es relativo porque engloba tanto a los que tradujeron semánticamente (CC. XV) como a los que lo hicieron sintácticamente (CC. XVI), sin comprensión.

- Casi todos los alumnos ejecutaron bien las reglas necesarias para despegar y operar (CC. X y CC. XI) en la resolución del sistema de ecuaciones 2x2 de este problema.

  Este éxito es atribuible, en parte, a que la enseñanza habitual sí que dota de cierta destreza procedimental en la resolución –más o menos comprensiva- de sistemas de ecuaciones 2x2.

- Un 32% del total del grupo no comprobó, ni semánticamente (CC. XII) ni sintácticamente (CC. XIII), las soluciones.

  La omisión anterior es atribuible, en parte, a que esa tarea de comprobación no suele exigirse en la enseñanza habitual.

- Sobre un tercera parte del 64% del total del grupo que sí que comprobó las soluciones -semántica (CC. XII) o sintácticamente (CC. XIII)-, lo hizo sólo en una de las 2 condiciones del enunciado del problema o en una de las 2 ecuaciones del sistema 2x2.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que muchos estudiantes no entienden porqué la solución debe verificar las dos condiciones del enunciado (si la comprobación es semántica) o las dos ecuaciones del sistema (si la comprobación es sintáctica).

VI.2.3. Cuestión I.3

Cuestión I.3:
La dueña de la droguería de la actividad anterior no tiene el éxito esperado con las ofertas, y por ello lanza una oferta de 6 jabones y 4 botes de colonia por 22 euros. Explica razonadamente si ha rebajado o no ha rebajado los productos.

Tabla VI. 5. Enunciado de la cuestión I.3

VI.2.3.1. Respuestas previsibles

A) Resolución aritmética

Como cada pastilla de jabón y cada bote de colonia costaban, respectivamente, 2 y 3 € en la situación comercial de la anterior cuestión I2, un lote de 6 pastillas y 4 botes costaría $6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 24$ €. Si en la situación comercial de la presente cuestión I3 dicho lote cuesta 22 €, es obvio que los precios han sido rebajados. Es decir, tras un cálculo aritmético, se pueden contrastar los precios de un mismo lote en la situación de la anterior cuestión I2 y en la de la actual cuestión I3 para demostrar que hay una rebaja de precios.

B) Resoluciones algebraicas

Consideramos que hay, al menos, tres posibles resoluciones algebraicas aplicables:

-Resolución algebraica basada en el concepto de ecuaciones equivalentes

Si llamamos x = "Precio de cada pastilla de jabón" y sea y = "Precio de cada bote de colonia", tenemos que la situación comercial de la cuestión I2 se formula como $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot (3x + 2y = 12) \\ 4x + 3y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 24 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$.

Así, al transformar la ecuación $3x + 2y = 12$ en la ecuación equivalente $6x + 4y = 24$, demostramos que un lote de 6 pastillas de jabón y de 4 botes de colonia costaba 24 € en la situación comercial de la anterior cuestión I2, en contraste con los 22 € que nos dicen que cuesta en la situación comercial de la presente cuestión I3. Es decir, hemos demostrado que ha habido una rebaja de precios.

Como, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, la equivalencia de ecuaciones se usa como técnica mecánica para la resolución de ecuaciones pero no se suele utilizar como concepto para la resolución de problemas, no es esperable esta resolución de la cuestión I3 mediante el concepto de equivalencia de ecuaciones.

-Resolución algebraica basada en la representación gráfica de las ecuaciones

En la situación comercial de la anterior cuestión I2: Sea x = "Precio de cada pastilla de jabón" y sea y = "Precio de cada bote de colonia" $\Rightarrow$ La situación comercial de la anterior cuestión I.2 se formula como $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$. Si dicho sistema es representado gráficamente, tenemos que las dos rectas se cortan en el punto $(2,3)$. Las coordenadas de dicho punto son los precios respectivos de los jabones y de los botes de colonia en la situación comercial de la anterior cuestión I2.

En la situación comercial de la actual cuestión I3: Sea x = "Precio de cada pastilla de jabón" y sea y = "Precio de cada bote de colonia" $\Rightarrow$ La situación comercial de la anterior cuestión I.3 se formula como $6x + 4y = 22$.

Si dicha ecuación es representada gráficamente, tenemos que dicha recta no pasa por el punto solución $(2,3)$ de la cuestión I2, lo cual implica que ha habido una alteración de precios. Además, como todos los puntos de la recta $6x+4y=22$ de la presente cuestión I3 están más hacia abajo que todos los puntos de la recta paralela $3x+2y=12$ de la anterior cuestión I2, la alteración ha sido hacia abajo, esto es, ha habido rebaja de precios.

Como, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, la representación gráfica de ecuaciones se suele usar como un método de resolución de sistemas y no se suele usar como un método de interpretación de las situaciones reales de los problemas de álgebra, no es esperable esta resolución mediante la representación gráfica de las ecuaciones.

-Resolución algebraica basada en una demostración por reducción al absurdo

Supongamos que x e y (los precios de "cada pastilla de jabón" y de "cada bote de colonia") permanecen invariantes en ambas situaciones comerciales -la de la anterior cuestión I.2 y la de la presente cuestión I.3- $\Rightarrow$ El precio del primer lote de la cuestión I2 y el precio del único lote de la cuestión I3 se formulan mediante el sistema $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 6x+4y=22 \end{cases}$ que no tiene solución. La contradicción viene por suponer que los precios son invariantes. Luego los precios han variado.

Destacamos que la resolución mediante una hipótesis de reducción al absurdo no es esperable en este nivel de enseñanza por el alto nivel de abstracción que requiere.

VI.2.3.2. Respuestas obtenidas

A) Criterios de evaluación

- 1) La cuestión se responde correctamente, ya sea aplicando un método aritmético o algebraico.
- 2) Se aplica adecuadamente un método aritmético o algebraico de resolución pero se cometen errores de cálculo.
- 3) Se escriben ecuaciones incoherentes con el enunciado o se extraen conclusiones erróneas.
- 4) Se deja en blanco.

B) Resultados de la evaluación

Cuestión I.3	**1**	**2**	**3**	**4**	Total
Nº de respuestas	22	2	4	0	28
%	79%	7%	14%	0%	100%

Tabla VI. 6. Resultados de la cuestión I.3

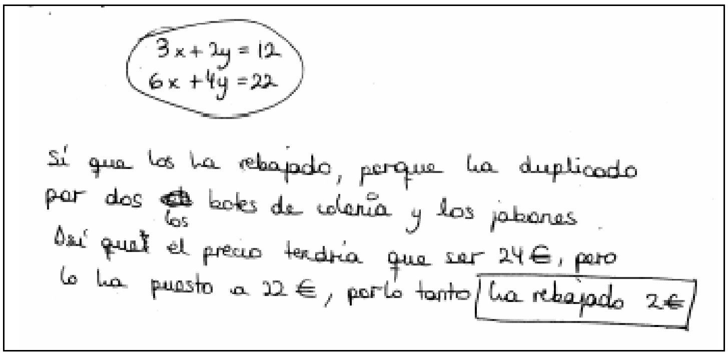
C) Respuestas correctas

-Respuestas aritméticas

- En 21 de las 22 respuestas puntuadas con un 1 –por ser correctas- y en las 2 respuestas puntuadas con un 2 –por contener sólo errores de cálculo- se opta por la resolución aritmética de la cuestión I.3. Es decir, en un total de 21+2=23 respuestas (el 82% del total) se opta por el método aritmético en una cuestión, la I.3, que no era resoluble mediante el habitual método algebraico de plantear y resolver ecuaciones.

-Respuestas algebraicas

- Hay una única respuesta correcta (el 4% del total) que se basa en un razonamiento de tipo algebraico:


$3x+2y=12$
$6x+4y=22$

Sí que los ha rebajado, porque ha duplicado por dos los botes de colonia y los jabones. Así que el precio tendría que ser 24 €, pero lo ha puesto a 22 €, por lo tanto $\boxed{\text{ha rebajado 2 €}}$

Figura IV.5. Respuesta del alumno A03

Destacamos que:

-La 1ª ecuación $3x+2y=12$ es la formulación algebraica del precio de uno de los dos lotes en la situación comercial de la anterior cuestión I.2, y la 2ª ecuación $6x+4y=22$ es la formulación algebraica del precio de un lote en la situación comercial de la presente cuestión I.3.

-Se interpreta el término $6x+4y$ de la 2ª ecuación como la duplicación del término $3x+2y$ de la 1ª ecuación. Dicha duplicación se interpreta en un sentido estrictamente físico: "*ha duplicado por dos los botes de colonia y los jabones*". Es decir, implícitamente se está trabajando con el concepto de ecuaciones equivalentes.

-Se percibe la contradicción entre el precio que "*tendría que ser*" (24 €) y el precio al que lo "*ha puesto*" (22 €) y se especifica es una rebaja de 2 €.

D) Respuestas incorrectas.

-Errores habituales:

- Hay 2 respuestas (el 7% del total) en las que sólo se plantea la ecuación $6x+4y=22$, sin decir si ha habido o no habido rebaja. Probablemente, estamos ante dos alumnos que aplican la metodología de planteamiento de los enunciados como ecuaciones que permite resolver casi todos los problemas de álgebra en la enseñanza habitual y que no saben qué hacer ante una cuestión como la I3 que requiere otras alternativas de resolución.

-Errores no habituales:

- Hay 2 respuestas (el 7% del total) en las que las mismas incógnitas designan tanto los precios en la situación comercial de la anterior cuestión I.2 como en la situación comercial de la presente cuestión I.3, sin considerar que pueden haber sido modificados por una rebaja. Veamos la representativa respuesta del alumno A19:

"$x = €$ *jabones* $\quad y = €$ *colonias* $\qquad \begin{cases} x + y = 5 \\ 6x + 4y = 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x + 6y = 30 \\ -6x - 4y = -22 \end{cases}$

$$0x \quad 2y = 8$$
$$y = 4€$$

$$x + 4 = 5 \qquad 1 + 4 = 5 \qquad 6 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 22$$
$$x = 1€ \qquad 5 = 5 \qquad 22 = 22$$

los botes de colonia los ha subido pero los jabones los ha bajado de precio"

Destacamos que:

-La ecuación $x + y = 5$ debe, seguramente, provenir de que $2 + 3 = 5$ y de que $x = 2$ e $y = 3$ eran los precios de cada jabón y de cada bote de colonia en la situación comercial de la anterior cuestión I.2.

-La ecuación $6x + 4y = 22$ es la formulación del precio de un lote en la situación comercial de la presente cuestión I.3. Las letras x e y son los precios de cada jabón y de cada bote de colonia en la situación comercial de la presente cuestión I.3.

-Como se aprecia en la interpretación que hace de la solución calculada, el alumno A19 no fue consciente de usa las mismas letras para designar precios que, de hecho, son diferentes porque hubo una rebaja de precios al pasar de la situación comercial de la cuestión I2 a la situación comercial de la cuestión I3. Simplemente, el alumno A19 inventa una ecuación ($x + y = 5$) para que la cuestión I3 sea un problema algebraico como los habituales en el álgebra escolar, esto es, resoluble mediante el planteamiento y la resolución de ecuaciones.

-Las soluciones $x = 1$ e $y = 4$ del sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 6x + 4y = 22 \end{cases}$, que se plantea y resuelve en esta cuestión I3, se comparan con los precios $2\,€$ e $3\,€$ de los jabones y de las colonias en la situación comercial de la anterior cuestión I2 y se concluye que, puesto que el "valor de x" sube de 1€ a 2€ y puesto que el "valor de y" baja de 4€ a 3€, se tiene que "*los botes de colonia los ha subido pero los jabones los ha bajado de precio*".

VI.2.3.3. Comprensión de Contenidos (CC)

- La mayoría de los alumnos, cuando percibió que la cuestión I.3 no puede resolverse como un sistema 2 x 2 de dos ecuaciones con dos incógnitas (CC. XV o CC. XVI), intentó y logró su resolución mediante un razonamiento aritmético (CC. XII).

  Quizá nuestra propuesta favorezca la utilización de la aritmética para la resolución de los problemas algebraicos como segunda opción, cuando los problemas algebraicos no son resolubles mediante el habitual planteamiento de ecuaciones.

- Por el contrario, fracasaron casi todos los estudiantes que persistieron en intentar resolver algebraicamente esta cuestión I.3, sin utilizar un razonamiento aritmético alternativo (CC. XII) como segunda opción.

  La anterior es atribuible, en parte, a que, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, no suele utilizarse otro método algebraico que no sea el de plantear ecuaciones, que no es aplicable a la resolución de esta cuestión I.3.

VI.2.4. Cuestión I.4

Cuestión I.4:
ENUNCIADO (dado por el profesor): La suma de cuatro números consecutivos es 114. Calcula dichos números.
FORMULACIÓN (trabajo del alumno): $x+x+1+x+2=114$
RESOLUCIÓN (trabajo del alumno): $x=37$
Realiza la comprobación para saber si el alumno se merece un punto (por hacerlo bien), un cero (por hacerlo mal) o medio punto (por hacerlo bien pero no terminarlo).

Tabla VI.7. Enunciado de la cuestión I.4

VI.2.4.1. Respuestas previsibles

A) Respuestas aritméticas

La resolución aritmética se basa en que la solución ($x=37$) se contrasta en las condiciones del enunciado del problema. Esto es, se estudia si los cuatro números consecutivos (37, 38, 39 y 40) suman 114. Como $37+38+39+40$ es igual a 154, en vez de ser igual a 114, se puede afirmar que el problema está mal resuelto.

B) Respuestas algebraicas

Esta resolución algebraica se basa en el repaso del planteamiento y de la resolución de las ecuaciones. Así, se observa que la ecuación $x+x+1+x+2=114$, cuya solución es $x = 37$, está bien resuelta pero mal planteada porque en el enunciado se habla de la suma de “cuatro” números consecutivos, no de la suma de “tres”. Por tanto, hay que utilizar ecuaciones que estén bien planteadas ($x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 114$, por ejemplo) y ver que los números consecutivos son 27, 28, 29 y 30.

VI.2.4.2 Respuestas obtenidas

A) Criterios de Evaluación

- 1) Se responde que el problema está mal resuelto porque se comprueba la solución en el enunciado o porque se percibe la incoherencia entre el enunciado y la ecuación planteada.
- 3) Se responde que el problema está bien resuelto o que está bien resuelto pero incompleto. O se responde que está mal resuelto sin aportar argumentación alguna.
- 4) Está en blanco.

B) Resultados de la evaluación

Cuestión I.4	1	3	4	Total
Nº de respuestas	18	10	0	28
%	64%	36%	0%	100%

Tabla VI.8. Resultados de la cuestión I.4

C) Respuestas correctas

-Respuestas algebraicas

- Hay 16 respuestas correctas (el 57% del total) en las que se dice que el problema está mal resuelto porque está mal planteado.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que se identifica “comprobar un problema” con “repasar sucesivamente el planteamiento y la resolución de las ecuaciones”, y se cree que no pueden ser acertadas las soluciones obtenidas a partir de planteamientos incorrectos.

-Respuestas aritméticas

- Hay una respuesta aritmética (el 4% del total) en la que la solución se sustituye en el enunciado, omitiendo realizar cualquier otra tarea innecesaria:

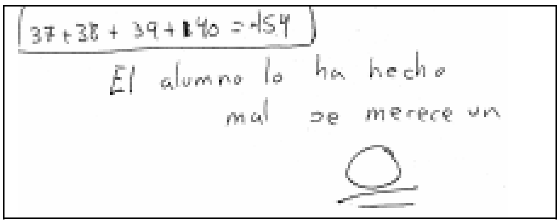


Figura VI.6. Respuesta del alumno A08

- Hay una respuesta aritmética (el 4% del total) en la que la solución también se sustituye en el enunciado, después de realizar una serie de tareas innecesarias:

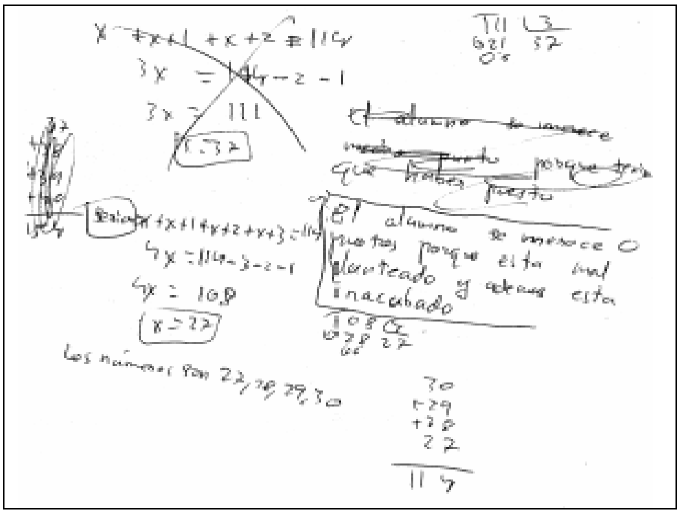


Figura VI.7. Respuesta del alumno A20

Destacamos que:

-En la esquina superior derecha se resuelve la ecuación dada y, al lado, a la izquierda, se concluye que "*el alumno se merece medio punto porque tenía que haber puesto…*". Probablemente, en un primer momento, se pensó que 37 era una solución correcta pero incompleta porque faltaban los otros dos números consecutivos (38 y 39).

-En la suma situada a la derecha, se comprueba semánticamente que $37+38+39+40$ es igual a 154, en vez de ser igual a 114. Luego se tacha dicha cuenta aritmética que demuestra que el problema está mal resuelto.

-En la mitad inferior de la hoja: se plantea y se resuelve bien el problema; se comprueba que 27+28+29+30 es igual a 114; se afirma, acertadamente que "*el alumno se merece cero puntos porque está mal planteado y además está inacabado*".

Estamos pues ante un alumno que tantea si la ecuación está bien resuelta, que comprueba semánticamente, que tacha las dos tareas anteriores, que plantea y resuelve bien el problema y que comprueba su propia resolución del problema. La eliminación mediante tachadura de la comprobación semántica y la realización de tantas tareas innecesarias son atribuibles, en parte, a que la comprobación de problemas algebraicos no es una tarea que se suela realizar en el álgebra escolar.

D) Respuestas incorrectas

-Errores habituales

- Hay 4 respuestas (el 14% del total) en las que se realiza una comprobación sintáctica de la ecuación $x+x+1+x+2=114$ y, como no se percibe la incoherencia entre el enunciado del problema y la ecuación planteada (los números consecutivos son 4 en el primero pero son 3 en la segunda) y como 37 es la solución correcta de la ecuación $x+x+1+x+2=114$, se dice que 37 es la solución correcta del problema.

- Hay 4 respuestas (el 14% del total) en las que también se realiza una comprobación sintáctica y en las que, no percibiéndose tampoco la incoherencia entre el enunciado y las ecuaciones, se dice que 37 es la solución correcta pero incompleta pues creen que sólo falta especificar que la solución es 37, 38 y 39.

-Errores no habituales

- Hay una respuesta (el 4% del total) en la que se aplican diferentes técnicas de carácter algebraico que llevan a conclusiones contradictorias entre sí:

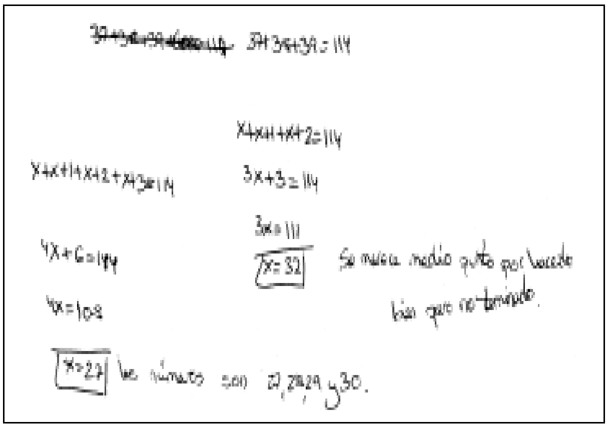


Figura VI.8. Respuesta del alumno A32

Destacamos que:

-En la primera línea se comprueba que $x=37$ es la solución de la ecuación dada $x+x+1+x+2=114$. No obstante, cuando, en la columna central, se resuelve –innecesariamente- esa misma ecuación $x+x+1+x+2=114$ y se obtiene –por un error de memoria de cálculo- que $x=32$ es la solución, no se percibe conflicto alguno (no se tacha nada) y se afirma que "*se merece medio punto por hacerlo bien pero no terminarlo*" (¿se refiere a que debe poner 37, 38 y39?

-En la columna de la izquierda se plantea y se resuelve bien el problema algebraico cuando se escribe la ecuación $x+x+1+x+2+x+3=114$ y se halla que $x=27$. Además se afirma acertadamente que "*los números son 27, 28, 29 y 30*". Tampoco ahora se percibe conflicto alguno y no se tacha nada.

Probablemente, estamos ante un alumno que maneja las técnicas de comprobación sintáctica de ecuaciones, de planteamiento sintáctico de ecuaciones y de resolución de ecuaciones pero que no sabe gestionar los resultados contradictorios que obtiene.

Lo anterior es atribuible, en parte, que en la enseñanza habitual se enfatiza más la destreza en el uso de procedimientos que en la comprensión de los conceptos.

VI.2.4.3. Comprensión de Contenidos (CC)

- Sólo una minoría de los alumnos del grupo de estudio identificó "*comprobar si un problema está bien resuelto*" con "*comprobar la solución en el enunciado (CC. XII)*".

  El éxito anterior es atribuible, en parte, a nuestra propuesta curricular alternativa que intenta, mediante la comprobación semántica, que se comprenda que los problemas algebraicos son preguntas sobre situaciones reales.

- La mayoría identificó "*la comprobación de la resolución de un problema*" con "*repasar la coherencia semántica o sintáctica entre el enunciado del problema y la ecuación planteada (CC. XV o CC. XVI) y entre ésta y la solución calculada algebraicamente (CC. X y CC. XI)*".

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que no se trabaja la comprobación en la enseñanza habitual del álgebra escolar.

- Son varios los alumnos que consideraron que un planteamiento (OC. XV o CC. XVI) incorrecto conducía necesariamente a una solución incorrecta.

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que, habitualmente, un error en el planteamiento de un problema algebraico suele llevar a una solución incorrecta.

- Hubo un alumno que planteó la ecuación correcta mediante un planteamiento semántico (CC. XV) o sintáctico CC. XVI), que la resolvió bien (CC. X y CC. XI)) y que comprobó bien dicha ecuación (CC. XIII) pero que, sin embargo, no supo gestionar los resultados obtenidos para extraer una conclusión final sobre cuál es la solución verdadera del problema.

  Las incoherencias anteriores son atribuibles, en parte, a que la enseñanza habitual pone un énfasis excesivo en la enseñanza de los procedimientos –de carácter mecanicista y reiterativo- y, sin embargo, descuida la comprensión de lo que los resultados matemáticos significan en las situaciones reales que se describen los enunciados de los problemas de álgebra.

VI.2.5. Cuestión I.5

Cuestión I.5:
Dado el sistema $\begin{cases} x-5=3(y-5) \\ x+1=2(y+1) \end{cases}$, *inventa un enunciado en el que hables de:*
-librería *-libros en inglés* *-libros en francés*

Tabla VI.9. Enunciado de la cuestión I.5

VI.2.5.1. Respuestas previsibles

Serán enunciados inventados como los siguientes (según se piense que x e y son el número de libros en inglés y francés o que son el precio de los libros en inglés y francés), pero que estarán peor expresados:

-*“Averigua el número de libros escritos en inglés y en francés que hay en una librería, sabiendo que: si tuviéramos cinco libros menos en cada uno de los idiomas anteriores, el número de los escritos en inglés triplicaría el de los escritos en francés y que, sin embargo, si tuviéramos un libro más en cada uno de los idiomas anteriores, el número de los libros escritos en inglés duplicaría el de los escritos en francés”.*

-*“Averigua el precio del libro de texto de 3º en inglés y del de 3º en francés que ha una librería, sabiendo que si rebajásemos en 5€ el precio de cada libro en inglés y de cada libro en francés, el precio del libro en inglés triplicaría el del libro en francés y que, sin embargo, si aumentásemos en 1€ el precio de cada libro en inglés y de cada libro en francés, el precio del libro en inglés duplicaría el del libro en francés”.*

VI.2.5.2. Respuestas obtenidas

A) Criterios de Evaluación

- 1) Se inventa un enunciado coherente con el sistema 2x2 y con el contexto real indicado.
- 2) Se inventa un enunciado coherente con el sistema 2x2 y con el contexto real indicado, pero se cometen errores lingüísticos de expresión.
- 3) Se inventa un enunciado incoherente con el sistema 2x2 o con el contexto real indicado.
- 4) Se deja en blanco.

B) Resultados de la evaluación

Cuestión I.5	1	2	3	4	Total
Nº de respuestas	15	4	5	4	28
%	54%	14%	18%	14%	100%

Tabla VI.10. Resultados de la cuestión I.5

C) Respuestas correctas

Tras examinar la anterior tabla VI.10 y la tabla nº 23 del Anexo III, observamos lo siguiente:

-Respuestas correctas habituales

- Hay 13 respuestas correctas (el 46% del total) en las que se inventan problemas algebraicos de comparación en los que las incógnitas son las cantidades de libros en inglés y en francés que hay en una librería y en las que se describe, tal y como se indica en las ecuaciones dadas, que hay una desigualdad real que es el punto de partida de dos igualdades hipotéticas.

-Respuestas correctas destacables

- Hay 2 respuestas (el 7% del total) en las que se inventan problemas algebraicos de comparación en los que las incógnitas x e y son respectivamente el precio de los libros en inglés y el de los libros en francés, sin explicar porqué el precio de todos los libros escritos en el mismo idioma es uniforme. Probablemente, esos dos alumnos piensan en sus libros de texto en inglés y en francés pertenecientes a un mismo nivel escolar.

- Hay una respuesta (el 4% del total) en la que, en vez de redactar un único problema sobre una librería con libros escritos en inglés y en francés, se redactan tres problemas dedicados, respectivamente, a las librerías, a los libros en inglés y a los libros en francés. Lo anterior es atribuible, en parte, a que la invención de problemas no se suele practicar en la enseñanza habitual.

D) Respuestas incorrectas.

-Errores habituales

- Hay 4 respuestas incorrectas (el 14% del total) en las que se inventan problemas de comparación en los que las incógnitas son el número de libros en inglés y en francés pero en los que, a diferencia de lo que establece el sistema algebraico que se les proporciona –que la misma desigualdad real es el punto de partida de dos igualdades hipotéticas-, se dice, al utilizar el lenguaje natural, que la desigualdad real es el punto de partida de una primera igualdad hipotética y que ésta es, a su vez, el punto de partida de una segunda igualdad hipotética.

-Errores destacables:

- Hay una respuesta (el 4% del total) en la que se inventa un problema mal estructurado sobre un sistema algebraico que se considera equivalente al dado:

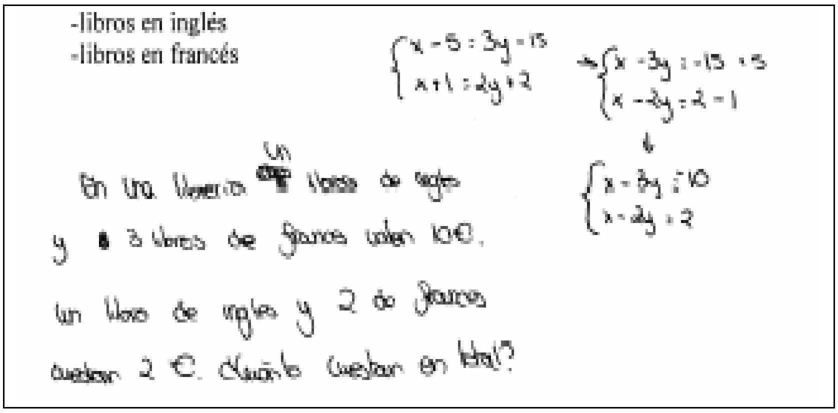


Figura VI.9. Respuesta del alumno A09

Destacamos que:

-El sistema dado, $\begin{cases} x-5=3(y-15) \\ x+1=2(y+1) \end{cases}$ se trasforma, por errores de cálculo, en el sistema $\begin{cases} x-3y=10 \\ x-2y=2 \end{cases}$.

-Los dos signos - de ambas ecuaciones se interpretan como si fueran dos signos +. Lo anterior es atribuible, en parte, a que se aplica, sin comprensión, la redacción típica de los problemas algebraicos de recuento a un sistema de ecuaciones que es la formulación de un problema algebraico de comparación de cantidades.

- Hay 2 respuestas (el 7% del total) en las que se establecen operaciones aritméticas incoherentes entre cantidades de años y cantidades de libros. Veamos la representativa respuesta del alumno A31: *"en una librería hace cinco años había el triple de libros en inglés que en francés. Dentro de un año habrá el doble."*

  Destacamos que las expresiones algebraicas $x-5=3(y-5)$ y $x+1=2(y+1)$ son traducidas al lenguaje natural o materno como "*hace cinco años había el triple de libros en inglés que en francés*" y "*Dentro de un año habrá el doble*". Es decir, ¡se están restando o sumando cantidades de años a cantidades de libros. Lo anterior es atribuible, en parte, a que se aplica –sin comprensión- la redacción típica de los problemas de edades a un sistema que es la formulación de un problema de comparación de cantidades.

VI.2.5.3. Comprensión de Contenidos (CC)

- La mayoría de los alumnos realizó la asignación de variables más natural en el contexto real de una librería: el "*número de libros escritos en cada idioma*". Sólo unos pocos estudiantes realizaron una asignación de variables –el "*precio de los libros en cada idioma*"- que resulta forzada en el contexto real de una librería -el precio de todos los libros en un idioma no suele ser el mismo- pero que sí que tiene sentido si se piensa en los libros de texto de inglés –o de francés- de un determinado curso escolar.

- La mayoría de los alumnos, con buen criterio, inventó enunciados de problemas de comparación para describir sistemas de ecuaciones que, de hecho, son la formulación de problemas de comparación (CC. XVII. 1.1).

  Lo anterior indica que muchos alumnos comprenden las igualdades hipotéticas que se establecen, a partir de la desigualdad de partida, en los problemas de comparación.

- Una minoría de alumnos inventó enunciados de problemas algebraicos de recuentos o de edades que no se corresponden con las ecuaciones que les proporcionamos, pertenecientes a un problema algebraico de comparación (CC. XVII. 1.1).

Lo anterior es atribuible a que no se comprende que las relaciones numéricas establecidas en cada tipo de problema algebraico (de comparación, de recuentos, de edades, etc), están estrechamente unidas a la presentación formal de las ecuaciones (con factores de corrección, con solo sumas y productos, etc).

VI.3. Prueba II

Tal y como explicamos anteriormente, el día 28 de enero de 2008, una semana después de la finalización de la experimentación de la propuesta curricular alternativa, 28 alumnos de los 33 que componían nuestro grupo de estudio (hubo 5 ausencias) fueron evaluados mediante la Prueba I. Tres meses y medio después, el día 12 de mayo de 2008, tras varias semanas de vuelta a la enseñanza habitual del álgebra escolar, los 28 alumnos anteriores realizaron otra vez la misma prueba.

Como nuestro objetivo es reflexionar sobre las modificaciones en la comprensión de los contenidos que se producen como consecuencia del paso del tiempo, comparamos los resultados de la Prueba I con los de la Prueba II. Para ello, dividiremos este apartado VI.3 en 5 subapartados, en cada uno de los cuales estudiamos los siguientes aspectos de cada una de las respectivas 5 cuestiones que son idénticas en ambas pruebas.

- **A) Criterios de evaluación:**

  Evidentemente, como la Prueba II es la repetición literal de la Prueba I, los criterios de evaluación de cada cuestión son los mismos que fueron especificados en el apartado anterior VI.2. No obstante, volvemos a especificar tales criterios para que la lectura sea más cómoda.

- **B) Resultados de la evaluación:**

  Como estamos estudiando la perdurabilidad en el tiempo de los contenidos de la propuesta, sólo reflexionaremos sobre los resultados de los 28 alumnos del grupo de estudio que realizaron las dos pruebas en enero y mayo de 2008, eliminado los de los 5 alumnos que se ausentaron en alguna de las prueban. Para la realización de las tablas de resultados nos basamos en las tablas de puntuaciones individuales nº 23, nº 24 y nº 25 del Anexo III “Tablas de resultados”.

- **C) Comprensión de los contenidos:**

  En esta parte comparamos la comprensión de los contenidos (CC) que los alumnos mostraron en cada cuestión de la Prueba I, con los que mostraron en la misma cuestión de la Prueba II.

VI.3.1. Comparación entre las cuestiones I.1 y II.1

Cuestiones I.1 y II.1:
Carmen tiene 42 años y su hijo 10: ¿Cuántos años han de pasar para que la edad de Carmen sea el triple de la de su hijo?

Tabla VI.13. Enunciado de las cuestiones I.1 y II.1

A) Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación de las cuestiones I.1 y II.1 fueron:

- 1) Se aplica bien el método algebraico, realizándose alguna comprobación de la solución. O se aplica bien el método aritmético de tanteo.
- 2) Se aplica bien el método algebraico pero no se presenta comprobación alguna de la solución.
- 3) Se aplica mal el método algebraico. O se aplica mal el tanteo aritmético.
- 4) Se deja en blanco.

B) Resultados de la evaluación

Calificación	**1**		**2**		**3**		**4**		**Total**	
Cuestiones	**I.1**	**II.1**	**I.1**	**II.1**	**I.1**	**II.1**	**I.1**	**II.1**	**I.1**	**II.1**
Número de Respuestas	13	4	2	12	11	10	2	2	28	28
% de Respuestas	46%	14%	7%	43%	39%	36%	7%	7%	100%	100%

Tabla VI.14. Resultados de las cuestiones I.1 y II.1

C) Comprensión de contenidos (CC)

- El método de tanteo aritmético (CC. XIV) sólo se usa para resolver el problema sobre edades en dos respuestas (una correcta y otra incorrecta) de la Prueba I y en otras dos respuestas (una correcta y otra incorrecta) de la Prueba II. El método de plantear y resolver ecuaciones (CC. XV o CC. XVI) se usa en todas las restantes respuestas -correctas e incorrectas- de ambas pruebas.

  El predominio casi absoluto del método algebraico sobre el aritmético es atribuible, en parte, al carácter predominantemente algebraico del nivel educativo (Tercero de Educación Secundaria Obligatoria) que el grupo de estudio estaba cursando.

- El número total de respuestas correctas -comprobadas o no comprobadas- sólo aumenta desde 15 respuestas en la Prueba I hasta 16 respuestas en la Prueba II. Esto es, sólo se incrementa desde el 54% hasta el 57% del total de respuestas.

Que el porcentaje de aciertos se mantenga relativamente bajo y casi invariante en ambas pruebas se debe, en parte, a que el problema sólo se puede plantear algebraicamente de forma correcta, si se realiza una atípica asignación de valor a la incógnita (que x .sea “el número de años que han de pasar para que…”, en vez de que x sea “el número de años de la edad de una persona”).

- El porcentaje de respuestas correctas que han sido comprobadas semántica (CC. XII) o sintácticamente (CC. XIII) disminuye desde el 87% del total de respuestas correctas (13 de 15 respuestas) en la Prueba I hasta el 25% del total de respuestas correctas (4 de 16 respuestas) en la Prueba II.

  Esta significativa reducción en el número de soluciones comprobadas es atribuible, en parte, a que, entre ambas pruebas, los alumnos regresaron a la enseñanza habitual del álgebra escolar, en la que no se suele practicar ningún tipo de comprobación.

- Además, las comprobaciones claramente semánticas (CC. XII) disminuyen de 3 (el 11% del total) a 0 (el 0% del total) y las comprobaciones formalmente sintácticas –que pueden ser conceptualmente semánticas o sintácticas- disminuyen de 10 (el 36% del total) a 4 (el 14% del total).

  La total desaparición de las comprobaciones semánticas y la disminución a menos de la mitad de las comprobaciones sintácticas son atribuibles, en parte, a que, entre ambas pruebas, los estudiantes regresaron a la enseñanza habitual del álgebra escolar, en la que se enfatiza la correcta resolución de las ecuaciones frente a la comprensión de las situaciones reales de los enunciados.

- El número de respuestas en las que se plantea bien la ecuación $(42+x)=3\cdot(10+x)$ pero en las que no se resuelve dicha ecuación se mantiene invariante en ambas pruebas: 4 respuestas (el 14% del total). Esto es: hubo graves carencias en la interpretación de la notación algebraica (CC. VII, CC. VIII y CC. IX) y en el manejo de las reglas de despegar y de operar (CC. X y CC. XI) que persistieron invariables.

  Lo anterior viene a indicar que la enseñanza habitual del álgebra, a pesar del mucho tiempo y esfuerzo que dedica a la operatoria algebraica, deja bolsas de alumnos que son incapaces de resolver incluso ecuaciones muy elementales.

VI.3.2. Comparación entre las cuestiones I.2 y II.2

Cuestiones I.2 y II.2: *En una droguería se venden 3 jabones y 2 botes de colonia por 12 euros, y 4 jabones y 3 botes de colonia por 17 euros. Averigua el precio de cada producto.*

Tabla VI.15. Enunciados de las cuestiones I.2 y II.2

A) Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación de las cuestiones I.2 y II.2 fueron:

- 1) Se aplica bien el método algebraico y se realiza alguna comprobación de la solución. O se aplica bien el método aritmético de tanteo.
- 2) Se aplica bien el método algebraico pero sin realizar comprobación alguna de la solución.
- 3) Se aplica mal el método algebraico o el método aritmético de tanteo.
- 4) Se deja en blanco.

B) Resultados de la evaluación

Calificación	1		2		3		4		Total	
Cuestiones	**I.2**	**II.2**	**I.2**	**II.2**	**I.2**	**II.2**	**I.2**	**II.2**	**I.2**	**II.2**
Número de Respuestas	18	9	9	17	1	2	0	0	28	28
% de Respuestas	64%	32%	32%	61%	4%	7%	0%	0%	100%	100%

Tabla VI.16. Resultados de las cuestiones I.2 y II.2

C) Comprensión de contenidos (CC)

- El 100% de los alumnos utilizó, en ambas pruebas, el método de plantear (CC. XV o CC. XVI) y resolver ecuaciones (CC. X y CC. XI) para la resolución de este problema algebraico sobre precios. Ninguno intentó resolverlo mediante tanteo aritmético (CC. XIV).

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que el enunciado del problema permite una traducción literal -palabra a palabra- que lleva a un sistema 2x2 formalmente bien planteado que, además, es fácil de resolver.

- El número de respuestas correctas sólo disminuye desde 27 (el 96% del total) hasta 26 (el 93% del total).

  Que el porcentaje de respuestas correctas ronde el 95% del total de respuestas en ambas pruebas no es tan positivo como parece porque este problema permite, aunque no se comprenda la situación comercial del enunciado, una traducción literal, palabra a palabra, que lleva a un planteamiento algebraico formalmente correcto y fácil de operar

- El número de respuestas correctas con algún tipo de comprobación semántica (CC. XII) o sintáctica (CC. XIII) se reduce a la mitad: desde 18 (el 64% del total) hasta 9 (el 32% del total).

  Esta significativa reducción del número de respuestas comprobadas es atribuible, en parte, al regreso, entre la realización de ambas pruebas, a la enseñanza habitual del álgebra escolar en la que no se suele practicar ni la comprobación de problemas ni de ecuaciones.

- El 100% de las comprobaciones son formalmente sintácticas en ambas pruebas.

  Como la situación comercial del problema permite una expresión que se corresponde literalmente con las ecuaciones algebraicas, no podemos saber si las comprobaciones pueden ser conceptualmente semánticas (CC. XII) o sintácticas (CC. XIII).

- El número de comprobaciones incompletas (aquellas en las que sólo se comprueba el precio de uno de los dos lotes o una de las dos ecuaciones) decrece desde 5 respuestas (el 18% del total) en la Prueba I hasta 2 respuestas (el 7% del total) en la Prueba II, es decir, se reduce más o menos en un 50%, tal y como ocurría con el cómputo total de comprobaciones, que decreció desde 18 respuestas (el 64% del total) en la Prueba I hasta 9 respuestas (el 32% del total) en la Prueba II.

  Lo anterior es atribuible, probablemente, a la persistencia de una minoría que no entiende que la comprobación requiere la sustitución de la solución en ambas condiciones del enunciado si es una comprobación semántica (CC. XII) o en ambas ecuaciones si es una comprobación sintáctica (CC. XIII).

VI.3.3. Comparación entre las cuestiones I.3 y II.3

Cuestiones I.3 y II.3:
La dueña de la droguería de la actividad anterior no tiene el éxito esperado con las ofertas, y por ello lanza una oferta de 6 jabones y 4 botes de colonia por 22 euros. Explica razonadamente si ha rebajado o no ha rebajado los productos.

Tabla VI.17. Enunciados de las cuestiones I.3 y II.3

A) Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación de las cuestiones I.3 y II.3 fueron:

- 1) La cuestión se responde correctamente, ya sea aplicando un método aritmético o algebraico.
- 2) Se aplica adecuadamente un método aritmético o algebraico de resolución pero se cometen errores de cálculo.
- 3) Se escriben ecuaciones incoherentes con el enunciado o se extraen conclusiones erróneas.
- 4) Se deja en blanco.

B) Resultados de la evaluación

Calificación	1		2		3		4		Total	
Cuestiones	**I.3**	**II.3**	**I.3**	**II.3**	**I.3**	**II.3**	**I.3**	**II.3**	**I.3**	**II.3**
Número de Respuestas	22	21	2	0	4	7	0	0	28	28
% de Respuestas	79%	75%	7%	0%	14%	25%	0%	0%	100%	100%

Tabla VI.18. Resultados comparados de las cuestiones I.3 y II.3

C) Comprensión de contenidos (CC)

- El número de respuestas correctas se mantuvo alto y sólo decreció un poco: hubo 24 respuestas correctas (22 sin errores de cálculo y 2 con errores de cálculo) en la Prueba I, es decir, el 86% del total, y hubo 22 respuestas correctas (todas sin errores de cálculo) en la Prueba II, es decir, el 75% del total.

  Además, salvo en una original respuesta correcta de la Prueba I en la que se realizó una resolución algebraica basada en el concepto de ecuaciones equivalentes, en todas las demás respuestas se utilizó el método aritmético (OC. V) de sustituir los precios de la anterior cuestión 2 en el lote de productos de esta cuestión 3, para saber -por comparación- si hay o no hay una rebaja de precios.

  El descenso relativamente pequeño (del 86% al 75%) en la correcta utilización del método aritmético (CC. XIV), tras regresar a la enseñanza habitual del álgebra escolar entre la realización de ambas pruebas, es atribuible, en parte, a que el alumnado, en general, utiliza el método aritmético (CC. XIV), como una 2ª opción, cuando un problema algebraico no es resoluble mediante el habitual método de plantear (CC. XV o CC. XVI) y resolver ecuaciones (CC. X y CC. XI).

- El número de respuestas en las que hay un uso forzado del método algebraico, consistente en que las mismas x e y designan los precios en la situación comercial de la anterior cuestión 2 y en la de esta cuestión 3 (sin que se trate de una demostración por reducción al absurdo) se incrementa desde 2 respuestas en la Prueba I (el 7% del total) hasta 5 respuestas en la Prueba II (el 18% del total).

  Este incremento significativo en el uso erróneo del método algebraico de plantear (CC. XV y CC. XVI) y resolver ecuaciones (CC. X y CC. XI) es atribuible, en parte, a que la enseñanza habitual del álgebra, a la que se volvió entre la realización de ambas pruebas, consolida la creencia de que el método de plantear y resolver puede solucionar todo tipo de problemas algebraicos y desplaza la tendencia natural a buscar otros métodos alternativos.

VI.3.4. Comparación entre las cuestiones I.4 y II.4

Cuestiones I.4 y II.4:
ENUNCIADO (dado por el profesor): La suma de cuatro números consecutivos es 114. Calcula dichos números. *FORMULACIÓN (trabajo del alumno):* $x + x + 1 + x + 2 = 114$ *RESOLUCIÓN (trabajo del alumno):* $x = 37$ *Realiza la comprobación para saber si el alumno se merece un punto (por hacerlo bien), un cero (por hacerlo mal) o medio punto (por hacerlo bien pero no terminarlo).*

Tabla VI.19. Enunciados de las cuestiones I.4 y II.4

A) Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación de las cuestiones I.4 y II.4 fueron:

- 1) Se responde que el problema está mal resuelto porque se comprueba la solución en el enunciado o porque se percibe la incoherencia entre el enunciado y la ecuación planteada.
- 3) Se responde que el problema está bien resuelto o que está bien resuelto pero incompleto. O se responde que está mal resuelto sin aportar argumentación alguna.
- 4) Está en blanco.

B) Resultados de la evaluación

Calificación	**1**		**3**		**4**		**Total**	
Cuestiones	**I.4**	**II.4**	**I.4**	**II.4**	**I.4**	**II.4**	**I.4**	**II.4**
Número de Respuestas	18	21	10	4	18	21	10	4
% de Respuestas	64%	75%	35%	14%	64%	75%	35%	14%

Tabla VI.20. Resultados comparados de las cuestiones I.4 y II.4

C) Comprensión de contenidos (CC)

- El número total de respuestas correctas en las que la solución se comprueba semánticamente (CC. XII) disminuyó de 2 respuestas (el 7% del total) en la Prueba I a 0 respuestas (el 0% del total) en la Prueba II.

  El escaso número de alumnos que recurrieron a sustituir las soluciones en el enunciado del problema y su total desaparición tras volver a la enseñanza habitual del álgebra escolar son atribuibles, en parte, a que el álgebra refuerza la percepción de que lo importante no es la situación real que se describe en el enunciado del problema, sino la aplicación de la herramienta algebraica.

- El número total de respuestas correctas en las que se repasó acertadamente el método algebraico aumentaron desde 16 respuestas (el 57% del total) en la Prueba I hasta 21 respuestas (el 75% del total) en la Prueba II.

  Que el porcentaje de respuestas en las que se repasa acertadamente la aplicación del método algebraico haya subido de un 57% a un 75%, es atribuible, en parte, a que, entre la realización de ambas pruebas volvieron a la enseñanza habitual del álgebra y, en ésta, trabajaron la destreza en el planteamiento y la resolución de problemas.

- El número de respuestas correctas en las que se repasa sólo el planteamiento de la ecuación (CC. XV o CC. XVI) aumentó desde 2 respuestas (el 7% del total) en la Prueba I hasta 9 respuestas (el 32% del total) en la Prueba II. A su vez, el número de aquellas respuestas correctas en las que se repasó el planteamiento (CC. XV o CC. XVI) y la resolución de la ecuación (CC. X y CC. XI) disminuyó desde 14 respuestas (el 50% del total) hasta 11 respuestas (el 39% del total).

  El reforzamiento de la tendencia a considerar que el problema está mal resuelto porque su enunciado está mal planteado y a omitir, en consecuencia, el repaso de la resolución de las ecuaciones es atribuible, en parte, a que la práctica habitual del álgebra escolar (a la que volvieron entre ambas pruebas) refuerza la percepción de que los problemas mal planteados suelen originar soluciones erróneas.

- El número de respuestas incorrectas, en las que sólo se realiza una comprobación sintáctica de las ecuaciones (CC. XIII) y en las que, como no se percibe que éstas están mal planteadas, se afirma que el problema está bien resuelto, se mantuvo invariante: 4 respuestas (el 14% del total).

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que persiste una minoría importante de alumnos que sólo estudia si la resolución de las ecuaciones de un problema es correcta, sin prestar atención a si éstas son coherentes con el enunciado de dicho problema.

VI.3.5. Comparación entre las cuestiones I.5 y II.5

Cuestiones I.5 y II.5:

Dado el sistema $\begin{cases} x-5=3(y-5) \\ x+1=2(y+1) \end{cases}$*, inventa un enunciado en el que hables de:*

-librería
-libros en inglés
-libros en francés

Tabla VI.21. Enunciados de las cuestiones I.5 y II.5

A) Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación de las cuestiones 1.1 y II.1 fueron:

- 1) Se inventa un enunciado coherente con el sistema 2x2 y con el contexto real indicado.
- 2) Se inventa un enunciado coherente con el sistema 2x2 y con el contexto real indicado, pero se cometen errores lingüísticos de expresión.
- 3) Se inventa un enunciado incoherente con el sistema 2x2 o con el contexto real indicado.
- 4) Se deja en blanco.

B) Resultados de la evaluación

Calificación	**1**		**2**		**3**		**4**		**Total**	
Cuestiones	**I.5**	**II.5**	**I.5**	**II.5**	**I.5**	**II.5**	**I.5**	**II.5**	**I.5**	**II.5**
Número de Respuestas	15	13	4	3	5	5	4	7	28	28
% de Respuestas	54%	46%	14%	11%	18%	18%	14%	25%	100%	100%

Tabla VI.22. Resultados comparados de las cuestiones I.5 y II.5

C) Comprensión de contenidos (CC)

- El número de respuestas correctas en las que se inventan enunciados de problemas algebraicos de comparación que son coherentes con las ecuaciones y con el contexto real que les proporcionamos (CC. XVII. 1.1) disminuyó desde 19 respuestas (el 68% del total) en la Prueba I (15 de ellas bien expresadas y 4 mal expresadas) hasta 16 respuestas (el 57% del total) en la Prueba II (13 bien expresadas y con 3 mal expresadas). Es decir, el número de invenciones correctas disminuyó desde 19 hasta 16 y el número de ellas que estaban mal expresadas sólo disminuyó de 4 a 3.

  La disminución en la destreza para inventar enunciados y la persistencia del número de respuestas con errores de tipo expresivo son atribuibles, en parte, a que no se suele practicar la invención de problemas de álgebra en la enseñanza habitual.

- El número de respuestas incorrectas en las que se inventan enunciados que son incoherentes con las ecuaciones que se les proporcionamos (CC. XVII. 1.1) se mantuvo invariable en ambas pruebas: 5 respuestas (el 18% del total).

  La persistencia de una bolsa de alumnos que no sabe traducir –en sentido inverso- desde el lenguaje algebraico al lenguaje natural o materno es atribuible, en parte, a que la enseñanza habitual, a la que los alumnos regresaron, no ayuda a comprender las relaciones entre las cantidades del mundo real que aparecen en los enunciados de los problemas algebraicos, a pesar del mucho esfuerzo que se dedica en el álgebra escolar a la adquisición de la destreza en el planteamiento de problemas.

VI.4. Conclusiones

Tras evaluar la perdurabilidad de la comprensión de contenidos (CC) de la propuesta alternativa en el grupo de experimentación de 3º de ESO (14-15 años) del IES "Goya" de Zaragoza del curso 2007-08, en este apartado VI.4, exponemos las conclusiones a las que llegamos sobre el nivel de comprensión de contenidos (CC) que alcanzó dicho grupo de experimentación.

En cada conclusión incluimos su respectiva reflexión crítica sobre la validez de la propuesta alternativa que hemos diseñado y experimentado y, además, indicamos cómo ampliaríamos dicha propuesta para su mejora. El estudio de las conclusiones lo articulamos en torno a los tres focos de investigación de esta tesis: El diferente significado de las letras según la expresión matemática en la que aparecen (Primer Foco); La comprobación de las soluciones (Segundo Foco); Las conexiones entre el lenguaje natural –o materno- y el lenguaje algebraico (Tercer Foco).

Finalizamos este apartado VI.4 con una síntesis global sobre la validez de la propuesta alternativa que diseñamos e implementamos en el aula.

A) Conclusiones sobre el Primer Foco

Recordemos que el Primer Foco -el diferente significado de las letras según la expresión matemática en la que aparecen- incluye las siguientes unidades de análisis de comprensión de contenidos:

- Interpretaciones de las letras como valores cualesquiera. (CC. I)
- Interpretaciones de las letras como valores concretos que verifican la igualdad. (CC. II)
- Interpretaciones de las letras como abreviaturas de unidades de medida o de sustantivos. (CC. III)
- Tanteo aritmético en ecuaciones compatibles determinadas. (CC. IV)
- Interpretación de las ecuaciones incompatibles. (CC. V)
- Interpretación de las ecuaciones compatibles indeterminadas. (CC. VI)
- Invisibilidad del número 1 en determinados objetos matemáticos. (CC. VII)
- Invisibilidad del punto del producto. (CC. VIII)
- Equivalencia de la barra de fracción a un paréntesis. (CC. IX)
- Reglas usadas para despejar en las ecuaciones. (CC. X)
- Reglas usadas para operar en las ecuaciones. (CC. XI)

Las conclusiones a las que llegamos sobre las unidades de análisis de comprensión de contenidos (CC) de este Primer Foco son:

- *1a) Muchos alumnos de 3º de ESO piensan que las letras de los polinomios son incógnitas cuyo valor hay que calcular.*

  El error anterior es atribuible, en parte, a que, en la enseñanza habitual del álgebra escolar, se pone mucho énfasis en la operatoria entre polinomios y muy poco énfasis en la comprensión de los polinomios como funciones que relacionan conjuntos de números reales entre sí.

  La propuesta experimentada se limita a estudiar si los alumnos identifican las letras de los polinomios como variables, incógnitas o abreviaturas. Una ampliación de la propuesta incluiría actividades en las que polinomios sobre situaciones problemáticas del mundo real serían estudiados como funciones que relacionan conjuntos de números reales entre sí y que son representables como fórmulas, tablas de valores y gráficas de funciones. (Para lo anterior serían muy útiles herramientas informáticas tales como la calculadora programable, la hoja de cálculo Excel, el programa Geogebra, etc).

- 1b) *Muchos alumnos de 3º de ESO identifican las letras de cualquier expresión algebraica (polinomio, ecuación, fórmula, identidad, etc) como abreviaturas de palabras.*

  El error anterior es atribuible, en parte, a prácticas docentes que son habituales en el medio escolar:

  -En las fórmulas geométricas y las físicas, para facilitar su transmisión oral y su memorización, las letras son referidas como elementos (b es la base, a es la altura, m es la masa, V es el volumen, etc), en vez de como medidas de elementos (b es la longitud de la base, a es la longitud de la altura, m es la cantidad de masa, V es la cantidad de volumen, etc).

  -Muchos problemas de álgebra pueden plantearse de manera formalmente correcta si se piensa que los números, las letras y las operaciones de las ecuaciones son palabras que están escritas abreviadamente y se concibe el signo = como abreviatura de una palabra (o de un grupo de palabras) o signo de correspondencia entre conjuntos de objetos.

  La propuesta curricular alternativa sí que aborda la enseñanza del papel de las incógnitas como cantidades, en vez de como palabras abreviadas, mediante la utilización del tanteo aritmético (para la resolución de ecuaciones y problemas), de la comprobación sintáctica de las ecuaciones, de la comprobación semántica de los problemas y de la invención de enunciados. Lo que nuestra propuesta no aborda es la enseñanza del papel de las letras como variable o abreviatura, limitándose a analizar si los alumnos comprenden tales papeles. Una ampliación de la propuesta incluiría la enseñanza de muchas situaciones del mundo real en las que las letras son variables (funciones de la vida real) o abreviaturas de palabras (unidades de medida, siglas, etc) o etiquetas (matrículas, códigos de barra, etc).

- *1c) Pocos alumnos de 3º de ESO razonan aritméticamente cuáles son las soluciones de las ecuaciones de la forma* $ax = 0$ *(con* $a \neq 0$*),* $0x = a$ *(con* $a \neq 0$*) y* $0x = 0$*. La mayoría recurre a una memorización no comprensiva.*

  El grupo de experimentación entendió el método de resolución de ecuaciones mediante tanteo aritmético cuando surgió en la actividad nº 1 de la propuesta, aunque tal método no suele trabajarse en el álgebra escolar. Sin embargo, cuando aparecieron ecuaciones de la forma $ax = 0$ (con $a \neq 0$), $0x = a$ (con $a \neq 0$) y $0x = 0$ en la actividad nº 3 de la propuesta, la mayoría de los alumnos no tantearon aritméticamente cuál era la solución de las anteriores ecuaciones sino que apelaron a una memoria no comprensiva y dijeron expresiones del tipo "*imposible*", "*no se puede*", "*identidad*", "*infinito*", etc.

  Como los conceptos de solución y de tanteo aritmético de la propuesta alternativa se asimilan fácilmente pero no desplazan completamente los conocimientos previos sobre la resolución de ecuaciones de la forma $ax = 0$ (con $a \neq 0$), $0x = a$ (con $a \neq 0$) y $0x = 0$, una ampliación de la propuesta incidiría en el uso del tanteo aritmético para buscar la solución de otros tipos de ecuaciones (de 3º grado, de 4º grado, de 5º grado, etc) que no son resolubles mediante operaciones algebraicas. Se trataría de reforzar la noción de que el tanteo aritmético –de prueba y error- es el recurso a usar cuando las reglas algebraicas habituales no permiten encontrar la solución de una ecuación.

- *1d) Muchos alumnos de 3º de ESO resuelven mal las ecuaciones de 1 incógnita y los sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas debido a una deficiente comprensión de la aritmética que han estudiado en Primaria y en Secundaria: tienen dificultad para sumar números enteros, reducir a mínimo común denominador, eliminar denominadores en los dos miembros de una igualdad y calcular las expresiones aritméticas que resultan al sustituir un número negativo en una expresión algebraica.*

  Muchos alumnos de 3º de ESO tampoco conocen y utilizan las normas sintácticas del lenguaje algebraico: la invisibilidad del signo "por" del producto; la invisibilidad del 1 como coeficiente, como denominador y como factor delante de los paréntesis; la equivalencia de la supresión de una barra de fracción a la eliminación de un paréntesis, cuando se suprimen denominadores en las ecuaciones.

  Además, tales errores en el uso de la aritmética y en la interpretación de la notación algebraica no disminuyen con la práctica reiterada de la resolución de ecuaciones y de sistemas. Por ejemplo, el porcentaje de estudiantes que no resuelve bien la ecuación $42 + x = 3 \cdot (10 + x)$ *de la cuestión 1 es el mismo en la Prueba I (ubicada nada más terminar nuestra experimentación) que en la II (ubicada después de tres meses de regreso al álgebra escolar habitual): el 14%.*

Nuestra propuesta no trabaja específicamente ni la enseñanza de las reglas aritméticas empleadas en la resolución de ecuaciones ni la interpretación de la notación algebraica de las ecuaciones, sino que se limita a analizar si las reglas son bien aplicadas y si la notación es bien interpretada en la actividad nº 2 de la propuesta “Resolución de ecuaciones” y en las ecuaciones de los planteamientos de los problemas de álgebra de las demás actividades. Una ampliación de la propuesta abarcaría la enseñanza de las reglas aritméticas que son necesarias para la resolución de las ecuaciones y de la notación algebraica utilizada en las ecuaciones.

B) Conclusiones sobre el Segundo Foco

Recordemos que el Segundo Foco -la comprobación de las soluciones- incluye los siguientes unidades de análisis de comprensión de contenidos (CC):

- Comprobación semántica. (CC. XII)
- Comprobación sintáctica. (CC. XIII)
- Resolución aritmética de los problemas algebraicos. (CC. XIV)

Las conclusiones a las que llegamos sobre las anteriores unidades de comprensión de contenidos (CC) del Segundo Foco de investigación son:

- *2a) Muchos alumnos de 3º de ESO, ante problemas que no son resolubles mediante el método algebraico habitual, usan correctamente el tanteo aritmético como 2ª opción, tras intentar el planteamiento y resolución de ecuaciones como 1ª opción.*

  El uso de dicho método aritmético de tanteo disminuye con el paso del tiempo.

  Que el planteamiento de ecuaciones fuese la 1ª opción es esperable puesto que la totalidad de la propuesta curricular alternativa y la casi totalidad del curso de 3º de ESO se desarrollan en un contexto algebraico.

  Que muchos alumnos de 3º de ESO sean capaces de usar el tanteo aritmético como 2ª opción viene a indicar que persiste cierta capacidad natural para razonar aritméticamente sobre cuestiones problemáticas del mundo real.

  La propuesta alternativa probablemente favorece el uso del tanteo aritmético como 2ª opción cuando el método algebraico habitual no es aplicable porque pone el énfasis en la situación problemática real descrita en el enunciado (comprobaciones semánticas, invenciones de problemas). Por el contrario, el retorno a la enseñanza habitual, que pone el énfasis en el planteamiento y la resolución de ecuaciones, probablemente favorece la utilización del método algebraico incluso cuando éste no es aplicable. Una ampliación de la propuesta incluiría una mayor cantidad y variedad de problemas que sólo sean resolubles mediante tanteo aritmético.

- *2b) Hay alumnos de 3º de ESO que siguen identificando, a pesar del paso del tiempo, la comprobación de las ecuaciones y la de los problemas de álgebra con el repaso o con la repetición de los procesos de resolución de las ecuaciones y de los problemas. Esto es, hay alumnos de 3º de ESO que no han integrado la comprobación sintáctica de las ecuaciones y la comprobación semántica de los problemas con sus conocimientos previos.*

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que el álgebra escolar habitual pone el énfasis en la aplicación rigurosa de los procedimientos y no estudia da si las soluciones obtenidas verifican las igualdades matemáticas –en el caso de la resolución de ecuaciones- o las condiciones reales descritas en los enunciados –en el caso de la resolución de problemas de álgebra-.

  Una ampliación de la propuesta incluiría actividades en las que se trabaje específicamente cuál es la diferencia entre repasar (o repetir) y comprobar (o verificar) ecuaciones y problemas.

- *2c) Hay alumnos de 3º de ESO que identifican comprobar la solución de un problema de álgebra con repasar -o repetir- el planteamiento y sustituir las soluciones en las ecuaciones para ver si se verifican las igualdades (comprobación sintáctica). Algunos otros incluso identifican comprobar un problema de álgebra con realizar únicamente la comprobación sintáctica de las ecuaciones.*

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que hay alumnos que perciben que comprobar sintácticamente es más rápido y cómodo que repasar o repetir la resolución del sistema pero que no comprenden que lo importante es analizar si se ha resuelto la situación problemática real descrita en el enunciado.

  Una ampliación de la propuesta incluiría una actividad en la que tendrían que relacionar -utilizando sólo cuentas aritméticas- una lista de problemas de álgebra con sus posibles soluciones.

- *2d) Muchos alumnos de 3º de ESO sustituyen la solución solamente en 1 de las 2 ecuaciones de un sistema de 2 ecuaciones –si la comprobación es sintáctica- o sustituyen la solución solamente en 1 de las 2 condiciones de un enunciado –si la comprobación es semántica-.*

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que la comprobación -sintáctica o semántica- es una práctica muy novedosa que los alumnos del grupo de experimentación sólo han practicado en unas pocas actividades de la propuesta didáctica alternativa.

  Nuestra propuesta curricular no ha trabajado específicamente el estudio de pares de números (por ejemplo: $x=3$ e $y=1$) que verifiquen sólo 1 de las 2 ecuaciones del sistema o 1 de las 2 condiciones del problema. Una ampliación de la propuesta trabajaría específicamente la noción de que la comprobación (sintáctica o semántica) debe verificarse en las 2 ecuaciones de un sistema o en las 2 condiciones de un problema. Se incluiría una actividad en la que se tendría que comprobar (sintáctica o semánticamente) qué pares de números de unas tablas que les proporcionaríamos verifican 0, 1 o 2 ecuaciones de ciertos sistemas dados o 0, 1 o 2 condiciones de ciertos problemas también dados.

- *2e) Son pocos los alumnos de 3º de ESO que, tras la experimentación de la propuesta alternativa, voluntariamente comprueban los problemas que plantean y resuelven. Además predominan las comprobaciones sintácticas sobre las semánticas.*

  Son aún menos los alumnos que, tres meses después del regreso a la enseñanza habitual del álgebra escolar, voluntariamente comprueban los problemas que plantean y resuelven. Es más, las comprobaciones semánticas desaparecen y sólo quedan algunas comparaciones sintácticas.

  Como muestra de lo anterior recordamos un ejemplo: en la cuestión nº 1 (un problema de edades) de la Prueba I (realizada tras la experimentación) y de la Prueba II (realizada tras tres meses de regreso a la enseñanza habitual), sobre un total de 28 estudiantes evaluados, el número de resoluciones correctas sólo baja de 27 a 26, pero el de las resoluciones comprobadas semánticamente baja de 3 a 0 y el de las comprobadas sintácticamente baja de 10 a 4

  Todo lo anterior –que sólo una minoría incorpore la comprobación como el último paso del proceso de resolución y que la cantidad y calidad de las comprobaciones empeore con el retorno a la enseñanza habitual es atribuible, en parte, a que el álgebra escolar habitual valora sólo la ejecución correcta de los procedimientos de resolución y no da importancia a la comprensión de la situación problemática real que hay que resolver.

  Nuestra propuesta tiene varias actividades en las que se le pide (explícita o implícitamente) al estudiante que compruebe semánticamente las soluciones de los problemas. En una ampliación de la propuesta se exigiría la comprobación semántica a todos los problemas que se planteen y resuelvan algebraicamente en 3º de ESO, para desarraigar la práctica habitual de plantear y resolver problemas de álgebra que luego no son comprobados semánticamente.

C) Conclusiones sobre el Tercer Foco de investigación

Recordemos que el Tercer Foco -las conexiones entre el lenguaje natural o materno y el lenguaje algebraico- incluye las siguientes unidades de análisis de comprensión de contenidos (CC):

- Interpretación de los símbolos de las ecuaciones como incógnitas, signos de operaciones aritméticas o de igualdad entre cantidades. (CC. XV)

- Interpretación de las letras y operaciones de las ecuaciones como palabras abreviadas o del = como signo $\rightarrow$ de correspondencia entre cantidades. (CC. XVI)
- Invención de enunciados en un determinado contexto. (CC. XVII)

Las conclusiones a las que llegamos sobre las anteriores unidades de comprensión de contenidos de este Tercer Foco de investigación son:

- *3a) Los alumnos de 3º de ESO suelen plantear bien los problemas si el orden de las palabras del enunciado coincide con el orden de los símbolos de las ecuaciones. Sin embargo, muchos de esos alumnos plantean mal los problemas si el orden del texto no coincide con el orden de las ecuaciones.*

  Lo anterior apunta a que muchos alumnos perciben los planteamientos de los problemas como si fueran transcripciones abreviadas y literales de los textos de los enunciados, sin comprender ni la situación problemática real descrita en el texto del enunciado ni el concepto mismo de ecuación como igualdad aritmética entre unos números conocidos y unos números desconocidos.

  Como el orden del texto de muchos problemas de álgebra coincide con el de las ecuaciones que lo formulan, nuestra propuesta alternativa -basada en explicitar el carácter aritmético de la situación problemática descrita en el enunciado mediante la comprobación semántica de la solución y en obligar a reflexionar sobre dicho carácter aritmético mediante la invención de enunciados- es especialmente útil para que el alumno perciba las ecuaciones como igualdades aritméticas entre cantidades, en vez de cómo oraciones gramaticales escritas abreviadamente.

  Una ampliación de la propuesta incluiría muchos problemas en los que el orden del texto no coincidiese con el del enunciado: problemas de comparación de cantidades; problemas de carácter geométrico con los datos expresados en dibujos, problemas cuyos datos requieran una elaboración previa, problemas con datos repetidos pero expresados de diferente manera, etc-

- *3b) Casi todos los alumnos de 3º de ESO suelen plantear sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas en los problemas con 2 cantidades desconocidas. Casi ningún estudiante plantea ecuaciones con 1 incógnita en dichos problemas.*

  Lo anterior apunta a que a los alumnos prefieren los planteamientos sintácticos (como sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas) a los semánticos (como ecuaciones de 1 incógnita) en los que hay que estudiar la relación de dependencia existente entre las cantidades desconocidas y utilizar esa relación para plantear otra igualdad que será la ecuación a resolver.
  Lo anterior es atribuible, en parte, a que el planteamiento sintáctico requiere menos comprensión y esfuerzo que el semántico.

Nuestra propuesta alternativa incluye: problemas que se plantean mediante ecuaciones de 1 incógnita (porque sólo hay 1 dato desconocido o porque hay 3 o más datos desconocidos); problemas que se plantean mediante sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (porque ninguno de los 2 datos desconocidos es expresable en función del otro); problemas que se plantean mediante ecuaciones de 1 incógnita o mediante sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (porque 1 de los 2 datos desconocidos es expresable en función del otro). Una ampliación de la propuesta incluiría una actividad en la que varios datos se expresarían en función de uno de ellos mediante fórmulas, tablas y representaciones gráficas y también incluiría una actividad en la que se resolverían, comprobarían e inventarían problemas de álgebra en los que apareciesen 3 o más datos desconocidos que fuesen expresables en función de uno dado.

- *3c) Muchos alumnos de 3º de ESO comenten el error de inversión (para la suma, la diferencia y el producto) en los problemas de comparación de cantidades. Además, la frecuencia del error de inversión aumenta cuánto mayor es el grado de abstracción de la operación involucrada, es decir, es más habitual para el producto que para la resta y es más habitual para ésta última que para la suma.*

  El error de inversión puede atribuirse, en parte, a que se considera que las ecuaciones son la transcripción literal y abreviada de los textos de los enunciados. (Por ejemplo, el texto "*hay 10 veces más alumnos que profesores*" se traduce como "$10a = p$" porque se piensa que el orden del texto y el orden algebraico deben coincidir y el adjetivo 10 está más cerca del sustantivo "*alumnos*" que del sustantivo "*profesores*").

  El error de inversión puede atribuirse, en parte, a que se considera que el signo = de las ecuaciones es un signo de correspondencia entre subconjuntos de elementos. (Por ejemplo, el texto "*hay 10 veces más alumnos que profesores*" se traduce como "$10a = p$" porque se piensa que $10a = p$ indica que por cada subconjunto formado por 10 alumnos hay un subconjunto formado por 1 profesor).

  Que el error de inversión sea más frecuente en el producto que en la resta y que lo sea más en ésta que en la suma es atribuible, en parte, a que con el incremento de la abstracción aumenta la dificultad para reflexionar sobre la desigualdad existente entre las cantidades.

  Nuestra propuesta intenta eliminar el error de inversión mediante el desplazamiento del énfasis sobre los procedimientos matemáticos de planteamiento y resolución de ecuaciones, hacia el énfasis en la comprensión de la situación problemática real mediante la comprobación semántica y la invención de problemas de álgebra sobre comparación de cantidades. Una ampliación de la propuesta incluiría más y más variadas actividades de comprobación semántica y de invención de de problemas de álgebra sobre comparación de cantidades.

- *3d) Algunos alumnos de 3º de ESO sólo expresan exclusivamente un aumento o una disminución cuando plantean problemas de comparación en los que un personaje da una cierta cantidad de objetos al otro.*

  El error anterior es atribuible, en parte, a que el verbo “dar” aparece sólo una vez en el texto del enunciado y, sin embargo, sus consecuencias se deben expresar respectivamente como un aumento y una disminución en cada uno de los 2 miembros de la ecuación planteada.

  Nuestra propuesta alternativa, al insistir en la comprensión de las igualdades de los problemas mediante la práctica de la comprobación semántica y de la invención de enunciados, favorece que el planteamiento de tales problemas se base en la comprensión de las situaciones reales: que un sujeto dé objetos a otro sujeto implica una pérdida de objetos para el 1º y una ganancia de objetos para el 2º. Una ampliación de la propuesta incluiría actividades en las que se analizarían desigualdades aritméticas en las que los dos miembros aumentan o disminuyen, desigualdades aritméticas en las que sólo un miembro aumenta o disminuye y desigualdades aritméticas en las que un miembro aumenta y el otro miembro disminuye.

- *3e) Algunos alumnos de 3º de ESO carecen de los conocimientos previos que son necesarios para plantear correctamente ciertos tipos de problemas de álgebra. Por ejemplo:*

  -Hay alumnos que confunden el concepto de perímetro con el de área o que desconocen la fórmula del área de un rectángulo. Sin dominar bien tales nociones de geometría elemental no se pueden plantear correctamente los problemas de álgebra sobre temas geométricos.

  -La mayoría de los alumnos no realizan dibujos en la resolución de los problemas geométricos. Evidentemente, la carencia del hábito de dibujar en geometría dificulta la resolución de los problemas de álgebra sobre temas geométricos.

  -Hay alumnos que no saben pasar todos los datos monetarios del enunciado a las mismas unidades de medida (euros o céntimos de euros,…) o calcular el precio total de una cantidad multiplicando los kg por los euros que cuesta cada kg. Sin tales manipulaciones previas no es posible plantear correctamente los problemas de álgebra sobre mezclas.

  -Hay alumnos que confunden la descripción de 2 igualdades hipotéticas que parten “en paralelo” de una común desigualdad real con la descripción de una 1ª igualdad hipotética que parte de una desigualdad real y de una 2ª igualdad hipotética que parte “en serie” de dicha 1ª igualdad hipotética. Si no se

comprende previamente tal diferencia, no es posible plantear correctamente los problemas de álgebra de comparación de cantidades sobre igualdades hipotéticas que parten "en paralelo" de una común desigualdad real

Las carencias de conocimientos geométricos elementales, del hábito de dibujar en geometría, de cambiar unidades y de calcular el precio total de una mezcla son atribuibles, en parte, a una deficiente asimilación de nociones matemáticas elementales de los cursos anteriores a 3º de ESO. Sin embrago, la carencia en la comprensión de las desigualdades hipotéticas es atribuible, en parte, a una deficiente comprensión lingüística.

Nuestra propuesta didáctica alternativa no abarca ni el repaso de nociones matemáticas elementales ni la mejora de la comprensión lingüística. Tampoco incluye actividades especialmente destinadas a la comprensión de las desigualdades hipotéticas. Una ampliación de la propuesta incluiría: Actividades de repaso de los conceptos y de las fórmulas geométricas planas y espaciales; Actividades de comprobación semántica y de invención de problemas de álgebra sobre asuntos geométricos; Actividades de repaso de transformación de unidades y de cálculos de precios de mezclas; Actividades de comprobación semántica y de invención de problemas de álgebra sobre mezclas; Actividades de comprobación semántica y de invención de problemas de álgebra sobre igualdades hipotéticas que parten "en paralelo" de una misma desigualdad real.

- *3f) El número de alumnos de 3º de ESO que resuelve bien los problemas de álgebra se mantiene estable tres meses después de la experimentación. Esto es, la vuelta a la enseñanza habitual ni mejora ni empeora la habilidad de los alumnos para plantear y resolver problemas de álgebra.*

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que la enseñanza habitual ni mejora ni empeora la comprensión de las situaciones problemáticas reales que son descritas en los enunciados porque únicamente se basa en la aplicación de las técnicas matemáticas de planteamiento y resolución de ecuaciones y así, el estudiante que planteaba semánticamente las ecuaciones sigue planteándolas semánticamente y el que las plantea sintácticamente sigue planteándolas sintácticamente.

- *3g) Hay alumnos de 3º de ESO que, cuando tienen que inventar problemas que sean coherentes con ciertas ecuaciones y contextos reales que les proporcionamos, redactan textos en los que sólo describen las operaciones matemáticas de las ecuaciones (el doble del número de gallinas más el cuádruple del número de conejos es 70), mientras que hay otros estudiantes que redactan textos en los que describen situaciones problemáticas reales (el número total de patas de gallinas y conejos es 70). Evidentemente, las primeras invenciones se pueden calificar de "sintácticas" porque son casi meras repeticiones verbales de las ecuaciones proporcionadas y las segundas* *invenciones se pueden calificar de "semánticas" porque requieren la comprensión de la situación problemática real.*

Nuestra propuesta curricular alternativa favorece que las invenciones sean semánticas porque les solemos proporcionar, además de unas ecuaciones, unos contextos reales de referencia (granjas-ovejas-gallinas, garajes-coches-motos, etc). No obstante, no puede evitar que algunos estudiantes realicen invenciones sintácticas en los que el contexto real de referencia sea irrelevante al focalizar la descripción realizada en el lenguaje natural o materno en las operaciones aritméticas (sumar, restar, duplicar, triplicar, cuadriplicar). Una ampliación de la propuesta incluiría una actividad en la que los estudiantes deberían calificar con un 0 o con 1 unos enunciados inventados según fuesen meras descripciones de las operaciones matemáticas o requieran cierto conocimiento del mundo real.

- *3h) Unos pocos alumnos de 3º de ESO, cuando tienen que inventar problemas que sean coherentes con ciertas ecuaciones y contextos reales que les proporcionamos, redactan problemas aritméticos, esto es, solucionables mediante la aplicación reiterada de una o más operaciones aritméticas. De hecho, algunos estudiantes identifican los términos independientes b_1 y b_2 de los sistemas* $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ *como las soluciones que hay que calcular aritméticamente, es decir, confunden el significado del signo = en el álgebra con el del signo = en la aritmética.*

  Nuestra propuesta curricular alternativa favorece que los problemas inventados sean de naturaleza algebraica porque les solemos proporcionar casi siempre unas ecuaciones con las que las invenciones de enunciados deben ser coherentes. Pero no puede impedir que algunos alumnos inventen problemas de carácter aritmético. Una ampliación de la propuesta incluiría una actividad en la que habría de resolver, comprobar y clasificar unos problemas dados como algebraicos o aritméticos. Se trataría de que todo el alumnado relacione "resolución mediante ecuaciones" con "problema algebraico" y "resolución mediante operaciones aritméticas" con problema aritmético".

- *3j) Algunos alumnos de 3º de ESO utilizan verbos en modo indicativo (en vez de en subjuntivo y en condicional) cuando tienen que inventar problemas sobre igualdades hipotéticas que parten "en paralelo" de una misma desigualdad real.*

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que la representación y la expresión de un igualdad hipotética es más compleja que de una igualdad real.

  Una ampliación de la propuesta incluiría una actividad previa en la que los alumnos realizarían redacciones en las que tendrían que expresar hipótesis sobre diversas situaciones de la vida cotidiana.

- *3k) Cuando sólo se predetermina el contexto real (librería, garaje, granja, etc), sin proporcionar ecuación alguna, tenemos que:*
  -Algunos alumnos inventan problemas cuyos planteamientos son sistemas compatibles indeterminados (de 1 ecuación con 2 incógnitas o de 2 ecuaciones con 3 incógnitas). Como los problemas suelen ser siempre compatibles determinados en 3º de ESO, probablemente tales estudiantes no analizan ni el planteamiento ni las soluciones del problema inventado.

  -Algunos estudiantes de 3º de ESO inventan problemas cuyos planteamientos son sistemas compatibles determinados cuyas soluciones no tienen sentido en el contexto real del problema (por ejemplo, el número de coches que hay en un garaje es un número negativo o fraccional). Probablemente tales estudiantes analizan el planteamiento pero no las soluciones del problema inventado.

  -Algunos alumnos de 3º de ESO inventan problemas cuyos planteamientos son sistemas compatibles determinados cuyas soluciones sí tienen sentido en el contexto real del problema (por ejemplo, el número de coches que hay en un garaje es un número entero y positivo). Probablemente tales estudiantes analizan el planteamiento y las soluciones del problema inventado.

  Nuestra propuesta didáctica alternativa, como la invención de problemas es una actividad novedosa para los alumnos, se centra más en la invención a partir de unas ecuaciones dadas que en la invención sin proporcionar ecuación alguna. Una ampliación de la propuesta incluiría una actividad en la que los estudiantes tendrían que resolver y comprobar semánticamente los problemas que inventan para que analicen tanto sus planteamientos como sus soluciones.

- *3l) Como la invención de problemas es una práctica novedosa para los alumnos de 3º de ESO tenemos que:*

  -Algunos estudiantes incluyen la asignación de variables (decir qué es lo qué cantidades desconocidas representan la letras x e y), dentro del enunciado del problema.

  -Algunos estudiantes omiten preguntar en el enunciado cuál o cuáles son las cantidades desconocidas que hay que calcular.

  -Algunos estudiantes cometen errores de puntuación ortográfica que alteran el significado de problemas que, probablemente, están bien concebidos pero mal expresados.

  Una prolongación en el tiempo de la práctica de la invención de problemas tendería a eliminar los dos primeros errores. Unas actividades lingüísticas específicamente destinadas a la mejora de la puntuación ortográfica ayudaría a eliminar el tercer error.

- *3m) El número de alumnos de 3º de ESO que inventan problemas correctos disminuye tras tres meses de regreso a la enseñaza habitual del álgebra. Así, el grupo evaluado pasa de presentar 15 invenciones correctas, 4 invenciones casi correctas (o con errores de expresión), 5 invenciones incorrectas y 4 respuestas en blanco en la cuestión nº 5 de la Prueba I (realizada tras la experimentación) a presentar 13 invenciones correctas, 3 invenciones casi correctas (sólo contienen errores de expresión), 5 invenciones incorrectas y 7 respuestas en blanco en la misma cuestión nº 5 de la Prueba II (realizada tres meses después de volver a la enseñanza habitual del álgebra).*

  Lo anterior es atribuible, en parte, a que la propuesta curricular alternativa favorece la invención de enunciados porque pone el énfasis en la comprensión de las situaciones problemáticas reales que se describen en tales enunciados -mediante el tanteo aritmético, la comprobación semántica y la invención de enunciados- mientras que la enseñanza habitual favorece el olvido de la invención de problemas porque pone el énfasis en las técnicas matemáticas de planteamiento y resolución de ecuaciones.

  Una ampliación de la propuesta curricular aumentaría la cantidad y la variedad de lo siguiente: problemas que no son resolubles algebraicamente y que deben ser resueltos mediante tanteo aritmético; problemas que son resolubles algebraicamente y cuyas soluciones deben ser comprobados semánticamente; enunciados que deben ser inventados a partir de unas ecuaciones dadas; enunciados que deben ser inventados sin tener ecuación alguna a la vista.

D) Síntesis sobre la validez de la propuesta

En resumen, la propuesta curricular alternativa para la enseñanza del lenguaje algebraico en el nivel de enseñanza de 3º de ESO (14-15 años):

- *Favorece que el alumnado entienda el concepto de incógnita de una ecuación mediante el uso del tanteo aritmético para la resolución de ecuaciones y la utilización de la comprobación sintáctica.*

- *Favorece que el alumnado comprenda los lazos existentes entre el lenguaje natural (o materno) y el lenguaje algebraico mediante el uso del tanteo aritmético para la resolución de ecuaciones, la práctica de la comprobación semántica de las soluciones de los problemas y la invención de problemas.*

- *Resulta insuficiente para que el alumnado entienda el concepto de variable de una expresión algebraica abierta. Casi se limita a estudiar si el alumnado diferencia entre variable, incógnita y abreviatura. Una ampliación de la propuesta debería trabajar la triple representación de las funciones como fórmulas algebraicas, tablas y gráficas.*

- *Resulta eficaz pero insuficiente para que el alumnado incorpore, a corto plazo y (más aún) a largo plazo:*

  -La comprobación semántica de la solución como el último paso natural en la resolución de toda situación problemática;

  -La destreza en el planteamiento de los problemas de álgebra que no permiten una traducción sintáctica –palabra a palabra-;

  -La destreza en la invención de problemas sobre situaciones reales.

  Una ampliación de la propuesta debería trabajar, durante un período largo de tiempo, la práctica de la comprobación semántica de las soluciones, el estudio previo de las situaciones reales descritas en los problemas y la invención de enunciados de problemas.

VI.5. Perspectivas

Ahora, en este apartado VI.5 estudiamos cuáles son las perspectivas de investigación que consideramos que nuestra labor de indagación ha abierto. Tales perspectivas las englobamos en los siguientes tres apartados:

- La experimentación de la propuesta en otros centros
- La utilización de la informática para la comprensión del lenguaje algebraico
- La extensión de la propuesta curricular alternativa a los cuatro cursos de la ESO (12-16 años)

A) La experimentación de la propuesta en otros centros

El centro educativo en el que se experimentó la propuesta fue el Instituto de Educación Secundaria “Goya” de la ciudad de Zaragoza. El Instituto “Goya” es un centro público, ubicado en un barrio céntrico de clase media y media-baja de una ciudad de unos 600.000 habitantes, con una enseñanza post-obligatoria esencialmente constituida por el Bachillerato, con el Programa bilingüe en alemán en algunos cursos de la ESO y con el carácter “histórico” que le otorga haber sido el único instituto masculino de la ciudad de Zaragoza hasta el curso 1970-71 (Ruiz Llop, 2007). Debido a dicho carácter histórico, la edad media del profesorado es más elevada de lo habitual y mantiene un cierto “prestigio” que favorece que algunos padres prefieran este instituto a otros centros educativos más cercanos a su domicilio.

Sería interesante –para acotar bien su validez- la experimentación de nuestra propuesta curricular alternativa en otros centros (públicos, concertados o privados) que estén ubicados en diferentes ambientes socioeconómicos y culturales (barrios céntricos y periféricos de Zaragoza, pueblos rurales de Aragón, grandes ciudades como Madrid o Barcelona, otras comunidades autónomas españolas, etc), que estén menos enfocados hacia el Bachillerato (con módulos de Formación Profesional, con Programas de Cualificación Profesional Inicial, etc), con un alumnado más diverso (minorías étnicas, inmigrantes extracomunitarios, etc) o con un profesorado más joven.

B) La utilización de la informática para la mejora de la comprensión del lenguaje algebraico

Desborda los propósitos de esta tesis estudiar los programas informáticos de carácter algebraico que existen en el mercado o indicar los que se podrían diseñarse con conocimientos informáticos más bien elementales y que serían útiles para mejorar la comprensión del lenguaje algebraico. Nos limitamos a esbozar cómo utilizar un par de programas muy difundidos en el mundo educativo (la hoja de cálculo "Microsoft Excel de Microsoft Office" y el programa de geometría algebraica "Geogebra" de libre distribución) para la comprensión del concepto de variable-expresión algebraica abierta y del concepto de incógnita-ecuación:

- El programa Excel permite escribir valores arbitrarios para la x en una columna A y calcular los valores de las diferentes expresiones algebraicas abiertas $f(x), g(x), h(x)$ etc en las respectivas columnas B, C, D, etc. Lo anterior favorece la comprensión del concepto de expresión algebraica abierta como función algebraica que relaciona un conjunto numérico de salida (el de la x) con diferentes conjuntos numéricos de llegada (el de la $f(x), g(x), h(x)$ etc).

- El programa Excel permite escribir valores arbitrarios para la x en una columna A y calcular los valores de las expresiones algebraicas $f(x)$ y $g(x)$ de la ecuación $f(x)=g(x)$ en las columnas B y C. Lo anterior favorece la comprensión de solución de la ecuación $f(x)=g(x)$ como el valor $x=s$ que hace que $f(s)=g(s)$ y permite la resolución por tanteo aritmético de ecuaciones no resolubles mediante las habituales operaciones algebraicas, ensanchado el campo de las ecuaciones abordables en 3º de ESO.

- El programa Geogebra permite convertir expresiones algebraicas abiertas de la forma $y=f(x)$ en tablas de valores y en gráficas. Lo anterior favorece la comprensión del concepto de variable, de expresión algebraica abierta o función algebraica y la comprensión de la representación de las funciones algebraicas como fórmulas, tablas de valores y gráficas.

- El programa Geogebra permite la representación de las tablas de valores y de las gráficas $y=f(x)$ e $y=g(x)$ correspondientes a la ecuación $f(x)=g(x)$. Lo anterior favorece la comprensión de la solución de la ecuación $f(x)=g(x)$ como el valor $x=s$ que hace que $f(s)=g(s)$ en la tabla y en la gráfica y permite la resolución por tanteo aritmético de ecuaciones no resolubles mediante las habituales operaciones algebraicas, ensanchado el campo de las ecuaciones –y de las curvas- abordables en 3º de ESO.

- El programa Geogebra permite además la conversión de ecuaciones de la forma $F(x,y)=0$ en tablas y en curvas (rectas, parábolas, hipérbolas, etc) y de sistemas de dos ecuaciones $F_1(x,y)=0$ e $F_2(x,y)=0$ en tablas y en curvas que se cortan en uno o dos puntos, en ninguno, etc. Lo anterior favorece la comprensión de solución de una ecuación de la forma $F(x,y)=0$ como el conjunto de puntos de esa curva y de solución de un sistema de dos ecuaciones $F_1(x,y)=0$ e $F_2(x,y)=0$ como los puntos de corte de ambas curvas y permite la resolución por tanteo aritmético de sistemas no resolubles mediante las habituales operaciones algebraicas, ensanchado el campo de las ecuaciones –y de las curvas- abordables en 3º de ESO.

La existencia de estos programas permite desplazar el interés del docente y del alumno desde los cálculos a la comprensión de las situaciones reales, de la modelización algebraica y de la conexión entre el lenguaje natural o materno y el algebraico.

Evidentemente, la utilización de la informática para mejora de la comprensión del lenguaje algebraico requiere la disponibilidad material de ordenadores, de programas informáticos y de un cañón de proyección -o de una pizarra digital-, así como el diseño de unas actividades concretas por parte del profesor-investigador. Además, dotar al alumnado de un adecuado manejo previo de cualquier programa informático (la hoja de cálculo Excel, la calculadora Matemáticas de Microsoft, el Programa Geogebra, etc) requiere unas cuantas sesiones de clase.

C) La extensión de la propuesta curricular alternativa a los cuatro cursos de la ESO (12-16 años)

Como ya dijimos en el apartado anterior VI.4 “Conclusiones”, la propuesta curricular alternativa que diseñamos e implementamos resultó eficaz pero insuficiente para mejorar la enseñanza del lenguaje algebraico en 3º de ESO (14-15 años). Lo anterior lleva a que sea plantearse que sería muy interesante la extensión de la propuesta a los cuatro cursos de la ESO (12-16 años).

La extensión de la propuesta a toda la ESO no es fácil de realizar. Por un lado, exige el diseño de muchas sesiones de enseñanza de los cursos de 1º, 2º, 3º y 4º de ESO. Por otro lado, requiere el compromiso, por parte del equipo directivo y del departamento de Matemáticas del centro educativo, de experimentar la propuesta con el mismo grupo de alumnos a lo largo de cuatro cursos.

A continuación, esbozamos los contenidos que se trabajarían en la extensión de la propuesta a toda la ESO:

- **Expresiones con letras de carácter algebraico:**

  Primero, a modo de introducción, se estudiarían expresiones con letras de carácter no algebraico tales como tallas de la ropa (camisetas XL, XXL,…), matrículas de coches (7896BGF, 4290BKG,…), unidades del Sistema métrico decimal (110 km, 3.400 g,…), etc. Luego, entrando de lleno en el álgebra, se trabajarían expresiones de carácter algebraico tales como fórmulas geométricas (áreas, volúmenes,…), funciones lineales (función que relaciona kilos de naranjas con euros pagados, función que relaciona kilómetros recorridos con litros de gasolina consumidos,…), etc. De esta manera, se introducirían las expresiones algebraicas abiertas como "objetos" compuestos por letras, números y operaciones y como "procesos" en los que se introducen unos números, se realizan unas operaciones y se obtienen unos resultados numéricos.

- **Significado sintáctico de las expresiones algebraicas abiertas y de las ecuaciones**

  Las *expresiones algebraicas abiertas* (polinomios, funciones racionales, etc) se presentarían como expresiones constituidas por números, letras y signos operacionales que relacionan un conjunto de números reales (lo valores numéricos que puede tomar la *variable* x) con otro conjunto de números reales (los valores que toma la función algebraica para cada valor numérico de x). Para comprender lo anterior se trabajaría la triple representación de las funciones algebraicas como fórmulas, tablas de valores y gráficas en los sistemas de ejes coordenadas.

  Las *ecuaciones* se presentarían como entidades matemáticas para las que hay que averiguar el valor numérico concreto de la incógnita x para la cual se verifica la igualdad. Para comprender lo anterior se trabajaría la resolución de ecuaciones mediante tanteo aritmético, la comprobación sintáctica de las ecuaciones y la representación aritmética y geométrica de la solución en las tablas y en la gráfica de los miembros de la ecuación.

- **Significado semántico de los enunciados de las fórmulas algebraicas y de los problemas de algebra**

  Los enunciados de las fórmulas algebraicas se presentarían como la descripción mediante el lenguaje natural (o materno) de unas funciones algebraicas que relacionan conjuntos de números. La comprensión de lo anterior se trabajaría mediante la representación de tales relaciones mediante fórmulas algebraica, tablas de valores y gráficas en sistemas de coordenadas.

  Los enunciados de los problemas de álgebra se presentarían como la descripción mediante el lenguaje natural (o materno) de unas relaciones aritméticas entre unas cantidades reales conocidas y unas cantidades reales desconocidas que se establecen mediante el signo igual. La comprensión de lo anterior se trabajaría mediante la resolución de problemas mediante el tanteo aritmético y la comprobación semántica de las soluciones en la situación del enunciado.

Tanto en los enunciados de las fórmulas algebraicas como en los de los problemas de álgebra se daría mucha importancia al estudio de las unidades involucradas pues éstas indican la naturaleza de las cantidades y, por tanto, son las que establecen qué operaciones tienen o no tienen significado en el mundo real.

- **Normas sintácticas del lenguaje algebraico:**

  Las normas sintácticas del lenguaje algebraico son el conjunto de convenciones notacionales que se emplean en la redacción de las expresiones algebraicas: la omisión del signo del producto cuando uno de los factores es una letra o un paréntesis, la omisión del uno cuando es un denominador, un coeficiente o un exponente, la equivalencia de la supresión de la barra de una fracción a la supresión de un paréntesis cuando se suprimen denominadores, etc.

  El alumnado, acostumbrado al uso de las normas sintácticas del lenguaje aritmético de la Primaria, debe asimilar estas nuevas normas sintácticas del lenguaje algebraico sin las que es imposible leer, escribir y operar correctamente en el álgebra de la Secundaria.

- **Conexiones entre el lenguaje natural (o materno) y el algebraico:**

  Las conexiones entre ambos lenguajes se trabajarían en ambos dos sentidos, esto es:

  -Los enunciados de las funciones algebraicas y los problemas de álgebra (pertenecientes al lenguaje natural) se transformarían en las respectivas fórmulas algebraicas y ecuaciones. Es una conversión en la que se va de lo particular (casos del mundo real expresados en unidades de medida) a lo general (casos del mundo matemático sin unidades de medida).

  -Las funciones algebraicas y las ecuaciones (pertenecientes al lenguaje algebraico) se transformarían en los respectivos enunciados inventados de funciones y problemas algebraicos. Es una conversión en la que se va de lo general (casos del mundo matemático sin unidades de medida) a lo particular (casos del mundo real dotados con unidades de medida).

  Tanto el planteamiento semántico de fórmulas y ecuaciones algebraicas como la invención de enunciados de funciones y problemas algebraicos requieren una correcta comprensión de la situación problemática real. Dicha comprensión se trabajaría mediante:

  -El estudio previo de los contextos reales (unidades de medida, fórmulas geométricas o físicas, relaciones comerciales, etc).

-La comprobación semántica de las soluciones en los enunciados de los problemas.

-El análisis de las funciones algebraicas mediante el estudio de sus tablas y gráficas.

-La práctica sistemática tanto del planteamiento de entidades algebraicas como de la invención de enunciados expresados en el lenguaje natural o materno.

- **Significado de las reglas utilizadas para despejar en la resolución de ecuaciones e inecuaciones y de sistemas de ecuaciones:**

  En este contenido englobamos la explicación de las reglas que se utilizan para despejar en ecuaciones e inecuaciones (lo que está sumando pasa restando, lo que está restando pasa dividiendo,…) y en sistemas de ecuaciones (los métodos analíticos de igualación, sustitución, reducción).

  El significado de tales reglas se trabajaría simultáneamente en su versión algebraica (cuando no se conoce el valor numérico de x en las ecuaciones e inecuaciones o los valores numéricos de x e y en los sistemas) y en su versión aritmética (cuando de conoce el valor numérico de la x en las ecuaciones e inecuaciones o los valores numéricos de x e y en los sistemas).

- **Significado de las reglas utilizadas para operar en la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones:**

  En este contenido englobamos la explicación de las reglas que se utilizan para operar en ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones: la reducción a mínimo común denominador, la aplicación de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, la suma, el producto y el cociente de números enteros, etc.

  El significado de tales reglas se trabajaría simultáneamente en la versión convencional en la que suelen aparecer (invisibilidad del 1, del signo de producto, etc) y en la versión no convencional que explicitaría todos los números y operaciones que no se suelen representar.

- **Conexiones entre el lenguaje algebraico y el geométrico:**

  En este contenido englobamos la conexión existente entre el lenguaje algebraico (funciones algebraicas y sistemas de ecuaciones e inecuaciones) y el lenguaje geométrico (representaciones gráficas de funciones y rectas)

  Además, las conexiones entre el lenguaje algebraico y el geométrico se trabajarían en ambos sentidos:

-Las funciones algebraicas, los sistemas de ecuaciones y los sistemas de inecuaciones (pertenecientes al lenguaje algebraico) se expresarían respectivamente como curvas, rectas que se cortan en los puntos que son las soluciones de los sistemas de ecuaciones y rectas que acotan las regiones que son las soluciones de los sistemas de inecuaciones.

-Las curvas, las rectas que se cortan en los puntos que son las soluciones de los sistemas de ecuaciones y las rectas que acotan las regiones que son las soluciones de los sistemas de inecuaciones (pertenecientes al lenguaje geométrico) se expresarían respectivamente como funciones algebraicas, sistemas de ecuaciones y sistemas de inecuaciones.

- **Utilización del lenguaje algebraico en un sentido deductivo e inductivo:**

  En este contenido englobamos la elaboración de sucesiones de números a partir de unas fórmulas algebraicas (utilización en sentido deductivo) y la elaboración de fórmulas algebraicas a partir de sucesiones de números (utilización en un sentido inductivo). Se trabajaría:

-La obtención de sucesiones numéricas a partir de fórmulas algebraicas carentes de significado real (uso deductivo del lenguaje algebraico) y la formulación de los términos generales de sucesiones numéricas carentes significado real (uso inductivo del lenguaje algebraico).

-El cálculo de tablas de valores y de gráficas de puntos a partir de funciones algebraicas sobre situaciones reales (uso deductivo del lenguaje algebraico) y la formulación de funciones algebraicas a partir de enunciados, tablas de valores o graficas referidas a situaciones reales (uso inductivo del lenguaje algebraico).

Todos los anteriores contenidos serían temporalizados a lo largo de los cuatro cursos de la ESO (12-16 años). Y, tal y como explicamos en el capítulo IV “Fase de planificación”, en vez de repetir cíclicamente (curso tras curso) los mismos contenidos pero involucrando operaciones cada vez más complejas (tal y como se suele realizar en la enseñanza habitual del álgebra escolar), en cada curso de la ESO se abordarían nuevos contenidos que permitirían abordar el lenguaje algebraico desde nuevas perspectivas. Y con esto, terminamos este capítulo VI “Fase de reflexión”.

Y con esto, damos por concluida esta tesis, esperando y deseando que nuestra investigación contribuya a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje algebraico en la Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años), siendo conscientes de que la adecuada comprensión de tal lenguaje es importante tanto para la formación personal del ciudadano -en un mundo cada vez más tecnificado- como para su promoción académica, profesional, social y económica.

También esperamos y deseamos haber contribuido al avance de la Didáctica de las Matemáticas, tanto en su vertiente teórica como práctica.

BIBLIOGRAFÍA

AGUSTÍ, J. y VILA, A. (1973). *Área de Matemáticas. Orbe. 7º Curso EGB.* Editorial Vicens-Vives. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

ANAYA (1994). *Azimut. Matemáticas 7º EGB.* Editorial Anaya. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

ARNAL, J. DEL RINCÓN, D. y LATORRE, A. (1992). *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Labor. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

AYUNTAMIENTO DE ZARAGOZA (2000). *Observatorio Municipal de Estadística 2001*. Unidad de Estadística y Gestión Padronal del Servicio de Organización de Servicios Generales. Centro Municipal de Informática. Ayuntamiento de Zaragoza.

AYUNTAMIENTO DE ZARAGOZA (2007). *Observatorio Municipal de Estadística 2008*. Unidad de Estadística y gestión Padronal. Área de Hacienda, Economía y Régimen Interior. Ayuntamiento de Zaragoza.

BARATECH, B. (1955). *Clave de los ejercicios contenidos en la obra Matemáticas para el Tercer Curso del Bachillerato*. Imprenta “Heraldo de Aragón”. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca del IES “Goya” de Zaragoza.

BARATECH, B. (1962). *Matemáticas. Tercer Curso de Bachillerato.* Editor B. Baratech. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca del IES “Goya” de Zaragoza.

BARATECH, B. (1966). *Matemáticas. Tercer Curso de Bachillerato.* Editor B. Baratech. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca del IES “Goya” de Zaragoza.

BAUERSFELD, H. (1994). *Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom*. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

BECERRA, M. A., MARTÍNEZ, R., PANCORBO, L. y RODRÍGUEZ, R. (1996). Matemáticas 2º ESO. Editorial McGraw-Hill/Interamericana de España. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

BOOTH, L. (1981). Child-methods in secondary mathematics. *Educational Studies in mathematics*, 12, pp. 29-41.

BOOTH, L. (1983-84). Children´s mathematical procedures. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l´informatique*, 54, pp. 143-164. LSD. Grenoble.

BOOTH, L. (1984a). *Algebra: Children´s strategies and errors. A report of the Strategies and Errors in Secundary Mathematics Project*. NFER-Nelson. Windsor.

BOOTH, L. (1984b). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit X*, 5, pp. 5-17.

BOYER, C. B. (1999). *Historia de la Matemática*. Primera edición en “Manuales”. Alianza Editorial. Arganda del Rey, Madrid.

BRIOT, CH. (1879). *Leçons d´Algèbre conformes aux programmes officiels de l´enseignement des lycées. Deuxième partie a lúsage des élèves de la classe de Mathématiques Spéciale.* Librería Ch Delagrave. París. Ubicación: Biblioteca del IES “Goya” de Zaragoza.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 4(2), pp. 165-198.

BROUSSEAU, G. (1986). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

BROWN, S. I. y WALTER, M. I. (1993). *Problem posing: Reflections and applications*. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

BRUÑO, G. M. (1912). *Elementos de Aritmética con algunas nociones de Álgebra*. Librería de la Vda de C. Bouret. París y México. Ubicación: Biblioteca del IES “Goya” de Zaragoza.

BRUÑO, G. M. (1914). *Elementos de Álgebra para la Enseñanza Secundaria y Escuelas Preparatorias*. Librería de la Vda de C. Bouret. París y México. Ubicación: Biblioteca del IES “Goya” de Zaragoza.

CANTÓN, I. (2004). *La organización escolar normativa y aplicada*. Editorial Biblioteca Nueva, S. L. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Aragón.

CAPITÁN, A. (2000). *Educación en la España contemporánea*. Editorial Ariel, S. A. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de Aragón.

CARPENTER, T. P., y MOSER, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in Grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, pp. 179-202.

CARRAHER, D. W. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37 (6), pp. 87-115.

CARROLL, W. M. (1994). Using worked examples as an instructional support in the algebra classroom. *Journal of Educational Psychology*, 86 (3), pp. 360-367.

CASTRO, E. (1994). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

CASTRO, E., RICO, L. y ROMERO, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15, 3, pp. 361-371.

CAVANAGH, S. (2008). Catching up on Algebra. *Education Week*, 27 (34), pp. 25-28.

CLEMENT, J., LOCHHEAD, J. y MONK, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly*, 88, pp. 286-289.

CLEMENT, J., NARODE, R. y ROSNICK, P. (1981). Intuitive misconceptions in algebra as a source of math anxiety. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 3 (4), pp. 36-45.

CLEMENT, J. (1982). Algebra word problems solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(1), pp.16-30.

COBB, P. (1987): Information-processing Psychology and Mathematics Education. A constructivist perspective. *The journal of Mathematical Behavior*, 6 (1), pp. 4-40.

COBO, P. (1995). Efectos de la utilización de gráficos en la traducción algebraica de problemas verbales. Estudio del caso de problemas verbales que combinan estructura semántica de cambio y de comparación. *Uno. Revista didáctica de matemáticas*, 4, pp. 63-75.

COHEN, L. y MANION, L., (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla. Madrid.

COLERA, J. Y GAZTELU, I. (2003a). *Matemáticas. 1º. Educación Secundaria*. Grupo Anaya. Pinto, Madrid.

COLERA, J. Y GAZTELU, I. (2003b). *Matemáticas. 2º. Educación Secundaria*. Grupo Anaya. Valdemoro, Madrid.

COLERA, J., GARCÍA, R., GAZTELU, I. y OLIVEIRA, M. J. (2002). *Matemáticas. 3º. Educación Secundaria*. Grupo Anaya. Sta. Perpèrtua de Mogoda, Barcelona.

COLERA, J., GAZTELU, I., GARCÍA, R., OLIVEIRA, M. J. y MARTÍNEZ, M. M. (2003a). *Matemáticas. 4º. Opción A. Educación Secundaria*. Grupo Anaya. Estella, Navarra.

COLERA, J., GAZTELU, I., GARCÍA, R., OLIVEIRA, M. J. y MARTÍNEZ, M. M. (2003b). *Matemáticas. 4º. Opción B. Educación Secundaria*. Grupo Anaya. Sta. Perpètua de Mogoda, Barcelona.

CONTRERAS, M. y GÓMEZ, B. (2006). "Sobre problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones". En P. Bolea, M.J. González, y M. Moreno, (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 171-184. Instituto de Estudios Altoaragoneses. Huesca.

CRANTZ, P. (1932). *Aritmética y Álgebra*. Editorial Labor. Madrid, Barcelona y Buenos Aires. Ubicación: Biblioteca del IES "Goya" de Zaragoza.

CUBILLO, M. C. (1998). *Un estudio sobre las potencialidades que genera en alumnos de secundaria el modelo de gestión mental aplicado a las fracciones*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

CURRÍCULO DE ARAGÓN (2005). *Orden de 6 de mayo de 2005, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria para la Comunidad Autónoma de Aragón*. Boletín Oficial de Aragón de 05/07/2005. Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón. Zaragoza.

CWIK, M. (1984). Zdegenerowany formalizm w mysleniu niektórych uczniów szkoly sredniej. (Degenerate formalism in reasoning of certain students of secondary schools´). *Annales Societatis Mathematicae Polonae, sries V: Dydaktyka Matematyki*, 3, pp. 45-84.

DAVIS, R. B. (1984). *Learning Mathematics. The cognitive science approach to mathematics education*. Ablex Publishing Corporation. Norwood, New Jersey.

DE COMBEROUSSE, C. (1911). *Cours de Mathématiques a l´usage des candidates a l´École Polytechnique, a l´École Normale Supérieure, a l´École Centrale des Arts et Manufactur. Tome premiér. Seconde Partie. Algébre Élémentaire*. Imprenta-librería Gauthier-Villars. París. Ubicación: Biblioteca del IES "Goya" de Zaragoza.

DEMBY, A. (1997). Algebraic procedures used by 13-to-15-Year-Olds. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (1) pp. 45-70.

DENZIN, N. y LINCOLN (Edits) (1994): *Handbook of Qualitative Research*. Sage Publications. California.

DÍAZ, J., PIERA, M., RODRÍGUEZ, R., SERIOL, J., SOLÉS, C. y VILLA, J. M. (1984). Barcanova SA. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

DRISCOLL, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers Grades 6-10*. Heinemann. Portsmouth, New Hampshire.

DUVAL, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciencies Cogntives*. IREM de Estrasburgo. (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, IPN, México, 1997).

DUVAL, R. (1995) *Semiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals*. Peter Lang S.A. Berna.

EDEBÉ. (1988). *Matemáticas 7 EGB*. Editorial Edebé. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

EDWARDS, E. L. (1990). *Algebra for everyone*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Viginia.

ELLERTON, N. F. (1986). Children´s made-up mathematics problems: a new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17, pp. 261-271.

ELLIOT, J. (1990). *La Investigación-Acción en Educación*. Ediciones Morata. Madrid

ERASLAN, A. (2008). The notion of reducing abstraction in quadratic functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39 (8), pp 1051-1060.

ESCOLANO, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

EVES, H. (1981). The liberation of algebra, part I and II, en “Great Moments in Mathematics (after 1650)”, *The Dolciani Mathematical Expositions,* 7. Mathematics Association of America, Washington, D. C.

FERNÁNDEZ y CARDÍN, J. M. (1900). *Elementos de Matemáticas. Obra declarada de texto para segunda enseñanza. Álgebra*. Imprenta de la viuda e hija de Fuentenebro. Madrid. Ubicación: Biblioteca del IES “Goya” de Zaragoza.

F. G. -M. (1900-1912). *Cours de Mathématiques Élémentaires. Manuel d´Algèbre d´aprés les Programmes de 1900 y de 1912.* Imprime-edita “Maison A. Mame et Fils” en Tours. Vende “J. De Gigord” en Paris. Ubicación: Biblioteca del IES “Goya” de Zaragoza.

FILLOY, E., ROJANO, T. y SOLARES, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem-solving and the representation of two unknown quantities. En Marit Johnsen Høines y Anne Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 391-398. Bergen, Norway.

FIRESTONE, W. (1993). Alternative arguments for generalizing from data as applied to qualitative research. *Educational Researcher,* 22, pp. 16-23.

FUSON, K. C (1992b). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. En G. Leinhardt, R. Putman y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, pp 53-187. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

GAGATSIS, A. y PATRONIS, T. (1990). Utilisation des modèles géométriques dans l’ enseignemen des Mathématiques. *Cahiers de Didactique des Mathématiques,* 6, pp. 55-71 y pp. 131-149.

GAIRÍN, J. M. (1999). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

GALAGOVSKY, L. R. y CITTADINI, P. E. (2008). Enseñanza de ecuaciones lineales en contexto. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 26 (3), pp. 359-374.

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J.L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. En P. Bolea, M.J. González, y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* pp. 57-77. Instituto de Estudios Altoaragoneses. Huesca.

GAMORAN, A. y HANNINGAN, E. C. (2000). Algebra for everyone? Benefits of collage-preparatory mathematics for studies with diverse abilities in early secundary school. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 22, pp. 241-254.

GARCÍA CARMONA, A. (2006). Consideraciones acerca del uso de herramientas matemáticas en la enseñanza de la física elemental. *Kikirikí. Cooperación Educativa*, 19 (81), pp. 75-78.

GARRIGA, J. J. (2011). Análisis estadístico de la difusión de la enseñanza media en Zaragoza capital durante el siglo XX. En G. Vicente (Ed.), *Historia de la enseñanza media en Aragón*, pp. 691-699. Institución "Fernando el Católico". Zaragoza.

GODINO, J., BENCOMO, D., FONT, V. Y, WIHELMI, M.R. (2006). "Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas". P. Bolea, M.J. González, y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 36-56. Instituto de Estudios Altoaragoneses. Huesca.

GOETZ, J. P. y LECOMPTE, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Ediciones Morata. Madrid.

GÓMEZ, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria. P. Bolea, M.J. González, y M. Moreno (Eds.): *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 15-35. Instituto de Estudios Altoaragoneses. Huesca.

GONZÁLEZ, R. (1979). *Nosotros y los números. Matemáticas 8*. Editorial Luis Vives. Imprime Edelvives. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

GONZÁLEZ, R. y CAPPA, A. (1982). *Nosotros y los números. Matemáticas 7*. Editorial Luis Vives. Imprime Edelvives. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

HART, K. (1981): *Children´s understanding of mathematics:* 11-16. John Murray. Londres.

HAYLOCK, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics*, 18, pp. 59-74.

HAZZAN, O. y ZAZKIS, R. Reducing abstraction: the case of school mathematics *Educ. Stud. Math.*, 58 (2005), pp. 101-109.

HERSCOVICS, N. y KIERAN, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher*, 73, pp. 572-580.

HERSCOVICS, N. y CHALOUH, L. (1985). Conflicting frames of reference in the learning of algebra. *Proceedings Seventh Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology in Mathematics education*, pp. 123-131. Columbus, Ohio.

HERSCOVICS, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and the teaching of algebra*, pp. 60-86. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

HIERBERT, J. y CARPENTER, T. (1992). Learning and Teaching with understanding. En D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 65-100. Macmillan Publishing Company. New York.

HINSLEY, D. A., HAYES, J. R. y SIMON, H. A. (1977). From words to equations: meaning and representation in algebra word problems. En M. A. Just y P. Carpenter (Eds.), *Cognitive processes in comprehension*, pp. 89-106. Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

HOLLAR, J. C, y NORWOOD, K, (1999). The effects of a Graphing-Approach Intermediate Algebra Curriculum on students´ Understanding of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), pp. 220-226.

HUNTLEY, M. A., RASMUSSEN, C. L., VILLARUBI, R. S., SANGTONG, J. y FEY, J. T : (2000). Effects of Standards-based mathematics education: A study of the Core-Plus Mathematics Project algebra and functions strand. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, pp. 328-361.

HUNTLEY, M. A., MARCUS, R., KAHAN, J. y MILLER, J. L. (2007). Investigating High-School Students´ Reasoning Strategies when they Solve Linear Equations. *Journal of Mathematical Behavior*, 26 (2), pp. 115-139.

ICME-3 (1977). H. Athen y H. Kunle (Eds.), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Karlsruhe.

ICME-8 (1998). C. Alsina, J. Alvarez, M. Niss, A. Perez, L. Rico y A. Sfard (Eds.), *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education*. S.A.E.M. Thales. Sevilla.

IZSÁK, A. (2003). We Want a Statement That Is Always True: Criteria for Good Algebraic Representations and Development of Modeling Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34 (3), pp. 191-227.

JACOBS, V. R., FRANKE, M. L., CARPENTER, T. P., LEVI, L. y BATTEY, D. (2007). Professional Development Focused on Children´s Algebraic Reasoning in Elementary School. *Journal for Research in Mathematics Education, 38 (3), pp. 258-288.*

JANESICK, V. (1994). The dance of cualitative researchdesign. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research*. Sage Publications. California.

KAPUT, J. SIMS-KNIGHT, J. E. (1983). Errors in translations to algebraic equations: Roots and implications. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 5 (3), pp. 63-78.

KAPUT, J. (1987). Towards a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of a representation in the teaching and learning of mathematics*, pp. 159-195. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

KAPUT, J. (1992). Technology and mathematics education. The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grows (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 515-556. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

KAPUT, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine machine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics y Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in the k-14 curriculum: Proceedings of a national symposium*. National Academy Press. Washington, D. C.

KAPUT, J. (1999) Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*, pp. 133-155. Erlbaum. Mahwah, New Jersey.

KAPUT, J., NOSS, R. y HOYLES, C. (2002). Developing new notations for a mathematics in the computational era. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, pp.51-75. Lawrence Erlbaum. Mahwah, New York.

KEMIS, S. y MCTAGGART, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Laertes. Barcelona.

KIERAN, C. (1979) Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. En D. Tall (Ed.), *Procedings of the third international conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 128-133. Mathematics Education Research Centre. Warwick University. Coventry, England.

KIERAN, C. (1989). *The early learning of algebra: A structural perspective*. En Wagner and Kieran (1989), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, pp. 35-56. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

KIERAN, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grows (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 390-419. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

KIERAN, C. y DRIJVERS, P. (2006). The Co-Emergence of Machine Techniques, Paper-and-Pencil Techniques, and Theoretical Reflection: A Study of CAS Use in Secundary School Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11 (2), pp. 205-263.

KILPATRIC, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*, pp. 123-147. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

KILPATRIC, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. En D. A. Grows (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company. New York.

KILPATRIC, J (1993). Beyond face value: Assessing Research in Mathematics Education. En Nissen, G. y Blomhoj, M. (Eds.), *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*. IMFUFA, Roskilde University. Roskilde.

KILPATRIC, J., SWAFFORD, J. y FINDELL, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. National Research Council. Washington, DC.

KIRSHNER, D., AWTRY, T., MCDONALD, J. y GRAY, E. (1991). The cognitivist caricature of mathematical thinking: the case of the students and professors problem. *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting N A Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, pp. 1-7.

KIRSHNER, D. y AWTRY, T. (2004). Visual Salience of Algebraic Transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 (4), pp. 224-257.

KNUTH, E. J. y STEPHENS, A. C. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37 (4), pp. 297-312.

KOEDINGER, K. R. y ANDERSON, J. A. (1997). Illustrating principled design: The early evolution of a cognitive tutor for algebra symbolization. *Interactive Learning Environments*, 5, pp. 161-180.

KRYGOWSKA, Z. (1977). *Zarys dydaktyk (Outline of Didactics of Mathematics*), Vol 2. Wsip, Warszawa.

KUCHEMANN, D. (1981a). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children´s Understanding of Mathematics*, pp. 102-119. Murray. London.

KUCHEMANN, D. (1981b). Cognitive demand of Secondary School Mathematics items. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 301-316.

LAZCANO, I. y BAROLO, P. (1989). *Matemáticas 7º EGB*. Editorial Luis Vives. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

LEE, L. y WHEELER, D. (1989). The arithmetic connexion. *Educational Studies in Mathematics*, 20, pp. 41-54.

LEINHARDT, G, ZASLAVSKY, O., & STEIN, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60, pp. 1-64.

LESH, R., POST, T. y BEHR, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. En C. Janvier, (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

LESTER, F. (1989). Reflections about mathematical problem-solving research. En R. I. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, pp. 115-124. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

LEUNG, S. S. (1993). The relation of mathematical knowledge and creative thinking to the mathematical problem posing of prospective elementary school teachers on tasks differing in numerical information content. Tesis doctoral. University of Pittsburgh.

LOCHHEAD, J (1980). Faculty interpretations of simple algebraic statements: The professor´s side of the equation. *Journal of Mathematical Behaviour*, 3, pp. 29-37.

LOCHHEAD, J y MESTRE, J. P. (1988). From words to algebra: mending misconceptions. En A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra,* K-12, pp. 127-135. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

LÓPEZ SIERRA, A. (1969). *Anillo. Tercer Curso de Bachillerato*. Vicens-Vives. Barcelona. Ubicación: Biblioteca del IES "Goya" de Zaragoza.

LÓPEZ VARONA J.A. y MORENO MARTÍNEZ M.L. (1996): Tercer estudio internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS). *Revista de Educación*, 311, pp. 315-336.

MACGREGOR, M. (1991). *Making sense of algebra: Cognitive processes influencing comprehension*. Deaking University. Geelong

MACGREGOR, M. y STACEY, K. (1993). Cognitive Models Underlying Students´ Formulation of Simple Linear Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (3), pp. 217-232.

MACGREGOR, M y PRICE, E. (1999). An exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (4), pp. 449-467.

MARCOS, C. y MARTÍNEZ J. (1967). *Matemática moderna. Tercer curso de bachillerato. Plan 1967*. Ediciones S. M. Madrid.

MARKOVITS, H. (1986). The curious effect of Using Drawings in Conditional Reasoning Problems. *Educacional Studies in mathematics*, 17 (1), pp. 81-88.

MARSINYACH, S. (1978). *Matemáticas 7º EGB*. Editorial Bruño. Madrid.

MARTÍNEZ, J., MANSILLA, S. y ELETA, R. (1979). *Cálculo 7º Educación General Básica*. Ediciones SM. Pinto, Madrid.

MAS, C. (2003). Los últimos treinta años. Crecimiento y límites del sistema educativo español. En H. Lafoz y J. Vicente (Eds.), *De súbditos a ciudadanos. Escuela y sociedad en el siglo XX. Ensayos*, pp. 263-286. Fundación Sindicalismo y Cultura. España. Ubicación: Red de Bibliotecas de Aragón.

MCNIFF, J. (1992). *Accion Research: Principles and Practice*. Routledge. Canadá.

MCNIFF, J. (1995). *Action Research for Professional Development*. Hyde Publications. Bournemouth.

MCNIFF, J. (1998). Action research for professional development: Concise advice for new action researchers. *The Ontario Public School Teachers' Federation*. Mississauga, Ontario

MESTRE, J. P. (1988). The role of language comprehension in mathematics and problem solving. En R. Cocking & J. Mestre (Eds.), *Lingistic and cultural influences on learning mathematics*, pp. 201-220. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

MOSES, R. P., BJORK, E. y GOLDENBERG, E. P. (1990). Beyond problem solving: Problem posing. En T. J. Cooney y C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s*, pp. 82-91. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

MOSES, R. P. y COBB, C. E. (2001). *Radical equations: Math literacy and civil rights*. Beacon Press. Boston, Massachusetts.

MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKI, O.; INBAR, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (1), pp.3-14.

NATHAN, M.J., KINTSCH, W. y YOUNG, E. (1992). A Theory of algebra-word comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and instruction*, 9, pp. 329-389.

NATHAN, M. J. y KOEDINGER, K. R. (2000). Teachers´ and Researchers´ Beliefs about the Development of Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (2), pp. 168-190.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. National Academic Press. Washington, DC.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

NCTM (1997). Algebraic thinking (Special issue). *Teaching Children Mathematics*, 3 (6). National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Viginia.

NCTM (1998). *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: proceedings of a natural symposium*. National Academy Press. Washington, D C.

NICKSON, M. (1992). The culture of the mathematics classroom: an unkown quantity? En D. A. Grows (Eds): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company. New York.

O´CALLAGHAN, B. R. (1998). Computer-Intensive Algebra and Students´ Conceptual Knowledge of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 29 (1), pp. 21-40.*

OÑATE, J. (1942). *Matemáticas de Tercer Curso*. Madrid. Ubicación: Biblioteca del IES "Goya" de Zaragoza.

PARALEA, M. M. y SOCAS, M. M. (1999-2000). Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico. *El Guiniguada*, 8-9, pp. 319-336.

PANCORBO, L., BECERRA, M. V., MARTÍNEZ, R. y RODRÍGUEZ, R. (2000). *Matemáticas 3º*. Editorial McGraw-Hill/Interamericana de España. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

PECK, D. M. JENKS, S.M. (1988). Reality, arithmetic, algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, pp. 85-91.

PÉREZ, A., AMIGO, C., PEÑA, P., RODRÍGUEZ, A. y SIVIT, F. (1997). *Matemáticas 3º*. Editorial McGraw-Hill/Interamericana de España. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

PÉREZ-DÍAZ, V. y RODRÍGUEZ, J. C. (2003). *La educación general en España*. Fundación Santillana. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Aragón.

PISA (2005). *Pisa 2003. Pruebas de Matemáticas y solución de problemas*. Instituto nacional de evaluación y calidad del sistema educativo. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

POLYA, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. (1965). Editorial Trillas. México.

PONS, R. (1976). *Matemática 7º EGB*. Editorial Teide SA. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

PUIG, L. (2006). Sentido y elaboración de componentes de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M.J. González, y M. Moreno, (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 107-126. Instituto de Estudios Altoaragoneses. Huesca.

PUIG ADAM, P. (1960). *La Matemática y su Enseñanza actual*. Edita Publicaciones de la revista "Enseñanza Media". Dirección General de Enseñanza Media del Ministerio de Educación Nacional. Madrid. Ubicación: Biblioteca del IES "Goya" de Zaragoza.

RADATZ, H. (1980). Students' errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. *For the Learning of Mathematics* 1 (1), pp.16-20.

RADFORD, L. y BARDINI, C. (2007). Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students´ Algebraic Activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38 (5), pp. 507-530.*

REED, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 13, pp. 124-139.

RESNICK, L., NESHER, P., LEONARD, F., MAGONE, M., OMANSON, S. y PELED, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case for decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(1), pp. 8-27.*

RESNICK, L. y FORD, W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós-MEC. Barcelona.

RESNICK, L. y RESNICK, D. (1992). Assessing the thinking curriculum: New tools for educational reform. In B. R. Gifford y M. C. O´Connor (Eds.), *Changing assessments: Alternative views of aptitude, achievement and instruction*, pp. 37-75. Kluwer. Boston:

REY PASTOR, J. (1927a). *Biblioteca Didáctica de Matemáticas Elementales publicada por J. Rey Pastor según los nuevos programas de enseñanza secundaria. Álgebra. Primera parte*. Librería El "Ateneo" y Librería de A. García Santos. Buenos Aires. Ubicación: Biblioteca del IES "Goya" de Zaragoza.

REY PASTOR, J. (1927b). *Biblioteca Didáctica de Matemáticas Elementales publicada por J. Rey Pastor según los nuevos programas de enseñanza secundaria. Álgebra. Segunda parte*. Librería El "Ateneo" y Librería de García Santos. Buenos Aires. Ubicación: Biblioteca del IES "Goya" de Zaragoza.

RICO, L. (1990a). Diseño curricular en Educación Matemática: Elementos y evaluación. En S. Llinares y M. V. Sánchez, (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Alfar. Sevilla.

RICO, L. (1990b). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Llinares y M. V. Sánchez, (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Alfar. Sevilla.

RICO, L. y CASTRO, E. (1995). Pensamiento Numérico en Educación Secundaria Obligatoria. En F. Hernán, E. Callejo, P. Bolea, E. Cid, L. Rico, y E. Castro (Eds.): *Aspectos Didácticos de Matemáticas*, 5, pp. 163-182). ICE. Universidad de Zaragoza.

RICO, L., CASTRO, E., CASTRO, E., CORIAT, M. y SEGOVIA, I. (1997). Investigación, diseño y desarrollo curricular. En L. Rico (Eds.): *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 265-318). Síntesis. Madrid.

ROMBERG, T. (1992). Perspectives on Scholarship and Research Methods. En D. A. Grows (Ed.): *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company. New York.

ROMERO, I. M. (1995). *Introducción del Número Real en Educación Secundaria. Tesis Doctoral*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

ROSNICK, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *Mathematics Teacher*, 74 (6), pp. 418-420.

ROTH, W.M. y BOWEN, G.M. (2001). Profesionals Read Graphs: A Semiotic Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32 (2), pp. 159-194.

RUBÍES, M., GIBERT, J. y POU, M. (1973). *Matemática 7º Enseñanza General Básica*. S A Casals. Barcelona.

RUIZ, S. y RODRÍGUEZ, J. (1959). *Matemáticas. Reválida-Grado-Elemental. Problemas propuestos en los exámenes de Reválida del Bachiller Elemental*. Gráfica Muñoz. Murcia. Ubicación: Biblioteca del IES “Goya” de Zaragoza.

RUIZ LLOP, J. A. (2007). Prólogo del libro “*La colección de grabados históricos del Instituto Goya*” de Mª Isabel Sepúlveda Sauras. Mira Editores. Zaragoza.

RUIZ TAPIADOR, A. (1932). *Elementos de Álgebra*. Imprenta Editorial Gambón. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca del IES “Goya” de Zaragoza.

SABRÁS, A. (1931). *Principios de Álgebra y Trigonometría*. Barcelona. Ubicación: Biblioteca del IES “Goya” de Zaragoza.

SALES, M. (1963). *Las Matemáticas de la Reválida de Grado Elemental*. Editor Gregorio Del Toro. Madrid. Ubicación: Biblioteca del IES "Goya" de Zaragoza.

SANTILLANA (2004a). *Matemáticas. Serie Práctica. 1º ESO*. Editorial Santillana. Madrid.

SANTILLANA (2004b). *Matemáticas. Serie Práctica. 2º ESO*. Editorial Santillana. Madrid.

SANTILLANA (2004c). *Matemáticas. Serie Práctica. 3º ESO*. Editorial Santillana. Madrid.

SANTILLANA (2003). *Matemáticas. 4º ESO. Opción A*. Editorial Santillana. Madrid.

SANTILLANA (2005). *Matemáticas. Serie Práctica. 4º ESO. Opción B*. Editorial Santillana. Fuenlabrada, Madrid.

SCARDAMALIA, M. y BEREITER, C. (1994). The CSILE project: Trying to bring the classroom into world 3. En K. McGilly (Ed.), *Classroom Lessons: Integrating Cognitive Theory and Classroom Practice*, pp. 201-228. MIT Press/Bradford Books. Cambridge, MA.

SFARD, A. y LINCHEVSKI, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification- The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 191-228.

SILVER, E. A. y MAMONA, J. (1989). Problem posing by middle school mathematics teachers. In C. A. Maher, G. A. Goldin y R. B. Davis (Eds.), *Proceedings of the eleventh annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 263-269. Rutgers University. New Brunswick, New Jersey.

SILVER, E. A. (1990). Contributions of search to practice: Applying findings, methods, and perspectives. En T. J. Cooney y C. R. Hirsch (Eds.): *Teaching and learning mathematics in the 1990s*, pp. 1-11. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, V A.

SILVER, E. A. y CAI, J. (1993). *Mathematical problem posing and problem solving by middle school students*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. Atlanta, GA.

SILVER, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, 14 (1), pp. 19-28.

SILVER, E. A. (1997). Algebra for all. Increasing students´ access to algebraic ideas, not just algebra courses. *Mathematics Teaching in the Middle school*, 2, pp. 204-207.

SIMON, M. A. (1993). Prospective elementary teachers´ knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, pp. 233-254.

SOWDER, J., BEZUK, N. y SOWDER, L. (1993). Using Principles from Cognitive Psychology to Guide Rational Number Instruction for Prospective Teachers. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: an Integration of Research*. Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

SPANOS, G., RHODES, N. C., DALE, T. C. y CRANDALL, J. (1988). Linguistic features in mathematical problem solving. In R. P. Mestre (Ed), *Linguistic and cultural influences on learning mathematics*, pp. 221-240. Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.

STAKE, R. (1994). Case studies. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds), *Handbook of Qualitative Research*. Sage Publications, California.

STEEN, L. (1992). Does everybody need to study algebra? *Basic Education*, 37 (4), pp. 9-13.

SUTHERLAND, R. (1991). Some unanswered research questions on teaching and learning of algebra. *For the learning of Mathematics*, 11, pp. 40.46.

SWAFFORD, J. O. y LANGRALL, C. W. (2000). Students´ Pre-instructional Use of Equations to Describe and Represent Problems Situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (1), pp. 89-112.

SWEE FONG Ng. y LEE, K. (2009). The Model Method: Singapore Children´s Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (3), pp.282-113.

TALL, D. y THOMAS, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 125-147.

TAPIA, J. M. (1969). *Matemáticas 3*. Editorial Casals. Barcelona. Ubicación: Biblioteca del IES "Goya" de Zaragoza.

THOMPSON, D. R. y SENK, S. L. (2001). The Effects of Curriculum on Achievement in Second-Year Algebra: The Example of the University of Chicago School Mathematics Projects. *Journal for Research in Mathematics Education, 32 (1), pp. 58-84.*

THREADGILL-SOWDER, J y SOWDER, L. (1982). Draw versus verbal formats for Mathematical Story Problems, *Journal for Research in Mathematics Education*, pp. 324-331.

TIROSH, D., EVEN, R. y ROBISON, N. (1998). Simplifying Algebraic Expressions: Teacher Awareness and Teaching Approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 35 (1), pp. 51-64.

TURNAU, S. (1990). O algebrze w szkole podstawowej (On algebra in Grades 1-8). *Wyklady o nauczaniu matematyki (Lectures on Mathematics Teaching),* pp. 154-165. PWN, Warsaw.

UNE RÉUNION DE PROFESSEURS (1920). *Algèbre et notions de Trigonométrie Practique d´après le Programme de 1920 du Brevet Élémentaire*. Librairie Générale, "Maison A. Mame et Fils en Tours" y "J. De Gigord" en Paris. Ubicación: Biblioteca del IES "Goya" de Zaragoza.

VALDÉS, J. y MARSINYACH, S. (1980). *Entorno I. Matemáticas. 1º Bachillerato*. Editorial Bruño. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

VALDÉS, C., MORAL, V., GARCÍA, F., RODRÍGUEZ, J. L. y ULLIBARRI, J. R. (1995). *Matemáticas. Claves de Programación. Educación Secundaria Obligatoria*. Ediciones SM. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

VALLÉS, E., MARTÍNEZ DE ALBÉNIZ, J., MARGALEF, N. y YÁBAR, J. M. (1983). *Matemática-7*. SM Ediciones. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

VAN DOOREN, W., VERSCHAFFEL, L. y ONGHENA, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33(5), pp. 319-351.

VERGNAUD, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In P. Nesher y J. Kilpatrick (Edits): *Mathematics and cognition: a research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 14-30. Cambridge University Press. Cambridge, UK.

VILA, A. y AGUSTÍ, J. M. (1968). *Aplicación y semejanza. Matemáticas. Tercer curso de bachillerato*. Editorial Vicens-Vives. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

VIZMANOS, J. R. Y ANZOLA, M. (1991). *Matemáticas. Algoritmo I. 1º BUP*. Ediciones SM. Pinto, Madrid. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

VIZMANOS, J. R. Y ANZOLA, M. (1995). *Matemáticas. 3º Secundaria*. Ediciones SM. Pinto. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

VIZMANOS, J. R. Y ANZOLA, M. (1998). *Algoritmo 2000. Matemáticas. 3º Secundaria*. Ediciones SM. Pinto, Madrid. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

VIZMANOS, J. R. Y ANZOLA, M. (1999). *Sigma. Matemáticas. 3º Secundaria*. Ediciones SM. Pinto, Madrid. Ubicación: Biblioteca de Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

WITTROCK, M. (1990). *La investigación de la enseñanza III: Profesores y Alumnos*. Ediciones Paidós. España.

WUSSING, H. y ARNOLD, W (1989). *Biografías de grandes Matemáticos*. Prensas Universitarias de Zaragoza. Ciudad Universitaria (Geológicas). Zaragoza.

XIN, Y. (2008). The effect of schema-based instruction in solving word problems: An emphasis on pre-algebraic conceptualization of multiplicative relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (5), pp. 526-551.

YERUSHALMY, M. y CHAZAN, D. (2002). Flux in school algebra: Curricular change, graphing technology, and research on student learning and teacher knowledge. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, pp. 725-755. Lawrence Erlbaum. Mahwah, New Jersey.

YERUSHALMY, M. (2006). Slower Algebra Students Meet Faster Tools: Solving Algebra Word Problems with Graphing Software. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37 (5), pp. 356-387.

Anexo I:

Enunciados de las actividades y pruebas

En el Capítulo IV “Fases de Planificación y Acción” aparecían los enunciados de las actividades y de las pruebas. Posteriormente, en el Capítulo V “Fase Observación”, reaparecían los de las actividades y, en el Capítulo VI “Fase de Reflexión”, volvían a mostrarse los de las pruebas. Sin embargo, en los anteriormente mencionados capítulos de esta tesis, los enunciados aparecían siempre separados unos de otros por tablas, figuras y textos, todos ellos de carácter ilustrativo, explicativo o analítico.

Por ello, consideramos que este anexo I, formado escuetamente por las fichas de las actividades y de las pruebas, será muy útil para aquellos investigadores y profesores que deseen repetir -o mejorar- la experimentación de nuestra propuesta de enseñanza del lenguaje algebraico.

Las actividades, numeradas de la 1 a la 9, están diseñadas para ser implementadas en sus nueve respectivas sesiones de clase, dedicando sus correspondientes intervalos de tiempo al trabajo individual, al debate de puesta en común y a la explicación final de profesor, tal y como detallamos en el capítulo IV -“Fases de Planificación y Acción”- de esta tesis.

Las pruebas, denominadas la I y la II, están pensadas para calibrar el impacto, a corto y a largo plazo, de nuestra propuesta de enseñanza. Así pues, mientras que la Prueba I debe realizarse inmediatamente después del final de la implementación de las actividades, la Prueba II – o sea la repetición de la misma Prueba I- debe tener lugar unos tres meses después de dicho final.

ACTIVIDAD 1.1:

LA LETRA COMO ABREVIATURA, COMO VARIABLE Y COMO INCÓGNITA.

1.1) Marca con una cruz X según se trate de una letra usada como abreviatura, como variable o como incógnita.

Actividad	Entidad matemática	Letra como abreviatura	Letra como variable	Letra como incógnita
1.1.1	$\mathbf{x}^2$ **-** 5**x** + 6 = 0			
1.1.2	$\mathbf{x}^2$ **-** 5**x** + 6			
1.1.3	3**x** – 4 = 7			
1.1.4	"El barco llegó 30 **h** antes de lo previsto"			
1.1.5	30 **h** = 60			
1.1.6	"Probaron el nuevo prototipo el 5-10-07, que era **V**"			
1.1.7	Recta **y** = 3**x** – 1			
1.1.8	**a** + **b** = **b** + **a**			
1.1.9	4$\mathbf{x}^5$ = 4			
1.1.10	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab}$			
1.1.11	$\mathbf{a}^3 - 4\mathbf{a}^2 - 1$			
1.1.12	***A*** = ***b*** * ***a***			

Ficha nº 1.

ACTIVIDAD 1.2:

LA LETRA COMO INCÓGNITA.
(Para realizar en grupos de cuatro)

Actividad 1.2.1:

¿Cuál de estos números es solución de la ecuación $5x-9=4(x-5)$? Razónalo sin resolver la ecuación por métodos algebraicos.

a) $x=4$ b) $x=-3$

c) $x=14$ d) $x=-11$

Cálculos que realizas:

Actividad 1.2.2:

Dada la ecuación $7x+4=60$.

-Calcula:
Si $x=0$ $7x+4=$
Si $x=1$ $7x+4=$
Si $x=5$ $7x+4=$
Si $x=6$ $7x+4=$
Si $x=7$ $7x+4=$
Si $x=8$ $7x+4=$
Si $x=9$ $7x+4=$
Si $x=10$ $7x+4=$

-¿Has encontrado soluciones de la ecuación $7x+4=60$? ¿Puedes encontrar todas las que haya?

Ficha nº 2.

ACTIVIDAD 2:

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES.

2.1) Resuelve:

2.1.a) $x+4=5$ 2.1.b) $x-7=8$ 2.1.c) $5x=100$

2.1.d) $-6x=72$ 2.1.e) $\frac{x}{4}=12$ 2.1.f) $\frac{4x}{20}=3$

2.2) Resuelve:

2.2.a) $7x-19=5x-27$ 2.2.b) $-1-2x=-3x-11$

2.3) Resuelve:

2.3.a) $7+3(2x-1)=0$ 2.3.c) $3x=4+(3-x)$

2.3.b) $x-5(x-2)=6x$ 2.3.d) $120=2x-(15-7x)$

2.4) Resuelve:

2.4.a) $\frac{4(x-1)}{3}-\frac{2(x-3)}{6}=5$ 2.4.b) $x+\frac{2(x-3)}{4}-\frac{5(x+1)}{10}=1$

Ficha nº 3.

ACTIVIDAD 3:

CLASES DE ECUACIONES LINEALES.

3.1) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x=27$ que existen.

3.2) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x=x+2x$ que existen.

3.3) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x=0$ que existen.

3.4) Escribe todas las soluciones de la ecuación $3x=x+2x+5$ que existen.

3.5) Escribe todas las soluciones de la ecuación $0x=7$ que existen.

3.6) Escribe todas las soluciones de la ecuación $0x=0$ que existen.

Ficha nº 4.

ACTIVIDAD 4:

TRADUCCIÓN DE EXPRESIONES.

Actividad 4.1: En el garaje tenemos un número desconocido de coches. Si llamamos x al número desconocido de coches que hay, contesta a las siguientes preguntas:
4.1a) ¿Cuántos coches hay en ese garaje?______
4.1b) ¿Cuántos faros delanteros hay en ese garaje?______
4.1c) ¿Cuántos volantes hay en ese garaje?______
4.1d) ¿Cuántas ruedas delanteras izquierdas hay en ese garaje?________
4.1e) ¿Cuántas ruedas hay en ese garaje sin contar las de repuesto?______
4.1f) ¿Cuántas ruedas hay en ese garaje contando las de repuesto?_______
4.1g) ¿Cuántas ruedas delanteras hay en ese garaje?_______

Actividad 4.2: Relaciona, escribiendo el número correspondiente, las expresiones del lenguaje natural con las expresiones algebraicas:
4.2.a) En el garaje hay el mismo número de motos que de coches._______
4.2.b) Pedro duplica en edad a su hijo._______
4.2.c) El área de un triángulo._______
4.2.d) En un garaje hay doble número de coches que de motos.________
4.2.e) La tercera parte del total de los alumnos de un centro estudian alemán. ________
4.2. f) Dos padres y un hijo._______

1) $\frac{x}{3}$ 2) $\frac{xy}{2}$ 3) $x = 2y$ 4) $xy = A$

5) $x = y$ 6) $2y = x$ 7) $3x = y$

Actividad 4.3: En una fiesta hay un número **x** desconocido de chicos y un número **y** desconocida de chicas. Explica lo que significan las siguientes expresiones:

a) $x-5$ c) $3x+3y$

b) $2x+3y$ d) $x = 2y$

Actividad 4.4: En un almacén tenemos un refresco de limón embotellado en dos tipos de envase: latas de 33 cc y botellas de 2 litros. Utilizando respectivamente las letras a y b, expresa algebraicamente las situaciones siguientes:
a) Tenemos doble número de latas que de botellas.
b) Tenemos 20 botellas más que latas.
c) Tenemos la mitad de latas que de botellas.

Actividad 4.5: Inventa frases del lenguaje natural en contextos de la vida real que se refieran a las siguientes expresiones:

a) $5x+2y = 220$ (en un garaje)

b) $\frac{x}{5} = y$ (edades)

c) $1.5x+2y = 9$ (en una papelería)

Ficha nº 5.

ACTIVIDAD 5:

PROBLEMAS DESGLOSADOS EN PREGUNTAS CORTAS.

Actividad 5.1:

Un examen de tipo test consta de 50 preguntas y se evalúa del siguiente modo: se suman 2 puntos por cada pregunta acertada y se restan 1.5 puntos por cada pregunta no acertada. Queremos averiguar cuántas preguntas ha acertado y cuántas no ha acertado.
5.1.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.1.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.1.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.1.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.

Actividad 5.2:

Sabemos que el perímetro de un rectángulo mide 50 metros y que la base es 5 metros más larga que la altura. Queremos saber lo que mide la base y la altura.
5.2.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.2.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.2.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.2.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.2.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.2.6) Comprobación:
5.2.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.2.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Actividad 5.3:

Juan tiene 28 años menos que su padre y 24 años más que su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 100 años?
5.3.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.3.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.3.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.3.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.3.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.3.6) Comprobación:
5.3.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.3.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Actividad 5.4:

Jaime compró 3 jabones y 2 botes de colonia por 12 euros, y Elena compró 4 jabones y 3 botes de colonia por 17 euros. Averigua el precio de cada producto.
5.4.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.4.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.4.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.4.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.4.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.4.6) Comprobación:
5.4.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.4.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Actividad 5.5:

Hace siete años la edad de un padre era el cuádruplo de la de su hijo y actualmente es el triple. Averigua cuál es la edad de cada uno.
5.5.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.5.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.5.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.5.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.5.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.5.6) Comprobación:
5.5.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.5.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Actividad 5.6:

Paloma tiene monedas de 2 euros y 1 euros y billetes de 10 euros. Sabiendo que tiene 20 monedas y que el valor de todas juntas es 33 euros, calcula el número de monedas que tiene de cada tipo.
5.6.1) ¿Qué datos conoces? (escríbelos con unidades)
5.6.2) ¿Qué datos no conoces? (escríbelos con unidades)
5.6.3) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces? (escríbelos con unidades)
5.6.4) Formula las ecuaciones que relacionan los datos que conoces con los que no conoces.
5.6.5) Resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteados.
5.6.6) Comprobación:
5.6.6.a) ¿En que unidades se expresan las soluciones que has hallado?
5.6.6.b) Escribe como se relacionan los datos que te daban en el problema con las soluciones que has obtenido.

Ficha nº 6.

ACTIVIDAD 6:

NECESIDAD DE COMPROBAR EL ENUNCIADO.

Actividad 6.1: Raquel compra 5 melones y 2 sandías y paga 13 euros. Alfredo compra 3 melones y 4 sandías y paga 12 euros. Averigua el precio en euros de cada melón y el precio en euros de cada sandía.

$$\begin{cases} 5x+2y=18 \\ 3x+4y=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=1.5 \end{cases}$$

6.1.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.1.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.1.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Actividad 6.2: Amelia tiene el triple de edad que Enrique. Dentro de cinco años Amelia tendrá sólo el doble de años que Enrique. ¿Qué edad tiene cada uno?
Llamamos x la edad de Amelia
Llamamos y la edad de Enrique

$$\begin{cases} 3x=y \\ x+5=2(y+5) \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

6.2.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.2.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.2.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Actividad 6.3: Se desea obtener 60 Kilos de café molido, mezcla a base de café torrefacto, a 80 céntimos de euro el kilo, y de café natural, a 60 céntimos de euro el Kilo. Si queremos que el precio del kilo de mezcla sea 0.72 euros, Llamamos x a la cantidad de café torrefacto en Kilogramos y llamamos y a la cantidad de café natural en Kilogramos. Averigua qué cantidad de cada café debemos mezclar.

$$\begin{cases} x+y=60 \\ 80x+60y=4320 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=36 \\ y=24 \end{cases}$$

6.3.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.3.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.3.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Actividad 6.4: José le dice a Inés: “Mi colección de discos compactos es mayor que la tuya, ya que si te doy 10, tendrías la misma cantidad que yo”. Inés le responde: “Tienes razón. Sólo te faltan 10 para doblarme en número”. ¿Cuántos compactos tiene cada uno?

$$\begin{cases} x-10=2y \\ x+10=3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x=50 \\ y=20 \end{cases}$$

6.4.1) ¿Está bien resuelto el problema? Razónalo.
6.4.2) ¿Está bien planteado? Razónalo.
6.4.3) ¿Está bien resuelto el sistema? Razónalo.

Ficha nº 7.

ACTIVIDAD 7:

PLANTEAR, RESOLVER Y COMPROBAR.

Actividad 7.1:

Calcula cuatro números consecutivos, de forma que su suma sea 326.
7.1.1) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces?
7.1.2) Formula las ecuaciones.
7.1.3) Resuelve la ecuación o sistema.
7.1.4) Comprobación en el enunciado.

Actividad 7.2:

Un padre tiene seis veces la edad de su hijo y la suma de las edades de ambos es igual a 91. Averigua la edad del padre y del hijo.
7.2.1) ¿Cómo llamas con letras a los datos qué no conoces?
7.2.2) Formula las ecuaciones.
7.2.3) Resuelve la ecuación o sistema.
7.2.4) Comprobación en el enunciado.

Actividad 7.3:

En una terraza sirven bocadillos y refrescos. Se sabe que 3 bocadillos y 2 refrescos cuestan 8 euros y que 2 bocadillos y 1 refresco cuestan 5 euros. Calcula el precio del bocadillo y el precio del refresco.

Actividad 7.4:

Una bodega ha exportado, el primer semestre del año, la mitad de sus barriles y, en los dos meses siguientes, un tercio de lo que le quedaba. ¿Cuántos barriles tenía la bodega al comienzo de año si ahora le quedan un total de 40000 barriles?

Actividad 7.5:

En una estantería tenemos apilados CD de música y libros, y entre todos hay 100 unidades. Calcula cuántos hay de cada clase, si están en proporción de 3 a 1.

Actividad 7.6:

Un vendedor de coches tiene sólo dos modelos en su tienda: el modelo A y el modelo B. Por cada coche del modelo A y del modelo B que vende obtiene un beneficio de 6000 euros y de 5000 euros respectivamente. ¿Cuántos coches ha vendido de cada modelo si ha obtenido 17000 euros de beneficio?

Ficha nº 8.

ACTIVIDAD 8:

INVENCIÓN DE ENUNCIADOS DE PROBLEMAS.

Actividad 8.1: Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

Rellena adecuadamente los espacios en blanco de forma que el anterior sistema de ecuaciones sería el que tendrás que escribir para plantear el siguiente problema con dos ecuaciones y dos incógnitas: "En una terraza sirven bocadillos y refrescos. Se sabe que ___ bocadillos y ___ refrescos cuestan ___ euros y que ___ bocadillos y ___ refresco cuestan ___ euros. Calcula el precio de _______________ y de ______________."

Actividad 8.2: Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y=150 \\ 1.5x-0.5y=125 \end{cases}$

Rellena adecuadamente los espacios en blanco de forma que el anterior sistema de ecuaciones sería el que tendrás que escribir para plantear el siguiente problema con dos ecuaciones y dos incógnitas: "Un examen tipo test consta de __ preguntas y se evalúa sumando __ puntos por cada acierto y restando __ puntos por cada fallo. Llamamos x al número de preguntas acertadas y llamamos y al número de preguntas falladas. Hemos tenido como puntación final de __ puntos."

Actividad 8.3: Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y=25 \\ 4x+2y=80 \end{cases}$, inventa un enunciado en el utilices las siguientes palabras:
-granja
-ovejas
-gallinas

Actividad 8.4: Dado el sistema $\begin{cases} 2.5x+1.5y=32.5 \\ x+y=15 \end{cases}$, inventa un enunciado en el utilices las siguientes palabras:
-vendidos
-bocadillos de jamón
-bocadillos de tortilla
-euros

Actividad 8.5: Dado el sistema $\begin{cases} x-5=3(y-5) \\ x+1=2(y+1) \end{cases}$, inventa un enunciado en el que hables de:
-edad de Juan
-edad de Pedro

Actividad 8.6: Inventa un enunciado en el que hables de:
-coches
-motos
-faros delanteros

Ficha nº 9.

ACTIVIDAD 9:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS INVENTADOS.

Actividad 9.1:

Un alumno ha inventado el siguiente enunciado: **“**Juan le dice a Pedro: En estos momentos yo llevo en mi camión diez sacos más que tú en el tuyo, pero si cada uno dejamos cinco sacos tú llevarás el triple que yo”

9.1.1) Resuelve el problema
9.1.2) ¿Qué respuestas has encontrado?

9.1.3) ¿Cómo mejorarías tú ese enunciado?
9.1.4) ¿Qué respuestas te salen con ese enunciado tuyo?

Actividad 9.2:

Un alumno ha inventado el siguiente enunciado: “El área de un rectángulo es 24 metros cuadrados. Un lado mide 2 metros más que el otro. Calcula la longitud de los lados”.

9.2.1) Resuelve el problema
9.2.2) ¿Qué respuestas has encontrado?

9.2.3) ¿Cómo mejorarías tú ese enunciado?
9.2.4) ¿Qué respuestas te salen con ese enunciado tuyo?

Actividad 9.3:

Un alumno ha inventado el siguiente enunciado: “Pedro tiene 60 años, y su hija Luisa 24. ¿Dentro de cuántos años la edad de Luisa será cuatro veces la de Pedro?”

9.3.1) Resuelve el problema
9.3.2) ¿Qué respuestas has encontrado?

9.3.3) ¿Cómo mejorarías tú ese enunciado?
9.3.4) ¿Qué respuestas te salen con ese enunciado tuyo?

Ficha nº 10.

PRUEBA I

Cuestión I.1: Carmen tiene 42 años y su hijo 10: ¿Cuántos años han de pasar para que la edad de Carmen sea el triple de la de su hijo?

Cuestión I.2: En una droguería se venden 3 jabones y 2 botes de colonia por 12 euros, y también 4 jabones y 3 botes de colonia por 17 euros. Averigua el precio de cada producto.

Cuestión I.3: La dueña de la droguería de la actividad anterior no tiene el éxito esperado con las ofertas, y por ello lanza una oferta de 6 jabones y 4 botes de colonia por 22 euros. Explica razonadamente si ha rebajado o no ha rebajado los productos.

Cuestión I.4: ENUNCIADO (dado por el profesor): La suma de cuatro números consecutivos es 114. Calcula dichos números.
FORMULACIÓN (trabajo del alumno): $x + x + 1 + x + 2 = 114$
RESOLUCIÓN (trabajo del alumno): $x = 37$
Realiza la comprobación para saber si el alumno se merece un punto (por hacerlo bien), un cero (por hacerlo mal) o medio punto (por hacerlo bien pero no terminarlo).

Cuestión I.5: Dado el sistema $\begin{cases} x-5=3(y-5) \\ x+1=2(y+1) \end{cases}$. Inventa un enunciado en el que hables de:
-librería -libros en inglés -libros en francés

Ficha nº 11.

PRUEBA II

Cuestión II.1: Carmen tiene 42 años y su hijo 10: ¿Cuántos años han de pasar para que la edad de Carmen sea el triple de la de su hijo?

Cuestión II.2: En una droguería se venden 3 jabones y 2 botes de colonia por 12 euros, y también 4 jabones y 3 botes de colonia por 17 euros. Averigua el precio de cada producto.

Cuestión II.3: La dueña de la droguería de la actividad anterior no tiene el éxito esperado con las ofertas, y por ello lanza una oferta de 6 jabones y 4 botes de colonia por 22 euros. Explica razonadamente si ha rebajado o no ha rebajado los productos.

Cuestión II.4: ENUNCIADO (dado por el profesor): La suma de cuatro números consecutivos es 114. Calcula dichos números.
FORMULACIÓN (trabajo del alumno): $x + x + 1 + x + 2 = 114$
RESOLUCIÓN (trabajo del alumno): $x = 37$
Realiza la comprobación para saber si el alumno se merece un punto (por hacerlo bien), un cero (por hacerlo mal) o medio punto (por hacerlo bien pero no terminarlo).

Cuestión II.5: Dado el sistema $\begin{cases} x-5=3(y-5) \\ x+1=2(y+1) \end{cases}$. Inventa un enunciado en el que hables de:
-librería -libros en inglés -libros en francés

Ficha nº 12.

Anexo II:

Diario de clase

La implementación de las 9 actividades y de las 2 pruebas requirió un total de 11 sesiones de clase en cada uno de los dos subgrupos de 3º de ESO, el subgrupo 3.1 y el 3.2, durante el curso 2007-2008, en el Instituto de Educación Secundaria "Goya" de Zaragoza.

Este diario de clase ha sido elaborado a partir de las notas tomadas durante la implementación misma de las sesiones en el aula y de las escritas al finalizar cada una de dichas sesiones. Las primeras fueron redactadas con extrema premura. Las segundas fueron escritas con tranquilidad, pero con los recuerdos aún recientes en la memoria del profesor en el aula.

Naturalmente, el orden de este diario de clase es cronológico y está desglosado en los dos subgrupos 3.1 y 3.2 que componían el grupo de experimentación de esta tesis.

SESIÓN nº 1 en el Subgrupo 3.2

1ª MITAD DE LA SESIÓN nº 1: **Actividad 1.1: La letra como abreviatura, como variable y como incógnita**

2ª MITAD DE LA SESIÓN nº 2: **Actividad 1.2: La letra como incógnita**

Lunes 15/10/2007 3ª Hora (10:05-10:55)

Ausencias: Alumno A18 (Sin justificar)

1ª MITAD DE LA SESIÓN nº 1:

1ª Parte de la 1ª mitad: Trabajo individual

Normas:
-Los alumnos debían trabajar individualmente unas hojas por las que se les darían puntos positivos para la nota final de la evaluación.
-Los alumnos no debían borrar nada. Si se equivocaban, debían tachar mediante un aspa. Además por los intentos anulados también se les darían puntos positivos para la nota final de la evaluación.
-Los alumnos podían usar la calculadora.

Desarrollo:
-Un alumno preguntó en voz alta si se podía escribir más de una cruz en cada fila. El profesor contestó en voz alta -para toda la clase- que sí.
-Los alumnos rellenaron rápidamente la hoja. Pronto, todos entregaron voluntariamente las hojas.

Duración:
Unos 10 minutos

2ª Parte de la 1ª mitad: Debate en la pizarra e intervención final del profesor

Normas:
Con la actividad 1.1 escrita en la pizarra, los alumnos debían corregir la actividad respondiendo en voz alta y por turno según su ubicación física en el aula. Los alumnos recibían puntos positivos si respondían acertadamente dentro de turno, perdían puntos positivos si respondían fuera de turno y ni recibían ni perdían positivos si respondían desacertadamente dentro de turno.

Desarrollo:
-Muchos alumnos respondieron fuera de turno, especialmente al principio de la corrección.
-Algunos alumnos afirmaron que las letras de las diferentes expresiones eran abreviaturas, incógnitas o variables sin argumentaciones de ningún tipo, como si fuera cuestión de acertar por casualidad.
-Algunos alumnos argumentaron que las letras de las diferentes expresiones eran incógnitas porque eran letras. Es decir, identificaban toda letra como incógnita.

-Algunos alumnos argumentaron que las x eran incógnitas porque la letra era una x. Es decir, identificaron todas las x como incógnitas.
-El profesor realizó su intervención final sin incidentes.

Duración:
Unos 20 minutos.

2ª MITAD DE LA SESIÓN nº 1:

1ª Parte de la 2ª mitad: Trabajo en equipos de 4 alumnos

Normas fijadas por el profesor:
-Los alumnos debían responder las hojas trabajando en equipos de 4 alumnos.

Desarrollo:
-Los alumnos intentaron juntarse en equipos de 5, de 6, etc. El profesor perdió mucho tiempo en organizarles en equipos de 4.
-Toda la clase aprovechó la organización en equipos de 4 para hablar de todo menos de matemáticas. El profesor no logró reconducir la situación: todos los alumnos siguieron charloteando de sus cosas (unos con descaro, otros más disimuladamente).

Duración de la fase: Unos 15 minutos.

2ª Parte de la 2ª mitad: Debate en la pizarra e intervención final del profesor

Desarrollo:
-Como el alboroto de la clase era incontrolable, el profesor suspendió la puesta en común.
-Tras la amenaza de castigarles sin recreo, todos los alumnos callaron y el profesor explicó en su intervención final la actividad 1.2.2.

Duración:
Unos 10 minutos.

Ficha nº 1. Sesión número 1 en el Subgrupo 3.2

SESIÓN nº 1 en el Subgrupo 3.1

1ª MITAD DE LA SESIÓN nº 1: **Actividad 1.1: La letra como abreviatura, como variable y como incógnita**

2ª MITAD DE LA SESIÓN nº 2: **Actividad 1.2: La letra como incógnita**

Lunes 15/10/2007 4ª Hora (11:25-12:15)

Ausencias: Alumno05 (enfermedad)

1ª MITAD DE LA SESIÓN nº 1:

1ª Parte de la 1ª mitad: Trabajo individual

Normas:
-Los alumnos debían trabajar individualmente unas hojas por las que se les darían puntos positivos para la nota final de la evaluación.
-Los alumnos no debían borrar nada. Si se equivocaban, debían tachar mediante un aspa. Además por los intentos anulados también se les darían puntos positivos para la nota final de la evaluación.
-Los alumnos podían usar la calculadora.

Desarrollo:
-Un alumno preguntó en voz alta, al profesor, qué era una abreviatura. El profesor explicó el significado de la palabra "abreviatura" en voz alta -para todo el grupo-. Utilizó los ejemplos de "m" para "metros" y de "Km" para Kilómetros.
-Algunos alumnos meditaron detenidamente lo que iban rellenando. La mayoría rellenó rápidamente las casillas. Pronto, todos entregaron voluntariamente las hojas.
-El ambiente de trabajo fue bueno.

Duración:
Unos 10 minutos.

2ª Parte de la 1ª mitad: Debate en la pizarra e intervención final del profesor

Normas:
Con la actividad 1.1 escrita en la pizarra, los alumnos debían corregir la actividad respondiendo en voz alta y por turno según su ubicación física en el aula. Las normas eran que los alumnos recibían puntos positivos si respondían acertadamente dentro de turno, perdían puntos positivos si respondían fuera de turno y ni recibían ni perdían positivos si respondían desacertadamente dentro de turno.

Desarrollo:
-Salvo un par de alumnos, reprendidos por su actitud, los demás estudiantes respetaron los turnos de respuesta.
-Algunos alumnos argumentaron, incluso cuando se trataba de un polinomio, que la letra era una incógnita "*porque era una letra*" o "*porque era una ecuación*".
-Cuando el profesor preguntó sobre qué era una variable o qué era una incógnita los alumnos

contestaban con expresiones del tipo "x", "a", "*una letra*", una "*ecuación*", "*lo que hay que resolver*", etc.
-Un alumno afirmó, cuando el profesor preguntó en qué se diferenciaba las ecuaciones de los polinomios, que las primeras eran "*igual a cero o a algo*" y los segundos "*no tenían signo de igual*".
-El profesor realizó su intervención final sin incidentes.

Duración de la fase:
Unos 15 minutos

2ª MITAD DE LA SESIÓN nº 1:

1ª Parte de la 2º mitad: Trabajo en equipos de 4 alumnos

Normas:
-Los alumnos debían trabajar las hojas en equipos de 4 alumnos.

Desarrollo:
-Se formaron rápidamente 4 equipos de 4 alumnos.
-Sólo un equipo de los 4 se dedicó a charlotear. Los otros 3 equipos trabajaron tras preguntar al profesor en voz baja qué tenían que hacer. El profesor les dijo que sustituyesen la x por números concretos para ver lo que sucedía.

Duración: Unos 10 minutos.

2ª Parte de la 2ª mitad: Debate en la pizarra e intervención final del profesor

Normas:
-En la pizarra estaba escrita la ecuación $7x+4=60$ de la actividad 1.2.2. Los alumnos debían responder sólo cuando el profesor les diese el turno de palabra.

Desarrollo:
-Salvo cuatro alumnos, que fueron reprendidos por alborotar, los demás estudiantes estuvieron en silencio y respetaron los turnos de respuesta.
-Un alumno halló la solución correcta de $7x+4=60$ mediante el método algebraico en la pizarra. El profesor, cuando preguntó porqué la actividad estaba mal resuelta, obtuvo las siguientes contestaciones:

-Unos alumnos dijeron que porque habría errores en las operaciones.
-Otros alumnos afirmaron que estaba bien resuelta.
-Un alumno señaló acertadamente que la ecuación había de ser resuelta "*probando*".

-El profesor realizó su intervención final sin incidentes.

Duración:
Unos 10 minutos.

Ficha nº 2. Sesión número uno en el Subgrupo 3.1

SESIÓN nº 2 en el Subgrupo 3.2

Actividad 2: Resolución de ecuaciones

Martes 16/10/2007 2ª Hora (09:10 -10:00)

Ausentes: Nadie

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
El profesor recordó que no debían borrar los errores sino anularlos con un aspa y que valoraría positivamente tales intentos.

Desarrollo:
-Varios alumnos preguntaron en voz alta si era un examen sorpresa. El profesor les tranquilizó: sólo eran unos ejercicios para subir nota.
-Durante el desarrollo de la actividad, el profesor tuvo que ordenar a dos alumnos que guardasen el tipex.
-Un alumno preguntó, en voz baja, qué signo había entre el 5 y la x de la ecuación $5x = 100$ de la actividad 2.1.c. El profesor se lo explicó en voz baja. Otro alumno preguntó, en voz baja, si delante del 5 de $5x = 100$ de la misma actividad 2.1.c había un signo +. El profesor le dijo que sí en voz baja.
-Dos alumnos querían que el profesor les hiciese los ejercicios. El profesor en el aula les contestó que los intentasen, que ya serían corregidos en la pizarra.
-Todos trabajaron en silencio y con interés durante unos 30 minutos. Luego, algunos alumnos entregaron los ejercicios y se pusieron a charlotear. El profesor les obligó a callarse.
-A los 40 minutos, más o menos, todos habían entregado voluntariamente las hojas de la actividad 2.

Duración:
Unos 40 minutos.

2ª Parte: Debate en común e intervención final del profesor.

Normas:
-El profesor preguntaría cuestiones sobre las ecuaciones 2.1.d, 2.2.a, 2.3.c y 2.4.a que estaban escritas en la pizarra.
-Los alumnos irían respondiendo según su orden de ubicación en el aula. Ganaría puntos el que respondía dentro de turno y perdería puntos el que respondiera (acertada o desacertadamente) fuera de turno.

Desarrollo:
-En general, se respetó el turno de palabra. En dos o tres ocasiones respuestas y exclamaciones de desaprobación que estaban fuera de turno.
-Respecto a la pregunta "*¿Qué operación hay entre el* -6 *y la letra* x *en la ecuación* $-6x = 72$ *de la actividad 2.1.d?*", tenemos que algunos alumnos opinaron que era un +, porque los signos + de los números no se escriben y otros estudiantes opinaron que era un "por" porque "*siempre es así*" o porque "*el signo por no se escribe*". Realizada una votación,

los partidarios del "por" eran más que los del "+" pero muchos alumnos se abstuvieron.
-Respecto a la pregunta "*¿Qué número multiplica al paréntesis* $(3-x)$ *en la ecuación* $3x=4+(3-x)$ *de la actividad 2.3.c?*" tenemos que un primer alumno dijo que "4", otro segundo alumno añadió que "+4" y un tercer alumno que explicó que era un 1 pero que el 1 no se escribe.

-Respecto a la ecuación $\frac{4(x-1)}{3}-\frac{2(x-3)}{6}=5$ de la actividad 2.4.a, un alumno salió voluntariamente a resolverla en la pizarra. Dicho alumno cometió el típico error de no cambiar el menos del segundo paréntesis al eliminar denominadores. Entonces, el profesor interrumpió la resolución y preguntó a la clase si lo estaba haciendo bien o mal: Varios alumnos opinaron que lo estaba haciendo bien hasta que apareció un alumno que pidió la palabra y señaló el error.
-El profesor realizó su intervención final sin incidentes.

<u>Duración de la fase</u>: Unos 10 minutos.

Ficha nº 3. Sesión número dos en el subgrupo 3.2

SESIÓN nº 2 en el Subgrupo 3.1

Actividad 2: Resolución de ecuaciones

Miércoles 17/10/2007 1ª Hora (08:15 -9:05)

Ausentes: Alumno A05 (enfermedad).

Retrasos: Alumno A03 (10 minutos tarde)

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
El profesor en el aula recordó que no debían borrar los errores sino anularlos con un aspa y que valoraría positivamente tales intentos.

Desarrollo:
-Aproximadamente a los 35 minutos, la mayoría había entregado las hojas.
-Aproximadamente a los 45 minutos, todos habían entregado voluntariamente las hojas.
-Sólo 2 alumnos repasaron lo escrito.
-Trabajaron en silencio. No hubo preguntas.

Duración:
Unos 45 minutos.

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
-El profesor preguntaría cuestiones sobre las ecuaciones 2.1.d, 2.2.a, 2.3.c y 2.4.a que estaban escritas en la pizarra.
-Los alumnos irían respondiendo según su orden de ubicación en el aula. Ganaría puntos el que respondía dentro de turno y perdería puntos el que respondiera (acertada o desacertadamente) fuera de turno.

Desarrollo:
-Los alumnos, en general, respetaron el turno de palabra. En algunos momentos se escucharon intervenciones y exclamaciones fuera de turno.
-La cuestión "*¿Qué operación hay entre el* -6 *y la letra* x *en la ecuación* $-6x = 72$ *de la actividad 2.1.d?*" no suscitó debate: el primer alumno preguntado dijo que entre el -6 y la x había un signo "por" que no se escribía nunca. Todos los demás alumnos repitieron lo mismo (Un alumno añadió que "6 *era un coeficiente*").
-La resolución de la ecuación $7x - 19 = 5x - 27$ de la actividad 2.2.a suscitó que un alumno levantase la mano y preguntase si era mejor pasar el 27 a la izquierda para que quedase un número positivo en el término de los números. Compañeros suyos le contestaron, sin respetar el turno de intervención, "*da igual*", "*te quedan las x negativas y es peor*"...
-Respecto a la ecuación $\frac{4(x-1)}{3} - \frac{2(x-3)}{6} = 5$ de la actividad 2.4.a, un alumno salió voluntariamente a resolverla en la pizarra y convirtió 5 en $5/6$ al sacar mínimo común

denominador 6 y, luego, el típico error de no cambiar el menos del segundo paréntesis al eliminar denominadores. El profesor interrumpió la resolución y preguntó a la clase si lo estaba haciendo bien. Un primer alumno levantó la mano y opinó que, al sacar mínimo común denominador 6, la fracción $\frac{4(x-1)}{3}$ se debía convertir en $\frac{8(2x-2)}{6}$. Los demás alumnos del grupo que levantaron la mano fueron detectando tanto los 2 errores de la pizarra como el del alumno que hizo la primera sugerencia.
-No se analizó la ecuación de la actividad 2.3.c por falta de tiempo.
-La intervención final del profesor fue algo precipitada y, además, fue interrumpida por el timbre de salida.

Duración:
Algo más de 10 minutos.

Ficha nº 4. Sesión número dos en el subgrupo 3.1

SESIÓN nº 3 en el Subgrupo 3.1

Actividad 3: Clases de ecuaciones lineales

Jueves 18/10/2007 3ª Hora (10:05-10:55))

Ausentes: Alumno A05 (Enfermedad)

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
-Los alumnos no debían borrar los errores sino tacharlos con un aspa.
-Las respuestas debían ser razonadas.

Desarrollo:
-Los alumnos trabajaron en silencio durante unos 10 minutos, al término de los cuales casi todos habían entregado voluntariamente las hojas. Unos se pusieron a estudiar, otros a realizar tareas y otros intentaron charlotear entre ellos. A estos últimos se les llamó la atención.
-Dos alumnos entregaron las hojas tiempo después pero no escribieron casi nada. A los 20 minutos todos habían entregado voluntariamente las hojas.

Duración:
Unos 20 minutos.

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
-El profesor escribió en la pizarra las seis ecuaciones de la actividad 3.
-El profesor les fue preguntando ordenadamente, según su ubicación en el aula, cuáles eran las soluciones de cada ecuación.

Desarrollo:
-Dos o tres veces hubo alumnos que respondieron fuera de turno y que perdieron todos los puntos positivos que tenían.
-Sobre la ecuación $3x = 27$ de la actividad 3.1: Todos dijeron que $x = 9$ era la solución. Cuando se les preguntó porqué 9 era la solución, casi todos dieron respuestas del tipo "*porque es lo que sale*", "*porque el 3 pasa dividiendo*". Al final, un estudiante levantó la mano y dijo que porque 3 por 9 da 27. Cuando el profesor dijo "*¿quién me dice otra solución?*", un alumno dijo "-9". Hubo risas de fondo.
-Un alumno salió a la pizarra, transformó la ecuación $3x = x + 2x$ de la actividad 3.2 en la ecuación $0x = 0$ y escribió "imposible". En el debate posterior se dijo de todo: que era imposible, que $x = 0$, que había "infinitas soluciones"... Cuando se les pedían razones, respondían que "*porque da eso*" o "*porque no se puede hacer*". Finalmente, un alumno levantó la mano y dijo que 0 entre 0 da imposible en la calculadora. Todo el subgrupo pareció quedar convencido por tal argumento.
-Todos los alumnos respondieron que la solución de la ecuación $3x = 0$ de la actividad 3.3 era $x = 0$. Casi todos razonaban que 0 entre 3 da 0. Sólo hubo uno que añadió que "*3 por 0 da 0*".
-Un alumno salió a la pizarra y transformó la ecuación $3x = x + 2x + 5$ de la actividad 3.4 en la

ecuación $0x=5$ y escribió "infinitas". Al ser preguntado porqué escribía esa respuesta, no supo decir nada. En el debate posterior, se dijo de todo: que "$x=0$", que era "*imposible*"…Entonces, un alumno, el mismo de antes, dijo que la calculadora decía que 5 entre 0 es igual a imposible. A partir de entonces todos repetían el argumento de la calculadora.

-Las ecuaciones de las actividades 3.5 y 3.6 no fueron debatidas porque quedaba poco tiempo.

-El profesor realizó su intervención final sin incidentes.

Duración:

Unos 30 minutos.

Ficha nº 5. Sesión número tres en el subgrupo 3.1

SESIÓN nº 3 en el Subgrupo 3.2

Actividad 3: Clases de ecuaciones lineales

Viernes 19/10/2007 3ª Hora (10:05 a 10:55)

Ausentes: Nadie.

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
-Los alumnos no debían borrar los errores sino tacharlos con un aspa.
-Las respuestas debían ser razonadas.

Desarrollo:
-Algunas parejas de alumnos se pusieron a charlar entre ellos. El profesor les llamó la atención y volvieron al trabajo.
-Sobre las 10:20 todos entregaron voluntariamente las hojas.

Duración:
Unos 15 minutos.

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
-El profesor escribió en la pizarra las seis ecuaciones de la actividad 3.
-El profesor les fue preguntando ordenadamente, según su ubicación en el aula, cuáles eran las soluciones de cada ecuación.

Desarrollo:

-El profesor tuvo que recordar, varias veces, que los que respondiesen fuera de turno, perdían todos los positivos que tenían.
-Sobre la ecuación $3x = 27$ de la actividad 3.1, un primer alumno dijo que $x = 9$ era la solución- Luego, un segundo alumno dijo que $x = 9$ y $x = -9$, siendo apoyado por cuatro compañeros suyos. Los 5 alumnos sostenían que porque así lo hacían en diciembre (Mes en el que se habían trabajado la resolución de las ecuaciones de 2º grado en la enseñanza habitual del Álgebra escolar).
-Un alumno transformó la ecuación $3x = x + 2x$ de la actividad 3.2 en la ecuación $0x = 1$ cuando salió a la pizarra y argumentó que "*cuando se quita todo, lo que queda es uno*", como si de una simplificación se tratara. Otro alumno transformó bien la ecuación anterior en $0x = 0$ pero escribió "$x = 0/0$ *no tiene solución*" y argumentó que escribía eso "*porque el denominador es* 0". El resto de la clase contestó que "$x = 0$" o que "$x = imposible$" o que "$x = infinitas$", sin aportar explicación alguna.
-La ecuación $3x = 0$ de la actividad 3.3 fue bien resuelta por el primer alumno que salió a la pizarra. Casi todos los alumnos dijeron que estaba bien porque 0 entre 3 da 0. Varios alumnos también dijeron que "3 por 0 da 0".
-La ecuación $3x = x + 2x + 5$ de la actividad 3.4 fue mal transformada por los dos primeros alumnos que salieron a la pizarra porque reducían mal los términos en x. El tercer alumno que

salió a la pizarra transformó bien la ecuación anterior en la ecuación $0x = 5$ y argumentó que "x es $1x$". Luego, escribió "*muchas soluciones*" y al ser preguntado porqué escribía eso, se quedó callado.
Otros alumnos dijeron que "$x = 0$" o "*sin solución*" y se basaban, en general, en que "*había un 0*", en que "*recordaban que daba así*", etc. Finalmente, un alumno dijo que no tenía solución "*porque 0 por x da 0 y 0 es distinto que 5*". Dos o tres alumnos más repitieron lo mismo.
-Las ecuaciones $0x = 7$ y $0x = 0$ de las actividades 3.5 y 3.6 dieron lugar a todo tipo de respuestas. De ambas ecuaciones unos alumnos dijeron que eran una "*identidad*" o "*falsedad*", sin argumentar nada y otros alumnos dijeron que 7 entre 0 da 7 o que 0 entre 0 da 0.
-El profesor interrumpió el debate porque se acababa el tiempo.
-El profesor realizó su intervención final sin incidentes.

<u>Duración</u>:
Unos 35 minutos.

Ficha nº 6. Sesión número tres en el subgrupo 3.2

SESIÓN nº 4 en el Subgrupo 3.2

Actividad nº 4: Traducción de expresiones

Martes 08/01/2008 2ª Hora (de 9:10-10:00)

Ausentes: Alumno A30 (Cuidado de hermanos pequeños).

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
-Se les recordó que no debían borrar los errores sino anularlos con un aspa y que valoraría positivamente tales intentos.
-Se les dijo que se valoraría que razonasen las respuestas.

Desarrollo:
-Era el primer día tras las vacaciones de Navidad. Algunos alumnos estaban adormilados y algunos alumnos querían charlotear sobre las vacaciones.
-El profesor tuvo que recordar, varías veces, que no borrasen nada.
-El ambiente de trabajo fue bueno. Sólo hubo que llamar la atención a un par de alumnos para que dejasen de hablar sobre las vacaciones y se pusiesen a trabajar.
-Hacia las 9:50, todos los alumnos habían entregado voluntariamente las hojas.

Duración:
Unos 40 minutos.

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
En la pizarra estaban escritas las actividades 4.5.a, 4.5.b y 4.5.c. Los alumnos tenían que decir, según su colocación en el aula, enunciados inventados para las anteriores actividades.

Desarrollo:
-Funcionó la advertencia de que podían ser castigados a quedarse sin recreo.
-En los enunciados inventados sobre la ecuación $5x+2y=220$ de la actividad 4.5.a en el contexto de un garaje, la mayoría habló de sumar ruedas de coches y motos. Una minoría habló de sumar ruedas de coches y faros de coches. Al preguntar a la clase sobre qué da la suma de ruedas y de faros, un alumno levantó la mano y contestó que “cosas de coche”.
-En los enunciados inventados sobre la ecuación $\frac{x}{5}=y$ de la actividad 4.5.b en el contexto de edades, muchos alumnos dijeron que y era la edad del más mayor era porque x está dividida por 5. Otros dijeron que x era la edad del mayor, pero no lo argumentaban. Entonces un alumno dijo que había que “*dividir al mayor para compensar*”.
-No hubo debate por falta de tiempo sobre la actividad 4.5.c en el contexto de una papelería.
-El profesor dio su explicación final sin incidentes.

Duración: Unos 10 minutos.

Ficha nº 7. Sesión número cuatro en el subgrupo 3.2

SESIÓN nº 4 en el Subgrupo 3.1

Actividad nº 4: Traducción de expresiones

Miércoles 09/01/2008 1ª Hora (08:15-09:05)

Ausentes: Nadie.

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
-Se les recordó que no debían borrar los errores sino anularlos con un aspa y que valoraría positivamente tales intentos.
-Se les dijo que se valoraría que razonasen las respuestas.

Desarrollo:
-Un alumno preguntó, en voz alta, sobre cuánto tiempo disponían. El profesor dijo, en voz alta, que disponían de unos 30 minutos.
-Los alumnos estuvieron trabajando intensamente en las hojas. Apenas hablaron.
-El profesor recordó varías veces que los alumnos no debían borrar nada.
-Un alumno que preguntó, en voz baja si, en la actividad 4.5, había que inventarse un problema de dos ecuaciones y si había que resolverlo. El profesor le contestó en voz baja que no, que sólo había que inventar una oración gramatical que al traducirse se convirtiera en esa ecuación.
-Hacia las 8:55, todos los alumnos habían entregado voluntariamente las hojas.

Duración:
Unos 40 minutos

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
En la pizarra estaban las actividades 4.5.a, 4.5.b y 4.5.c. Los alumnos tenían que decir ordenadamente, según su colocación en el aula, enunciados inventados para las anteriores actividades 4.5.a, 4.5.b y 4.5.c.

Desarrollo:
-La actividad se desarrolló ordenadamente.
-En los enunciados inventados sobre la ecuación $5x + 2y = 220$ de la actividad 4.5.a en el contexto de un garaje, la mayoría habló de la suma ruedas de coches y motos. Una minoría habló de ruedas y faros de los coches. Al preguntar a la clase qué daba la suma de ruedas y faros, un alumno respondió que "*no se pueden sumar*" y que eran "*ruedas de coches más de motos*".
-En los enunciados inventados sobre la ecuación $\frac{x}{5} = y$ de la actividad 4.5.b en el contexto de edades, muchos alumnos razonaron que x era menor que y porque estaba dividida por 5. Varios alumnos apoyaron tal razonamiento hasta que un alumno dijo que no era así y lo razonó con el ejemplo $x = 25$ años e $y = 5$ años. Todos parecieron quedar convencidos por tal razonamiento.

-La actividad 4.5.c tampoco pudo ser trabajada en este subgrupo por falta de tiempo.
-El profesor dio su explicación final sin incidentes.

Duración:
Unos 10 minutos.

Ficha nº 8. Sesión número cuatro en el subgrupo 3.1

SESIÓN nº 5 en el Subgrupo 3.1

Actividad 5: Problemas desglosados en preguntas cortas

Jueves 10/01/2008 3ª Hora (10:05 a 10:55)

Ausentes: Alumno A ().

Parte única: Trabajo individual

Normas:
-Se recordó que no debían borrar los errores sino anularlos con un aspa y que valoraría positivamente tales intentos.
-Se les insistió en que razonasen las respuestas.
-Se les dijo que respondieran tranquilamente porque disponían de toda la clase para realizar la actividad y que era mejor que hiciesen cuatro o cinco actividades completas que seis incompletas.

Desarrollo:
-Dos alumnos preguntaron al profesor, en voz baja, si faltaban datos en la actividad 5.1 o si dicha actividad estaba bien. El profesor les dijo que escribiesen lo que pensaban en las hojas. Luego repitió esta idea, en voz alta, para toda la clase.
Luego, a los 15 minutos, el profesor observó que varios alumnos seguían en aún la actividad 5.1.El profesor llamó la atención y dijo, en voz alta, que la actividad 5.1 podía ser un caso atípico y que quedaban por hacer otras cinco actividades.
-Los alumnos, en general, trabajaban primero la actividad 5.1, luego la 5.2, luego la 5.3, etc.
-Hacia final de la clase, muchos estaban trabajando aún la actividad 5.4. Casi ninguno pudo intentar la actividad 5.5 y, menos aún, la actividad 5.6. Ningún alumno había entregado voluntariamente las hojas cuando sonó el timbre de salida y se les recogieron las hojas.
-El ambiente de trabajo fue bueno a lo largo de toda la sesión. Apenas hablaron.

Duración:
50 minutos.

Ficha nº 9. Sesión número dos en el subgrupo 3.1

SESIÓN nº 5 en el Subgrupo 3.2

Actividad 5: Problemas desglosados en preguntas cortas

Viernes 11/01/2008 3ª Hora (10:05-10:55)

Ausentes: Alumno A30 (Cuidado de hermanos pequeños).

Parte única: Trabajo individual

Normas:
-Se recordó que no debían borrar los errores sino anularlos con un aspa y que valoraría positivamente tales intentos.
-Se les insistió en que razonasen las respuestas.
-Se les dijo que respondieran tranquilamente porque disponían de toda la clase para realizar la actividad y que era mejor que hiciesen cuatro o cinco actividades completas que seis incompletas.

Desarrollo:
-Un alumno preguntó al profesor, en voz baja, si la actividad 5.1 se podía hacer. El profesor dijo en voz alta, a todo el grupo, que "*si creéis que un enunciado está mal, eso es lo que debéis expresar en las hojas, explicando porqué está mal*".
-Los alumnos, en general, trabajaban primero la actividad 5.1, luego la 5.2, luego la 5.3, etc.
-El profesor no observó a nadie especialmente entretenido en la actividad 5.1.
-Al final de la clase, muchos aún estaban trabajando en la actividad 5.4. Unos pocos intentaron las actividades 5.5 y 5.6.
-Ningún alumno había entregado voluntariamente las hojas cuando sonó el timbre de salida y el profesor en el aula recogió todas las hojas.
-El ambiente de trabajo fue bueno a lo largo de toda la sesión. Apenas hablaron.

Duración:
50 minutos.

Ficha nº 10. Sesión número dos en el subgrupo 3.2

SESIÓN nº 6 en el Subgrupo 3.2

Actividad 6: Necesidad de comprobar el enunciado

Lunes 14/01/2008 3ª Hora (10:05 a 10:55)

Ausentes: Alumnos A18 (sin justificar) y A27 (enfermedad).

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
-Se les recordó a los alumnos que no debían borrar los errores sino anularlos con un aspa y que se valorarían positivamente tales intentos.
-Se les dijo a los alumnos que analizasen si cada problema estaba bien resuelto, bien planteado y si el sistema planteado estaba bien resuelto. Se les recalcó que debían razonar las respuestas.

Desarrollo:
-El ambiente de trabajo fue bueno. Algunos alumnos escribieron poco, pero no charlaron sino que pareció que estaban meditando sobre la actividad.
-En torno a las 10:40, todos los alumnos entregaron simultánea y voluntariamente las hojas de la actividad.

Duración:
Unos 35 minutos.

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
La actividad 6 estaba escrita en la pizarra. El debate se basó en lo que escrito por los alumnos que voluntariamente salieron a la pizarra y en las preguntas que el profesor realizó a los alumnos en la pizarra y a los que permanecieron sentados.

Desarrollo:
-Casi todos los alumnos charlaron y alborotaron durante el debate. Era un ambiente muy desagradable y disruptivo. El profesor les amenazó –como de hecho ocurrió- con dedicar el tiempo de recreo a la recuperación del tiempo de debate y de la explicación magistral. Finalmente, se fueron callando.
-Muchos alumnos no decían nada cuando se les preguntaba si el problema o si el sistema estaba bien resueltos o cuál era la diferencia entre comprobar y repasar.
-Los alumnos, en general, identificaban “problema bien hecho” con “sistema bien resuelto”.
-El profesor dio una explicación final, ocupando parte del recreo, sobre los conceptos de problema bien resuelto y sistema bien resuelto y sobre la diferencia entre comprobar y repasar.

Duración:
Unos 25 minutos.

Ficha nº 11. Sesión número seis en el subgrupo 3.2

SESIÓN nº 6 en el Subgrupo 3.1

Actividad 6: Necesidad de comprobar el enunciado

Lunes 14/01/2008 4ª Hora (11:25 a 12:15)

Ausentes: nadie.

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
-Se les recordó a los alumnos que no debían borrar los errores sino anularlos con un aspa y que se valorarían positivamente tales intentos.
-Se les dijo a los alumnos que analizasen si cada problema estaba bien resuelto, bien planteado y si el sistema planteado estaba bien resuelto. Se les recalcó que debían razonar las respuestas.

Desarrollo:
-El ambiente de trabajo fue bueno
-A las 11:50, casi todos habían entregado simultánea y voluntariamente las hojas. Dos alumnos entregaron voluntariamente las hojas unos tres minutos más tarde que el resto.

Duración:
Unos 30 minutos

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
La actividad 6 estaba escrita en la pizarra. El debate se basó en lo que escrito por los alumnos que voluntariamente salieron a la pizarra y en las preguntas que el profesor realizó a los alumnos en la pizarra y a los que permanecieron sentados.

Desarrollo:
-Este subgrupo estaba también muy alborotado al comienzo de esta fase. El profesor les advirtió que si no respetaban las reglas del debate, esta parte de la actividad se realizaría durante un recreo. La amenaza preventiva funcionó. Sólo hubo que llamar la atención una vez a un par de alumnos durante el desarrollo del debate.
-La mayoría de los alumnos identificaban “problema bien hecho” con “sistema bien resuelto”. Un alumno matizó que un sistema de ecuaciones podía estar bien resuelto pero no bien planteado.
-El profesor dio su explicación final sin incidentes.

Duración:
Unos 10 minutos.

Ficha nº 12. Sesión número seis en el subgrupo 3.1

SESIÓN nº 7 en el Subgrupo 3.2

Actividad 7: Planear, resolver y comprobar

Martes 15/01/2008 2ª Hora (09:10-10:00)

Ausentes: Alumno A30 (Cuidado de hermanos pequeños).

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
Se les recordó a los alumnos que era muy importante que razonasen sus respuestas.

Desarrollo:
-Un alumno afirmó, en voz alta y sin levantar la mano, que la actividad 7.6 "no se podía hacer". Otro alumno le respondió, también en voz alta y sin pedir permiso, que sí se podía. La clase se empezó a alborotar. El profesor les hizo callar y les dijo que escribiesen lo que pensaban y que cualquier método de resolución era válido si estaba bien razonado.
-Sobre las 9:35, todos los alumnos habían entregado voluntariamente las hojas.

Duración:
Unos 25 minutos

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
Las actividades 7.3, 7.4, 7.5 y 7.6 estaban escritas en la pizarra. A continuación, algunos alumnos voluntarios iban saliendo a resolverlas y el profesor les preguntaba cuestiones sobre dichas actividades a ellos y a los que estaban sentados.

Desarrollo:
-Esta fase se desarrolló ordenadamente en lo que a la conducta se refiere.
-Varios alumnos identificaron comprobar un problema con comprobar su sistema correspondiente y además, tales alumnos identificaron comprobar el sistema con sustituir las soluciones sólo en una de las dos ecuaciones.
-En la actividad 7.4 ningún alumno supo escribir algebraicamente "*un tercio de los barriles que quedaba*"
-En la actividad 7.6 varios alumnos mostraron su entusiasmo por haber "adivinado", "sin usar sistemas", es decir, mediante un tanteo aritmético.
-El profesor dio la explicación final sin incidentes.

Duración:
Unos 25 minutos.

Ficha nº 13. Sesión número siete en el subgrupo 3.2

SESIÓN nº 7 en el Subgrupo 3.1

Actividad 7: Planear, resolver y comprobar

Miércoles 16/0172008 1ª Hora (08:15-09:05)

Ausentes: Nadie.
Retraso: Alumno A03 (15 minutos tarde)

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
Se les recordó a los alumnos que era muy importante que razonasen sus respuestas.

Desarrollo:
-Un alumno levantó la mano y preguntó, en voz alta, si en la actividad 7.6 faltaban datos y que si había que hacerla. El profesor les dijo a todos, en voz alta, que escribiesen lo que pensaban y que cualquier método para resolver un problema era válido siempre que se razonara de donde provenían las soluciones.
-Hacia las 8:45 todos los alumnos habían entregado voluntariamente las hojas.

Duración:
Unos 30 minutos

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
Las actividades 7.3, 7.4, 7.5 y 7.6 estaban escritas en la pizarra. A continuación, algunos alumnos voluntarios iban saliendo a resolverlas y el profesor les preguntaba cuestiones sobre dichas actividades a ellos y a los que estaban sentados.

Desarrollo:
-El ambiente fue, al principio, desagradable. Hubo una minoría de cuatro alumnos que perturbaron el desarrollo del debate (risas, cuchicheos,…). Hubo que amenazarles con una amonestación.
-Luego, el ambiente mejoró y la mayoría de la clase participó ordenadamente.
-Varios alumnos identificaron "comprobar un problema" con "comprobar su sistema correspondiente".
-Algunos alumnos identificaban "comprobar el sistema" con "sustituir las soluciones" solamente en una de las dos ecuaciones. Sin embargo, un alumno afirmó que había que comprobar las dos. E incluso dio el ejemplo del sistema $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$, que se inventó, para decir que $x=5$ e $y=2$ verificaba la 1ª ecuación y no era la solución del sistema.
-Un alumno argumentó que, para comprobar un problema, además de comprobar el sistema, había que repasar que el problema esté bien planteado.
-Sobre la actividad 7.4 destacamos que muchos alumnos no formularon bien la expresión "*un tercio de los barriles que quedaba*" en la pizarra. Otros alumnos sí que supieron formularla bien. Es más, un alumno planteó bien todo el enunciado de la actividad 7.4.

Un alumno levantó la mano y le preguntó al profesor si ese problema 7.4 sobre los barriles "lo hacían" el curso pasado "con fracciones".
-Sobre la actividad 7.6, que no era resoluble mediante el habitual método de planteo y resolución de ecuaciones, varios alumnos defendieron con buen criterio que el problema 7.6 había que hacerlo "probando", es decir, mediante tanteo aritmético.
-El profesor dio su explicación final sin incidentes.

Duración:
Unos 20 minutos.

Ficha nº 14. Sesión número siete en el subgrupo 3.1

SESIÓN nº 8 en el Subgrupo 3.1

Actividad 8: Invención de enunciados de problemas

Jueves 17/01/2008 3ª Hora (10:05 a 10:55)

Ausentes: Nadie.

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
Se les dijo a los alumnos que los enunciados inventados debían ser coherentes con los sistemas dados y que dichos enunciados inventados debían estar muy bien expresados.

Desarrollo:
-Tres alumnos levantaron la mano y preguntaron al profesor, en voz baja, si había que resolver los sistemas dados. El profesor le dijo a todo el grupo, en voz alta, que no era necesario, que los sistemas de las actividades 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 y 8.5 daban "soluciones correctas" y que, en la actividad 8.6, sí que debían estudiar si el enunciado inventado por ellos llevaba a un sistema con unas soluciones "correctas" (Queríamos que se centrasen en la invención de enunciados, no en los procedimientos de resolución de sistemas).
-El ambiente de trabajo fue bueno.
-Todos entregaron voluntariamente las hojas.

Duración:
Unos 40 minutos

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
En la pizarra estaban escritas las actividades 8.3, 8.4 y 8.5. Los alumnos, por turno y sentados desde su sitio, debían inventar enunciados de problemas que eran debatidos y, si era posible, mejorados.

Desarrollo:
- Se les advirtió a los alumnos que si obstaculizaban el desarrollo del debate, éste se realizaría en el recreo. En general, el comportamiento fue bastante ordenado.
-En general, los alumnos se expresaban muy mal: El uso de los tiempos verbales solía ser deficiente cuando hablaban de situaciones hipotéticas.
-Casi todos los alumnos intentaron inventar y mejorar los enunciados.
-El profesor dio su intervención final sin incidentes.

Duración:
Unos 15 minutos.

Ficha nº 15. Sesión número dos en el subgrupo 3.1

SESIÓN nº 8 en el Subgrupo 3.2

Actividad 8: Invención de enunciados de problemas

Viernes 18/01/2008 3ª Hora (10:05 a 10:55)

Ausentes: Nadie.

1ª Parte: Trabajo individual

<u>Normas</u>:
Se les dijo a los alumnos que los enunciados inventados debían ser coherentes con los sistemas dados y que dichos enunciados inventados debían estar muy bien expresados.

<u>Desarrollo:</u>
-El ambiente de trabajo fue bueno.
-El profesor le dijo a todo el grupo que no era necesario resolver los sistemas de las actividades 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 y 8.5 porque daban "soluciones correctas" y que, en la actividad 8.6, sí que debían estudiar si el enunciado inventado por ellos llevaba a un sistema con unas soluciones "correctas" (Queríamos que se centrasen en la invención de enunciados, no en los procedimientos de resolución de sistemas).
-Todos entregaron voluntariamente las hojas.
-Hubo que llamar la atención a dos alumnos para dejaran de cuchichear.

<u>Duración</u>:
Unos 30 minutos

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

<u>Normas</u>:
En la pizarra estaban escritas las actividades 8.3, 8.4 y 8.5. Los alumnos, por turno y sentados desde su sitio, debían inventar enunciados de problemas que eran debatidos y, si era posible, mejorados.

<u>Desarrollo:</u>
-Se les advirtió que la actividad se realizaría durante el recreo si obstaculizaban los turnos de intervención de sus compañeros. Durante el debate hubo que reprender 2 veces a 4 alumnos que aprovecharon el debate para charlar y alborotar.
-En general, los alumnos se expresaban muy mal (El uso de los tiempos verbales solía ser casi deficiente, especialmente cuando hablaban de situaciones hipotéticas).
-Varios alumnos dieron respuestas del tipo "*no sé*", "*es muy difícil*" y no hicieron nada.
-El profesor realizó su intervención final y fue interrumpido una vez más por los 4 alumnos disruptivos anteriores, que se quedaron sin recreo.

<u>Duración</u>:
Unos 20 minutos.

Ficha nº 16. Sesión número ocho en el subgrupo 3.2

SESIÓN nº 9 en el Subgrupo 3.2

Actividad 9: Resolución de problemas inventados

Lunes 21/01/2008 — 3ª Hora (10:05 a 10:55)

Ausentes: Nadie.

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
-Se les dijo que eran problemas que habían sido inventados y cuyos enunciados podían ser erróneos.
-Se les recordó que no debían borrar sino tachar con un aspa.

Desarrollo:
-El ambiente de trabajo fue bueno.
-Hacia las 10:45 todos los alumnos habían entregado voluntariamente las hojas.

Duración:
Unos 40 minutos

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
En la pizarra estaba escrita la actividad 9. Los alumnos debían decir, por turno y desde el sitio, si el enunciado estaba bien o mal. En el segundo caso, tendrían que indicar porqué.

Desarrollo:
-El ambiente de trabajo fue bueno: no hablaron fuera de turno, no alborotaron, no charlaron entre ellos, etc. Esto no era frecuente en este subgrupo.
-Sobre las actividades 9.1 y 9.3: Algunos alumnos afirmaron equivocadamente que tales enunciados estaban bien. Otros alumnos afirmaron que estaban mal pero no sabían porqué. Un alumno dijo, con mal criterio, que "*falta el número de sacos que lleva Juan*", esto es, que no aparece en el enunciado el valor de una de las dos incógnitas en un problema algebraico que es planteable como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Otros alumnos no se expresaron muy bien pero detectaron contradicciones en los enunciados y propusieron arreglos acertados.
-Sobre la actividad 9.2: Un alumno que dijo que el enunciado estaba mal planteado porque "da una ecuación de 2º grado". Otro alumno preguntó si se podía resolver esa ecuación. Nadie propuso una modificación del enunciado.
-El profesor dio su explicación final sin incidentes.

Duración:
Unos 10 minutos.

Ficha nº 17. Sesión número nueve en el subgrupo 3.2

SESIÓN nº 9 en el Subgrupo 3.2

Actividad 9: Resolución de problemas inventados

Lunes 21/01/2008 4ª Hora (11:25 a 12:15)

Ausentes: Nadie.

1ª Parte: Trabajo individual

Normas:
-Se les dijo que eran problemas que habían sido inventados y cuyos enunciados podían ser erróneos.
-Se les recordó que no debían borrar sino tachar con un aspa.

Desarrollo:
-Un par de alumnos preguntaron al profesor, en voz baja, si había que resolver los problemas. El profesor les respondió, en voz baja, que en cada actividad se les indicaba claramente lo que debían hacer.
-El ambiente de trabajo fue bueno.
-Hacia las 11:55 todos habían entregado voluntariamente las hojas.

Duración:
Unos 30 minutos.

2ª Parte: Debate en común y explicación final del profesor

Normas:
En la pizarra estaba escrita la actividad 9. Los alumnos debían decir, por turno y desde el sitio, si el enunciado estaba bien o mal. En el segundo caso, tendrían que indicar porqué.

Desarrollo:
-El ambiente de trabajo durante el debate fue bueno.
-Un alumno opinó que habría que resolver los problemas para saber si el enunciado estaba bien. Un compañero le rebatió. Le dijo que ya se veía que, por ejemplo, la edad de la hija no puede ser cuatro veces la del padre.
-Sobre los enunciados 9.1 y 9.3: Desde el principio del debate se dijo con buen criterio que ambos enunciados estaban mal y se razonó sobre porqué estaban mal y sobre cómo arreglarlos.
-Sobre la actividad 9.2: Un alumno dijo que estaba mal porque "*es una ecuación de 2º grado*".
Otro alumno propuso hablar del perímetro, en vez del área, para que no fuese una ecuación da 2º grado.
Otro alumno rebatió a sus compañeros cuando afirmó que si se podía resolver como ecuación de 2º grado con "*la fórmula*".
-El profesor realizó su intervención final sin incidentes.

Duración:
Unos 20 minutos.

Ficha nº 18. Sesión número dos en el subgrupo 3.1

SESIÓN nº 10 simultánea para los Subgrupos 3.1 y el 3.2

Prueba I

Lunes 28/01/2008 5ª Hora (12:20 a 13:10)

Ausentes: Alumno A10 (Viaje familiar)
Alumno A11 (Viaje familiar)
Alumno A26 (Sin justificar)
Alumno A30 (Cuidado de hermanos pequeños)
Alumno A18 (A partir de ese día abandonó los estudios)

Parte única: Trabajo individual

Lugar: La prueba se realizó en el "Aula Cero": una amplia habitación, específicamente diseñada para la realización de exámenes.

Hora: La prueba se realizó durante la hora de tutoría de 3º A, grupo al que pertenecían todos los alumnos del subgrupo 3.1 y casi todos los del subgrupo 3.2. Sólo hubo que pedir permiso para que media docena de alumnos del subgrupo 3.2 faltaran a las clases que recibían ese lunes a 5º hora.

Normas:
-Las normas de conducta eran las habituales en los exámenes de la enseñanza escolar habitual: estricto silencio, trabajo individual y prohibido consultar libros y apuntes.
-Se podía usar calculadora.
-No se podía borrar ni se podían utilizar papeles como borrador. Si se equivocaban debían tachar con un aspa.
-Si se terminaba y se entregaba la prueba antes del timbre de salida, se podía trabajar cualquier asignatura en silencio.
-Se presentó la prueba como un examen que puntuaría para subir la nota final de evaluación.
-Se les dijo que viniesen unos diez minutos antes, perdiendo algo de tiempo de recreo.

Comienzo (de 12.15 a 12:25 horas):
-12:15 horas: Los primeros alumnos llegaron al "Aula Cero".
-12:20 horas: Todos los alumnos estaban en el "Aula Cero" cuando sonó el timbre de entrada.
-12:20 horas: El profesor explicó las normas y advirtió que recogería todas las hojas de las pruebas a las 13:15 -cinco minutos después del timbre de salida-.
-12:25 horas: Todos los alumnos estaban sentados y tenían las hojas de las pruebas.

Desarrollo (de 12:25 a 13.00 horas):
-Dos alumnos preguntaron al profesor, en voz baja, cómo se hacía la cuestión nº 1. El profesor dijo dos veces en voz alta, para toda la clase, que las cuestiones estaban bien redactadas y que respondiesen como creyesen que tenían que responder.
-Un alumno preguntó al profesor, en voz alta, si había que comprobar las ecuaciones. El profesor dijo en voz alta que levantasen la mano, esperasen a que llegase y que preguntasen en voz baja para no molestar a sus compañeros de clase y repitió que respondiesen como creyesen que tenían que responder.

-Tres alumnos preguntaron al profesor, en voz baja, qué tenían que hacer en la cuestión nº 5. El profesor les respondió en voz baja que tenían que inventar un problema, tal y como habían hecho en clase.
-Un alumno preguntó al profesor, en voz baja, si los problemas se podían hacer por tanteo. El profesor le contestó en voz baja que sí, siempre que se razonara la respuesta.
-Sólo 3 alumnos no trajeron calculadora._Los demás solían utilizar la calculadora que tenían encima de la mesa._Los 3 alumnos que no trajeron calculadora, al final de la clase, utilizaron calculadoras de compañeros suyos que ya habían entregado la prueba.
-Todos guardaron silencio durante el desarrollo de la prueba.
-Parecían muy concentrados e interesados en la correcta realización de la prueba.

<u>-Finalización (de 13:00 a 13:12 horas):</u>
-13:00 horas: Algunos entregaron voluntariamente las hojas de las pruebas. Después de entregar la prueba, sólo cinco alumnos trabajaron (3 realizaron unos ejercicios de inglés y 2 dibujaron unas láminas de Educación Plástica y Visual). Los demás alumnos que habno hicieron nada. Simplemente esperaron que sonara el timbre, en silencio.
-El profesor tuvo que reprender, dos veces, a un par de alumnos que, tras entregar la prueba, intentaban charlotear entre ellos.
-13:10 horas: Sólo un alumno no había entregado voluntariamente la prueba cuando sonó el timbre. Los alumnos salieron rápidamente del aula.
-13:12 horas: El profesor le recordó al único alumno presente en el aula que disponía de 3 minutos más. Entonces, el alumno respondió que había terminado, entregó la prueba y se fue.

Ficha nº 19. Sesión número diez simultánea en ambos subgrupos 3.1 y 3.2

SESIÓN nº 11 simultánea para los Subgrupos 3.1 y el 3.2

Prueba II

Lunes 12/05/2008 5ª Hora (12:20 a 13:10)

Ausentes: Nadie.

Parte única: Trabajo individual

Lugar:
La prueba se realizó en el "Aula Cero": una amplia habitación, específicamente diseñada para la realización de exámenes.

Hora:
La prueba se realizó durante la hora de tutoría de 3º A, grupo al que pertenecían todos los alumnos del subgrupo 3.1 y casi todos los del subgrupo 3.2. Sólo hubo que pedir permiso para que media docena de alumnos del subgrupo 3.2 faltaran a las clases que recibían ese lunes a 5º hora.

Normas:
-Las normas de conducta eran las habituales en los exámenes de la enseñanza escolar habitual: estricto silencio, trabajo individual y prohibido consultar libros y apuntes.
-Se podía usar calculadora.
-No se podía borrar ni se podían utilizar papeles como borrador. Si se equivocaban debían tachar con un aspa.
-Si se terminaba y se entregaba la prueba antes del timbre de salida, se podía trabajar cualquier asignatura en silencio.
-Se presentó la prueba como un examen que puntuaría para subir la nota final de evaluación.
-Se les dijo que viniesen unos diez minutos antes, perdiendo algo de tiempo de recreo.

Comienzo (de 12:20 a 12:32 horas):
-12:20 horas: Los primeros alumnos llegaron justo cuando sonó el timbre de entrada.
-12:25 horas: Los últimos rezagados llegaron con 5 minutos de retraso.
-12:30 horas: El profesor explicó las normas y advirtió que recogería la prueba a las 13:15 -cinco minutos después del timbre de salida-
-12:32 horas: El profesor advirtió que esta prueba era la repetición de la de enero. Les explicó que quería averiguar si sabían más o menos álgebra en mayo que en enero.

Desarrollo (de 12:32 a 12.50):
-Un alumno levantó la mano y preguntó, en voz alta, al profesor: "*¿los dos primeros problemas son los mismos?*" (Hubo algunas risas de fondo). El profesor repitió que la prueba que estaban haciendo en mayo era exactamente la misma que habían realizado en enero. Recordó que si alguno quería decir algo, debía levantar la mano, esperar a que llegase el profesor y preguntarle en voz baja para no molestar a sus compañeros.
-Un alumno preguntó al profesor, en voz baja, si había que resolver el "sistema" de la cuestión 4. El profesor le respondió, en voz baja, que era una ecuación, no un sistema y que leyese el enunciado y que hiciese lo que creyese que tenía que hacer.
-Un alumno preguntó al profesor en voz baja si tenía que resolver el enunciado que había

inventado en la cuestión 5. El profesor le respondió en voz baja que leyese el enunciado y que hiciese lo que creyese que tenía que hacer.
-Todos los alumnos tenían calculadora y casi todos la utilizaron.
-El profesor sorprendió dos alumnos escribiendo a lápiz. Les interrumpió y les repitió, en voz baja, que sólo debían utilizar el bolígrafo -azul o negro- y que tachasen con un aspa, pero que no borrasen. Les recordó que valoraría los intentos aunque fueran incorrectos.
-Todos guardaron silencio durante la realización de la prueba.
-El ambiente de trabajo fue bueno.

Finalización (de 12:50 a 13:10 horas):
-12:50 horas: algunos alumnos empezaron a entregar voluntariamente las hojas de la prueba. Sólo 3 alumnos trabajaron en unos mapas de Geografía. Los demás alumnos que habían entregado la prueba no hicieron nada. Casi todos los alumnos estaban nerviosos e intentaron hablar entre ellos. El profesor les calló con la amenaza de ceros y amonestaciones.
-13:00 horas: todos los alumnos habían entregado voluntariamente la prueba y el profesor les permitió hablar, entre ellos, hasta que sonase el timbre.
-13:10 horas: Sonó el timbre de salida y los alumnos abandonaron el “Aula Cero”.

Ficha nº 20. Sesión número once simultánea en los subgrupos 3.1 y 3.2

Anexo III:

Tablas de Resultados.

En el Capítulo IV "Fases de Planificación y Acción" de esta tesis, detallamos los criterios de evaluación de las actividades y de las pruebas de evaluación.

Con tales criterios de evaluación, corregimos las hojas entregadas por los alumnos al final de la fase de trabajo individual de cada actividad y elaboramos las tablas de resultados que constituyen este anexo II.

Cada tabla de resultados tiene el mismo formato:

- En la 1ª columna de la izquierda aparecen numerados todos los alumnos del grupo de experimentación:

    -Los 16 alumnos del subgrupo 3.1 están numerados, por orden alfabético, del A01 al A16.

    -Los 17 alumnos del subgrupo 3.2 aparecen numerados, por orden alfabético, de la A17 a la A33, En cada una de las columnas siguientes aparecen las calificaciones obtenidas en cada una de las actividades. La calificación puede ser 1, 2, 3, 4 y 0.

- En la columna de la derecha (o en la fila de debajo, en algún caso) de la tabla aparece la explicación del significado de los exponentes (*, **, ***, ^, ^^,…) que matizan algunas calificaciones de las columnas anteriores.

Pensamos que estas tablas de resultados del anexo II son muy útiles tanto para realizar:

- Un análisis de grupo en cada actividad, cuando leemos, "verticalmente", las columnas de las tablas de resultados de cada actividad.

- Un seguimiento de la evolución de cada alumno del grupo en la realización de las sucesivas actividades, cuando leemos, "horizontalmente", las filas de las tablas de resultados de las actividades.

ACTIVIDAD 1.1

	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.1.4	1.1.5	1.1.6	1.1.7	1.1.8	1.1.9	1.1.10	1.1.11	1.1.12
A01	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**	**1**	**3**	**1**	**3**	**3**	**3**
A02	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**1**	**3**	**3**	**3**
A03	**3**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**
A04	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A05	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A06	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**
A07	**3**	**4***	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3****	**1**	**3**
A08	**3**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A09	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**
A10	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A11	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**
A12	**1**	**4***	**4**	**1**	**1**	**4**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**3**
A13	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**
A14	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**1**	**2**	**3**	**3**
A15	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**
A16	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A17	**1**	**3**	**1**	**1**	**3***	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A18	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A19	**1**	**3**	**1**	**3**	**3***	**1**	**3***	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A20	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**	**1**
A21	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**	**1**
A22	**3**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**	**1**	**3**	**2**
A23	**1**	**3**	**3***	**1**	**3**	**1**	**4**	**4**	**4**	**3***	**4**	**1**
A24	**1**	**3**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3***	**3**	**1**	**3**	**3**	**2**
A25	**3**	**1**	**3***	**3***	**1**	**3**	**3***	**3***	**3**	**1**	**1**	**1**
A26	**1**	**3**	**1**	**1**	**3***	**3**	**1**	**3**	**1**	**3**	**4**	**1**
A27	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**
A28	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**3***	**1**	**1**
A29	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A30	**1**	**3**	**3***	**1**	**3**	**1**	**3**	**3***	**1**	**3***	**1**	**1**
A31	**1**	**3**	**1**	**1**	**3***	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**2**
A32	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A33	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**

<u>Actividad 1.1.1:</u> 3: Dice que es variable.	<u>Actividad 1.1.5:</u> 3: Dice que es abreviatura. 3*: Dice que es variable.	<u>Actividad 1.1.9:</u> 3: Dice que es variable. 3*: Dice que es abreviatura.
<u>Actividad 1.1.3:</u> 3: Dice que es variable. 3*: Dice que es abreviatura.	<u>Actividad 1.1.7:</u> 3: Dice que es incógnita. 3*: Dice que es abreviatura.	<u>Actividad 1.1.10:</u> 3: Dice que es incógnita. 3*: Dice que es abreviatura y variable. 3**: Dice que es abreviatura.
<u>Actividad 1.1.4:</u> 3: Dice que es variable. 3*: Dice que es incógnita.	<u>Actividad 1.1.8:</u> 3: Dice que es incógnita. 3*: Dice que es abreviatura.	<u>Actividad 1.1.11:</u> 3: Dice que es incógnita.

Tabla nº 1.

ACTIVIDAD 1.2

	1.2.1	1.2.2
Grupo I:		
A03	**3**	**1**
A16	**3**	**1**
A10	**3**	**1**
Grupo II:		
A04	**1**	**4**
A08	**1**	**4**
A11	**1**	**4**
A13	**1**	**4**
Grupo III:		
A01	**1**	**2**
A06	**1**	**2**
A07	**1**	**2**
A09	**1**	**2**
Grupo IV:		
A02	**4**	**4**
A12	**4**	**4**
A14	**4**	**4**
A15	**4**	**4**

	1.2.1	1.2.2
Grupo V:		
A17	**4**	**2**
A19	**4**	**2**
A21	**4**	**2**
A26	**4**	**2**
Grupo VI:		
A20	**4**	**4**
A22	**4**	**4**
A24	**4**	**4**
A25	**4**	**4**
Grupo VII:		
A23	**4**	**2**
A28	**4**	**2**
A32	**4**	**2**
A31	**4**	**2**
Grupo VIII:		
A27	**4**	**2**
A29	**4**	**2**
A33	**4**	**2**
A34	**4**	**2**

Tabla nº 2.

ACTIVIDADES 2.1 y 2.2

	2.1.a	2.1.b	2.1.c	2.1.d	2.1.e	2.1.f	2.2.a	2.2.b
A01	**1**	**1**	**1**	**3***	**1**	**1**	**2**	**1**
A02	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**
A03	**1**	**1**	**1**	**3***	**1**	**4**	**2**	**2**
A04	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A05	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A06	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**	**1**	**1**
A07	**1**	**1**	**3**	**3***	**3**	**4**	**2***	**1**
A08	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A09	**1**	**3***	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**
A10	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**2**
A11	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**2**	**2***	**1**
A12	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**
A13	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2***	**1**
A14	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A15	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A16	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A17	**1**	**1**	**3**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**
A18	**1**	**1**	**1**	**3***	**1**	**1**	**1**	**2**
A19	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**
A20	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**1**	**2***
A21	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2***	**1**
A22	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A23	**1**	**1**	**1**	**4**	**4**	**4**	**3**	**3**
A24	**1**	**3***	**1**	**4**	**4**	**4**	**1**	**1**
A25	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**
A26	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**
A27	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**	**4**	**1**	**2****
A28	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**
A29	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**2**	**1**
A30	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**4**	**1**	**1**
A31	**1**	**1**	**1**	**3***	**1**	**1**	**2**	**1**
A32	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**	**4**	**1**	**1**
A33	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

<u>Actividad 2.1.b:</u>
3: Se cometen errores de despeje.

<u>Actividad 2.1.d:</u>
3*: Lo que está “multiplicando” se pasa “dividiendo” pero, además, se cambia de signo.

<u>Actividad 2.2.a:</u>
2: Se equivoca en la operación “$-27+19$”.
2*: Se equivoca en la operación “$\frac{-8}{2}$”

<u>Actividad 2.2.b:</u>
2: Se equivoca en la operación “$-11+1$”.
2*: Se equivoca en la operación “$-10/1$”.
2**: Se copia mal el enunciado.
3: No se respeta la regla de despeje que afirma “lo que está + pasa – y lo que está – pasa +”.

Tabla nº 3.

ACTIVIDADES 2.3 y 2.4

	2.3.a	2.3.b	2.3.c	2.3.d	2.4.a	2.4.b
A01	**1**	**1**	**1**	**3***	**2***	**2****
A02	**2**	**2**	**1**	**2****	**2****	**2****
A03	**3**	**2**	**2***	**2***	**2***	**4**
A04	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A05	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A06	**1**	**1**	**2***	**1**	**4**	**4**
A07	**1**	**2**	**2***	**2***	**4**	**4**
A08	**3***	**1**	**1**	**4**	**4**	**4**
A09	**3**	**3**	**4**	**2***	**4**	**4**
A10	**3***	**1**	**1**	**1**	**2***	**1**
A11	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**2****
A12	**3***	**3**	**4**	**3**	**1**	**4**
A13	**2**	**1**	**2***	**1**	**2***	**1**
A14	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A15	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**	**4**
A16	**1**	**1**	**1**	**3**	**4**	**4**
A17	**4**	**4**	**4**	**3***	**2***	**4**
A18	**1**	**1**	**1**	**1**	**2****	**3**
A19	**1**	**1**	**2***	**1**	**2****	**2****
A20	**1**	**1**	**1**	**1**	**2***	**2***
A21	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**
A22	**3**	**3**	**3**	**4**	**2****	**2****
A23	**4**	**4**	**4**	**3***	**3***	**3***
A24	**3***	**3**	**1**	**2*****	**4**	**4**
A25	**1**	**1**	**1**	**2*****	**1**	**2**
A26	**2**	**2**	**1**	**1**	**3***	**3***
A27	**1**	**2**	**1**	**1**	**2***	**2***
A28	**1**	**1**	**3**	**2***	**2****	**2***
A29	**1**	**1**	**1**	**1**	**2***	**2***
A30	**3**	**2**	**1**	**1**	**2***	**2***
A31	**1**	**3**	**1**	**1**	**2***	**1**
A32	**3***	**1**	**3**	**1**	**3**	**4**
A33	**1**	**1**	**2***	**2****	**2**	**2****

Actividad 2.3.a:
3*: No se resuelve o se resuelve mal la ecuación $6x = -4$ o la ecuación $4 = -6x$. En estos dos últimos casos, se escribe como resultado la fracción opuesta o inversa de $-4/6$.

Actividad 2.3.c:
2*: Se multiplica por 4.

Actividad 2.3.d:
2*: Se multiplica por 2.
2**: No se cambia el segundo signo menos.
3: Se cometen errores de despeje.
3*: Se cometen errores de despeje y errores operacionales.

Actividad 2.4.a:
2*: No se llega a escribir bien la expresión resultante, tras reducir a m.c.d (mínimo común denominador).
2**: Se escribe bien la expresión resultante, tras reducir a m. c. d (mínimo común denominador) pero, al suprimir denominadores, no se convierte el – de la segunda fracción en +.

Actividad 2.4.b:
2*: No se llega a escribir bien la expresión resultante, tras reducir a m.c.m (mínimo común denominador).
2**: Se escribe bien la expresión resultante, tras reducir a m. c. m (mínimo común denominador) pero, al suprimir denominadores, no se convierte el – de la segunda fracción en +.

Tabla nº 4.

ACTIVIDAD 3

	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
A01	**1**	**3***	**1**	**3***	**3***	**3***
A02	**1**	**2**	**1**	**2**	**2**	**3***
A03	**1**	**3**	**3**	**2**	**3**	**4**
A04	**1**	**2***	**1**	**2**	**4**	**2***
A05	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A06	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**	**4**
A07	**1**	**3**	**1**	**3****	**3***	**2***
A08	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**
A09	**1**	**3***	**1***	**3***	**4**	**3***
A10	**1**	**3***	**2**	**2**	**4**	**3***
A11	**1**	**3**	**1**	**3***	**3***	**3***
A12	**1**	**3**	**4**	**2**	**4**	**2**
A13	**1***	**1***	**1**	**1**	**3****	**3***
A14	**1**	**3**	**1**	**2**	**1**	**1**
A15	**1**	**3**	**1**	**3***	**3***	**3***
A16	**1**	**1***	**1**	**2**	**2**	**3***
A17	**1**	**3**	**3***	**3****	**3****	**2****
A18	**1**	**3**	**3**	**3****	**3**	**3**
A19	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**2***
A20	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**2**
A21	**1**	**3***	**1**	**1**	**2**	**3***
A22	**1**	**1***	**1***	**2**	**3***	**3***
A23	**1**	**2***	**1**	**3**	**2**	**3***
A24	**3***	**3**	**3***	**2**	**3**	**3**
A25	**1**	**3**	**3***	**2**	**3****	**1**
A26	**1**	**3***	**3**	**2**	**1**	**2**
A27	**1**	**3**	**4**	**2**	**4**	**4**
A28	**1**	**2***	**1***	**3****	**1**	**3***
A29	**1**	**1**	**1**	**3***	**3***	**3***
A30	**3****	**3***	**4**	**3****	**4**	**4**
A31	**3****	**3***	**1***	**2**	**3****	**3***
A32	**1**	**1**	**1**	**2**	**4**	**3***
A33	**1**	**2**	**1**	**3***	**3***	**3**

<u>Actividad 3.1:</u>
1*: Se dice que las soluciones son $\frac{27}{3}, \frac{270}{30}, \frac{2700}{300}$ etc.
3*: Se despeja mal cambiando el signo del 9 al pasarlo dividiendo.
3**: Se dice que $x = 9$ y $x = -9$ son soluciones.

<u>Actividad 3.3:</u>
1*: Se resuelve algebraicamente y se escribe $3 \cdot 0 = 0$. O sólo se escribe $3 \cdot 0 = 0$.
3*: Se despeja mal y se dice $x = -3$.

<u>Actividad 3.4:</u>
1*. Se razona explícitamente porqué no tiene solución.
3*: Se dice que $x = \frac{5}{0} = 0$.
3**: Se reducen mal los términos semejantes.

<u>Actividad 3.5:</u>
3*: Se dice que $x = \frac{7}{0} = 0$.
3**: Se dice que $x = \frac{7}{0} = 7$.

<u>Actividad 3.6:</u>
2*: Se dice que tiene infinitas soluciones.
2**: Se escribe varias soluciones de la ecuación.
3*: Se dice que $x = \frac{0}{0} = 0$.

Tabla nº 5.

ACTIVIDADES 4.1 y 4.2

	4.1.a	4.1.b	4.1.c	4.1.d	4.1.e	4.1.f	4.1.g	4.2.a	4.2.b	4.2.c	4.2.d	4.2.e	4.2.f
A01	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**
A02	**1**	**1**	**1**	**4**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**
A03	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A04	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A05	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A06	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A07	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A08	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A09	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**
A10	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A11	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**
A12	**1**	**1**	**1**	**4**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**
A13	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3****
A14	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3****
A15	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A16	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3****
A17	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A18	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**	**4**	**2**
A19	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**2**
A20	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A21	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A22	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A23	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A24	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A25	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**3***
A26	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A27	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3****
A28	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A29	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A30	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A31	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A32	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A33	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***

<u>Actividad 4.2.f:</u>
3*: Se escribe “ $xy = A$"
3**: Se escribe “2 y = x” o “x = 2 y”.

Tabla nº 6.

ACTIVIDADES 4.3 y 4.4

	4.3.a	4.3.b	4.3.c	4.3.d	4.4.a	4.4.b	4.4.c
A01	**1**	**1**	**1**	**1**	**3****	**1***	**3**
A02	**1***	**1***	**1***	**1***	**3**	**3**	**3**
A03	**1***	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**
A04	**1***	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A05	**1***	**1***	**1***	**1**	**1**	**1**	**1**
A06	**1**	**4**	**4**	**1**	**1**	**1**	**3**
A07	**1**	**1**	**4**	**4**	**1**	**3**	**1***
A08	**1***	**3***	**3***	**1***	**1****	**1****	**1****
A09	**1**	**1**	**1**	**1**	**3****	**1^**	**3****
A10	**3**	**3***	**3***	**1***	**3**	**3****	**3****
A11	**1**	**1**	**1**	**1***	**3**	**3**	**3**
A12	**1***	**1**	**3**	**1***	**3**	**3^**	**3**
A13	**3***	**3****	**3****	**1**	**1**	**1**	**1**
A14	**1***	**1***	**1***	**1**	**1***	**1***	**1***
A15	**4**	**4**	**4**	**4**	**1**	**3**	**1**
A16	**1**	**3***	**3***	**1**	**1****	**1****	**3*^**
A17	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A18	**1**	**3***	**3***	**3**	**3**	**1***	**3**
A19	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**
A20	**3***	**4**	**4**	**3**	**3**	**3***	**3**
A21	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1***
A22	**3***	**4**	**4**	**1**	**3**	**3***	**3**
A23	**3****	**3****	**3****	**1**	**1**	**1**	**1**
A24	**1**	**1**	**3****	**1***	**3**	**3****	**3**
A25	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**
A26	**1***	**1***	**1***	**1***	**3**	**3**	**3**
A27	**1***	**1**	**1**	**1***	**3**	**3***	**3**
A28	**3****	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A29	**1***	**1***	**1***	**1**	**3**	**3**	**3**
A30	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A31	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***	**3**
A32	**1***	**1***	**1***	**1**	**3**	**3**	**3^**
A33	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3***	**3**

Actividad 4.3.a:
1: Se habla de las operaciones.
1*: Se habla de la situación del enunciado.
3*: Se habla de comparar número de chicos y chicas.
3**: Se habla de hallar número de alumnos o de chicos.

Actividad 4.3.b:
1: Se habla de las operaciones.
1*: Se habla de la situación del enunciado.
3*: Se interpreta en términos aritméticos.
3**: Se inventa un enunciado.

Actividad 4.3.c:
1: Se habla de las operaciones.
1*: Se habla de la situación del enunciado.
3*: Se interpreta en términos aritméticos.
3**: Se inventa un enunciado.

Actividad 4.3.d:
1*: Se comete el error de "inversión" para el producto.

Actividad 4.4.a:
1*: Se escribe que $\frac{a}{2} = b$, además de (o en vez de) escribirse que $a = 2b$.
1**: Se utilizan las letras x, y.
3: Se comete el "error de inversión"
3**: Se comete otros errores distintos de "error de inversión"

Actividad 4.4.b:
1*: Se escribe que $a = b - 20$, además de (o en vez de) escribirse que $a + 20 = b$.
1**: Se utilizan las letras x, y.
1^: Se escribe que $b - a = 20$
3: Se comete el error de inversión para la suma.
3^: Se comete el error de inversión para la resta.
3*: Se escribe que $20b = a$
3**: Se escribe que $a + 20b$

Actividad 4.4.c:
1*: Se escribe que $2a = b$, además de (o en vez de) escribirse que a = b/2.
1**: Se utilizan las letras x, y.
3: Se comete el error de inversión para el producto.
3^: Se comete el error de inversión para el producto.
3*^: Se comete el error de inversión para el producto, utilizándose las letras "x" e "y".
3**: Se cometen otros errores distintos del de inversión.

Tabla nº 7.

ACTIVIDAD 4.5

	4.5.a	4.5.b	4.5.c
A01	**1***	**1**	**4**
A02	**2**	**1**	**1**
A03	**3***	**1**	**1**
A04	**1***	**1**	**1***
A05	**3***	**1**	**3***
A06	**3^**	**1**	**4**
A07	**4**	**4**	**4**
A08	**4**	**1**	**4**
A09	**1^**	**1**	**4**
A10	**1****	**1**	**3****
A11	**3***	**1**	**1**
A12	**3***	**1**	**3***
A13	**4**	**1**	**3***
A14	**1***	**1**	**1**
A15	**1**	**4**	**4**
A16	**1***	**1**	**2**
A17	**1**	**1**	**1***
A18	**2**	**1**	**2**
A19	**3^**	**1**	**2**
A20	**4**	**1**	**2**
A21	**1**	**1**	**4**
A22	**4**	**1**	**2**
A23	**3***	**1**	**4**
A24	**3****	**3**	**4**
A25	**1**	**1**	**1***
A26	**1**	**1**	**1**
A27	**4**	**4**	**4**
A28	**3***	**3**	**3^**
A29	**1**	**1**	**1**
A30	**0**	**0**	**0**
A31	**2**	**1**	**1**
A32	**2**	**1**	**1**
A33	**2**	**1**	**2**

<u>Actividad 4.5.a:</u>
1: Los coeficientes 5 y 2 es el número de ruedas y faros o de ruedas de coches y camiones.
1*: Los coeficientes 5 y 2 son el número de veces. Se utilizan inadecuadamente verbos en indicativo.
1**: Los coeficientes 5 y 2 son los precios de coches y motos por aparcar en un parking.
1^: La incógnitas son el número de platos y de servilletas. Los coeficientes 5 y 2 es el número de veces.
2: Los coeficientes 5 y 2 es el número de ruedas y faros o de ruedas de coches y camiones.
3*: Las incógnitas son cantidades pero no se escribe el 220.
3^: Se escriben las soluciones en el enunciado. No se escribe el 220.
3**: Las incógnitas son cualidades. No escribe el 220.

<u>Actividad 4.5.c:</u>
1: Los coeficientes 1.5 y 2 son los precios de elementos de papelería (bolígrafos, lapiceros, gomas,…)
1*: Los coeficientes 1.5 y 2 son el número de veces por el que se multiplica respectivamente el precio de dos elementos. Además, se emplean los verbos en modo indicativo.
2: Se identifica “1.5x” con una unidad y media de un elemento de papelería y “2y” con dos unidades de otro elemento de papelería.
3*: Se habla de precios pero se omite al menos uno de los datos 1.5, 2 y 9.
3**: Se copian mal los datos.
3^: Se relaciona 1.5 con folios “pequeños” y 2 con folios “enteros”.

Tabla nº 8.

ACTIVIDAD 5.1

	5.1.1	5.1.2	5.1.3	5.1.4
A01	**1**	**1***	**1***	**3****
A02	**1***	**1**	**2**	**1***
A03	**2**	**4**	**2**	**4**
A04	**1**	**1**	**1**	**1**
A05	**1***	**1**	**1***	**1***
A06	**1**	**1**	**3**	**4**
A07	**2**	**1**	**4**	**4**
A08	**1**	**1**	**1**	**4**
A09	**1**	**1***	**1***	**3***
A10	**1**	**1***	**1***	**2***
A11	**1**	**2**	**2**	**4**
A12	**2***	**3**	**2**	**4**
A13	**1**	**4**	**2**	**4**
A14	**1**	**1***	**1***	**1**
A15	**2**	**1**	**2**	**3****
A16	**1**	**1***	**4**	**4**
A17	**1**	**1**	**2**	**3***
A18	**2**	**1**	**2**	**4**
A19	**1***	**1***	**1***	**4**
A20	**1***	**1**	**2**	**2***
A21	**1**	**1***	**4**	**4**
A22	**1***	**1**	**2**	**2***
A23	**1**	**1***	**1***	**4**
A24	**1**	**4**	**3**	**3***
A25	**1**	**2**	**4**	**4**
A26	**1**	**1***	**1***	**3***
A27	**1***	**1***	**2**	**1**
A28	**1**	**1**	**1**	**3***
A29	**1**	**1***	**1***	**3***
A30	**0**	**0**	**0**	**0**
A31	**1**	**1***	**1**	**4**
A32	**1**	**1***	**1***	**1**
A33	**1**	**1**	**2**	**4**

Actividad 5.1.1:
1*: No se escriben los números concretos.
2*: No se escriben los números concretos.

Actividad 5.1.2:
1: Se escribe que se desconoce el número de las preguntas acertadas y el de no acertadas.
1*: Se escribe que se desconocen las preguntas acertadas y las no acertadas.

Actividad 5.1.3:
1*: Se escribe "x = acertadas" "y = no acertadas"

Actividad 5.1.4:
1*: No se especifica cuál es el dato que falta.
2*: Se escriben que "no se puede" o que "no se puede hacer".
3*: Se escribe que "falta el nº de respuestas acertadas o el nº de acertadas y falladas"
3**: Se escribe una ecuación incoherente con el enunciado.

Tabla nº 9.

ACTIVIDAD 5.2

	5.2.1	5.2.2	5.2.3	5.2.4	5.2.5	5.2.6a	5.2.6b
A01	**1**	**2**	**2**	**1***	**1**	**1**	**4**
A02	**3***	**2**	**2***	**4**	**4**	**4**	**4**
A03	**2**	**4**	**2**	**4**	**4**	**4**	**4**
A04	**2**	**2**	**2****	**1***	**1**	**1**	**2**
A05	**2***	**2**	**2****	**1**	**1**	**1**	**2**
A06	**1**	**2**	**2****	**4**	**4**	**4**	**4**
A07	**3**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**4**
A08	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**
A09	**2**	**2***	**2^**	**3**	**4**	**1**	**4**
A10	**2**	**2**	**2****	**1**	**1**	**1**	**2**
A11	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**4**
A12	**2***	**2**	**2***	**4**	**4**	**4**	**4**
A13	**3**	**2**	**2***	**1**	**1**	**1**	**4**
A14	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**2****
A15	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**4**
A16	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2****
A17	**2**	**2**	**2**	**3**	**4**	**4**	**4**
A18	**2**	**2**	**2***	**3***	**1**	**1**	**4**
A19	**2**	**2***	**2**	**1**	**1**	**1**	**4**
A20	**2***	**3**	**2***	**4**	**4**	**4**	**4**
A21	**4**	**2**	**2^**	**1***	**1**	**1**	**2***
A22	**1***	**3**	**2***	**4**	**4**	**4**	**4**
A23	**2**	**2**	**2**	**3**	**4**	**4**	**4**
A24	**1**	**2***	**2**	**1**	**1**	**3**	**4**
A25	**2**	**2***	**2**	**1**	**1**	**3**	**2**
A26	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2**
A27	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**1**	**4**
A28	**2**	**2**	**2**	**3***	**3**	**4**	**4**
A29	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2**
A30	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A31	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2***
A32	**1***	**2***	**2**	**1**	**1**	**1**	**4**
A33	**2**	**2***	**2**	**1**	**1**	**1**	**4**

Actividad 5.2.1:
1*: No se escriben los números concretos.
2*: No se escriben los números concretos.

Actividad 5.2.2:
2: Se escribe que se desconoce la altura y la base pero no se escriben las unidades.
2*: Se escribe que el único dato desconocido es la altura.

Actividad 5.2.3:
2: Se escribe que x = base, y =altura
2*: Se escribe x, y
2**: Se escribe x + 5,x
2^: Se escribe a, b ó h, b.

Actividad 5.2.4:
1: No se dibuja.
1*: Se dibuja.
3: No se dibuja.
3*: Se dibuja.

Actividad 5.2.6b:
2: Sólo se comprueba una de las dos condiciones del enunciado.
2*: Se expresa mal y se dice que la base es 5 veces mayor que la altura.
2**: Se comprueba el sistema, no el enunciado.

Tabla nº 10.

ACTIVIDAD 5.3

	5.3.1	5.3.2	5.3.3	5.3.4	5.3.5	5.3.6a	5.3.6b
A01	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A02	**2***	**2**	**2**	**4**	**4**	**4**	**4**
A03	**4**	**2***	**2^**	**4**	**4**	**4**	**4**
A04	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2***
A05	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2***
A06	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A07	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A08	**2**	**2^**	**1***	**1**	**1**	**1**	**4**
A09	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A10	**3**	**2***	**2***	**4**	**4**	**4**	**4**
A11	**2**	**2**	**3**	**3**	**1**	**4**	**4**
A12	**1**	**2**	**2^**	**4**	**4**	**4**	**4**
A13	**2**	**2**	**2***	**3**	**4**	**4**	**4**
A14	**2**	**1**	**2***	**1**	**1**	**1**	**2**
A15	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A16	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**	**4**	**4**
A17	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2**
A18	**2***	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2**
A19	**2**	**2**	**4**	**1**	**1**	**1**	**4**
A20	**1**	**2**	**2^**	**1**	**1**	**1**	**4**
A21	**2**	**4**	**4**	**1**	**1**	**1**	**4**
A22	**1**	**2**	**2^**	**1**	**1**	**1**	**4**
A23	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2**
A24	**2**	**2**	**2^**	**1**	**1**	**3**	**4**
A25	**2**	**1**	**2^**	**1**	**1**	**1**	**2**
A26	**1**	**2***	**2**	**1**	**1**	**1**	**4**
A27	**1**	**2**	**4**	**1**	**1**	**1**	**3**
A28	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**
A29	**1**	**2***	**2**	**1**	**1**	**1**	**2****
A30	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A31	**1**	**2**	**2***	**1**	**1**	**1**	**2**
A32	**2**	**2***	**2**	**1**	**1**	**1**	**4**
A33	**1**	**1**	**2***	**1**	**1**	**1**	**4**

Actividades 5.3.1:
1*: No se escriben los números concretos.
2*: No se escriben los números concretos.

Actividades 5.3.2:
2: Se escribe que se desconocen la edades de los tres o las edades en general.
2*: Se escribe que se desconocen la edad de dos de ellos.
2^: Se escriben sujetos en vez de cantidades: Juan, hijo y padre.

Actividad 5.3.3:
1: Se escribe “x = edad de ..”
1: Se escribe “x = Juan”
2: Se escribe “x = edad de..”
2*: Se escribe “x = Juan”
2^: Se escribe “x, y” o “x”.

Actividad 5.3.6b:
2: Se comprueban las relaciones entre las edades de Juan, su padre y su hijo.
2*: Se comprueba que la suma de las edades es 100.
2**: Se comprueba la resolución de la ecuación.

Tabla nº 11.

ACTIVIDAD 5.4

	5.4.1	5.4.2	5.4.3	5.4.4	5.4.5	5.4.6a	5.4.6b
A01	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A02	**1***	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A03	**1**	**3**	**3**	**1**	**1**	**3**	**4**
A04	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**
A05	**1***	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**
A06	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A07	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A08	**2***	**2**	**2***	**4**	**4**	**4**	**4**
A09	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A10	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A11	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A12	**1***	**2**	**2***	**4**	**4**	**4**	**4**
A13	**2***	**2**	**2**	**1**	**4**	**1**	**4**
A14	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**4**
A15	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A16	**1**	**2**	**2***	**1**	**2**	**4**	**4**
A17	**1***	**2**	**2***	**1**	**1**	**4**	**4**
A18	**1**	**2**	**2***	**1**	**4**	**4**	**4**
A19	**2**	**2**	**2**	**1**	**4**	**4**	**4**
A20	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A21	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A22	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A23	**1**	**2**	**2***	**1**	**1**	**1**	**4**
A24	**4**	**2**	**2”**	**1**	**1**	**1**	**4**
A25	**3**	**2**	**2”**	**1**	**1**	**1**	**4**
A26	**4**	**4**	**4**	**1**	**1**	**1**	**4**
A27	**1**	**2**	**2***	**1**	**3**	**4**	**4**
A28	**2***	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**
A29	**2***	**2**	**2***	**1**	**1**	**1**	**1***
A30	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A31	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**3**
A32	**2***	**2**	**2***	**1**	**1**	**1**	**4**
A33	**2***	**2**	**2***	**1**	**1**	**1**	**4**

<u>Actividades 5.4.1:</u>
1*: No se escriben los números concretos.
2*: No se escriben los números concretos.

<u>Actividades 5.4.2:</u>
2: Faltan sólo las unidades (euros).

<u>Actividad 5.4.3:</u>
1: Se escribe “x = precio de...”
1: Se escribe “x = jabón”
2: Se escribe “x = precio de...”
2*: Se escribe “x = jabón”
2”: Se escribe “x, y” o “x”.

<u>Actividad 5.4.6.b:</u>
1*: Se dice como hacer la comprobación pero sin escribir las cuentas.

Tabla nº 12.

ACTIVIDAD 5.5

	5.5.1	5.5.2	5.5.3	5.5.4	5.5.5	5.5.6a	5.5.6b
A01	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A02	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A03	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A04	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A05	**2***	**2**	**2**	**1**	**1**	**4**	**4**
A06	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A07	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A08	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A09	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A10	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A11	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A12	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A13	**2**	**2**	**2**	**3**	**4**	**4**	**4**
A14	**4**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2**
A15	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A16	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A17	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A18	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A19	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A20	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A21	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A22	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A23	**1**	**2**	**2**	**4**	**4**	**4**	**4**
A24	**4**	**2**	**2***	**3**	**4**	**4**	**4**
A25	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A26	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A27	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A28	**1**	**2**	**2**	**4**	**4**	**4**	**4**
A29	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**	**4**	**4**
A30	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A31	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**	**4**	**4**
A32	**1**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A33	**1**	**2**	**2**	**3**	**2**	**4**	**4**

Actividad 5.5.1:
1*: No se escriben los números concretos.
2*: No se escriben los números concretos.

Actividad 5.5.2:
2: Faltan sólo las unidades (años).

Actividad 5.5.3:
2: Se escribe “x = edad de...”
2*: Se escribe “x = papa”.

Tabla nº 13.

ACTIVIDAD 5.6

	5.6.1	5.6.2	5.6.3	5.6.4	5.6.5	5.6.6a	5.6.6b
A01	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A02	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A03	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A04	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A05	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A06	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A07	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A08	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A09	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A10	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A11	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A12	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A13	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A14	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A15	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A16	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A17	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A18	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A19	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A20	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A21	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A22	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A23	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A24	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A25	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A26	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A27	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A28	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A29	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A30	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A31	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**	**4**	**4**
A32	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A33	**3**	**3**	**3**	**1**	**2**	**4**	**4**

Actividad 5.6.1:
1*: No se escriben los números concretos.
2*: No se escriben los números concretos.

Tabla nº 14.

ACTIVIDAD 6.1 y 6.2

	6.1.1	6.1.2	6.1.3	6.2.1	6.2.2	6.2.3
A01	**3**	**1**	1*^	**4**	**3***	**4**
A02	**3***	**1**	**3***	**4**	**3**	**1**
A03	**3**	**1**	**3****	**3**	**1**	**3**
A04	**3**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**
A05	**1**	**1**	**1**	**3***	**1**	**1**
A06	**1**	**1**	**3****	**1**	**3**	**3**
A07	**3**	**1**	**4**	**4**	**4**	**4**
A08	**3**	**1**	**1**	**3**	**1**	**2**
A09	**3**	**1**	**1**	**4**	**4**	**4**
A10	**3*^**	**1**	1*^	**4**	**4**	**4**
A11	**1**	**1**	**1***	**3***	**1**	**3***
A12	**2**	**1**	**4**	**3**	**1**	**4**
A13	**3**	**1**	**3***	**3**	**1**	**1**
A14	**3***	**1**	**1**	**3***	**1**	**1***
A15	**4**	**1**	**4**	**4**	**4**	**4**
A16	**3**	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**
A17	**3***	**1**	**1***	**3***	**1**	**4**
A18	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A19	**3****	**1**	**3**	**4**	**3**	**3***
A20	**2**	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**
A21	**3^**	**1**	**3^**	**1**	**1**	**3^**
A22	**3****	**1**	**3**	**4**	**4**	**4**
A23	**3***	**1**	**4**	**3***	**3**	**4**
A24	**3****	**1**	**3**	**3^**	**3**	**3****
A25	**3***	**1**	1*^	**3^**	**3**	**3^^**
A26	**3**	**1**	**3^**	**1**	**1**	**1**
A27	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A28	**3**	**1**	**1***	**3***	**3**	**1***
A29	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A30	**3^**	**1**	**1***	**4**	**4**	**4**
A31	**3**	**1**	**1**	**3****	**1**	**1**
A32	**3**	**1**	1*^	**2**	**3**	**2**
A33	**3**	**1**	**3**	**3**	**2**	**3**

<u>Actividad 6.1.1:</u>
3: Se estudia si el planteamiento es correcto.
3*: Se comprueba el sistema.
3^: Se resuelve el sistema.
3**: Se dice sólo que “si”.
3*^: Se cometen otros errores distintos de los anteriores.

<u>Actividad 6.1.3:</u>
1: Se comprueba el sistema.
1*^: Se resuelve el sistema usando el método de reducción.
1*: Se resuelve el sistema usando el método de igualación o sustitución.
3: Se dice que “no” y se pone a resolver otro sistema (el bien planteado).
3*: Se dice que sólo que “no”.
3**: Se dice que no con razonamientos incorrectos.
3^: Sólo se comprueba una ecuación.

<u>Actividad 6.2.1:</u>
3: Se dice que está mal resuelto porque está mal planteado.
3*: Se dice que está mal porque se comprueba el sistema y se ve que está mal resuelto.
3**: Se dice que está mal porque se resuelve el sistema y se ve que está mal resuelto.
3^: Se dice que está bien resuelto y no se dan razones.

<u>Actividad 6.2.2:</u>
3: Se dice sólo que está bien planteado.
3*: Se dice que está mal planteado pero se da una razón falsa.

<u>Actividad 6.2.3:</u>
1*: Se resuelve, en vez de comprobarse.
3: Se responde, basándose erróneamente en el enunciado o en la solución del problema.
3*: Sólo se intenta infructuosamente resolver el sistema.
3**: Se intenta infructuosamente tanto resolver el sistema como comprobarlo.
3^: Se dice que sí, basándose en la comprobación de la 1ª ecuación.
3^^: Se dice que si, basándose en una comprobación errónea.

Tabla nº 15.

ACTIVIDAD 6.3 y 6.4

	6.3.1	6.3.2	6.3.3	6.4.1	6.4.2	6.4.3
A01	**2**	**2***	**1**	**3****	**3**	**4**
A02	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A03	**3***	**3***	**3**	**3**	**1**	**3****
A04	**1**	**2****	**1***	**3**	**1**	**1**
A05	**1**	**2**	**1***	**1**	**1**	**1**
A06	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A07	**2**	**2***	**1**	**4**	**4**	**4**
A08	**3**	**3**	**3**	**3**	**1**	**2**
A09	**3***	**2***	**1**	**3****	**3**	**3**
A10	**4**	**3**	**1**	**4**	**3****	**4**
A11	**1***	**1***	**1^**	**4**	**4**	**4**
A12	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A13	**1**	**3**	**1***	**1**	**3****	**3**
A14	**1***	**2**	**1^**	**3***	**1**	**3^**
A15	**2**	**3***	**1**	**4**	**4**	**4**
A16	**2**	**2**	**1**	**1**	**1***	**1***
A17	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A18	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A19	**4**	**4**	**4**	**1**	**4**	**4**
A20	**3***	**3***	**2**	**2**	**1***	**3**
A21	**4**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**
A22	**2**	**2**	**1***	**4**	**4**	**4**
A23	**1**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A24	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A25	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A26	**3**	**3**	**1***	**3**	**3***	**1**
A27	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A28	**1**	**1**	**3**	**4**	**3***	**4**
A29	**3**	**3**	**1***	**3**	**3**	**1**
A30	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
A31	**4**	**4**	**1***	**4**	**4**	**4**
A32	**4**	**4**	**4**	**4**	**1***	**3***
A33	**2**	**1**	**1**	**3**	**1***	**2**

Actividad 6.3.1:
1: No se comprueba el 4320. Puede estarse comprobando el enunciado o el sistema.
1*: Se comprueba el 4320. Se comprueba el enunciado.
3: Se dice que la 2ª ecuación está mal planteada.
3*: No se dice que la 2ª ecuación está mal planteada.

Actividad 6.3.2:
1: Sólo se justifica que 72*60=4320.
1*: Se justifica el planteamiento de todo.
2: Sólo se dice que el planeamiento es correcto.
2*: Sólo se justifica la ecuación de los Kilos.
2**: Se justifica la ecuación de los Kilos y la de los precios pero no justifica el 4320.
3: Se afirma que el 4320 está mal
3*: No se afirma que el 4320 está mal.

Actividad 6.3.3:
1: Se resuelve el sistema usando reducción.
1^: Se resuelve el sistema usando sustitución.
1*: Comprueban el sistema.

Actividad 6.4.1:
3: Se dice que está mal resuelto porque está mal planteado.
3*: Se intenta comprobar las soluciones en el enunciado pero se desiste o se cometen errores.
3**: Se intenta resolver el sistema.

Actividad 6.4.2:
1: Se dice que está mal y se escribe el planteamiento correcto.
1*: Se razona verbalmente que está mal planteado.
3: Se dice que las ecuaciones deberían ser “$x-10=y$” y “$x+10=2y$”
3*: Se dice que las ecuaciones deberían ser “$x-10=y$” y “$x+10=3y$”
3**: Se comete otros errores distintos de los anteriores.

Actividad 6.4.3:
1: Se comprueba el sistema.
1*: Se resuelve el sistema.
3: Se resuelve mal por reducción.
3^: Se resuelve mal por sustitución.
3*: Se resuelve bien el sistema para calcular la “x”. Deja la “y” si calcular.
3**: Se escribe otro planteamiento del enunciado.

Tabla nº 16.

ACTIVIDAD 7.1 y 7.2

	7.1.1	7.1.2	7.1.3	7.1.4	7.2.1	7.2.2	7.2.3	7.2.4
A01	**1**	**1***	**1**	**4**	**2**	**1**	**1**	**1**
A02	**2**	**1**	**1**	**1**	**2***	**1**	**1***	**4**
A03	**1****	**1****	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**3***
A04	**1***	**1***	**1**	**1**	**1**	**1**	**1***	**1**
A05	**1**	**1**	**1**	**1**	**1***	**1***	**1”**	**1**
A06	**1**	**1**	**1**	**4**	**1**	**1**	**4**	**4**
A07	**1**	**1***	**1**	**4**	**2**	**1**	**1**	**4**
A08	**1****	**1**	**1**	**1**	**3**	**3***	**2**	**3****
A09	**2**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**
A10	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3****	**1**	**4**
A11	**1**	**1***	**1**	**1**	**2***	**1**	**1***	**1**
A12	**2**	**1***	**1**	**1**	**2***	**1**	**1****	**3**
A13	**1****	**1****	**1**	**3**	**2***	**1**	**1***	**1**
A14	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1***	**1**
A15	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**4**
A16	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**3***
A17	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**4**
A18	**1**	**1**	**1**	**1**	**1***	**1***	**1”**	**3***
A19	**3**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1****	**1**
A20	**3**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1***	**1”**	**3***
A21	**1**	**1**	**1**	**1**	**2”**	**1***	**1”**	**3**
A22	**3**	**1***	**1**	**1**	**3**	**1***	**1”**	**3***
A23	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1***	**3**
A24	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**
A25	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3***
A26	**1**	**1**	**1**	**3**	**2****	**1***	**1”**	**3**
A27	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**
A28	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1***	**1**
A29	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**
A30	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A31	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**
A32	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**3**
A33	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**

Actividad 7.1.1:	Actividad 7.1.2:
1: Se escribe “x, x+1, x+2, x+3” 1* : Se escribe “x, (x+1), (x+2), (x+3)” 1**: Se escribe “2x, x+1, x+1+1, x+1+1+1”	1:x+x+1+x+2+x+3=326 es la ecuación planteada. 1*: x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=326 es la ecuación planteada. 1**:x+x+1+x+1+1+x+1+1+1=326 es la ecuación planteada.

<u>Actividad 7.2.1:</u>
2: Se escribe “x padre” e “e hijo”.
2”: Se escribe “x padre” “6x hijo”.
2*: Se escribe “x” e “y”.
2**: Se escribe “6x” y “x”.
3*: Se escribe “6x edad del padre” y “x edad del hijo”.
3**: Se comete el error de inversión para el producto al escribir el sistema.

<u>Actividad 7.2.2:</u>
1: Se plantea un sistema de dos ecuaciones.
1*: Se plantea una ecuación con una incógnita.

<u>Actividad 7.2.3:</u>
1: Se resuelve el sistema por el método de reducción.
1*: Se resuelve el sistema por el método de sustitución.
1**: Se resuelve el sistema por el método de igualación.
1”: Se resuelve una ecuación.

<u>Actividad 7.2.4:</u>
1: Se comprueba que 78+13=91 y que 13*6=78.
1*: Se comprueban las dos condiciones del enunciado.
3. Se comprueba la condición o la ecuación de la suma.
3*: Se comprueba la condición o la ecuación del producto.
3**: Se cometen errores de cálculo al comprobar.

Tabla nº 17.

ACTIVIDADES 7.3, 7.4, 7.5 y 7.6

	7.3	7.4	7.5	7.6
A01	**2***	**4**	**4**	**4**
A02	**3***	**4**	**2**	**2**
A03	**2***	**3ºº**	**3***	**4**
A04	**1**	**1**	**1**	**1****
A05	**1**	**1**	**2^^**	**1**
A06	**3**	**4**	**4**	**2**
A07	**2***	**4**	**4**	**4**
A08	**2**	**2**	**2**	**1****
A09	**2***	**4**	**3****	**2**
A10	**2**	**3**	**3**	**2**
A11	**1**	**3^**	**2^^**	**2**
A12	**2***	**3***	**2***	**2****
A13	**2**	**2**	**3**	**1****
A14	**2**	**3^**	**2**	**1**
A15	**3”**	**4**	**4**	**4**
A16	**2***	**2**	**2****	**3**
A17	**2**	**3ºº**	**3**	**2***
A18	**3**	**3****	**3****	**1***
A19	**1**	**3ºº**	**1**	**4**
A20	**2**	**2**	**3^**	**4**
A21	**2***	**2**	**3^**	**4**
A22	**2**	**2**	**3***	**4**
A23	**3**	**4**	**3”**	**2***
A24	**3**	**3^^**	**3**	**1^^**
A25	**2***	**3**	**2***	**3**
A26	**3**	**2**	**2^**	**1**
A27	**3”**	**2**	**2**	**1***
A28	**1**	**3ºº**	**3”**	**2***
A29	**2**	**1**	**2^**	**1**
A30	**0**	**0**	**0**	**0**
A31	**1**	**2**	**1**	**2***
A32	**2**	**2**	**3**	**1**
A33	**3**	**3**	**2**	**3**

Actividad 7.3:
1: Se utiliza el método algebraico.
2: Se utiliza el método algebraico, se interpreta bien el resultado y no se realiza comprobación alguna.
2*: Se utiliza el método algebraico, se interpreta bien el resultado y se comprueba uno de los lotes o una de las ecuaciones.
3: Se plantea y se resuelve bien, pero no se interpreta la solución.
3*: Se plantea y se resuelve bien y se interpreta mal la solución.
3”: Se plantea bien y se equivoca al resolver.

Actividad 7.4:
1 y 2: Se utiliza el método algebraico.
3: Se plantea mal, se resuelve y se tacha lo que ha escrito.
3^: Se plantea mal, se resuelve y se da por buena la solución incorrecta hallada.
3^^: Se plantea mal y no se resuelve.
3*: Se escribe abreviadamente el enunciado.
3**: Se plantea y se resuelve bien pero se no interpreta el resultado.
3ºº: Sólo se escribe alguno de los datos del enunciado.

Actividad 7.5:
1: Se plantea un sistema y la comprobación realizada puede ser del enunciado, del sistema o de ambos a la vez.
2^^: Se plantea un sistema y se comprueba el sistema planteado.
2^: Se plantea una sola ecuación y se comprueba la ecuación planteada, no el enunciado.
2: Se plantea, se resuelve y se interpreta bien pero no se comprueba.
2*: Se plantea, se resuelve y se interpreta bien pero sólo se comprueba parcialmente que 75+25=100.
2**: Se plantea y se resuelve bien pero ni se interpreta ni se comprueba la solución.
3: Se concluye que hay 25 CD y 75 libros. No hay comprobación alguna.
3”: Se concluye que hay 25 CD y 75 libros. Hay una comprobación del sistema resuelto.
3*: Se plantea bien pero se equivoca al resolver.
3**: Sólo se plantea, pudiendo cometer (o no) el error de inversión.
3^: Se escriben planteamientos que luego se tachan, no llegándose a solución alguna.

Actividad 7.6:
1: Se escribe la ecuación correcta, se dice que faltan datos y se obtiene la respuesta correcta por tanteo.
1*: No se escribe la ecuación correcta y se obtiene la respuesta correcta por tanteo.
1**: Se escriben ecuaciones incorrectas, se dice que faltan datos y se obtiene la respuesta correcta por tanteo.
1^^: Se escribe ecuaciones incorrectas, no se dice que faltan datos y se obtiene la respuesta correcta por tanteo.
2: Sólo se escribe que faltan datos.
2*: Sólo se escribe la ecuación correcta.
2**: Se escribe la ecuación correcta y dice que faltan datos.

Tabla nº 18.

ACTIVIDAD 8

	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6
A01	**1**	**1**	**2**	**1**	**4**	**1^**
A02	**1**	**3***	**2**	**3***	**3^**	**1**
A03	**1**	**1**	**2**	**3***	**3***	**1**
A04	**1**	**1**	**1***	**1**	**1**	**1**
A05	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**
A06	**1**	**3**	**1**	**4**	**4**	**2**
A07	**1**	**3**	**3****	**4**	**4**	**1^^**
A08	**1**	**1**	**2***	**1**	**2**	**1**
A09	**1**	**1**	**1**	**1**	**3^**	**3**
A10	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**3***
A11	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1***
A12	**1**	**1**	**1**	**1**	**3****	**1**
A13	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**
A14	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**
A15	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2****
A16	**1**	**1**	**1***	**1**	**2**	**1**
A17	**1**	**1**	**3^**	**1**	**1**	**1^^**
A18	**1**	**3***	**2^**	**4**	**4**	**4**
A19	**1**	**1**	**3^**	**3^**	**2**	**4**
A20	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**	**2**
A21	**1**	**3**	**1**	**4**	**4**	**4**
A22	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**	**4**
A23	**1**	**1**	**1**	**3**	**3****	**3***
A24	**1**	**1**	**3^^**	**3****	**3^**	**2****
A25	**1**	**1**	**2^**	**3****	**3^**	**2***
A26	**1**	**1**	**2^^**	**1**	**2**	**1**
A27	**1**	**1**	**3***	**3**	**3***	**3**
A28	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**
A29	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A30	**1**	**1**	**3****	**3^^**	**3^^**	**4**
A31	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**
A32	**1**	**1**	**3***	**3**	**1**	**1***
A33	**1**	**1**	**3^^**	**4**	**1**	**2****

Actividad 8.2:
3: Se dice erróneamente que hay "125 preguntas" y obtiene "150 puntos"
3*: Se dice erróneamente que hay "100 preguntas".

Actividad 8.3:
1: Se interpreta la 2ª ecuación en términos de nº de patas.
1*: Se interpreta la 2ª ecuación en términos literales de cuadriplicar el nº de ovejas y de duplicar el nº de gallinas.
2: Se interpreta la 2ª ecuación en términos no literales de nº total de patas. En el enunciado inventado se escribe textualmente que "hay 25 ovejas y gallinas".

Continuación de actividad 8.3:
2*: Se interpreta la 2ª ecuación en términos no literales de nº de patas. No se hace la pregunta.
2^: Se expresa mal lo de cuadriplicar el nº de ovejas y lo de duplicar el nº de gallinas y no hace la pregunta.
2^^: Se expresa mal lo de cuadriplicar el nº de ovejas y lo de duplicar el nº de gallinas pero hace la pregunta.
3^: Se describen "4x + 2y" como incremento, se describe "80" como nº total y se dice, erróneamente, que ambas cantidades son iguales.
3*: No se escribe el dato 80 en el enunciado y se pregunta el nº de patas que hay.
3^^: Se interpreta erróneamente la 2ª ecuación en términos comparativos.
3**: Se interpreta erróneamente la 2ª ecuación en términos no comparativos.

Actividad 8.4:
3: Falta la 2ª ecuación.
3*: Falta sólo el término independiente 32.5.
3**: Faltan sólo los coeficientes 2.5 y 1.5.
3^: Se utilizan 15 y 15 como términos independientes, en vez de 32.5 y 15.
3^^: No se escribe casi nada.

Actividad 8.5:
2: La interpretación de las ecuaciones es correcta y está bien expresada pero falta la pregunta del enunciado.
3*: Se copia mal algún dato al interpretar las ecuaciones.
3**: Se escribe un par de palabras erróneas que hacen que la interpretación sea incorrecta.
3^: Se interpreta mal la expresión "x-5" como una comparación entre las edades de los dos y, además, se interpretan mal o no se interpretan el resto de las expresiones.
3^^: Apenas se escribe.

Actividad 8.6:
1: Se inventa un enunciado algebraico cuya solución es un par de números enteros positivos.
1*: Se inventa un enunciado algebraico cuya solución es un número entero positivo y un cero.
1^: Se inventa un enunciado algebraico cuya solución es sólo un número entero positivo.
1^^: Se inventa un problema aritmético.
2: Se inventa un enunciado bien expresado con una solución negativa.
2*: Se inventa un enunciado bien expresado con una solución fraccionaria.
2**: Se inventa un enunciado mal expresado en el que sólo describe una única ecuación.
3: Se escribe un enunciado cuyo significado es incorrecto.
3*: Se escribe enunciados con tres valores desconocidos.

Tabla nº 19.

ACTIVIDAD 9.1

	9.1.1-9.1.2	9.1.3-9.1.4
A01	**2***	**3****
A02	**3^**	**3****
A03	**3^^**	**4**
A04	**2^^**	**2^^**
A05	**3***	**1^^**
A06	**3^**	**3***
A07	**3^**	**4**
A08	**3****	**1****
A09	**3****	**4**
A10	**2**	**2^^**
A11	**3^***	**1^**
A12	**2***	**2***
A13	**2**	**2^**
A14	**2**	**1***
A15	**3***	**4**
A16	**2**	**1***
A17	**2**	**4**
A18	**1****	**1****
A19	**3****	**4**
A20	**3****	**4**
A21	**1***	**3***
A22	**1****	**1****
A23	**2**	**4**
A24	**3****	**4**
A25	**3****	**4**
A26	**1^**	**1^**
A27	**1^**	**2*^**
A28	**2**	**2***
A29	**1^**	**2^^**
A30	**2**	**4**
A31	**3****	**4**
A32	**3***	**2*^**
A33	**3****	**3***

<u>Actividad 9.1.1-9.1.2:</u>
1*: Se formula bien, no se intenta resolver y se razona bien porqué el enunciado es incorrecto.
1**: Se formula mal, se intenta resolver y se razona bien porqué el enunciado es incorrecto.
1^: Se formula bien, se resuelve bien y sólo se dice que "está mal planteado".
2^^: Se formula bien, se resuelve bien y sólo se escribe un interrogante.
2: Se formula bien pero se equivoca al resolver.
2*: Sólo se dice que "está mal planteado" o que "no se puede hacer, es imposible".
3*: Al formular, sólo se comete el error de inversión.
3**: Al formular, se comete un error distinto del de inversión, escribiendo formulaciones incoherentes con el texto dado.
3^: Sólo se dice que faltan datos.
3^^: Sólo se escribe la asignación de variables.
3^*: Se formula bien, se resuelve mal y se deja una solución negativa carente de sentido en el contexto dado.

<u>Actividad 9.1.3-9.1.4:</u>
1*: Se dice que sería Juan el que llevaría el triple .Y se resuelve algebraicamente.
1**: Se dice que sería Juan el que llevaría el triple. Y se resuelve bien aritméticamente.
1^: Se dice que sería Juan el que llevaría el doble. Y se resuelve bien algebraicamente.
1^^: Se cree que se ha resuelto bien en la actividad anterior 9.1.1 y se dice que no hace falta mejorarlo.
2^^: En vez de cambiarse el enunciado, se cambia uno o dos datos numéricos del sistema y se resuelve bien algebraicamente.
2*: Se dice que sería Juan el que llevaría el triple. Pero no se resuelve ni algebraica ni aritméticamente.
2^: Se dice que sería Juan el que llevaría el doble. Pero se resuelve mal algebraicamente.
2*^: Se escribe y se resuelve un sistema muy modificado. No se escribe enunciado alguno.
3*: Se dicen generalidades pero no se mejora el enunciado.
3**: Sólo se cambia la palabra triple por doble, manteniéndose incoherentemente, si ambos dejan 5 sacos, ahora Pedro tiene más que Juan.

Tabla nº 20.

ACTIVIDAD 9.2

	9.2.1-9.2.2	9.2.3-9.2.4
A01	**3^**	**1***
A02	**3^^**	**4***
A03	**3^***	**4***
A04	**2**	**4**
A05	**1**	**1**
A06	**3^**	**4**
A07	**4**	**4**
A08	**2****	**4**
A09	**3****	**1****
A10	**4**	**4**
A11	**3***	**1****
A12	**3^^**	**4***
A13	**1**	**1****
A14	**3****	**4**
A15	**4**	**4**
A16	**2**	**4**
A17	**3***	**3***
A18	**4**	**4**
A19	**3^^**	**3****
A20	**4**	**4**
A21	**2****	**4**
A22	**4**	**4**
A23	**2***	**3****
A24	**1***	**4**
A25	**2**	**4**
A26	**1**	**4**
A27	**3****	**4**
A28	**2***	**3***
A29	**1**	**4**
A30	**3***	**4**
A31	**2**	**4**
A32	**3^**	**4**
A33	**3****	**3***

<u>Actividad 9.2.1 y 9.2.2:</u>
1: Se formula bien un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y se resuelve bien. No se realiza dibujo geométrico alguno para plantear el sistema.
1*: Se formula bien con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y se resuelve bien. Sí realiza un dibujo geométrico para plantear el sistema.
2: Se llega a una correcta ecuación de 2º grado de grado. Pero no se resuelve bien.
2*: Se despeja mal la y en la ecuación $xy = 24$.
2**: Sólo se plantea bien el sistema. No se intenta resolverlo.
3*: Se escribe $x \cdot x + 2 = 24$ o $x + 2 \cdot x = 24$ (en vez de $x \cdot (x+2) = 24$ o $(x+2) \cdot x = 24$), llevando el anterior error rotacional a las incorrectas ecuaciones respectivas $x^2 + 2 = 24$ o $3x = 24$.
3**: Se escribe $2x$ (en vez de $x+2$).
3^: Se escribe $x + x + 2 = 24$ o $x + x + 2x + 2x = 24$, en vez de $x \cdot (x+2) = 24$.
3^^: Se dice que está mal o que falta una ecuación.
3^*: Sólo se escribe la asignación de incógnitas y la fórmula $A = b * h$.

<u>Actividad 9.2.3 y 9.2.4:</u>
1: Se dice que “*no lo mejoraría*” y se resuelto bien el problema en la actividad 9.2.1
1*: Se dice que “*está bien*”, dando a entender que no se debe mejorar porque se cree, equivocadamente, que se ha resuelto bien el problema en la actividad 9.2.1.
1**: Se cambia el enunciado dado y se resuelve bien.
3*: Se inventa un enunciado nuevo, cambiándose “2 metros más que el otro” por “4 más que el otro” o por “5 m menor que el otro” y, luego, no se resuelve bien.
3**: Sólo se escribe que se pondría bien o que se daría algún dato más.
4: No se escribe nada pero se ha formulado, en la anterior actividad 9.2.1, el enunciado inventado que se le proporcionaba.
4*: No se escribe nada pero no se ha formulado, en la anterior actividad 9.2.1, el enunciado inventado que se le proporcionaba.

Tabla nº 21.

ACTIVIDAD 9.3

	9.3.1-9.3.2	9.3.3-9.3.4
A01	**4**	**4**
A02	**4**	**4**
A03	**4**	**4**
A04	**4**	**2***
A05	**3^**	**1**
A06	**2**	**4**
A07	**3****	**3***
A08	**4**	**3**
A09	**4**	**4**
A10	**4**	**4**
A11	**2***	**4**
A12	**1**	**4**
A13	**3***	**2**
A14	**1**	**1**
A15	**4**	**4**
A16	**4**	**4**
A17	**4**	**4**
A18	**4**	**4**
A19	**2**	**4**
A20	**4**	**4**
A21	**4**	**4**
A22	**4**	**4**
A23	**4**	**4**
A24	**4**	**4**
A25	**4**	**4**
A26	**4**	**4**
A27	**4**	**4**
A28	**4**	**4**
A29	**4**	**4**
A30	**4**	**4**
A31	**4**	**4**
A32	**4**	**4**
A33	**3****	**3**

<u>Actividad 9.3.1 y 9.3.2:</u>
2: Sólo se dice que no se puede resolver o que está mal el planteamiento, sin aportar cálculo ni razonamiento alguno.
2*: Se escribe el planteamiento correcto pero no se resuelve bien.
3*: Se plantea mal el problema.
3**: Se da una respuesta incorrecta sin escribirse ecuación alguna.
3^: Se plantea y se resuelve bien, dándose por buena una respuesta que carece de sentido.

<u>Actividad 9.3.3 y 9.3.4:</u>
2: Se cambia el enunciado.
2*: Se cambia la ecuación, en vez del enunciado.
3: Se escribe un enunciado modificado y correcto que se plantea mal.
3*: Se escribe un enunciado modificado e incorrecto que ni se plantea ni se resuelve.

Tabla nº 22.

PRUEBA I

	I.1	I.2	I.3	I.4	i.5
A01	**1***	**2**	**1**	**3***	**4**
A02	**4**	**1**	**1**	**1**	**3**
A03	**3****	**2**	**1***	**1**	**1**
A04	**1**	**1***	**1**	**1**	**1**
A05	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A06	**4**	**2**	**1**	**1**	**4**
A07	**2**	**2**	**2**	**3***	**1**
A08	**1**	**1***	**2**	**1****	**1**
A09	**3**	**2**	**1**	**3^**	**3**
A10	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A11	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A12	**3****	**1**	**3**	**1**	**1***
A13	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**
A14	**1***	**1**	**1***	**1***	**1****
A15	**1***	**1**	**1**	**3***	**1**
A16	**1**	**1***	**1**	**1**	**1**
A17	**3***	**1**	**1**	**3**	**1**
A18	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A19	**3***	**1**	**3***	**3**	**1**
A20	**3*^**	**1***	**1**	**1****	**4**
A21	**1**	**1**	**1**	**1***	**1**
A22	**1^**	**2**	**1**	**1**	**4**
A23	**3**	**3***	**3**	**3**	**3**
A24	**3**	**1**	**1**	**1**	**2**
A25	**3**	**1**	**1**	**1**	**2**
A26	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A27	**3***	**2**	**1**	**3**	**2**
A28	**3***	**1**	**3***	**1**	**1***
A29	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**
A30	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A31	**1**	**1**	**1**	**1**	**3***
A32	**1**	**2**	**1**	**3****	**1**
A33	**1**	**1***	**1**	**3***	**1**

<u>Cuestión I.1:</u>
1: Resolución algebraica. Puede estarse comprobando el enunciado, la ecuación o ambos a la vez.
1*: Resolución algebraica. Se comprueba el enunciado.
1^: Resolución por tanteo.
3*: El planteamiento algebraico está bien. La resolución está mal.
3**: El planteamiento algebraico es incorrecto.
3*^: Intentos fallidos de resolución por tanteo.

<u>Cuestión I.2:</u>
1: Las comprobación puede ser una comprobación del enunciado o de las ecuaciones o simultáneamente de ambos a la vez.
1*: Se comprueba sólo el coste de un lote o sólo una ecuación.
3*: El sistema está bien formulado pero no está bien resuelto.

<u>Cuestión I.3:</u>
1*: El problema no ha sido resuelto aritméticamente.
2: Están erróneamente intercambiados los precios del jabón y del bote de colonia.
3: Sólo se escriben los datos dados en el enunciado.
3*: Las mismas incógnitas designan el precio sin rebajar y al precio rebajado.

<u>Cuestión I.4</u>
1: Se razona que el planteamiento de la ecuación bien resuelta, que lleva a tal solución, es incorrecto.
1*: Se razona que el planteamiento de la ecuación es incorrecto. Pero no se comprueba que la ecuación esté bien resuelta.
1**: Se razona que la solución no verifica las condiciones del enunciado.
3: Se comprueba sólo la ecuación y se dice que se merece un punto.
3^: Se comprueba sólo la ecuación y se dice que se merece un cero porque se comete un error de memoria de cálculo.
3*: Se comprueba sólo la ecuación y se dice que el único fallo es que no están escritos el 38 y el 39.
3**: La respuesta es contradictoria: 37 y 27.

<u>Cuestión I.5</u>
1*: Las incógnitas designan precios de libros.
1**: Hay tres enunciados inventados.
3*: Se suman o restan número de libros y número de años.

Tabla nº 23.

PRUEBA II

	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5
A01	**2**	**2**	**1**	**4**	**4**
A02	**3***	**2**	**3***	**1***	**3**
A03	**3****	**2**	**1**	**1***	**1**
A04	**2**	**2**	**1**	**1***	**1**
A05	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**
A06	**4**	**2**	**3***	**4**	**4**
A07	**2**	**2**	**1**	**4**	**4**
A08	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**
A09	**3****	**2**	**1**	**1**	**3**
A12	**2**	**1**	**1**	**1**	**3***
A13	**2**	**2**	**1**	**1***	**1**
A14	**2**	**2**	**1**	**1***	**1****
A15	**3****	**2**	**1**	**1**	**1**
A16	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**
A17	**3***	**1**	**1**	**1**	**4**
A19	**3**	**1**	**3***	**3**	**4**
A20	**2**	**2**	**1**	**1***	**1**
A21	**2**	**2**	**1**	**1***	**1**
A22	**1^**	**1**	**1**	**1**	**4**
A23	**4**	**3***	**3**	**1**	**1***
A24	**3****	**2**	**1**	**3**	**2**
A25	**1**	**3***	**3**	**1**	**3**
A27	**3***	**1***	**1**	**1**	**4**
A28	**1**	**1**	**3***	**3**	**1**
A29	**1**	**1**	**1**	**1***	**2**
A31	**3*^**	**1**	**1**	**3**	**2**
A32	**3***	**1***	**1**	**1**	**1**
A33	**2**	**2**	**3***	**1***	**3***

Cuestión II.1:
1: Resolución algebraica. Puede estar comprobándose el enunciado, la ecuación o ambos a la vez.
1*: Resolución algebraica. Se comprueba el enunciado.
1^: Resolución por tanteo.
3*: El planteamiento algebraico está bien. La resolución está mal.
3**: El planteamiento algebraico es incorrecto.
3*^: Intentos fallidos de resolución por tanteo.

Cuestión II.2:
1: Se comprueba el enunciado, el sistema 2x2 de ecuaciones o ambos a la vez.
1*: Se comprueba sólo el coste de un lote o sólo una ecuación.
3*: El sistema está bien formulado pero mal resuelto.

Cuestión II.3:
1*: El problema no ha sido resuelto aritméticamente.
2: Están erróneamente intercambiados los precios del jabón y del bote de colonia.
3: Sólo se escriben los datos dados en el enunciado.
3*: Las mismas incógnitas designan el precio sin rebajar y al precio rebajado.

Cuestión II.4:
1: Se razona que el planteamiento de la ecuación bien resuelta, que lleva a tal solución, es incorrecto.
1*: Se razona que el planteamiento de la ecuación es incorrecto. Pero no se comprueba que la ecuación esté bien resuelta.
1**: Se razona que la solución no verifica las condiciones del enunciado.
3: Se comprueba sólo la ecuación y se dice que se merece un punto.
3^: Se comprueba sólo la ecuación y se dice que se merece un cero porque comete un error de memoria de cálculo.
3*: Se comprueba sólo la ecuación y se dice que el único fallo es que no están escritos el 38 y el 39.
3**: La respuesta es contradictoria: 37 y 27.

Cuestión II.5:
1*: Las incógnitas designan precios de libros.
1**: Hay tres enunciados inventados
3*: Se suman o restan número de libros y número de años.

Tabla nº 24.

PRUEBAS I y II.

	I.1 → II.1	I.2 → II.2	I.3 → II.3	I.4 → II.4	I.5 → II.5
A01	1 → 2	2 → 2	1 → 1	3 → 4	4 → 4
A02	4 → 3	1 → 2	1 → 3	1 → 1	3 → 3
A03	3 → 3	2 → 2	1 → 1	1 → 1	1 → 1
A04	1 → 2	1 → 2	1 → 1	1 → 1	1 → 1
A05	1 → 2	1 → 2	1 → 1	1 → 1	3 → 1
A06	4 → 4	2 → 2	1 → 3	1 → 4	4 → 4
A07	2 → 2	2 → 2	2 → 1	3 → 4	1 → 4
A08	1 → 2	1 → 2	2 → 1	1 → 1	1 → 1
A09	3 → 3	2 → 2	1 → 1	3 → 1	3 → 3
A12	3 → 2	1 → 1	3 → 1	1 → 1	1 → 3
A13	2 → 2	2 → 2	1 → 1	1 → 1	1 → 1
A14	1 → 2	1 → 2	1 → 1	1 → 1	1 → 1
A15	1 → 3	1 → 2	1 → 1	3 → 1	1 → 1
A16	1 → 2	1 → 2	1 → 1	1 → 1	1 → 1
A17	3 → 3	1 → 1	1 → 1	3 → 1	1 → 4
A19	3 → 3	1 → 1	3 → 3	3 → 3	1 → 4
A20	3 → 2	1 → 2	1 → 1	1 → 1	4 → 1
A21	1 → 2	1 → 2	1 → 1	1 → 1	1 → 1
A22	1 → 1	2 → 1	1 → 1	1 → 1	4 → 4
A23	3 → 4	3 → 3	3 → 3	3 → 1	3 → 1
A24	3 → 3	1 → 2	1 → 1	1 → 3	2 → 2
A25	3 → 1	1 → 3	1 → 3	1 → 1	2 → 3
A27	3 → 3	2 → 1	1 → 1	3 → 1	2 → 4
A28	3 → 1	1 → 1	3 → 3	1 → 3	1 → 1
A29	1 → 1	1 → 1	1 → 1	1 → 1	2 → 2
A31	1 → 3	1 → 1	1 → 1	1 → 3	3 → 2
A32	1 → 3	2 → 1	1 → 1	3 → 1	1 → 1
A33	1 → 2	1 → 2	1 → 3	3 → 1	1 → 3

Tabla nº 25.