



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Magisterio en Educación Primaria

Algoritmo de la división en la Formación Inicial Para
Adultos (FIPA)

Division algorithm in Adult Education (FIPA)

Autor

José Carlos Calvo Martínez

Director

D. Rafael Escolano Vizcarra

FACULTAD DE EDUCACIÓN
2017-2018

CONTENIDO

RESUMEN Y PALABRAS CLAVE	8
INTRODUCCIÓN.....	9
MARCO TEÓRICO	10
CAPÍTULO 1. LA DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES Y SUS DIFERENTES PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO	10
1.1 <i>Enfoque significativo de la división</i>	10
1.2 <i>Significados de la división</i>	11
1.3 <i>Procedimientos de cálculo vinculados al conocimiento conceptual de la división</i>	12
1.4 <i>Algoritmos de la división utilizados en la historia</i>	14
CAPÍTULO 2. PROPUESTAS DE ENSEÑANZA DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN.....	16
2.1 <i>Métodos de enseñanza del algoritmo de la división</i>	16
2.2 <i>Dificultades del algoritmo de la división tradicional con relación a otros</i>	22
2.3 <i>Criterios de elección para una propuesta didáctica</i>	22
2.4 <i>Nuestra propuesta didáctica.....</i>	23
MARCO EXPERIMENTAL	26
CAPÍTULO 3. PRUEBA DIAGNÓSTICA PARA OBSERVAR LA COMPRESIÓN DE LA DIVISIÓN Y LA UTILIZACIÓN DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN EN UN GRUPO CLASE DE EDUCACIÓN DE PERSONAS ADULTAS	26
3.1 <i>Contexto del centro.....</i>	26
3.2 <i>Contexto del aula y del alumnado.....</i>	27
3.3 <i>Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba inicial</i>	30
CAPÍTULO 4. DISEÑO DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA	36
4.1 <i>Objetivos.....</i>	36
4.2 <i>Contenidos.....</i>	36
4.3 <i>Tareas.....</i>	39
4.4 <i>Evaluación.....</i>	46
4.5 <i>Metodología.....</i>	47
4.6 <i>Temporalización (cronograma).....</i>	47
CAPÍTULO 5. DESARROLLO Y EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA	48
5.1 <i>Primera sesión. Sistemas de Numeración (I).....</i>	48
5.2 <i>Segunda sesión. Sistemas de Numeración (II) y Reparto (I)</i>	56
5.3 <i>Tercera sesión. Reparto (II) y Reparto (III)</i>	63
5.4 <i>Cuarta sesión. Refuerzo del algoritmo de la división (I)</i>	67
5.5 <i>Quinta sesión. Refuerzo del algoritmo de la división (II).....</i>	72
5.6 <i>Sexta sesión. Refuerzo del algoritmo de la división (III).....</i>	75
5.7 <i>Séptima sesión. Nuevos significados de la división y problemas.....</i>	79
CAPÍTULO 6. EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA IMPLEMENTADA	82
6.1 <i>Diseño de la prueba final.....</i>	82
6.2 <i>Desarrollo y resultados de la prueba final.....</i>	85
6.3 <i>Resultados de la valoración de los alumnos.....</i>	88
6.4 <i>Evaluación de la propuesta de enseñanza.....</i>	91
CONCLUSIONES	92

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 96

ANEXOS

ANEXO 1. FICHA DE EVALUACION INICIAL..... 98

ANEXO 2. PROPUESTA COMPLETA DE ENSEÑANZA 99

ANEXO 3. FICHAS DE VALORACIÓN DE LOS ALUMNOS Y EVALUACIÓN FINAL..... 134

ANEXO 4. REFUERZO DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN (RESUMEN)..... 141

ANEXO 5. ANÁLISIS AGREGADO DE LA PRUEBA INICIAL 143

ANEXO 6. RESULTADOS DE LA PRUEBA INICIAL..... 145

ANEXO 7. RESULTADOS DE LAS SESIONES (ETAPAS 1, 2, 3, Y 4)..... 162

 7.1 ETAPA 1. REFUERZO DE LA COMPRESIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN..... 162

Fichas 1-1b. Escritura de números naturales 162

Fichas 2-2b. Lectura de números naturales 194

Fichas 3. Agrupamiento decimal..... 226

Fichas 4-4b. Descomposición decimal..... 247

 7.2 ETAPA 2. ENSEÑANZA/REFUERZO DEL CONCEPTO DE REPARTO IGUALITARIO..... 288

Fichas 5-5c. Reparto directo 289

Fichas 6-6b. Búsqueda de condiciones iniciales 348

Fichas 7-7c. Comprobación de repartos..... 384

 7.3 ETAPA 3. ENSEÑANZA/REFUERZO DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN 418

Fichas 8a-8b. Algoritmo de la división (I) 418

Ficha 8b-extra. Algoritmo de la división (I)..... 481

Fichas 9a-9e. Algoritmo de la división (II) 498

Fichas 10a-10f. Algoritmo de la división (III) 594

 7.4 ETAPA 4. ENSEÑANZA/ REFUERZO DE NUEVOS SIGNIFICADOS DE LA DIVISIÓN DE NATURALES Y REFUERZO
DEL ALGORITMO MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS..... 677

Fichas 12a-12b. Problemas 677

ANEXO 8. RESULTADOS DE LA VALORACIÓN DE LOS ALUMNOS 715

ANEXO 9. RESULTADOS DE LA PRUEBA FINAL..... 733

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Triángulo multiplicativo (Calvo y Barba (2010)).	12
Figura 2. Triángulo multiplicativo como división.	13
Figura 3. Tiras de actividades de deducción (Calvo y Barba (2010)).	13
Figura 4. Estrategia de descomposición.	13
Figura 5. Método egipcio de división.	14
Figura 6. Método de la Galera.	15
Figura 7. Algoritmo tradicional (Gómez, 1998, p.140).	17
Figura 8. Algoritmo tradicional extendido (Gómez, 1998, p.141).	17
Figura 9. Algoritmo anglosajón.	18
Figura 10. Algoritmo tradicional expandido (Gómez, 1998, p. 141).	18
Figura 11. Algoritmo tradicional expandido usando números.	19
Figura 12. Simbolización de una división en columnas (Calvo y Barba, 2010).	19
Figura 13. Abreviación de una división en columnas (Calvo y Barba, 2010).	19
Figura 14. 2ª abreviación de una división en columnas (Calvo y Barba, 2010).	20
Figura 15. División en columnas (Calvo y Barba, 2010).	20
Figura 16. En columnas con anotaciones de apoyo.	20
Figura 17. Método ABN. Planteamiento inicial.	21
Figura 18. Método ABN. Primer reparto.	21
Figura 19. Método ABN. Resolución completa.	21
Figura 20. Método tradicional expandido con cociente modificado.	23
Figura 21. Propuesta de división con apoyo.	24
Figura 22. Propuesta de reparto por fases.	25
Figura 23. Plano de clase.	27
Figura 24. Disposición habitual de los alumnos en clase.	29
Figura 25. Evaluación inicial: resultados agregados del ejercicio 1.	32
Figura 26. Evaluación inicial: resultados agregados del ejercicio 1.	32
Figura 27. Evaluación inicial: resultados agregados del ejercicio 5.	32
Figura 28. Error en la formulación de la relación entre términos. Tipo 1.	33
Figura 29. Error en la formulación de la relación entre términos. Tipo 2.	33
Figura 30. Error en la formulación de la relación entre términos. Tipo 3.	33
Figura 31. Evaluación inicial: resultados agregados del ejercicio 2.	33
Figura 32. Evaluación inicial: resultados agregados del ejercicio 3.	34
Figura 33. Evaluación inicial: resultados agregados corregidos del ejercicio 6.	34
Figura 34. Algoritmo de la división.	37
Figura 35. Representación simbólica de 95:4 con la metodología propuesta.	38
Figura 36. Comprobación de la división.	38
Figura 37. Material utilizado: placas, barras y puntos.	39
Figura 38. Ficha 1. Tarea 1.	40
Figura 39. Ficha 2. Tarea 1.	40
Figura 40. Ficha 3. Tarea 1.	41
Figura 41. Ficha 4. Tarea 1.	41
Figura 42. Ficha 4b. Tarea 1.	41

Figura 43. Ficha 5. Ejemplo ilustrativo.....	42
Figura 44. Ficha 6. Tarea 1.	42
Figura 45. Ficha 7. Tarea 1.	43
Figura 46. Ficha 8. Ejemplo resuelto.	44
Figura 47. Ficha 9. Tarea 1.	44
Figura 48. Ficha 10. Tarea 2.	45
Figura 49. Ficha 12. Tareas 2 y 3.....	45
Figura 50. Ejemplo resuelto Ficha 1/1b.	49
Figura 51. Escritura de números naturales (resultados).	49
Figura 52. Ficha 1. Tarea 1 correctamente resuelta (A04).....	50
Figura 53. Ficha 1 incorrecta (A02).....	50
Figura 54. Tarea 1 de la ficha 1 incorrecta (A05).	51
Figura 55. Ficha 2/2b. Ejemplo resuelto.	52
Figura 56. Lectura de números naturales (resultados).	53
Figura 57. Ficha 2. Tarea 1 correctamente resuelta (A13).....	53
Figura 58. Ficha 2 incorrecta (A10).....	53
Figura 59. Ficha 2 incorrecta (A22).....	54
Figura 60. Ficha 3. Resolución del problema de agrupamiento decimal.	54
Figura 61. Ficha 3 con errores en la letra.....	55
Figura 62. Ficha 3 con error conceptual (A06).	55
Figura 63. Ficha 4 correctamente realizada (A07).	56
Figura 64. Ficha 4. “cero” mal representado (A06).	57
Figura 65. Ficha 4 con descomposición incorrecta (A15).	57
Figura 66. Ficha 4 con descomposición incorrecta (A02).	57
Figura 67. Ficha 4b correctamente resuelta (A23).	58
Figura 68. Ficha 4b. Descomposición incorrecta (A18).	58
Figura 69. Ficha 4b. Descomposición incorrecta (A08)	58
Figura 70. Ficha 5b. Tarea correctamente resuelta (A20).....	59
Figura 71. Ficha 5b. No muestra las unidades sobrantes (A14).....	60
Figura 72. Ficha 5. Falta de precisión dibujando el material (A14).....	61
Figura 73. Ficha 5. No indica cuántas personas reciben la cantidad (A19).	61
Figura 74. Ficha 5. Error en la escritura del resultado (A19).....	62
Figura 75. Ficha 5c. Utilización del algoritmo de la división (A18).....	62
Figura 76. Ficha 6. Búsqueda condiciones iniciales correcta (A13).....	64
Figura 77. Ficha 6. Resultado correcto, error en notación (A16).....	64
Figura 78. Ficha 6. Resultado obtenido mediante conjeturas (A15).....	64
Figura 79. Ficha 7. Comprobación correctamente resuelta (A08).	65
Figura 80. Ficha 7. Reparto incorrecto no justificado (A12).	66
Figura 81. Ficha 7b. Utilizando el algoritmo como explicación (A17).	66
Figura 82. Ficha 8. Algoritmo de la división correctamente utilizado (A01).	68
Figura 83. Ficha 8. Resto no dibujado (A22).....	69
Figura 84. Ficha 8a. Representación gráfica incompleta (no dibuja el “resto”).....	69
Figura 85. Ficha 8a. No realizado por fases (A08).	70
Figura 86. Ficha 8b. No realizado correctamente por fases (A22).....	71

Figura 87. Representación simbólica del ejemplo de la sesión 5.....	73
Figura 88. Ficha 8b-extra. Simbolización correcta (A04).....	74
Figura 89. Ficha 9 Ejemplo de resolución.	75
Figura 90. Ficha 9. Error en la notación (A16).	76
Figura 91. Ficha 10. Tarea 1 correctamente resuelta (A22).	77
Figura 92. Ficha 12. Tarea sin evidencias (A08).	81
Figura 93. Ficha 12. Aplicación incorrecta (A04).	81
Figura 94. Ficha 12. Aceptando el método propuesto (A01).	81
Figura 95. Evaluación Final. Ejercicio 1-A.....	82
Figura 96. Evaluación Final. Ejercicio 1-B.....	82
Figura 97. Evaluación Final. Ejercicio 2. Tipo A.	82
Figura 98. Evaluación Final. Ejercicio 2. Tipo B.....	82
Figura 99. Evaluación Final. Ejercicio 3. Tipo A.	83
Figura 100. Evaluación Final. Ejercicio 3. Tipo B.....	83
Figura 101. Evaluación Final. Ejercicio 3. Común para tipo A y B.	84
Figura 102. Evaluación Final. Ejercicio 4. Tipo A.	84
Figura 103. Evaluación Final. Ejercicio 4. Tipo B.....	85
Figura 104. Disposición de alumnos en clase durante la prueba final	85
Figura 105. Prueba final. Error en ejercicio 1 (A19).	87
Figura 106. Valoración final de los alumnos. Preguntas 1 y 2.....	88
Figura 107. Valoración final. Pregunta 3.	88
Figura 108. Valoración final. Pregunta 3 (A10).....	89
Figura 109. Valoración final. Pregunta 3 (A01).....	89
Figura 110. Valoración final. Pregunta 3 (A17).....	89
Figura 111. Valoración final. Pregunta 3 (A19).....	89
Figura 112. Valoración final. Pregunta 3 (A16).....	89
Figura 113. Valoración final. Pregunta 1 (A06).....	90
Figura 114. Valoración final. Pregunta 3 (A06).....	90
Figura 115. Valoración final. Pregunta 2 (A15).....	90
Figura 116. Valoración final. Pregunta 2 (A20).....	90
Figura 117. Valoración final. Pregunta 3 (A12).....	90

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Niveles educativos en la enseñanza a adultos	26
Tabla 2. Equipamiento del aula.....	28
Tabla 3. Etapas de la propuesta educativa	36
Tabla 4. Temporalización de la propuesta didáctica	47
Tabla 5. Estructura de la sesión 1.....	48
Tabla 6. Resultados agregados de las fichas 2 y 2b	52
Tabla 7. Resultados agregados de la ficha 3	55
Tabla 8. Estructura de la sesión 2.....	56
Tabla 9. Resultados agregados Ficha 4.....	56
Tabla 10. Resultados agregados Ficha 4b	58
Tabla 11. Resultados agregados fichas 5, 5b y 5c.....	60
Tabla 12. Estructura de la sesión 3.....	63
Tabla 13. Resultados agregados Ficha 6 y 6b	65
Tabla 14. Resultados agregados Ficha 7, 7b y 7c	66
Tabla 15. Estructura de la sesión 4.....	67
Tabla 16. Resultados agregados ficha 8a. Representación gráfica.....	69
Tabla 17. Resultados agregados ficha 8a. Representación simbólica	70
Tabla 18. Resultados agregados ficha 8b. Representación gráfica	71
Tabla 19. Resultados agregados ficha 8b. Representación simbólica	72
Tabla 20. Estructura de la sesión 5.....	72
Tabla 21. Resultados agregados ficha 8b-extra.....	73
Tabla 22. Estructura de la sesión 6.....	75
Tabla 23. Resultados agregados ficha 9a-9f	75
Tabla 24. Resultados agregados ficha 10a-10e	78
Tabla 25. Comparativa prueba inicial vs sesión 6.....	78
Tabla 26. Estructura de la sesión 7.....	79
Tabla 27. Resultados agregados ficha 12.....	80
Tabla 28. Resultados agregados de la prueba final	86

RESUMEN Y PALABRAS CLAVE

Dentro de las cuatro operaciones aritméticas básicas, la división es la que más dificultades presenta a los alumnos de Primaria. Pero no sólo a ellos, también a los adultos, y especialmente a aquellos adultos que ya desarrollaron su carrera profesional y que al alcanzar la edad de la jubilación quieren profundizar en el conocimiento de las Matemáticas que en su momento no pudieron adquirir. Para ellos, y en el marco de un curso de FIPA (Formación Inicial para Adultos) hemos diseñado una propuesta de enseñanza del algoritmo de la división desde el significado del reparto igualitario. Pretendemos conectar las acciones físicas del reparto realizadas con materiales manipulativos con acciones simbólicas del algoritmo de la división, con el objetivo de poder darle un enfoque desde la comprensión a un algoritmo que la mayoría de alumnos tienen ya interiorizado como una aplicación mecánica de reglas.

Se ha realizado una revisión bibliográfica de los algoritmos de la división antiguos y modernos como base teórica antes de optar por el método tradicional con apoyos (centenas, decenas, unidades), repartiendo la mayor cantidad de unidades posible en cada fase. Tras llevar a cabo la propuesta, se analizará su desarrollo, resultados y consecución de objetivos.

Palabras clave: **algoritmo, división, educación de adultos, enseñanza, material manipulativo, reparto igualitario**

Within the four basic arithmetic operations, division is the most difficult for Primary Education students. Not only for them, but also for adults, and especially for those who have already developed their professional career and, when reached the age of retirement, they want acquire of the mathematical knowledge that they could not obtain years before. For them, we have designed a proposal of teaching of division algorithm from the meaning of equal distribution for a FIPA course (Initial Training for Adults). We expect to connect physical actions of distribution carried out with manipulative materials with symbolic actions of division algorithm, with the objective of focusing from the understanding of an algorithm which the majority of students have embraced as a mechanical application of rules.

We have carried out a bibliographic review of old and modern division algorithms as a theoretical basis before choosing the traditional method with supports (hundreds, dozens, units) distributing the biggest amount of units as possible in each phase. After performing the proposal, we will analyse its development, results and objectives achievements.

Keywords: **adult education, algorithm, division, equal distribution, manipulative material, teaching**

INTRODUCCIÓN

La formación para adultos es una de las salidas profesionales de los maestros en Educación Primaria, sin embargo, la cantidad de literatura existente sobre este tópico es mucho menor que la existente para Educación Primaria. Este trabajo fin de grado se centrará en el refuerzo del algoritmo de la división de números naturales en un curso de FIPA (Formación Inicial para Adultos).

Los objetivos que se han marcado en este trabajo son:

1. Realizar una búsqueda bibliográfica de los diferentes procedimientos de cálculo de la división de números naturales que han existido a lo largo de la historia y estudiar las características singulares del algoritmo tradicional de la división, las dificultades asociadas a su enseñanza en las aulas de Educación Primaria y analizar algunas propuestas alternativas actuales a la enseñanza del algoritmo tradicional de la división.
2. Justificar el diseño de una propuesta de enseñanza del algoritmo tradicional de la división de números naturales en un aula de Formación Inicial para Adultos de un Centro de Educación de Personas Adultas. Antes de proceder al diseño y desarrollo de la propuesta se diseña y realiza una prueba inicial para evaluar la comprensión de los estudiantes acerca de los significados de la división y del conocimiento del algoritmo tradicional de esta operación aritmética.
3. Desarrollar y evaluar una propuesta de enseñanza del algoritmo tradicional de la división, sustentada en la idea de reparto igualitario efectuado por fases, en un grupo-clase de un Centro de Educación de Personas Adultas.

Los autores del trabajo esperan cubrir parte del hueco existente en la didáctica de las matemáticas en Educación de Adultos, y que esta propuesta sea de utilidad para futuros docentes.

El primer objetivo se desarrollará íntegramente en el capítulo 1 y 2. El segundo de los objetivos se aborda en la última sección del capítulo 2, donde se introducen aquellos criterios que sustentan nuestra propuesta. Esta sección, junto con los capítulos 3 y 4 desarrollan el segundo objetivo. Por último, los dos últimos capítulos de la memoria (5 y 6) estarán dedicados íntegramente al objetivo 3.

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 1. LA DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES Y SUS DIFERENTES PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO

1.1 Enfoque significativo de la división

La división, como una de las cuatro operaciones aritméticas básicas, puede definirse de múltiples formas, que en muchas ocasiones se relacionará con otras dos de las operaciones básicas, la multiplicación o la resta. Maza (1991) explica que algunas de ellas son incluso cuestionables:

Si de la multiplicación se dan varias definiciones y todas ellas son admisibles, no sucede lo mismo con la división. De ella se llegan a afirmar dos cosas, fundamentalmente:

Que es la operación inversa de la multiplicación.

Que es una resta reiterada.

Todo ello es cuestionable. (p.21)

¿Es conceptualmente la división el equivalente a realizar una resta reiteradamente? ¿Es mejor definirla como la operación inversa de la multiplicación?

En este trabajo emplearemos un enfoque significativo de la división, es decir, trataremos de alejarnos lo máximo posible de la utilización del algoritmo de la división como un fin en sí mismo y justificaremos su uso por la necesidad de resolver problemas de la vida real integrando los significados de esta operación que exponemos en el siguiente apartado. Este enfoque es uno de los pilares básicos del paradigma constructivista, el cual proporciona entornos de aprendizaje como entornos de vida diaria en lugar de una secuencia predeterminada de instrucciones. Este paradigma además forma la base de las leyes educativas actuales. Concretamente, lo encontramos directamente expuesto en la ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato, donde se indica que “El uso de herramientas matemáticas implica una serie de destrezas que requieren la aplicación de los principios y procesos matemáticos en distintos contextos, ya sean personales, sociales, profesionales o científicos” (p.6993).

Y lo encontramos también en el currículo de la Formación Inicial para Adultos desarrollado en la ORDEN de 18 de noviembre de 2008, de la Consejera de Educación, Cultura y Deporte por la que se establece la organización y el currículo de la Formación inicial para personas adultas en la Comunidad Autónoma de Aragón:

Consiste en un conjunto de habilidades y actitudes útiles para resolver problemas de la vida cotidiana reales o simulados y del mundo laboral, poniendo en práctica procesos de razonamiento que conduzcan a la solución de problemas o a obtener información, adquiriendo progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones que contengan elementos o soportes matemáticos. (p.25024)

Por ello, se considera este enfoque suficientemente justificado y en línea al contexto educativo actual.

1.2 Significados de la división

El significado de la división, al igual que el resto de operaciones básicas, está asociado a las situaciones de índole interno a las matemáticas o bien de la vida real, que resuelve dicha operación. Las acciones que le dan sentido a la división son numerosas, por lo que podemos citar algunas a modo ilustrativo:

- Efectuar un reparto igualitario de una cantidad entre varias personas
- Realizar agrupaciones de una misma cantidad
- Hacer una cantidad varias veces más grande/más pequeña

Resultaría una tarea compleja la enumeración de todas las situaciones posibles (siempre nos dejaríamos alguna), así que debemos recurrir a una clasificación que las agrupe y nos permita describir las situaciones que dan sentido a la división. En este caso hemos seleccionado la clasificación propuesta por Cid, Escolano y Muñoz (2013), donde proponen varias categorías de problemas en función de las tres cantidades que intervienen en la situación (los dos datos y la incógnita). Para este trabajo, y por simplicidad, hemos decidido introducir algunas diferencias con respecto su propuesta, sobre la misma base. Proponemos categorías separadas para el reparto y el agrupamiento, y no diferenciamos la última categoría (CCC), ya que se podría considerar una comparación doble (categoría 3).

Las situaciones quedarían clasificadas en cinco tipos:

1) Estado-Razón-Estado (ERE) con incógnita en la razón (**Reparto**)

Ejemplo de situación:

“Una abuela reparte 100 euros entre sus 5 nietos. ¿Cuántos euros recibe cada uno?”

En este caso la razón (20 €/nieto) es la incógnita.

2) Estado-Razón-Estado (ERE) con incógnita en la cantidad inicial (**Agrupamiento**)

Ejemplo de situación:

“María se gasta 20 euros en camisetas. Si cada camiseta cuesta 5 euros, ¿cuántas camisetas ha comprado María?”

En este caso la incógnita (4 camisetas) está en la cantidad (o estado) inicial.

3) Estado-Comparación-Estado (**Comparación**)

Ejemplo de situación:

“Conchita le da 25 euros a su nieto Juan y 100 a su nieto Alberto. ¿Cuántas veces más dinero le ha dado a Alberto que a Juan?”

En este caso, la incógnita está en la cantidad de veces más (4), pero también se pueden formular situaciones donde la incógnita esté en alguno de los estados, por ejemplo:

“El libro A tiene 300 páginas y el libro B tiene 3 veces menos páginas que el A. ¿Cuántas páginas tiene el libro B?” (respuesta: 100 páginas).

4) Estado-Estado-Estado (**Producto cartesiano**)

En este caso los estados representan los cardinales de dos conjuntos o las medidas de dos cantidades de magnitud, y un tercer estado indica el cardinal de su producto cartesiano.

Ejemplo:

“En un baile hay 3 chicos y varias chicas. Se pueden formar 6 parejas distintas chico-chica entre ellos. ¿Cuántas chicas hay en el baile?”

La incógnita es el segundo estado, que en este caso es “2 chicas”.

5) Razón-Razón-Razón (**Razón entre dos razones**)

Ejemplo:

“Juan mete cinco chicles en cada bolsa y con las bolsas hace varios paquetes del mismo número de bolsas. Si mete 100 chicles en cada paquete, ¿cuántas bolsas mete en cada paquete?”

La incógnita está en la razón ente las otras dos razones, en este caso “20 bolsas en cada paquete”

Aunque en este trabajo, por el tipo de alumnado sobre el que se realizará la intervención, nos centraremos más en el significado de reparto igualitario, la enseñanza debería completarse incorporando el resto de significados que acabamos de comentar.

1.3 Procedimientos de cálculo vinculados al conocimiento conceptual de la división

A pesar de que el objeto de nuestro estudio es el algoritmo de la división, nuestra apuesta por la enseñanza de los algoritmos vinculada a la necesidad de aplicarlos en contextos de resolución de problemas, nos lleva a coincidir con Calvo y Barba (2010) en que “Saber dividir no es dominar el algoritmo de la división, sino poder resolver un cierto tipo de problemas utilizando estrategias que no necesariamente pasan por la ejecución del algoritmo estándar de la división” (p.41).

En el ámbito de la Didáctica de las matemáticas existe consenso en enseñar el algoritmo de la división vinculado a los contextos en los que es necesario realizar una división. Así, Calvo y Barba (2010) apuestan por la enseñanza de técnicas de cálculo, en algunos casos contextualizadas, para preparar la enseñanza de dicho algoritmo. Los autores muestran tres tipos de actividades de enseñanza que entendemos que son previas a abordar la enseñanza del algoritmo de la división dado que critican la identificación que la escuela hace entre una operación y su algoritmo. En concreto proponen los “triángulos de multiplicación” para introducir la división como operación inversa de la multiplicación y, además, ayudar a memorizar las tablas de la multiplicación. También proponen “tiras de actividades de deducción” con la intención de introducir propiedades básicas de la división y enseñar estrategias de cálculo mental, en concreto, proponen la estrategia de descomposición aditiva del dividendo. A continuación mostramos estos tres tipos de actividades que preparan la introducción de los algoritmos de la división.

1.3.1 Triángulos de multiplicación

Calvo y Barba (2010), los presentan como una manera de simbolizar una multiplicación escribiendo en los dos vértices inferiores los factores y en el superior el producto. Ejemplo:

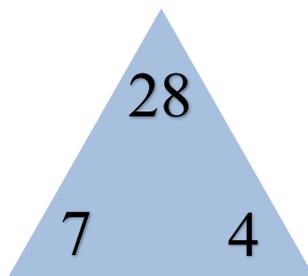


Figura 1. Triángulo multiplicativo (Calvo y Barba (2010)).

Utilizando el triángulo, se conocen no sólo la relación de $7 \times 4 = 28$, sino también $28 : 7 = 4$ y $28 : 4 = 7$.

De esta forma, y poniendo un ejemplo contextualizado, si se propone un problema como “*He contado 28 ruedas, ¿Cuántos coches hay?*”, haría que el cálculo formal $28:7$ se convierta en completar el siguiente triángulo:

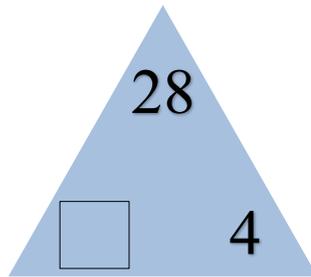


Figura 2. Triángulo multiplicativo como división.

Si no hubiera ningún triángulo multiplicativo que responda exactamente a lo propuesto, se buscará el más cercano, y aparecerá la noción de “residuo”, equivalente al “resto” del algoritmo de la división.

1.3.2 Tiras de actividades de deducción

En este caso, a partir del resultado conocido de una operación, los alumnos deben descubrir otros resultados que están relacionados con el primero, y que habitualmente son el doble o la mitad del anterior. En la Figura 3 se observan cinco de estas tiras.

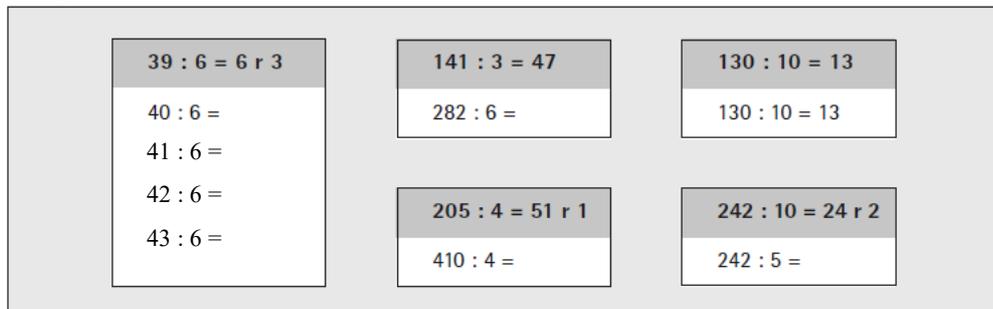


Figura 3. Tiras de actividades de deducción (Calvo y Barba (2010)).

1.3.3 Estrategias de descomposición

Consiste en descomponer la operación solicitada por otras operaciones cuyo cálculo es más sencillo y agregar los resultados de todas las operaciones parciales. Veamos un ejemplo:

$$389 : 4 = (360 : 4) + (29 : 4) = 90 + 7 (r 1) = 97 (r 1)$$

Figura 4. Estrategia de descomposición.

La descomposición aditiva más eficiente es aquella en la que tratamos de descomponer el dividendo como suma de múltiplos del divisor. En el ejemplo, 389 se descompone en la suma de $360 + 29$. Al ser 360 un múltiplo de 4, es posible realizar la división fácilmente, quedándonos 90. 29 no es múltiplo de 4, pero es una cantidad lo suficientemente pequeña para que podamos aproximarla a un múltiplo de 4 (en este caso el 28) quedándonos un resto de una unidad.

Este procedimiento se utiliza habitualmente para realizar divisiones de forma oral o mental, y es recomendable enseñarlas previamente al algoritmo de la división, ya que una vez conocido los alumnos tienden a utilizarlo directamente, bloqueando el uso de estas técnicas.

Existen otras muchas actividades de enseñanza como estas que hemos descrito, antes de introducir y reforzar el algoritmo de la división. Hemos mostrado las que proponen Calvo y Barba (2010) para poner de manifiesto la necesidad de que la enseñanza de los algoritmos se articule mediante conocimientos conceptuales que integren los significados de la división y estrategias de cálculo mental de la división.

1.4 Algoritmos de la división utilizados en la historia

Según Gómez (1998) un algoritmo es:

una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades) en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos. (p.105)

En España, es por todos conocido el algoritmo de “la caja” como el algoritmo de la división de referencia, sin embargo, a lo largo de la historia se han utilizado diferentes algoritmos dependiendo tanto del tiempo como del lugar. Por su importancia histórica, dedicaremos el resto del capítulo a esos algoritmos denominados “históricos”, y en el próximo capítulo se mostrarán algoritmos de la división utilizados en nuestra época.

A lo largo de la historia se han utilizado diversos algoritmos muy diferentes según la cultura que lo ideó, la época en la que se creó e incluso la clase social del que lo usaba. Estamos de acuerdo con Maza (1991) en que, como maestros, para facilitar la comprensión del algoritmo, lo primero es comprenderlo nosotros mismos, y para ello, contemplarlo desde su nacimiento y los obstáculos que hubo que vencer hasta llegar a su forma actual resulta importante. Dado que los algoritmos han evolucionado en paralelo con los sistemas de numeración que han ido utilizando nuestros ancestros resulta necesario que los docentes conozcan la evolución histórica de los algoritmos de la división para tomar decisiones sobre el algoritmo a enseñar en el momento actual.

1.4.1 Método egipcio

Datado en 1650 a.C., el papiro de Rhind nos mostraba cómo los egipcios utilizaban un método basado en la duplicación, que a su vez estaba muy relacionado con el método que utilizaban para la multiplicación (Maza, 1991). Este algoritmo es coherente con el sistema de numeración aditivo que utilizan en aquella época y que ejemplificamos con la operación $420 : 46$ siguiendo los siguientes pasos:

- 1) Se escriben dos columnas, en la de la derecha se coloca el divisor, que va duplicando su valor en cada iteración.
- 2) En la columna de la izquierda se comienza por la unidad y se duplica el número en cada paso, tantas veces como sean necesarias hasta que haya tantos resultados en la columna de la derecha como para que sumen el dividendo.
- 3) La suma de los valores de la izquierda correspondientes a las filas seleccionadas en la columna derecha del paso anterior será el cociente.

Ejemplo: $420 : 46$

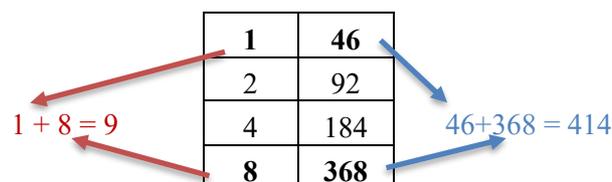


Figura 5. Método egipcio de división.

El resultado buscado es 9 y el resto es $6 = 420 - 414$.

La justificación matemática del este algoritmo se basa en la descomposición del dividendo en potencias de 2 y en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la división. En efecto, si D es el dividendo, d el divisor y k un número natural que toma los valores 0 o 1.

$$D = k d + k 2 d + k 2^2 d + \dots + k 2^n d = d (k + k 2 + k 2^2 + \dots + k 2^n)$$

En nuestro ejemplo:

$$420 = 46 (1 + 2^3) + 6$$

Por lo tanto, el cociente es $1 + 2^3 = 9$, y el resto $420 - 46 (1 + 2^3) = 6$.

1.4.2 Método mesopotámico

En Maza (1991) se explica cómo en la antigua Mesopotamia (2000 a.C.) eran muy conscientes de la división como inversa de la multiplicación y por ello realizaban la división multiplicando el dividendo por el inverso del divisor en base a tablas de inversos ya construidas. Para hacerlo, expresaban los inversos con denominadores en base 60, de forma que, por ejemplo, $\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$ y $\frac{1}{9} = \frac{40}{60^2}$. Al haber divisores como $\frac{1}{13}$ que no permiten dicho desarrollo, de nuevo se recurría a aproximaciones que hacían esta labor fatigosa. Remitimos al libro de Maza para una explicación más detallada.

1.4.3 La Galera

Era un método posicional procedente de un manuscrito veneciano del siglo XVI (Gómez, 1998). El cociente se construye por la derecha, y los minuendos y sustraendos de forma escalonada, por arriba y por debajo del dividendo. Equivale a un algoritmo extendido (ver sección 2.1.2) pero la colocación de los números es distinta.

Ejemplo: 44977 : 382

1)	$\begin{array}{r l l} & 67 & \\ 382 & & 44977 & & 1 \\ & & 382 & & \end{array}$	<p>En 449 el 382 cabe 1 vez</p> <p>Resta: 449-382 = 67</p>
2)	$\begin{array}{r l l} & 29 & \\ & 675 & \\ 382 & & 44977 & & 11 \\ & & 3822 & & \\ & & 38 & & \end{array}$	<p>382 se escribe debajo de nuevo</p> <p>En 677 el 382 cabe 1 vez</p> <p>Resta: 677-382 = 295</p>
3)	$\begin{array}{r l l} & 28 & \\ & 293 & \\ & 675 & \\ 382 & & 44977 & & 117 & \text{(cociente)} \\ & & 38224 & & \\ & & 387 & & \\ & & 26 & & \end{array}$	<p>En 2957 el 382 cabe 7 veces</p> <p>Resta: 2957-2674= 283</p>

Figura 6. Método de la Galera

Esta técnica fue usada hasta el siglo XVII en nuestro país, en la que se sustituyó por la técnica actual (lo que conocemos como algoritmo “tradicional”) y que se tratará en profundidad en el próximo capítulo. Adelantamos que en nuestra propuesta deseamos enseñar cualquiera de estos tres algoritmos por diferentes razones.

En el caso de los métodos egipcios y mesopotámicos porque no se basan en el sistema de numeración decimal y en el caso del método de la galera por la dificultad a la hora de escribir las restas parciales a pesar de que en este algoritmo los números se descomponen según la base decimal.

CAPÍTULO 2. PROPUESTAS DE ENSEÑANZA DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

2.1 Métodos de enseñanza del algoritmo de la división

En la actualidad hay disponibles diferentes algoritmos para realizar la operación de la división, desde los más eficaces (como el tradicional) hasta otros menos eficaces pero que permiten una mayor comprensión del algoritmo. De entre todos ellos tendremos que seleccionar aquel (o aquellos) que utilizaremos en nuestra propuesta didáctica. Comenzaremos la exposición con el algoritmo tradicional, ya que será la base sobre la que compararemos los demás.

2.1.1 Tradicional

Es el algoritmo más conocido en España en la actualidad, y cuyo desarrollo explican Cid, Escolano y Muñoz (2013):

1. Se escribe el dividendo y a su derecha el divisor encuadrado por una línea vertical y otra horizontal.
2. Si tanto dividendo como divisor acaban en cierto número de ceros, se mira cuál de los dos acaba en menos ceros y esos ceros se suprimen tanto al dividendo como al divisor. Una vez terminada la división, al resto hay que añadirle tantos ceros como inicialmente se suprimieron al dividendo o al divisor.
3. Empezando por la izquierda, se toman en el dividendo tantas cifras como tenga el divisor. Si el número así elegido es menor que el divisor se toma una cifra más.
4. Se estima cuántas veces cabe el divisor en el número elegido (para esto se necesita una técnica auxiliar) y la cifra obtenida en la estimación se escribe debajo del divisor y será la primera cifra del cociente.
5. Se multiplica dicha cifra por la cifra de las unidades del divisor y el resultado se lleva a la cifra de las unidades del número elegido en el dividendo para efectuar una resta.
6. A la cifra de las unidades de este último número se le añaden el número de decenas necesarias para que la resta sea efectuable y el resultado de la resta se escribe debajo en la misma columna.
7. Se multiplica de nuevo la primera cifra del cociente por la cifra de las decenas del divisor y al resultado se le suma la cifra de las decenas añadidas para efectuar la resta anterior. El número así obtenido se lleva a la cifra de las decenas del número elegido en el dividendo para proceder a restar. Se reitera el procedimiento hasta terminar de multiplicar la cifra del cociente por todas las cifras del divisor.
8. Si, como consecuencia de una estimación errónea, la operación resulta imposible o el número que aparece escrito bajo el dividendo resulta ser mayor o igual que el divisor, debe borrarse la cifra del cociente y el número escrito debajo del dividendo y comenzar de nuevo.
9. Una vez acabado este proceso se baja la cifra siguiente del dividendo y se coloca a la derecha del último número escrito bajo el dividendo. Con este nuevo número así obtenido, y en el supuesto de que sea mayor o igual que el divisor, se procede a estimar cuántas veces cabe en el divisor, se

escribe el resultado de la estimación como segunda cifra del cociente y se repite el procedimiento anterior hasta agotar todas las cifras del dividendo.

10. Si el número al que hacemos referencia en el apartado anterior es menor que el divisor, se escribe un cero como siguiente cifra del cociente y en el dividendo se baja la cifra siguiente y se comienza de nuevo la estimación. Si no existe cifra siguiente que bajar la división habrá terminado.

11. Por último, una vez finalizado el procedimiento, el número que aparece escrito debajo del divisor será el cociente de la división y el último número escrito debajo del dividendo será el resto. (p. 139-140)

Su representación simbólica, bien conocida, consiste en la utilización de “la caja”:

$$\begin{array}{r}
 78315 \quad | \quad 36 \\
 \underline{63} \\
 271 \\
 \underline{195} \\
 15
 \end{array}$$

Figura 7. Algoritmo tradicional (Gómez, 1998, p.140).

Y, aunque es un algoritmo tremendamente eficiente, esta eficiencia provoca ciertas dificultades en su aprendizaje, que serán desarrolladas en el apartado 2.2 de este capítulo. Previamente continuaremos mostrando algunas variantes de este algoritmo tradicional.

2.1.2 Tradicional extendido con apoyos

En este caso, el paso 6 del algoritmo tradicional (la resta) no se realiza directamente, sino que se escribe de forma explícita y se calcula como una operación sustractiva convencional. Este apoyo hace al algoritmo menos eficiente, pero minimiza el número de errores propios de realizar las restas directamente, y en España suele enseñarse como un algoritmo intermedio antes de introducir el tradicional. En la Figura 8 vemos un ejemplo.

$$\begin{array}{r}
 78315 \quad | \quad 36 \\
 \underline{- 72} \\
 63 \\
 \underline{- 36} \\
 271 \\
 \underline{- 252} \\
 195 \\
 \underline{- 180} \\
 15
 \end{array}$$

Figura 8. Algoritmo tradicional extendido (Gómez, 1998, p.141).

2.1.3 Anglosajón

Es el algoritmo extendido, pero con una disposición gráfica distinta. Se colocan las cifras del cociente encima del dividendo, justo encima de la última cifra significativa de la resta parcial que corresponde. Puede verse un ejemplo en la Figura 9.

$$\begin{array}{r}
 2175 \\
 36 \overline{) 78315} \\
 \underline{72} \\
 63 \\
 \underline{36} \\
 271 \\
 \underline{252} \\
 195 \\
 \underline{180} \\
 15
 \end{array}$$

Figura 9. Algoritmo anglosajón.

Gómez (1998) nos confirma las dos ventajas fundamentales del algoritmo anglosajón:

- Es imposible olvidar los ceros intercalados o los ceros del final.
- El número de cifras del cociente está reflejado de entrada en cuanto se ha puesto la primera en su sitio.

Como su nombre indica este método es que se enseña en Estados Unidos y algunos otros países del continente americano.

2.1.4 Tradicional expandido

En esta ocasión, se incide en la noción de “número”, en detrimento del de cifra, porque en cada paso se completa el dividendo hasta el orden de las unidades, de forma que se hace patente la división parcial que se hace en cada iteración. Es menos eficiente que los anteriores ya que es necesario escribir más cifras, sin embargo, la noción de “número” se ve reforzada en el dividendo (aunque no en el cociente).

$$\begin{array}{r}
 78315 \quad | \quad 36 \\
 - 72000 \\
 \hline
 6315 \\
 - 3600 \\
 \hline
 2715 \\
 - 2520 \\
 \hline
 195 \\
 - 180 \\
 \hline
 15
 \end{array}$$

Figura 10. Algoritmo tradicional expandido (Gómez, 1998, p. 141).

Una variante inusual del algoritmo “tradicional expandido” consistiría en escribir el cociente con números en lugar de cifras. A continuación, mostramos una variante de este algoritmo que ejemplificamos con la división 78315 entre 36:

7	8	3	1	5	3	6
_ 7	2	0	0	0	2	0
	6	3	1	5		1
_ 3	6	0	0	0		7
						0
	2	7	1	5		5
_ 2	5	2	0	0	2	1
						7
	1	9	5	0		5
_ 1	8	0	0	0		
	1	5	0	0		

Figura 11. Algoritmo tradicional expandido usando números.

2.1.5 División en columnas

Habitualmente los algoritmos se explican directamente olvidando la contextualización, por ello Calvo y Barba (2010) nos presentan un ejemplo que sí lo contextualiza con el significado de reparto igualitario:

2) En total se reparten 30 naipes, por lo que ya sólo quedan 97 por repartir	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="width: 15%;">127</td><td style="width: 15%;">Luis</td><td style="width: 15%;">Paco</td><td style="width: 15%;">Hugo</td></tr> <tr><td>-30</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><td>97</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>-90</td><td>30</td><td>30</td><td>30</td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>-6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>42</td><td></td><td></td></tr> </table>	127	Luis	Paco	Hugo	-30	10	10	10	97				-90	30	30	30	7				-6	2	2	2	1	42			1) Empieza repartiendo 10 naipes a cada uno 3) En la segunda vuelta se reparten 30 naipes a cada uno 5) Al quedar 7 sólo se pueden repartir 2 naipes a cada uno
127	Luis	Paco	Hugo																											
-30	10	10	10																											
97																														
-90	30	30	30																											
7																														
-6	2	2	2																											
1	42																													
4) En total se reparten 90 naipes, por lo que ya sólo quedan 7 por repartir																														

Figura 12. Simbolización de una división en columnas (Calvo y Barba, 2010)

Es un sistema basado en repartos sucesivos, donde escribimos en la columna de la izquierda el número de elemento a repartir (el dividendo), que en el ejemplo de la Figura 12 es 127, y dibujamos una columna por cada persona que participa en el reparto (el divisor). A continuación, entregamos una misma cantidad a cada uno de ellos cuya suma sea inferior a la cantidad inicial. Dicha suma se resta en la columna de la izquierda de la cantidad inicial y se repite este proceso tantas veces como sea necesario hasta que lo que queda en la columna de la izquierda (el resto) sea menor que el número de personas que participan en el reparto.

Cuando ya se domine este proceso, puede abreviarse escribiendo únicamente una columna que representa a todas las personas que participan en el reparto (ver Figura 13), ya que lo que importa no es quienes son las personas sino cuantas son.

127	Luis	Paco	Hugo	→	127	entre 3
-30	10	10	10		-30	10
97					97	
-90	30	30	30		-90	30
7					7	
-6	2	2	2		-6	2
1	42				1	42

Figura 13. Abreviación de una división en columnas (Calvo y Barba, 2010).

También hubiera sido posible abreviarlo repartiendo cantidades más grandes en cada una de las iteraciones, reduciendo el número de éstas, pero eso dependerá enteramente del criterio del alumno (ver Figura 14), lo que permite acercarnos a la atención a la diversidad, permitiendo que se resuelva de diversas maneras en función de las capacidades del alumno.

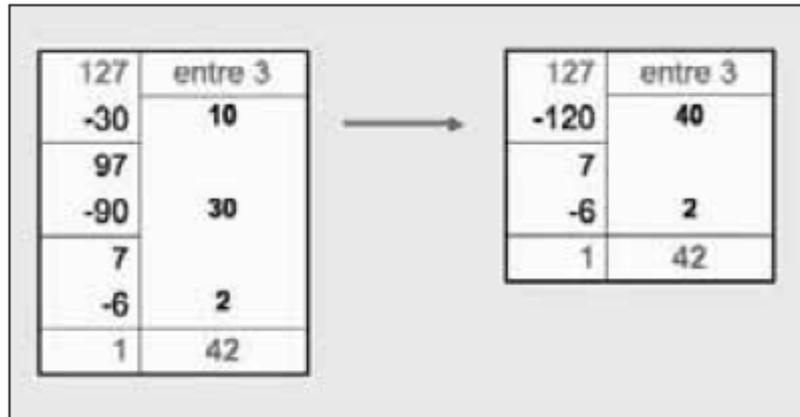


Figura 14. 2ª abreviación de una división en columnas (Calvo y Barba, 2010).

Entre las ventajas principales de este método se encuentran:

- 1) Se trabaja con cantidades y no con dígitos (cifras).
- 2) No exige ajustes ni al pasar a dividir por dos cifras ni a dividendos sexagesimales.

Nótese que también puede realizarse con una “caja” similar a la del algoritmo tradicional:

4368	24
- 2400	100
1968	
- 1200	50
768	
- 720	30
48	
- 48	2
0	182

Figura 15. División en columnas (Calvo y Barba, 2010).

Y también podría utilizarse con notaciones de apoyo para facilitar las multiplicaciones:

$\begin{array}{r} 7 \ 8 \ 3 \ 1 \ 5 \\ - 7 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 6 \ 3 \ 1 \ 5 \\ - 3 \ 6 \ 0 \ 0 \\ \hline 2 \ 7 \ 1 \ 5 \\ - 2 \ 5 \ 2 \ 0 \\ \hline 1 \ 9 \ 5 \\ - 1 \ 8 \ 0 \\ \hline 1 \ 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} \overline{3 \ 6} \\ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \\ 7 \ 0 \\ 5 \\ \hline 2 \ 1 \ 7 \ 5 \end{array}$	$\begin{array}{l} 36 \times 1 = 36 \\ 36 \times 2 = 72 \\ 36 \times 3 = 108 \\ 36 \times 4 = 144 \\ 36 \times 5 = 180 \\ 36 \times 6 = 216 \\ 36 \times 7 = 252 \\ 36 \times 8 = 288 \\ 36 \times 9 = 324 \end{array}$
--	---	--

Figura 16. En columnas con anotaciones de apoyo.

Queremos hacer notar que este método que proponen Calvo y Barba (2010) es el que hemos descrito en el apartado anterior con el nombre de “variante del algoritmo tradicional expandido”. Desde nuestro punto de vista este algoritmo presenta grandes ventajas a la hora de introducir por primera vez el algoritmo de la división a los escolares de Educación Primaria porque:

- 1º) Trabaja con números en lugar de cifras, lo que facilita la comprensión, y
- 2º) La distribución espacial del algoritmo se asemeja a la del tradicional a pesar su formato es, evidentemente, mucho menos eficaz.

En resumen, la pérdida de eficacia se desea compensar con la perspectiva de mejorar la comprensión del algoritmo.

2.1.6 ABN

El método ABN (abierto basado en números) propuesto en Martínez (2011), está extendiéndose actualmente en España, existiendo ya algunos libros de texto que lo desarrollan para la etapa de Primaria.

En ABN partimos de una celda con 3 columnas:

- En la celda superior derecha se escribe la cantidad de elementos que participan en el reparto.
- En la primera columna se pone la cantidad que nos queda por repartir en cada momento.
- En la segunda columna se escriben las cantidades que vamos cogiendo para repartir.
- Por último, en la tercera columna siempre indicaremos la cantidad repartida.

Planteamos el mismo ejemplo que hemos usado anteriormente (78315:36):

		:36
78315		

Figura 17. Método ABN. Planteamiento inicial.

Comenzamos repartiendo una cantidad múltiplo de 36, por ejemplo 72000:

		:36
78315	72000	2000
6315		

Figura 18. Método ABN. Primer reparto.

Y continuamos efectuando los repartos:

		:36
78315	72000	2000
6315	3600	100
2715	1800	50
915	720	20
195	190	5
5		2175

Figura 19. Método ABN. Resolución completa.

El resultado es la suma de todas las cantidades repartidas en la tercera columna.

Se puede comprobar como es un método conceptualmente similar al tradicional expandido, aunque explicitando cada uno de los repartos parciales, a diferencia de éste.

También es similar a la división en columnas del apartado anterior, aunque utilizando un soporte gráfico diferente, muy alejado del formato del tradicional y que puede dificultar el paso a la enseñanza del algoritmo tradicional.

2.2 Dificultades del algoritmo de la división tradicional con relación a otros

Bernardo Gómez nos presenta en Gómez (1998) las dificultades intrínsecas al algoritmo de la división:

- a) Es un algoritmo de izquierda a derecha.
- b) Hay que buscar dos resultados en lugar de uno: cociente y resto.
- c) Conlleva ciertas prohibiciones (resto < divisor).
- d) Es un algoritmo semiautomático: hay que descomponer, estimar, encuadrar, comprobar y si procede, rehacer.
 - Descomponer para decidir con qué parte del dividendo empezar. ¿Cuántas cifras se cogen?
 - Estimar para aproximarse a la cifra del cociente. ¿Cuántas caben?
 - Encuadrar: la cifra obtenida en la estimación debe convertirse en un producto que no sobrepase la cantidad estimada en el primer paso, pero que sea el más próximo posible.
 - Comprobar que es correcto el paso anterior.
 - Rehacer si se estimó mal.
- e) Necesita de los otros algoritmos, especialmente de la resta “llevando” y de la multiplicación.

Además, añadimos, se trabaja con cifras, no con números, así que es difícil justificar frases comunes como “bajo el 6” al dividir 126:4.

Todos estos argumentos refuerzan que el algoritmo de la división es el más difícil de todos, lo que tendrá que tenerse en cuenta en nuestra propuesta para llegar a un compromiso entre la búsqueda de la comprensión y la pérdida de eficacia del algoritmo al aumentar el número de signos de su representación. Además, las dificultades enumeradas sugieren establecer recomendaciones para la enseñanza que, básicamente, se resumen en que las representaciones simbólicas estén basadas en acciones físicas o mentales que los alumnos hagan o rememoren pensando en un determinado contexto problemático.

2.3 Criterios de elección para una propuesta didáctica

En Calvo y Barba (2010) se muestran los criterios que deberían utilizar los docentes para decidir qué algoritmo de la división enseñar:

- Eficiencia del procedimiento
- Transparencia de su justificación
- Potencial en relación a futuros aprendizajes

Comencemos el análisis por la *eficiencia del procedimiento*. De entre todos los métodos actuales presentados, el más eficiente es sin duda el tradicional abreviado sin apoyos (explicado en la sección 2.1.1), sin embargo, este método al trabajar con cifras y no con “números” potencialmente se convierte

en una aplicación de una serie de reglas sin un contexto detrás. Al trabajar desde una perspectiva de la didáctica proponemos perder eficacia para ganar comprensión y, en caso de utilizar el algoritmo tradicional, utilizar alguna de sus variantes menos eficientes (extendido con apoyos o expandido) en lugar del abreviado.

La *transparencia en la justificación* hace referencia a que en el aprendizaje no se oculten los pasos y procesos con los que se construyen los mismos. También exige que “los materiales y recursos simbólicos que se empleen reflejen de la forma más fiel posible la realidad que toman como referencia” (Martínez, 2011, p.99). Atendiendo a este criterio, de entre todos los propuestos, la división en columnas (comentado en la sección 2.1.5) y el método ABN (comentado en la sección 2.1.6) serían los más adecuados, aunque el método expandido con apoyos estaría muy cerca de ellos, y podría llegar a alcanzar la misma transparencia si en el cociente explicitamos cada uno de los repartos parciales, alineando los cocientes de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r}
 78315 \\
 \underline{72000} \\
 6315 \\
 \underline{3600} \\
 2715 \\
 \underline{2520} \\
 195 \\
 \underline{180} \\
 15
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 36 \\
 \hline
 2000 \\
 \\
 100 \\
 \\
 70 \\
 \\
 5 \\
 \hline
 2170
 \end{array}$$

Figura 20. Método tradicional expandido con cociente modificado.

Todos estos métodos evitarían el utilizar “cifras” para utilizar “números”.

El *potencial en relación a futuros aprendizajes* nos muestra la importancia de que el método utilizado sirva como base de aprendizajes futuros, de forma que no se restrinja al ámbito que nos ocupa (en este caso la división) y nos cierre caminos en el futuro. En este aspecto está claro que el algoritmo tradicional en cualquiera de sus variantes es el que más aceptación tiene actualmente en España. En nuestro caso será fundamental el valorar la etapa educativa en la que se produzca la propuesta de enseñanza y el contexto de los alumnos. Por ejemplo, el método ABN favorece la contextualización del problema con relación a otros, pero puede ser que evite que los alumnos de Primaria reciban apoyos dentro de su familia, ya que no conocen este método. En estas condiciones, en el caso de iniciar a los alumnos de tercer curso de Educación Primaria en la enseñanza del algoritmo, nos decantaríamos por el algoritmo tradicional expandido con cociente modificado (ver Figura 20) sustentado en situaciones problemáticas que atiendan a los significados de la división.

2.4 Nuestra propuesta didáctica

En el contexto de esta propuesta didáctica veremos que hay un criterio no nombrado anteriormente y que es muy relevante para nuestra propuesta: el conocimiento previo de los alumnos. Al tratarse de Educación para Adultos, todos ellos recibieron una enseñanza basada en el algoritmo tradicional abreviado en su infancia, por lo que es un método que conocen y que serán capaces de utilizar con mayor o menor soltura. Por ello consideramos que el algoritmo tradicional o alguna de sus variantes deberá utilizarse como base para la propuesta.

En Gallardo (2010), se expone que el punto de partida para llegar a comprender un determinado algoritmo se sitúa en el trabajo con materiales manipulativos, siendo fundamental la utilización de

algoritmos extendidos o desarrollados para ayudar a los alumnos a establecer conexiones adecuadas entre el manejo de los objetos concretos y el algoritmo estándar. Nuestro posicionamiento es que todo proceso de enseñanza se articule a partir de situaciones problemáticas y, en este contexto, resultará necesario establecer conexiones entre la resolución de problemas y las acciones simbólicas de los cálculos de la operación que resuelve esos problemas.

Teniendo en cuenta el resto de criterios de elección y adaptándonos a las características de nuestros alumnos hemos optado por un método tradicional con apoyos, realizado por fases y repartiendo la mayor cantidad de unidades posible en cada fase. El objetivo es no cambiarles un formato que ya conocen, pero a la vez dotar de significado al algoritmo. Utilizaremos apoyos explicitando las centenas, decenas, unidades y proponiendo columnas de apoyo en las divisiones con dos cifras, como se muestra en la siguiente figura:

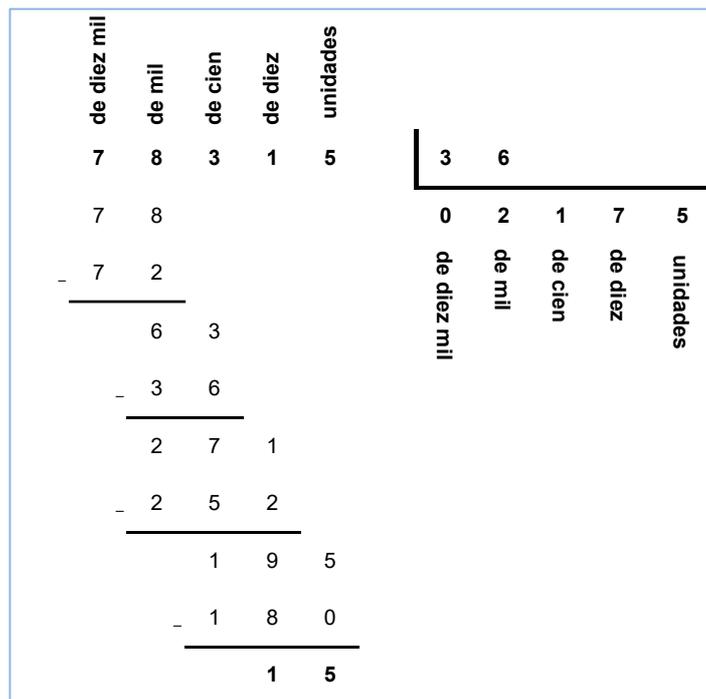


Figura 21. Propuesta de división con apoyo.

Se realizará un reparto por fases, realizando una pregunta para cada fase del reparto, que aplicado al ejemplo $100 : 6$ serían:

“1ª pregunta: Con 1 centena de puntos, ¿puedo dar alguna centena a cada una de las 6 personas?”

Respuesta: No, entonces tengo que cambiar la centena por 10 decenas. Ahora tengo 10 decenas para repartir

2ª pregunta: Con 10 decenas, ¿puedo dar alguna decena a cada una de las 6 personas? Respuesta: Sí, puedo dar 1 decena y me quedan 4 decenas sin repartir. Ahora tengo que cambiar las 4 decenas a unidades, y tengo 40 unidades para repartir.

3ª pregunta: Con 40 unidades, ¿puedo dar alguna unidad a cada una de las 6 personas? Respuesta: Sí, puedo dar 6 unidades y me quedan 4 unidades sin repartir.

Ahora reconstruyo la cantidad que he repartido y veo que el cociente es 16 unidades. También veo que lo que queda sin repartir, el resto, es 4 unidades.”

de cien	de diez	unidades			
1	0	0	6		
1	0		0	1	6
	4	0	de cien	de diez	unidades
		4			

Figura 22. Propuesta de reparto por fases.

El material manipulativo utilizado serán placas, barras y puntos, que representan la centena, la decena, y unidades respectivamente. Se elige este material por su sencillez de uso y su fácil reproducción, ya que la propuesta se realizará a un grupo numeroso de alumnos.

Hemos desechado propuestas como la división en columnas, debido al conocimiento previo que tienen nuestros alumnos y que provocaría un rechazo hacia métodos muy diferentes a lo que conocen. En esta intervención buscaremos que comprendan el algoritmo de la división tradicional aquellos que ya tienen un manejo instrumental del mismo y reforzárselo a aquellos que no, y para ello, es fundamental que se sientan cómodos con la propuesta elegida.

Nuestra intervención se basará en lo desarrollado en Escolano (2004), propuesta que se mostró adecuada para un grupo de primaria, pero realizando las necesarias adaptaciones para un grupo de adultos. Las etapas base serán las mismas (enseñanza del concepto de reparto igualitario, enseñanza del algoritmo de la división y enseñanza de nuevos significados de la división), pero se ampliará con una etapa previa de refuerzo de la comprensión del sistema de numeración, quedando cuatro etapas en total.

Antes de diseñar la propuesta se ve necesario realizar una prueba diagnóstica que nos permita adaptar la intervención a las necesidades específicas del grupo-clase, adultos de entre 55 y 87 años que están cursando un curso de Formación Inicial para Adultos en el C.P.E.P.A. Juan José Lorente, de Zaragoza. Dicha prueba será la que dé comienzo al marco experimental de este trabajo, y se desarrolla por completo en el capítulo 3.

MARCO EXPERIMENTAL

CAPÍTULO 3. PRUEBA DIAGNÓSTICA PARA OBSERVAR LA COMPRESIÓN DE LA DIVISIÓN Y LA UTILIZACIÓN DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN EN UN GRUPO CLASE DE EDUCACIÓN DE PERSONAS ADULTAS

3.1 Contexto del centro

3.1.1 Descripción del contexto socioeconómico del centro y su entorno

El Centro de Educación de Personas Adultas “Juan José Lorente” está situado en Zaragoza, junto a la Vía Hispanidad, en el antiguo Colegio Público "Pedro Arnal Caveró" del Barrio de las Delicias (antigua Parcelación Barcelona).

Es un centro público y, por tanto, abierto a todo el alumnado que reúna los requisitos académicos establecidos por la ley, independientemente de su raza, sexo o creencias religiosas. Se manifiesta aconfesional y respetuoso con todas las creencias. Igualmente se manifiesta por el pluralismo ideológico y por la renuncia a todo tipo de adoctrinamiento.

El centro cuenta ya con una larga historia que comenzó en el barrio Oliver, en el año 1984, y que ha ido cambiando de acuerdo con las posibilidades de cada momento. Comparte instalaciones con el *Equipo de Orientación Educativa de Infantil y Primaria nº 3* y con una *Oficina de Convivencia Escolar*, ambas dependientes de la DGA.

3.1.1.1 Características generales de los alumnos del centro

El alumnado en el centro presenta una gran diversidad, aunque a diferencia de un centro de primaria, las características de los alumnos dependen en gran medida del nivel en el que están matriculados. La tipología de alumnado se puede dividir en cuatro grupos diferentes mostrados en la Tabla 1.

Tabla 1. Niveles educativos en la enseñanza a adultos

Grupo	Aspectos socio-personales
Enseñanza de Español (Nivel I)	En este grupo están matriculados alumnos que, o bien llevan poco tiempo en España, o bien a pesar de llevar bastante tiempo, por motivos diversos (escasa interacción, etc.) no han adquirido unas competencias básicas en el uso del español que les permita comunicarse correctamente. Un gran porcentaje de ellos tiene al árabe como su lengua materna, y la distribución por género es más o menos equitativa. A continuación, por número de alumnos, vendrían los procedentes de países africanos (Senegal especialmente) y de países del Este de Europa.
Enseñanza de Español (Nivel II)	Son alumnos que normalmente provienen de Español Nivel I, o que desde el comienzo tienen ya adquiridas capacidades básicas de lectura/escritura que les permite hacerse entender en un buen número de contextos. En las clases perfeccionan dichas competencias básicas y se produce una inmersión lingüística que en muchos casos necesitan.
FIPA (Iniciales nivel I y II)	La Formación Inicial para Adultos promueve y facilita el enriquecimiento integral de la persona, así como su participación en el desarrollo socioeconómico y cultural. Es la preparación (Primaria) de ESPA (Educación Secundaria para Adultos). En ocasiones son alumnos que ya desarrollaron su carrera profesional (o que se dedicaron a labores del hogar) y que al alcanzar la edad de la jubilación quieren

	<p>profundizar el conocimiento de la Lengua y las Matemáticas que en su momento no pudieron adquirir.</p> <p>En otras ocasiones se trata de alumnos cuyo objetivo final es poder obtener el título de Secundaria (ESPA), y que deben adquirir el nivel FIPA previamente.</p>
ESPA	<p>Alumnos jóvenes en su mayor parte (menos de 30 años) que no terminaron la Enseñanza Secundaria y que tienen como objetivo el conseguir el título de la E.S.O. La Enseñanza de Secundaria Para Adultos refleja los contenidos mínimos que una persona debe adquirir. Además, también están matriculadas personas que estando trabajando, y de una edad más avanzada (entre 35 y 50 años), persiguen el mismo fin, bien por necesidades laborales o por orgullo personal.</p>

3.2 Contexto del aula y del alumnado

3.2.1 Descripción de las características espaciales y materiales del aula

Las clases de FIPA I, donde se han realizado las intervenciones didácticas, se imparten en el aula 5, que presenta la siguiente configuración:

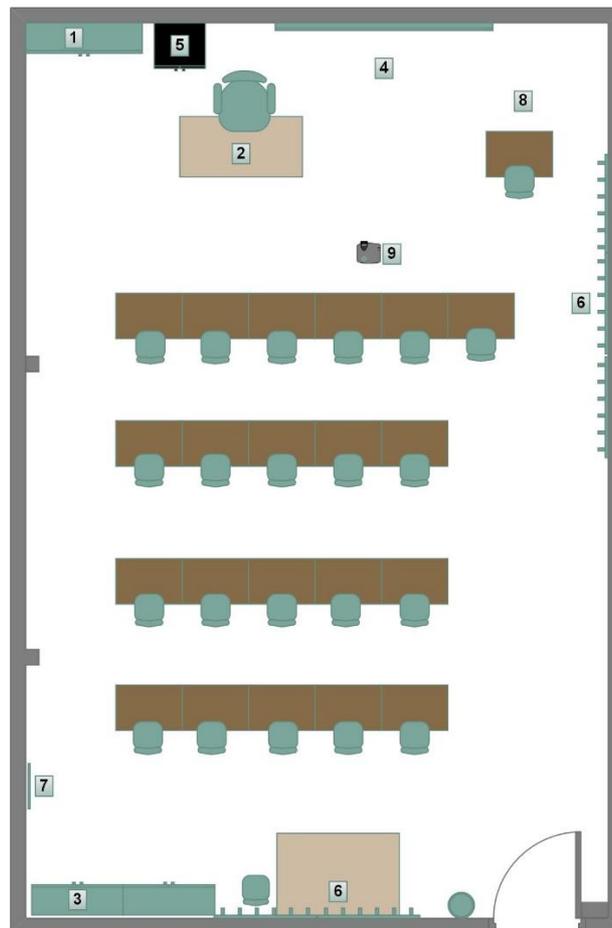


Figura 23. Plano de clase.

Tabla 2. Equipamiento del aula

Núm.	Elemento	Descripción
1	Armario principal	Se guarda todo el material didáctico que se reparte a los alumnos: fotocopias, libros de repaso, etc.
2	Mesa del maestro	Contiene el material fungible (pinturas, grapadora, tijeras, tizas) y gafas graduadas para alumnos que se las hayan olvidado. Cuando se utiliza el ordenador portátil, se apoya en esta mesa.
3	Estanterías	Contiene libros de lectura (para las clases de lengua e inglés), juegos y material extra como vasos o platos para celebraciones.
4	Pizarra y pantalla para el proyector	La pantalla para el proyector es desplegable desde el techo.
5	Armario del material audiovisual	Contiene un ordenador portátil, así como todos aquellos elementos necesarios para su uso (cable de sonido, mando del proyector, etc.). En su parte inferior tiene una televisión y un vídeo.
6	Perchas	Utilizadas para colgar prendas en invierno.
7	Espejo	
8	Pupitre auxiliar	Se usa puntualmente en aquellas ocasiones en que el número de alumnos excede la capacidad del aula. También sirve como mesa auxiliar al maestro.
9	Proyector	Colgado del techo. Conectado al ordenador (5).

Se utiliza mucho material fotocopiado como apoyo para las clases, obtenido principalmente de libros de texto de referencia. Esto es especialmente importante en aquellos cursos donde los recursos de los alumnos son menores (fundamentalmente en “Español como Lengua Extranjera”). Siempre se intenta que no haya excedentes en los materiales, pero en caso de que así sea, se guardan en el armario (1), de forma que estén disponibles para alumnos que hayan faltado a clase, o incluso como material complementario para aquellos alumnos que terminan antes los ejercicios.

Como las clases son largas (1 hora y 50 minutos habitualmente), se intentan dinamizar utilizando materiales audiovisuales. Es muy habitual utilizar el ordenador portátil del armario (5) para buscar aquellas palabras más difíciles de comprender por los alumnos y proyectar imágenes de las mismas. Para ello se utiliza el ordenador, el proyector (9), y la pantalla desplegable desde el techo (4).

En la mesa del maestro (2) se guardan pinturas para aquellos ejercicios que así lo requieran (ya que no todos los alumnos disponen de acceso en casa a las mismas), pegamento, grapadora, tijeras, etc.; pero es especialmente interesante el que también se tengan dos pares de gafas graduadas, para aquellas ocasiones en que un alumno tenga problemas de hipermetropía y se ha olvidado las gafas en casa. Este aspecto es digno de destacarse, y propio de un centro de adultos que se adapta a su tipo de alumnado.

La utilización de la pizarra (4) es habitual, para aclarar o explicar conceptos.

3.2.2 Descripción de las características personales del alumnado

3.2.2.1 Características de los alumnos del marco experimental

La fase experimental de este trabajo se realizó en el grupo de “FIPA I C”, cuyo horario lectivo son los lunes de 18:45 a 20:35 y miércoles de 18:45 a 20:35. Los alumnos de este curso tienen en general

una buena actitud y ganas de aprender. La relación de amistad entre la mayoría de ellos es fuerte, como se demuestra en que algunos son amigos y quedan fuera del colegio, o que se embarcan en actividades conjuntas como teatro, etc. Muchos llevan varios años matriculados en este mismo centro, y consideran las clases como parte de su vida.

En general son respetuosos con el maestro, aunque resulta difícil el que compartan o abran su mente a los puntos de vista de otros. Tienden a ser inflexibles en su opinión acerca de determinados temas (extranjeros, tradiciones, forma de hacer las cosas...). Son personas que quieren ampliar sus conocimientos en Matemáticas y Lengua principalmente, por lo que también se les llama a estas clases “Ampliación Cultural”.

La edad del alumnado es avanzada, entre los 55 y los 87 años. En su mayor parte son alumnos que ya desarrollaron su carrera profesional (o dedicados a labores de hogar) y que al alcanzar la edad de la jubilación quieren profundizar en conocimientos del Lenguaje y las Matemáticas que en su momento no pudieron adquirir.

Aunque el total de alumnos matriculados es de 26 (4 hombres y 22 mujeres), de forma habitual asisten a las clases entre 18 y 20 alumnos, que configuran un grupo estable y sobre el que se ha realizado la experimentación. El lenguaje utilizado durante las clases es exclusivamente el español, ya que el 100% de alumnos son de nacionalidad española y tienen el español como su lengua materna.

Debido a una escolarización escasa (en muchos casos dejaron la escuela a los 10 años o incluso antes), la mayoría no presenta un nivel académico acorde a la edad que presentan. En casi todos se observa una gran carencia en estrategias de aprendizaje (aprender a aprender) y también una pasividad inconsciente (en el que prima la búsqueda de una resolución mecánica a cualquier actividad propuesta).

Algunos alumnos del grupo presentan necesidades especiales, principalmente por algún problema médico. Específicamente:

- A10 (capacidades de comunicación oral disminuidas)
- A09 (capacidades cognitivas disminuidas)
- A18, que sufrió un ictus (capacidades cognitivas disminuidas)
- A13, con problemas de movilidad en manos/muñecas
- A05, con visión deficiente.

Se observa cómo los alumnos se sientan siempre en los mismos lugares, según la afinidad que tienen con sus compañeros. Debido a que su posición en la clase es muy importante para este estudio (ya que tienden a ayudarse para resolver los ejercicios), se muestra a continuación dónde está sentado cada uno, junto a su edad, que también es importante para contextualizar al grupo correctamente.

A08 (68)	A16 (72)	A04 (65)	A03 (68)	
A15 (71)	A10 (61)	A12 (73)	A07 (69)	A02 (78)
A13 (66)	A01 (70)	A06 (75)	A19 (73)	A14 (72)
A18 (68)	A05 (87)	A17 (72)	A11 (68)	A09 (56)
A20 (58)				
Maestro				

Figura 24. Disposición habitual de los alumnos en clase.

Otros tres alumnos (A21, A22 y A23), que acuden a clase de forma más intermitente, se suelen sentar en las últimas filas, utilizando si es necesario algún pupitre accesorio.

3.3 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba inicial

En esta sección se detallan el diseño, el desarrollo y los resultados obtenidos en la prueba inicial desarrollada en la primera sesión con los alumnos.

3.3.1 Diseño de la prueba inicial

La prueba tiene como objetivo evaluar tanto la destreza instrumental en la utilización del algoritmo de la división, como la comprensión que tienen de los significados de la misma (siendo especialmente relevante la división como reparto igualitario). Para ello se les solicita la resolución de seis ejercicios, que se enmarcan en una de estas categorías:

1. Conocimiento conceptual de la división y la relación entre sus términos
2. Conocimiento instrumental del algoritmo de la división

Ejercicio 1 (conocimiento conceptual)

Su objetivo es averiguar la comprensión que tienen acerca de los significados de la división, así como la comprensión del lenguaje matemático asociado.

1) Marca con una cruz aquellas frases que te parece que están relacionadas con la división	
<input type="checkbox"/>	Hacer agrupamientos en cantidades iguales
<input type="checkbox"/>	Hacer una cantidad varias veces más pequeña
<input type="checkbox"/>	Repetir una cantidad varias veces
<input type="checkbox"/>	Quitar una parte de una cantidad
<input type="checkbox"/>	Repartir de modo igualitario una cantidad

Ejercicio 2 (conocimiento instrumental)

Tiene como objetivo el averiguar si conocen el algoritmo de la división en su forma más simple, con dividendo y divisor enteros, y divisor de una sola cifra.

2) Realiza la siguiente división	$195 \overline{) 5}$
---	----------------------

Ejercicio 3 (conocimiento instrumental)

Evalúa un aspecto más formal, la identificación de los términos de la división.

3) Los términos de la división de números naturales son: dividendo, divisor, cociente y resto. En la división que acabas de hacer, ¿qué número es el...?	
• Dividendo	_____
• Divisor	_____
• Cociente	_____
• Resto	_____

Ejercicio 4 (conocimiento conceptual)

Tiene como objetivo el ver si son capaces de escribir el enunciado de un problema cuyos datos son conocidos.

4) Inventa el enunciado de un problema que se resuelva con la división $195 : 5$ que has realizado en el ejercicio 2

Ejercicio 5 (conocimiento conceptual)

Evalúa si conocen la relación que existe entre los términos de la división, es decir, si conocen la fórmula que sirve para hacer la comprobación de la división.

5) Hay una fórmula que relaciona el dividendo, el divisor, el cociente y el resto y que sirve para comprobar si has hecho bien la división. ¿La conoces? Escríbela:

Ejercicio 6 (conocimiento instrumental)

Evalúa la utilización del algoritmo de la división con divisor de dos cifras y si sabe realizar la comprobación de la división.

6) Realiza la siguiente división y comprueba el resultado con la fórmula del ejercicio 5

$$105 \overline{) 12}$$

Comprobación:

3.3.2 Desarrollo de la prueba inicial

Fecha: 8/1/2018

Número de alumnos: 17

Duración de la prueba: 20'

Resultados completos escaneados: ANEXO 6

La prueba se realizó al inicio de la sesión. Se comenzó contextualizándoles el trabajo a realizar durante las primeras sesiones, para continuar con la explicación de cada uno de los ejercicios, de forma que los alumnos no tuvieran dudas sobre cómo afrontarlos.

Los resultados mostrados no son analizables directamente, porque a pesar de los esfuerzos por evitarlo, varios alumnos tendían a hacer los ejercicios "en equipo" o al menos apoyándose en sus compañeros, ya que tienen mucho orgullo y les resulta difícil entregar ejercicios en blanco. Se deberá tener en cuenta esta circunstancia en la evaluación de la prueba inicial.

En el ANEXO 5 puede encontrarse la tabla-resumen con los resultados de la prueba, cuyos resultados agregados por categorías se muestran a continuación.

Conocimiento conceptual de la división y la relación entre sus términos

Los alumnos poseen una comprensión muy pobre de los significados de la división. En primer lugar, identifican la división como reparto igualitario, y en menor medida la división como comparación multiplicativa. Tan sólo dos alumnos interpretan la división como medida-agrupamiento y, por lo tanto, como resta reiterada. La escasa comprensión conceptual de los alumnos se pone de manifiesto cuando

11 de los 17 admiten significados inadecuados de la división al confundirla con la resta (quitar una parte de una cantidad) o con la multiplicación (repetir una cantidad varias veces).

En resumen, constatamos que únicamente un alumno de los 17 identifica los tres significados de la división adecuados que indicábamos en el ejercicio 1, sin elegir otros inadecuados (ver Figura 25).

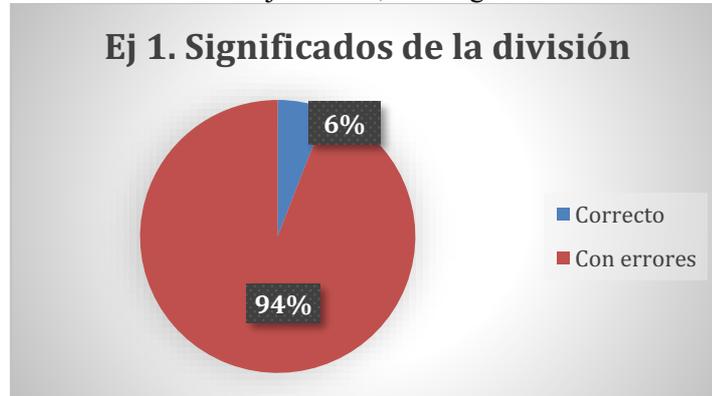


Figura 25. Evaluación inicial: resultados agregados del ejercicio 1.

A la hora de enunciar un problema todos los alumnos que lo intentan utilizan el significado de reparto igualitario. Ahora bien, tan solo 9 de los 17 alumnos escriben un enunciado correcto (ver Figura 26).

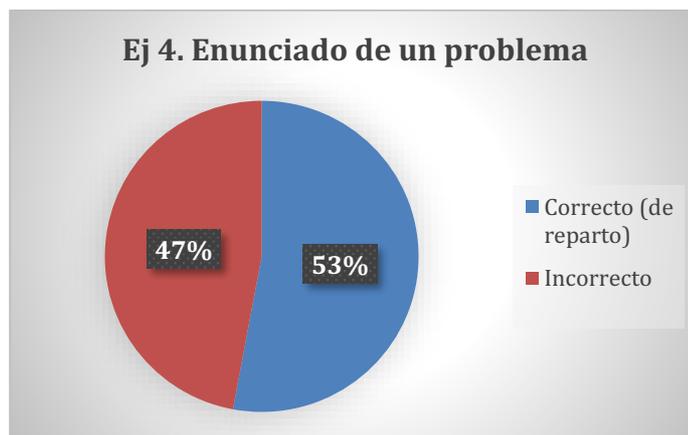


Figura 26. Evaluación inicial: resultados agregados del ejercicio 1.

El quinto ejercicio, de carácter conceptual, indaga en la relación entre los términos de la división. Tan solo un alumno expresa correctamente la relación, 9 alumnos dan muestras de conocerla (aunque yerran al escribirla) y 7 alumnos la desconocen.

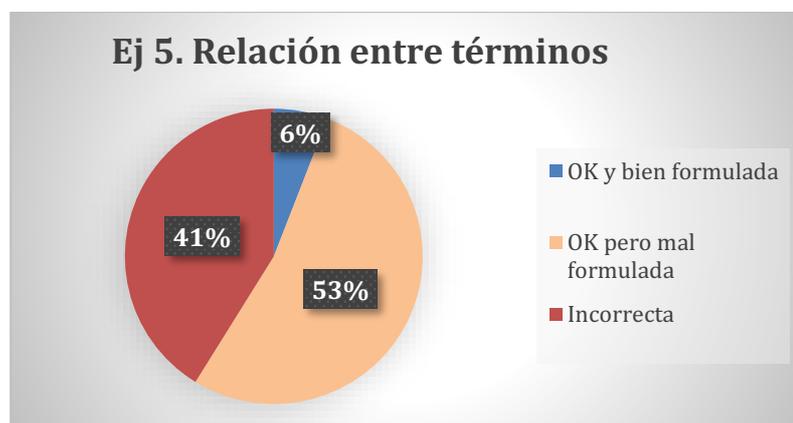


Figura 27. Evaluación inicial: resultados agregados del ejercicio 5.

Entre los alumnos que conocen que hay relación entre términos pero la formulan mal, encontramos las siguientes tipologías de error:

- 1) Olvidan nombrar el dividendo (A04, A03, A15, A01, A13)

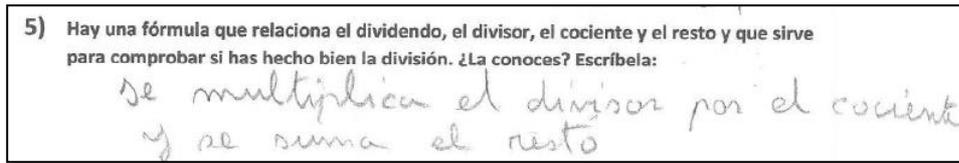


Figura 28. Error en la formulación de la relación entre términos. Tipo 1.

- 2) Se olvidan del resto o confunden términos (A08, A22, A10)

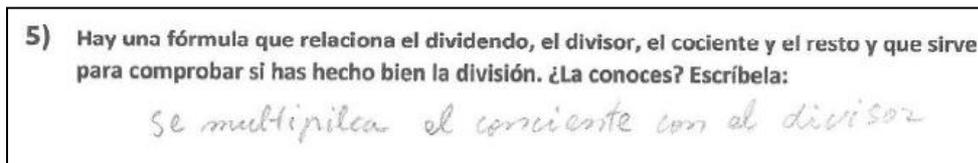


Figura 29. Error en la formulación de la relación entre términos. Tipo 2.

- 3) Conocen la relación, pero no nombran los términos (A16)

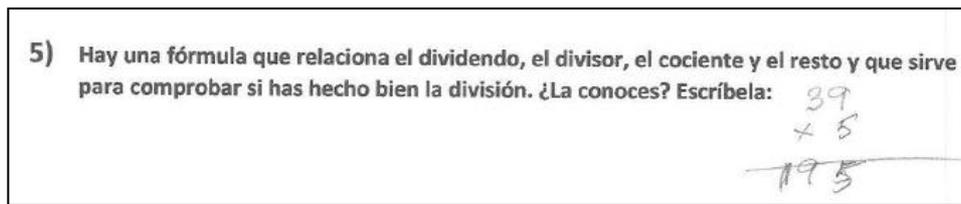


Figura 30. Error en la formulación de la relación entre términos. Tipo 3.

Conocimiento instrumental del algoritmo de la división (ejercicios 2, 3, y 6)

Con respecto a los resultados del ANEXO 5, observamos que dos alumnos (A05 y A09) no sabían hacer las divisiones y se apoyaron en el compañero. Dicha situación se tiene en cuenta en el análisis marcándoles como incorrectos el ejercicio 2.

Los alumnos poseen un conocimiento instrumental del algoritmo de división cuando el divisor es de una cifra. En efecto, los porcentajes de éxito son elevados cuando operan 195:5.



Figura 31. Evaluación inicial: resultados agregados del ejercicio 2.

Los alumnos dan muestras de identificar los términos de la división a pesar de que los porcentajes de éxito descienden hasta el 76%:



Figura 32. Evaluación inicial: resultados agregados del ejercicio 3.

Sin embargo, el porcentaje de éxito disminuye cuando los alumnos realizan divisiones en las que el divisor es un número de dos cifras, como se constata en los resultados de la división 105:12.

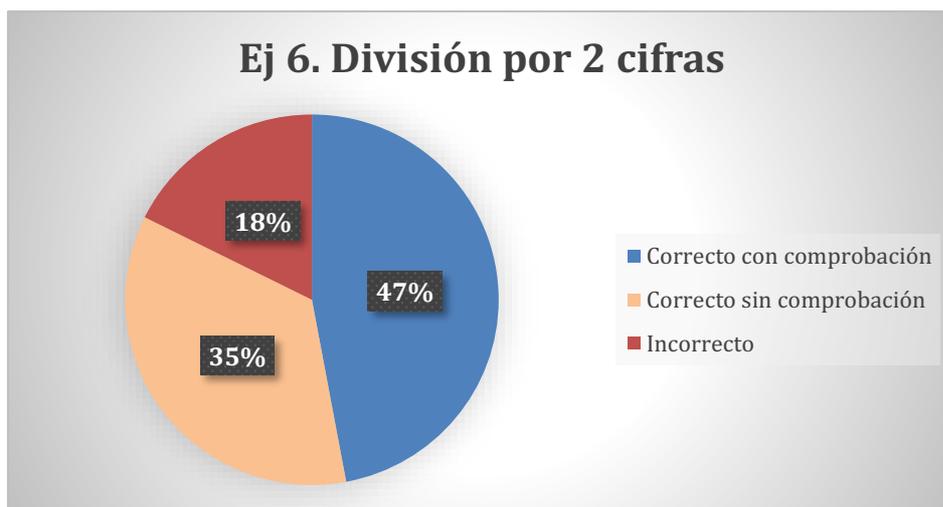


Figura 33. Evaluación inicial: resultados agregados corregidos del ejercicio 6.

3.3.3 Evaluación de la prueba inicial

En base a los resultados anteriores, se observa que la mayoría de alumnos tienen un conocimiento instrumental del algoritmo de la división cuando el divisor es de una sola cifra (dado que el porcentaje de éxito es superior al 80%). En cambio, bastantes cometen errores cuando el divisor es de dos cifras, a pesar de la ayuda que entre ellos se prestaban (se apoyaban para hacer la división, pero no eran capaces de hacer la comprobación). El porcentaje real, una vez descontada esta situación, es de menos de la mitad de los alumnos.

Las mayores dificultades las encuentran en lo relativo a cuestiones conceptuales, ya que el único significado claro que asocian a la división es el de reparto igualitario (a pesar de que olvidan que el reparto debe ser realizado en partes iguales). Por otro lado, un 43% no saben relacionar los términos de la división. En el ejercicio 4 relativo al enunciado de un problema se esperaba que no lo resolvieran

correctamente la mayoría de alumnos, y sobre el 50% han enunciado un problema correctamente. Eso sí, los problemas enunciados siempre utilizan el significado de la división como reparto.

De la evaluación inicial extraemos como conclusiones que los alumnos interpretan exclusivamente la división como reparto igualitario, que desconocen la relación entre los términos de la división, y que poseen un dominio meramente instrumental del algoritmo tradicional de la división que les permite realizar correctamente divisiones muy elementales, únicamente cuando el divisor es un número de una cifra.

Durante la intervención, será fundamental el minimizar la inercia que tienen los alumnos para oponerse a nuevas propuestas de enseñanza, y que se ha observado durante las sesiones. Les gusta resolver las divisiones mediante el algoritmo tradicional y sin apoyos, porque es la forma en la que aprendieron. Es decir, podemos encontrar una resistencia por su parte para aceptar nuevos procedimientos de cálculo.

Por ello, se diseñará una intervención de refuerzo del algoritmo de la división de forma que los alumnos comprendan los pasos del algoritmo, que lo apliquen de forma adecuada y mostrándoles otros significados de la división además del de reparto igualitario. La intervención utilizará todo lo aprendido durante esta evaluación inicial, adaptando la propuesta a las características del grupo clase, potenciando el disfrute personal que muestran al aplicar el algoritmo y aumentando la dificultad en la utilización del algoritmo con respecto a lo propuesto en la evaluación inicial, presentándoles un desafío mayor, ya que resolver las divisiones con cocientes de una cifra, prácticamente todos lo tienen muy asimilado. Se intentará además que usen apoyos, argumentando que es necesario para entender por qué se hace el algoritmo de la división de este modo.

Aunque en el siguiente capítulo vamos a describir la propuesta de enseñanza, consideramos necesario adelantar en este momento que nuestro objetivo es que los alumnos rememoren el algoritmo escrito de la división, el que ellos aprendieron hace años, estableciendo un paralelismo entre las acciones simbólicas propias del algoritmo y las acciones físicas o mentales que comporta un reparto igualitario del dividendo en tantas partes iguales como indica el divisor. El reparto se realizará por fases, y será necesario realizar tantas fases como cifras tenga el dividendo. Con ello pretendemos que los alumnos, no sólo sepan aplicar el algoritmo, sino que lo comprendan y puedan justificarlo. Es decir, el objetivo es que comprendan por qué el algoritmo de la división se hace de esta forma y estén en condiciones de aplicarlo desde la comprensión. Consideramos que a estas personas adultas les puede ser de interés encontrar sentido a frases hechas como “se baja la cifra siguiente” que les obligaron a memorizar y decir en la escuela sin que nadie les explicase porqué tenían que aprender esas frases. A pesar de que en la época que estas personas eran escolares de corta edad imperaba el conductismo, que fue abandonado en la década de los 90 del siglo pasado por el constructivismo como paradigma de aprendizaje de las matemáticas, confiamos que sus creencias sobre las matemáticas hayan evolucionado hacia paradigmas más actuales de modo que les permita valorar los beneficios de la enseñanza desde la comprensión para formar a ciudadanos del siglo XXI.

CAPÍTULO 4. DISEÑO DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

La propuesta de enseñanza es una adaptación de Escolano (2004), contextualizada a las características únicas del grupo objetivo (adultos de edad avanzada), pero compartiendo su misma visión en cuanto a las fases propuestas y a la importancia de sustentar los pasos del algoritmo en acciones físicas.

4.1 Objetivos

- Reforzar el algoritmo escrito de la división desde la comprensión a partir del significado de reparto igualitario.
- Reforzar el conocimiento y manipulación del sistema de numeración decimal. Incorporamos este objetivo porque necesitaremos aplicar conocimientos del sistema de numeración decimal durante la propuesta de enseñanza.
- Realizar repartos igualitarios con material manipulativo, de forma que al utilizar el algoritmo de la división evoquen una situación física.
- Reforzar el algoritmo de la división con dividendo de hasta cuatro cifras y con divisor de hasta dos cifras a partir del significado de reparto igualitario.
- Incorporar otros significados de la división diferentes del reparto igualitario.

4.2 Contenidos

Los contenidos de la propuesta se articulan en cuatro etapas o fases:

Tabla 3. *Etapas de la propuesta educativa*

1ª Etapa	Refuerzo de la comprensión del sistema de numeración
2ª Etapa	Enseñanza/refuerzo del concepto de reparto igualitario
3ª Etapa	Enseñanza/refuerzo del algoritmo de la división
4ª Etapa	Enseñanza/ refuerzo de nuevos significados de la división de naturales y refuerzo del algoritmo mediante la resolución de problemas aritméticos

Las tareas de la primera etapa han sido diseñadas por los autores de este trabajo, a partir de las sugerencias teóricas de Cid, Escolano y Muñoz (2013).

La segunda, tercera y cuarta etapas están adaptadas directamente de la propuesta de Escolano (2004).

Primera etapa: refuerzo de la comprensión del sistema de numeración

En la primera etapa los alumnos reciben un refuerzo de la comprensión del sistema de numeración decimal, ya que es fundamental para el reparto por fases que se propondrá posteriormente. Concretamente se les propondrán:

- situaciones formales de escritura de números naturales
- situaciones formales de lectura de números naturales
- situaciones de agrupamiento decimal incidiendo en la estructura multiplicativa y aditiva que justifica la representación escrita de los números
- situaciones de descomposición de un número en potencias de base 10.

Segunda etapa: enseñanza/refuerzo del concepto de reparto igualitario

En esta segunda etapa, los alumnos reciben enseñanza del concepto de reparto igualitario. Se trabajan los siguientes contenidos:

- reparto igualitario con materiales manipulativos, sin utilizar el algoritmo o su representación simbólica
- relación entre los elementos que intervienen en un reparto (búsqueda de condiciones iniciales)
- comprobación de la bondad de repartos igualitarios.

Para la mayoría de alumnos se espera que sea un refuerzo, pero será fundamental su aceptación y la utilización de material manipulativo para estar preparados para la siguiente fase.

Tercera etapa: enseñanza/refuerzo del algoritmo de la división

En esta etapa, y una vez que ya se han realizado de forma manipulativa (física) las acciones de reparto, se procederá a su representación simbólica y a su resolución mediante el algoritmo de la división.

Ya que según la evaluación inicial el 82% de los alumnos es capaz de utilizar el algoritmo de la división correctamente, y para evitar que resuelvan los ejercicios de forma mecánica, será fundamental incidir en la relación con las acciones de reparto de la fase anterior. Para ello se les propondrá un reparto por fases, realizando una pregunta de reparto en cada fase. Se comenzará repartiendo las unidades de orden mayor, siendo conscientes de su significado (ej. en una división con dividendo de 3 cifras, la cifra de orden mayor representa las centenas) y procediendo a repartos sucesivos de cada orden de magnitud. Cuando no sea posible repartir más, las unidades que queden sin repartir en la fase anterior se transformarán en unidades de orden menor multiplicándolas por 10.

Los alumnos recibirán a modo de ayuda en esta fase el siguiente documento (disponible en ANEXO 4) que ejemplifica los pasos del reparto igualitario para dividir 95:4:

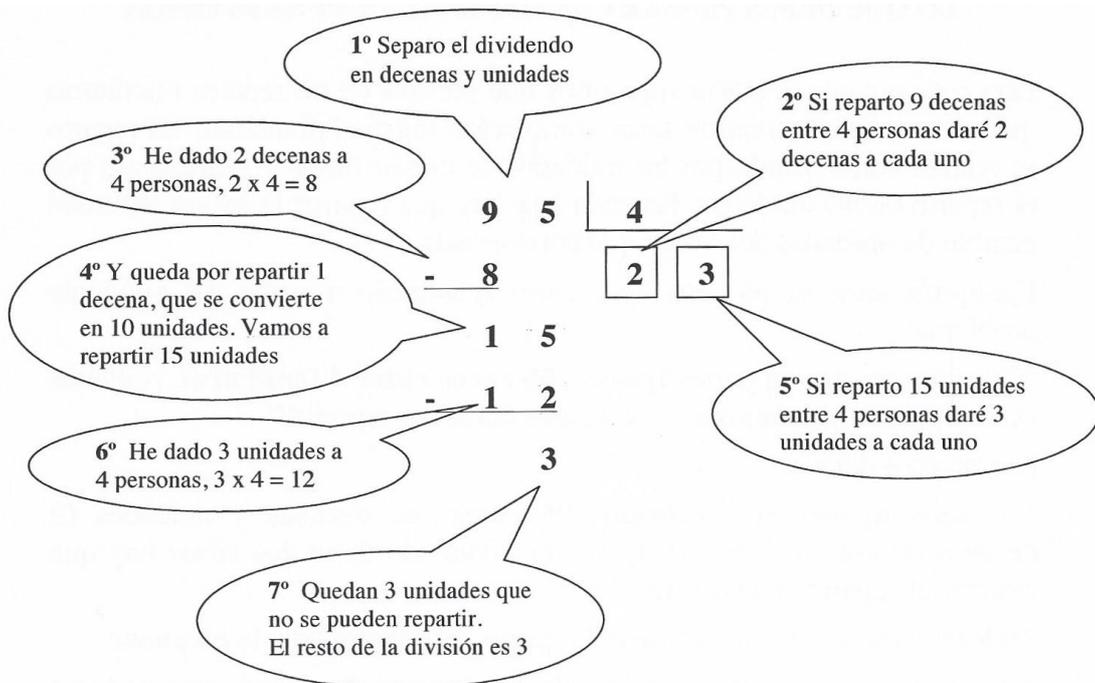


Figura 34. Algoritmo de la división.

El reparto se realizará por fases realizando las siguientes preguntas:

“1ª pregunta: Con 9 centenas de puntos, ¿puedo dar alguna centena a cada una de las 4 personas?”

Respuesta: Sí, puedo dar 2 centenas y me queda 1 decena sin repartir. Ahora tengo que cambiar la decena por unidades, y tengo 10 unidades para repartir, como ya tenía 5 unidades tengo 15 unidades para repartir.

2ª pregunta: Con 15 unidades, ¿puedo dar alguna unidad a cada una de las 4 personas? *Respuesta: Sí, puedo dar 3 unidades y me quedan 3 unidades sin repartir.*

Ahora reconstruyo la cantidad que he repartido y veo que el cociente es 23 unidades. También veo que lo que queda sin repartir, el resto, es 3 unidades.”

Mostramos la representación simbólica en la Figura 35.

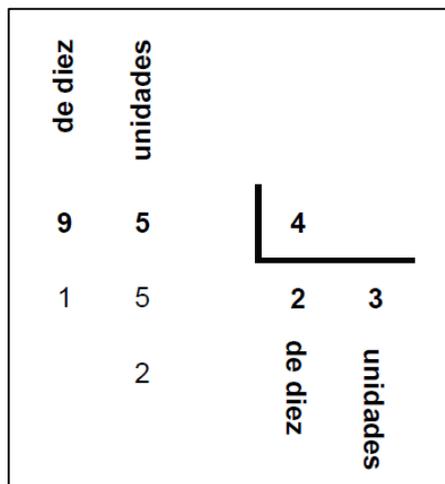


Figura 35. Representación simbólica de 95:4 con la metodología propuesta.

En esta fase también se introducirá/reforzará la comprobación de la división:

Comprobación de la división:

Para que una división esté bien realizada deben cumplirse dos condiciones:

1º) Cociente x Divisor + Resto = Dividendo

2º) Resto debe ser menor que Divisor

En el ejemplo se cumplen las dos condiciones,

1º) $23 \times 4 = 92$ y $92 + 3 = 95$

2º) El resto (3) es menor que el divisor (4) porque en caso contrario se podría haber dado más unidades a cada persona.

Cuarta etapa: enseñanza/ refuerzo de nuevos significados de la división de naturales y refuerzo del algoritmo mediante la resolución de problemas aritméticos

Esta cuarta etapa tiene como objetivo la ampliación del campo semántico de la división de naturales (Escolano, 2004, p.10). Por restricciones temporales, únicamente será posible una introducción a la resolución de problemas aritméticos utilizando el algoritmo de la división en problemas de tipo razón-reparto, razón-medida y división-comparación, que, aunque brevemente, servirá para mostrar otros significados de la división distintos del reparto igualitario.

4.3 Tareas

En este apartado se mostrarán las tareas concretas que se propondrán a los alumnos en base a los contenidos de la sección anterior. Se seguirá la misma separación en etapas. La propuesta completa de enseñanza se muestra en el ANEXO 2.

Primera etapa: refuerzo de la comprensión del sistema de numeración

El material manipulativo que se utilizará durante esta propuesta didáctica consiste en placas, barras y puntos creadas con cartulinas de colores. Cada uno de ellos representa un orden de magnitud del sistema decimal, siendo el punto (en color azul) la unidad; la barra (en color rojo) representa la decena, y contiene 10 puntos, y, por último, la placa (en color verde) contiene 10 barras o 100 puntos, representando la centena.

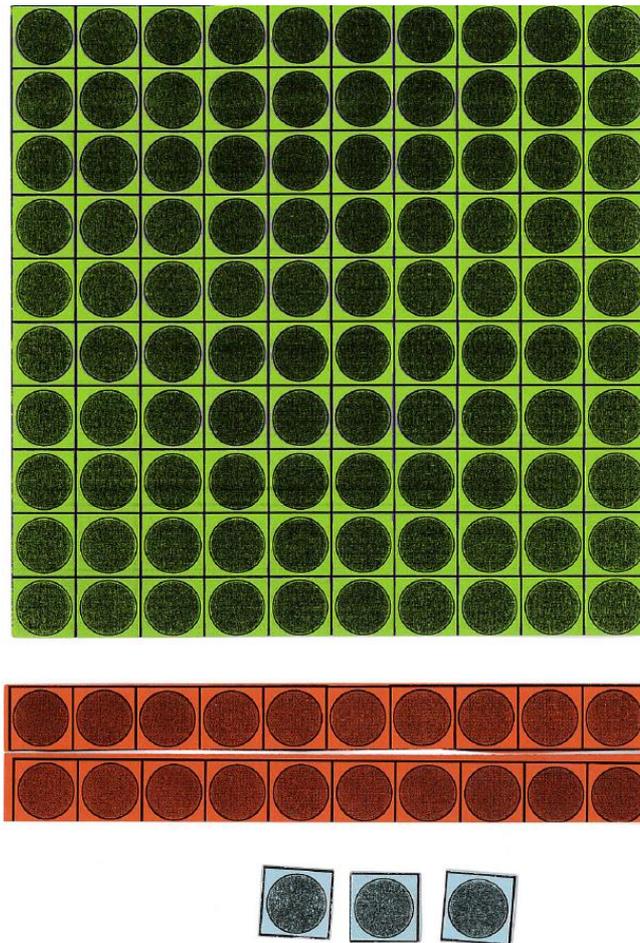


Figura 37. Material utilizado: placas, barras y puntos.

Para todas las situaciones propuestas, los alumnos deben utilizar el menor número de fichas (placas, barras y puntos) posible.

En esta primera etapa se propone la resolución de cuatro tipos de tareas:

a) Situaciones formales de escritura de números naturales

Los alumnos realizan, en las cuatro primeras tareas (FICHAS 1 y 1b), la representación del número propuesto (en letra) utilizando el menor número de fichas. Después de representarlo físicamente se les solicita dibujar en la ficha de trabajo las placas, barras y puntos que han utilizado. Por último, se

les solicita que escriban utilizando cifras el número de puntos dibujado. Mostramos como ejemplo la tarea número 1 de la ficha 1:

1) Pon encima de la mesa **trescientos treinta y cinco puntos** utilizando el menor número de fichas, es decir, de placas, barras y puntos.

2) Dibuja las placas, barras y puntos que has utilizado

3) Después escribe con cifras el número de puntos

Figura 38. Ficha 1. Tarea 1.

b) Situaciones formales de lectura de números naturales

Se proponen cuatro tareas (FICHA 2 y 2b) similares a las anteriores, pero en esta ocasión se les indica el número en su representación numérica. Después de representarlo físicamente, se les solicita dibujar en la ficha de trabajo las placas, barras y puntos que han utilizado. Por último, se les solicita que escriban con letras el número de puntos dibujado.

A continuación, se muestra la tarea número 1 de la ficha 2:

1) Pon encima de la mesa **161 puntos** utilizando el menor número de fichas, es decir, de placas, barras y puntos.

2) Dibuja las placas, barras y puntos que has utilizado

3) Después escribe con letras el número de puntos que has puesto

Figura 39. Ficha 2. Tarea 1.

c) Situaciones de agrupamiento decimal incidiendo en la estructura multiplicativa y aditiva que justifica la representación escrita de los números

El objetivo de este tipo de tareas es que los alumnos realicen conversiones de grupos de diez unidades entre los diferentes órdenes de unidades para profundizar en la comprensión del sistema de numeración decimal.

En estas tres tareas (FICHA 3) se entrega un número concreto de fichas que contenga placas, barras y puntos de modo que haya al menos diez o más placas, barras y puntos. Se le pide que escriban cuántos puntos se le han dado en su representación numérica y en letra.

Mostramos la tarea 1 de la ficha 3:

Si tienes 4 placas de 100 puntos, 13 barras de 10 puntos y 29 plaquitas de un punto... ¿cuántos puntos tienes?

En cifras:

En letra:

Figura 40. Ficha 3. Tarea 1.

d) Situaciones de descomposición de un número en potencias de base 10

Estas son las ocho tareas (FICHAS 4 y 4b) más convencionales de todas las propuestas. No se les pide que utilicen el material manipulativo. Se pretende evaluar si comprenden el sistema de numeración decimal tras las tareas anteriores. Se muestra la tarea 1 de la ficha 4, que es de escritura de números y para lo cual deben descomponer un número de cuatro cifras en potencias de diez:

1

Dado el "Siete mil doscientos treinta y cinco" escríbelo como suma de:

de 1000 + de 100 + de 10 + de 1

Y ahora escríbelo completo con cifras:

Figura 41. Ficha 4. Tarea 1.

Y de la ficha 4b, donde se les pregunta por el número de unidades que representan (marcadas por su posición) ciertas cifras de un número concreto:

1

Tenemos **4010** puntos

¿Cuántas unidades (puntos) indica el 1? _____

¿Cuántas unidades (puntos) indica el 4? _____

Figura 42. Ficha 4b. Tarea 1.

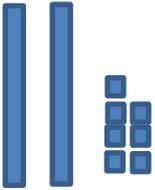
Segunda etapa: enseñanza/refuerzo del concepto de reparto igualitario

a) Reparto igualitario con materiales manipulativos, sin utilizar el algoritmo ni su representación simbólica

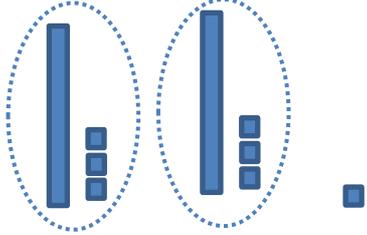
Se proponen cinco tareas directas de reparto utilizando el material manipulativo (FICHAS 5, 5b y 5c). En primer lugar, deben dibujar la cantidad de placas, barras y puntos que representan la cantidad a repartir (que les servirá de apoyo para el reparto igualitario), y nos permitirá comprobar que lo han representado físicamente con el material. Después deben realizar un reparto por fases, comenzando por las unidades de mayor magnitud (en este caso las placas). Una vez que no haya suficientes para repartir a todas las personas, se deberán transformar en unidades de orden inferior (barras), repartirlos, y cuando no haya suficientes, transformarlas en puntos, que se repartirán de forma igualitaria. El objetivo de estas tareas es iniciar a los alumnos en el concepto de reparto “por fases”. Mostramos aquí un ejemplo resuelto:

Tienes 27 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 2 personas.
¿Cuántos puntos das a cada persona?

Antes de hacer el reparto, dibuja los puntos que hay



Después de hacer el reparto, dibuja los puntos que recibe cada persona y lo que sobra



RESUESTA: 13 puntos para cada persona y sobra 1

Figura 43. Ficha 5. Ejemplo ilustrativo.

b) Relación entre los elementos que intervienen en un reparto (búsqueda de condiciones iniciales)

En estas ocho tareas (FICHAS 6 y 6b) los alumnos desconocen la cantidad inicial a repartir y deben encontrarla a partir de los datos que sí conocen: la cantidad que recibe cada persona, entre cuántas personas han participado en el reparto y si han sobrado puntos al finalizar el reparto. El objetivo de estas tareas es mejorar la comprensión del reparto igualitario al tener que encontrar las condiciones iniciales del mismo. Se muestra la primera de las tareas propuesta:

1

Tienes un número de puntos para repartir. Cuando los repartes, en partes iguales, entre 3 personas, das a cada persona 5 puntos y sobra un punto.
¿Cuántos puntos tenías para repartir?

RESUESTA: _____

Figura 44. Ficha 6. Tarea 1.

c) Comprobación de la bondad de repartos igualitarios

En estas ocho tareas (FICHAS 7, 7b y 7c) conocen todos los datos de repartos que ya han sido resueltos, y deben indicar si son correctos o no, con ayuda del material manipulativo o sin él. En caso de no estar correctamente resuelto, es fundamental que justifiquen por qué. Estas tareas comportan importantes conocimientos conceptuales como la necesidad de repartir en cada fase la mayor cantidad posible, lo que conlleva la comprensión de que en todas las fases del reparto la cantidad sobrante (que no se puede repartir) debe ser menor que el divisor (número de participantes en el reparto). Esta forma exhaustiva de realizar el reparto igualitario se concreta en el algoritmo de la división en la conocida restricción de que el resto debe ser siempre menor que el divisor.

Ejemplo de tarea propuesta:

1

Explica si el siguiente reparto está bien hecho:

Se reparten 26 puntos, en partes iguales, entre 4 personas.
Cada persona recibe 6 puntos y sobran 2 puntos.

(Dibuja el reparto si quieres)

RESPUESTA: El reparto está _____ hecho, porque _____

Figura 45. Ficha 7. Tarea 1.

Tercera etapa: enseñanza/refuerzo del algoritmo de la división

A pesar de que en la evaluación inicial comprobamos que la mayoría de los alumnos saben aplicar el algoritmo cuando el divisor es un número de una cifra, consideramos conveniente entregarles la ficha del ANEXO 4 “Refuerzo del algoritmo de la división (resumen)” y revisar con ellos el algoritmo paso a paso, realizando el ejemplo. Se les pide que escriban en letra y con distintos colores “Dividendo, divisor, cociente y resto”.

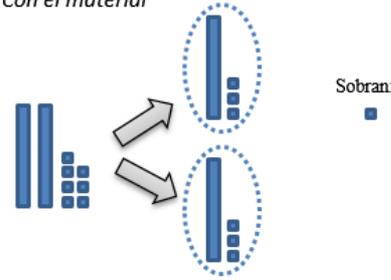
A continuación, se les proponen seis tareas (FICHAS 8a-1, 8a-2, 8b-1, 8b-2) donde deben realizar repartos de forma manipulativa y simbólica. Es fundamental recalcarles la importancia de que realicen la división como un reparto por fases, comenzando por las unidades de orden mayor, realizando un reparto por cada una de las cifras del número a repartir (dividendo), convirtiendo las unidades sobrantes en unidades del orden inmediato inferior y proceder a otro reparto...y así sucesivamente. Para ello se les pide que como apoyo identifiquen explícitamente las centenas, decenas y unidades del dividendo poniendo una letra justo encima de cada cifra. Tras realizar cada reparto, se les propone que en el cociente se identifique también con “c”, “d” o “u” cada una de sus cifras (eso hará que aparezcan ceros en el cociente en el lugar de las centenas).

Por último, y para evitar que apliquen el algoritmo mecánicamente, se les solicita que realicen el reparto previamente de forma manipulativa (al igual que en la fase anterior) y dibujen el resultado del mismo. Todas las tareas tendrán una cifra en el divisor.

Mostramos un ejemplo resuelto:

Tienes **27** puntos y los repartes, en partes iguales, entre **2** personas.
¿Cuántos puntos das a cada persona?

Con el material



Con símbolos

$$\begin{array}{r} \text{d u} \\ 27 \overline{) 27} \\ \underline{07} \\ 13 \\ \underline{13} \\ 0 \end{array}$$

RESPUESTA: Puedo dar 13 puntos a cada persona y sobra 1

Figura 46. Ficha 8. Ejemplo resuelto.

En este punto, y como se explicará en el análisis de las sesiones, se vio necesario realizar una tarea extra del mismo tipo (FICHA 8b-extra), pero realizada de forma más guiada, siendo realizada de forma simultánea por el profesor en la pizarra para el grupo-clase.

A continuación, se proponen catorce tareas del mismo tipo (FICHAS 9a, 9b, 9c, 9d, 9e), donde deben realizar la comprobación de la división una vez resuelta.

1 Tienes 50 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 6 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?

Cociente: _____

Resto: _____

Comprobación:

Figura 47. Ficha 9. Tarea 1.

Finalmente, una vez realizadas todas las tareas con una cifra en el divisor, se pasará a realizar catorce tareas con dos y tres cifras en el divisor (FICHAS 10a, 10b, 10c, 10d, 10e, 10f), donde como apoyo adicional se les pedirá que escriban la tabla del 12 y de 25, que serán las utilizadas en todas las divisiones.

Mostramos un ejemplo:

2

Tienes 110 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 12 personas.
¿Cuántos puntos das a cada persona?

Cociente: _____

Resto: _____

Comprobación:

Figura 48. Ficha 10. Tarea 2.

Un objetivo secundario de estas tareas es incidir en el concepto de “repartos equivalentes”, en los que se recibe la misma cantidad por persona cuando aumentan en la misma proporción los objetos a repartir y el número de personas entre los que se reparte. Para ello, en las tareas 5 y 7 se propone realizar las divisiones $250:2$ y $500:4$ que tienen el mismo cociente porque el número de participantes (dividendo) y de las personas que participan en el reparto (divisor) se ha duplicado en el segundo reparto con respecto al primero.

Cuarta etapa: enseñanza de nuevos significados de la división de naturales y refuerzo del algoritmo mediante la resolución de problemas aritméticos

El objetivo de esta fase es evitar que asocien a la división únicamente con los repartos igualitarios, y reconozcan otros contextos donde es utilizada. Por restricciones temporales, únicamente será posible una introducción a la resolución de problemas aritméticos utilizando el algoritmo de la división en problemas de tipo razón-reparto, división-medida y división-comparación.

En la Figura 49 mostramos ejemplos de división-medida (tarea 2) y división-comparación (tarea 3), de entre los cinco propuestos.

2

Imagina que tienes que empaquetar 864 huevos en cajas que contienen 12 huevos cada una. ¿Cuántas cajas necesitas?

3

La edad de Laura es la quinta parte de la edad de su abuela. La abuela de Laura tiene 85 años. ¿Cuántos años tiene Laura?

Figura 49. Ficha 12. Tareas 2 y 3.

4.4 Evaluación

Describimos los criterios de evaluación correspondientes a las cuatro etapas de las que consta la propuesta de enseñanza. La rúbrica para cada criterio será sencilla, y únicamente tendrá dos niveles: “Lo realiza adecuadamente” o “No lo realiza adecuadamente”

Criterios de evaluación de la primera etapa: refuerzo de la comprensión del sistema de numeración

Crit.1.1.: Los alumnos saben escribir números que se les presentan, por escrito, en lenguaje natural después de representar la cantidad numérica con el material “placas, barras y puntos”.

Crit.1.2.: Los alumnos saben leer números que se les presentan, por escrito, de forma simbólica después de representar la cantidad numérica con el material “placas, barras y puntos”.

Crit.1.3.: Los alumnos saben leer y escribir cantidades numéricas representadas con el material “placas, barras y puntos”. Dichas cantidades tienen órdenes de unidades superiores a 9 unidades, lo que obliga a los alumnos a realizar conversiones decimales entre los órdenes de unidades.

Crit.1.4.: Los alumnos comprenden el valor relativo de una cifra que forma parte de un número, sin utilizar material manipulativo. Por ejemplo, dado el número 4010, se les pregunta a los alumnos qué valor aporta la cifra 1 dentro de ese número.

Criterios de evaluación de la segunda etapa: enseñanza del concepto de reparto igualitario

Crit.2.1.: Los alumnos saben realizar un reparto igualitario por fases con el material “placas, barras y puntos” y sin utilizar el algoritmo escrito de la división.

Crit.2.2.: Los alumnos saben encontrar las condiciones iniciales de un reparto igualitario a partir del conocimiento del número de participantes en el reparto, de la cantidad que recibe cada participante y de la cantidad que queda sin repartir.

Crit.2.3.: Los alumnos saben comprobar la bondad de repartos igualitarios efectuados previamente.

Criterios de evaluación de la tercera etapa: enseñanza/refuerzo del algoritmo de la división

Crit.3.1.: Los alumnos saben realizar un reparto igualitario por fases con el material “placas, barras y puntos” y representar gráficamente el reparto después de hacerlo físicamente o bien después de haberlo evocado.

Crit.3.2.: Los alumnos saben representar, mediante el algoritmo escrito de la división, el reparto igualitario por fases después de haberlo realizado físicamente con el material “placas, barras y puntos” o bien después de haberlo evocado.

Crit.3.3.: Los alumnos identifican el dividendo con la cantidad a repartir, el divisor con el número de participantes en el reparto igualitario, el cociente es la cantidad que recibe cada uno de los participantes en el reparto y el resto como la cantidad que queda sin repartir.

Crit.3.4.: Los alumnos saben comprobar la bondad de los repartos igualitarios realizados mediante el algoritmo de la división, aplicando la relación entre el dividendo, divisor, cociente y resto.

Criterios de evaluación de la cuarta etapa: enseñanza de nuevos significados de la división de naturales y refuerzo del algoritmo mediante la resolución de problemas aritméticos

Crit.4.1.: Los alumnos identifican la división de números naturales como la operación que resuelve problemas de tipo razón-medida y de comparación, además de los problemas de reparto igualitario.

La evaluación se realizará tanto por la observación directa durante las sesiones como por los resultados producidos en las mismas (disponibles en ANEXO 7).

4.5 Metodología

La base de toda la propuesta es que los alumnos aprendan a realizar las divisiones comprendiendo que se apoyan en conceptos y acciones físicas reales, y no en la aplicación de reglas que carecen de justificación.

Por ello, en las primeras etapas de la propuesta se utiliza principalmente materiales manipulativos (placas, barras, puntos) que les ayude a comprender la realidad física subyacente a las operaciones realizadas. En la mayoría de tareas se les solicita además que expliciten en forma de dibujo el trabajo realizado con los materiales. De este modo pretendemos que consoliden las ideas de reparto y que establezcan un paralelismo entre dichas acciones físicas o evocadas y los pasos del algoritmo de la división.

Las tareas se proponen individualmente a cada alumno, para después proceder a la evaluación de los mismos por parte del profesor y a su comentario en la siguiente sesión. Existe interacción de los alumnos entre ellos (con las mesas contiguas), y también entre los profesores y los alumnos (la maestra del grupo colaborará en la intervención). Se observa cómo a pesar de que el trabajo debe ser individual, resulta muy difícil conseguir que no las realicen en pequeño-grupo, por lo que a la hora de realizar la evaluación este aspecto será observado y tenido en cuenta. Se complementará la toma de datos con la observación directa de las interacciones entre los alumnos.

4.6 Temporalización (cronograma)

La propuesta de enseñanza se compone de una sesión de evaluación inicial, siete sesiones de clase y una última sesión de evaluación final, según se indica en el siguiente cronograma:

Tabla 4. *Temporalización de la propuesta didáctica*

Se-sión	Fecha	Etap	Descripción	Dura-ción	Fichas	Nº de tareas
In.	8/1/2018		Prueba inicial	20'	Pr. Inicial	6
1	10/1/2018	1	Escritura de números naturales	60'	1 y 1b	4
		1	Lectura de números naturales		2 y 2b	4
		1	Agrupamiento decimal		3	3
2	15/1/2018	1	Descomposición decimal	60'	4 y 4b	8
		2	Reparto directo		5, 5b y 5c	5
3	17/1/2018	2	Búsqueda de condiciones iniciales	60'	6 y 6b	8
		2	Comprobación de repartos		7, 7b y 7c	8
4	22/1/2018	3	Algoritmo de la división (I)	65'	8a-1,8a-2,8b-1,8b-2	6
5	24/1/2018	3	Algoritmo de la división (I)	40'	8b-extra	1
6	31/1/2018	3	Algoritmo de la división (II)	100'	9a,9b...9e	14
		3	Algoritmo de la división (III)		10a, 10b...10f	14
7	5/2/2018	4	Problemas	50'	12a y 12b	5
			Valoración individual final		11	3
Fi.	25/4/2018		Prueba Final	30'	Pr. final	4

CAPÍTULO 5. DESARROLLO Y EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

En este capítulo se analizará el trabajo realizado en cada una de las siete sesiones de la intervención, analizando los aspectos más relevantes de cada una y mostrando evidencias del trabajo de los alumnos. Se realizará una división por sesiones que reflejará de forma más adecuada la temporalización de la propuesta didáctica.

5.1 Primera sesión. Sistemas de Numeración (I)

Primera etapa: refuerzo de la comprensión del sistema de numeración

Fecha: 10/1/2018
Número de alumnos: 19-20
Duración de la sesión: 65'
Resultados completos escaneados: ANEXO 7

Esta sesión está encuadrada dentro de la primera de las cuatro etapas: refuerzo de la comprensión del sistema de numeración.

Se trabajaron doce tareas estructuradas como se muestra en la Tabla 5:

Tabla 5. Estructura de la sesión 1

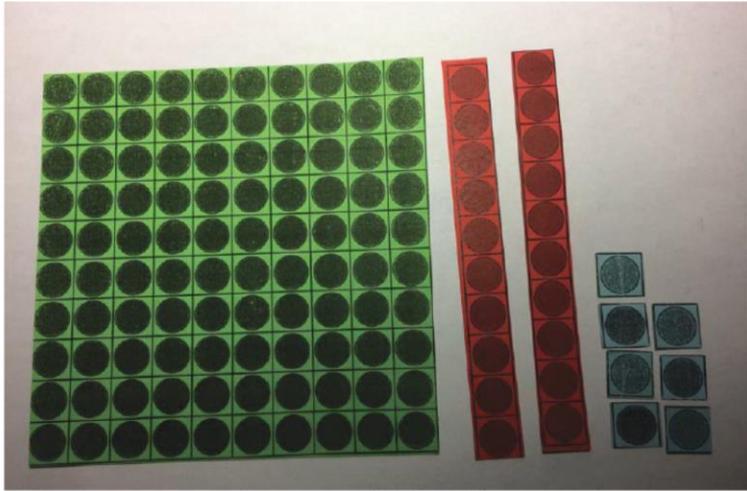
Etapa	Descripción	Nº tareas	Fichas
1	Situaciones formales de escritura de números naturales	4	1 y 1b
1	Situaciones formales de lectura de números naturales	4	2 y 2b
1	Situaciones de agrupamiento decimal incidiendo en la estructura multiplicativa y aditiva que justifica la representación escrita de los números	3	3

a) Situaciones formales de escritura de números naturales (25')

Los alumnos tienen que realizar en las cuatro primeras tareas (dos en FICHA 1 y dos en FICHA 1b) la representación física del número propuesto (en letra) utilizando el menor número posible de fichas del material manipulativo. Después de representarlo físicamente se les solicita dibujar en la ficha de trabajo las placas, barras y puntos que han utilizado. Por último, se les solicita que escriban utilizando cifras el número de puntos dibujado, para evaluar la escritura de números naturales en su forma numérica.

Al inicio de la sesión se les explica el material manipulativo, enfatizando cómo las placas contienen 10 barras y cómo las barras contienen 10 puntos, base del sistema numérico decimal. Se realiza un ejercicio de ejemplo para el grupo-clase en el que paso a paso resuelven una tarea análoga a las que se les propondrán después. Lo resuelven individualmente siendo guiados por el maestro de forma grupal.

1) Pon encima de la mesa **ciento veintisiete** puntos utilizando el menor número de fichas, es decir, de placas, barras y puntos.



2) Dibuja las placas, barras y puntos que has utilizado



3) Después escribe con cifras el número de puntos que tienes

127

Figura 50. Ejemplo resuelto Ficha 1/1b.

A continuación, se les entrega únicamente la FICHA 1, y la van resolviendo con la ayuda del profesor y de sus compañeros.

Durante su ejecución surgieron numerosas dudas especialmente en lo referente a cómo utilizar el material manipulativo y a cómo hay que dibujarlo en las fichas. Fueron necesarias varias correcciones por parte de aproximadamente la mitad de los alumnos hasta lograr el objetivo.

El 90% (19/21) de los alumnos completaron la tarea correctamente. Es decir, dibujaron las placas, barras y puntos y además también escribieron correctamente el número solicitado.

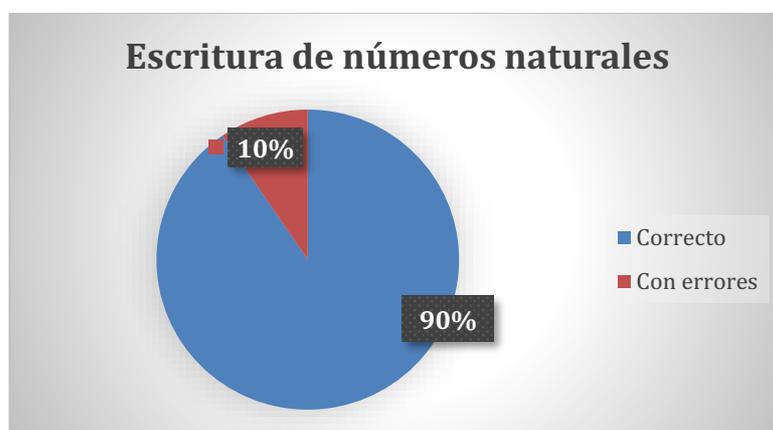


Figura 51. Escritura de números naturales (resultados).

Un alumno (A10) cometió un error en la escritura del número 335 en la tarea 1, pero se achaca a un despiste, ya que durante la observación se comprobó que entendía perfectamente la tarea y tuvo el resto de tareas correctas.

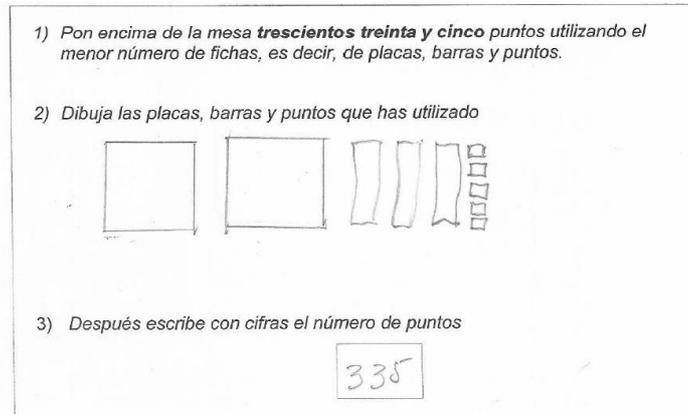
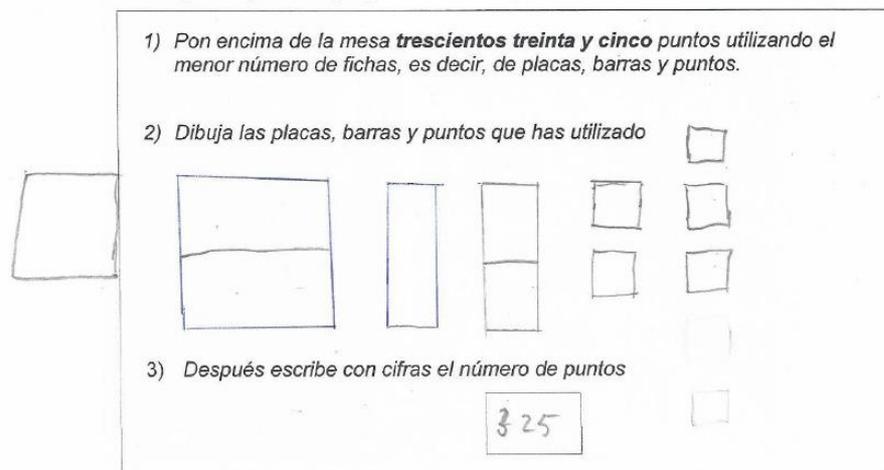


Figura 52. Ficha 1. Tarea 1 correctamente resuelta (A04).

Sin embargo, dos de los 21 alumnos (10%) no supieron realizar la representación gráfica y/o cometieron errores en la escritura del número.



trescientos treinta y cinco

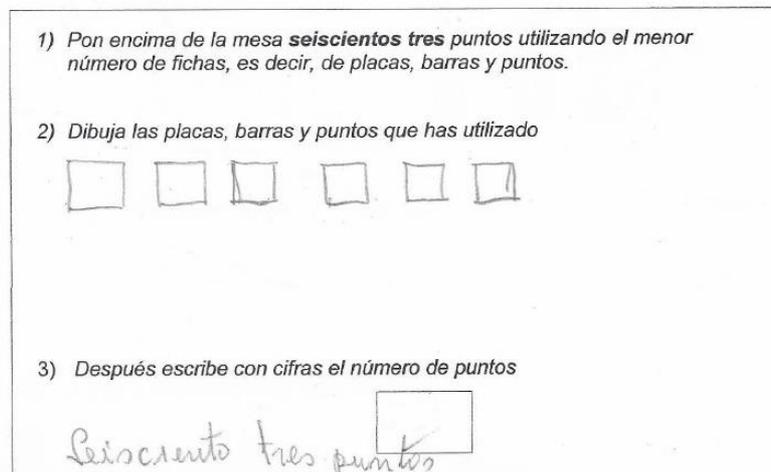


Figura 53. Ficha 1 incorrecta (A02)

En el caso de A05 (ver Figura 54) se apoyó en A18 constantemente, por lo que sus resultados no serán analizados de forma separada.

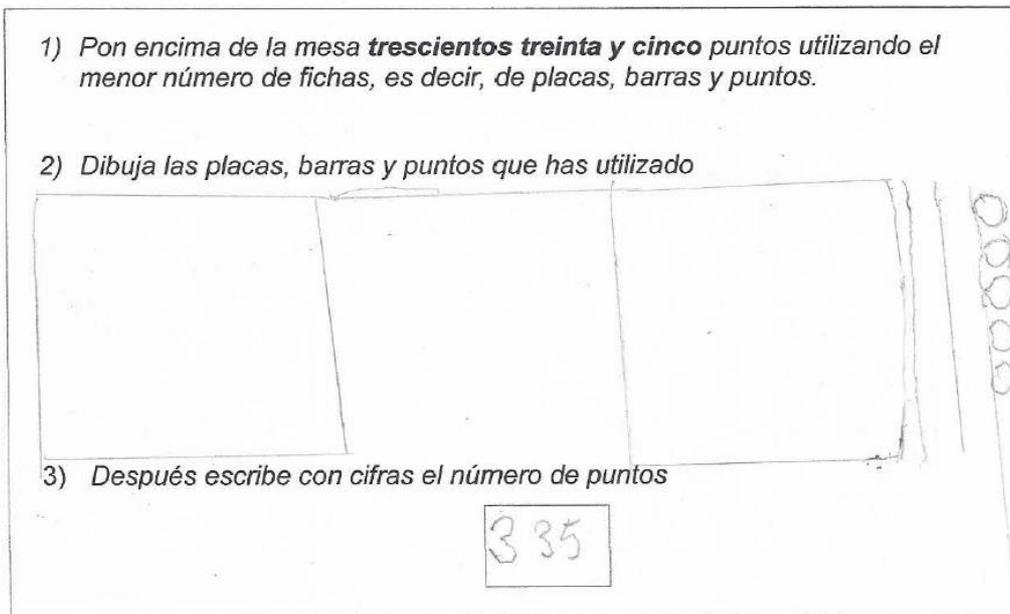


Figura 54. Tarea 1 de la ficha 1 incorrecta (A05).

Además, algunos alumnos presentan errores menores en cuanto a la utilización del espacio de la ficha (se salen del margen de las tareas) o dibujan de forma no proporcional las placas, barras y puntos.

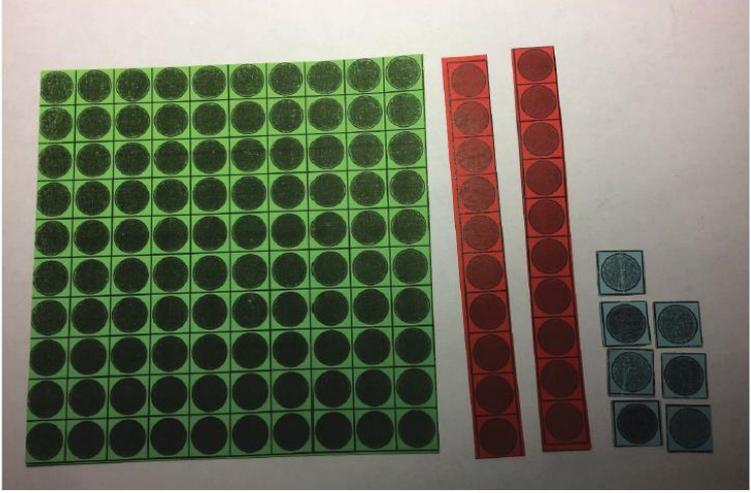
De cara a evaluar el ritmo de aprendizaje, se les entregaba la ficha 1b únicamente cuando habían terminado por completo la ficha 1. Doce alumnos tuvieron tiempo de resolverla (57%), y lo hicieron de forma correcta. Sin embargo, se apreció cómo más de la mitad de ellos no utilizaban físicamente el material manipulativo, y en su afán por terminar las tareas dibujaban directamente el resultado sin haberlo ejecutado antes. En posteriores tareas se enfatizará que deben utilizar el material para que conecten la expresión verbal del número con las representaciones físicas de las cantidades que componen el número.

b) Situaciones formales de lectura de números naturales (20')

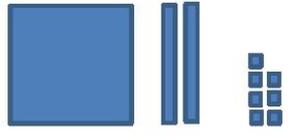
Se proponen cuatro tareas (FICHA 2 y 2b) similares a las anteriores, pero en esta ocasión se les muestra el número en su representación simbólica. Después de representarlo físicamente, se les solicita dibujar en la ficha de trabajo las placas, barras y puntos que han utilizado y, por último, se les solicita que escriban con letras el número de puntos dibujado.

En la Figura 55 mostramos el ejemplo resuelto que se entregó a los alumnos.

1) Pon encima de la mesa 127 puntos utilizando el menor número de fichas, es decir, de placas, barras y puntos.



2) Dibuja las placas, barras y puntos que has utilizado



3) Después escribe con letras el número de puntos que has puesto

Ciento veinte y siete (ciento veintisiete)

Figura 55. Ficha 2/2b. Ejemplo resuelto.

De forma análoga a las situaciones de escritura, se comienza entregándoles únicamente la ficha 2, y cuando van terminando se les entregará la ficha 2b. Pero en esta ocasión se les remarca que utilicen el material manipulativo y se comprueban que así lo hacen. Es patente cierta resistencia ya que varios no ven para qué les sirve si ya saben realizar la tarea sin él, por lo que se les explica que el objetivo es evocar una situación física y real para la tarea, y que será muy importante en las posteriores sesiones.

Los resultados agregados se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Resultados agregados de las fichas 2 y 2b

Alumno/a	Error en manipulación y representación gráfica	Error en escritura del número
A02	X	
A12	X	
A06		X
A05	X	
A22		X
A10	X	
A15		X
A19, A09, A11, A17, A03, A23, A04, A16, A08, A18, A13, A01, A21, A07	Todo correcto	Todo correcto

La representación escrita (en letra) de números les resulta más difícil que la numérica, por ello únicamente el 65% (13/20) han sido capaces de resolver la tarea correctamente.

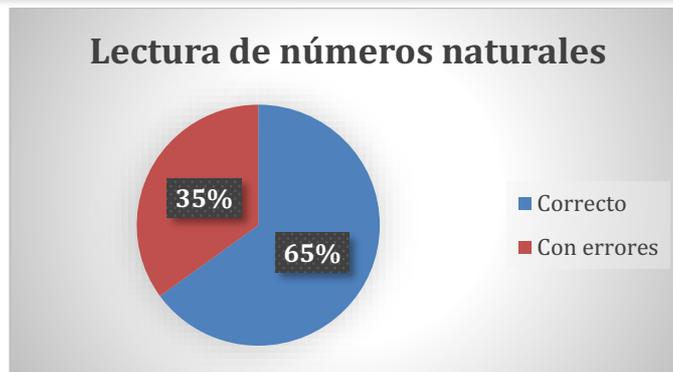


Figura 56. Lectura de números naturales (resultados).

Mostramos un ejemplo de tarea bien resuelta:

1) Pon encima de la mesa **161** puntos utilizando el menor número de fichas, es decir, de placas, barras y puntos.

2) Dibuja las placas, barras y puntos que has utilizado

3) Después escribe con letras el número de puntos que has puesto

Ciento sesenta y uno

Figura 57. Ficha 2. Tarea 1 correctamente resuelta (A13).

Existen dos tipologías de error, en la manipulación del material y posteriormente su representación gráfica o bien en la escritura del número (tarea que habitualmente resulta más difícil para los alumnos).

Cuatro alumnos cometieron errores en la manipulación y la representación gráfica. Mostramos el caso de uno de los alumnos (A10) que sabe leer el número 161 pero que no sigue la consigna a la hora de utilizar el material porque no utiliza barras de 10 puntos, es decir, no representa la cantidad con el menor número de piezas.

1) Pon encima de la mesa **161** puntos utilizando el menor número de fichas, es decir, de placas, barras y puntos.

2) Dibuja las placas, barras y puntos que has utilizado

3) Después escribe con letras el número de puntos que has puesto

Ciento sesenta y uno

Figura 58. Ficha 2 incorrecta (A10).

Mientras que tres alumnos cometieron errores en la escritura del número (A06, A22, A15):

1) Pon encima de la mesa **161** puntos utilizando el menor número de fichas, es decir, de placas, barras y puntos.

2) Dibuja las placas, barras y puntos que has utilizado



3) Después escribe con letras el número de puntos que has puesto

Ciento sesenta y uno

Figura 59. Ficha 2 incorrecta (A22).

Se advierte a raíz de estos resultados que siguen existiendo dificultades en la utilización del material manipulativo, aunque se está progresando en una utilización cada vez más adecuada.

De cara a evaluar el ritmo de aprendizaje, se les entregaba la ficha 2b únicamente cuando habían terminado por completo la ficha 2. Once alumnos tuvieron tiempo de resolverla (57%), y lo hicieron de forma correcta. Son los mismos alumnos que lo consiguieron también en la ficha 1b: A01, A13, A04, A18, A16, A23, A10, A20, A22, A03, y A08.

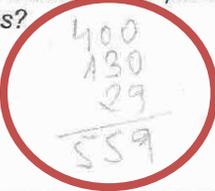
c) Situaciones de agrupamiento decimal incidiendo en la estructura multiplicativa y aditiva que justifica la representación escrita de los números

El objetivo de este tipo de tareas es que los alumnos realicen conversiones de grupos de diez unidades entre los diferentes órdenes de unidades para profundizar en la comprensión del sistema de numeración decimal. En estas tres tareas (FICHA 3) se entrega un número concreto de fichas que contenga placas, barras y puntos de modo que haya al menos diez o más placas, barras y puntos. Se le pide que escriba cuántos puntos se le han dado en su representación numérica y en letra.

La gran mayoría de alumnos han recurrido a realizar la conversión a las unidades más pequeñas (puntos) y después sumar los puntos. Consideramos este procedimiento como correcto a pesar de que esperábamos que los alumnos transformaran 29 puntos en 2 barras y 9 puntos, y posteriormente 15 barras en 1 placa y 5 barras. Veamos este ejemplo ilustrativo que lo muestra:

Si tienes 4 placas de 100 puntos, 13 barras de 10 puntos y 29 plaquitas de un punto... ¿cuántos puntos tienes?

En cifras:



En letra:

Figura 60. Ficha 3. Resolución del problema de agrupamiento decimal.

Durante la realización, se pudo observar que la mayoría de ellos lo resuelven de la misma manera, aunque al realizar las sumas en una hoja aparte no aparece en las fichas.

El análisis agregado de los resultados de la ficha 3 se muestra a continuación:

Tabla 7. Resultados agregados de la ficha 3

Alumno/a	Sin errores	Algún error en escritura en letra	Algún error tanto en escritura numérica como en letra
A16, A23, A03, A21, A05, A17, A22, A19, A09, A01, Anonimo1	11		
A08, A04, A02, A07, A12, A15, A10, A11, A13		9	
A06			1

Este ejercicio fue realizado de forma correcta por la mayoría de alumnos (11), y 9 tuvieron pequeños errores en la transcripción a letra del número, siendo el error más habitual el utilizar “treinta” en lugar de “treinta”, como se ve en el ejemplo:

Si tienes 12 placas de 100 puntos, 22 barras de 10 puntos y 10 plaquitas de un punto... ¿cuántos puntos tienes?

En cifras: 1430

En letra: Mil cuatrocientos treinta

Figura 61. Ficha 3 con errores en la letra

Únicamente un alumno (A06) tuvo un error conceptual al errar en las conversiones entre órdenes de unidades o al sumar las cantidades que componen el número (ver Figura 62).

Si tienes 4 placas de 100 puntos, 13 barras de 10 puntos y 29 plaquitas de un punto... ¿cuántos puntos tienes?

En cifras: 569

En letra: quinientos sesenta y nueve

Figura 62. Ficha 3 con error conceptual (A06).

En cualquier caso, a pesar de los pequeños errores antes señalados, podemos concluir que los alumnos tienen un conocimiento funcional de los números que se manifiesta en que son capaces de leerlos y escribirlos. Además, dan muestras de comprender la descomposición del número en potencias de diez, aunque no tengan un conocimiento lo suficientemente profundo como para realizar directamente conversiones entre los diferentes órdenes de unidades.

En la siguiente sesión se terminará la primera etapa y se comenzará a trabajar la segunda etapa.

5.2 Segunda sesión. Sistemas de Numeración (II) y Reparto (I)

Fecha: 15/1/2018
Número de alumnos: 21
Duración de la sesión: 60'
Resultados completos escaneados: ANEXO 7

En esta sesión de 60 minutos, a la que asisten 21 alumnos, se termina con la primera etapa y se comienza con la segunda “comprensión del concepto de reparto igualitario”.

La estructura de la sesión se muestra en la Tabla 8.

Tabla 8. Estructura de la sesión 2

Etapa	Descripción	Nº tareas	Fichas
1	Situaciones de descomposición de un número en potencias de base 10	8	4 y 4b
2	Reparto igualitario con materiales manipulativos	5	5, 5b y 5c

En la primera parte de la sesión se realizan las actividades finales de la primera etapa.

d) Situaciones de descomposición de un número en potencias de base 10

Estas son las tareas más convencionales de las propuestas hasta el momento. Aún no se solicita que utilicen el material manipulativo y permite comprobar si comprenden el sistema de numeración decimal tras las tareas anteriores.

En la ficha 4 tienen cuatro tareas en las que deben descomponer un número de cuatro cifras en potencias de diez. En general, la mayoría de alumnos las realizó correctamente:

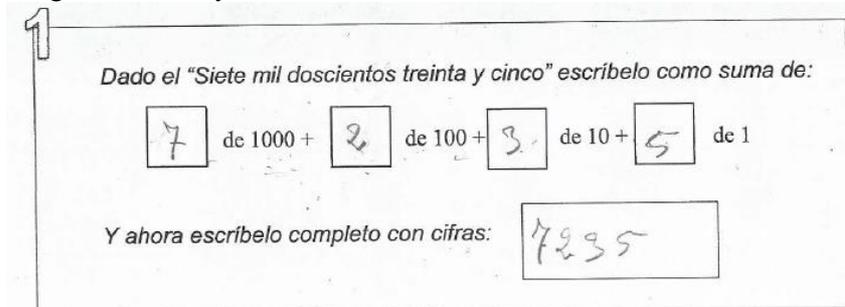


Figura 63. Ficha 4 correctamente realizada (A07).

Concretamente un total de siete alumnos la realizó correctamente y otros cinco cometieron errores simplemente en la representación del cero. Sin embargo, este número puede ser engañoso, ya que se observó que entre 7 y 8 alumnos que no saben hacerlo o bien preguntan a los maestros o se lo apoyan en el compañero de al lado, evitando por todos los medios entregar algo incorrecto.

Los resultados obtenidos fueron:

Tabla 9. Resultados agregados Ficha 4

Alumno/a	Sin errores	No representan correctamente el cero en los miles	Con errores
A14, A13, A22, A01, A20, A10, A07	7		
A06, A18, A19, A03, A16		5	
A23, A15, A17, A11, A08, A05, A09, A12, A02			9

Se observa como cinco alumnos no representaban el cero correctamente, dejándolo en blanco o sustituyéndolo por otro símbolo:

4

Dado el "Doscientos ocho" escríbelo como suma de:

de 1000 + de 100 + de 10 + de 1

Y ahora escríbelo completo con cifras:

Figura 64. Ficha 4. "cero" mal representado (A06).

Esta dificultad puede manifestarse cuando los alumnos realicen una fase del reparto en la que no puedan repartir cantidades de un determinado orden de unidad.

Por otro lado, nueve alumnos cometieron errores conceptuales importantes, descomponiendo incorrectamente el número. Veamos dos ejemplos:

2

Dado el "Nueve mil quinientos ocho" escríbelo como suma de:

de 1000 + de 100 + de 10 + de 1

Y ahora escríbelo completo con cifras:

Figura 65. Ficha 4 con descomposición incorrecta (A15).

y

1

Dado el "Siete mil doscientos treinta y cinco" escríbelo como suma de:

de 1000 + de 100 + de 10 + de 1

Y ahora escríbelo completo con cifras:

Siete mil. doscientos treinta y cinco

Figura 66. Ficha 4 con descomposición incorrecta (A02).

En algunos casos puede deberse a no leer correctamente (no se han dado cuenta de que está escrito "de 1000", "de 100", etc), pero en otros casos realmente tienen problemas en la comprensión del valor relativo de las cifras que componen el número.

A continuación, se les presentó la ficha 4b, donde se les pregunta por el número de unidades que representan (marcadas por su posición) ciertas cifras de un número concreto, de esta forma:

4

Tenemos **10203** euros

¿Cuántas unidades (euros) indica el 1? 10.000

¿Cuántas unidades (euros) indica el 3? 3

¿Cuántas unidades (euros) indica el 2? 200

Figura 67. Ficha 4b correctamente resuelta (A23).

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 10.

Tabla 10. Resultados agregados Ficha 4b

Alumno/a	Sin errores	Con errores
A17, A12, A06, A19, A03, A16, A13, A22, A01, A23	10	
A07, A10, A20, A14, A18, A02, A09, A05, A08, A11, A15		11

Existen dos tipologías de error:

- 1) Los que mezclan la representación en letra y numérica, mostrando errores conceptuales:

2

Tenemos **23950** puntos

¿Cuántas unidades (puntos) indica el 5? 50

¿Cuántas unidades (puntos) indica el 9? 900

¿Cuántas unidades (puntos) indica el 3? 3000 mil

¿Cuántas unidades (puntos) indica el 2? 20000 mil

Figura 68. Ficha 4b. Descomposición incorrecta (A18).

- 2) Los que el error se origina en el posicionamiento decimal, especialmente al llegar a los miles o decenas de millar:

2

Tenemos **23950** puntos

¿Cuántas unidades (puntos) indica el 5? 50

¿Cuántas unidades (puntos) indica el 9? 900

¿Cuántas unidades (puntos) indica el 3? 3000

¿Cuántas unidades (puntos) indica el 2? 2000

Figura 69. Ficha 4b. Descomposición incorrecta (A08).

Además, se observó como algunos alumnos pensaban que los ejercicios con "puntos" y con "euros" se tenían que hacer de forma diferente. No veían que realmente es el mismo concepto de descomposición decimal.

Aquí termina la primera etapa. Concluimos que los alumnos saben leer y escribir números de hasta cinco cifras, sin embargo, poseen un conocimiento limitado del principio del valor posicional de las cifras que, en ocasiones, les lleva a errar cuando se les pregunta por el valor de las cifras que ocupan determinadas posiciones dentro del número.

No obstante, a pesar de estas dificultades detectadas, consideramos que están en condiciones de abordar la siguiente etapa, que consiste en la realización de repartos igualitarios efectuados por fases después de descomponer la cantidad a repartir en potencias de la base decimal.

Segunda etapa: enseñanza/refuerzo del concepto de reparto igualitario

La segunda etapa de la intervención comenzó dentro de la sesión de 60 minutos impartida el 15 de enero de 2018.

a) Reparto igualitario con materiales manipulativos, sin utilizar el algoritmo ni su representación simbólica

Se proponen cinco tareas (FICHAS 5, 5b y 5c) de realización directa de repartos utilizando el material manipulativo. En primer lugar, deben dibujar la cantidad de placas, barras y puntos que representan la cantidad a repartir (que les servirá de apoyo para el reparto igualitario), y que nos permitirá comprobar que lo han representado físicamente con el material. Después deben realizar un reparto por fases, comenzando por las unidades de mayor magnitud (en este caso las placas). Una vez que no haya suficientes unidades para repartir a todas las personas, se deberán transformar en unidades de orden inferior (barras), repartirlos, y cuando no haya suficientes transformarlas en puntos, que se repartirán de forma igualitaria. El objetivo de estas tareas es iniciar a los alumnos en el concepto de reparto “por fases”.

Para evaluar el ritmo de aprendizaje, la ficha 5c solo se entrega una vez han completado correctamente la ficha 5 y 5b. 17 de los 21 alumnos pudieron terminar la ficha 5c.

Durante la sesión, especialmente al principio, surgen bastantes dudas en cuanto a qué deben dibujar, siendo necesario recordarles el uso de los materiales y explicarles qué dibujar.

Mostramos un ejemplo de tarea correctamente resuelta en la Figura 70.

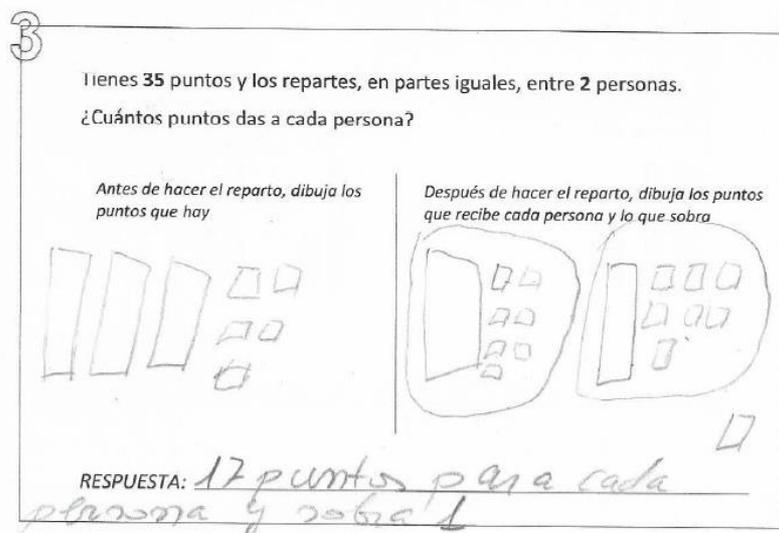


Figura 70. Ficha 5b. Tarea correctamente resuelta (A20).

A continuación, mostramos el análisis de resultados agregados de las tres fichas, que en total contienen cinco tareas:

Tabla 11. Resultados agregados fichas 5, 5b y 5c

Alumno/a	Tareas realizadas	Sin errores	Tareas con errores en la representación gráfica	Tareas con errores en la respuesta en letra	Tareas con resultado incorrecto
A14	4	1	3	1	0
A11	5	0	5	0	0
A20	5	2	3	2	2
A13	5	4	1	0	0
A22	5	4	1	1	1
A01	5	3	2	1	0
A17	5	0	5	3	3
A15	5	1	4	2	2
A09	5	0	5	4	4
A08	5	0	5	4	3
A10	5	1	4	0	0
A16	5	0	4	1	1
A23	5	5	0	0	0
A06	5	1	3	1	0
A19	5	1	4	0	0
A05	5	0	5	0	0
A18	5	0	5	0	0
A12	3	0	3	0	0
A03	3	1	2	0	0
A07	3	3	0	0	0
A02	3	0	3	0	0

Los errores en la representación gráfica se pueden clasificar varias categorías:

- 1) No representan las unidades que sobran

4

Tienes 37 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 4 personas.
¿Cuántos puntos das a cada persona?

Antes de hacer el reparto, dibuja los puntos que hay

Después de hacer el reparto, dibuja los puntos que recibe cada persona y lo que sobra



RESPUESTA: 9 para cada uno y sobra 1

Figura 71. Ficha 5b. No muestra las unidades sobrantes (A14).

- 2) No dibujan con precisión los materiales con la forma que les corresponde (cuadrado grande para placa, rectángulo para barra y cuadrado pequeño/punto para puntos)

2

Tienes **303** puntos y los repartes, en partes iguales, entre **3** personas.
¿Cuántos puntos das a cada persona?

Antes de hacer el reparto, dibuja los puntos que hay

Después de hacer el reparto, dibuja los puntos que recibe cada persona y lo que sobra

RESPUESTA: ciento un punto por persona

Figura 72. Ficha 5. Falta de precisión dibujando el material (A14).

- 3) Dibujan cuántas unidades se le dan a una persona, pero no indican cuántas veces se repite, con lo que no dibujan el total de unidades a repartir. A pesar de que en el enunciado no se les pide específicamente, el ejemplo mostrado así lo hacía y se les repitió constantemente que, si no dibujaban todo el resultado, al menos deberían escribir cuántas veces se repite.

3

Tienes **35** puntos y los repartes, en partes iguales, entre **2** personas.
¿Cuántos puntos das a cada persona?

Antes de hacer el reparto, dibuja los puntos que hay

Después de hacer el reparto, dibuja los puntos que recibe cada persona y lo que sobra

RESPUESTA: a diez y siete y sobra uno

Figura 73. Ficha 5. No indica cuántas personas reciben la cantidad (A19).

Es de destacar que no se les solicita explícitamente el representar los resultados numéricos con letra, pero varios lo escriben, en ocasiones de forma incorrecta:

3

Tienes 35 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 2 personas.
¿Cuántos puntos das a cada persona?

Antes de hacer el reparto, dibuja los puntos que hay

Después de hacer el reparto, dibuja los puntos que recibe cada persona y lo que sobra

RESPUESTA: a diez y siete y soba uno

Figura 74. Ficha 5. Error en la escritura del resultado (A19).

Resulta también interesante destacar que, a pesar de haberles advertido que aún no vamos a utilizar el algoritmo de la división, algunos identifican que el reparto se puede resolver mediante una división y la realizan, especialmente en los repartos mayores a la centena (tarea 5 y 6):

5

Tienes 412 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 2 personas.
¿Cuántos puntos das a cada persona?

Antes de hacer el reparto, dibuja los puntos que hay

Después de hacer el reparto, dibuja los puntos que recibe cada persona y lo que sobra

RESPUESTA: $412:2=206$

Figura 75. Ficha 5c. Utilización del algoritmo de la división (A18).

Se han observado durante la sesión los siguientes aspectos:

- Algunos alumnos se apoyaban poniendo el valor numérico del material al lado del dibujo (ej. barra \rightarrow 10). Nos parece adecuado como apoyo, y denota que realmente tienen el sistema decimal en la cabeza.
- Tal y como se vio durante la primera etapa, tienen bastantes dificultades para escribir números en su representación con letra.
- Algunos han dibujado "barras" con valor de 100. Cometan estos errores cuando lo tratan de hacer directamente sin utilizar el material. Será necesario insistir en el uso del material en posteriores sesiones.

- Algunos no sabían hacer el reparto con el material (ni sin él) cuando tenían que dividir un bloque/barra en unidades más pequeñas, mostrando carencias que se detectaron en la primera etapa.
- A09 utilizaba la calculadora en las tareas 5 y 6. Se ha corregido su ejercicio teniendo esto en cuenta y valorándolo como error porque daba como resultado números decimales.
- A02 y A12 se apoyan entre ellas de modo que no realizan las tareas de forma individual. También A05 se apoya en A18 constantemente.
- No quieren tener los ejercicios mal, así que si no saben hacerlo bien preguntan a los maestros hasta que se lo corregimos o se apoyan en el compañero de al lado, evitando por todos los medios entregar algo incorrecto. Eso hace que, aunque el análisis posterior de las fichas sea algo engañoso respecto al nivel de la clase, analizando todos los aspectos de los ejercicios, siempre se percibe el verdadero nivel del alumno. En cualquier caso, se tomarán medidas para minimizar este efecto en posteriores sesiones.
- Como se observó en la valoración inicial, la mayoría de los alumnos sabe utilizar el algoritmo de división al menos con una cifra, así que lo utilizan de forma automática, aunque se les pida no hacerlo explícitamente.

Aspectos positivos de la sesión:

- El material manipulativo es un éxito. Les gusta mucho y están realmente dedicados a las tareas. Este aspecto lo considero un éxito, y valida la hipótesis de la adecuación de utilizar el material manipulativo con este alumnado adulto.
- Están realmente comprendiendo la relación entre la división y el reparto igualitario. A los que lo tienen menos asimilado, el material les ayuda mucho.

5.3 Tercera sesión. Reparto (II) y Reparto (III)

Fecha: 17/1/2018
Número de alumnos: 18-19
Duración de la sesión: 60'
Resultados completos escaneados: ANEXO 7

En esta sesión se concluye con la segunda etapa (“comprensión del concepto de reparto igualitario”). Continuamos trabajando el concepto del reparto igualitario, pero con tareas de búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto.

Tabla 12. Estructura de la sesión 3

Etapa	Descripción	Nº tareas	Fichas
2	Relación entre los elementos que intervienen en un reparto (búsqueda de condiciones iniciales).	8	6 y 6b
2	Comprobación de la bondad de repartos igualitarios.	8	7, 7b y 7c

En esta ocasión se les daba menos ayuda por parte del profesor que en las sesiones anteriores, por lo que se esperan más ejercicios erróneos que en las sesiones previas.

b) Relación entre los elementos que intervienen en un reparto (búsqueda de condiciones iniciales)

Continuamos trabajando el concepto del reparto igualitario, pero con tareas de búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto. Los alumnos desconocen la cantidad inicial a repartir y deben encontrarla a partir de los datos que sí conocen: la cantidad que recibe cada persona, entre cuántas personas han participado en el reparto y si han sobrado puntos al finalizar el reparto. Estas tareas obligan a los alumnos a reforzar el concepto de reparto igualitario sin tener que hacer necesariamente éste, es decir, a poner en juego el concepto de reparto de igualitario y la relación entre los términos del mismo. Se les propone un total de 8 tareas, repartidas en las FICHAS 6 y 6b.

En la Figura 76 mostramos un ejemplo de tarea correctamente resuelta.

7

Tienes un número de puntos para repartir. Cuando los repartes, en partes iguales, entre 10 personas, das a cada persona 23 puntos y sobran 3 puntos.
¿Cuántos puntos tenías para repartir?

$23 \times 10 = 230 + 3 = 233$
 $233 : 10 = 23 \text{ puntos y sobran tres puntos}$

RESPUESTA: _____

Figura 76. Ficha 6. Búsqueda condiciones iniciales correcta (A13).

Estas tareas les han resultado mucho más difíciles que las anteriores y se observan diferentes niveles de comprensión de los alumnos. La mayoría utilizan la relación entre los términos de la división para calcular el dividendo, pero un total de cinco cometen errores en la notación al igualar términos que no son equivalentes. Consideramos que este error no es importante desde un punto de vista conceptual.

6

Tienes un número de puntos para repartir. Cuando los repartes, en partes iguales, entre 20 personas, das a cada persona 6 puntos y sobran 2 puntos.
¿Cuántos puntos tenías para repartir?

RESPUESTA: $20 \times 6 = 120 + 2 = 122 \text{ puntos}$

Figura 77. Ficha 6. Resultado correcto, error en notación (A16).

Dos alumnos conjeturaban el resultado mentalmente y cuando estimaban el resultado realizaban la división:

6

Tienes un número de puntos para repartir. Cuando los repartes, en partes iguales, entre 20 personas, das a cada persona 6 puntos y sobran 2 puntos.
¿Cuántos puntos tenías para repartir?

$122 \overline{) 122}$
 $02 \overline{) 122}$

RESPUESTA: tenía 122 puntos

Figura 78. Ficha 6. Resultado obtenido mediante conjeturas (A15).

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 13.

Tabla 13. Resultados agregados Ficha 6 y 6b

Alumno/a	Usa relación de términos de la división, sin errores en notación	Usa relación de términos de la división, con errores en notación	No usa relación de términos de la división, conjeturando resultado	Resultados incorrectos
A10, A11, A02, A14, A13, A23, A04, A19, A16, A08	10			
A07, A17, A01, A06, A12		5		
A15, A18			2	
A05, A09				2

En el caso de A10, a pesar de que en la ficha no aparezcan los resultados, pude comprobar cómo utilizaba la relación entre términos de la división en un papel aparte. También se ha comprobado que A05 y A09 no sabían hacer esta ficha. Lo que han escrito lo han hecho apoyándose de otro compañero en su totalidad, y eran los únicos dos (2 de los 19) que no sabían encontrar la solución de ninguna forma.

La utilización del material era opcional, y algunos si lo han utilizado motu proprio para comprobar los resultados, lo que es muy positivo ya que les ayuda a comprender los procesos de cálculo que tienen automatizados y de los que desconocen su justificación.

Se observa que cuando hay divisores de más de una cifra habitualmente no utilizan el material, ya que les resulta muy laborioso ejemplificar el reparto con materiales. Es difícil llegar a un compromiso adecuado entre que el divisor sea grande (y no se pueda hacer mentalmente) y a la vez no tan grande como para que les dé pereza el utilizar el material.

A pesar de que he repasado la relación entre los términos de la división y he escrito la fórmula $D = d \times c + r$ con ejemplos en la pizarra, les ha costado mucho el ser conscientes de que la estaban aplicando. Es decir, les resulta muy complicado comprender que están multiplicando el divisor por el cociente y sumándole es resto, y en muchas ocasiones lo ejecutan de forma mecánica sin entenderlo.

c) Comprobación de la bondad de repartos igualitarios

Las ocho tareas de las FICHAS 7, 7b y 7c tienen por objetivo que los alumnos comprendan que el reparto debe ser exhaustivo, es decir, que cada participante debe recibir la mayor cantidad posible y que esto obliga a que lo sobrante (el resto) debe ser menor que el número de participantes (divisor).

En las tareas conocen todos los datos de los repartos, resueltos por adelantado, y deben indicar si son correctos o no, con ayuda del material manipulativo o sin él. En caso de no estar correctamente resuelto, es fundamental que justifiquen por qué.

Mostramos un ejemplo de tarea correctamente resuelta:

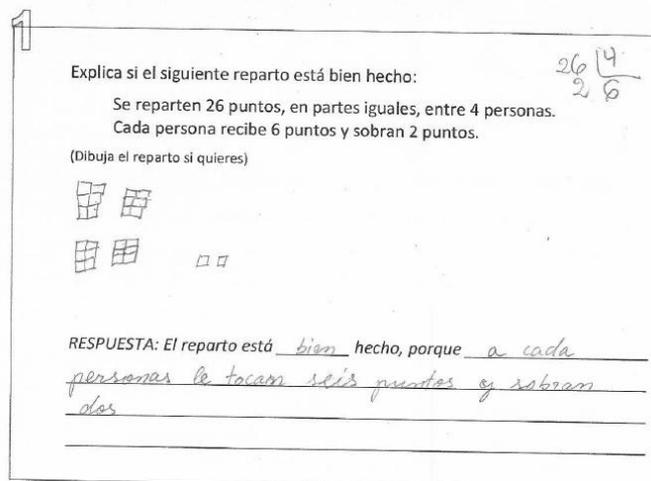


Figura 79. Ficha 7. Comprobación correctamente resuelta (A08).

Para evaluar el ritmo de aprendizaje, la ficha 7c solo se entrega una vez han completado correctamente la ficha 7 y 7b. Únicamente 5 de los 21 alumnos pudieron terminar la ficha 7c en clase, así que al resto se le pidió que la realizaran en casa.

En estas tareas se observa como hay más alumnos que cometen errores al comprobar la bondad de los repartos, particularmente los de la ficha 7b.

En la Tabla 14 se muestran los resultados obtenidos.

Tabla 14. Resultados agregados Ficha 7, 7b y 7c

Alumno/a	Resultados correctos y bien justificados	Resultados correctos aunque con justificaciones incorrectas o incompletas	Algunos resultados incorrectos
A01, A13, A10, A11, A19, A08	6		
A17, A15, A04, A23, A14, A07, A02		7	
A09, A06, A16, A12, A05			5

En cuanto a las justificaciones incorrectas, encontramos dos tipologías básicas:

- 1) No justificar por qué el reparto está mal realizado:

2

Explica si el siguiente reparto está bien hecho:
 Se reparten 26 puntos, en partes iguales, entre 4 personas.
 Cada persona recibe 5 puntos y sobran 6 puntos.
 [Dibuja el reparto si quieres]

RESPUESTA: El reparto está Mal hecho, porque el reparto

Figura 80. Ficha 7. Reparto incorrecto no justificado (A12).

- 2) No saber justificar por qué el reparto está mal realizado y utilizar el algoritmo como prueba:

3

Explica si el siguiente reparto está bien hecho:
 Se reparten 25 puntos, en partes iguales, entre 2 personas.
 Cada persona recibe 13 puntos y sobra 1 punto.

RESPUESTA: El reparto está incorreto hecho, porque 25/2 = 12

Figura 81. Ficha 7b. Utilizando el algoritmo como explicación (A17).

La utilización del material es opcional. Todos los alumnos menos dos han optado por no usarlo (explicando que por pereza), pero los que sí lo han hecho, han comprendido el reparto perfectamente y han dado la explicación de forma correcta. Es de destacar el caso de A08, que ha estado utilizando el material con el apoyo de la maestra todo el rato. Tiene los ejercicios correctos y bien justificados, aunque debido al apoyo recibido, solo ha podido completar tres de las ocho tareas. La maestra ha comentado al

terminar la sesión que le ha sido muy útil y ha entendido el reparto a la perfección. Conjeturamos que la utilización del material hubiera sido muy beneficiosa al resto de alumnos que han tenido errores.

Se les ha recordado la conveniencia de utilizar la relación entre los términos de la división para realizar las comprobaciones, sin embargo, la mayoría ha recurrido a hacer la división con la "caja" y comparar el enunciado con la división. De nuevo se observa que no asimilan correctamente los conceptos, de hecho, varios confunden constantemente en el enunciado cociente y resto, multiplicando divisor por resto y sumándole el cociente, o cometiendo errores similares.

A título individual, se ha observado que:

- A09 (alumno NEE) sacaba la calculadora para hacer las divisiones y comprobarlas. Aun así, no sabía hacerlo.
- A18 no ha querido entregar la ficha porque no la había terminado.
- A05 no es capaz de realizar ninguno de las tareas propuestas. No entrega la ficha porque quiere hacerla en casa, pero se la he considerado como errónea tras ver lo que estaba haciendo.

Es reseñable la motivación que tienen. Como ejemplo ilustrativo tenemos el hecho de que al acabar la clase querían seguir, así que hemos estado cinco minutos extra. También han estado en muchos momentos totalmente concentrados en la tarea (especialmente con la ficha 6/6b) y casi en silencio, algo extraño en un grupo que es habitualmente bastante ruidoso. Esto sugiere que el planteamiento de los ejercicios es muy adecuado. Varios me han confirmado en persona que les gusta mucho lo que estamos haciendo.

Algunas conclusiones obtenidas durante la sesión son:

- Las tareas de comprobación de la bondad de repartos igualitarios presentan más dificultades que los anteriores tipos de tareas, dado que obliga a los alumnos a tener presente y poner en juego la relación entre los términos de la división.
- En general, están saliendo datos interesantes y estamos comprobando que era necesaria esta enseñanza del refuerzo del algoritmo de la división que se está llevando a cabo.
- Por la experiencia con A08, en la próxima sesión se les pedirá que utilicen el material para resolver las tareas pero con cantidades en el dividendo más pequeño, para que sea más sencillo. La utilidad del material está fuera de duda, así que hay que tratar de superar la pereza que tienen a utilizarlo.

5.4 Cuarta sesión. Refuerzo del algoritmo de la división (I)

Fecha: 22/1/18
Número de alumnos: 18-20
Duración de la sesión: 65'
Resultados completos escaneados: ANEXO 7

Tabla 15. Estructura de la sesión 4

Etapa	Descripción	Nº tareas	Fichas
3	Enseñanza/refuerzo del algoritmo de la división	6	8a-1, 8a-2, 8b-1, 8b-2

En esta sesión comienza la tercera etapa de la intervención, la enseñanza/refuerzo del algoritmo de la división.

Es bastante común que en la representación gráfica de la división no dibujen el resto, a pesar de que en el ejemplo sí se muestra, aunque siendo estrictos no se les pregunta específicamente, por lo que se ha tomado como correcto en los resultados agregados (ver Figura 83).

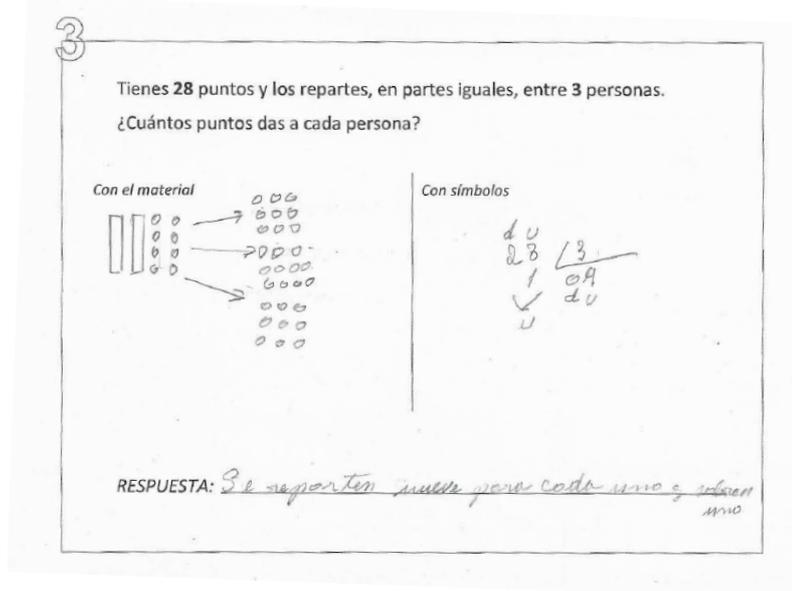


Figura 83. Ficha 8. Resto no dibujado (A22)

A la hora de evaluar los resultados consideramos relevante el separar la corrección de la representación gráfica de la representación simbólica. Atendiendo solo a la representación gráfica, se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 16. Resultados agregados ficha 8a. Representación gráfica

Alumno/a	Representación gráfica correcta y completa	Representación gráfica incompleta	Representación gráfica incorrecta
A14, A19, A06, A08, A03, A04, A02, A18, A10, A20	10		
A15, A16, A22, A07, A01		5	
A05, A12, A09, A11, A17			5

El error más frecuente para considerar incompleta la representación gráfica era que no dibujaran el “resto” de la operación:

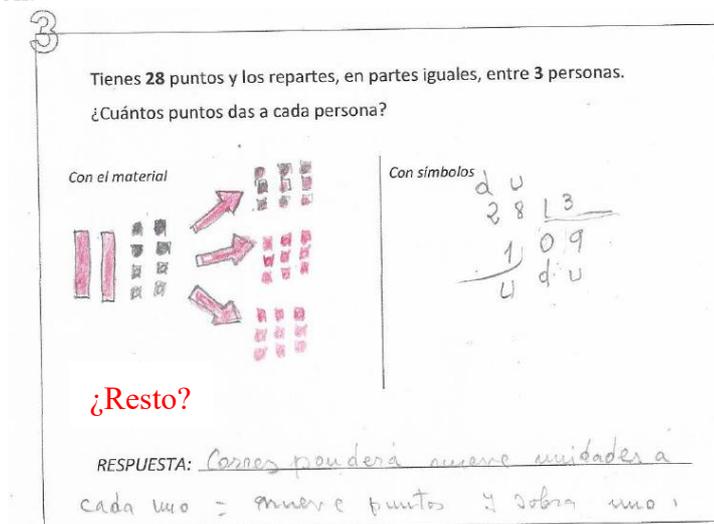


Figura 84. Ficha 8a. Representación gráfica incompleta (no dibuja el “resto”).

A05 se apoyó en lo que había escrito A18 dando muestras de que no era capaz de hacerlo por sí misma, así que se le considera como incorrecto.

Se han obtenido resultados mejores que en sesiones anteriores, lo que muestra que han progresado en el uso de los materiales manipulativos y su representación. Sin embargo, varios alumnos han realizado el dibujo sin utilizar el material y lo hacían mal. Habrá que volver a insistir en la necesidad de utilizar el material.

A continuación, se ofrecen los resultados agregados de la parte simbólica. Como ya se vio en la evaluación inicial, la mayoría de ellos sabe utilizar el algoritmo, así que nos centraremos en comprobar la aceptación del método propuesto de reparto por fases.

Tabla 17. Resultados agregados ficha 8a. Representación simbólica

Alumno/a	Aceptan el método y lo ejecutan correctamente	Aceptan el método pero lo ejecutan mal	No aceptan el método
A15, A22, A01, A07	4		
A16, A08, A02, A18, A05, A20, A10, A04, A03, A11		10	
A14, A19, A06, A12, A09, A17			6

De los cinco alumnos que realizaron incorrectamente la representación material, uno de ellos (A11) sí acepta el método propuesto, aunque no lo utiliza bien. Los otros cuatro no. Era previsible que hubiera alumnos que no aceptaran la simbolización (6 de 20), bien por dificultades cognitivas o bien por inercia al cambio.

Entre los alumnos que intentan el método propuesto, pero no lo aplican bien, el error más común es el no realizar el reparto por fases realmente, sino realizarlo de la manera tradicional, y después identificar las centenas, decenas y unidades, lo que queda patente en tareas como esta:

3

Tienes 28 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 3 personas.
¿Cuántos puntos das a cada persona?

Con el material



Con símbolos

$$\begin{array}{r} d \quad u \\ 28 \overline{) 13} \\ \underline{9} \\ 4 \\ \underline{3} \\ 1 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

RESPUESTA: 9 a cada uno y sobra 1 punto

Figura 85. Ficha 8a. No realizado por fases (A08).

Varios de estos alumnos, escribían la "c", "d", "u" tras resolver la división por el método tradicional, lo que demuestra que no están aceptando el método propuesto.

Sin embargo, en base a estos resultados, se observa que cuatro alumnos aceptan el método propuesto en base a estos resultados y lo aplican correctamente, lo que estimamos que es un buen resultado al tratarse de la primera vez que se enfrentan a él.

A continuación, se les entregó la ficha 8b-1 y 8b-2, donde se les ofreció un mayor apoyo que en la anterior, pero al ser divisiones con dividendos y cocientes más elevados, se esperaban peores resultados.

Los resultados se muestran en la Tabla 18.

Tabla 18. Resultados agregados ficha 8b. Representación gráfica

Alumno/a	Representación gráfica correcta y completa	Representación gráfica incompleta	Representación gráfica incorrecta
A06, A04, A18, A22, A01	5		
A15, A10, A07		3	
A11, A05, A19, A14, A03, A02, A08, A12, A17, A09			10

Se observa cómo al utilizar cifras más altas, la representación ha sido bastante peor que antes (únicamente cinco lo han representado correctamente ahora, por diez de la ficha anterior). Se ha observado como habitualmente los alumnos realizaban primero la representación simbólica.

Se observa también que A22, que anteriormente lo aceptaba y ejecutaba correctamente, esta vez no lo ha ejecutado bien:

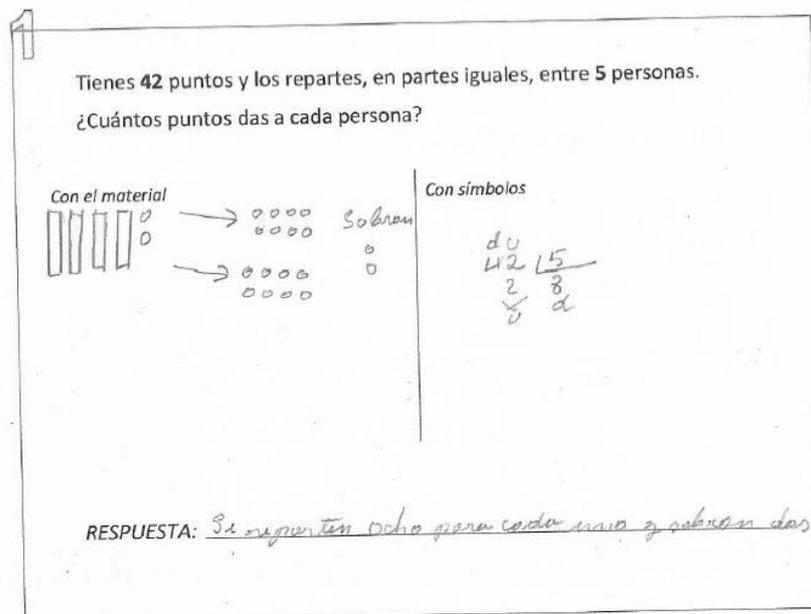


Figura 86. Ficha 8b. No realizado correctamente por fases (A22).

Es interesante destacar que hacia el final de la sesión varios alumnos se han dado cuenta que con el material era más sencillo, y han comenzado a usarlo (tal y como les había sugerido de modo insistente).

En la Tabla 19 se ofrecen los resultados de la parte simbólica.

Tabla 19. Resultados agregados ficha 8b. Representación simbólica

Alumno/a	Aceptan el método y lo ejecutan correctamente	Aceptan el método pero lo ejecutan mal	No aceptan el método
A07, A10, A15, A01	4		
A08, A11, A04, A22		4	
A09, A17, A12, A02, A03, A14, A19, A05, A06, A18			10

En la ficha 8a, únicamente seis alumnos no aceptaban el método, pero al incrementar la dificultad, este número ha subido a diez, y además otros cuatro no lo han ejecutado correctamente, lo que hace que únicamente el 22% de los alumnos (4 de 18) estén aceptándolo y ejecutándolo correctamente.

Resumimos a modo de conclusiones los resultados obtenidos en la sesión:

- La aceptación del método no está siendo todo lo exitosa que se pretendía.
- El material no se está utilizando de forma habitual.
- La inercia de los alumnos a utilizar el algoritmo de la forma que aprendieron es muy fuerte, de modo que bastantes alumnos se muestran reacios a realizar las acciones de reparto igualitario efectuado por fases.

En vista de estos resultados, se vio necesario alterar la planificación inicial y realizar una tarea extra del mismo tipo (FICHA 8b-extra), ofreciéndoles un ejemplo previamente a todo el grupo-clase de forma más guiada. Se implementará en la siguiente sesión.

5.5 Quinta sesión. Refuerzo del algoritmo de la división (II)

Fecha: 24/1/18
Número de alumnos: 17-18
Duración de la sesión: 40'
Resultados completos escaneados: ANEXO 7

Tabla 20. Estructura de la sesión 5

Etapa	Descripción	Nº tareas	Fichas
3	Enseñanza/refuerzo del algoritmo de la división	1	8b-extra

Esta ha sido una sesión especial extra, que comienza con la recomendación a todos los alumnos de la utilización del material de placas, barras y puntos, aunque no tengan que hacer los dibujos en las fichas. El objetivo es focalizar la enseñanza en el paso entre las acciones manipulativas de reparto y la simbolización del algoritmo. Es un paso no evidente para ellos, y aún menos para alumnos de edad avanzada que conocen desde hace años el algoritmo a pesar de que no lo han comprendido nunca. El reto que perseguimos es que lo apliquen bien y además sepan justificarlo. Llegados a este punto, vemos que es un objetivo inalcanzable para unos pocos alumnos que tienen dificultades cognitivas (A05 y A09, entre otros) pero parece que se puede alcanzar con otros alumnos de la clase.

Para incidir en las fases del reparto se realizó en la pizarra la última división de la ficha 8b-2, repartir 100 puntos entre 6 personas, a partes iguales. Se realizaba por fases y tras cada pregunta, se usaba el material para el reparto/transformación, se dibujaba y lo escribía en "la caja" en la parte derecha

de la pizarra, remarcando todo lo importante (unidad con la que estábamos trabajando, fases del reparto, órdenes de las unidades...).

Además, y más importante, se dejaron escritas en la pizarra las tres preguntas clave correspondientes a las tres fases del reparto:

“1ª pregunta: Con 1 centena de puntos, ¿puedo dar alguna centena a cada una de las 6 personas?”

Respuesta: No, entonces tengo que cambiar la centena por 10 decenas. Ahora tengo 10 decenas para repartir.

2ª pregunta: Con 10 decenas, ¿puedo dar alguna decena a cada una de las 6 personas? *Respuesta: Sí, puedo dar 1 decena y me quedan 4 decenas sin repartir. Ahora tengo que cambiar las 4 decenas a unidades, y tengo 40 unidades para repartir.*

3ª pregunta: Con 40 unidades, ¿puedo dar alguna unidad a cada una de las 6 personas? *Respuesta: Sí, puedo dar 6 unidades y me quedan 4 unidades sin repartir.*

Ahora reconstruyo la cantidad que he repartido y veo que el cociente es 16 unidades. También veo que lo que queda sin repartir, el resto, es 4 unidades.”

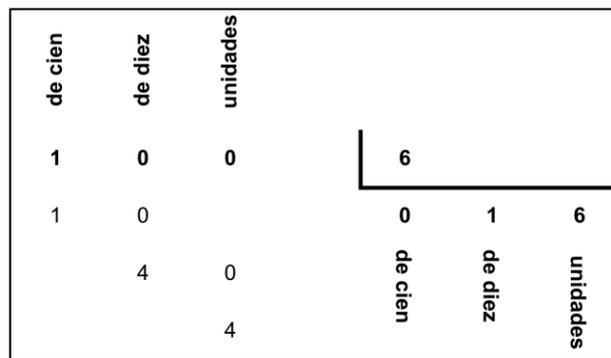


Figura 87. Representación simbólica del ejemplo de la sesión 5.

Tras ello, se les pidió que realizaran una única tarea (FICHA 8b-extra), despacio y siendo estrictos en realizarlo de la misma forma que yo, haciéndose las preguntas, utilizando el material y realizando el dibujo y "la caja" simultáneamente.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla 21. Resultados agregados ficha 8b-extra

Alumno	Aceptan el método y lo ejecutan correctamente	No aceptan el método y lo ejecutan mal
A04, A18, A13, A16, A23, A08, A01, A22, A15, A11	10	
A10, A12, A02, A14, A05, A17, A09		7

Reflejo a continuación algunos aspectos del desarrollo:

- A18 realmente no entendía cómo utilizar el material y cómo dibujarlo. Sin embargo, sí utiliza correctamente la representación simbólica.
- Una vez transformadas las placas en barras, el comenzar a repartir entre seis personas (poniendo seis flechas que salían de las barras) les ha costado mucho. Al 50-60% de los

alumnos yo les he dibujado las flechas para que vieran a lo que me refería, a pesar de haberlo realizado en la pizarra minutos antes.

- Al 50% les costaba mucho realizar los dibujos ordenadamente porque realmente no entendían bien lo que venía después.

Aun así, se han obtenido unos resultados muy alentadores. Más del 50% de los alumnos comprende las fases del reparto y la saben simbolizar. En la sesión anterior únicamente el 22% de ellos lo sabía simbolizar correctamente.

Tienes **200** puntos y los repartes, en partes iguales, entre **6** personas.
¿Cuántos puntos das a cada persona?

Con el material

100 equivale a 10 partes

Con símbolos

RESPUESTA: _____

Figura 88. Ficha 8b-extra. Simbolización correcta (A04).

Los resultados obtenidos nos reafirman en que estamos en el buen camino. Consideramos que la enseñanza es adecuada y que hay que ir despacio para intentar que comprendan el algoritmo el mayor número de alumnos. Es mejor que comprendan algo bien que avanzar a costa de "perder" alumnos por el camino, aunque no se puedan completar las cuatro etapas de la intervención.

5.6 Sexta sesión. Refuerzo del algoritmo de la división (III)

Fecha: 31/1/2018
Número de alumnos: 17-21
Duración de la sesión: 100'
Resultados completos escaneados: ANEXO 7

Tabla 22. Estructura de la sesión 6

Etapa	Descripción	Nº tareas	Fichas
3	Enseñanza/refuerzo del algoritmo de la división	14	9a, 9b, 9c, 9d, 9e
3	Enseñanza/refuerzo del algoritmo de la división	14	10a, 10b, 10c, 10d, 10e, 10f

Esta sesión se divide en dos partes, cada una de 50 minutos. En la primera se proponen catorce tareas (FICHAS 9a, 9b, 9c, 9d, 9e), donde deben realizar una división con divisor de una cifra y escribir la comprobación de la división una vez resuelta, tal y como se representa en el ejemplo siguiente:

Ejemplo

Tienes 35 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 2 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?

<i>d u</i>		<i>Cociente: 17</i>
35	2	<i>Resto: 1</i>
15	17	
1	<i>d u</i>	

Comprobación:
 $D = d \times c + r \rightarrow 17 \times 2 + 1 = 34 + 1 = 35$

Figura 89. Ficha 9 Ejemplo de resolución.

La utilización de material manipulativo vuelve a ser opcional, aunque se recomienda utilizarlo como apoyo. Se les entregan las fichas de una en una, de forma que se puede observar la velocidad de resolución de problemas además de la correcta simbolización del algoritmo.

Los resultados de estas tareas se muestran en la Tabla 23.

Tabla 23. Resultados agregados ficha 9a-9f

Alumno/a	Aceptan el método y lo ejecutan correctamente	No ejecutan el método correctamente o no lo aceptan
A01, A13, A22, A18	4 (hacen 14 divisiones)	
A17, A04, A03, A23, A15, A19, A06, A09, A10		9 (hacen 14 divisiones)
A14, A16, A11, A08, A12, A02, A21		7 (hacen 11 divisiones)

Se observa que varios alumnos cometen errores en la notación de la comprobación, ya que igualan términos que no son iguales, pero no lo tendremos en cuenta en la corrección, ya que el objetivo es evaluar la adopción de la propuesta planteada.

2 Tienes 75 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 7 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?

$$\begin{array}{r} 75 \overline{) 75} \\ \underline{05} \\ 20 \end{array}$$

Cociente: 10
Resto: 5

Comprobación:

$7 \times 10 = 70 + 5 = 75$

Figura 90. Ficha 9. Error en la notación (A16).

La mayoría de alumnos es capaz de realizar las divisiones por una cifra correctamente, a excepción de A09, y A14 (que se apoyaron constantemente en el compañero), es decir, dos de los veinte alumnos, lo que representa un 10%. Es un porcentaje mejor que el obtenido en la prueba inicial, aunque hay que tener en cuenta que A05 faltó a la sesión e incrementaría el porcentaje de alumnos que no supieron resolverlo.

Las conclusiones de esta primera parte de la sesión son:

- Un 90% (18) de los alumnos es capaz de dividir por una cifra utilizando el método de su elección.
- Un 20% de los alumnos (4) ha aceptado el método propuesto y lo aplica correctamente, comprendiendo y ejecutando correctamente el reparto por fases.

En la segunda parte de la sesión, se les pide continuar con las fichas que tengan pendientes y se les entregan nuevas tareas con dos y tres cifras en el divisor (FICHAS 10a, 10b, 10c, 10d, 10e, 10f), donde como apoyo adicional se les pedirá que escriban la tabla del doce y del veinticinco, que serán las utilizadas en todas las divisiones.

Las tareas propuestas son:

- 1) Tienes 340 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 12 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 2) Tienes 110 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 12 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 3) Tienes 1000 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 12 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 4) Tienes 120 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 25 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 5) Tienes 400 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 25 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 6) Tienes 950 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 25 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 7) Tienes 1255 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 25 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 8) Tienes 3000 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 25 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?

- 9) Tienes 4005 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 25 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 10) Tienes 404 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 12 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 11) Tienes 1212 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 12 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 12) Tienes 760 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 120 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 13) Tienes 4500 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 250 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?
- 14) Tienes 8000 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 250 personas. ¿Cuántos puntos das a cada persona?

Estas tareas son definitivas para evaluar la aceptación del método, ya que, al tratarse de divisiones más complejas, puede ser que traten de volver al método que ya conocían para resolverlas. Además, estas tareas permiten detectar si la adopción del método es completa y real o si escribían d , c , u después de resolver por el método tradicional la división.

Mostramos un ejemplo de tarea correctamente resuelta:

Tienes 340 puntos y los repartes, en partes iguales, entre 12 personas.
¿Cuántos puntos das a cada persona?

$$\begin{array}{r}
 \text{c d u} \\
 340 \overline{) 12} \\
 \underline{100} \\
 50 \\
 \underline{02} \\
 0
 \end{array}$$

Cociente: 28

Resto: 2

Comprobación:

$$D = d \times c + R \quad 28 \times 12 + 2 = 340$$

Figura 91. Ficha 10. Tarea 1 correctamente resuelta (A22).

Un objetivo secundario de estas tareas es incidir en el concepto de “repartos equivalentes”, en los que se recibe la misma cantidad por persona cuando aumentan en la misma proporción los objetos a repartir y el número de personas entre los que se reparte. Para ello, la tarea 5 propone 250:2 y la tarea 7 propone 500:4.

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 24.

Tabla 24. Resultados agregados ficha 10a-10e

Alumno/a	División por 2 cifras correcta	División por 3 cifras correcta	Comprobación realizada	Acepta el método
A06	SI	Sin tiempo	SI	NO
A19	SI	Sin tiempo	NO	NO
A23	SI	NO	SI	NO
A03	SI	NO	SI	NO
A04	SI	NO	SI	NO
A18	SI	Sin tiempo	SI	NO
A15	SI	Sin tiempo	SI	NO
A17	SI	Sin tiempo	SI	NO
A13	SI	SI	SI	SI
A01	SI	SI	SI	SI
A10	SI	SI	SI	NO
A02	SI (solo 3)	Sin tiempo	SI	NO
A21	SI (solo 3)	Sin tiempo	SI	NO
A11	SI	Sin tiempo	SI	NO
A22	NO	NO	NO	NO
A08	SI (solo 3)	NO	NO	NO
A16	SI	Sin tiempo	SI	NO
A14	NO (copiaba)	NO	NO	NO
A09	NO	NO	NO	NO
A12	SI (solo 3)	NO	SI	NO

Se observa como A18, que en la anterior ficha parecía que había asimilado el método, en realidad no era así, y falla cuando el dividendo es de más de 2 cifras, lo que indica que no estaba realizando el reparto por fases.

Es significativo que, con tareas más difíciles, se ha visto que únicamente dos alumnas han aceptado la propuesta que hemos realizado: A13 y A01. Sin embargo, se ha mejorado considerablemente los resultados de la prueba inicial, aunque hayan utilizado el algoritmo tradicional desligado del reparto igualitario.

De 20 alumnos, 17 eran capaces de realizar la división por 2 cifras, y de entre ellos 15 han sabido realizar la comprobación. Eso significa una mejora sustancial en alumnos que ahora son capaces de realizar la comprobación y una ligera mejora en alumnos que ahora sí son capaces de realizar la división.

Se muestra la comparativa entre el momento actual y en el momento de la prueba inicial:

Tabla 25. Comparativa prueba inicial vs sesión 6

	División correcta con comprobación	División correcta sin comprobación	División incorrecta
Prueba Inicial	47%	35%	18%
Tras la sesión 6	75%	10%	15%

A modo de resumen, concluimos en relación con la segunda parte de la sesión:

- Únicamente dos alumnas han asimilado y aceptado la propuesta.
- Se ha producido una mejora sustancial en el número de alumnos que son capaces de realizar la comprobación de la división.
- Ha mejorado la capacidad general de cálculo de divisiones a pesar de que la mayoría de los alumnos se muestran reacios a realizar el reparto por fases. En cualquier caso, podemos afirmar que los alumnos han mejorado en la comprensión y aplicación del algoritmo de la división de números naturales.

5.7 Séptima sesión. Nuevos significados de la división y problemas

Fecha: 5/2/2018
Número de alumnos: 19
Duración de la sesión: 50'
Resultados completos escaneados: ANEXO 7

Tabla 26. Estructura de la sesión 7

Etapa	Descripción	Nº tareas	Fichas
4	Problemas	5	12a y 12b
Evaluación	Valoración Individual final	3	11

Al no estar seguro de si sería posible tener más sesiones con los alumnos, se realizó una introducción a la cuarta etapa y se solicitó una valoración final a los alumnos sobre la propuesta de intervención. Como finalmente sí fue posible realizar una nueva sesión de evaluación final, tanto dichos resultados como los resultados de la valoración se analizarán conjuntamente en el siguiente capítulo, dejando esta sección únicamente para el análisis de la introducción a la cuarta etapa.

Cuarta etapa: enseñanza de nuevos significados de la división de naturales y refuerzo del algoritmo mediante la resolución de problemas aritméticos

Por restricciones temporales, únicamente será posible una introducción de treinta minutos a la resolución de problemas aritméticos utilizando el algoritmo de la división en problemas de tipo razón-reparto, división-medida y división-comparación.

El objetivo de esta fase es evitar que asocien a la división únicamente con los repartos igualitarios, y reconozcan otros contextos donde es utilizada.

Se proponen cinco tareas (FICHAS 12 y 12b) que consistían en la resolución de cinco problemas aritméticos que se proponen en la ficha y en los que se precisa aplicar el algoritmo de la división;

- 1) Pagas 996 euros por la compra de 6 camisetas. Si todas las camisetas cuestan lo mismo, ¿cuántos euros cuesta cada camiseta? (División-reparto).
- 2) Imagina que tienes que empaquetar 864 huevos en cajas que contienen 12 huevos cada una. ¿Cuántas cajas necesitas? (División-medida).
- 3) La edad de Laura es la quinta parte de la edad de su abuela. La abuela de Laura tiene 85 años. ¿Cuántos años tiene Laura? (División-comparación).
- 4) Una camioneta lleva 810 botellas de agua mineral. A causa de un accidente se rompieron la tercera parte de las botellas. ¿Cuántas botellas se rompieron? (División-comparación).
- 5) Un libro tiene 212 páginas, de las que he leído 58. ¿Cuántos días tardaré en acabar de leer el libro si cada día leo 7 páginas? (ERE-Agrupamiento con operación previa).

No se les pone ninguna restricción, sino que se les solicita que lo resuelvan con el método que quieran. El objetivo es ver cuántos alumnos tratan de resolverlo por el método trabajado en esta intervención.

Antes de mostrar los resultados indicamos la convención de colores utilizada en la tabla:

- Verde: aceptación del método y correcta implementación.
- Naranja: utilizan método tradicional, camuflado de reparto por fases.
- Blanco: utilizan el método tradicional.

Convención utilizada en el texto (para interpretar la tabla):

- “Incorrecto”: el resultado obtenido no es correcto.
- “Correcto”: el resultado obtenido es correcto.
- “?”: no proporcionan suficientes evidencias para comprobar si lo ha hecho por sí mismo o si se apoya en otro alumno para responder.
- “*”: se apoya en otro alumno para responder.

Tabla 27. Resultados agregados ficha 12

Alumno	División-reparto (1)	División-medida (2)	División-comparación(3)	División-comparación(4)	ERE-Agrup. (5)
A06	Incorrecto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
A19	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
A03	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
A04	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
A18	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
A15	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
A17	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Incorrecto
A13	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
A01	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
A10	Correcto	Correcto	Correcto	Incorrecto	Correcto
A02	?	?	?	?	?
A05	*	*	*	*	*
A08	?	?	?	?	?
A16	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
A14	?	?	?	?	?
A09	*	*	*	*	*
A12	?	?	?	?	?
A07	?	?	?	?	?
A20	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto

Aproximadamente, las dos terceras partes de los alumnos identifican la división como la operación que resuelve los problemas y además realiza correctamente esta operación.

Varios realizaban las operaciones en un papel aparte y escribían directamente el resultado en la hoja, así que no podemos analizar el resultado de forma concluyente.

4

Una camioneta lleva 810 botellas de agua mineral. A causa de un accidente se rompieron la tercera parte de las botellas. ¿Cuántas botellas se rompieron?

$810 : 3 = 270$

270 botellas

Figura 92. Ficha 12. Tarea sin evidencias (A08).

Se observa que cuatro alumnos han tratado de simular el reparto por fases, pero únicamente escribiendo “c”, “d,” y “u” a posteriori, lo que deducimos al observar la falta de centenas en el cociente:

5

Un libro tiene 212 páginas, de las que he leído 58. ¿Cuántos días tardaré en acabar de leer el libro si cada día leo 7 páginas?

$$\begin{array}{r} 212 \\ - 58 \\ \hline 154 \\ 14 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 22 \\ u \end{array}$$

22 días tardaré en leer el libro

Figura 93. Ficha 12. Aplicación incorrecta (A04).

Dos alumnos (A13 y A01) de los 19 han utilizado la metodología propuesta en esta intervención, con resultados muy satisfactorios.

5

Un libro tiene 212 páginas, de las que he leído 58. ¿Cuántos días tardaré en acabar de leer el libro si cada día leo 7 páginas?

$$\begin{array}{r} 212 \\ - 58 \\ \hline 154 \end{array}$$
 páginas quedan

cdu

$$\begin{array}{r} 154 \\ 14 \\ 0 \end{array}$$
 cdu

22 días tardaré en acabar de leer el libro

Figura 94. Ficha 12. Aceptando el método propuesto (A01).

Estos resultados están muy alineados con los de sesiones anteriores, poniéndose de manifiesto que en general los alumnos tienen destreza operativa en la resolución de problemas donde haya que utilizar el algoritmo de la división, aunque la mayoría optan por resolverlo de la manera que conocían. Sin embargo, dos alumnos sí han adoptado el método con éxito. También, observamos que ha habido mejora en el cálculo y en la comprensión de aspectos conceptuales del algoritmo de la división con respecto al estado inicial de los alumnos antes de comenzar la secuencia de enseñanza.

CAPÍTULO 6. EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA IMPLEMENTADA

En esta sección se detallan el diseño, el desarrollo y los resultados obtenidos en la prueba final desarrollada tres meses después de la última sesión de la intervención. Al final del capítulo se realizará una evaluación completa de la propuesta de enseñanza a partir de los resultados de esta prueba, del desarrollo de las sesiones y de la valoración que los propios alumnos realizaron.

6.1 Diseño de la prueba final

En la prueba final se han tenido en cuenta características del aula que se han observado durante las sesiones anteriores. Concretamente se han realizado las siguientes consideraciones:

- 1) Se crearán pruebas de dos tipos, con tareas análogas, pero con enunciados distintos, con el objetivo de minimizar que los alumnos se apoyen entre ellos, dado que durante las sesiones se vio que provocaban algunas inconsistencias en el análisis. La prueba tipo A se imprimirá en papel blanco, y la de tipo B en papel amarillo.
- 2) Se les dará libertad para resolver los ejercicios de la manera que crean mejor.

Ejercicio 1 (división con una cifra en el divisor)

Evalúa la utilización del algoritmo de la división con divisor de una cifra y la utilización de la propuesta metodológica de esta intervención. El enunciado del ejercicio 1 de la prueba tipo A es:

Problema 1

Una tía quiere repartir, en partes iguales, 375 euros entre sus 4 sobrinos, y para saber cuántos euros debe dar a cada sobrino hace la división $375 : 4$

Realiza la división e indica cuánto dinero dará a cada sobrino. ¿Le sobrará dinero?

Figura 95. Evaluación Final. Ejercicio 1-A.

Y el enunciado del ejercicio 1 de la prueba tipo B es:

Problema 1

Una tía quiere repartir, en partes iguales, 275 euros entre sus 4 sobrinos, y para saber cuántos euros debe dar a cada sobrino hace la división $275 : 4$

Realiza la división e indica cuánto dinero dará a cada sobrino. ¿Le sobrará dinero?

Figura 96. Evaluación Final. Ejercicio 1-B.

Ejercicio 2 (división con dos cifras en el divisor)

Evalúa la utilización del algoritmo de la división con divisor de dos cifras y la utilización de la propuesta metodológica de esta intervención. El enunciado del ejercicio 2 de la prueba tipo A es

Problema 2

Una abuela quiere repartir, en partes iguales, 900 euros entre sus 12 nietos

¿Cuánto dinero dará a cada nieto? ¿Le sobrará dinero?

Figura 97. Evaluación Final. Ejercicio 2. Tipo A.

y el enunciado del ejercicio 2 de la prueba tipo B es

Problema 2

Una abuela quiere repartir, en partes iguales, 800 euros entre sus 15 nietos

¿Cuánto dinero dará a cada nieto? ¿Le sobrará dinero?

Figura 98. Evaluación Final. Ejercicio 2. Tipo B.

Ejercicio 3 (comprensión del reparto por fases con divisor de una cifra)

Evalúa la comprensión del método propuesto, ilustrando el reparto por fases de forma directa con un divisor de una cifra. Se les solicita que completen cada una de las preguntas del reparto de un color diferente, de forma que se pueda evaluar la correcta utilización del algoritmo en cada fase del reparto. El enunciado del ejercicio 3 de la prueba tipo A es:

<p>3º) Completa los recuadros de la derecha siguiendo todos los pasos de la división que hemos estudiado en este curso usando los colores indicados:</p>													
<p>1º) Debes descomponer el dividendo (375 euros) en centenas, decenas y unidades, y después debes hacer un reparto igualitario en tres fases, comenzando por las centenas</p>	<p>AQUÍ NO ES NECESARIO QUE ESCRIBAS NADA</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 33%;">de cien</td> <td style="width: 33%;">de diez</td> <td style="width: 33%;">unidades</td> <td style="width: 33%;"></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>7</td> <td>5</td> <td>4</td> </tr> </table>	de cien	de diez	unidades		3	7	5	4				
de cien	de diez	unidades											
3	7	5	4										
<p>2º) Reparte las centenas</p> <p>3º) Si hay centenas sobrantes conviértelas en decenas</p> <p>4º) Reparte las decenas</p> <p>5º) Si hay decenas sobrantes conviértelas en unidades</p> <p>6º) Reparte las unidades</p>	<p>UTILIZA LOS COLORES QUE CORRESPONDAN</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 33%;">de cien</td> <td style="width: 33%;">de diez</td> <td style="width: 33%;">unidades</td> <td style="width: 33%;"></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>7</td> <td>5</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>de de de</td> </tr> </table>	de cien	de diez	unidades		3	7	5	4				de de de
de cien	de diez	unidades											
3	7	5	4										
			de de de										

Figura 99. Evaluación Final. Ejercicio 3. Tipo A.

y el enunciado del ejercicio 3 de la prueba tipo B es:

<p>3º) Completa los recuadros de la derecha siguiendo todos los pasos de la división que hemos estudiado en este curso usando los colores indicados:</p>													
<p>1º) Debes descomponer el dividendo (275 euros) en centenas, decenas y unidades, y después debes hacer un reparto igualitario en tres fases, comenzando por las centenas.</p>	<p>AQUÍ NO ES NECESARIO QUE ESCRIBAS NADA</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 33%;">de cien</td> <td style="width: 33%;">de diez</td> <td style="width: 33%;">unidades</td> <td style="width: 33%;"></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>7</td> <td>5</td> <td>4</td> </tr> </table>	de cien	de diez	unidades		2	7	5	4				
de cien	de diez	unidades											
2	7	5	4										
<p>2º) Reparte las centenas</p> <p>3º) Si hay centenas sobrantes conviértelas en decenas</p> <p>4º) Reparte las decenas</p> <p>5º) Si hay decenas sobrantes conviértelas en unidades</p> <p>6º) Reparte las unidades</p>	<p>UTILIZA LOS COLORES QUE CORRESPONDAN</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 33%;">de cien</td> <td style="width: 33%;">de diez</td> <td style="width: 33%;">unidades</td> <td style="width: 33%;"></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>7</td> <td>5</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>de de de</td> </tr> </table>	de cien	de diez	unidades		2	7	5	4				de de de
de cien	de diez	unidades											
2	7	5	4										
			de de de										

Figura 100. Evaluación Final. Ejercicio 3. Tipo B.

4º) Completa los recuadros de la derecha siguiendo todos los pasos de la división que hemos estudiado en este curso usando los colores indicados:

<p>1º) Debes descomponer el dividendo (800 euros) en centenas, decenas y unidades, y después debes hacer un reparto igualitario en tres fases, comenzando por las centenas.</p>	<p>AQUÍ NO ES NECESARIO QUE ESCRIBAS NADA</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>de cien</td> <td>de diez</td> <td>unidades</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>0</td> <td>0</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">1 5</td> </tr> </table>	de cien	de diez	unidades		8	0	0	1 5				
de cien	de diez	unidades											
8	0	0	1 5										
<p>2º) Reparte las centenas</p> <p>3º) Si hay centenas sobrantes conviértelas en decenas</p> <p>4º) Reparte las decenas</p> <p>5º) Si hay decenas sobrantes conviértelas en unidades</p> <p>6º) Reparte las unidades</p>	<p>UTILIZA LOS COLORES QUE CORRESPONDAN</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>de cien</td> <td>de diez</td> <td>unidades</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>0</td> <td>0</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">1 5</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">de de de</td> </tr> </table>	de cien	de diez	unidades		8	0	0	1 5				de de de
de cien	de diez	unidades											
8	0	0	1 5										
			de de de										

Figura 103. Evaluación Final. Ejercicio 4. Tipo B.

6.2 Desarrollo y resultados de la prueba final

Fecha: 25/4/2018
Número de alumnos: 18
Duración de la prueba: 30'
Resultados completos escaneados: ANEXO 9

La disposición de los alumnos en el aula durante la prueba final fue:

A08 (68)	A16 (72)	A04 (65)	A03 (68)	A23 (69)
A15 (71)	A10 (61)	A12 (73)	A07 (69)	A02 (78)
A13 (66)	A01 (70)	A06 (75)	A19 (73)	
A18 (68)	A17	A11 (68)	A09 (56)	
Maestro				

Figura 104. Disposición de alumnos en clase durante la prueba final

Al principio de la sesión se realiza un ejemplo rápido por parte del maestro nombrando las fases del reparto. Concretamente se realizó la última división de la ficha 8b-2, repartir cien puntos entre seis personas, a partes iguales. A diferencia de la sesión quinta, no se dejaron escritas en la pizarra las tres preguntas clave correspondientes a las tres fases del reparto. En los ejercicios 3 y 4 estaba planificado realizar un ejemplo en la pizarra, pero debido a que la sesión anterior acabó tarde, no hubo tiempo para hacerlo y se confió en que los enunciados fueran suficientemente claros por sí mismos. En los resultados se verá que esto no fue así, y que los alumnos no entendieron bien el enunciado.

Se les reparte en primer lugar los ejercicios 1 y 2. No se les pone ninguna restricción, sino que se les solicita que lo resuelvan con el método que quieran. El objetivo es ver cuántos alumnos tratan de resolverlo por el método trabajado.

Se realiza la siguiente convención de colores y letras para explicar los resultados de la Tabla 28:

- Correcto: llegó al resultado correcto del ejercicio.
- “*”: se apoya en otro alumno para responder a los ejercicios.
- “Incorrecto”: trató de resolver el ejercicio, pero obtuvo un resultado incorrecto.
- Sin texto: dejó el ejercicio en blanco.

Colores:

- En Verde: aceptación del método y correcta implementación.

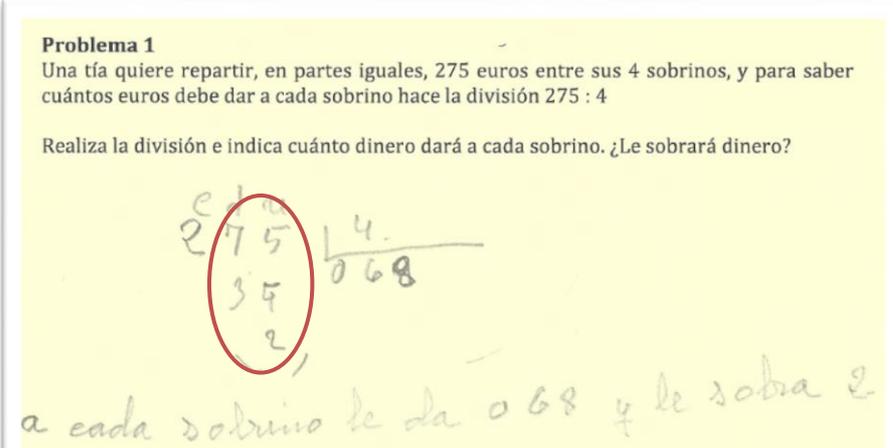
Tabla 28. Resultados agregados de la prueba final

Alumno	División 1 cifra (Ej. 1)	División 2 cifras (Ej. 2)	Realiza reparto por fases – 1 cifra (Ej. 3)	Comprobación (Ej. 3)	Realiza reparto por fases – 2 cifras (Ej. 4)	Comprobación (Ej.4)
A06	*	*	*	*	*	*
A19	Incorrecto	Correcto	No da muestras de seguir el reparto		No da muestras de seguir el reparto	
A03	Correcto	Correcto	No da muestras de seguir el reparto	Correcto	No da muestras de seguir el reparto	Correcto
A04	Correcto		No da muestras de seguir el reparto	Correcto		
A18	Correcto, siguiendo reparto	Correcto, siguiendo reparto	Si, sigue el reparto	Correcto		
A15	Correcto, siguiendo reparto	Correcto, siguiendo reparto	Si, sigue el reparto	Correcto	Si, sigue el reparto	Correcto
A17	Correcto	Correcto	No da muestras de seguir el reparto	Correcto	No da muestras de seguir el reparto	Correcto
A13	Correcto, siguiendo reparto	Correcto, siguiendo reparto	Si, sigue el reparto	Correcto	Si, sigue el reparto	Correcto
A01	Correcto, siguiendo reparto	Correcto, siguiendo reparto	Si, sigue el reparto	Correcto	Si, sigue el reparto	Correcto
A10	Correcto, siguiendo reparto	Correcto	Si, sigue el reparto	Correcto	No da muestras de seguir el reparto	Correcto
A02	*	*	*	*	*	*
A23	Correcto, siguiendo reparto	Correcto	No da muestras de seguir el reparto	Correcto	No da muestras de seguir el reparto	Correcto
A08	Casi correcto	Incorrecto	No da muestras de seguir el reparto		No da muestras de seguir el reparto	
A16	Correcto, siguiendo reparto	Correcto, siguiendo reparto	No da muestras de seguir el reparto	Correcto		
A09	Correcto					
A12	Correcto	Correcto	Si, sigue el reparto	Correcto	No da muestras de seguir el reparto	Incorrecto
A07	Correcto, siguiendo reparto	Correcto	*	*	*	*
A11	Correcto, siguiendo reparto	Incorrecto	No da muestras de seguir el reparto		Incorrecto	

Sobre el ejercicio 1 y 2 se observa cómo la mayoría (incluso A09) pueden resolver la división por una cifra. Dos alumnos se apoyaron en otros constantemente (A02 y A06), por lo que la información obtenida de ellos no se considera válida. A19 cometió un error en el ejercicio 1, a pesar de que sí que sabe resolverlos.

Problema 1
Una tía quiere repartir, en partes iguales, 275 euros entre sus 4 sobrinos, y para saber cuántos euros debe dar a cada sobrino hace la división $275 : 4$

Realiza la división e indica cuánto dinero dará a cada sobrino. ¿Le sobrará dinero?



a cada sobrino le da 068 y le sobra 2

Figura 105. Prueba final. Error en ejercicio 1 (A19).

Resulta sorprendente ver cómo nueve alumnos resolvieron correctamente el ejercicio 1 utilizando el reparto por fases. Este resultado es mucho mejor que el obtenido en la fase experimental, si bien hay que tener en cuenta que la división era bastante sencilla, que tuvieron tiempo muy generoso para hacerlo y hubo un recordatorio previo por parte del maestro. Sin embargo, en el ejercicio 2, que era más complejo al tener divisor de dos cifras, sólo cinco alumnos aceptaron y ejecutaron correctamente la propuesta. Este es un resultado más cercano a la realidad, ya que cuando tienen dificultades o poco tiempo tienden a volver a lo que conocen (ejecución mecánica del algoritmo tradicional). En cualquier caso, los resultados han mejorado con respecto a la fase experimental, lo que pone de manifiesto que hay alumnos que han comprendido el procedimiento de reparto por fases y han sido capaces de retenerlo en la memoria después de haber transcurrido tres meses.

A continuación, se les entregan los ejercicios 3 y 4. En general, no han comprendido cómo tenían que utilizar los colores, ya que nunca habían hecho un ejercicio similar y mientras lo realizaban vi que realmente hubieran necesitado una explicación previa. Ni siquiera las dos alumnas que han interiorizado totalmente el método propuesto y lo ejecutan a la perfección fueron capaces de utilizar los colores de forma totalmente correcta, lo que es bastante indicativo, y por ello, debe ponderarse a la hora de la evaluación final de la propuesta.

En relación con los resultados obtenidos comentamos lo siguiente:

- En primer lugar, se anulan las respuestas de A07 porque se apoyó en otra alumna, y se comprobó que realmente no sabía realizarlos.
- A08 está muy limitada en la resolución de tareas, pero cuando utilizó el material sí que lo comprendía, por lo que se demuestra la adecuación de la utilización del material manipulativo.
- De forma general, el porcentaje de éxito en los ejercicios 3 y 4 se reduce con respecto al de los ejercicios 1 y 2. El porcentaje de éxito en el ejercicio 4 desciende hasta el 16,6%, dado que sólo tres alumnos escriben correctamente las fases del reparto en una división con dos cifras en el divisor, aunque es del 50% de éxito en la comprensión del reparto del ejercicio 3.

En términos generales, la comprensión del reparto es superior a lo observado en la fase experimental y conjeturamos que se debe principalmente al tiempo generoso que se les dio para resolverlo, lo que reafirma que este es un factor fundamental en la enseñanza a adultos.

6.3 Resultados de la valoración de los alumnos

Como ya se ha comentado en el capítulo anterior, durante la séptima sesión se pidió a los alumnos una valoración de la propuesta trabajada, consistente en tres preguntas, cuyo objetivo es el de comprobar la aceptación de la utilización del reparto en fases al hacer la división. Los resultados completos de la valoración de los alumnos pueden encontrarse en el ANEXO 8.

La primera y segunda pregunta tratan de averiguar si en la opinión de los propios alumnos utilizan la idea de reparto al realizar divisiones y por qué.

Concretamente se les propuso:

1 Cuando ahora haces divisiones, ¿utilizas la idea de *repartir* para guiarte al hacerla? Intenta justificar tu respuesta

(Recuerda que la idea de repartir consiste en descomponer el **dividendo** en centenas, decenas y unidades. Por ejemplo, si el número es de 3 cifras, se reparten primero las centenas, luego las decenas y finalmente las unidades)

RESPUESTA: _____

2 Con respecto a tu respuesta a la pregunta 1, indica qué ventajas tiene pensar en el *reparto* al hacer la división (en caso de que hayas respondido que sí) o por qué prefieres no utilizar la idea de *reparto* (en caso de que hayas respondido que no)

RESPUESTA: _____

Figura 106. Valoración final de los alumnos. Preguntas 1 y 2.

La tercera pregunta consiste en explicar si lo enseñarían ellos así, lo que además nos servirá como una muestra indirecta de la aceptación que tienen de la propuesta:

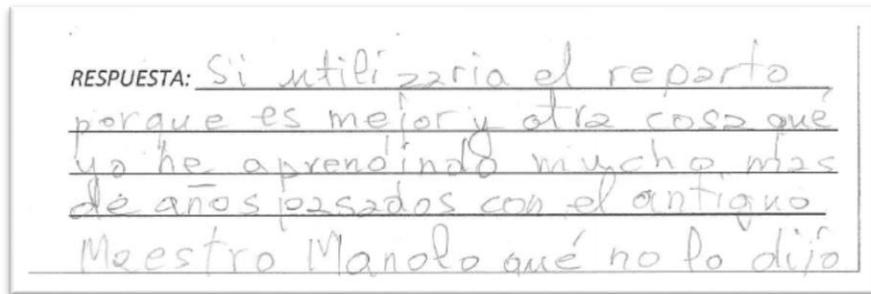
3 Imagina que eres un maestro/a que quieres enseñar a hacer divisiones a tus alumnos. ¿Usarías la idea de reparto que hemos trabajado durante estos días o les enseñarías como te enseñaron a ti? Justifica tu respuesta

RESPUESTA: _____

Figura 107. Valoración final. Pregunta 3.

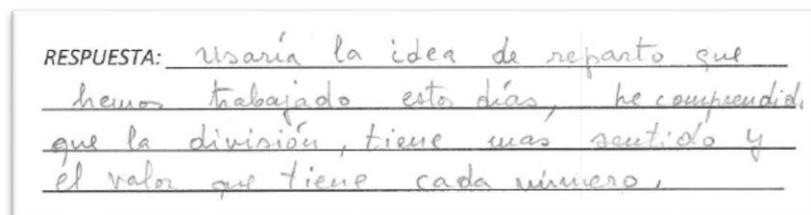
Sus respuestas se pueden agrupar en seis categorías principales:

- 1) Tres alumnos que les parece mejor el método enseñado, lo saben utilizar y lo enseñarían: A10, A01, A13.



RESPUESTA: Si utilizaria el reparto porque es mejor y otra cosa que ya he aprendido mucho mas de años pasados con el antiguo Maestro Manolo que no lo dijo

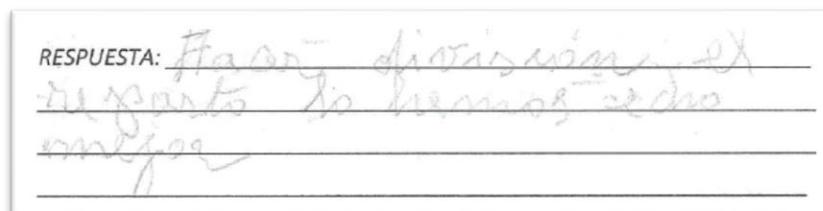
Figura 108. Valoración final. Pregunta 3 (A10).



RESPUESTA: usaria la idea de reparto que hemos trabajado esta días, he comprendido que la división, tiene mas sentido y el valor que tiene cada número.

Figura 109. Valoración final. Pregunta 3 (A01).

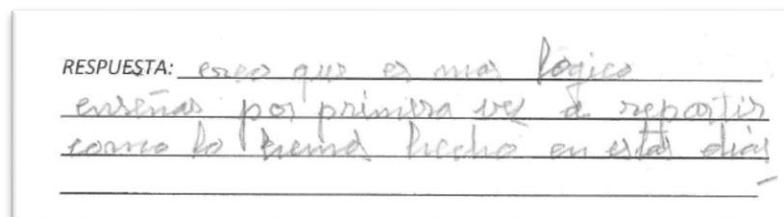
- 2) Un alumno que les parece mejor el método enseñando, no dice claramente si lo utiliza, pero lo enseñaría: A17.



RESPUESTA: Hacen división, el reparto lo hemos hecho mejor

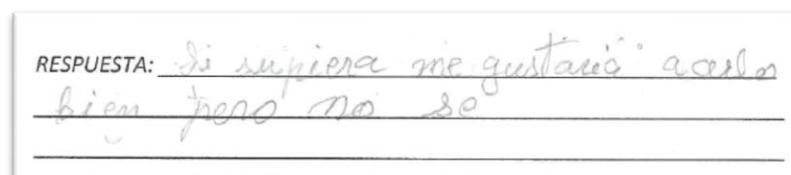
Figura 110. Valoración final. Pregunta 3 (A17).

- 3) Cuatro alumnos que dicen que el método es correcto o mejor (valoración positiva), no lo utilizan (dicen que por costumbre o comodidad) pero sí lo enseñarían: A19, A04, A16, A08.



RESPUESTA: eso que es mas logico enseñar por primera vez el reparto como lo hemos hecho en esta días

Figura 111. Valoración final. Pregunta 3 (A19).



RESPUESTA: si supiera me gustaria a ellos bien pero no se

Figura 112. Valoración final. Pregunta 3 (A16).

- 4) Dos alumnos que dicen que el método es correcto (valoración positiva), no lo utilizan (dicen que por costumbre o comodidad) y no lo enseñarían: A06, A14.

RESPUESTA: El reparto de la división me parece concito, pero cuando yo tengo que hacer una me parece más, como hacerla como antes

Figura 113. Valoración final. Pregunta 1 (A06).

RESPUESTA: les enseñaría como me han enseñado así

Figura 114. Valoración final. Pregunta 3 (A06).

- 5) Una alumna que dice entender la explicación del profesor pero no le ve ventajas al nuevo método de enseñanza del algoritmo: A15.

RESPUESTA: ventajas no le veo muchas porque al final consiste en apartar.

Figura 115. Valoración final. Pregunta 2 (A15).

- 6) Siete respuestas eliminadas ya que cuatro de ellos responden con monosílabos (A18, A12, A07 y A02), no queda clara la opinión del alumno A20, y otros dos alumnos (A05 y A09) se estuvieron apoyando en el compañero durante prácticamente todas las sesiones.

RESPUESTA: Por que me lo an enseñado de otra manera

Figura 116. Valoración final. Pregunta 2 (A20).

RESPUESTA: si

Figura 117. Valoración final. Pregunta 3 (A12).

A pesar de que ha faltado profundidad en los razonamientos de los alumnos se observa, en base a su valoración personal, que el método les parece correcto y adecuado para mejorar la comprensión del algoritmo. De los doce alumnos que han dado una respuesta razonada, a diez les parece un método

correcto o incluso mejor que el tradicional, y ocho de ellos lo enseñarían así a terceras personas. Es decir, el método ha tenido de forma general una muy buena aceptación en el aula. Incluso considerando todas las respuestas no razonadas como negativas (que no es el caso), más del 60% de los alumnos considera positiva la propuesta metodológica.

6.4 Evaluación de la propuesta de enseñanza

En este apartado se realizará una valoración de la propuesta de enseñanza a partir del análisis de los resultados obtenidos en la fase experimental, del análisis de los resultados de la prueba final y de la valoración de los alumnos

Esta propuesta metodológica ha tenido tres dificultades importantes a las que enfrentarse:

- 1) La resistencia de los alumnos al cambio. El método tradicional lo practicaron de pequeños en innumerables ocasiones, y resulta difícil motivarles para no recurrir a él de forma mecánica.
- 2) El orgullo de los alumnos. Este tipo de alumnado es especialmente orgulloso y no quiere entregar un ejercicio a menos que esté bien (o lo que ellos consideran estar “bien”). Por ello, les resulta más sencillo dar un resultado válido utilizando la metodología conocida en lugar de tratar de abrirse a nuevos métodos, a pesar de que sepan y compartan su motivación.
- 3) El escaso tiempo para la implementación de la propuesta, realizada a lo largo de siete sesiones, y que hubiera requerido de un número superior de sesiones.

Por ello, entre otras razones, del total de alumnos que han participado en la propuesta (entre 17 y 20, según la sesión), únicamente dos (A13 y A01) puede asegurarse que aceptan totalmente el método y lo ejecutan correctamente con una o dos cifras en el divisor (incluso con tres cifras en algunas tareas de la ficha 10f). Existe un conjunto de alumnos que han tratado de aceptar el método, pero que no lo ejecutan correctamente, aunque en algunos casos ellos piensen que sí (por ejemplo: A10, A18).

La aceptación del método cuando los alumnos no están bajo presión y se les da todo el tiempo que necesiten, se ha visto que es mucho mayor (ver “Tabla 21. Resultados agregados ficha 8b-extra”), con casi un 50% de aceptación en condiciones sin presión. Es decir, ese es el camino a seguir para lograr una intervención exitosa, pero que no pudo completarse en esta ocasión debido a las limitaciones temporales que teníamos y a haberlo detectado ya muy avanzada la intervención.

En cuanto a la capacidad de cálculo de la división, se partía de un alto porcentaje de alumnos que sabían resolver las divisiones por una cifra, aun así, los resultados han sido algo superiores a los de la prueba inicial. Sin embargo, el uso del material manipulativo se ha demostrado muy eficaz para varios alumnos, como el caso de A08, alumna con dificultades para realizar la división y que cuando utilizaba el material (ver “Tabla 16. Resultados agregados ficha 8a. Representación”) lograba realizar los repartos correctamente.

La mejora sí que ha sido clara en la comprensión de aspectos conceptuales como la relación de los términos de la división y cómo realizar la comprobación de la misma. Antes de la intervención, un 41% no sabía realizarla, y un 53% tenía dudas sobre su formulación. Al acabar la intervención, un 75% de los alumnos (ver “Tabla 24. Resultados agregados ficha 10”) realiza correctamente la comprobación de la división, incluso con más de una cifra en el divisor.

En relación a la comprensión de los significados, se puede observar que la mayor parte de los alumnos resolvieron correctamente los problemas de la séptima sesión (ver “Tabla 27. Resultados agregados ficha 12”), pero resulta difícil evaluarlo dado que se ha dedicado poco tiempo a este aspecto y dado que la elección de la operación aritmética por parte de los alumnos está decantada hacia la división al estar estudiando en ese momento el algoritmo de cálculo de dicha operación.

CONCLUSIONES

Consideramos que se han alcanzado los objetivos de este trabajo fin de grado por las siguientes razones:

- 1) Tanto la búsqueda bibliográfica de los diferentes procedimientos de cálculo de la división de números naturales como el análisis de las propuestas actuales de enseñanza, que se desarrollan en el primer objetivo de este trabajo, han resultado fundamentales para diseñar una propuesta educativa adaptada a las características del grupo sobre la que se iba a implementar, en nuestro caso, un curso de Formación Inicial para Adultos. En la elaboración de la propuesta se tuvieron en cuenta las dificultades asociadas a la enseñanza del algoritmo de la división y también los criterios de elección que adaptamos a nuestro contexto de los formulados por Barba y Calvo (2010).

Adaptándonos a las características de nuestros alumnos se concluyó que la mejor opción era optar por un método tradicional con apoyos, realizado por fases y repartiendo la mayor cantidad de unidades posible en cada fase, primando el no cambiarles un formato que ya conocen, pero a la vez dotando de significado al algoritmo que ya utilizan. Se desecharon propuestas como la división en columnas, que podríamos considerar la mejor en Primaria, debido al conocimiento previo de nuestros alumnos, ya que se conjeturó que provocaría un rechazo hacia métodos muy diferentes a lo que ya conocen.

- 2) Antes de diseñar la propuesta, adaptada de la formulada por Escolano (2004), se vio necesario realizar una prueba diagnóstica que nos permitiera personalizar la intervención a las necesidades específicas del grupo-clase, adultos de edades comprendidas entre 55 y 87 años que están cursando un curso de Formación Inicial para Adultos en el C.P.E.P.A. Juan José Lorente de Zaragoza. La prueba de diagnóstico inicial cumplió el objetivo de evaluar la comprensión de los estudiantes acerca de los significados de la división y del conocimiento del algoritmo tradicional de esta operación aritmética.

En efecto, observamos que un 80% de alumnos tenían un conocimiento instrumental del algoritmo de la división cuando el divisor es de una sola cifra. En cambio, más de la mitad cometían errores cuando el divisor es de dos cifras y se les solicitaba realizar la comprobación de la división en base a la relación de términos de la misma. También se observó cómo las mayores dificultades las encuentran en lo relativo a cuestiones conceptuales, ya que el único significado claro que asocian a la división es el de reparto igualitario. Por ello concluimos que nuestros alumnos interpretan exclusivamente la división como reparto igualitario, desconocen la relación entre los términos de la división, y poseen un dominio meramente instrumental del algoritmo tradicional de la división que les permite realizar correctamente divisiones muy elementales, únicamente cuando el divisor es un número de una cifra o a lo sumo de dos cifras. En estas condiciones, nos pareció oportuno realizar una intervención docente para reforzar el algoritmo de la división con el objetivo de que los alumnos comprendieran las representaciones simbólicas que comporta este procedimiento de cálculo.

- 3) En cuanto al desarrollo de la fase experimental hemos obtenido conclusiones relevantes que vamos a comentar de modo separado dado que algunas hacen referencia a aspectos metodológicos y otras a los contenidos matemáticos a enseñar.

Es muy relevante destacar las tres dificultades fundamentales a las que tuvo que enfrentarse la propuesta metodológica, y cómo son extrapolables para nuevas propuestas cuyo alumnado esté en un contexto similar.

En primer lugar, debemos destacar la resistencia de los alumnos al cambio. El algoritmo tradicional de la división lo practicaron de pequeños en innumerables ocasiones, y resulta difícil motivarles para no recurrir a él de forma mecánica. Intuimos este aspecto en la fase de diagnóstico y de diseño de la propuesta, sin embargo, se comprobó que la inercia era mucho más fuerte de lo esperado.

En segundo lugar, destacamos el orgullo de los alumnos. Este tipo de alumnado es especialmente orgulloso y no quiere entregar un ejercicio a menos que esté bien (o lo que ellos consideran estar “bien”). Por ello, les resulta más sencillo dar un resultado válido utilizando la metodología conocida (o apoyarse en el compañero) antes de tratar de abrirse a nuevos métodos, a pesar de que sepan y compartan su motivación.

Y, en tercer lugar, se ha comprobado un aspecto derivado directamente del escaso tiempo que hubo para la implementación de la propuesta, realizada únicamente a lo largo de siete sesiones. Se ha constatado en base a los resultados de la evaluación final, que hubiera sido muy necesario un número superior de sesiones para alcanzar los objetivos planificados. Este aspecto está fuertemente relacionado con los dos anteriores, ya que la idiosincrasia del alumnado hace que sea necesario mucho tiempo para que acepten los nuevos métodos propuestos.

Una de las conclusiones fundamentales de este trabajo es que los aspectos aquí reseñados no pueden extrapolarse a toda la enseñanza para adultos. Aunque tanto el currículo como la propia categorización académica homogeneiza al alumnado “adulto”, la casuística es muy diferente, por ejemplo, cuando se trata de alumnado de 18 a 30 años, comparado con alumnado con una media de edad de 70 años, como el que ha sido el objeto de esta intervención. Citamos aquí que nuestros resultados no coinciden con los de Díez-Palomar (2009) dado que su muestra está en otro rango de edades.

Esos tres aspectos metodológicos antes reseñados (inercia, orgullo, tiempo) son especialmente relevantes en este grupo objetivo, pero lo sería en menor medida para adultos de menor edad, por lo que deben ser tenidos muy en cuenta en propuestas didácticas que se planteen en el futuro.

Un aspecto muy positivo de la metodología utilizada es la utilización del material manipulativo. Hemos comprobado que el material les ayuda a comprender los procesos de cálculo que tienen automatizados. Es decir, damos por válida la hipótesis de la **adecuación de utilizar el material manipulativo con este alumnado adulto**. Sin embargo, es necesario romper la barrera de la inercia, por lo que debe fomentarse el uso del material de manera más explícita en futuras intervenciones.

En cuanto a la comprensión del algoritmo de la división y, en concreto las cuatro etapas en las que hemos desarrollado, la propuesta de enseñanza concluimos que:

En la primera etapa, en la que trabajamos la comprensión del sistema de numeración decimal, se observa que los alumnos saben leer y escribir números de hasta cinco cifras, sin embargo, poseen un conocimiento funcional y limitado del principio del valor posicional de las cifras que, en ocasiones, les lleva a errar cuando se les pregunta por el valor de las cifras que ocupan determinadas posiciones dentro del número.

En la segunda etapa (reparto igualitario con materiales manipulativos, sin utilizar el algoritmo ni su representación simbólica) los alumnos dan muestras de comprender el proceso de reparto igualitario

al realizar repartos con “placas, barras y puntos”. Consideramos que introducir este material manipulativo es un éxito porque los alumnos refuerzan las conversiones entre unidades del sistema de numeración decimal y porque les permite comprender el reparto igualitario realizado por fases.

El segundo tipo de tareas realizado en esta etapa, que profundizan en la relación entre los elementos que intervienen en un reparto mediante tareas de búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto del que se conoce su resultado, les resulta mucho más difícil que la anterior. A los alumnos les resulta muy complicado comprender que para obtener la cantidad inicial a repartir deben multiplicar el divisor por el cociente y sumarle el resto. La relación entre los términos de la división es un conocimiento conceptual que bastantes alumnos no comprenden, aunque saben ejecutarlo de forma mecánica.

En el último tipo de tareas de la segunda etapa, que consisten en comprobar la bondad de repartos igualitarios y que tienen por objetivo que los alumnos comprendan que el reparto debe ser exhaustivo, es decir, que cada participante debe recibir la mayor cantidad posible y que esto obliga a que lo sobrante (el resto) debe ser menor que el número de participantes (divisor), constatamos que la mayoría de los alumnos han recurrido a hacer la división con la "caja" y comparar los datos del enunciado con el resultado de la división para comprobar la bondad del reparto. A pesar de que los resultados obtenidos son aceptables (72% de resultados correctos) conviene indicar que los alumnos **eluden utilizar la relación entre los términos del reparto igualitario** lo que supone un déficit en la comprensión del significado del reparto igualitario.

En la tercera etapa se constataron las dificultades metodológicas antes expuestas, especialmente en lo relativo a la fuerte inercia de los alumnos a utilizar el algoritmo de la forma que aprendieron, de modo que bastantes alumnos se mostraron reacios a realizar las acciones de reparto igualitario efectuado por fases. También se comprobó que el material no se utilizaba todo lo que se pretendía. En el lado más positivo, se comprobó durante todas las sesiones la mejora sustancial en el número de alumnos que son capaces de realizar la comprobación de la división en relación a la prueba inicial.

Podemos concluir que, aunque la mayoría de los alumnos prefieren seguir utilizando el algoritmo tradicional sin evocar las acciones de reparto, se ha observado una mejora muy nítida en los cálculos de la división y en la comprensión de la relación entre los términos de la división. Además, los porcentajes de éxito son mayores en estos indicadores si los comparamos con los obtenidos en la prueba de diagnóstico inicial. Adicionalmente, comparando estos resultados con la evaluación final, se observa un fenómeno muy interesante: la comprensión del reparto en la evaluación final fue superior a lo observado en la fase experimental. Conjeturamos que se debe principalmente al tiempo generoso que se les dio para resolverlo, lo que reafirma que es un factor fundamental en la enseñanza a adultos, el tener un ritmo pausado y conseguir que el método vaya calando poco a poco en ellos. En el momento que se les presiona en el tiempo de resolución, vuelven a la metodología que conocen.

En cualquier caso, podemos afirmar que los alumnos mejoraron durante esta tercera fase en la comprensión y aplicación del algoritmo de la división de números naturales y especialmente en la relación entre los términos de la división.

La cuarta etapa no nos permite obtener conclusiones válidas, ya que únicamente se realizó una introducción a la misma. Se observó que la mayor parte de los alumnos resolvieron correctamente los problemas que se propusieron en la séptima sesión, pero resulta difícil evaluarlo. Serían necesarias varias sesiones extra para ofrecer conclusiones informadas.

Finalmente, después de analizar los resultados de la prueba final, constatamos que ha habido mejora a nivel conceptual dado que ha aumentado el número de alumnos que saben aplicar la relación entre los términos de la división. La mayoría de los alumnos han sabido valorar también cual es la motivación detrás de los pasos “mecánicos” que antes hacían para realizar una división (separar cifras del dividendo, bajar la cifra siguiente, decir si cabe o no cabe, etc.). En base a la valoración personal de los alumnos se obtiene que la mayoría de ellos consideran positiva la propuesta metodológica ya que, de los once alumnos que dieron una respuesta razonada, a diez les parece un método correcto o incluso mejor que el tradicional, y ocho de ellos lo enseñarían así a terceras personas. Es decir, **el método ha sido bien valorado y ha tenido muy buena aceptación por parte de los alumnos.**

Los alumnos que se muestran reacios a pensar en las acciones de reparto cuando realizan las divisiones también han mejorado en el cálculo de las divisiones y sobre todo han mejorado de forma muy clara en la comprensión de la relación de los términos de la división y cómo realizar la comprobación de la misma. Antes de la intervención, un 41% no sabía realizarla, y un 53% tenía dudas sobre su formulación. Al acabar la intervención, un 75% de los alumnos realizó correctamente la comprobación de la división, incluso con divisores de dos cifras en el divisor.

El hecho de que los alumnos hayan obtenido mejores resultados en la prueba final que en las últimas tareas realizadas durante secuencia de enseñanza, siendo que la prueba final se realizó meses después de concluir las sesiones de clase, nos induce a pensar que la enseñanza del algoritmo de la división ha dejado huella en los alumnos y que los aprendizajes han sido más profundos de los que se percibían inicialmente durante el desarrollo de la propuesta. Los alumnos valoran de forma positiva que se les haya enseñado, desde la comprensión, el algoritmo de la división, que es el más complejo de las operaciones aritméticas elementales, y hemos constatado que dos alumnos lo saben aplicar a la perfección y que algunos otros, si no se sienten presionados a realizar el cálculo rápidamente, son capaces de aplicarlo correctamente evocando las acciones de un reparto igualitario realizado por fases.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Calvo C. y Barba D. (2010) La división: mucho más que un algoritmo. *Revista de Didáctica de las Matemáticas. UNO*. Nº 54, abril 2010, pp. 41-54.
- Cid, Escolano y Muñoz. (2013). Didáctica del número natural en Educación Primaria. *Apuntes del grado en Magisterio en Educación Primaria. Facultad de Educación. Universidad de Zaragoza*. Sin publicar. 129-165.
- Diez-Palomar J. (2009). La enseñanza de las matemáticas a personas adultas desde un enfoque didáctico basado en el aprendizaje dialógico. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. 27(3), 369–380
- Escolano R. (2004). Una propuesta didáctica para la enseñanza del algoritmo de la división de números naturales. *Revista de la Federació d'entitats per a l'ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya. BIAIX 22, Julio 2014*, 41-49.
- Gallardo J. (2014). *Enseñanza y aprendizaje del cálculo aritmético elemental en primaria*. Universidad de Málaga.
- Gómez B. (1998). *Numeración y Cálculo*. Madrid, España: Síntesis.
- Maza C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y división*. Madrid, España: Síntesis.
- Martínez J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Revista Bordón*. Nº 63, pp. 95-110.
- Martínez J. (2013). *Resolución de problemas y método ABN*. Madrid:Wolters Kluwer España.
- ORDEN de 18 de noviembre de 2008, de la Consejera de Educación, Cultura y Deporte por la que se establece la organización y el currículo de la Formación inicial para personas adultas en la Comunidad Autónoma de Aragón. Recuperado de: <http://benasque.aragob.es:443/cgi-bin/BOAE/BRSCGI?CMD=VEROBJ&MLKOB=314817670303>.
- ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Recuperado de: <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf>.