

# **Desarrollos uniformemente convergentes de funciones especiales**



**Pablo Palacios Herrero**

**Trabajo de fin de máster en Matemáticas  
Universidad de Zaragoza**

**Directores del trabajo: José L. López García  
y Pedro J. Pagola Martínez**

**Ponente: Ester Pérez Sinusía**

**11 de septiembre de 2018**



# Agradecimientos.

Cuando comencé este Máster no sabía como iba a acabar. Sin embargo, en Bilbao me crucé con Pedro Jesús Pagola Martínez, quien, con muchas ganas de investigar, me puso en las manos de José Luis López García. Ambos, sin apenas conocerme, se volcaron conmigo y con este trabajo y llevaron a cabo la no fácil tarea de dirigirme a distancia. A ellos estoy profundamente agradecido, por su infinita paciencia y su gran disponibilidad. Asimismo, quiero darle las gracias a Ester Pérez Sinusía, ponente de este trabajo, quien siempre me ha animado. A los tres muchas gracias, pues sin ellos este trabajo no hubiera sido posible.

Este trabajo también debe mucho a mis compañeros de la carrera en Matemáticas en la facultad de Zaragoza, quienes han hecho mucho más llevadero los días de estudio, especialmente aquellos en lo que todo se volvía oscuro.

Y como no, debo dar las gracias a mis padres, Antonio y Antonia, quienes han hecho lo que no está escrito para proporcionarme a mí, y a mi hermano, la educación que ellos no pudieron tener. Seguro que ahora ven recompensado todos sus esfuerzos. Ellos han sufrido incluso más que yo durante la elaboración de este trabajo, pero nunca tuvieron dudas de que finalizaría con éxito.

Gracias a todos.



# Summary.

Special functions are solutions to differential equations and appear in a large variety of fields, mainly in mathematics and physics, but also in other fields such as economy and statistics. They can not be written in terms of elementary functions but, in many cases, they admit an integral representation (Chapter 1). Therefore, an approximation technique in terms of elementary functions of a certain variable  $z$  is needed in order to approximate and compute them. The most used techniques are the Taylor expansion and asymptotic expansions (based on Watson's lemma, Laplace method, etc...), valid for small and large values of the argument  $|z|$  respectively (Chapter 2). The main aim of this work is to derive new representations of special functions satisfying the following three properties: (i) they are convergent, (ii) they are given in terms of elementary functions and (iii) they hold uniformly in a large domain for  $|z|$  that includes small and large values of  $|z|$ . A general theory on uniformly expansions is beyond the scope of this work. Hence we focus our attention in the Struve functions  $H_\nu$  and  $K_\nu$ .

The Struve functions are two fundamental solutions to the non-homogeneous Bessel's differential equation

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) w = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}.$$

They are used in the description of several phenomena in aerodynamics, quantum mechanics, optical diffraction and other physical problems.

In Chapter 3, we consider the Struve function  $H_\nu$ . Our starting point is an integral representation (valid for  $\text{Re } \nu > -1/2$ ). The expansion series of an appropriate factor of the integrand is used and then sum and integral are interchanged. We compute an accurate error bound which shows the uniform character of the expansion in arbitrary wide horizontal strips of the complex  $z$ -plane. In addition, the error bound shows that the remainder behaves as  $n^{-(\text{Re } \nu + \frac{1}{2})}$  when  $n \rightarrow \infty$ . Then, some graphics illustrate the uniform expansions compared with the Taylor and asymptotic expansions.

In Chapter 4, we consider the Struve function  $K_\nu$ . The analysis in this case is more difficult since the interval of integration is not bounded. After a change of variable the interval becomes a compact interval, but the factor of the integrand that is expanded in power series is much more difficult and its Taylor remainder can not be computed in terms of known functions. However, it admits a representation in terms of a Cauchy integral. This representation allows us to obtain an error estimate that shows the uniform character of the expansion for  $\text{Re } z \geq \Lambda$ ,  $\Lambda > 1$  fixed, and that the expansion is convergent and behaves as  $n^{-(\text{Re } z - 1)}$  when  $n \rightarrow \infty$ . Finally, some graphics illustrate the uniform expansions compared with the Taylor and asymptotic expansions.



# Índice general

<b>Agradecimientos.</b>	<b>III</b>
<b>Summary.</b>	<b>V</b>
<b>1. Funciones especiales</b>	<b>1</b>
1.1. Funciones de Struve. . . . .	2
<b>2. Métodos analíticos previos.</b>	<b>3</b>
2.1. Desarrollos en serie de Taylor. . . . .	3
2.2. Desarrollos asintóticos. . . . .	4
2.3. Desarrollos uniformes. . . . .	6
2.4. Desarrollos conocidos de las funciones de Struve. . . . .	6
<b>3. Desarrollo uniformemente convergente de la función H de Struve.</b>	<b>9</b>
3.1. Casos especiales. . . . .	16
3.1.1. Caso $\alpha = 0$ . . . . .	16
3.1.2. Caso $\alpha = \frac{1}{4}$ . . . . .	17
3.1.3. Valores semienteros del parámetro $\nu$ . . . . .	17
3.1.4. $z$ variable real. . . . .	18
3.2. Gráficas y tablas numéricas. . . . .	18
3.2.1. Gráficas. . . . .	18
3.2.2. Tablas numéricas. . . . .	20
<b>4. Desarrollo uniformemente convergente de la función K de Struve.</b>	<b>21</b>
4.1. Gráficas. . . . .	27
<b>Referencias</b>	<b>31</b>





# Capítulo 1

## Funciones especiales

No existe una definición concreta de qué son las funciones especiales, aunque las podemos definir como aquellas funciones que son solución de una amplia clase de ecuaciones funcionales que tiene gran relevancia en las matemáticas y la física y que tienen un nombre y una escritura estandarizada. Aparecen en campos muy diversos, desde la modelización de fenómenos naturales o problemas de ingeniería, pasando por la simulación numérica y la teoría de números hasta ramas de la economía y la estadística.

Los ejemplos más sencillos de funciones especiales los encontramos en las funciones elementales como la exponencial o el logaritmo natural, así como en las funciones trigonométricas. También grandes familias de funciones como los polinomios ortogonales y las integrales elípticas son funciones especiales. A esta lista debemos añadir multitud de funciones particulares que no se pueden expresar por medio de funciones elementales y que a menudo admiten una representación integral o una representación en serie, como pueden ser la función gamma de Euler  $\Gamma(z)$  o la función zeta de Riemann  $\zeta(z)$ . Una lista detallada de las funciones especiales más importantes y funciones relacionadas con ellas puede verse en [14].

La presencia de estas funciones en multitud de ramas de la física y la matemática hace que su estudio sea muy importante. En particular, resulta de gran importancia disponer de métodos numéricos y analíticos que permitan aproximar éstas funciones.

En este trabajo, nos centraremos en los métodos analíticos. Respecto a éstos, las aproximaciones existentes más importantes son de dos tipos:

- Desarrollo de Taylor, válido en un entorno del punto en el que desarrollamos, típicamente el origen.
- Desarrollos asintóticos, válidos para valores grandes de la variable.

Estos dos métodos tienen una gran virtud: aproximan muy bien la función en un entorno; pero poseen un gran inconveniente: fuera de ese entorno el error cometido es muy grande. Por esta razón la búsqueda de desarrollos uniformes, esto es, válidos en una amplia región del plano complejo, resultan de gran interés e importancia. Una teoría general de desarrollos uniformes de funciones especiales se escapa del contenido de este trabajo. Es por ello que desarrollaremos un método en un caso particular: las funciones de Struve. Esta elección sigue la línea de investigación iniciada por los directores y ponente de este trabajo en la búsqueda de desarrollos uniformes de funciones especiales, ver [3] para la función gamma incompleta, [10] para las funciones de Bessel  $J_\nu$  y  $Y_\nu$ , [4] para la función confluyente hipergeométrica. Asimismo, otros trabajos están en progreso, como el relativo a la función hipergeométrica generalizada  ${}_pF_q$ .

A lo largo del trabajo aparecerán multitud de funciones especiales como la función hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1$  y su generalizada  ${}_pF_q$ , las funciones gamma y beta de Euler incompletas, el símbolo de Pochhammer  $(z)_n$ , las funciones de Bessel, etc. El lector puede consultar en [14],[21], [13] la definición y propiedades más importantes de todas ellas.

## 1.1. Funciones de Struve.

En 1882 Hermann Struve [20] introdujo la función  $H_\nu(z)$  que lleva su nombre como la serie

$$H_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}z\right)^{2n}}{\Gamma(n + \frac{3}{2})\Gamma(n + \nu + \frac{3}{2})}, \quad (1.1)$$

donde  $\Gamma(x)$  denota la función gamma de Euler,  $z$  es una variable compleja y  $\nu$  un parámetro fijo, real o complejo, llamado orden. La serie (1.1) converge para todo valor finito de  $z$ , está bien definida para cualquier valor del parámetro  $\nu$  y su valor principal corresponde al valor principal de  $\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+1}$ . Asimismo, se trata de una función entera en  $\nu$  siempre que  $z \neq 0$ . Además la función  $z^{-\nu-1}H_\nu(z)$  es entera en  $z$ . La función de Struve admite una representación integral, siempre que  $\text{Re } \nu > -\frac{1}{2}$ , dada por [[14], ec. 11.5.1]

$$H_\nu(z) = \frac{2 \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \sin(zt) dt$$

y válida para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Originalmente, Struve introdujo esta función como una solución particular de la ecuación diferencial de Bessel de segundo orden no homogénea.

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) w = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}. \quad (1.2)$$

Sabemos que las soluciones de la ecuación homogénea son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo,  $J_\nu$  e  $Y_\nu$ , respectivamente, por lo que no sorprende la relación de la función de Struve con éstas. De hecho, podemos construir otra solución  $K_\nu$  de (1.2) tomando  $K_\nu(z) = H_\nu(z) - Y_\nu(z)$ . Esta segunda función de Struve  $K_\nu$  admite la representación integral [[14], ec. 11.5.2]

$$K_\nu(z) = \frac{2 \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-zt} (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt,$$

válida para todo  $\nu \in \mathbb{C}$  y para los  $z$  con parte real positiva.

Las funciones de Struve tienen muchas aplicaciones en campos de la física. En el artículo original de Struve [20] aparecen ligadas a la difracción en los telescopios. Asimismo, en [9] aparecen en un problema de difracción óptica. Pero sus aplicaciones no se limitan únicamente al campo de la óptica. Su aplicación se ha encontrado en problemas de olas de agua y de ondas de superficie [8], [2]; en problemas de dinámica inestable [19], [22]; en la distribución de la presión de un fluido sobre un disco vibrante [12] y en la teoría de inestabilidad MHD (Magneto-Hydro-Dynamics) resistente [16]. Además, las funciones de Struve también aparecen en algunos estudios sobre la dinámica de partículas elementales [18] y en el estudio de nanotubos [17].

## Capítulo 2

# Métodos analíticos previos.

Debido al importante papel que juegan las funciones especiales en un amplio abanico de campos es necesario buscar métodos numéricos y analíticos que aproximen estas funciones y nos permitan evaluarlas fácilmente. Nosotros nos centraremos en los métodos analíticos, en particular, en los desarrollos de Taylor-McLaurin y asintóticos.

Para comenzar, recordemos la siguiente notación que se debe a Landau.

**Definición 2.0.1.** Sea  $\Omega$  un conjunto en el plano complejo  $z$  y sea  $z_0$  un punto límite de  $\Omega$ , pudiendo ser el infinito. Sean  $f(z)$  y  $g(z)$  dos funciones definidas en  $\Omega$ . Escribiremos

$$f(z) = O(g(z)), \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0$$

para decir que existe una constante  $K > 0$  y un entorno  $U$  de  $z_0$  tal que  $|f(z)| \leq K|g(z)|$ ,  $\forall z \in \Omega \cap U$ . Asimismo, escribiremos

$$f(z) = o(g(z)), \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0$$

para decir que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un entorno  $U_\varepsilon$  de  $z_0$  tal que  $|f(z)| \leq \varepsilon|g(z)|$ ,  $\forall z \in \Omega \cap U_\varepsilon$ .

## 2.1. Desarrollos en serie de Taylor.

La teoría de desarrollos en serie de Taylor es bien conocida por lo que omitiremos su descripción. Pueden consultarse todos los detalles de la misma en cualquier libro básico de análisis real o complejo, como puede ser [[15], Cap. 7] o [[1], Cap. 2.2 y 5.1]. Esta técnica se puede aplicar de diversas formas a las funciones especiales. Mostramos a continuación una aplicación inmediata de la misma.

En primer lugar se toma una representación integral de la función que queremos aproximar. Después se toma el desarrollo de Taylor de una parte del integrando y se intercambia la serie con la integral. Tras integrar obtenemos un desarrollo en serie de la función especial inicial. Veamos un ejemplo:

Consideramos la función exponencial integral complementaria definida mediante la integral [[14], ec. 6.2.3]

$$Ein(z) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-zt}}{t} dt$$

y reemplazamos el factor  $1 - e^{-zt}$  por su serie de Taylor en el origen, esto es,  $1 - e^{-zt} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} t^n \frac{z^n}{n!}$ . Intercambiando la serie y la integral en la definición de  $Ein(z)$  y calculado la integral que resulta obtenemos el desarrollo

$$Ein(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n!n},$$

que converge para todo  $z$  complejo.

## 2.2. Desarrollos asintóticos.

La teoría asintótica es una rama de las matemáticas que trata problemas relacionados con el comportamiento de una función cuando un parámetro tiende a un valor específico o cuando el índice de una sucesión tiende a infinito. Esta teoría se divide en tres grandes áreas: asintótica de soluciones de ecuaciones diferenciales, asintótica de soluciones de ecuaciones en diferencias y asintótica de integrales. Nosotros nos interesaremos en la última de éstas.

**Definición 2.2.1.** Llamaremos desarrollo asintótico de una integral paramétrica  $F(x) = \int_{\Gamma} f(x, t) dt$ , cuando el parámetro  $x \rightarrow \infty$  a la aproximación

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

donde

1. la sucesión  $\Phi_n(x)$  es asintótica, es decir,

$$\Phi_n(x) = o(\Phi_{n-1}(x)), \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

2.  $F(x) - \sum_{n=0}^N a_n \Phi_n(x) = O(\Phi_{N+1}(x)), \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$

Cabe destacar que no estamos asumiendo que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$  sea convergente para ciertos valores de  $x$ . Lo único relevante en la teoría asintótica es que se verifiquen las dos condiciones de la definición. A menudo, este tipo de desarrollos son divergentes pero al truncar la serie la aproximación a la función original es muy buena.

De entre la multitud de métodos utilizados para el cálculo de desarrollos asintóticos de integrales destacan el lema de Watson y el método de Laplace por ser los primeros en ser desarrollados y porque poseen grandes aplicaciones en la aproximación de funciones especiales.

El lema de Watson es una técnica útil y sencilla para derivar desarrollos asintóticos de integrales, en particular de la transformada de Laplace de una cierta función analítica  $f$ . Establece lo siguiente:

**Teorema 2.2.2. (Lema de Watson)** Sea  $F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$ ,  $x \rightarrow \infty$ , la transformada de Laplace de una función  $f$  analítica salvo quizás en el origen, que permitimos sea un punto de ramificación. Sea  $f(t) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n t^{n/r-1} + f_N(t)$ , en  $|t| < R$  con  $r > 0$  y  $f_N(t) = O(t^{N/r-1})$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Supongamos además que existe  $\alpha > 0$  de manera que  $f(t) = O(e^{\alpha t})$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Entonces

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma\left(\frac{n}{r}\right) x^{-n/r}.$$

Una idea de la demostración es la siguiente. Para  $x$  grande la mayor contribución del integrando a la integral se localiza en torno a  $t = 0$ . Por lo tanto, tiene sentido desarrollar  $f$  mediante su serie de Taylor en  $t = 0$ . Tras esto, intercambiamos serie e integral e integramos término a término. Una demostración detallada puede verse en [13], donde además se muestra que el desarrollo es asintótico.

El método de Laplace es algo más general, pues se aplica a integrales de la forma  $\int_a^b e^{-zf(u)} g(u) du$ , donde  $(a, b)$  es un intervalo real finito o infinito y  $z \rightarrow \infty$  es una variable real o compleja. Mediante un cambio de variable  $f(u) - f(a) = t$  la integral se lleva a una transformada de Laplace de una cierta función  $h(t)$ , momento en el que se puede aplicar el lema de Watson. Concretamente, establece lo siguiente:

**Teorema 2.2.3. (Teorema de Laplace).** Sea  $(a, b)$  un intervalo real, finito o infinito, y consideramos la función definida por la integral  $F(x) = \int_a^b e^{-xf(u)} g(u) du$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Supongamos que

1.  $t = a$  es el único mínimo absoluto de  $f(t)$  en  $[a, b]$ .
2.  $f'(t)$  y  $g(t)$  son continuas en un entorno de  $t = a$  salvo quizás, en  $a$ .
3. Cuando  $x \rightarrow a^+$  las siguientes expansiones son ciertas:

$$f(t) \sim f(a) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-a)^{n+\mu}$$

y

$$g(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t-a)^{n+\alpha-1},$$

con  $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ ,  $\mu > 0$  y  $\text{Re } \alpha > 0$ .

Supongamos además que el desarrollo de  $f$  se puede derivar término a término de manera que

$$f'(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\mu) (t-a)^{n+\mu-1}$$

cuando  $t \rightarrow a^+$ .

4. La integral que define  $F(x)$  converge absolutamente para todo  $x$  suficientemente grande.

Entonces

$$F(x) \sim e^{-xf(a)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

donde  $\Phi_n(x) = \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{\mu}\right) x^{-\frac{n+\alpha}{\mu}}$  y los coeficientes  $c_n$  son los coeficientes del desarrollo de Taylor entorno a  $u = 0$  de la función  $h(u) = \frac{g(t(u))}{f'(t(u))}$  y se puede calcular a partir de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  siendo el primer coeficiente  $c_0 = \frac{b_0}{\mu a_0^{\alpha/\mu}}$ .

Una idea de la demostración es la siguiente. Se realiza el cambio de variable  $f(u) - f(a) = t$ . Así, la integral que define  $F$  resulta ser  $F(x) = e^{-xf(a)} \int_0^{f(b)-f(a)} e^{-xu} h(u) du$ , con  $h(u) := \frac{g(t(u))}{f'(t(u))}$ . Las hipótesis del teorema permiten deducir que  $h$  admite desarrollo de Taylor en  $u = 0$  y se escribe  $h(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^{(n+\alpha-\mu)/\mu}$ . La tesis se sigue de aplicar el lema de Watson a la última integral. Una demostración detallada del teorema puede verse en [[23], pág 58].

Este teorema, aplicado a la función Gamma de Euler desprende la conocida fórmula de Stirling. En efecto, consideramos la representación integral de la función Gamma dada por [[14], ec. 5.2.1]  $\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt$ , válida para  $\text{Re } z > -1$ . Realizamos el cambio de variable  $t = z(1+y)$  para obtener  $\Gamma(z+1) = e^{-z} z^{z+1} \int_{-1}^{\infty} e^{-zh(y)} dy$ , con  $h(y) = y - \log(1+y)$ . Rompemos el intervalo de integración en  $y = 0$  y obtenemos

$$e^z z^{-z-1} \Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-zh(y)} dy + \int_0^1 e^{-zh(-y)} dy.$$

Teniendo en cuenta que  $h(y) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} y^n$  podemos aplicar el teorema de Laplace a cada una de las integrales de la derecha, con  $\mu = 2$ ,  $\alpha = 1$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_{n+1} = 0$  y  $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$ , siguiendo la notación del teorema 2.2.3. Resulta, cuando  $z \rightarrow \infty$ ,

$$\int_0^{\infty} e^{-zh(y)} dy \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{3} \frac{1}{z} + \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} + \dots$$

$$\int_0^1 e^{-zh(-y)} dy \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{3} \frac{1}{z} + \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} - \dots$$

Combinando ambas expresiones y utilizando la propiedad [[14], ec. 5.5.1]  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  se deduce, cuando  $z \rightarrow \infty$ , la serie asintótica

$$\Gamma(z) \sim e^{-z} z^z \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(1 + \frac{1}{12z} + \dots\right). \quad (2.1)$$

La fórmula de Stirling se sigue de trincar esta serie en el primer término.

### 2.3. Desarrollos uniformes.

Los métodos anteriores, aplicados a la mayoría de representaciones integrales de funciones especiales, resultan dar desarrollos en términos de funciones elementales. Sin embargo, existe un gran inconveniente: los desarrollos solo son útiles en un cierto entorno de la variable  $z$  y el carácter uniforme de los mismos no se discute.

Recordemos la definición de convergencia uniforme:

**Definición 2.3.1.** Sean  $f, f_n : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Diremos que  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  en  $A$  si para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$  para cualquier punto  $z \in A$ , o, equivalentemente, si  $\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Para buscar un desarrollo uniforme de una función especial proponemos la siguiente técnica:

- En primer lugar, consideramos una representación integral de la función especial, digamos  $\Psi(z) = \int_a^b f(t, z) g(t) dt$ , y tomamos algún factor del integrando donde no aparezca la variable  $z$  ( $g(t)$ ).
- A continuación, tomamos el desarrollo en serie de Taylor de ese factor en algún punto de manera que el disco de convergencia de la serie contenga el intervalo de integración salvo quizás en un punto. Este desarrollo es convergente para cualquier valor  $t$  del intervalo de integración y es, debido a la elección del factor, independiente de  $z$ .
- Intercambiamos la serie (finita) con la integral y esperamos que el hecho de que el factor que desarrollamos es independiente respecto a la variable  $z$  se traslade al resto, que deberemos probar tiende a cero con  $n$  y está acotado independientemente de  $z$  en alguna región.

En los siguientes capítulos aplicamos esta técnica a la función  $H_\nu$  (Cap. 3) y a la función  $K_\nu$  (Cap. 4) de Struve. Antes de ello veamos algunos desarrollos conocidos (no uniformes) de estas funciones.

### 2.4. Desarrollos conocidos de las funciones de Struve.

De la definición de la función  $H_\nu$  de Struve (1.1) se desprende un desarrollo en serie de Taylor entorno a  $z = 0$ , a saber,

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu-1} H_\nu(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k + \frac{3}{2}) \Gamma(k + \nu + \frac{3}{2})} + R_n^{(0),H}(\nu, z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.2)$$

Con esto podemos encontrar un desarrollo de Taylor de la función  $K_\nu$ . En efecto, teniendo en cuenta la relación  $K_\nu(z) = H_\nu(z) - Y_\nu(z)$  basta encontrar un desarrollo de Taylor de la función de Bessel  $Y_\nu$ . Esto lo conseguimos combinando [[14], ec. 10.2.2]

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(\nu+k+1)} + R_n^{(0),J}(\nu, z),$$

con [[14], ec. 10.2.3]

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)},$$

reemplazando esta expresión por el valor límite

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} + \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=-n}$$

cuando  $\nu = n$  es un entero [[14], ec. 10.2.4].

Por otro lado, tenemos los desarrollos asintóticos de las funciones  $H_\nu$  y  $K_\nu$ . En [[14], ec. 11.6.1] encontramos

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) (\frac{z}{2})^{\nu-2k-1}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2} - k)} + R_n^{(\infty),K}(\nu, z), \quad |phz| \leq \pi - \delta, \quad (2.3)$$

con  $\delta$  una constante positiva arbitrariamente pequeña, que proporciona un desarrollo asintótico de la función  $K_\nu$ . Además, si combinamos (2.3) con la relación  $H_\nu = K_\nu + Y_\nu$  y el desarrollo asintótico de la función  $Y_\nu$  de Bessel [[14], ec. 10.17.4]

$$Y_\nu(z) \sim \left( \frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sin \omega \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k a_{2k}(\nu)}{z^{2k}} + \cos \omega \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k a_{2k+1}(\nu)}{z^{2k+1}} \right) + R_n^{(\infty),Y}(\nu, z), \quad |phz| \leq \pi - \delta,$$

donde

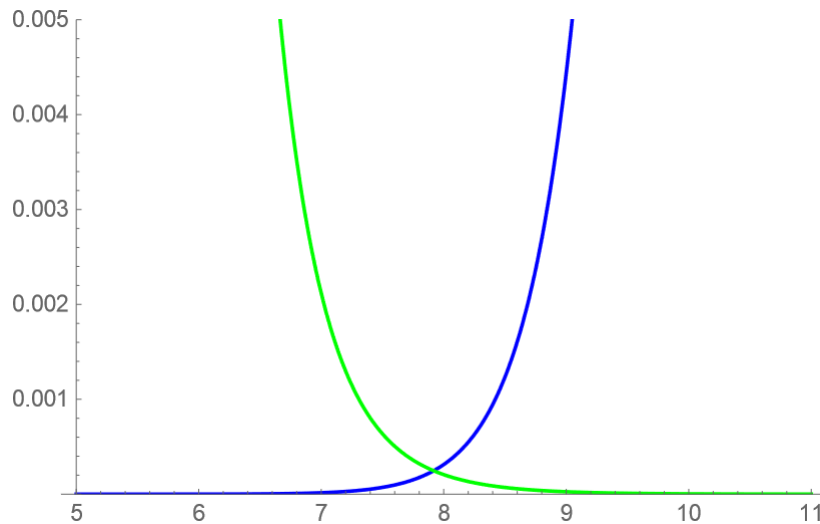
$$\omega = z - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi,$$

y

$$\begin{cases} a_0(\nu) = 1, \\ a_k(\nu) = \frac{\prod_{j=1}^k (4\nu^2 - (2j-1)^2)}{k! 8^k}, \quad k \geq 1, \end{cases}$$

obtenemos un desarrollo asintótico de la función  $H_\nu$  de Struve, válido para  $|phz| \leq \pi - \delta$ . Un desarrollo para  $|phz| = \pi$  lo encontramos con ayuda de la fórmula de continuación analítica [[14], ec. 11.4.16], a saber,  $H_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{\pi i(\nu+1)} H_\nu(z)$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ , combinada con el desarrollo anterior.

En la siguiente figura se muestra el valor absoluto del error relativo cometido al aproximar la función  $H_\nu$  de Struve por su desarrollo de Taylor (azul) y asintótico (verde) para  $\nu = 3$  y  $n = 10$  en el intervalo  $[5, 10]$ . En ella se observa el hecho comentado con anterioridad: para valores pequeños de la variable  $z$  el error cometido por el desarrollo de Taylor es prácticamente nulo, mientras que para valores grandes de la variable ese error es muy grande. Para el desarrollo asintótico ocurre lo opuesto. En ningún caso el desarrollo es válido uniformemente en una región que contenga valores grandes y pequeños de  $|z|$ . Para la función  $K_\nu$  y sus correspondientes desarrollos, la situación es similar.



Por otro lado, en [[14], Sec. 11.4] encontramos otros desarrollos de la función  $H_\nu$  donde aparece la función de Bessel de primer tipo  $J_\nu(z)$ . Por ejemplo, [[14], ec. 11.4.18]

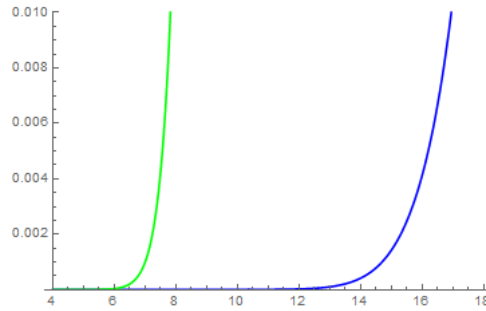
$$H_\nu(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k + \nu + 1)\Gamma(k + \nu + 1)}{k!(2k + 1)(2k + 2\nu + 1)} J_{2k+\nu+1}(z), \quad (2.4)$$

es válido para cualquier  $z \in \mathbb{C}$  y cualquier  $\nu \neq -1, -2, -3, \dots$ ; mientras que el desarrollo [[14], ec. 11.4.20]

$$H_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^k}{k!(k + \nu + \frac{1}{2})} J_{k+\frac{1}{2}}(z) \quad (2.5)$$

es válido para cualquier  $z, \nu \in \mathbb{C}$ .

En la figura de abajo se muestra el valor absoluto del error relativo cometido al aproximar la función  $H_\nu$  por las aproximaciones (2.4) (azul) y (2.5) (verde) en el intervalo  $[4, 18]$  para los valores  $\nu = 11/5$  y  $n = 10$ .



Ninguno de los desarrollos descritos verifica simultáneamente las siguientes tres propiedades: (i) están dados en términos de funciones elementales, (ii) son convergentes y (iii) son válidas para valores grandes y pequeños de  $|z|$ . Por un lado, en los desarrollos (2.4) y (2.5) aparece la función de Bessel  $J_\nu$  por lo que (i) no se satisface. Por otro lado los restos  $R_n^{(0)}$  no están acotados para valores grandes de  $|z|$  mientras que los restos  $R_n^{(\infty)}$  están inacotados para valores pequeños de  $|z|$ , por lo que (iii) no se cumple. Asimismo, el desarrollo asintótico es divergente y en consecuencia no cumple (ii). En cualquier caso, esto no desacredita estas aproximaciones, puesto que se encuentran entre las más competitivas para aproximar las funciones de Struve en las regiones donde son válidas.

En los siguientes capítulos buscamos un desarrollo de las funciones  $H_\nu$  y  $K_\nu$  que satisfaga las tres condiciones anteriores. Daremos cotas precisas del error cometido y compararemos el desarrollo uniforme con estos otros ya conocidos.



## Capítulo 3

# Desarrollo uniformemente convergente de la función H de Struve.

En el capítulo anterior hemos dado distintos desarrollos de las funciones de Struve, pero ninguno de ellos es uniforme en una región del plano complejo que contenga valores grandes y pequeños de  $|z|$ . En este capítulo, vamos a calcular un desarrollo de la función  $H_\nu$  que cumpla las siguientes tres propiedades:

- (I) Esté dado por medio de funciones elementales.
- (II) El desarrollo sea convergente.
- (III) El desarrollo sea uniforme en una amplia región de  $|z|$  no acotada y que contenga a  $z = 0$ .

**Teorema 3.0.1.** Para  $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  y  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{2 \left(\frac{z}{2}\right)^\nu} H_\nu(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2} - \nu\right)_k}{k!} (1 - \alpha)^{\nu-k-\frac{1}{2}} F_k(\alpha, z) + R_n^H(\nu, \alpha, z),$$

donde las funciones  $F_k(\alpha, z)$  son las funciones elementales

$$\begin{aligned} F_k(\alpha, z) &:= \int_0^1 (t^2 - \alpha)^k \operatorname{sen}(zt) dt = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m \alpha^{k-m} \left(\frac{d}{dz}\right)^{2m} \left(\frac{1 - \cos z}{z}\right) = \\ &= (-1)^k \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \alpha^{k-m} \frac{(2m)!}{z^{2m+1}} \left[ 1 - \cos z \sum_{j=0}^m \frac{z^{2j} (-1)^j}{(2j)!} - \operatorname{sen} z \sum_{j=0}^{m-1} \frac{z^{2j+1} (-1)^j}{(2j+1)!} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

que satisfacen la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} F_k(\alpha, z) &= \frac{-(1 - \alpha)^k \cos z + (-\alpha)^k}{z} + \frac{2k(1 - \alpha)^{k-1} \operatorname{sen}(z)}{z^2} - \\ &\quad \frac{4k^2 - 2k}{z^2} F_{k-1}(\alpha, z) - \frac{4k(k-1)\alpha}{z^2} F_{k-2}(\alpha, z), \quad \forall k \geq 2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

con

$$\begin{cases} F_0(\alpha, z) = \frac{1 - \cos z}{z} \\ F_1(\alpha, z) = \frac{-(1 - \alpha) \cos z - \alpha}{z} + \frac{2 \operatorname{sen} z}{z^2} + \frac{2(\cos z - 1)}{z^3}, \end{cases}$$

donde la parte de la derecha para valores cercanos a  $z = 0$  debe entenderse tomando límites.

El resto está acotado por

$$|R_n^H(\nu, \alpha, z)| \leq \cosh(\operatorname{Im} z) \frac{\left|\left(\frac{1}{2} - \nu\right)_n\right|}{n!} (G_1(\nu, \alpha, n) + G_2(\nu, \alpha, n)) \quad (3.3)$$

donde

$$G_1(\nu, \alpha, n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n!}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^n \sqrt{\alpha} (1 - \alpha)^{\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1 + \operatorname{Re} \nu, & 1 \\ n + \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \alpha \right) \quad (3.4)$$

y

$$G_2(\nu, \alpha, n) = \frac{(1 - \alpha)^{\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu}}{1 + 2 \operatorname{Re} \nu} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu, & 1 \\ n + 1, & \frac{3}{2} + \operatorname{Re} \nu \end{matrix} \middle| 1 - \alpha \right). \quad (3.5)$$

El resto  $R_n^H(\nu, \alpha, z)$  es uniforme en  $z$  con  $|\operatorname{Im} z| \leq \Lambda$ , para cualquier  $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , y se comporta como  $n^{-\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2}}$ .

*Demostración.* El teorema es la aplicación de la técnica enunciada en la sección 2.3 a la función  $H_\nu$  de Struve. Para ello, consideramos la representación integral de la función  $H$  de Struve dada por [[14], ec. 11.5.1]

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{2(z/2)^\nu} H_\nu(z) = \int_0^1 (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \operatorname{sen}(zt) dt, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}, \quad (3.6)$$

y desarrollamos la función  $(1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}}$  en un punto  $\alpha \in [0, 1]$ . Obtenemos

$$(1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{1}{2} - \nu)_k}{k!} (1 - \alpha)^{\nu - k - \frac{1}{2}} (t^2 - \alpha)^k + r_n(\nu, \alpha, t), \quad (3.7)$$

donde  $(x)_n = x \cdot (x + 1) \cdot \dots \cdot (x + n - 1) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$  denota el símbolo de Pochhammer; y el resto  $r_n(\nu, \alpha, t)$  viene dado por

$$r_n(\nu, \alpha, t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - \nu)_k}{k!} (1 - \alpha)^{\nu - k - \frac{1}{2}} (t^2 - \alpha)^k.$$

Aplicando el criterio del cociente es fácil ver que el radio de convergencia es  $1 - \alpha$ , de donde se sigue que la serie (centrada en  $\alpha$ ) converge en el intervalo  $(2\alpha - 1, 1)$ . Por lo tanto, si imponemos la restricción  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$  garantizamos dos hechos: (i) el punto  $\alpha$  está incluido en el intervalo de integración y (ii) el disco de convergencia de la serie contiene al intervalo de integración.

Por otro lado, el resto  $r_n(\nu, \alpha, t)$  admite una expresión cerrada en términos de la función hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1$  (ver [[14], Sec. 15] o [[13], Sec. 5 Cap. 9]), a saber,

$$r_n(\nu, \alpha, t) = \frac{(\frac{1}{2} - \nu)_n}{n!} (1 - \alpha)^{\nu - n - \frac{1}{2}} (t^2 - \alpha)^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} + n - \nu, & 1 \\ n + 1 \end{matrix} \middle| \frac{t^2 - \alpha}{1 - \alpha} \right). \quad (3.8)$$

Sustituyendo el desarrollo (3.7) en (3.6) e intercambiando la suma con la integral, obtenemos

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{2(z/2)^\nu} H_\nu(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left( \frac{1}{2} - \nu \right)_k (1 - \alpha)^{\nu - k - \frac{1}{2}} F_k(\alpha, z) + R_n^H(\nu, \alpha, z),$$

donde

$$R_n^H(\nu, \alpha, z) = \int_0^1 \operatorname{sen}(zt) r_n(\nu, \alpha, t) dt \quad (3.9)$$

y las funciones  $F_k(\alpha, z)$  están dadas por (3.1).

La recurrencia (3.2) que satisfacen las funciones  $F_k(\alpha, z)$  se sigue de integrar por partes dos veces en (3.1) mientras que  $F_0(\alpha, z)$  y  $F_1(\alpha, z)$  se calculan directamente.

Además, podemos encontrar una expresión cerrada para  $F_k(\alpha, z)$ . En efecto, utilizando el binomio de Newton en el integrando obtenemos

$$F_k(\alpha, z) = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-\alpha)^{k-m} \int_0^1 t^{2m} \operatorname{sen}(zt) dt =$$

$$(-1)^k \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \alpha^{k-m} \left( \frac{d}{dz} \right)^{2m} \left( \frac{1 - \cos z}{z} \right). \quad (3.10)$$

Usando la fórmula de Leibnitz y el hecho de que

$$\frac{d^j}{dz^j} (z^{-1}) = (-1)^j z^{-1-j} j!$$

y

$$\frac{d^j}{dz^j} (1 - \cos z) = \begin{cases} 1 - \cos z & \text{si } j = 0, \\ -\cos \left( z + \frac{j\pi}{2} \right) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

se tiene

$$\left( \frac{d}{dz} \right)^{2m} \left( \frac{1 - \cos z}{z} \right) = \frac{(2m)!}{z^{2m+1}} + \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} (-1)^{j+1} \cos \left( z + \frac{j\pi}{2} \right) \frac{(2m-j)!}{z^{2m+1-j}}.$$

Esta expresión se puede escribir en términos de la función gamma incompleta  $\Gamma(a, z)$  (ver [[14], Cap. 8] o [[7], Cap. IX]) como

$$\left( \frac{d}{dz} \right)^{2m} \left( \frac{1 - \cos z}{z} \right) = \frac{(2m)!}{z^{2m+1}} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^{2m+1}} \left[ \Gamma(1 + 2m, iz) + \Gamma(1 + 2m, -iz) \right].$$

Teniendo en cuenta la igualdad [[14], ec. 8.4.8] obtenemos

$$\left( \frac{d}{dz} \right)^{2m} \left( \frac{1 - \cos z}{z} \right) = \frac{(2m)!}{z^{2m+1}} \left[ 1 - \cos z \sum_{l=0}^m \frac{z^{2l} (-1)^l}{(2l)!} - \operatorname{sen} z \sum_{l=0}^{m-1} \frac{z^{2l+1} (-1)^l}{(2l+1)!} \right]. \quad (3.11)$$

Finalmente, sustituyendo (3.11) en (3.10) obtenemos una expresión cerrada de  $F_k$  como suma (doble) de funciones elementales.

Por otro lado teníamos la fórmula (3.9) para el resto  $R_n^H(\nu, \alpha, z)$ . Puesto que el resto  $r_n(\nu, \alpha, t)$  es integrable, podemos escribir

$$|R_n^H(\nu, \alpha, z)| \leq \int_0^1 |r_n(\nu, \alpha, t)| |\operatorname{sen}(zt)| dt.$$

Teniendo en cuenta que  $|\operatorname{sen}(zt)| \leq \cosh(t \operatorname{Im} z)$  y que  $t \in (0, 1)$  se deduce, gracias a la monotonía del coseno hiperbólico (creciente en los reales positivos y decreciente en los reales negativos) que  $\cosh(t \operatorname{Im} z) \leq \cosh(\operatorname{Im} z)$ . Así

$$|R_n^H(\nu, \alpha, z)| \leq \cosh(\operatorname{Im} z) \int_0^1 |r_n(\nu, \alpha, t)| dt.$$

Sustituyendo aquí la expresión (3.8) se tiene

$$|R_n^H(\nu, \alpha, z)| \leq \cosh(\operatorname{Im} z) \frac{\left| \left( \frac{1}{2} - \nu \right)_n \right|}{n!} \left| (1 - \alpha)^{\frac{-1}{2} - n + \nu} \right|$$

$$\times \int_0^1 |(t^2 - \alpha)^n| \left| {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} + n - \nu, & 1 \\ n + 1 \end{matrix} \middle| \frac{t^2 - \alpha}{1 - \alpha} \right) \right| dt \quad (3.12)$$

Teniendo en cuenta la igualdad  $\left| (1 - \alpha)^{\frac{-1}{2} - n + \nu} \right| = (1 - \alpha)^{\frac{-1}{2} - n + \operatorname{Re} \nu}$  y la desigualdad

$$\left| {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} + n - \nu, & 1 \\ n + 1 \end{matrix} \middle| \frac{t^2 - \alpha}{1 - \alpha} \right) \right| \leq {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} + n - \operatorname{Re} \nu, & 1 \\ n + 1 \end{matrix} \middle| \frac{t^2 - \alpha}{1 - \alpha} \right)$$

que se prueba de forma inmediata a partir de la representación integral de la función hipergeométrica dada en [[14], ec. 15.6.1] se deduce, reemplazando en (3.12), la cota para el error

$$\begin{aligned} |R_n^H(\nu, \alpha, z)| &\leq \cosh(\operatorname{Im} z) \frac{\left| \left( \frac{1}{2} - \nu \right)_n \right|}{n!} (1 - \alpha)^{\frac{-1}{2} - n + \operatorname{Re} \nu} \\ &\quad \times \underbrace{\int_0^1 |(t^2 - \alpha)^n| {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} + n - \operatorname{Re} \nu, & 1 \\ n + 1 \end{matrix} \middle| \frac{t^2 - \alpha}{1 - \alpha} \right) dt}_{=\overline{G}(\nu, \alpha, n)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ahora, calculemos la integral  $\overline{G}$  y obtengamos una cota explícita del error. Debido a la presencia del valor absoluto en el integrando rompemos la integral en dos, poniendo  $\overline{G}(\nu, \alpha, n) = \overline{G}_1(\nu, \alpha, n) + \overline{G}_2(\nu, \alpha, n)$ , donde

$$\overline{G}_1(\nu, \alpha, n) = \int_0^{\sqrt{\alpha}} (\alpha - t^2)^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} + n - \operatorname{Re} \nu, & 1 \\ n + 1 \end{matrix} \middle| \frac{t^2 - \alpha}{1 - \alpha} \right) dt$$

y

$$\overline{G}_2(\nu, \alpha, n) = \int_{\sqrt{\alpha}}^1 (t^2 - \alpha)^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} + n - \operatorname{Re} \nu, & 1 \\ n + 1 \end{matrix} \middle| \frac{t^2 - \alpha}{1 - \alpha} \right) dt.$$

La primera de estas expresiones,  $\overline{G}_1(\nu, \alpha, n)$ , se puede calcular directamente tras el cambio de variable  $\frac{\alpha - t^2}{\alpha} = u$  y resulta

$$\overline{G}_1(\nu, \alpha, n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n!}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} \alpha^{n + \frac{1}{2}} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} + n - \operatorname{Re} \nu, & 1 \\ n + \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right).$$

De donde se tiene, tras aplicar [[14], ec. 15.8.1] con  $a = 1, b = 1 + \operatorname{Re} \nu, c = n + \frac{3}{2}$  y  $z = \alpha$  que

$$\overline{G}_1(\nu, \alpha, n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n!}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} \alpha^{n + \frac{1}{2}} (1 - \alpha) {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, & 1 + \operatorname{Re} \nu \\ n + \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \alpha \right). \quad (3.14)$$

Por otro lado, la parte correspondiente a  $\overline{G}_2(\nu, \alpha, z)$  es más delicada y resulta ser, tras el cambio de variable  $\frac{t^2 - \alpha}{1 - \alpha} = u$ , igual a

$$\overline{G}_2(\nu, \alpha, n) = \int_0^1 \frac{(1 - \alpha)^{n+1}}{2} \frac{u^n}{\sqrt{(1 - \alpha)u + \alpha}} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} + n - \operatorname{Re} \nu, & 1 \\ n + 1 \end{matrix} \middle| u \right) du. \quad (3.15)$$

La presencia del radical dificulta el cálculo de esta integral. Sin embargo, desarrollando la función  $w_\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha)u + \alpha}}$  en serie de Taylor centrada en  $u = 1$  se obtiene

$$w_\alpha(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{1}{2} \right)_m}{m!} (-1)^m (1 - \alpha)^m (u - 1)^m. \quad (3.16)$$

Entonces se verifica que el disco de convergencia de esta serie, a saber  $D(1; \frac{1}{1-\alpha})$ , contiene al intervalo de integración  $[0, 1]$ . Sustituyendo (3.16) en (3.15) e intercambiando la serie con la integral se obtiene, tras simplificar,

$$\overline{G}_2(v, \alpha, n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_m}{m!} (1-\alpha)^{n+m+1} \frac{\Gamma(1+m)\Gamma(1+n)}{(1+2m+2\operatorname{Re} v)\Gamma(m+n+1)}.$$

Esta última expresión puede sumarse, en términos de la función hipergeométrica generalizada  ${}_3F_2$  y queda

$$\overline{G}_2(v, \alpha, n) = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{1+2\operatorname{Re} v} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v, 1 \\ n+1, \frac{3}{2} + \operatorname{Re} v \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right). \quad (3.17)$$

Ahora, reemplazando las expresiones (3.14) y (3.17) en (3.13) obtenemos la cota para el error dada en el enunciado (3.3).

Para terminar, veamos que el desarrollo es uniforme en  $z$  y el resto (3.3) se comporta como  $n^{-\operatorname{Re} v - \frac{1}{2}}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Para ello, consideramos la representación integral de la función hipergeométrica generealizada  ${}_3F_2$  dada por [[14], ec. 16.5.2]

$${}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v, 1 \\ n+1, \frac{3}{2} + \operatorname{Re} v \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) = n \int_0^1 (1-t)^{n-1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v \\ \frac{3}{2} + \operatorname{Re} v \end{matrix} \middle| (1-\alpha)t \right) dt. \quad (3.18)$$

Teniendo en cuenta la representación integral de la función hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1$  dada en [[14], ec. 15.6.1] se tiene que

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v \\ \frac{3}{2} + \operatorname{Re} v \end{matrix} \middle| (1-\alpha)t \right) &= \left( \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v \right) \int_0^1 s^{\operatorname{Re} v - \frac{1}{2}} [1 - (1-\alpha)ts]^{\frac{-1}{2}} ds \stackrel{t \in (0,1)}{<} \\ &< \left( \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v \right) \int_0^1 s^{\operatorname{Re} v - \frac{1}{2}} [1 - (1-\alpha)s]^{\frac{-1}{2}} ds = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v \\ \frac{3}{2} + \operatorname{Re} v \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos acotar en (3.18) para obtener

$$\begin{aligned} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v, 1 \\ n+1, \frac{3}{2} + \operatorname{Re} v \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) &< n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v \\ \frac{3}{2} + \operatorname{Re} v \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{n-1} dt}_{=\frac{1}{n}} = \\ &= {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v \\ \frac{3}{2} + \operatorname{Re} v \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right). \end{aligned}$$

Esta expresión no depende de  $n$  y por lo tanto, al acotar en (3.3), el sumando  $G_2(v, \alpha, n)$  se comporta, cuando  $n \rightarrow \infty$ , como una constante.

Por otro lado, acotamos el sumando correspondiente a  $G_1(v, \alpha, n)$ . De manera similar y utilizando la representación integral de la función hipergeométrica  ${}_2F_1$  dada en [[14], ec. 15.6.1] se tiene que

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1 + \operatorname{Re} v, 1 \\ n + \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \alpha \right) \leq (1-\alpha)^{-\operatorname{Re} v - 1}.$$

Con esto, obtenemos la siguiente cota para el error

$$\left| R_n^H \left( \nu, \frac{1}{4}, z \right) \right| \leq \cosh(\operatorname{Im} z) \frac{\left| \left( \frac{1}{2} - \nu \right)_n \right|}{n!} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n!}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 + 2 \operatorname{Re} \nu} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu \\ \frac{3}{2} + \operatorname{Re} \nu \end{matrix} \middle| 1 - \alpha \right) \right]. \quad (3.19)$$

Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  siempre que  $\operatorname{Im} z \leq \Lambda$ , para cualquier  $\Lambda \in \mathbb{R}$  se tiene que el primer sumando en el corchete de (3.19) tiende rápidamente a cero (pues  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ ) mientras que el segundo es una constante. Por lo tanto, el resto se comporta como

$$|R_n^H(\nu, \alpha, z)| \sim \frac{\left| \left( \frac{1}{2} - \nu \right)_n \right|}{n!}.$$

Escribiendo el símbolo de Pochhammer como cociente de gammas y despreciando constantes se tiene que

$$|R_n^H(\nu, \alpha, z)| \sim \frac{|\Gamma(n - \nu + \frac{1}{2})|}{\Gamma(n + 1)}.$$

Finalmente, aproximando la función  $\Gamma(z)$  mediante la fórmula de Stirling (2.1) y tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  se deduce que  $|R_n^H(\nu, \alpha, z)| \sim n^{-\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2}}$ . □

Hemos considerado el desarrollo en un punto genérico  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ . Recordemos que la restricción a este intervalo es necesaria para asegurar que el intervalo de integración  $(0, 1)$  está contenido (salvo quizá en algún punto) en el disco de convergencia de la serie de Taylor. Notemos que si  $\alpha > \frac{1}{2}$  entonces la cota del error (3.3) no tiende a cero al hacer  $n \rightarrow \infty$ , debido a la presencia del factor  $(\frac{\alpha}{1-\alpha})^n$ , por lo que la restricción  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$  es necesaria.

A continuación vamos a buscar el punto óptimo en el que desarrollar, es decir, el que garantice un error mínimo (o al menos proporcione el mínimo para la cota del error dada en (3.3)). Para ello es suficiente encontrar el mínimo (en  $\alpha$ ) de la función  $G_1(\nu, \alpha, n) + G_2(\nu, \alpha, n)$ . Sin embargo, experimentos numéricos muestran que el mínimo de esta función depende de  $n$ . No obstante, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 3.0.2.** *La función  $G_1(\nu, \alpha, n) + G_2(\nu, \alpha, n)$  es decreciente en  $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$ , donde  $G_1$  y  $G_2$  están definidas en (3.4) y (3.5) respectivamente.*

*Demostración.* Dado que las funciones son derivables, es suficiente probar que  $\frac{\partial G_1(\nu, \alpha, n)}{\partial \alpha} + \frac{\partial G_2(\nu, \alpha, n)}{\partial \alpha} < 0$ ,  $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{4}]$ .

En primer lugar, aplicando [[6], pág. 102, ec. (23)] con  $a = 1, b = 1 + \operatorname{Re} \nu, c = n + \frac{3}{2}$  y  $z = \alpha$  se tiene que

$$\frac{\partial G_1(\nu, \alpha, n)}{\partial \alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n!}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \alpha^{n - \frac{1}{2}} (1 - \alpha)^{\operatorname{Re} \nu - n - \frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, aplicando la regla de la cadena y haciendo uso de [[14], ec. 16.3.2] con  $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu, b_1 = n + 1, b_2 = \frac{3}{2} + \operatorname{Re} \nu, z = 1 - \alpha$  y  $\gamma = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu$  se deduce que

$$\frac{\partial G_2(\nu, \alpha, z)}{\partial \alpha} = \frac{-1}{2} (1 - \alpha)^{\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2}} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, & 1 \\ n + 1 \end{matrix} \middle| 1 - \alpha \right).$$

Con esto,

$$\frac{\partial G_1(\nu, \alpha, n)}{\partial \alpha} + \frac{\partial G_2(\nu, \alpha, n)}{\partial \alpha} = \frac{(1 - \alpha)^{\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2}}}{2} \left[ \sqrt{\pi} \frac{n!}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \alpha^{n - \frac{1}{2}} (1 - \alpha)^{-n} - {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, & 1 \\ n + 1 \end{matrix} \middle| 1 - \alpha \right) \right].$$

Ver que  $G_1 + G_2$  es decreciente es equivalente a probar que la expresión anterior es negativa,  $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{4}]$ . Por hipótesis  $\operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}$  y en consecuencia el factor que multiplica al corchete no presenta problemas ni cambia de signo para  $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$  y lo podemos omitir. Así, se trata de probar que

$$\sqrt{\pi} \frac{n!}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \alpha^{n-\frac{1}{2}} (1-\alpha)^{-n} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1 \\ n+1 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) < 0$$

o, equivalentemente,

$$\pi < \underbrace{\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \alpha^{\frac{1}{2}-n} (1-\alpha)^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1 \\ n+1 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right)}_{=A_n(\alpha)}.$$

Debemos probar que  $A_n(\alpha) \geq \pi$ ,  $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{4}]$ . Para ello veamos primero que  $A_1(\alpha)$  verifica esta desigualdad.

$$A_1(\alpha) = \frac{\pi(1-\alpha)}{(1+\sqrt{\alpha})\sqrt{\alpha}} = \pi \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1 \right).$$

De donde se sigue que

$$A_1(\alpha) \geq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto,  $A_1(\alpha)$  cumple la deseada desigualdad,  $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{4}]$ .

Ahora, veamos que  $A_n(\alpha)$  es una sucesión creciente y así  $A_{n+1}(\alpha) \geq A_n(\alpha) \geq \dots \geq A_1(\alpha) \geq \pi$  y habremos terminado.

Consideramos el cociente

$$\frac{A_{n+1}(\alpha)}{A_n(\alpha)} = \frac{n + \frac{1}{2}}{n+1} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{{}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ n+2 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right)}{{}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ n+1 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right)}. \quad (3.20)$$

Utilizando [[14], ec. 15.5.16] con  $a = 1, b = \frac{1}{2}, c = n+1$  y  $z = 1-\alpha$  se prueba la relación

$$\frac{{}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ n+2 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right)}{{}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ n+1 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right)} = \left( \frac{1}{{}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ n+1 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right)} - \alpha \right) \cdot \frac{n+1}{(n + \frac{1}{2})(1-\alpha)}.$$

Introduciendo esta igualdad en (3.20) se sigue que

$$\frac{A_{n+1}(\alpha)}{A_n(\alpha)} = \frac{1}{\alpha {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ n+1 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right)} - 1$$

Como  $A_n$  es una serie creciente si y solo si  $\frac{A_{n+1}}{A_n} > 1$ , tenemos que  $A_n$  es creciente si y solo si

$$\frac{1}{2\alpha} > {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ n+1 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right), \quad \forall \alpha \in (0, 1/4).$$

Tomando la representación integral de la función hipergeométrica que se encuentra en [[14], ec. 15.6.1] se tiene

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ n+1 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) = n \int_0^1 (1-t)^{n-1} (1-(1-\alpha)t)^{-\frac{1}{2}} dt < \frac{n}{\sqrt{\alpha}} \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Por lo tanto

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ n+1 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \frac{1}{2\alpha}, \Leftrightarrow \alpha \in (0, 1/4).$$

Así,  $A_n(\alpha)$  es creciente y entonces  $A_n(\alpha) \geq \pi$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  de donde se sigue que la función  $G_1(v, \alpha, n) + G_2(v, \alpha, n)$  es estrictamente decreciente en  $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$ . □

Esto implica que  $\alpha = \frac{1}{4}$  es un pseudo-mínimo para (3.3) en el sentido de que minimiza la cota del error y es válido para todos los  $n$ .

### 3.1. Casos especiales.

Analizamos a continuación varios casos especialmente importantes según los valores de los parámetros. En particular, resaltaremos los casos  $\alpha = 0$  por simplicidad de las fórmulas y  $\alpha = \frac{1}{4}$  por minimizar la cota del error. Asimismo destacaremos el caso que  $v$  sea un semientero.

#### 3.1.1. Caso $\alpha = 0$ .

En este caso, el teorema 3.0.1 aporta unas expresiones más sencillas para los términos del desarrollo. En concreto, establece:

**Teorema 3.1.1.** Para  $\operatorname{Re} v > \frac{-1}{2}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(v + \frac{1}{2})}{(\frac{z}{2})^v} H_v(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{1}{2} - v)_k}{k!} \gamma_k(z) + \overline{R}_n^H(v, z),$$

donde las funciones  $\gamma_k(z)$  son las funciones elementales

$$\begin{aligned} \gamma_k(z) &:= F_k(0, z) = \int_0^1 t^{2k} \operatorname{sen}(zt) dt = \left( \frac{d}{dz} \right)^{2k} \left( \frac{1 - \cos z}{z} \right) = \\ &= (-1)^k \frac{(2k)!}{z^{2k+1}} \left[ 1 - \cos z \sum_{j=0}^k \frac{z^{2j} (-1)^j}{(2j)!} - \operatorname{sen} z \sum_{j=0}^{k-1} \frac{z^{2j+1} (-1)^j}{(2j+1)!} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

que satisfacen la relación de recurrencia

$$\begin{cases} \gamma_k(z) = \frac{-\cos z}{z} + \frac{2k \operatorname{sen}(z)}{z^2} - \frac{4k^2 - 2k}{z^2} \gamma_{k-1}(z), & \forall k \geq 1, \\ \gamma_0(z) = \frac{1 - \cos z}{z} \end{cases}$$



El resto está acotado por

$$|\overline{R}_n^H(v, z)| \leq \cosh(\operatorname{Im} z) \frac{|(\frac{1}{2} - v)_n|}{n!} \frac{1}{1 + 2\operatorname{Re} v} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v, 1 \\ n + 1, \frac{3}{2} + \operatorname{Re} v \end{matrix} \middle| 1 \right), \quad (3.22)$$

y es uniforme en  $z$  con  $|\operatorname{Im} z| \leq \Lambda$ , para cualquier  $\Lambda \in \mathbb{R}^+$  y se comporta como  $n^{-\operatorname{Re} v - \frac{1}{2}}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

La demostración del teorema es inmediata, tomando  $\alpha = 0$  en el teorema 3.0.1.

### 3.1.2. Caso $\alpha = \frac{1}{4}$ .

Hemos visto que este caso tiene interés por minimizar la cota del error. Ahora el teorema 3.0.1 se lee de la misma forma sustituyendo  $\alpha = \frac{1}{4}$ . El resto verifica

$$\begin{aligned} \left| R_n^H \left( v, \frac{1}{4}, z \right) \right| &\leq \cosh(\operatorname{Im} z) \frac{|(\frac{1}{2} - v)_n|}{n!} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{n!}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} \left( \frac{1}{3} \right)^n \left( \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{2} + \operatorname{Re} v} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1 + \operatorname{Re} v, 1 \\ n + \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2} + \operatorname{Re} v}}{1 + 2\operatorname{Re} v} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \operatorname{Re} v, 1 \\ n + 1, \frac{3}{2} + \operatorname{Re} v \end{matrix} \middle| \frac{3}{4} \right) \right], \end{aligned}$$

y es uniforme en  $z$  siempre que  $|\operatorname{Im} z| \leq \Lambda$ , para cualquier  $\Lambda \in \mathbb{R}^+$  y se comporta como  $n^{-\operatorname{Re} v - \frac{1}{2}}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.1.3. Valores semienteros del parámetro $v$ .

Para valores semienteros (no negativos) del parámetro  $v$  la función  $H_v$  de Struve es una función elemental, como se prueba al combinar la relación  $K_v = H_v - Y_v$  con [[14], ec. 10.47.4], [[14], ec. 10.49.4] y [[14], ec. 11.4.1]. En este caso, la aproximación uniforme dada por el teorema 3.0.1 es exacta, siempre que  $n$  sea suficientemente grande, independientemente de  $\alpha$ . En efecto, en la cota (3.3) del error se observa que, para  $n$  suficientemente grande, el factor  $(\frac{1}{2} - v)_n$  se anula y por lo tanto el error cometido es cero. En consecuencia podemos obtener una fórmula cerrada para  $H_{m+\frac{1}{2}}(z)$ , con  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Para ello, tomamos  $\alpha = 0$  (por simplicidad) y despejando  $H_{v+\frac{1}{2}}(z)$  en la expresión del teorema 3.0.1 obtenemos, para  $n$  suficientemente grande (basta tomar  $n = m + 1$ ),

$$H_{m+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-m)_k}{k!} \gamma_k(z),$$

donde las funciones  $\gamma_k(z)$  están dadas en (3.21). Teniendo en cuenta que el Pochhammer se aplica sobre un número entero [[14], ec. 5.2.7], la expresión anterior queda

$$H_{m+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \left( \frac{z}{2} \right)^m \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-k)!k!} \gamma_k(z).$$

En particular, para  $m = 0$  se obtiene la expresión

$$H_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (1 - \cos z),$$

dada en [[14], ec. 11.4.5]; y tomando  $m = 1$  se obtiene la expresión [[14], ec. 11.4.9]

$$H_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \left( 1 + \frac{2}{z^2} \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \operatorname{sen} z + \frac{\cos z}{z} \right).$$

### 3.1.4. $z$ variable real.

En el caso de  $z \in \mathbb{R}$ , la cota para el error queda

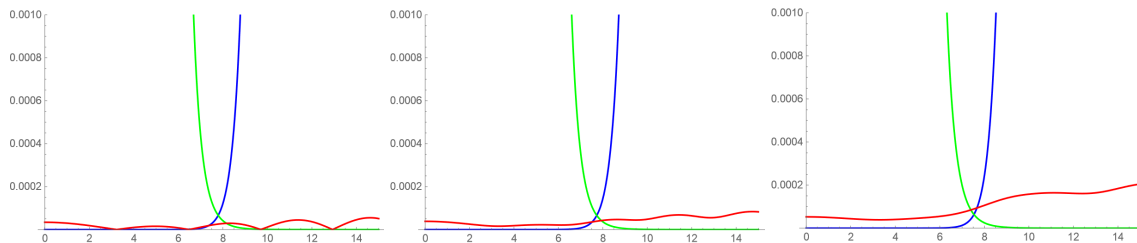
$$|R_n^H(v, \alpha, z)| \leq \frac{\left|\left(\frac{1}{2} - v\right)_n\right|}{n!} (G_1(v, \alpha, n) + G_2(v, \alpha, n))$$

y el desarrollo dado por el teorema 3.0.1 es uniforme para todo  $z \in \mathbb{R}$ .

## 3.2. Gráficas y tablas numéricas.

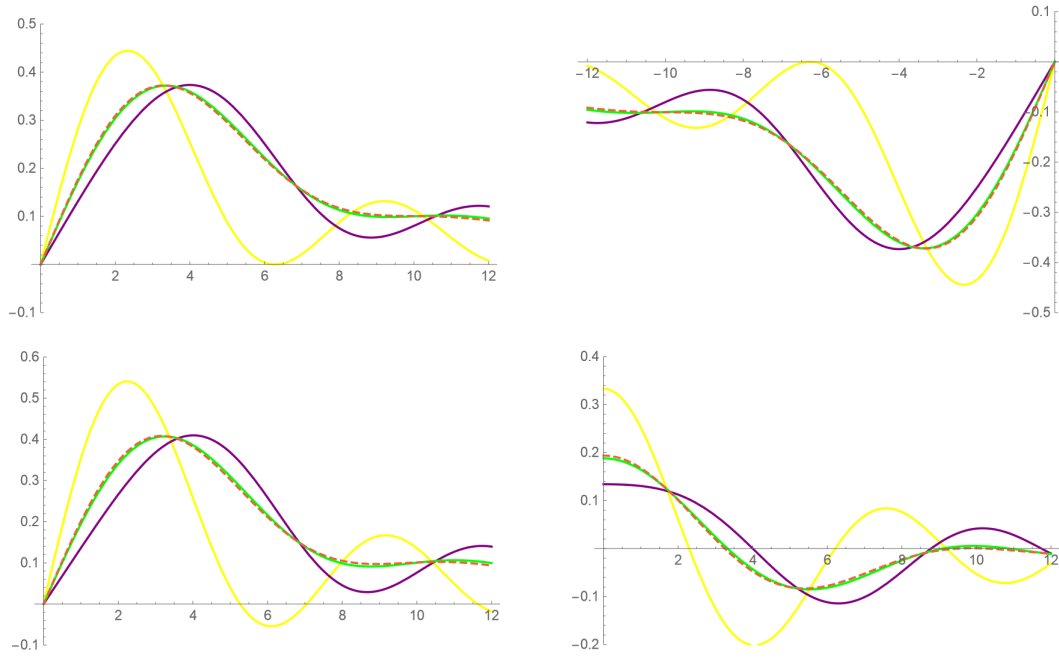
### 3.2.1. Gráficas.

A continuación se muestran unas gráficas en distintos intervalos comparando los valores absolutos de los errores relativos cometidos al aproximar la función  $\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(v + \frac{1}{2})}{2} \frac{(\frac{z}{2})^v}{H_v(z)}$ , para el valor del parámetro  $v = \frac{18}{5}$ , utilizando el desarrollo dado en el Teorema 3.0.1 con  $\alpha = \frac{1}{4}$  y los desarrollos de Taylor y asintótico dados en el capítulo 2, tomando en los tres casos  $n = 10$ . Se representa en azul el desarrollo de Taylor, en verde el asintótico y en rojo el uniforme.

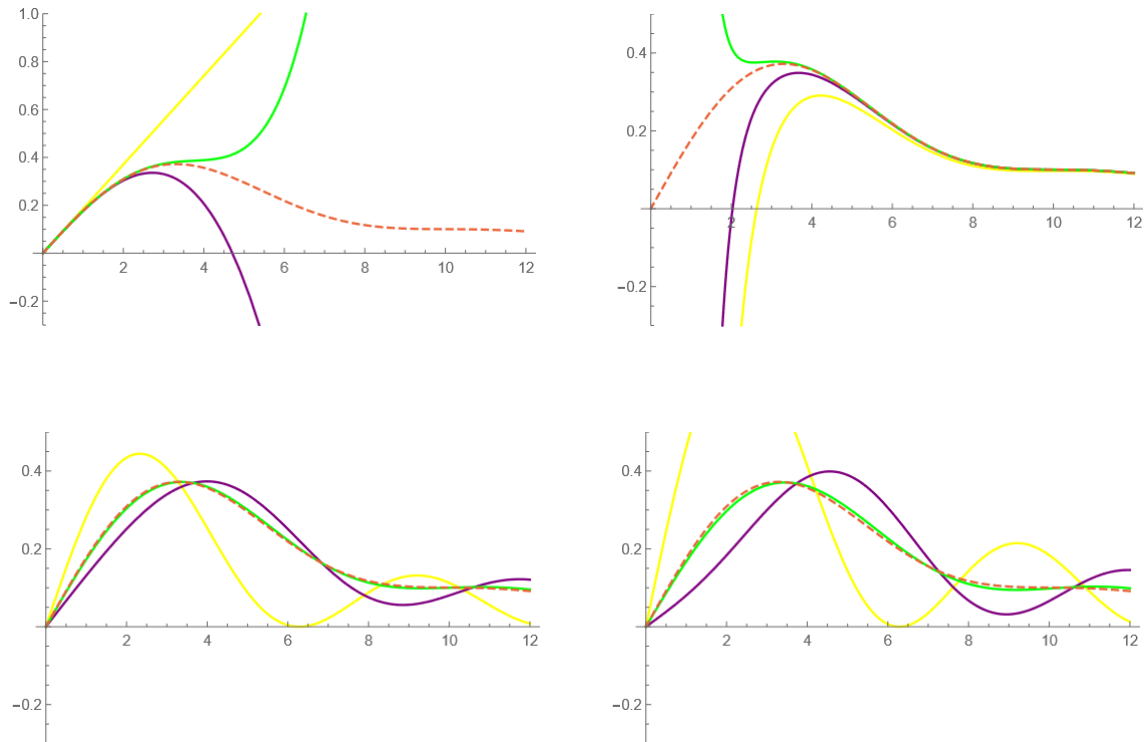


Hemos representado los intervalos  $[0, 15]$  (izquierda),  $[i, 15 + i]$  (centro) y  $[2i, 15 + 2i]$  (derecha). En ellas, es visible el carácter uniforme de la aproximación dada en el teorema 3.0.1. Observamos lo esperado, para valores pequeños de  $|z|$  el desarrollo de Taylor es mucho más competitivo mientras que para valores grandes lo es el asintótico. Sin embargo, el desarrollo uniforme compite con ellas y es uniformemente mejor. Para valores negativos de la variable  $z$  y complejos conjugados las gráficas son idénticas debido a la simetría de la función, que se conserva en sus aproximaciones. Para  $\alpha = 0$  las gráficas son similares.

A continuación se representa la función  $\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{11}{5} + \frac{1}{2})}{2} \frac{(\frac{z}{2})^{\frac{11}{5}}}{H_{\frac{11}{5}}(z)}$  (en discontinuo y rojo) junto con la aproximación uniforme dada por el teorema 3.0.1 para  $n = 1$  (amarillo),  $n = 2$  (morado) y  $n = 3$  (verde) en los intervalos  $[0, 12]$  (arriba izquierda),  $[-12, 0]$  (arriba derecha) y  $[i, 12 + i]$  (abajo). En este último caso, la gráfica de la izquierda corresponde a su parte real, mientras que la gráfica de la derecha representa su parte imaginaria.



Por otro lado se muestran las gráficas de la función  $\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{11}{5} + \frac{1}{2})}{2 \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{11}{5}}} H_{\frac{11}{5}}(z)$  (en discontinuo y rojo) junto con las aproximaciones de Taylor (arriba izquierda), asintótico (arriba derecha), uniforme con  $\alpha = \frac{1}{4}$  (abajo izquierda) y uniforme con  $\alpha = 0$  (abajo derecha) para  $n = 1$  (amarillo),  $n = 2$  (morado) y  $n = 3$  (verde) en el intervalo  $[0, 12]$ .



En ellas se observa claramente el comportamiento de cada aproximación. Además, comparando las dos gráficas de abajo, se observa que para  $\alpha = \frac{1}{4}$  el error es menor que para  $\alpha = 0$ , como hemos demostrado con anterioridad.

### 3.2.2. Tablas numéricas.

Finalmente obtenemos algunas aproximaciones válidas para  $z \in \mathbb{R}$ .

Para comenzar, escribimos los valores que toma la función  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{11}{5} + \frac{1}{2})}{(\frac{z}{2})^{\frac{11}{5}}} H_{\frac{11}{5}}(z)$  para  $z = 1, 2, \dots, 28$ :

0.177019, 0.309041, 0.368939, 0.356584, 0.295336, 0.218745, 0.155078, 0.117429, 0.103116, 0.100593, 0.0984896, 0.0914988, 0.080843, 0.0707545, 0.0643365, 0.0616006, 0.0602972, 0.0581371, 0.0544413, 0.0501747, 0.0467479, 0.0447806, 0.0437695, 0.0427111, 0.0409872, 0.0387653, 0.0366939, 0.0352719.

Por otro lado, escribimos los valores que toma la aproximación dada por el teorema 3.0.1 para  $n = 3$ ,  $\alpha = 1/4$  en los valores  $z = 1, 2, \dots, 28$ :

0.172688, 0.303871, 0.367075, 0.359481, 0.300649, 0.222315, 0.154321, 0.113333, 0.0992716, 0.100164, 0.101688, 0.095594, 0.0825725, 0.06902, 0.0609487, 0.0595769, 0.0612747, 0.0611136, 0.05681, 0.0500363, 0.0444674, 0.0425185, 0.0435157, 0.044592, 0.0432793, 0.0394998, 0.0353746, 0.0332164.

Hacemos lo mismo para  $\alpha = 0$ :

0.167439, 0.29714, 0.363547, 0.361292, 0.305951, 0.226904, 0.154924, 0.10995, 0.0948464, 0.0980401, 0.103012, 0.0986902, 0.0846023, 0.068379, 0.0584161, 0.0574075, 0.0611769, 0.0628828, 0.0586904, 0.0503514, 0.0430352, 0.0406748, 0.0428397, 0.0455268, 0.0448388, 0.0402312, 0.0346556, 0.0317383.

En estas tablas numéricas se observa como se comporta la aproximación uniforme para  $n = 3$ ,  $\nu = \frac{11}{5}$  para los 28 primeros números enteros positivos. En particular, se tiene que, para  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{11}{5} + \frac{1}{2})}{(\frac{z}{2})^{\frac{11}{5}}} H_{\frac{11}{5}}(z) \approx \frac{15.56716 + 3.42848z^2 + 1.00122z^4}{z^5} + \frac{(-15.56716 + 4.35510z^2 + 0.06439z^4) \cos z + (-15.56716z - 0.83396z^3) \sin z}{z^5} + \varepsilon(z),$$

con

$$|\varepsilon(z)| \leq 0.00578232,$$

mientras que para  $\alpha = 0$  la aproximación es peor aunque de fórmula más simple, obteniendo

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{11}{5} + \frac{1}{2})}{(\frac{z}{2})^{\frac{11}{5}}} H_{\frac{11}{5}}(z) = \frac{14.28 + 3.4z^2 + z^4 + (-14.28 + 3.74z^2 + 0.105z^4) \cos z}{z^5} - \frac{(14.28z + 1.02z^3) \sin z}{z^5} + \delta(z),$$

con

$$|\delta(z)| \leq 0.0124198.$$

Destacamos dos hechos: En primer lugar, las cotas obtenidas son finas (comparar por ejemplo los primeros valores dados de la función y sus aproximaciones). En segundo lugar, la función de Struve reescalada  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{11}{5} + \frac{1}{2})}{(\frac{z}{2})^{\frac{11}{5}}} H_{\frac{11}{5}}(z)$  es decreciente en la semirrecta real positiva y tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, para  $z$  suficientemente grande la cota uniforme (que es constante) será relativamente mala.

## Capítulo 4

# Desarrollo uniformemente convergente de la función K de Struve.

Como hemos hecho en el capítulo anterior para la función  $H_\nu$  de Struve, vamos a buscar un desarrollo uniforme de la función  $K_\nu$  que verifique las siguientes tres condiciones:

- El desarrollo sea convergente.
- Esté dado por medio de funciones elementales.
- El desarrollo sea uniforme en una amplia región del plano complejo que contenga valores grandes y pequeños de  $|z|$ .

La técnica a seguir va a ser la misma que en el capítulo 3: consideramos una representación integral de la función  $K_\nu$  y desarrollamos en serie una parte del integrando. Tras intercambiar la suma con la integral, obtenemos un desarrollo en serie de nuestra función especial, que deberemos probar es convergente y uniforme.

En [[14], ec. 11.5.2] se encuentra la siguiente representación integral de la función  $K_\nu$ , válida siempre que  $\operatorname{Re} z > 0$ :

$$K_\nu(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-zt} (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt.$$

Ahora bien, encontramos una gran diferencia entre la función  $K_\nu$  y la función  $H_\nu$ , a saber, en la función  $K_\nu$  el intervalo de integración es no acotado. Por lo tanto, el disco de convergencia del posible factor que desarrollemos no contendrá al intervalo de integración. Por ello, antes de desarrollar en serie debemos realizar un cambio de variable en la integral para que el intervalo de integración sea finito. Tomando  $t = -\log u$  obtenemos

$$\int_0^\infty e^{-zt} (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 u^{z-1} (1+\log^2 u)^{\nu-\frac{1}{2}} du.$$

El intervalo de integración ya es acotado, pero a cambio la función  $h_\nu(u) = (1+\log^2 u)^{\nu-\frac{1}{2}}$  que desarrollaremos en serie se ha complicado considerablemente. Para desarrollarla consideraremos las funciones  $(1+\log^2 u)^{\nu-\frac{1}{2}} = h_\nu(u) = g_\nu(f(u))$  con  $g_\nu(u) = (1+u)^{\nu-\frac{1}{2}}$  y  $f(u) = \log^2 u$  y utilizaremos la fórmula de Faà di Bruno que proporciona la derivada  $n$ -ésima de una composición de funciones.

**Lema 4.0.1.** Sean  $g_\nu(u) = (1+u)^{\nu-\frac{1}{2}}$  y  $f(u) = \log^2 u$ . Entonces, para todo  $m \geq 1$  las derivadas  $m$ -ésimas están dadas por

$$g_\nu^{(m)}(u) = m! \binom{\nu-\frac{1}{2}}{m} (1+u)^{\nu-\frac{1}{2}-m}$$

y

$$f^{(m)}(u) = \frac{2(m-1)!(-1)^m}{u^m} \left( \log \frac{1}{u} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right)$$

*Demostración.* Por inducción, ambas fórmulas se prueban sin dificultad.  $\square$

Con esto, podemos calcular, utilizando la fórmula de Faà di Bruno [[14], ec. 1.4.13.], la derivada  $n$ -ésima de la función  $h_v(u) = g_v(f(u))$ . Según ésta, resulta

$$\frac{d^n}{du^n} g(f(u)) = \sum_{k=0}^n g^{(k)}(f(u)) B_{n,k}(g', g'', \dots, g^{(n-k+1)}),$$

donde  $B_{n,k}$  son los polinomios de Bell descritos en [[5], Cap 11.2] que satisfacen la recurrencia [[5], ec. 11.11]

$$\begin{cases} B_{n,k}(x_1, \dots, x_{n-k+1}) = \sum_{j=1}^{n-k+1} x_j B_{n-j,k-1} \\ B_{0,0} = 1 \\ B_{n+1,0} = 0 = B_{0,n+1} \end{cases}$$

Así, tenemos el siguiente resultado.

**Lema 4.0.2.** Sea  $h_v(u) = (1 + \log^2 u)^{v-\frac{1}{2}} = g_v(f(u))$  como antes. Entonces

$$h_v^{(k)}(u) = k! \sum_{m=1}^k \frac{b_{k,m}(u)}{m!} g_v^{(m)}(f(u))$$

donde

$$\begin{cases} b_{0,0}(u) = 1 \\ b_{n+1,0}(u) = 0 \\ b_{n,m}(u) = \sum_{k=m-1}^{n-1} c_{n-k}(u) b_{k,m-1}(u) \end{cases}$$

con

$$c_{n-k}(u) = \frac{2(-1)^{n-k}}{(n-k)u^{n-k}} \left[ \log \frac{1}{u} + \sum_{m=1}^{n-k-1} \frac{1}{m} \right]$$

*Demostración.* Basta considerar el lema anterior, la fórmula de Faà di Bruno y la relación que verifican los polinomios de Bell. Sustituyendo todas las expresiones y manipulándolas levemente se tiene la tesis.  $\square$

Con esto, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 4.0.3.** Para  $\operatorname{Re} z > 1$ ,  $v \in \mathbb{C}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  y  $\beta \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\cos(1)}\right)$

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(v + \frac{1}{2})}{2 \left(\frac{z}{2}\right)^v} K_v(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_v^{(k)}(\beta)}{k!} L_k(z, \beta) + R_n^K(v, \beta, z),$$

donde  $h_v(u) = (1 + \log^2 u)^{v-\frac{1}{2}}$  y sus derivadas están dadas en el lema 4.0.2. Además las funciones  $L_k(z, \beta)$  son las funciones elementales

$$L_k(z, \beta) := \int_0^1 u^{z-1} (u - \beta)^k du = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-\beta)^{k-m} \frac{1}{z+m} \quad (4.1)$$

que satisfacen la relación de recurrencia

$$L_k(z, \beta) = \frac{(1-\beta)^k}{z} - \frac{k}{z} L_{k-1}(z+1, \beta),$$

con

$$L_0(z, \beta) = \frac{1}{z}.$$

El resto  $R_n^K(v, \beta, z)$  está acotado por la expresión

$$|R_n^K(v, \beta, z)| \leq M_{\beta, v} \left[ \beta^{\operatorname{Re} z} B(n+1, \operatorname{Re} z - 1) + \frac{\beta}{2\beta - 1} \frac{\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^{n+1}}{n+1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, 1 - \operatorname{Re} z \\ n+2 \end{matrix} \middle| 1 - \beta \right) \right], \quad (4.2)$$

donde  $M_{\beta, v}$  es una constante que depende únicamente de  $\beta$  y  $v$ .

En particular, el resto tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo que el desarrollo es convergente. Además, la función entre corchetes es decreciente por lo que el resto es uniforme en  $z$  siempre que  $\operatorname{Re} z > \Lambda$ , para cualquier  $\Lambda > 1$ ; y se comporta como  $n^{-(\operatorname{Re} z - 1)}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* De nuevo, vamos a aplicar la técnica explicada en la sección 2.3 a la función  $K_v$  de Struve. Para ello, consideramos la representación integral de esta función dada en [[14], ec. 11.5.2].

$$K_v(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^v}{\Gamma(v + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-zt} (1+t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

El intervalo de integración es no acotado por lo que realizamos cambio de variable  $t = -\log u$ . Llegamos a

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(v + \frac{1}{2})}{\left(\frac{z}{2}\right)^v} K_v(z) = \int_0^1 u^{z-1} h_v(u) du,$$

con  $h_v(u) = (1 + \log^2 u)^{v-\frac{1}{2}}$ .

Desarrollando la función  $h_v$  en serie de potencias centrada en  $\beta$  e intercambiando la serie con la integral, resulta

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(v + \frac{1}{2})}{\left(\frac{z}{2}\right)^v} K_v(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_v^{(k)}(\beta)}{k!} \underbrace{\int_0^1 u^{z-1} (u-\beta)^k du}_{=L_k(z, \beta)} + \underbrace{\int_0^1 u^{z-1} r_n(v, \beta, u) du}_{=R_n^K(v, \beta, z)}, \quad (4.3)$$

donde  $r_n(v, \beta, u)$  es el resto de Taylor del desarrollo de la función  $h_v$ .

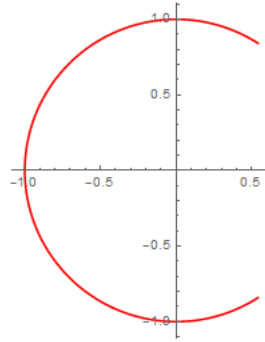
Veamos en primer lugar dónde es válido este desarrollo y que condiciones debe verificar el punto  $\beta$ . La compleja fórmula que define las derivadas de  $h_v$ , dada en el lema (4.0.2), hace que intentar aplicar algún resultado de análisis real como puede ser el criterio del cociente o de la raíz para determinar el radio de convergencia de la serie sea inútil. Sin embargo, si consideramos la función  $h_v(u)$  como una función de variable compleja podemos hallar el radio de convergencia, puesto que éste coincide con la distancia del punto en el que desarrollamos a la singularidad más cercana.

Las singularidades de la función  $h_v(u) = (1 + \log^2(u))^{v-\frac{1}{2}}$  son las siguientes:

- Por un lado, el punto  $u = 0$  es un punto de ramificación, por lo que  $h_v$  no es analítica en la semirrecta real negativa.
- Por otro lado, para valores no semienteros del parámetro  $v$  se tiene que  $(1 + \log^2(u))^{v-\frac{1}{2}} = e^{(v-\frac{1}{2})\log(1+\log^2(u))}$ . Tomando la rama principal del logaritmo se sigue que si  $1 + \log^2(u) < 0$  la función no es analítica. Dado que  $\log(u) = \log|u| + i\operatorname{Arg}(u)$  se sigue que  $1 + \log^2(u) < 0$  si y solo si

$$1 + \log^2|u| - \operatorname{Arg}^2(u) + 2i\log|u|\operatorname{Arg}(u) < 0. \quad (4.4)$$

Para que (4.4) tenga sentido, la parte imaginaria de este número debe ser nula y por lo tanto  $\log|u|\operatorname{Arg}(u) = 0$ , de donde se sigue que  $|u| = 1$  o  $\operatorname{Arg}(u) = 0$ . Ahora bien, si imponemos  $\operatorname{Arg}(u) = 0$  en (4.4) resulta  $1 + \log^2|u| < 0$  que nunca se cumple. En consecuencia, debe ser  $|u| = 1$  y reemplazando en (4.4) se deduce  $\operatorname{Arg}^2(u) > 1$ . Es decir, todos los puntos  $u$  del arco de la circunferencia unidad que conecta los puntos  $e^i$  y  $e^{-i}$  en sentido positivo verificando  $\operatorname{Arg}^2(u) > 1$  son puntos singulares de  $h_v$  (ver figura).



Los puntos del arco dibujado, que llamaremos  $A$ , junto con la semirrecta real negativa y el origen son los puntos singulares de  $h_v$ .

Por otro lado, para valores semienteros la función  $(1 + \log^2 u)^{v-\frac{1}{2}}$  es analítica salvo para  $u < 0$ , y no tendremos una cota superior para  $\beta$ .

Tomando  $\beta \in \mathbb{R}^+$  se sigue que el radio de convergencia de la serie es  $\min\{d(\beta, 0), d(\beta, A)\}$  donde  $d$  denota la distancia euclídea. Gráficamente es claro que  $\min\{d(\beta, 0), d(\beta, A)\} = \min\{d(\beta, 0), d(\beta, e^i)\} = \min\{\beta, \sqrt{\beta^2 + 1 - 2\beta \cos 1}\}$ . Estas cantidades coinciden para  $\beta = \frac{1}{2\cos 1}$  y se tiene que si  $\beta > \frac{1}{2\cos 1}$  entonces el disco de convergencia de la serie es  $D(\beta, \sqrt{\beta^2 + 1 - 2\beta \cos 1})$  que no contiene al intervalo de integración  $(0, 1)$ . Por lo tanto, debemos rechazar este caso. El caso contrario,  $\beta < \frac{1}{2\cos 1}$  implica que el disco de convergencia es  $D(\beta, \beta)$  que contiene al intervalo  $(0, 1)$  siempre que  $\beta > \frac{1}{2}$ . Por lo tanto, debemos imponer  $\beta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\cos 1})$ .

En consecuencia, el desarrollo (4.3) es válido en el disco  $D(\beta, \beta)$  con  $\beta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\cos 1})$ . Los aproximantes  $L_k(z, \beta)$  vienen dados por

$$L_k(z, \beta) := \int_0^1 u^{z-1} (u - \beta)^k du = (-1)^k \beta^{z+k} B_{\frac{1}{\beta}}(z, k+1)$$

donde  $B_x(a, b)$  denota la función beta incompleta de Euler (ver [[14], Sec. 8.17]). Podemos obtener una expresión explícita de las funciones  $L_k(z, \beta)$  empleando únicamente funciones elementales. En efecto, utilizando el binomio de Newton obtenemos

$$L_k(z, \beta) = \int_0^1 u^{z-1} (u - \beta)^k du = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-\beta)^{k-m} \int_0^1 u^{z+m-1} du = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-\beta)^{k-m} \frac{1}{z+m}.$$

Además, integrando por partes en la definición de las funciones  $L_k(z, \beta)$  (4.1) se obtiene la recurrencia del enunciado, mientras que  $L_0(z, \beta)$  se calcula directamente.

Por otro lado, el error  $r_n(v, \beta, u)$  que aparece al desarrollar la función  $h_v$  admite, según [[11], teorema 2.3. con  $m = 1$ ], la expresión

$$r_n(v, \beta, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{h_v(w) dw}{(w-u)(w-\beta)^n} (u-\beta)^n, \quad u > 0$$

donde  $\mathcal{C}$  es un camino cerrado simple recorrido en sentido antihorario contenido en el disco  $D(\beta, \beta)$  y que contiene a los puntos  $u > 0$  y  $\beta$ . Tomemos como tal camino la frontera del disco de centro  $\beta$  y radio  $\beta_\varepsilon = \beta - \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeño, lo cual es necesario para que el camino no cruce el punto singular  $w = 0$ . Parametrizando el camino se encuentra

$$r_n(v, \beta, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h_v(\beta + \beta_\varepsilon e^{i\theta}) \beta_\varepsilon e^{i\theta} i d\theta}{(\beta + \beta_\varepsilon e^{i\theta} - u)(\beta_\varepsilon e^{i\theta})^n} (u-\beta)^n.$$

Tomando valores absolutos se tiene

$$|r_n(v, \beta, u)| \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{|u-\beta|}{\beta_\varepsilon} \right)^n \beta_\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|h_v(\beta + \beta_\varepsilon e^{i\theta})| d\theta}{|\beta + \beta_\varepsilon e^{i\theta} - u|}.$$



Sustituyendo esta expresión en la ecuación que define  $R_n^K(v, \beta, z)$  (4.3) se tiene

$$|R_n^K(v, \beta, z)| \leq \int_0^1 u^{\operatorname{Re} z - 1} |r_n(v, \beta, u)| du = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 u^{\operatorname{Re} z - 1} \left( \frac{|u - \beta|}{\beta_\varepsilon} \right)^n \beta_\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|h_v(\beta + \beta_\varepsilon e^{i\theta})| d\theta}{|\beta + \beta_\varepsilon e^{i\theta} - u|} du.$$

Teniendo en cuenta la desigualdad triangular inversa se deduce que

$$|\beta + \beta_\varepsilon e^{i\theta} - u| \geq |\beta_\varepsilon - |\beta - u|| = \begin{cases} u - \varepsilon, & \text{si } \beta > u \\ 2\beta - u - \varepsilon > 2\beta - 1 - \varepsilon, & \text{si } \beta < u. \end{cases}$$

Por lo tanto, se obtiene

$$|R_n^K(v, \beta, z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\beta u^{\operatorname{Re} z - 1} \left( \frac{|u - \beta|}{\beta_\varepsilon} \right)^n \frac{\beta - \varepsilon}{u - \varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |h_v(\beta + \beta_\varepsilon e^{i\theta})| d\theta du + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_\beta^1 u^{\operatorname{Re} z - 1} \left( \frac{|u - \beta|}{\beta_\varepsilon} \right)^n \frac{\beta - \varepsilon}{2\beta - 1 - \varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |h_v(\beta + \beta_\varepsilon e^{i\theta})| d\theta du.$$

Dado que la función  $h_v(\beta + \beta_\varepsilon e^{i\theta})$  es integrable en  $[-\pi, \pi]$ , se obtiene, denotando  $M_{\beta_\varepsilon, v} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h_v(\beta + \beta_\varepsilon e^{i\theta})| d\theta$  y tomando límites cuando  $\varepsilon$  tiende a cero (aplicar TCD), que el resto  $R_n^K(v, \beta, z)$  está acotado por

$$|R_n^K(v, \beta, z)| \leq M_{\beta, v} \beta^{1-n} \int_0^\beta u^{\operatorname{Re} z - 2} (\beta - u)^n du + M_{\beta, v} \beta^{1-n} \frac{1}{2\beta - 1} \int_\beta^1 u^{\operatorname{Re} z - 1} (u - \beta)^n du.$$

La primera de estas integrales,  $\int_0^\beta u^{\operatorname{Re} z - 2} (\beta - u)^n du$ , se puede calcular en términos de la función Beta de Euler [[14], Sect. 5.12.] tras el cambio de variable  $u = \beta y$ , y resulta

$$\int_0^\beta u^{\operatorname{Re} z - 2} (\beta - u)^n du = \beta^{n+\operatorname{Re} z - 1} B(\operatorname{Re} z - 1, n + 1).$$

Por otro lado, la otra integral  $\int_\beta^1 u^{\operatorname{Re} z - 1} (u - \beta)^n du$ , se puede calcular con ayuda de la función Beta de Euler incompleta [[14], Sect. 8.17] y, tras el cambio de variable  $\beta - u = \beta y$ , es igual a

$$\int_\beta^1 u^{\operatorname{Re} z - 1} (u - \beta)^n du = \beta^{n+\operatorname{Re} z} (-1)^{n+1} B_{1-\frac{1}{\beta}}(n + 1, \operatorname{Re} z).$$

Aplicando [[14], ec. 8.17.9], que relaciona la función beta incompleta con la función hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1$ , se tiene

$$\int_\beta^1 u^{\operatorname{Re} z - 1} (u - \beta)^n du = \frac{\beta^n \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right)^{n+1}}{n + 1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1 - \operatorname{Re} z, & 1 \\ n + 2 \end{matrix} \middle| 1 - \beta \right).$$

Por lo tanto, el resto  $R_n^K$  está acotado por

$$|R_n^K(v, \beta, z)| \leq M_{\beta, v} \left[ \beta^{\operatorname{Re} z} B(\operatorname{Re} z - 1, n + 1) + \frac{\beta}{2\beta - 1} \frac{\left( \frac{1}{\beta} - 1 \right)^{n+1}}{n + 1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1 - \operatorname{Re} z, & 1 \\ n + 2 \end{matrix} \middle| 1 - \beta \right) \right]. \quad (4.5)$$

Veamos que la función entre corchetes es decreciente en  $\operatorname{Re} z$ , para cualquier  $n \geq 1$  y cualquier  $\beta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\cos 1})$ . Para ello, veamos que es suma de funciones decrecientes.

Por un lado, en el segundo factor la variable  $\operatorname{Re} z$  aparece únicamente en la función hipergeométrica de Gauss, por lo que basta probar que ésta es decreciente. Sean  $x > y > 1$ .

Veamos que  ${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-x, & 1 \\ n+2 \end{matrix} \middle| 1-\beta\right) < {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-y, & 1 \\ n+2 \end{matrix} \middle| 1-\beta\right)$ . Para ello, basta considerar la representación integral de la función hipergeométrica de Gauss dada en [[14]], ec. 15.6.1)

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-x, & 1 \\ n+2 \end{matrix} \middle| 1-\beta\right) = (n+1) \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1-(1-\beta)t)^{1-x}} dt.$$

Dado que  $\beta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\cos 1})$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $x > y > 1$  se sigue que  $\frac{1}{(1-(1-\beta)t)^{1-x}} < \frac{1}{(1-(1-\beta)t)^{1-y}}$ . Reemplazando, se tiene que  ${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-x, & 1 \\ n+2 \end{matrix} \middle| 1-\beta\right) < {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-y, & 1 \\ n+2 \end{matrix} \middle| 1-\beta\right)$ , y por lo tanto el segundo de los sumandos del corchete en (4.5) es decreciente.

Por otro lado, vamos a probar que el primer sumando del corchete en (4.5) es decreciente. Sea  $\varphi(x) = \beta^x B(x-1, n+1)$ ,  $x > 1$ . Entonces

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \beta^x B(x-1, n+1) [\log \beta + \psi(z-1) - \psi(z+n)],$$

donde  $\psi$  denota la función digamma dada en [[14], ec. 5.2.2]. Para probar que  $\varphi(x)$  es decreciente, basta probar que  $\log \beta + \psi(z-1) - \psi(z+n) < 0$ , pues el factor que multiplica al corchete nunca se anula, para  $x > 1$  y  $\beta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\cos 1})$ . Aplicando reiteradamente la relación [[14], ec. 5.5.2] se encuentra

$$\psi(z+n) = \psi(z-1) + \sum_{j=-1}^{n-1} \frac{1}{z+j},$$

por lo que se deduce que  $\varphi(x)$  es decreciente si y solo si

$$\log \beta - \sum_{j=-1}^{n-1} \frac{1}{x+j} < 0,$$

que es trivialmente cierto pues todos los sumandos que aparecen son negativos, dado que  $\beta < 1$  y  $x > 1$ . En consecuencia,  $\varphi(x)$  es decreciente y por lo tanto la función que aparece entre corchetes en (4.5) también lo es.

En consecuencia, para todo  $z$  tal que  $\operatorname{Re} z > \Lambda$  para cualquier  $\Lambda > 1$  se tiene que

$$|R_n^K(v, \beta, z)| \leq M_{\beta, v} \left[ \beta^\Lambda B(\Lambda-1, n+1) + \frac{\beta}{2\beta-1} \frac{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)^{n+1}}{n+1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-\Lambda, & 1 \\ n+2 \end{matrix} \middle| 1-\beta\right) \right], \quad (4.6)$$

que da una cota uniforme del resto.

Tomamos ahora límites cuando  $n \rightarrow \infty$  en (4.5). En primer lugar, el orden del primer sumando de (4.5) lo obtenemos con ayuda de la fórmula de Stirling:

$$\beta^{\operatorname{Re} z} B(\operatorname{Re} z-1, n+1) = \beta^{\operatorname{Re} z} \frac{\Gamma(\operatorname{Re} z-1) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\operatorname{Re} z)} \sim n^{-(\operatorname{Re} z-1)}.$$

Por otro lado, considerando el primer término del desarrollo asintótico de la función hipergeométrica de Gauss, dado en [[14], Sect. 15.12.(ii)], se deduce que el orden del segundo sumando del corchete en (4.5) es

$$\frac{\beta}{2\beta-1} \frac{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)^{n+1}}{n+1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-\operatorname{Re} z, & 1 \\ n+2 \end{matrix} \middle| 1-\beta\right) \sim \frac{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)^{n+1}}{n+1}.$$

Por lo tanto,

$$|R_n^K(v, \beta, z)| \sim n^{-(\operatorname{Re} z - 1)} + \frac{\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^{n+1}}{n+1}.$$

Dado que  $\beta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\cos 1}) \approx (0.5, 0.92)$  se tiene que  $\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^{n+1} < 1$  y por consiguiente el segundo de los sumando tiende más rápidamente a cero que el primero (al hacer  $n \rightarrow \infty$ ), por lo que el orden de convergencia de la serie dada en el teorema 4.0.3 lo marca el sumando  $n^{-(\operatorname{Re} z - 1)}$ .  $\square$

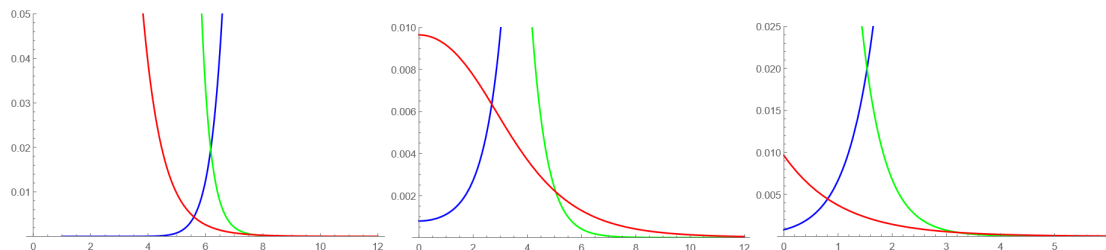
Para terminar, destaquemos varios aspectos de la aproximación dada en el teorema 4.0.3:

- En primer lugar, hemos conseguido demostrar la convergencia y uniformidad del desarrollo a pesar de la compleja fórmula que define las derivadas de  $h$  y por consiguiente el resto. Para ello, hemos recurrido al análisis complejo y a integrales de Cauchy y hemos encontrado cotas no explícitas del error. Por ello, no podemos optimizar el valor del punto  $\beta$  en el que desarrollamos como hemos hecho para la función  $H_v$ .
- En segundo lugar, la restricción para  $\beta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\cos 1})$  es necesaria. En efecto, si  $\beta < \frac{1}{2}$  entonces el factor  $\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)$  es mayor que 1 y el resto no tendería a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , es decir, el desarrollo no sería convergente.
- En tercer lugar, a pesar de que la representación integral de la función  $K_v$  [[14], ec. 11.5.2] es válida para todo  $z$  tal que  $\operatorname{Re} z > 0$ , hemos probado que el desarrollo obtenido es válido para  $\operatorname{Re} z > \Lambda > 1$ . Además, en el comportamiento asintótico del resto observamos que la velocidad de convergencia es lenta, especialmente para valores de  $z$  con  $\operatorname{Re} z$  próximo a uno. Por esta razón, para valores de  $z$  con parte real próxima a uno el error cometido al aproximar puede ser muy grande si  $n$  es pequeño.

Veamos algunas gráficas sobre la función  $K_v$  y la aproximación.

## 4.1. Gráficas.

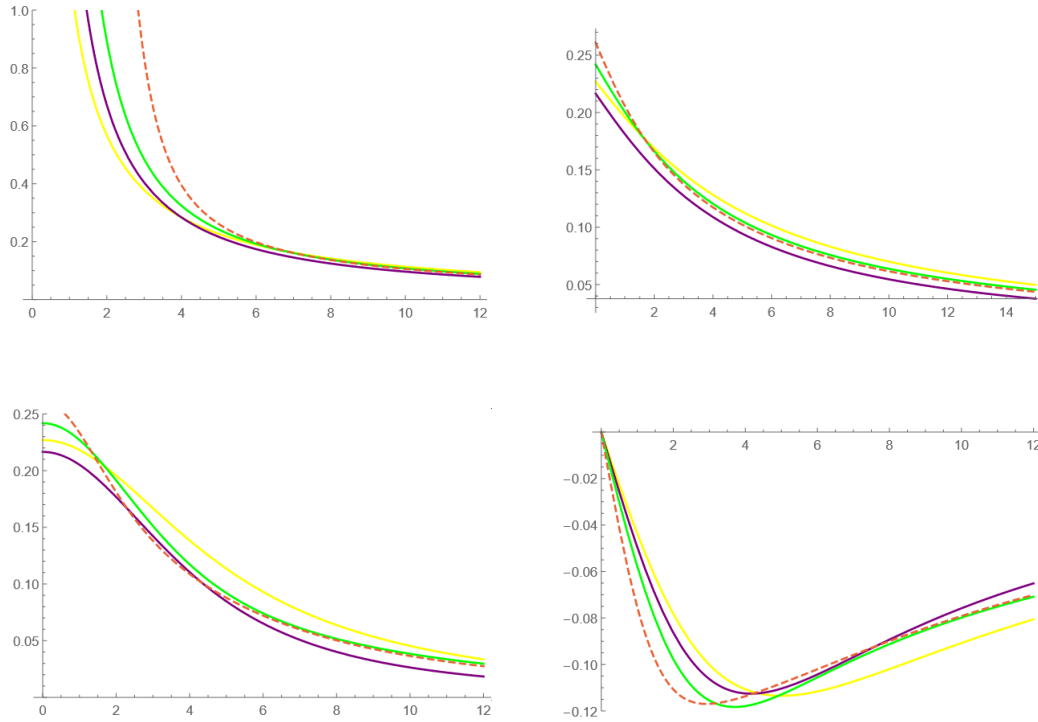
A continuación se muestran unas gráficas en distintos intervalos comparando los valores absolutos de los errores relativos cometidos al aproximar la función  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(v + \frac{1}{2})}{(\frac{z}{2})^v} K_v(z)$ , para el valor del parámetro  $v = 3.1$ , utilizando el desarrollo dado en el Teorema 4.0.3 con  $\beta = 0.8$  y los desarrollos de Taylor y asintótico dados en el capítulo 2, tomando en los tres casos  $n = 10$ . Se representa en azul el desarrollo de Taylor, en verde el asintótico y en rojo el uniforme.



Hemos representado los intervalos  $[1, 12]$  (izquierda),  $[5, 5 + 12i]$  (centro) y  $[5, 5 + 6e^{i\pi/4}]$  (derecha). En ellas, se observa que cuando la parte real de  $z$  tiende a uno, el error aumenta, como era de esperar debido al comportamiento asintótico del error. Observamos además que para valores pequeños de  $z$  el desarrollo de Taylor es mucho más competitivo mientras que para valores grandes lo es el asintótico. Sin

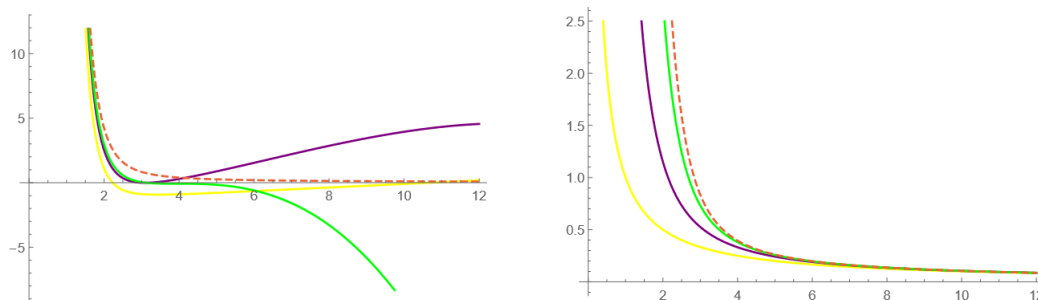
embargo, el desarrollo uniforme compite con ellas y es mejor que ambas en alguna región intermedia. Además es uniformemente mejor. Para otros valores de  $\beta$  las gráficas son similares.

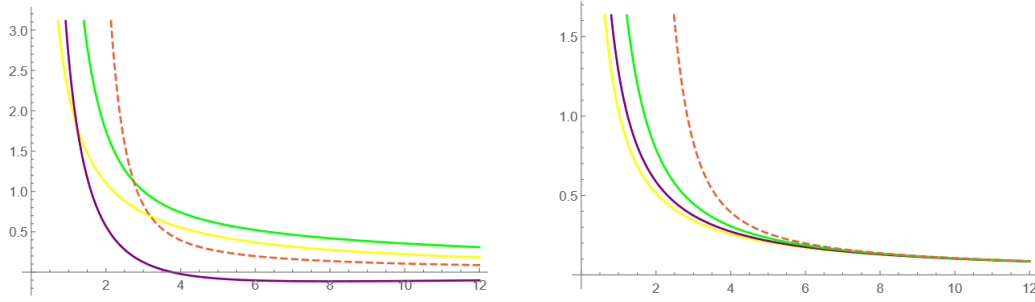
A continuación se representa la función  $\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{2} \frac{(z/2)^\nu}{K_\nu(z)}$  para  $\nu = 3.1$  (en discontinuo y rojo), junto con la aproximación uniforme dada por el teorema 4.0.3 con  $\beta = 0.8$  para  $n = 1$  (amarillo),  $n = 2$  (morado) y  $n = 3$  (verde) en los intervalos  $[1, 12]$  (arriba izquierda), parte real de  $[5, 5 + 15e^{i\frac{\pi}{4}}]$  (arriba derecha) y  $[5, 5 + 12i]$  (abajo). En este último caso, la gráfica de la izquierda corresponde a su parte real, mientras que la gráfica de la derecha representa su parte imaginaria.



Las gráficas para otros valores de  $\beta$  son similares. Observamos que la función que aproximamos y la aproximación tienen la misma forma. Sin embargo, para los valores de  $z$  con parte real próxima a uno, el error es grande siempre que  $n$  no sea lo suficientemente grande, como se observa en el comportamiento asintótico del error. Además, el error lo medimos verticalmente. Esto justifica las gráficas anteriores donde representábamos el valor absoluto del error relativo cometido y éste era grande para los  $z$  con  $\text{Re } z$  próximo a uno, pues considerábamos  $n = 10$ , que no es lo suficientemente grande.

Por otro lado se muestran las gráficas de la función  $\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{2} \frac{(z/2)^\nu}{K_\nu(z)}$  (en discontinuo y rojo) junto con las aproximaciones de Taylor (arriba izquierda), asintótico (arriba derecha), uniforme con  $\beta = 0.55$  (abajo izquierda) y uniforme con  $\beta = 0.9$  (abajo derecha) para  $n = 1$  (amarillo),  $n = 2$  (morado) y  $n = 3$  (verde) en el intervalo  $[0, 12]$ .





En las gráficas de abajo observamos que la aproximación con  $\beta = 0.55$  es bastante peor que para  $\beta = 0.9$ . De nuevo, no tenemos información sobre el valor óptimo de  $\beta$ , pero experimentos numéricos muestran que el valor de  $\beta$  que minimiza el error se encuentra en torno a  $\beta = 0.8$ .

Finalmente, la relación  $K_\nu(z) = H_\nu(z) - Y_\nu(z)$  junto con los desarrollos uniformes calculamos para la función  $H_\nu$  y  $K_\nu$  (teoremas 3.0.1 y 4.0.3) permite obtener un desarrollo uniforme para la función de Bessel de segundo tipo  $Y_\nu$ , en la región intersección donde son válidos los desarrollos de la  $H_\nu$  y la  $K_\nu$ , es decir, en la región  $\{|\operatorname{Im} z| < \Omega\} \cap \{\operatorname{Re} z > \Lambda\}$ , con  $\Omega > 0$  y  $\Lambda > 1$ .



# Referencias

- [1] L. V. AHLFORS, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, tercera edición, 1979.
- [2] A. R. AHMADI Y S. E. WIDNALL, *Unsteady lifting-line theory as a singular-perturbation problem (1985)*, J. Fluid Mech **153**, 59-81.
- [3] B. BUJANDA, J. L. LÓPEZ Y P. J. PAGOLA, *Convergent expansions of the incomplete gamma functions in terms of elementary functions*, World Scientific Publishing Company, Mayo 2017.
- [4] B. BUJANDA, P. J. PAGOLA Y J. L. LÓPEZ, *Convergent expansions of the confluent hypergeometric functions in terms of elementary functions*, Mathematics of Computation, Julio 2018.
- [5] C. A. CHARALAMBIDES, *Enumerative combinatorics*, Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [6] A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER Y F. G. TRICOMI *Higher Transcendental Functions - Volume I*, McGrawHill, 1953.
- [7] A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER Y F. G. TRICOMI *Higher Transcendental Functions - Volume II*, McGrawHill, 1953.
- [8] M. H. HIRATA *Flow near the bow of a steadily turning ship (1975)*, J. Fluid Mech. **71** (2), 283-291.
- [9] H. LEVINE Y J. SCHWINGER, *On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen I (1948)*, Phys. rev. **74** (8), 958-974.
- [10] J. L. LÓPEZ, *Convergent expansions of the Bessel functions in terms of elementary functions*, Springer Science+Business Media, LLC 2017.
- [11] J. L. LÓPEZ Y N. M. TEMME, *Multi-point Taylor expansions of analytic functions*, American Mathematical Society, Vol. 356, No 11, pp 4323-4342, 2004.
- [12] N. W. MCLACHLAN, *Loud Speakers: Theory, Performance, Testing and Design (1934)*, Oxford University Press, Nueva York.
- [13] F. W. OLVER, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, 1974.
- [14] F. W. J. OLVER, A. B. OLDE DAALHUIS, D. W. LOZIER, B. I. SCHNEIDER, R. F. BOISVERT, C. W. CLARK, B. R. MILLER Y B. V. SAUNDERS, [DLMF] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, <http://dlmf.nist.gov/>.
- [15] B. P. PALKA, *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer-Verlag, Nueva York, 1991.
- [16] R. B. PARIS Y W. N.-C. SY, *Influence of equilibrium shear flow along the magnetic field on the resistive tearing instability (1983)*, Phys. Fluids **26** (10), 2966-2975.
- [17] T. G. PERDERSEN, *Variational approach to excitons in carbon nanotubes (2003)*, Phys. Rev. B **67** (7), (073401-1)-(073401-4).

- [18] J. SHAO Y P. HÄNGGI, *Decoherent dynamics of a two-level system coupled to a sea of spins* (1998), Phys. Rev. Lett. **81** (26), 5710-5713.
- [19] D. C. SHAW, *Perturbational results for diffraction of water-waves by nearly-vertical barriers* (1985), IMA J. Appl. Math. **34**(1), 99-117.
- [20] H. STRUVE, *Beitrag zur Theorie der Diffraction an Fernrohren* (1882), Ann. Physik Chemie, **17**, 1008-1016.
- [21] N. M. TEMME, *Special functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, Wiley Interscience, 1996.
- [22] J. V. WEHAUSEN Y E. V. LAITUNE, *Surface Waves* (1960), Handbuch der Physik, Vol. 9, Part 3, 446-778.
- [23] R. WONG *Asymptotic Approximations of Integrals*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.