



**Universidad  
Zaragoza**

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

---

# **Validación de un modelo computacional de simulación de flujo de agua en lámina libre mediante medidas de evolución de superficie**

Trabajo Fin de Grado

Grado en Física

**Pablo Solán Fustero**

Dirigido por:

**Dra. Pilar García Navarro**

ÁREA DE MECÁNICA DE FLUIDOS

---



**Facultad de Ciencias  
Universidad Zaragoza**



## Resumen / Abstract

Un flujo de lámina libre, cuando la longitud de onda se puede comparar en magnitud con la profundidad, se denomina de aguas poco profundas (shallow water). Las ondas de rotura de presa son ejemplos de estos problemas, caracterizadas por una discontinuidad inicial en la que se forma un frente de onda de alta velocidad. Las ecuaciones de aguas poco profundas que rigen su dinámica se discretizan con volúmenes finitos y se resuelven numéricamente mediante el resolutor de Roe. El objetivo es desarrollar, programar y validar un modelo computacional unidimensional utilizando soluciones exactas de situaciones ideales y, por otro lado, medidas experimentales tomadas en el laboratorio LNEC de Lisboa o en el laboratorio del Área de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Zaragoza.

*A free-surface flow in which wave length is similar to water depth is called shallow water. Dam break waves are an example of these shallow water flows, characterized by wavefronts with high velocity originated by initial discontinuity. Shallow water equations will be discretized with a finite volume technique and numerically solved through Roe solver. The main purpose is to develop, to program and to validate a 1D computational model with exact solutions of ideal situations and with experimental data from the LNEC laboratory in Lisbon and the Mecánica de Fluidos' laboratory in Universidad de Zaragoza.*





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Formulación de flujos transitorios de lámina libre en 1D</b>	<b>3</b>
2.1. Ecuaciones . . . . .	3
2.2. Propiedades y formulación característica . . . . .	3
<b>3. Solución numérica</b>	<b>6</b>
3.1. Volúmenes finitos . . . . .	7
3.2. Resolvedor de Roe . . . . .	9
3.3. Términos fuente . . . . .	10
3.4. Paso temporal . . . . .	11
<b>4. Resultados</b>	<b>12</b>
4.1. Casos test académicos . . . . .	12
4.1.1. Caso 1: rotura de presa ideal . . . . .	12
4.1.2. Caso 2: rotura de presa con términos fuente . . . . .	13
4.1.3. Casos 3, 4, 5 y 6: convergencia al estado estacionario con términos fuente	15
4.2. Casos test experimentales . . . . .	18
4.2.1. Medidas del laboratorio LNEC . . . . .	18
4.2.2. Medidas en el laboratorio AMF de la Universidad de Zaragoza . . . . .	20
<b>5. Conclusiones</b>	<b>23</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>24</b>
<b>Anexos</b>	<b>27</b>
<b>A. Derivación de las Shallow Water Equations (SWE)</b>	<b>29</b>
A.1. Conservación de la masa . . . . .	29
A.1.1. Elemento infinitesimal . . . . .	29
A.1.2. Volumen finito . . . . .	30
A.2. Conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	32
A.3. Condiciones de contorno . . . . .	34
A.3.1. Fondo . . . . .	34
A.3.2. Superficie libre . . . . .	35
A.4. Aproximaciones de las SWE . . . . .	35
A.5. Caso unidimensional . . . . .	41
A.6. Conservación de la energía . . . . .	43
<b>B. Balance de energía en los términos fuente</b>	<b>46</b>

<b>C. Diferencias finitas</b>	<b>48</b>
C.1. Error de truncación . . . . .	48
C.2. Análisis de estabilidad . . . . .	49
C.2.1. Estabilidad temporal . . . . .	49
C.2.2. Estabilidad espacial . . . . .	54
<b>D. Problema de la entropía</b>	<b>56</b>
<b>E. Soluciones exactas de la ecuación lineal y de la ecuación de Burgers no viscosa</b>	<b>59</b>
E.1. Solución lineal advectiva . . . . .	59
E.2. Solución de Burgers . . . . .	61
<b>F. Código de programación</b>	<b>65</b>
F.1. Condiciones iniciales . . . . .	67
F.1.1. Paso temporal . . . . .	67
F.2. Bucle temporal . . . . .	67
F.2.1. Cálculo del rhs . . . . .	69
F.2.2. Áreas mojadas negativas . . . . .	70
F.2.3. Problema de la entropía . . . . .	71
F.2.4. Actualización de las variables conservadas . . . . .	72
F.2.5. Condiciones de contorno . . . . .	72
<b>G. Geometría del canal y adquisición de datos</b>	<b>73</b>
G.1. Laboratorio de Zaragoza . . . . .	73
G.2. Adquisición y procesamiento de datos . . . . .	74
<b>H. Calibración del coeficiente de Manning</b>	<b>78</b>
<b>I. Resultados de los casos test experimentales</b>	<b>81</b>
I.1. Tesis de António Bento Franco . . . . .	81
I.1.1. Hidrograma en la sonda 3 . . . . .	81
I.2. Laboratorio de Zaragoza . . . . .	85





# 1. Introducción

La Física se desarrolla mediante la interacción entre métodos experimentales y modelos teóricos con el uso de diferentes técnicas bien depuradas en los primeros y de herramientas matemáticas en los segundos. Las herramientas computacionales de simulación numérica son una tecnología reciente que complementa a los dos anteriores. El principal cometido del estudiante de física es aprender a manejar estas técnicas y herramientas con la destreza suficiente que le permita analizar sistemas complejos, realizar un modelo adaptado a la profundidad que se desee y compararlo finalmente con los datos extraídos del sistema real [1].

El modelo se construye primero mediante una descripción matemática, constituida esencialmente por ecuaciones y condiciones de contorno, y a continuación se lleva a cabo su resolución. En muchos casos no existen soluciones analíticas a los problemas, por lo que se tienen que resolver mediante **métodos numéricos** [8] [18].

Los resultados computacionales presentan una ventaja pues, cuando proceden de un modelo bien verificado, pueden proporcionar una mayor cantidad de información. Se obtiene de esta manera un conjunto de números que describen el sistema para un tiempo dado y un conjunto de operaciones que representan las leyes físicas y que llevan el sistema a un tiempo posterior.

Dentro del marco de la mecánica de fluidos es posible identificar los **flujos de superficie libre**. Un flujo con superficie libre se define matemáticamente como aquel en el que el tamaño y la forma de la región de la solución son parte de la propia solución. Las condiciones de contorno se tienen que aplicar a esta superficie incógnita. Cuando la longitud de onda se puede comparar en magnitud con la profundidad el problema se denomina de **aguas poco profundas** (*Shallow water*) [15]. Un ejemplo de ello, aunque poco intuitivo, es el océano, donde se cumpliría la condición para fenómenos como tsunamis y mareas, pero no para olas superficiales. El fenómeno de rotura de presa suele estudiarse bajo este modelo también. El rasgo esencial de una rotura de presa instantánea es una gran discontinuidad que se produce cuando el agua acumulada a mayor altura se desprende y fluye sobre el cauce inferior. El frente de onda que avanza de manera abrupta con elevadas velocidades fruto de la rotura puede inundar los márgenes del río, provocando pérdidas y perjuicios de todo tipo. Cuando el flujo se da en un canal se le puede asimilar a éste un carácter unidimensional. De acuerdo con ello, la **rotura de presa** se considera de aguas poco profundas. Esta rotura puede deberse a causas naturales, como fenómenos atmosféricos, que llevan a caudales superiores a los esperados, o bien a fallos en la integridad estructural de la presa. Los organismos profesionales se enfrentan al trabajo de simular el comportamiento del agua tras una rotura de presa, de forma que puedan prever los efectos y desarrollar planes de emergencia, así como el estudio del impacto medioambiental [17].

Para la formulación matemática, se parte de leyes de conservación fundamentales de masa, momento y energía, que se expresan en forma de ecuaciones en derivadas parciales [2] [3] [11] [25]. Estas ecuaciones se compactan en un **sistema hiperbólico no lineal** [7] [8]. Éste se caracteriza por la aparición de discontinuidades en las soluciones por lo que las soluciones clásicas no son suficientes [18]. Debido a esto interesa resolver correctamente el sistema original con un problema de valor inicial discontinuo o, lo que es lo mismo, un **problema de Riemann** [23]. En la solución de un problema de Riemann no lineal aparecen dos tipos de ondas: de choque y de rarefacción. Esto depende de las condiciones iniciales a ambos lados de un determinado punto, se pueden producir zonas de compresión que generan ondas de choque, cuando la magnitud conservada es inicialmente mayor a la izquierda del punto; o regiones de expansión, con ondas de rarefacción, cuando la magnitud es mayor a la derecha [24].

Los denominados **resolvedores de Riemann** (*Riemann solvers*) son métodos numéricos que permiten calcular dichos problemas de manera exacta. Teniendo en cuenta las aproximaciones unidimensional y de aguas poco profundas, un buen método de resolución del problema de Riemann aproximado es el método de Roe [23] [18] [7]. Basado en el esquema de Godunov [10] explícito y de volumen finito, calcula el flujo numérico que actualiza el valor en cada celda promediando los valores de diferentes soluciones aproximadas que aparecen cuando se define un problema local de Riemann entre una celda y sus vecinas [19].

El **objetivo principal** de este trabajo es desarrollar, programar y validar un modelo computacional unidimensional de rotura de presa. Para ello se partirá de unas ecuaciones cuyas propiedades matemáticas será necesario conocer detalladamente para poder encontrar un modelo de discretización adecuado. A continuación se buscará un método de resolución numérico de dichas ecuaciones que consiga dentro de la sencillez de un modelo unidimensional abarcar fenómenos físicos de la manera más general posible.

La evaluación del modelo se hará por medio de la comparación en primer lugar con las soluciones exactas de los problemas que, aunque no representan la realidad del fenómeno, verifican las ecuaciones [5]. Como resultados de referencia más realistas, servirán los datos experimentales recogidos en el laboratorio LNEC [4] y los medidos en el laboratorio del Área de Mecánica de Fluidos de Zaragoza. Para esto último se contó con un canal a escala y con una cámara Kinect que proporciona medidas de la profundidad del agua a lo largo del tiempo [16].

Además, se busca consolidar conocimientos previos adquiridos durante el grado acerca de programación y de la física que subyace al comportamiento de los fluidos; y, por otro lado, con el mayor detenimiento que permite el formato de este trabajo, profundizar en la resolución numérica de ecuaciones, tanto teórica como computacionalmente.

## 2. Formulación de flujos transitorios de lámina libre en 1D

### 2.1. Ecuaciones

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del flujo en lámina libre en 1D escritas en forma conservativa son las siguientes:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gI_2 + gA(S_0 - S_f) \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q^2}{A^2} + g \frac{A^2}{2b} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^3}{2A^2} + g \frac{AQ}{b} \right) = g \frac{Q}{A} (S_0 - S_f) \quad (2.1c)$$

Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que se obtienen promediando en la sección transversal a partir de leyes fundamentales de la física: conservación de la masa, conservación de la cantidad de movimiento y conservación de la energía. En el Anexo A se desarrolla al completo el proceso de derivación de las mismas.

Las variables conservadas son:  $A(x, t)$ , que representa el área transversal y que es una función del calado  $h(x, t)$ , y el caudal  $Q(x, t) = A(x, t)u(x, t)$ , donde  $u(x, t)$  es la velocidad media.  $gI_1$  es la integral de presión hidrostática en cada sección. En cuanto a los términos fuente: la reacción debida a las variaciones en la anchura del canal es recogida por  $gI_2$ ;  $S_0 = -\frac{\partial z}{\partial x}$  es la pendiente del lecho; y la pendiente de fricción formulada a partir de la ley semiempírica de Manning es:

$$S_f = \frac{n^2 Q^2}{A^2 R_h^{4/3}}$$

donde  $n$  es el coeficiente de Manning y  $R_h$  el radio hidráulico [11].

Según la teoría de las ecuaciones diferenciales se requieren solamente dos de las tres ecuaciones (2.1a), (2.1b) y (2.1c) para resolver las variables  $A$  y  $Q$ . Cabe preguntarse en este punto qué pareja de ecuaciones se utiliza y si las soluciones que se obtendrían con cualquiera de las posibles permutaciones serían equivalentes. Abbott en [2] sostiene que, para una descripción diferencial del flujo, es decir continua, las ecuaciones de conservación de cantidad de momento y de energía son equivalentes. Sin embargo, el caso que concierne a este trabajo contiene una discontinuidad en la rotura de presa, pues se trata de un problema de valor inicial discontinuo o, lo que es lo mismo, un problema de Riemann. Este fenómeno tiene un caso concreto conocido como *salto hidráulico* [11], que va acompañado por turbulencias y pérdidas de energía. Debido a esto último, ya no son equivalentes ambas formulaciones y se requiere la utilización de la ecuación de la cantidad de movimiento.

### 2.2. Propiedades y formulación característica

Las ecuaciones de masa (2.1a) y cantidad de movimiento (2.1b) forman un sistema no lineal e hiperbólico que se puede compactar en su forma conservativa:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (2.2)$$

donde el vector de variables conservadas,  $\mathbf{U}$ , el vector de flujos de dichas variables,  $\mathbf{F}$ , y los términos fuente,  $\mathbf{S}$ , son:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ g[I_2 + A(S_0 - S_f)] \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Un sistema de ecuaciones se denomina **hiperbólico** cuando su matriz jacobiana de dimensión  $n \times n$  tiene  $n$  valores propios reales,  $\lambda_i$ , y un conjunto de  $n$  vectores propios linealmente independientes,  $\mathbf{e}_i$ , que forman una base del espacio  $n$ -dimensional. En este caso, la matriz jacobiana de dimensión  $2 \times 2$  es:

$$\mathbf{J} \equiv \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g\frac{A}{b} - \frac{Q^2}{A^2} & 2\frac{Q}{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

donde  $c \equiv \sqrt{g\frac{\partial I_1}{\partial A}} = \sqrt{g\frac{A}{b}}$  es la velocidad de las perturbaciones superficiales, siendo  $b$  la anchura del canal en caso de que sea rectangular. Esta será la hipótesis en adelante. Se tienen los valores propios:  $\lambda_1 = u - c$  y  $\lambda_2 = u + c$ ; y los vectores propios:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \end{pmatrix}$$

Esto permite encontrar su forma no conservativa, dada por la ecuación:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (2.5)$$

Sea  $\mathbf{E}$  la matriz formada por los  $n$  vectores propios dispuestos en columnas. Se puede sustituir el jacobiano en la ecuación (2.5) por la matriz diagonal  $\mathbf{\Lambda}$ , formada por los valores propios, teniendo en cuenta:  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{J}\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{J}$ . Multiplicando (2.5) por la izquierda por  $\mathbf{E}^{-1}$  se obtiene el sistema desacoplado:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{S}_W \quad (2.6)$$

Aparecen así unas nuevas variables llamadas **variables características**:  $\delta \mathbf{W} = \mathbf{E}^{-1} \delta \mathbf{U}$ .

Del sistema desacoplado (2.6) se puede llegar fácilmente a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u + 2c) + (u + c) \frac{\partial}{\partial x} (u + 2c) &= (u - c) [gI_2 + gA(S_0 - S_f)] \\ \frac{\partial}{\partial t} (u - 2c) + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} (u - 2c) &= (u + c) [gI_2 + gA(S_0 - S_f)] \end{aligned}$$

La interpretación de estas ecuaciones es la siguiente: las cantidades  $w_1 = u + 2c$  y  $w_2 = u - 2c$  se mantienen constantes a lo largo de sus líneas características en el plano  $(x, t)$ , cuyas pendientes son los valores propios, es decir,  $\lambda_1 = u + c$  y  $\lambda_2 = u - c$  respectivamente. En ausencia de términos fuente se tiene:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 = u - c \Rightarrow \frac{dw_1}{dt} = \frac{d(u - 2c)}{dt} = 0 \Rightarrow u - 2c = cte \\ \frac{dx}{dt} = \lambda_2 = u + c \Rightarrow \frac{dw_2}{dt} = \frac{d(u + 2c)}{dt} = 0 \Rightarrow u + 2c = cte \end{cases} \quad (2.7)$$



En el denominado **método de las características** se pueden resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sustituyéndolas por ecuaciones diferenciales ordinarias. Se hace uso de las dos direcciones características,  $C^-$  y  $C^+$  y las variables conservadas, denominadas *invariantes de Riemann*,  $J^- = u - 2c$  y  $J^+ = u + 2c$ .

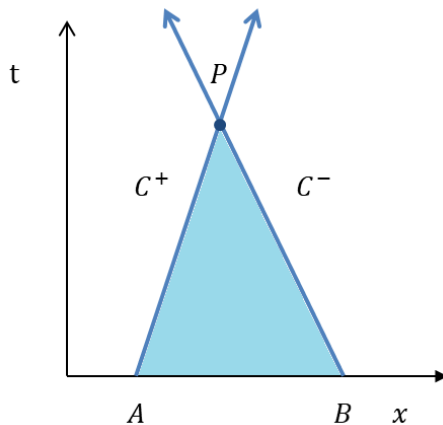


Figura 2.1: Dominio de dependencia de un punto  $P$ .

En cada punto  $P$  del plano  $(x, t)$  se cortan dos líneas características. La solución que se busca,  $(A, Q)$ , viene determinada por ambos invariantes,  $J^+$  y  $J^-$ , definidos por las condiciones iniciales en  $t = 0$ . La solución en  $P$  depende de todos los puntos que abarca el área comprendida entre ambas líneas características, como se muestra en la figura (2.1). Es decir, cómo cambia  $J^+$  a lo largo de  $C^+$  está influido por cómo lo hace  $J^-$  a lo largo de  $C^-$  y viceversa. El punto  $P$  es el límite en el que pueden ser utilizada la información procedente del origen de manera independiente. Esta teoría también ayuda a diseñar las condiciones de contorno necesarias.

### 3. Solución numérica

Existen diferentes métodos de discretización de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, como los volúmenes finitos, que se utilizan en este trabajo, o las diferencias finitas, que se describen en el Anexo C. Existen a su vez distintas maneras de resolver numéricamente estas ecuaciones discretizadas. Son herramientas computacionales que tratan de simular los procesos que representan las ecuaciones mediante el manejo de números y operaciones simples.

Las celdas computacionales se consideran volúmenes de control en un esquema de volúmenes finitos, según el cual las variables conservadas se integran calculando valores medios. Se tiene así una red regular de celdas como se muestra en la figura (3.1) [18], en un dominio total de longitud  $L$ .

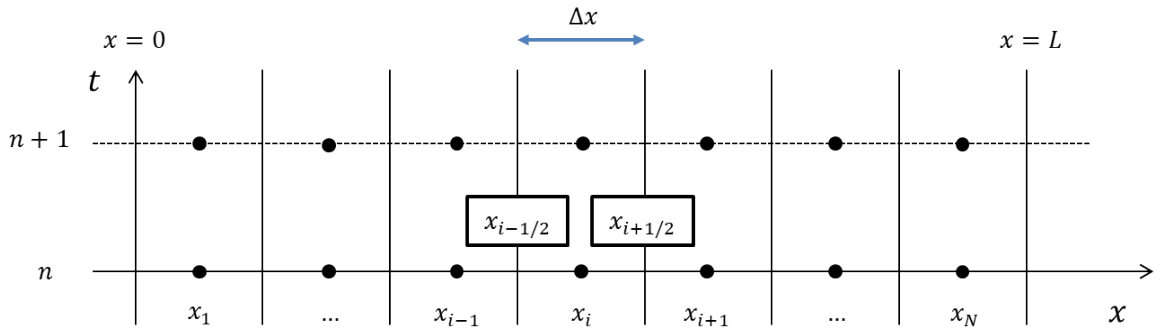


Figura 3.1: Red unidimensional regular de celdas.

De esta manera, la celda  $i$ , que se corresponde con la posición  $x_i$  tiene una anchura  $\Delta x$ , cuyo dominio abarca de la pared  $x_{i-1/2}$  a la  $x_{i+1/2}$ . Cada nuevo tiempo  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  se calcula resolviendo secuencias de problemas de Riemann y suponiendo que en cada celda las variables son constantes definidas a trozos.

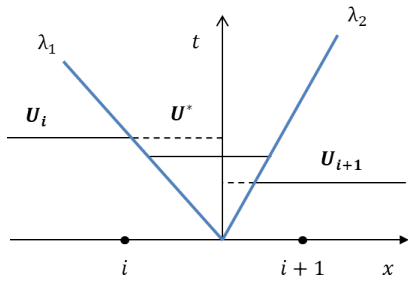


Figura 3.2: Problema de Riemann  $n = 2$ .

Los problemas de Riemann consisten en  $n+1$  estados separados por  $n$  ondas que salen del origen, asociada cada una a un valor propio; si se supone el sistema de SWE,  $n = 2$ , se tienen dos ondas que separan tres estados. Los resolvedores de Riemann son métodos numéricos utilizados para resolver de manera aproximada dichos problemas de Riemann. Uno de los más conocidos en dinámica de fluidos computacional es el desarrollado por Godunov [10], pues el primero en dotar de solución exacta a las ecuaciones de Euler y, por lo tanto, a las leyes de conservación que expresan en su forma de sistemas no lineales hiperbólicos.

Llegar a la solución exacta que permiten estos resolvedores supone un alto coste computacional en el caso de ecuaciones no lineales pues requiere la resolución temporal de cada problema de Riemann en todas las celdas, lo cual dificulta enormemente la convergencia a la solución exacta. Es por ello por lo que se utiliza el **resolvedor de Roe** [23] que básicamente aproxima los valores del jacobiano para linealizar el sistema de ecuaciones como se verá más adelante.

El método de discretización escogido es un esquema *upwind* de primer orden explícito de tipo Godunov [10]. El término *upwind* hace referencia a la derivada espacial. Este método envía la información en un sentido o en otro según el signo del valor propio.

Respecto a la integración temporal, los métodos explícitos se caracterizan por utilizar la información conocida siempre de un paso temporal anterior  $t^n$ . Mientras que los implícitos para calcular las variables conservadas en un tiempo  $t^{n+1}$  necesitan además de sus valores en  $t^n$  también otros datos del propio  $t^{n+1}$ . Esto genera mayor complejidad algebraica. Los explícitos son más sencillos, pero están sometidos a una condición de estabilidad temporal, como se explica en el Anexo C. El trabajo de esta memoria está basado en la utilización de un esquema explícito.

### 3.1. Volúmenes finitos

Se va a utilizar un ejemplo sencillo para mostrar lo esencial del método numérico. Supongamos una ley de conservación escalar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

donde  $u$  es la variable conservada y  $f(u)$  su flujo. Si se integra sobre el volumen de control delimitado espacialmente por las paredes  $x_{i-1/2}$  y  $x_{i+1/2}$  y temporalmente por  $t^n$  y  $t^{n+1}$  se obtiene:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)] dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_{i+1/2}, t)) - f(u(x_{i-1/2}, t))] dt = 0 \quad (3.2)$$

Se puede definir el valor medio de la variable conservada  $u(x, t)$  en la celda  $i$  en el tiempo  $t^n$  como:

$$u_i^n \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx \quad (3.3)$$

Y los flujos medios en cada pared, denominados **flujos numéricos**:

$$f_{i\pm 1/2}^* \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i\pm 1/2}, t)) dt \quad (3.4)$$

La ecuación (3.2) queda:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*) \quad (3.5)$$

El esquema puede ser de tipo explícito si  $f^* \approx f(u^n)$ , de forma que la variable en un tiempo  $t^{n+1}$  depende exclusivamente de información en el tiempo anterior  $t^n$ ; o de tipo implícito si el flujo depende de la variable en otro tiempo distinto de  $n$ . El Anexo C analiza la estabilidad de ambos tipos de esquemas.

Aún suponiendo formulación explícita, la elección del tipo de flujos numéricos determinará qué esquema actúa. Godunov propone:  $f^* = f(u^*)$ . En el caso particular:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

con  $\lambda = cte$  tendría la forma:  $f^* = \lambda u^*$  (figura (3.3)).

Godunov define la variable intermedia como:

$$u^* = \begin{cases} u_i - s^-(u_{i+1} - u_i) \\ u_{i+1} - s^+(u_i - u_{i+1}) \end{cases} \quad (3.7)$$

Siendo:  $s^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \text{sig}(\lambda))$ .

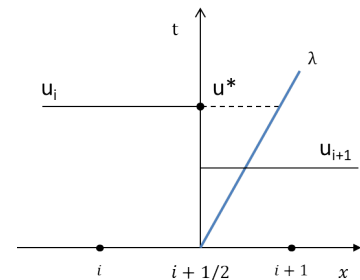


Figura 3.3: Variable intermedia  $u^*$  de Godunov. Caso escalar lineal.

Así que se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
u^* &= \frac{1}{2} \left[ u_i - \frac{1}{2} (1 - \text{sig}(\lambda)) (u_{i+1} - u_i) \right] + \frac{1}{2} \left[ u_{i+1} - \frac{1}{2} (1 + \text{sig}(\lambda)) (u_i - u_{i+1}) \right] = \\
&= \frac{1}{2} (u_{i+1} + u_i) - \frac{1}{2} \text{sig}(\lambda) (u_{i+1} - u_i) \\
f_{i+1/2}^* &= \lambda u^* = \frac{1}{2} (\lambda u_i + \lambda u_{i+1}) - \frac{1}{2} |\lambda| (u_{i+1} - u_i)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Entonces, la ecuación (3.5) se desarrolla como la **formulación en flujos numéricos**. La información de la celda  $i$  se actualiza de la siguiente manera: la variable  $f_{i-1/2}^*$  recoge la información procedente de la celda inmediatamente anterior,  $i - 1$ , y la vuelca en la  $i$ ; al mismo tiempo,  $f_{i+1/2}^*$  extrae la información necesaria de la celda  $i$  para actualizar la  $i + 1$ . Estas definiciones dotan de estructura matemática al método upwind, pues así discrimina en qué sentido viaja la información según el signo de  $\lambda$ .

Alternativamente:

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \frac{1}{2} \lambda (u_i + u_{i+1}) - \frac{1}{2} |\lambda| (u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{2} \lambda (u_i + u_{i-1}) + \frac{1}{2} |\lambda| (u_i - u_{i-1}) \right]^n = \\
&= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\lambda^+ (u_i - u_{i-1}) + \lambda^- (u_{i+1} - u_i)]^n
\end{aligned}$$

donde:

$$\lambda^\pm \equiv \frac{\lambda \pm |\lambda|}{2} \tag{3.9}$$

Se pueden escribir el flujo definido por Godunov, ecuación (3.8), como sigue:

$$f_{i+1/2}^* = \lambda u_i + \frac{1}{2} (\lambda - |\lambda|) \delta u_{i+1/2} = f_i + \lambda^- \delta u_{i+1/2}$$

Además, se tiene  $f_{i-1/2}^* = f_i + \lambda^+ \delta u_{i-1/2}$ . Con esto se obtiene la **formulación en ondas**:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \delta f_{i-1/2}^+ + \delta f_{i+1/2}^- \right)^n \tag{3.10}$$

donde  $\delta f^\pm = \lambda^\pm(u) \delta u$ .

Con (3.10) se puede apreciar de una manera más evidente el aporte a cada celda de sus paredes vecinas. La interpretación señala que la variable en la celda  $i$  se actualiza en el tiempo  $t = t^{n+1}$  por medio de los flujos de información que vienen por un lado desde su celda izquierda cruzando la pared intermedia  $i - 1/2$  hacia la derecha,  $\delta f_{i-1/2}^+$ , y desde la derecha cruzando la pared  $i + 1/2$  hacia la izquierda,  $\delta f_{i+1/2}^-$ . La comparación de ambas formulaciones se ve en la figura (3.4).

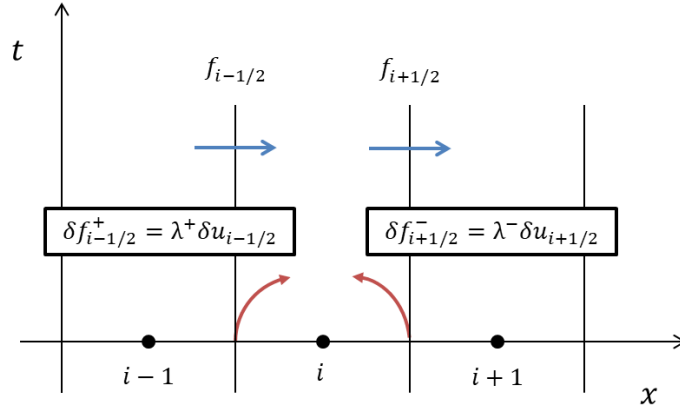


Figura 3.4: Formulaciones en flujo numérico y en ondas.

### 3.2. Resolvedor de Roe

El resolvedor de Roe es un resolvedor de Riemann aproximado para extender el método anterior a ecuaciones no lineales. Para ello plantea una matriz jacobiana linealizada y localmente constante que reduce el problema a un sistema lineal de ecuaciones. Esta nueva matriz jacobiana depende de los estados iniciales del problema de Riemann:  $\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})$ , de forma que el sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U})$$

se aproxime por:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{J}} \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

con la condiciones iniciales:

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{cases} \mathbf{U}_i & \text{si } x < x_{i+1/2} \\ \mathbf{U}_{i+1} & \text{si } x > x_{i+1/2} \end{cases} \quad (3.12)$$

El jacobiano tiene que cumplir la condición de consistencia. Integrando la ecuación (2.2) en el volumen de control de la celda:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\mathbf{U}(x, \Delta t) - \mathbf{U}(x, 0)] dx + \int_0^{\Delta t} [\mathbf{F}(x_{i+1}, t) - \mathbf{F}(x_i, t)] dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^{\Delta t} \mathbf{S} dx dt$$

Haciendo lo mismo con la ecuación (3.11):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{\mathbf{U}}(x, \Delta t) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{\mathbf{U}}(x, 0) dx + \tilde{\mathbf{J}} \Delta t (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i) = 0$$

La condición de consistencia sostiene que se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{\mathbf{U}}(x, \Delta t) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{U}(x, \Delta t) dx$$

Lo cual conduce a:

$$\delta \mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{S}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{J}}_{i+1/2} \delta \mathbf{U}_{i+1/2} \quad (3.13)$$

donde  $\delta \mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i)$  y  $\delta \mathbf{U}_{i+1/2} = \mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i$ .

Esto garantiza que la generalización de (3.10) a sistemas de ecuaciones con términos fuente se pueda formular como:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i-1/2}^+ + (\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i+1/2}^- \right]^n \quad (3.14)$$

Teniendo en cuenta:

$$\delta \mathbf{U}_{i+1/2} = \mathbf{E}_{i+1/2} \delta \mathbf{W}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_{11} & \tilde{e}_{21} \\ \tilde{e}_{12} & \tilde{e}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2$$

$$\mathbf{S}_{i+1/2} = \mathbf{E}_{i+1/2} \mathbf{B}_{i+1/2} = \tilde{\beta}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\beta}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2$$

Podemos expresar (3.13) en función de los valores y vectores propios como:

$$\delta \mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{S}_{i+1/2} = \sum_{m=1}^N \left[ \left( \tilde{\lambda} \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \right) \tilde{\mathbf{e}} \right]_{i+1/2}^m$$

Entonces, la ecuación (3.14) queda:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \sum_k \left( \tilde{\lambda}^+ \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{e}} - \tilde{\beta}^+ \tilde{\mathbf{e}} \right)_{i-1/2}^k + \sum_k \left( \tilde{\lambda}^- \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{e}} - \tilde{\beta}^- \tilde{\mathbf{e}} \right)_{i+1/2}^k \right]^n \quad (3.15)$$

El sistema SWE tiene dos dimensiones, así que esta ecuación quedará:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} & \left[ \left( \left( \tilde{\lambda}_1^+ \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1 \right) \tilde{\mathbf{e}}_1 \right)_{i-1/2} + \left( \left( \tilde{\lambda}_2^+ \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_2 \right) \tilde{\mathbf{e}}_2 \right)_{i-1/2} + \right. \\ & \left. + \left( \left( \tilde{\lambda}_1^- \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1 \right) \tilde{\mathbf{e}}_1 \right)_{i+1/2} + \left( \left( \tilde{\lambda}_2^- \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_2 \right) \tilde{\mathbf{e}}_2 \right)_{i+1/2} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.3. Términos fuente

La discretización de los términos fuente de fondo es muy determinante en situaciones realistas. Para garantizar que la solución numérica conserve la energía en ausencia de fricción, Murillo y Navas proponen en [21] discretizar los términos fuente mediante una combinación lineal de los métodos **integral** y **diferencial**:

$$\bar{S} = (1 - \Pi_E) \bar{S}^a + \Pi_E \bar{S}^b \quad (3.17)$$

donde el coeficiente es [20]:

$$\Pi_E = \frac{\delta \left( \frac{Q^2}{A} \right) - \tilde{A} \delta \left( \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A} \right)}{(\bar{S}^b - \bar{S}^a)} \quad (3.18)$$

y siendo los métodos diferencial e integral respectivamente:

$$\begin{cases} \bar{S}^a = -\frac{g}{2\tilde{c}} \tilde{A} \delta z + \frac{g}{2\tilde{c}} \tilde{A} \left( \frac{\delta A}{\tilde{b}} - \delta h \right) \\ \bar{S}^b = -\frac{g}{2\tilde{c}} A_{i+1/2} \delta z + \frac{g}{2\tilde{c}} A_{i+1/2} \left( \frac{\delta A}{\tilde{b}} - \delta h \right) \end{cases} \quad (3.19)$$

con:

$$A_{i+1/2} = \begin{cases} A_i & si \ A_i < A_{i+1} \\ A_{i+1} & si \ A_i > A_{i+1} \end{cases}$$

Una desarrollo más detallado se encuentra en el Anexo B.

### 3.4. Paso temporal

El paso temporal,  $\Delta t$ , es un elemento requerido para actualizar las variables conservadas, tal y como se indica en la ecuación (3.16). Esta cantidad, para no exceder la geometría de las celdas numéricas, tiene que cumplir:

$$\Delta t \leq \Delta x / \lambda$$

Si a esto se le añade la condición de convergencia de Courant, Friedrichs y Lewy [6], que establece:

$$CFL = \Delta t / \Delta t_{max} \leq 1 \quad (3.20)$$

entonces se llega a la siguiente formulación del cálculo del paso temporal:

$$\Delta t = CFL \min \left( \frac{\Delta x}{\lambda_i^n} \right) \quad (3.21)$$

Es necesario evaluar en cada instante de tiempo  $n$  los valores propios  $\lambda_i$  de cada celda para utilizar el mayor de ellos y, por lo tanto, más restrictivo. De esta forma, controlando el tamaño del paso temporal, se garantiza la estabilidad del método. En el Anexo C se desarrolla esto más detalladamente.

# 4. Resultados

## 4.1. Casos test académicos

Una manera de comprobar que el método numérico funciona adecuadamente es comparar los resultados que de él se obtengan con las soluciones exactas de aquellos problemas que efectivamente las tengan. Esto permite verificar la calidad de la aproximación numérica pero nunca ofrece respuestas a si el modelo es adecuado. Se estudiarán tres ejemplos de ello: la ecuación lineal advectiva y la ecuación de Burgers en el Anexo E y la rotura de presa. Se presentan 6 casos distintos que vienen determinados por sus condiciones iniciales:

Tabla 4.1: Casos test académicos de rotura de presa. Condiciones iniciales .

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$Q_L (m^3/s)$	0,000	0,000	0,800	4,000	0,800	2,000
$Q_R (m^3/s)$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$h_L (m)$	1,000	4,000	0,600	0,600	0,700	0,700
$h_R (m)$	0,100	0,692	1,000	1,000	1,000	1,000
$z_L (m)$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$z_R (m)$	0,000	3,000	0,400	0,400	0,000	0,000
$b_L (m)$	0,000	0,000	1,000	1,000	0,500	0,500
$b_R (m)$	0,000	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000

### 4.1.1. Caso 1: rotura de presa ideal

Éste es uno de los ejemplos clásicos de problema transitorio de lámina libre con solución exacta discontinua. Se trata de un problema de Riemann resuelto por vez primera por Stoker [24] para el caso ideal, es decir, sin rozamiento ni pendiente. Se prepara una simulación para un canal de  $L = 200 m$ , con los calados y caudales indicados en la tabla (4.1).

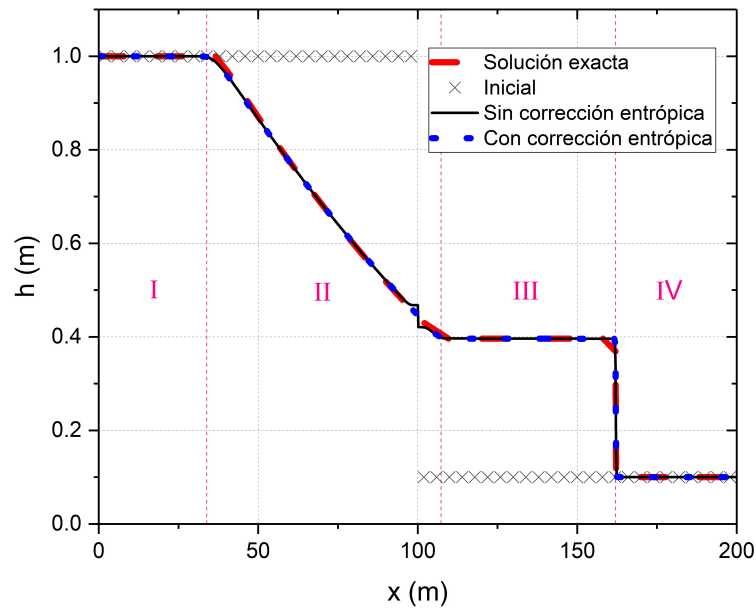


Figura 4.1: caso 1: soluciones exacta y numérica de una rotura de presa ideal.  $t = 20 s$ .



La figura (4.1) recoge cuál es la solución transcurrido un tiempo  $t = 20 \text{ s}$  superpuesta con las condiciones iniciales y la solución exacta. Se diferencian 4 regiones separadas por las líneas características y por la trayectoria de la propagación de la discontinuidad. En las regiones *I* y *IV* de la figura (4.1) todavía no se ha dejado notar la perturbación, así que permanecen con sus condiciones iniciales. La región *II* es una zona de transición que se corresponde con la expansión, donde se genera la onda de rarefacción. La región *III* determina el frente de onda, sucede una compresión. Esta ha de verificar la condición de Rankine-Hugoniot que describe la relación entre los estados a ambos lados de la onda de choque:

$$(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)U = (\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L) \quad (4.1)$$

donde  $U$  es la velocidad de la onda de choque.

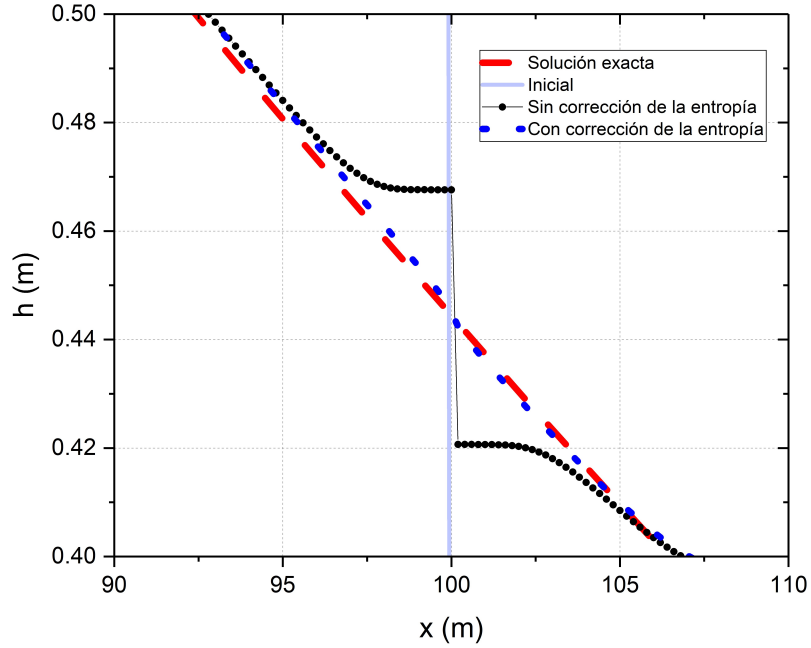


Figura 4.2: Soluciones exacta y numérica de una rotura de presa: detalle mostrando resultados con y sin corrección de la entropía.

El método de Roe que se ha seguido puede proporcionar resultados erróneos cuando uno de los valores propios discretos se anula localmente. En el Anexo D se detalla el procedimiento seguido para corregir este problema, conocido como *corrección de la entropía*. En la figura (4.2) se aprecia una zona ampliada. Cuando se corrige la entropía la solución obtenida presenta una pendiente suave que se asemeja a la solución exacta; sin embargo, si no se corrige hay una pequeña zona en la que los datos numéricos simulan un comportamiento poco realista del flujo.

#### 4.1.2. Caso 2: rotura de presa con términos fuente

La utilidad de discretizar los términos fuente como combinación lineal de los métodos diferencial e integral se muestra usando un ejemplo de flujo transitorio sobre un escalón y sin fricción propuesto en [19]. Las condiciones iniciales son las correspondientes al caso 2 de la tabla (4.1). La figura (4.3) muestra perfiles longitudinales de la condición inicial de la altura del fondo, de la superficie del agua en  $t = 5 \text{ s}$  y de la línea de energía definida por  $H = \frac{u^2}{2g} + h + z$ .

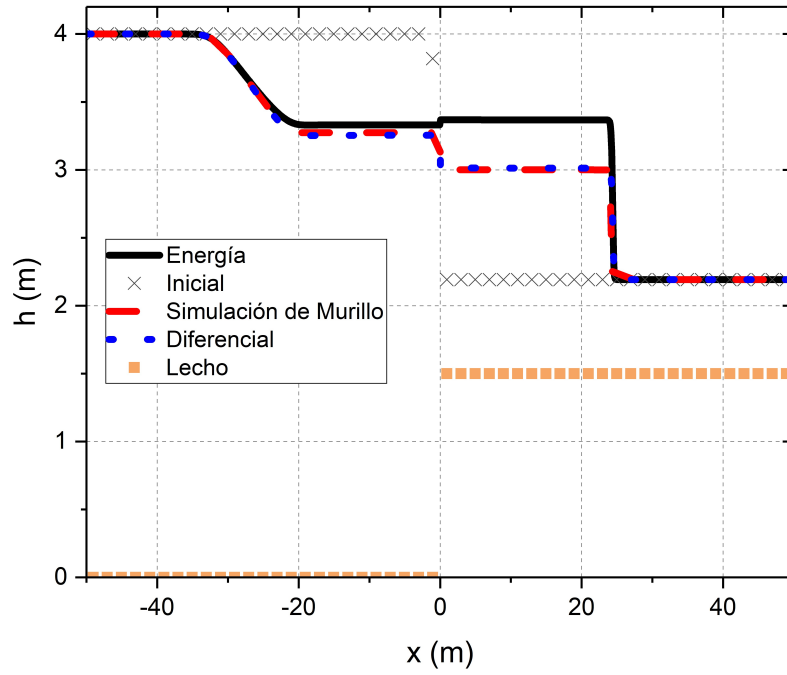


Figura 4.3: Método diferencial de discretización de los términos fuente.

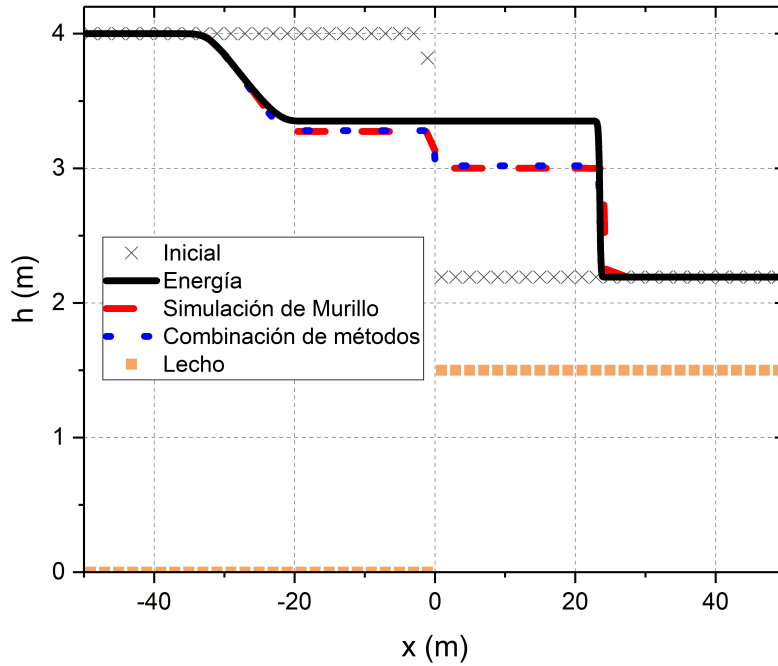


Figura 4.4: Combinación lineal de los métodos diferencial e integral de discretización de los términos fuente.

La energía no tiene que ser constante, pero necesariamente no puede incrementarse. En esta simulación, realizada con el método diferencial de discretización de los términos fuente, al contrario de lo que se puede esperar, aumenta. El método integral tampoco garantiza que no aumente, por lo que es necesario el uso de la combinación lineal de ambos que en régimen estacionario asegura la conservación de la energía. La figura (4.4) ilustra este método.

#### 4.1.3. Casos 3, 4, 5 y 6: convergencia al estado estacionario con términos fuente

El correcto comportamiento del programa frente a los propios términos fuente se puede comprobar analizando cuál es el resultado que predicen las ecuaciones. La energía  $H$  ha de mantenerse constante en ausencia de fricción. Se plantean cuatro casos particulares en los que varían la anchura o el lecho. Las condiciones iniciales se recogen en la tabla (4.1) para los casos 3, 4, 5 y 6.

Sea, en primer lugar, la anchura constante:  $B = cte$ . Si se tiene un flujo estacionario,  $Q = cte = uBh$ , entonces:

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \Rightarrow Bu \frac{dh}{dx} + Bh \frac{du}{dx} \Rightarrow du = -\frac{u}{h} dh$$

Además, puesto que la energía es constante:  $\frac{dH}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{u}{g} \frac{du}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0$ .

$$\frac{dh}{dx} \left( 1 - \frac{u^2}{gh} \right) + \frac{dz}{dx} = 0$$

Que se puede reordenar para obtener una condición que indicará la relación entre la variación del lecho y del calado:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{1}{Fr^2 - 1} \quad (4.2)$$

De esta manera, existen dos situaciones diferentes que dependen del tipo de flujo, que se presentan con los casos 4 y 5 de la tabla. Si el flujo es subcrítico,  $Fr < 1$ , la parte derecha de la igualdad (4.2) quedará con signo negativo, lo cual implica que si el lecho disminuye la altura del calado aumentará:  $\frac{dz}{dx} \uparrow \Rightarrow \frac{dh}{dx} \downarrow$ . En la figura (4.5) se comprueba este hecho; además, la energía se mantiene constante, cumpliendo la premisa de la que se partía. Si, por otro lado, el flujo es supercrítico,  $Fr > 1$ , ambas variables se modificarán solidariamente:  $\frac{dz}{dx} \uparrow \Rightarrow \frac{dh}{dx} \uparrow$ , como muestra la figura (4.6).

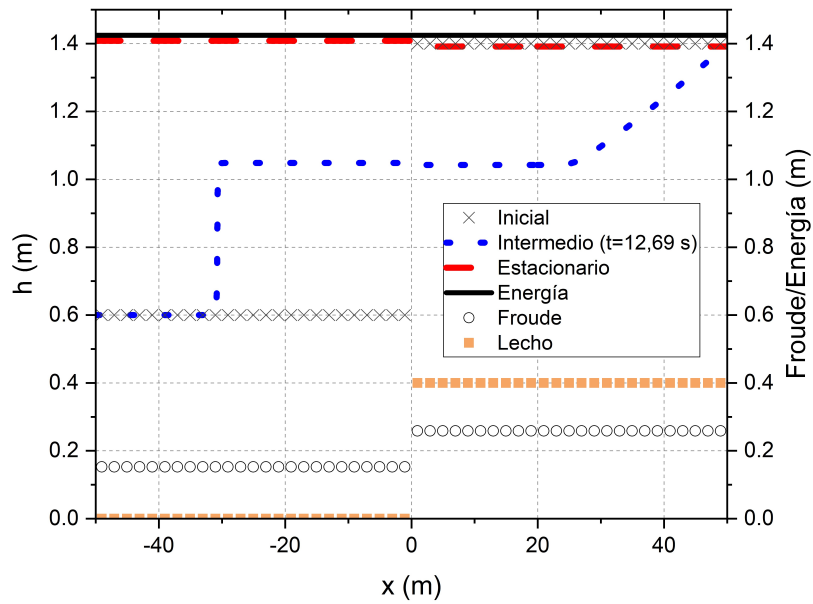


Figura 4.5: Flujo estacionario subcrítico, caso 3.

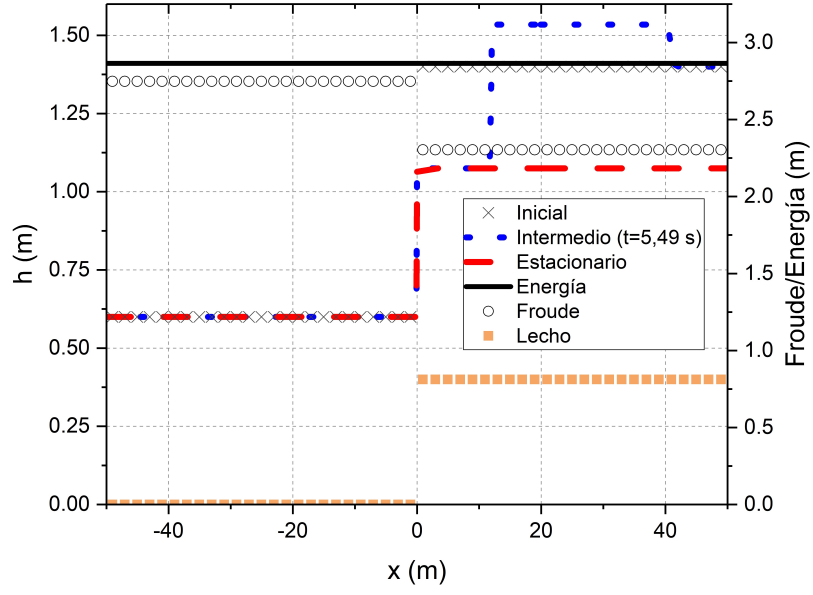


Figura 4.6: Flujo estacionario supercrítico, caso 4.

En ambos ejemplos, si se discretizan los términos fuente con los métodos diferencial e integral, la energía en estado estacionario no se mantiene constante. Es una diferencia inapreciable, por lo que no se representa en ninguna figura, pero existen dos valores distintos de la energía. Este fallo se soluciona con la combinación lineal de ambos métodos, que como se aprecia en las figuras se conserva a lo largo de todo el canal.

Otro caso particular sería aquel que considerara el lecho plano ( $z = cte$ ) y en el que variara la anchura. En esa situación se tiene:

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \Rightarrow Bu \frac{dh}{dx} + Bh \frac{du}{dx} + hu \frac{dB}{dx} = 0$$

La derivada espacial de la energía, puesto que el lecho es constante, se reduce a:

$$\frac{dH}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{u}{g} \frac{du}{dx} + \frac{dh}{dx}$$

De la unión de ambas ecuaciones se llega a:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{u^2}{gB(1 - Fr^2)} \frac{dB}{dx}$$

Si el flujo es subcrítico,  $Fr < 1$ , se tiene:  $\frac{dB}{dx} \uparrow \Rightarrow \frac{dh}{dx} \uparrow$ . Teniendo en cuenta esto se llega a que, si aumenta la anchura, aumenta también la altura del agua, como se ve en la figura (4.7).

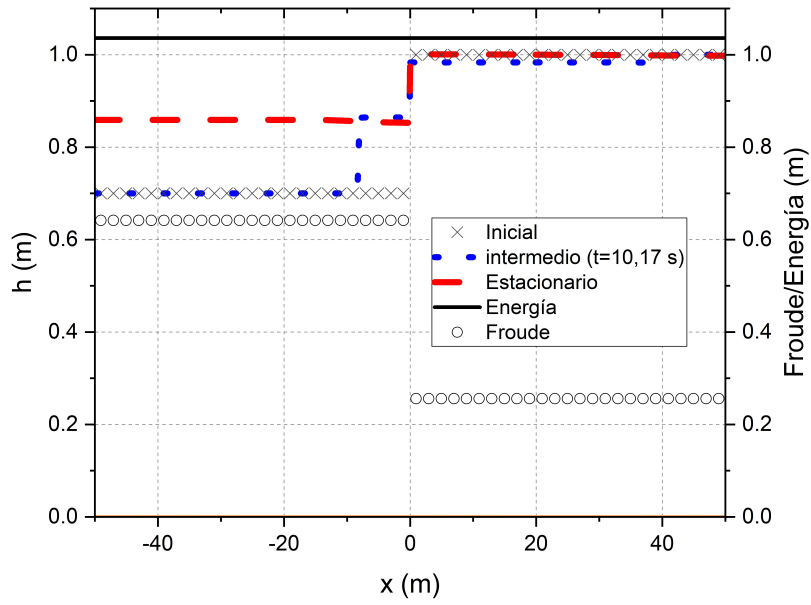


Figura 4.7: Flujo estacionario subcrítico, caso 5.

Para flujo supercrítico,  $Fr > 1$ , es:  $\frac{dB}{dx} \uparrow \Rightarrow \frac{dh}{dx} \downarrow$ . En la figura (4.8) se aprecia que, para un flujo supercrítico, el calado descende si aumenta la anchura.

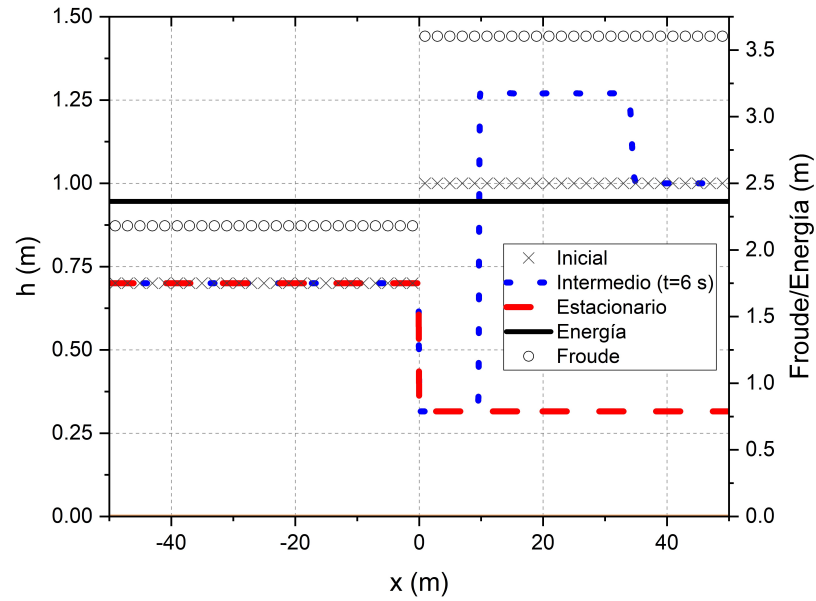


Figura 4.8: Flujo estacionario supercrítico, caso 6.

## 4.2. Casos test experimentales

Una vez verificado el correcto funcionamiento del método de resolución de las ecuaciones con ejemplos analíticos es interesante comparar los datos numéricos con medidas experimentales para contrastar cómo de realistas son. Para ello se van a utilizar medidas tomadas en el Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) de Lisboa por António Bento Franco [4] y otras realizadas en la Universidad de Zaragoza en el laboratorio del Área de Mecánica de Fluidos [16].

### 4.2.1. Medidas del laboratorio LNEC

En su tesis, *Modelação computacional e experimental de escoamentos provocados por roturas de barragens* [4], Bento Franco presenta resultados experimentales de un montaje de rotura de presa para diferentes condiciones iniciales. La geometría del canal utilizado es la mostrada en la figura (4.9). Se trata de un canal rectangular de ancho constante y con pendiente longitudinal nula.

Se evalúa la validez de los datos simulados, por un lado a partir de valores de la velocidad de avance del frente de onda medidos en tres zonas diferentes del canal y, por otro lado, mediante datos instantáneos de la altura del agua sobre el fondo del canal recogidos por la sonda S3 (4.9) cada 0,04 s. Con estos últimos datos se podrán comparar los tiempos de llegada del frente de onda a la posición de la sonda.

Las medidas de la altura se realizaron con sondas de conductancia. Estas sondas están conformadas por un transductor, donde se realiza la detección, un conversor acoplado y un acondicionador de señal. El transductor se basa en la proporcionalidad de la conductancia (inverso a la resistencia eléctrica) al producto de la altura y la conductividad:  $G \approx \sigma h$ . El transductor tiene dos electrodos a los que alimenta el conversor acoplado con una señal alterna de amplitud constante. Por tanto, la altura será proporcional a la diferencia de tensión medida.

Bento plantea diferentes ensayos, caracterizado cada uno por las condiciones iniciales impuestas sobre la altura del agua a ambos lados de la compuerta. En ellos mide la velocidad media del frente de onda recogiendo el tiempo que tarda en llegar a cada sonda. En la tabla (4.2) se muestran los datos experimentales y simulados. La primera zona, entre la compuerta y la sonda S2, es la que mayor error relativo presenta. Esto podría ser debido a que experimentalmente es imposible conseguir una apertura instantánea de la compuerta, como se supone en el modelo numérico. Por otro lado, el error relativo se reduce en la segunda zona ( $S2 < x < S3$ ) y es prácticamente despreciable en la tercera zona ( $S3 < x < S4$ ) en todos los experimentos simulados.

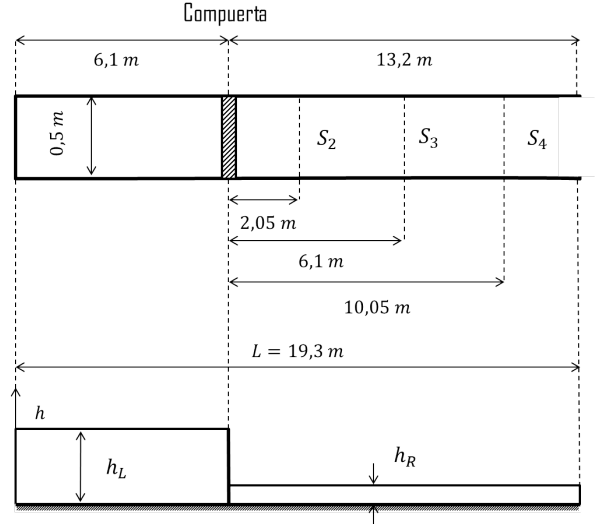


Figura 4.9: Geometría del canal del laboratorio LNEC.

Tabla 4.2: Velocidades promedio de los frentes de onda en las distintas zonas del canal.

Condiciones iniciales		Ensayo	Velocidad del frente de onda (m/s)		
$h_L$ (m)	$h_R$ (m)		$Gate < x < S2$	$S2 < x < S3$	$S3 < x < S4$
0,401	0,004	F1B02	2,720	2,409	2,173
		Númerico	2,496	2,304	2,167
		Error relativo (%)	8,24	4,36	0,30
0,400	0,095	F1B10	2,210	1,888	1,837
		Númerico	2,500	1,820	1,855
		Error relativo (%)	13,12	3,60	0,98
0,301	0,148	F1B16	2,720	1,426	1,607
		Númerico	2,075	1,640	1,617
		Error relativo (%)	23,71	14,98	0,60
0,249	0,149	F1B18	1,684	1,519	1,512
		Númerico	1,960	1,536	1,493
		Error relativo (%)	16,37	1,14	1,27

A continuación, se utilizan los datos instantáneos de calado medidos por la sonda S3, situada en  $x = 6,1$  m aguas abajo de la compuerta, para testar la precisión del modelo numérico. Dicha comparación se lleva a cabo para las siguientes condiciones iniciales:

$$h(x) = \begin{cases} h_L = 0,408 \text{ m} & \text{si } x < 0 \text{ m} \\ h_R = 0,006 \text{ m} & \text{si } x > 0 \text{ m} \end{cases} \quad (4.3)$$

Atendiendo a los datos medidos (tabla (I.1) del Anexo I), el primer instante en el que se registra una variación de la altura inicial en la sonda S3 es en el tiempo  $t = 2,48$  s y la altura es  $h = 0,017$  m. La simulación se ha llevado a cabo con tres valores distintos del coeficiente de Manning. Estos valores son los calibrados por Bento Franco para cemento en fondo liso. La figura (4.10) muestra la comparación de la variación temporal de calado en la sonda S3 para los tres valores de coeficiente de Manning considerados.

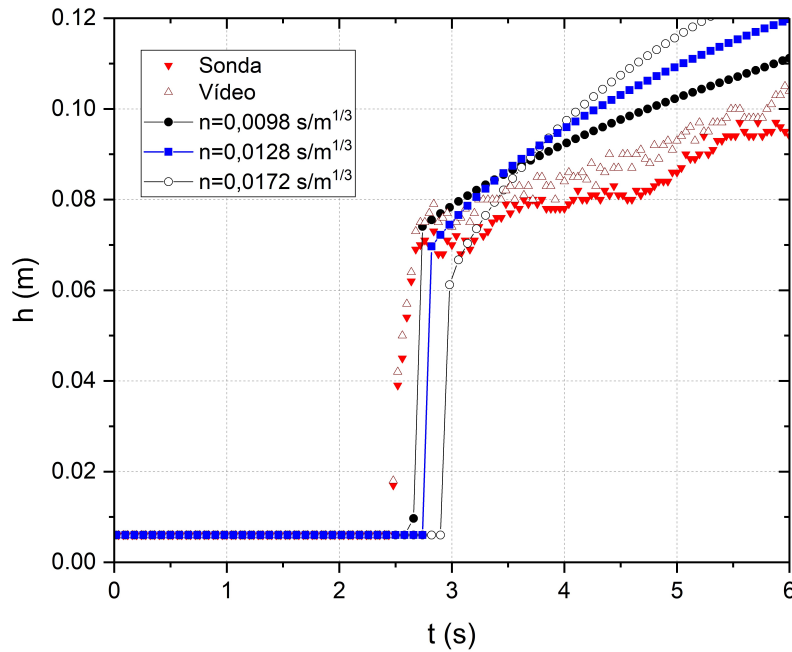


Figura 4.10: Evolución temporal de calados experimentales y simulados en la sonda S3.

Los resultados numéricos alcanzan mayores alturas que los experimentales. El mejor de los resultados es el correspondiente al Manning de menor valor ( $n = 0,0098 \text{ s/m}^{1/3}$ ). Además, el frente de onda experimental alcanza la posición de la sonda S3 aproximadamente 0,13 s antes que en la simulación numérica.

#### 4.2.2. Medidas en el laboratorio AMF de la Universidad de Zaragoza

Finalmente, se realiza una validación del modelo computacional con una serie de experimentos llevados a cabo en el canal del laboratorio del Área de Mecánica de Fluidos (Depart. de Ciencia y Tecn. de Materiales y Fluidos) de la Universidad de Zaragoza. La geometría del canal incluye variaciones longitudinales de la pendiente del fondo y un estrechamiento tipo Venturi, como muestra la figura (4.11).

Un sensor RGB-D, denominado Kinect (Microsoft, 2010), mide mediante refracción la posición instantánea de la superficie libre del flujo a lo largo de la zona del estrechamiento. Se detallan en el Anexo G la geometría del canal y el método de adquisición-procesado de datos experimentales. Dos experimentos diferentes, uno en régimen estacionario y otro en transitorio, serán motivo de comparación con la predicción numérica.

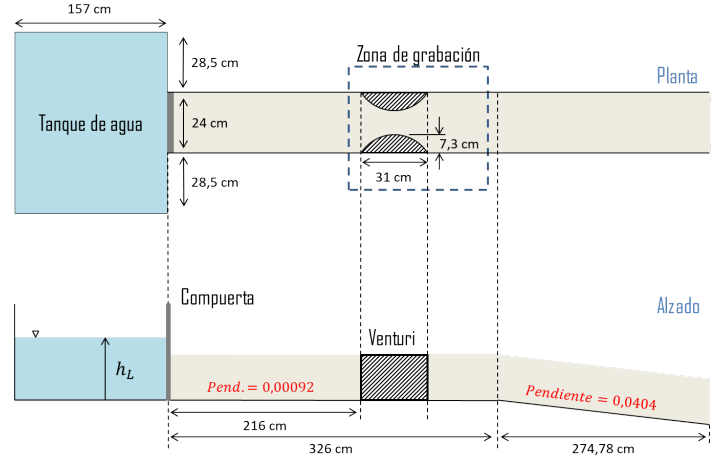


Figura 4.11: Canal AMF.

##### 4.2.2.1. Régimen estacionario

Previamente a la simulación de los experimentos, se realiza la calibración del coeficiente de Manning para el modelo 1D presentado en este trabajo (H), estimando un valor óptimo de rugosidad para el material del canal  $n = 0,0088 \text{ s/m}^{1/3}$  [16]. Para la simulación del caso estacionario se partió de una condición inicial de caudal  $Q = 11,66 \text{ m}^3/\text{h}$  y calados iniciales  $h_L = 0,1 \text{ m}$  en el depósito y  $h_R = 0,01 \text{ m}$  en el canal. Imponiendo una condición de contorno aguas arriba de caudal constante y de salida libre aguas abajo la simulación alcanzó el estado estacionario. En la figura (4.12) se muestra el perfil longitudinal de superficie libre simulado y medido en la zona de captación de datos de la Kinect. Las mediciones del laboratorio abarcan tan sólo una pequeña zona del canal que contiene el estrechamiento, por lo que se prescinde de mostrar el resto de canal, a pesar de que la simulación sí que obtuvo resultados para éste.

La conclusión más inmediata a la que se puede llegar observando la figura es que el programa es capaz de llegar al estado estacionario. Además, realiza de manera correcta el cambio de régimen que se da cuando el Froude vale 1, lo que demuestra que el esquema numérico es *well-balanced*, es decir, está bien equilibrado. El flujo pasa de ser subcrítico a supercrítico justo en el punto central del estrechamiento. Por otro lado, también merece la pena mencionar que la calibración del Manning se ha llevado a cabo con éxito pues, de no ser así, el método sobrestimaría o subestimaría el perfil de calado estacionario a lo largo del eje longitudinal del canal y los datos numéricos aparecerían desplazados en el eje vertical.



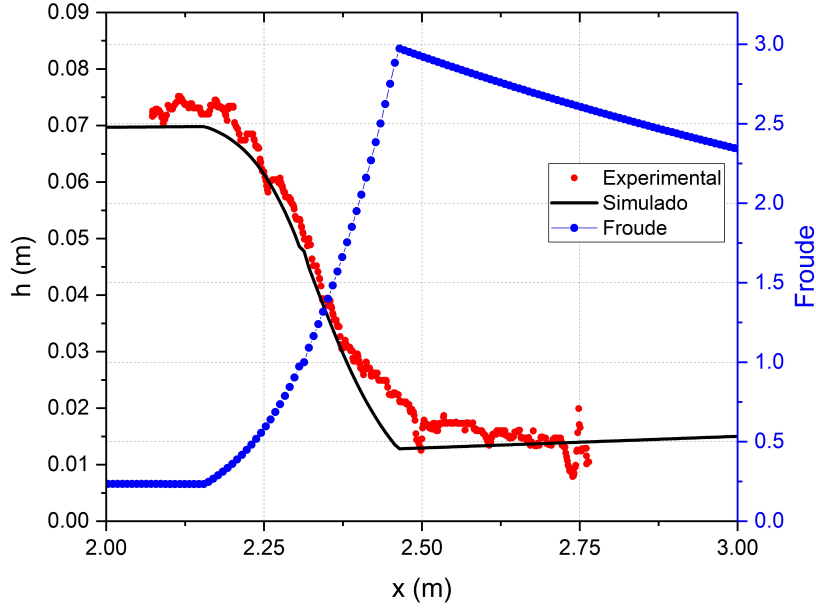


Figura 4.12: Perfiles longitudinales de calado numérico y experimental para el caso de régimen estacionario.

#### 4.2.2.2. Régimen transitorio

El experimento con flujo transitorio consiste en una rotura de presa, donde las elevaciones iniciales de la superficie libre aguas arriba y abajo de la compuerta neumática son:

$$h(x) = \begin{cases} h_L = 9,2 \text{ cm} & \text{si } x < 0 \\ h_R = 0,0 \text{ cm} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Una vez la compuerta es elevada, la onda de rotura de presa avanza a lo largo del canal, hasta alcanzar la zona de medida del sensor RGB-D. El tiempo experimental de llegada del frente de onda al estrechamiento y los perfiles instantáneos de calado a lo largo del eje longitudinal del canal obtenidos a partir de las medidas del sensor Kinect son comparados con los obtenidos numéricamente. Las figuras (4.13) y (4.14) muestran los perfiles longitudinal de calado experimental y numérico para distintos tiempos después de la apertura de la compuerta.

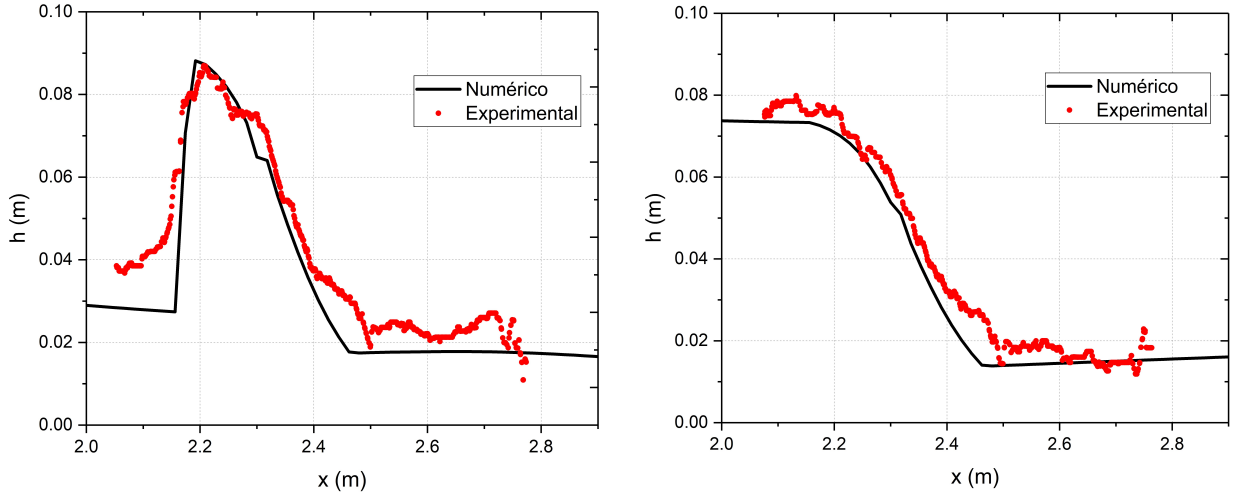


Figura 4.13: Datos experimentales y simulados en Unizar: (a)  $t = 2,54 \text{ s}$  y (b)  $t = 5,86 \text{ s}$ .

La figura (4.13) muestra dicha comparación en  $t = 2,54 \text{ s}$  (a) y en  $t = 5,86 \text{ s}$  (b). En

el Anexo I se recoge la secuencia temporal de avance del frente de onda en el estrechamiento. En general los datos medidos en laboratorio y computados numéricamente muestran un buen acuerdo, aunque un pequeño retraso en la llegada del frente de onda al estrechamiento es observado para los datos experimentales (aproximadamente  $0,3 - 0,5$  s). Esto puede ser debido a que el tiempo de apertura de la compuerta en el laboratorio no es instantáneo (como se supone en el modelo numérico), sino que se estima una duración real para la apertura completa en torno a  $0,2 - 0,4$  s. Sin embargo, este retraso solo afecta a los primeros instantes después de la apertura de la compuerta. La máxima altura de la superficie libre sobre el fondo del canal en la zona de estrechamiento se da para un tiempo  $t = 5,86$  s después de la apertura de compuerta, como se observa en la figura (4.13-b). A partir de ese momento, el calado disminuye progresivamente con una aparición reiterada de ondas secundarias rebotadas en el fondo del tanque, como se ve en la figura (4.14-a).

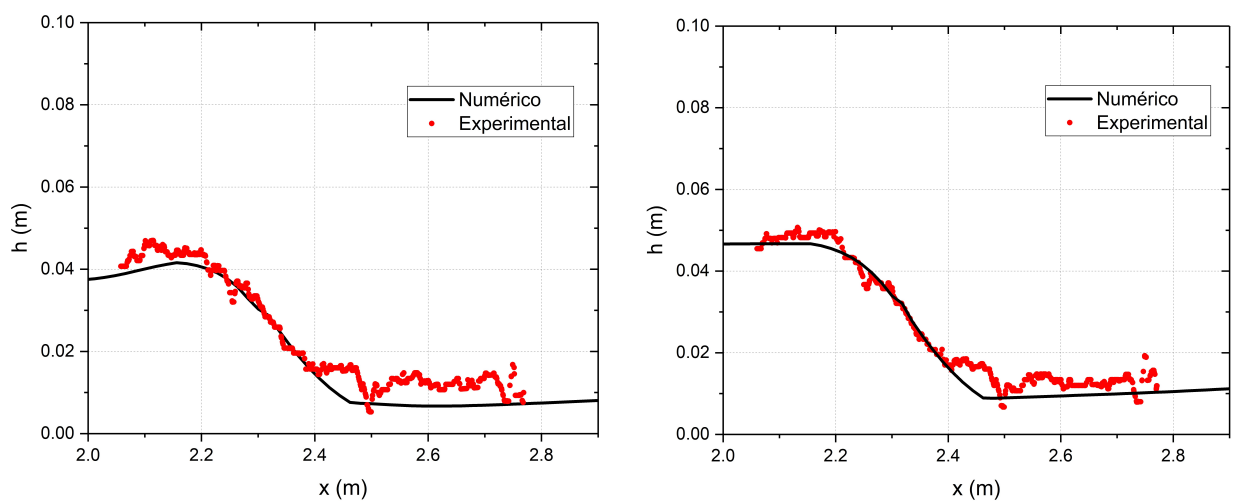


Figura 4.14: Datos experimentales y simulados en Unizar: (a)  $t = 15,82$  s y (b)  $t = 20,71$  s.

El método numérico es capaz de predecir razonablemente bien estos efectos de rebote y la llegada de las ondas secundarias asociadas. Por último, la altura de agua en el estrechamiento acaba descendiendo progresivamente, figura (4.14-b), hasta que el agua almacenada inicialmente en el depósito de cabecera es totalmente evacuada.

## 5. Conclusiones

Al término de este trabajo conviene hacer una síntesis del aprendizaje obtenido en su realización. En cuanto a los conocimientos y herramientas que se han consolidado se pueden mencionar el tratamiento de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y la programación en C. Por otro lado, se han ampliado considerablemente en el ámbito de la mecánica de fluidos respecto a los adquiridos en la asignatura Física de fluidos; esto mediante la profundización en la procedencia y uso de las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido, así como en las aproximaciones que se deben llevar a cabo para considerarlo con mayor o menor complejidad y con menor o mayor facilidad.

Se han generado nuevos conocimientos y competencias en la modelización matemática y en la resolución numérica de ecuaciones. Para esto ha sido necesario un periodo de práctica previo al trabajo en el que se redactaron programas que resolvieran problemas más sencillos, como la ecuación lineal advectiva y la ecuación de Burgers. Asimismo, el procesamiento de los datos experimentales ha requerido el uso de programas y filtros en distintos ámbitos de trabajo, como MatLab o Paraview.

Se ha podido comprobar que la formulación del fenómeno descrito, flujo en lámina libre, se ha formulado de la manera correcta por medio de las ecuaciones de aguas poco profundas. Estas ecuaciones, en el caso concreto unidimensional, consideran y representan razonablemente bien aspectos realistas de importancia del flujo como son las variaciones de lecho y de anchura, así como la fricción de las paredes en los términos fuente.

Este modelo del flujo es mejorable, sin embargo, en cuanto al método de resolución numérica de las ecuaciones, dentro de la gran variedad que existe, el utilizado en este trabajo se ha explotado a su máximo nivel. Para ello se ha optimizado en diversos aspectos. La posible aparición de resultados no realistas, como el problema de la entropía, ha sido resuelto correctamente, aportando resultados consistentes con las leyes físicas. También se han propuesto tres maneras distintas de discretizar los términos fuente que tratan de alcanzar un cierto balance energético.

La solución exacta del problema no es realista, pues carece de efectos como la fricción, tan sólo verifica las ecuaciones. En contraposición, la solución experimental tiene mucha incertidumbre, fruto del modelo matemático, de la solución numérica y de las propias medidas.

Se ha tratado de llegar a un buen convenio al respecto. Esta primera pero amplia aproximación a la simulación llevada hasta término, desde las ecuaciones que rigen el fenómeno, pasando por su discretización y su resolución numérica y llegando hasta la comparación de los resultados computacionales y experimentales, finalmente ha resultado arrojar soluciones y conclusiones satisfactorias y sobradamente enriquecedoras con las que clausurar el último curso del grado de física.

# Bibliografía

- [1] *Grado en Física*. Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza. Recuperado de <http://titulaciones.unizar.es/fisica/>
- [2] ABBOTT, M. B. (1979) *Computational Hydraulics*. Worcester, Great Britain: Billings and Sons Ltd.
- [3] ANDERSON, J. D. (1995) *Computational Fluid Dynamics: basics with applications*. Singapore: McGraw-Hill international editions.
- [4] BENTO FRANCO, A. (1996) *Modelação computacional e experimental de escoamentos provocados por roturas de barragens* (Tesis doctoral). Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- [5] BURGUETE, JAVIER (2003) *Modelos unidimensionales de flujos de superficie libre y transporte en geometrías irregulares: Aplicación al flujo en ríos*. (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
- [6] COURANT, R. - FRIEDRICHS, K. - LEWY, H. (1928) On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *Mathematische Annalen* 100, (1928), 32-74.
- [7] GARCÍA-NAVARRO, P. - VÁZQUEZ-CENDÓN, M. E. (1999) On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations. *Computers & Fluids*, 29 (2000), 951-979.
- [8] GARCÍA-NAVARRO, P. - BRUFAU, P. *Métodos numéricos para las ecuaciones del flujo transitorio de lámina libre: aplicación en hidráulica*. Área de Mecánica de Fluidos, Universidad de Zaragoza.
- [9] GARCÍA-NAVARRO, P. - BRUFAU, P. *Conceptos básicos de hidrodinámica de superficie*. Área de Mecánica de Fluidos, Universidad de Zaragoza.
- [10] GODUNOV, S. K. (1959) A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. Application to the 1D-2D shallow water equations. *Mat. Sb. (N.S.)*, Volume 47(89), Number 3 (1959), 271-306.
- [11] HENDERSON, F. M. (1966) *Open Channel Flow*. New York, USA: Macmillan Publishing Co.
- [12] HIRSCH, C. (1995) *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Oxford, United Kingdom: Butterworth-Heinemann.
- [13] KERMANI, M. J. - PLETT, E. G. Modified Entropy Correction Formula for the Roe Scheme. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper*, 83 (2001).
- [14] KUNDU, P. K. (1990) *Fluid Mechanics*. Londo, United Kingdom: Academic Press.

- [15] LIGGET, J. A. (1994) *Fluid Mechanics*. USA: McGraw-Hill international editions.
- [16] MARTÍNEZ-ARANDA, S. - FERNÁNDEZ-PATO, J. - CAVIEDES-VOULLIÈME, D. - GARCÍA-PALACÍN, I. - GARCÍA-NAVARRO, P. (2018) Towards transient experimental water surfaces: A new benchmark dataset for 2D shallow water solvers. *Advances in Water Resources*, 121 (2018)., 130-149.
- [17] MORALES-HERNÁNDEZ, M. - GARCÍA-NAVARRO, P. - BURGUETE, J. - BRUFAU, P. (2012) A conservative strategy to couple 1D and 2D models for shallow water flow simulation. *Computers & Fluids*, 81 (2013), 26-44.
- [18] MORALES HERNÁNDEZ, M. (2014) *Efficient explicit finite volume schemes for the shallow water equations with solute transport* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
- [19] MURILLO, J. - GARCÍA-NAVARRO, P. (2009) Weak solutions for partial differential equations with source terms: Application to the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 229 (2010), 4327-4368.
- [20] MURILLO, J. - GARCÍA-NAVARRO, P. (2012) Energy balance numerical schemes for shallow water equations with discontinuous topography. *Journal of Computational Physics*, 236 (2012), 119-142.
- [21] MURILLO, J. - NAVAS-MONTILLA, A. (2016) A comprehensive explanation and exercise of the source terms in hyperbolic systems using Roe type solutions. Application to the 1D-2D shallow water equations. *Advances in Water Resources*, 98 (2016), 70-96.
- [22] PLETCHER, R. H. - TANNEHILL, J. C. - ANDERSON, D. A. (1997) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Washington DC, USA: Taylor & Francis.
- [23] ROE, P. L. (1980) Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes. *Journal of Computational Physics*, 43 (1981), 357-372.
- [24] STOKER, J. J. (1992) *Water Waves*. New York, USA: Interscience.
- [25] VREUGDENHIL, C. B. (1994) *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

