Algunas estructuras matemáticas en Relatividad General

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad Zaragoza
1542

Juan Carlos Castro Rivera
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Eduardo Follana Adin
14 de septiembre de 2018

Prólogo

La teoría de la Relatividad General puede verse como un reflejo más de la unión siempre presente entre física y matemáticas, quizá en el momento de ser formulada, a un nivel mucho más profundo e inesperado del que se estaba acostumbrado.

Hoy entendemos que las matemáticas, paralelamente a sus propios objetivos, pueden formar un sustento riguroso sobre el que desarrollar marcos teóricos, y mediante técnicas formales, nos conducen a resultados con claras interpretaciones físicas. En cuanto a la relación entre ambas disciplinas, si bien podría ser un misterio ahondar en su por qué, lo que es indudable es que a lo largo de la historia ha ido siendo comprobada a través de los hechos. Hoy en día se encuentran más unidas que nunca. Hay numerosos campos de investigación en los que se requiere de ambas perspectivas, tanto en física, como en matemáticas, en cuyas áreas de investigación encuentra muchas veces problemas planteados por la física, que han impulsado enormemente la atención y el desarrollo de éstas, como pueden ser la geometría de variedades, el análisis funcional, las ecuaciones diferenciales, entre otras.

La presente memoria pretende ser un reflejo de esa unión, y de como con estudio y dedicación, podemos comunicarnos y hacer que ambas disciplinas se aporten aún más la una a la otra.

Abstract

The following work consists in a description of the basic mathematical structures used in General Relativity. The study of semi-Riemannians manifolds and tensorial calculus, and some formal concepts like geodesic curve and curvature. This mathematical structure lead us to describe the Einstein equations.

Smooth manifolds are introduce by the need to find out non euclean geometry, and tensor algebra to describe objects which do not depend on a coordinate system. It is also necessary, as we will see, to introduce an extra structure over the manifold (metric tensor) which allows us to have a unique differential operator (covariant derivative) that extends the usual derivative.

This work begins with an introductory chapter (Chapter 1) to describe the physical motivation to introduce such concrete mathematical objects. Afterwards, it starts with a more general approach, closer to the way in which mathematical objects are introduced in the degree, to a more a concrete one which will allow us to describe the Einstein equations.

Specifically, Chapter 2 deals with smooth manifolds and how we can describe tensor fields and differential operators over them. Chapter 3 takes a more specific type of smooth manifolds that are used in General Relativity, and how we have a privileged differential operador there (Levi-Civita covariant derivative). In particular, it allows us to define geodesic curves and curvature. Finally, Chapter 4 tries to be more specific and use all the mathematical structures given before. We will describe Einstein equations, their meaning, and a specific solution (Schwarzschild solution) which have a clear interpretation that we will briefly comment.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Iniciamos con este capítulo introductorio para conocer qué razonamientos llevan a buscar objetos matemáticos tan concretos como los que iremos tratando a lo largo de la memoria, además de introducir algunas definiciones que usaremos más adelante.

1.1. Relatividad Especial y el espacio de Minkowski

Definición 1.1. Todo sistema de referencia en el cual una partícula sobre la que no actúa fuerza alguna se mueve a velocidad constante se dice que es un *sistema de referencia inercial*.

Postulados de Relatividad Especial (1905)

- *Postulado primero: No es posible diseñar un experimento que establezca si uno se halla en reposo o en movimiento uniforme. Las leyes que rigen los fenómenos físicos son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.*

- *Postulado segundo: La velocidad de la luz es independiente de la velocidad de la fuente luminosa.*

Consideremos los puntos (*eventos*) en $\mathbb{R}^n$ como tuplas de $n-1$ coordenadas espaciales, y una temporal, de momento solo como espacio vectorial. Vamos a asignarle una primera estructura geométrica coherente con los postulados de Relatividad Especial.

Pensemos en el caso $n=2$. Fijado un sistema de referencia inercial $\mathscr{O}$, cada evento p queda descrito de manera inequívoca por dos coordenadas $p \equiv (t,x)$. Sea $\mathscr{O}'$ otro sistemas de referencia inercial, moviéndose a velocidad constante v con respecto a $\mathscr{O}$, y en el que p viene descrito por unas coordenadas $p \equiv (t',x')$. Para simplificar, supondremos que en ambos orígenes especiales coinciden en $t=0$, $t'=0$. De los postulados de de Relatividad Especial se deduce que (t',x') y (t,x) están relacionados mediante

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2, \tag{1.1}$$

cantidad escalar constante que solo depende de p y no de sus coordenadas, y que denotamos $s^2(p)$.

Espacio tiempo de Minkowski La relación dada por la ecuación 1.1 nos permite pensar en el escalar $s^2(p)$ como[1]

$$s^2(p) = (ct)^2 - x^2 = (ct,x)\eta_{ij}(ct,x)^T = \langle p,p\rangle = |p|^2, \tag{1.2}$$

siendo $\eta_{ij} = diag(-1,1)$ matriz de una forma bilineal simétrica (no definida positiva) en una base en la que (ct,x) sean las coordenadas de p. Esto nos da una estructura geométrica.

[1] Es abuso de notación denotarlo $s^2(p)$, podría ser negativo.

Definición 1.2. El par $(\mathscr{M}, \eta_{ij})$, donde $\mathscr{M} = \mathbb{R}^4$ espacio vectorial y η_{ij} es una forma bilineal simétrica de signatura $(-1,1,1,1)$, se conoce como *espacio-tiempo de Minkoswki*. Y a la expresión que lo caracteriza $ds^2 = \sum \eta_{ij} dx^i dx^j$ se le dice *elemento de línea del espacio de Minkowski*.

De la misma manera que para $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$ son los cambios dados por matrices ortogonales las que preservan la norma, para el espacio de Minkowski (M, η_{ij}) los cambios que preservan s^2 son las *transformaciones de Lorentz*, que para $n = 2$, vienen dadas por

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.3}$$

con $v < c$.

Clasificación de los vectores del espacio de Minkowski Sea $(\mathscr{M}, \eta_{ij})$ el espacio de Minkowski de dimensión $n = 4$. Según el signo de $s^2(p)$, tenemos la siguiente clasificación

- Si $\langle p, p \rangle > 0$ o $p = 0$, p se dice *vector espacial*.
- Si $\langle p, p \rangle < 0$, p se dice *vector temporal*.
- Si $\langle p, p \rangle = 0$ y $p \neq 0$, v se dice *vector luz*.

Nota. Así como para el espacio euclídeo usual de dimensión 2 las transformaciones ortogonales transforman las coordenadas de los puntos a lo largo de circunferencias de centro el origen, para el espacio de Minkowski 2 dimensional, las transformaciones de Lorentz 1.3 transforman las coordenadas de los puntos a lo largo de hipérbolas de ejes $x = t, x = -t$ (vectores de luz). Así, estas también dejan fijo el origen y transforman coordenadas de vectores espaciales en coordenadas de vectores espaciales, análogamente para vectores temporales y vectores de luz.

1.2. Inconsistencia de la teoría gravitacional clásica con la Relatividad Especial

En la teoría clásica de Newton, la fuerza gravitacional $\vec{f}$ sobre una partícula viene dada por

$$\vec{f} = m_G \vec{g} = -m_G \vec{\nabla} \Phi, \tag{1.4}$$

donde m_G es la masa gravitacional de la partícula y $\vec{g}$ es el campo gravitatorio producido por el potencial gravitatorio Φ. Y a su vez,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \tag{1.5}$$

donde ρ es la densidad de materia y G la constante gravitacional. Esta ecuación no tiene una dependencia explícita con el tiempo. Veamos que esta ecuación no puede ser consistente con la Relatividad Especial.

En efecto, si $q \equiv (0,0)$ es un evento en el origen, y p es un evento con coordenadas (t,x) fuera del cono de luz[2], podremos encontrar un sistema de referencia en el que seguiría siendo $q \equiv (0,0)$, y $p \equiv (t', x')$, con $t' < 0$, y para el observador del nuevo sistema de referencia, el suceso p ocurriría en un instante de tiempo anterior a 0. Esto imposibilita una relación 'causa-efecto' entre ambos sucesos, pues todos sistemas de referencia inerciales son igualmente válidos. La incompatibilidad de ambas teoría viene de que en la teoría gravitacional clásica nada imposibilita una relación de 'causa-efecto' entre el evento q y de otro evento p fuera del cono de luz.

[2]El subconjunto de $\mathscr{M}$ formado por todos los vectores de luz se denomina *conos de luz*.

1.3. Una nueva teoría gravitacional consistente con la Relatividad Especial

La propuesta de la Relatividad General viene de que la gravedad no debe ser considerada como una fuerza en el sentido clásico (es decir, como un vector actuando de manera instantánea en el espacio), sino como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, siendo esta curvatura provocada por la presencia de materia.

Principio de equivalencia: En un laboratorio que cae libremente y sin rotación ocupando una región pequeña del espacio, las leyes de la física son las de la relatividad especial.

Principio de covarianza general: Las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los sistemas de coordenadas.

Así, al dejar de interpretar la gravedad como una fuerza, la ecuación del movimiento de una partícula moviéndose tan solo bajo efectos gravitatorios debería ser

$$\frac{\mathscr{D}c'}{d\lambda} = 0, \tag{1.6}$$

donde c' es el campo vectorial tangente a la trayectoria que describe la partícula, y $\mathscr{D}$ es algún tipo de derivación que, por el principio de covarianza, debe hacer que la ecuación 1.6 se verifique en cualquier sistema de referencia. Es decir, la trayectoria que sigue una partícula en estas condiciones debería la de una geodésica en nuestro nuevo modelo de espacio-tiempo con curvatura.

Además, de acuerdo con el principio de equivalencia, en todo punto de nuestro objeto geométrico, deberíamos poder definir un sistema de coordenadas x^i, de forma que en un entorno de p tengamos un elemento de línea

$$ds^2 \approx \sum \eta_{ij} dx^i dx^j, \tag{1.7}$$

y en p, cumpliéndose la igualdad.

El modelo matemático que se va a ajustar a estas necesidades se sitúa en el marco de la geometría semi-Riemanniana, que consiste esencialmente en el estudio de objetos geométricos 'suaves' (*variedades diferenciables*) a los que asociamos una métrica y en los que podremos definir un tipo de derivación que extiende a la derivación usual y través la de cual podemos definir de manera unívoca curvas geodésicas y curvatura.

Capítulo 2

Geometría de variedades diferenciables. Cálculo tensorial

Empezamos describiendo formalmente la estructura geométrica base sobre la que definiremos todo lo demás. Las definiciones y resultados que se presentan en este capítulo son de carácter más general, y con frecuencia aparecen en textos con un contenido matemático muy riguroso.

2.1. Variedades diferenciables

Un primer requisito es buscar una estructura geométrica que permita describir a sus elementos a través de coordenadas, y que los cambios entre ellas sean del tipo lo más general posible. Esto encaja perfectamente con la descripción formal de las variedades diferenciables.

Definición 2.1. Sea M un conjunto no vacío,

- Un *sistema de coordenadas (o carta)* $\mathbf{x}$ para M es una aplicación $\mathbf{x} : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que es inyectiva y su imagen es un abierto de $\mathbb{R}^n$.
- Un *atlas diferenciable n-dimensional* $\mathscr{A}$ para M en p es una colección de sistemas de coordenadas $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ verificando que $\cup \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ y que $\forall \mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta \in \mathscr{A}$ tal que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces la aplicación entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ (*cambio de cartas*), $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$, es diferenciable.
- Se dice que M es una *variedad diferenciable n-dimensional* o simplemente una *variedad* cuando se le puede asociar un atlas diferenciable n-dimensional $\mathscr{A}$, y se entiende que dos atlas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}'$ dotan de la misma *estructura diferencial* a M cuando todos los posibles cambios de cartas entre ellos sean diferenciables, es decir, si $\mathbf{x} \in \mathscr{A}, \mathbf{x}' \in \mathscr{A}'$, entonces $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}'^{-1}$ es diferenciable.

Nota (Topología de la variedad)**.** Se comprueba que la colección de *abiertos coordenados* $\{U_\alpha\}$ forma una base para una topología sobre M, lo que le da una estructura topológica (*topología de la variedad*), y los sistemas de coordenadas ahora pasan a ser homeomorfismos sobre su imagen. Normalmente se les suele pedir condiciones adicionales a las variedades, en términos de su topología. [1]

Definición 2.2. Sean $f : M \longrightarrow M'$ una aplicación entre variedades, $p \in M$, $\mathbf{x} \in \mathscr{A}$ un sistema coordenado para M en p, $\mathbf{y} \in \mathscr{A}'$ un sistema coordenado para M' en $f(p)$. Podemos inducir una nueva aplicación $F := \mathbf{y} \circ f \circ \mathbf{x}^{-1}$ entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}'^n$, y decimos que f es *diferenciable(difeomorfismo) en p* cuando F sea diferenciable (difeomorfismo) en $\mathbf{x}(p)$, y que f es *diferenciable (difeomorfismo)* cuando lo sea en todo punto $p \in Dom(f)$[2].

[1] Lo habitual es que la topología de la variedad deba ser *Hausdorff*, y *paracompacta*. La definición de estas propiedades requiere de varios conceptos previos de topología general que no son necesarios para el contenido de este trabajo. Pueden consultarse en cualquier libro de texto relacionado, por ejemplo [5].

[2] Se puede comprobar que la definición de diferenciabilidad es independiente del sistema de coordenadas.

Definición 2.3. Denotamos $F(M) := \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \textit{ diferenciable}\}$, y si $f \in F(M)$, se le dice *función real*.

Utilizaremos $x^j : M \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación que proyecta la coordenada j-ésima dada por $\mathbf{x}$, que es trivialmente diferenciable.

Proposición 2.1. El conjunto $T_pM := \{v : F(M) \longrightarrow \mathbb{R} \mid v$ es $\mathbb{R}$-*lineal* y verifica la regla de Leibnitz$\}$ tiene *estructura* de *espacio vectorial*. Se le dice *espacio tangente a M en p* y a sus elementos se les dice *vectores tangentes*.

Vectores tangentes coordenados Dado $\mathbf{x} = (x^1, ..., x^n)$ un sistema de coordenadas para M en p, si denotamos $u^1, ..., u^n$ a las *coordenadas usuales* de $\mathbb{R}^n$ y $f \in F(M)$, consideramos los *vectores tangentes coordenados* relativos a $\mathbf{x}$, $\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p : F(M) \longrightarrow \mathbb{R} \ni f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) := \frac{\partial f \circ \mathbf{x}^{-1}}{\partial u^j}(\mathbf{x}(p)), \forall j = 1, ..., n$. Denotamos $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x^j}$. Es claro que $\partial_1|_p, ..., \partial_n|_p \in T_pM$.

Teorema 2.1. *Sea M una variedad n-dimensional y* $\mathbf{x}$ *un sistema coordenado para M en p. Los vectores tangentes coordenados,* $\partial_1|_p, ..., \partial_n|_p$*, (relativos a* $\mathbf{x}$*) forman una base para* T_pM*, en particular* $\dim T_pM = n$*. Además,* $v = \sum_{i=1}^n v(x^i)\, \partial_i|_p$*, para todo* $v \in T_pM$*.*

2.2. Campos tensoriales

Resulta natural en este contexto, querer definir de manera suave una asignación de un vector en cada espacio tangente. Además, por ser este un espacio vectorial, también podremos definir aplicaciones suaves sobre los espacios duales. Construiremos objetos más a partir de estos, que serán de gran utilidad.

Definición 2.4. Sea M una variedad diferenciable

- Un *campo vectorial* (sobre M) es una aplicación $X : M \longrightarrow TM \ni p \longmapsto X(p) := X_p$ verificando que $\forall p \in M,\ X_p \in T_pM$, y siendo $TM := \cup T_pM$.
- Una *uno-forma* θ (sobre M) es una aplicación $\theta : M \longrightarrow T^*M \ni p \longmapsto \theta(p) := \theta_p$ verificando que $\forall p \in M$, $\theta_p \in T_p^*M$, siendo[3] $T^*M := \cup T_p^*M$.

Lema 2.1. Los campos vectoriales $X \in \mathfrak{X}(M)$ pueden verse como derivaciones sobre $F(M)$ entendiendo que $X(f)(p) := X_p(f)$. Para las uno-formas, podemos ver que actúan sobre campos vectoriales entendiendo que $\theta(X)(p) := \theta_p(X_p)$.

Definición 2.5. Sea M una variedad diferenciable

- Se dice que X es diferenciable cuando $X(f) \in F(M)$ para todo $f \in F(M)$.Denotamos $\mathfrak{X}(M) := \{X : M \longrightarrow TM \textit{ campo vectorial} \mid X \textit{ diferenciable}\}$.
- Se dice que θ es diferenciable cuando $\theta(X)$ es diferenciable, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Denotamos $\mathfrak{X}^*(M) := \{\theta : M \longrightarrow (TM)^* \textit{ uno-forma} \mid \theta \textit{ diferenciable}\}$.

Nota (Tensores sobre K-módulos)**.** Si K es un anillo y $V, V_1, ..., V_s$ son K-*módulos*, denotamos $V_1 \times ... \times V_s := \{(v_1, ..., v_s) \mid v_i \in V_i\}$ al *producto directo* de $V_1, ..., V_s$, y $V^* := \{f : V \longrightarrow K \mid f\ K-lineal\}$ al *módulo dual* de V. Y se dice que una aplicación $A : V_1 \times ... \times V_s \longrightarrow K$ es K-*multilineal* cuando es K-*lineal* en cada componente. Si r, s son enteros no negativos, un *tensor de tipo* (r, s) *sobre* V es una aplicación K-*multilineal* $A : (V^*)^r \times V^s \longrightarrow K$.[4]

[3]Se les dice TM *fibrado tangente*, T^*M *fibrado cotangente*.
[4]Es simple comprobación ver que $V_1 \times ... \times V_s$, V^* y T_s^r son K-*módulos* con las operaciones *usuales*.

Con las operaciones usuales, $F(M) = K$ y $\mathfrak{X}(M) = V$ tienen *estructura algebraica* de *anillo* y *K-módulo*[5], respectivamente. Esto es lo que permite introducir el *álgebra tensorial* sobre una *variedad M*. Primero globalmente.

Definición 2.6. Sea M una variedad diferenciable

- Un *campo tensorial sobre M* es un tensor de tipo (r,s) sobre $\mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{array}{rccc} A: & \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s & \longrightarrow & F(M) \\ & (\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s) & \longmapsto & A(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s) \end{array}$$

- Denotamos $T_s^r M := \{\, A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow F(M) \mid A \textit{ campo tensorial de tipo}(r,s) \textit{ sobre } M \,\}$. A los tensores de tipo $(0,s)$ se les dice *covariantes*, y a los tensores de tipo $(r,0)$ se les dice *contravariantes*.

Nota. Se puede ver sin mucha dificultad que podemos hacer las identificaciones

$$T_0^0 M \equiv F(M), \qquad T_0^1 M \equiv \mathfrak{X}(M), \qquad T_1^0 M \equiv \mathfrak{X}^*(M), \tag{2.1}$$

luego la noción de campo tensorial generaliza a la de función real, campo vectorial y uno-forma.

Tensores punto a punto en la variedad y componentes tensoriales

Tal y como lo hemos presentado, el concepto de campo tensorial es global, sobre toda la variedad. Para nuestros propósitos, nos interesa particularizar estos campos para estudiarlos punto por punto. Los siguientes resultados son el punto de unión entre la mayoría de textos puramente matemáticos sobre geometría diferencial, y otros que tienen como objetivo principal describir la Relatividad General. Su demostración puede verse en [7].

Un *campo tensorial* sobre $M, A \in T_s^r M$, puede entenderse como una *asignación suave* que para cada $p \in M$, nos da un *tensor de tipo* (r,s) sobre[6] T_pM. Esto nos permite particularizar un objeto *global* como lo es A, al estudio *punto por punto* en la variedad.

Teorema 2.2. *Sean $A \in T_s^r(M)$, $p \in M$. La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} A_p: & (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\alpha^1,...,\alpha^r,\chi_1,...,\chi_s) & \longmapsto & A(\theta^1(p),...,\theta^r(p),X_1(p),...,X_s(p)) \end{array}$$

es un tensor de tipo (r,s) sobre T_pM. Siendo $\theta^1,...,\theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $X_1,...,X_s \in \mathfrak{X}(M)$ cualesquiera tales que $\theta^i(p) = \alpha^i$ y $X_j(p) = \chi_j, \forall\ 1 \leq\ i \leq r, 1 \leq\ j \leq s$.

Definición 2.7. Sea $\mathbf{x} = (x^1,...,x^n)$ un *sistema de coordenadas* para M en un entorno $Dom(\mathbf{x})$, y $A \in T_s^r(M)$. Las *componentes tensoriales de A relativas a* $\mathbf{x}$ son el conjunto de aplicaciones diferenciales reales definidas sobre $Dom(\mathbf{x})$,

$$A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} := A(dx^{i_1},...,dx^{i_r},\partial_{j_1},...,\partial_{j_s}) : Dom(\mathbf{x}) \subset M \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i_k, j_k \leq n.$$

Definición 2.8. Si $A \in T_s^r M, B \in T_{s'}^{r'} M$. Se llama *producto tensorial* de A con B al tensor $A \otimes B \in T_{s+s'}^{r+r'}$ dado por [7]

$$A \otimes B(\theta^1,...,\theta^{r+r'},X_1,...,X_{s+s'}) := A(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s)B(\theta^{r+1},...,\theta^{r+r'},X_{s+1},...,X_{s+s'}).$$

[5] Esto es, que $\mathfrak{X}(M)$ tiene estructura lineal utilizando a los elementos de $F(M)$ como *'escalares'*.

[6] Con nuestras definiciones, ahora $V = T_pM,\ K = \mathbb{R}$

[7] No es conmutativo en general.

Teorema 2.3. *Sea $\boldsymbol{x} = (x^1, ..., x^n)$ un sistema de coordenadas sobre Dom$(\boldsymbol{x}) \subset M$. Si $A \in T_s^r(M)$ y $A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s}$ son sus componentes tensoriales relativas a $\boldsymbol{x}$, entonces*

$$A = \sum_{1 \le i_k, j_k \le n} A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} \partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_s}. \tag{2.2}$$

Es decir, dado un sistemas de coordenadas, podemos identificar un tensor con sus componentes: $A \equiv A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s}$. Para campos vectoriales y uno-formas, $X = \sum X(x^i)\partial_i \equiv X^i$, $\theta = \sum \theta(\partial_i)dx^i \equiv \theta_i$.

La descripción tensorial en componentes es la habitualmente empleada en textos de Relatividad General. Por el teorema 2.3, podemos identificarlas con el campo tensorial, fijada una carta, pero más aún, podemos comprobar si un conjunto de funciones son las componentes de un campo tensorial con el siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Sean $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$' dos sistemas de coordenadas, y $T^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} \in F(M)$, definidas sobre Dom$(\boldsymbol{x}) \cap$ Dom$(\boldsymbol{x}') \neq \emptyset$. Si definimos $T := \sum T^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} \partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_s}$, se tiene que $T \in T_s^r(M)$ si y solo si*

$$T'^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} = \sum_{1 \le i_k, j_k \le n} \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \cdots \frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}} \frac{\partial x^{l_2}}{\partial x'^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial x'^{j_s}} T^{k_1,...,k_r}_{l_1,...,l_s}. \tag{2.3}$$

De aquí que una igualdad entre tensores del mismo tipo, en términos de sus componentes,

$$A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} = B^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s}, \tag{2.4}$$

se verifica en un sistema de coordenadas si y solo si se verifica en cualquier otro. Esto justifica en parte la introducción del álgebra tensorial en Relatividad General. Los fenómenos físicos descritos en términos de sus ecuaciones deben ser ciertos en cualquier sistema de referencia.

Convenio de sumación de Einstein Fijado un sistema de coordenadas, trabajar con componentes tensoriales nos permite agilizar la notación y plantear la igualdad entre tensores en términos de ecuaciones en vez de hacerlo en términos de aplicaciones. Con este propósito, utilizaremos el *convenio de sumación de Einstein*, que consiste en omitir el símbolo sumatorio cuando haya un subíndice y un superíndice repetidos, por ejemplo $\sum_i a_i b^i \equiv a_i b^i$, $\sum_i \sum_j a_i b_j c^i d^j \equiv a_i b_j c^i d^j$, etc.

Definición 2.9. Dado un tensor $A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s}$, se define su contracción en los índice (i, j) como el tensor de componentes

$$A^{i_1...m...i_r}_{j_1...m...j_s},$$

donde m sustituye a los índice (i, j). Se puede probar que verifica la regla de transformación de tensores, y por lo tanto es un tensor de tipo $(r-1, s-1)$.

2.3. Cálculo tensorial

En términos de querer plantear ecuaciones diferenciales tensoriales, nos interesa poder definir sobre ellos algún tipo de derivación que sea consistente con una estructura geométrica más general que la euclídea usual. Es decir, queremos un nuevo tipo de derivación que extienda a la derivada usual y que nos devuelva un tensor después de aplicarla. Tomemos por ejemplo un campo vectorial $X = X^i \partial_i$. Dado que sus componentes tensoriales X^i se transforman bajo cambios de coordenadas como $X'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} X^j$, tenemos que

$$\frac{\partial X'^i}{\partial x'k} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^p}{\partial x'k} \frac{\partial X^j}{\partial x^p} + \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^p \partial x^j} \frac{\partial x^p}{\partial x'k} X^j. \tag{2.5}$$

Es decir, lo que obtenemos al aplicar una derivada parcial usual a un tensor, no nos resulta un tensor en general.

Geométricamente lo que está pasando es que cuando derivamos en $\mathbb{R}^n$, implícitamente estamos comparando vectores en el mismo espacio tangente, lo que no es cierto en una variedad, cuyo espacio tangente cambia en cada punto. Lo que necesitamos es una nueva herramienta matemática que nos permita comparar vectores de distintos espacios tangentes.

Definición 2.10. Se define un operador $\overline{\nabla}$ *derivada covariante* sobre M como una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \overline{\nabla}: & T^r_s(M) & \longrightarrow & T^r_{s+1}(M) \\ & T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s} & \longmapsto & \overline{\nabla}_c T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s}, \end{array}$$

verificando:

- Linealidad: Si $A,B \in T^r_s(M)$, y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\nabla}_c(\alpha A^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s} + \beta B^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s}) = \alpha \overline{\nabla}_c A^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s} + \beta \overline{\nabla}_c B^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s}. \tag{2.6}$$

- Regla de Leibnitz: Si $A \in T^r_s(M), B \in T^{r'}_{s'}(M)$,

$$\overline{\nabla}_c[A^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s} B^{a_1\dots a_{r'}}_{b_1\dots b_{s'}}] = \overline{\nabla}_c[A^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s}] B^{a_1\dots a_{r'}}_{b_1\dots b_{s'}} + A^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s}[\overline{\nabla}_c B^{a_1\dots a_{r'}}_{b_1\dots b_{s'}}]. \tag{2.7}$$

- Conmutatividad con la contracción: Si $A \in T^r_s(M)$,

$$\overline{\nabla}_c(A^{a_1\dots m\dots a_r}_{b_1\dots m\dots b_s}) = (\overline{\nabla}_c A)^{a_1\dots m\dots a_r}_{b_1\dots m\dots b_s}. \tag{2.8}$$

- Consistencia con la derivación de campos vectoriales sobre funciones diferenciables: Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in F(M)$,

$$X(f) = X^c \overline{\nabla}_c(f). \tag{2.9}$$

- Torsión nula[8]: Si $f \in F(M)$,

$$\overline{\nabla}_a \overline{\nabla}_b f = \overline{\nabla}_b \overline{\nabla}_a f. \tag{2.10}$$

Proposición 2.2. Sea $\overline{\nabla}$ un operador derivada covariante sobre M. Existen funciones diferenciables (*símbolos de Christoffel*) $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ completamente determinadas por $\overline{\nabla}$, tales que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_c A^{a_1 i_2\dots a_r}_{b_1 b_2\dots b_s} &= \frac{\partial A^{a_1 a_2\dots a_p}_{b_1 b_2\dots b_s}}{\partial x^c} + \overline{\Gamma}^{a_1}_{mc} A^{m a_2\dots a_r}_{b_1 b_2\dots j_s} + \overline{\Gamma}^{a_2}_{mc} A^{a_1 m a_3\dots a_r}_{b_1 b_2\dots b_s} + \cdots \\ \cdots + \overline{\Gamma}^{a_r}_{mc} A^{a_1 a_2\dots a_{p-1} m}_{b_1 b_2\dots b_s} &- \overline{\Gamma}^m_{b_1 c} A^{a_1 a_2\dots a_r}_{m b_2\dots b_s} - \overline{\Gamma}^m_{b_2 c} A^{a_1 a_2\dots a_r}_{b_1 m\dots b_s} - \cdots - \overline{\Gamma}^m_{b_s c} A^{a_1 a_2\dots a_r}_{b_1 b2\dots b_{s-1} m}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Para el caso particular de campos vectoriales, y uno-formas

$$\overline{\nabla}_c X^j = \frac{\partial X^j}{\partial x^c} + \overline{\Gamma}^j_{kc} X^k, \qquad \overline{\nabla}_c Y_j = \frac{\partial Y_j}{\partial x^c} - \overline{\Gamma}^i_{jc} Y_i. \tag{2.12}$$

Vemos entonces que la derivada covariante consiste en la derivada parcial usual mas un factor de corrección dado por los símbolos de Christoffel. Observar que para el caso particular en que estos se anulan, la derivada covariante se reduce a la derivada parcial usual.

[8] Se puede ver que la magnitud T^c_{ab} que resulta de $-T^c_{ab}\overline{\nabla}_c f = \overline{\nabla}_a \overline{\nabla}_b f - \overline{\nabla}_b \overline{\nabla}_a f$ en un tensor antisimétrico en a y b (*tensor de torsión*). En algunas teorías más generales, en la definición se de derivada covariante, se omite esta condición.

Transporte paralelo

Definición 2.11. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto conexo. Una *curva* sobre M es una aplicación $c : I \longrightarrow M$ diferenciable. Un *campo tensorial (contravariante) a lo largo de c* como una aplicación $\lambda \longmapsto X^k(c(\lambda))$, donde X^k un tensor de tipo $(1,0)$. Denotamos $\mathfrak{X}(c) = \{X^k(c(\lambda))|\ X^k \text{campo tensorial a lo largo de } c\}$.

Proposición 2.3. Sea $c(\lambda)$ una curva sobre M con dominio $I \subset \mathbb{R}$. Dada una conexión $\overline{\nabla}$, la aplicación *derivada covariante a lo largo de c asociada a* $\overline{\nabla}$, $\overline{D} : \mathfrak{X}(c) \longrightarrow \mathfrak{X}(c)$, dada por

$$\frac{\overline{D}V^k}{d\lambda} = \frac{dV^k}{d\lambda} + V^j \frac{dx^i}{d\lambda}\overline{\Gamma}^k_{ij}, \tag{2.13}$$

verifica condiciones de linealidad y la regla de Leibnitz. Es decir, si $V^k, W^k \in \mathfrak{X}(c)$ y $f \in F(I)$, entonces

$$\frac{\overline{D}}{d\lambda}(V^k + W^k) = \frac{\overline{D}V^k}{d\lambda} + \frac{\overline{D}W^k}{d\lambda}, \qquad \frac{\overline{D}}{d\lambda}(fV^k) = \frac{df}{d\lambda}V^k + f\frac{\overline{D}V^k}{d\lambda}. \tag{2.14}$$

Definición 2.12. Con la misma notación

- Al campo $\frac{\overline{D}V^k}{d\lambda}$ se le dice *derivada covariante de* V^k *a lo largo de c*.
- Un campo vectorial a lo largo de c, $V^k \in \mathfrak{X}(c)$ se dice que es *paralelo* cuando $\frac{\overline{D}V^k}{d\lambda} = 0, t \in I$.

Proposición 2.4. Sea c una curva sobre M, y V_o un vector tangente a M en $c(t_0)$, es decir $V_o \in T_{c(t_0)}M$. Entonces existe un único campo vectorial $V^k \in \mathfrak{X}(c)$ paralelo, tal que $V^k(t_o)\partial_k = V_o$. Se dice que V^k es el *transporte paralelo* de V_o a lo largo de c.

Demostración. Se basa esencialmente en los teoremas de existencia y unicidad para problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales. Ver [5]. □

Nota. A pesar de que la derivada covariante resuelva el problema de encontrar algún tipo de operador diferenciable que nos devuelva un tensor y que extienda a la derivada parcial usual, no resuelve el problema de la unicidad. Dadas dos derivadas covariantes $\overline{\nabla}_1, \overline{\nabla}_2$ definidas sobre M, tendríamos, en principio, dos formas de derivar tensores, y en particular dos maneras de transportar paralelamente un vector a lo largo de una curva ya que las ecuaciones diferenciales que se plantean siempre son relativas a $\overline{\nabla}_1$, $\overline{\nabla}_2$. Esto motiva a buscar una conexión privilegiada en algún sentido, quizá añadiendo más condiciones a la definición. De nuevo, la geometría de variedades va a resolver por completo este problema añadiendo una estructura más sobre M, una *métrica*. Esto nos introduce en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Variedades semi-Riemannianas

La estructura de variedad diferenciable no es suficiente para definir una única extensión de la derivada parcial. Añadir una estructura más sobre M resuelve el problema. Por otra parte, esta estructura extra resulta natural en un espacio geométrico y es una generalización de lo que intrínsecamente nos permite, en el espacio euclídeo usual, tener definidas nociones precisas de lo que significa medir longitudes, calcular áreas, medir ángulos, etc.

3.1. Tensores métricos sobre variedades

Definición 3.1. Sea M una variedad diferenciable. Un *tensor métrico* g es un campo tensorial de tipo $(0,2)$, simétrico y de *índice*[1] constante y no degenerado. Una *variedad semi-Riemanniana n-dimensional* es un par (M,g), donde M es una variedad de dimensión n y g es un tensor métrico sobre M. Para el caso en que $v=1$ y $n \geqslant 2$, (M,g) se dice *variedad de Lorentz.*

Por el Teorema (2.2), para cada $p \in M$, el tensor métrico g induce una aplicación

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \ni g_p(v_1,v_2) := g(V_1,V_2), \tag{3.1}$$

para cualesquiera v_1, v_2, y $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $V_1(p)=v_1, V_2(p)=v_2$, que es una forma bilineal simétrica sobre el espacio vectorial T_pM (Es decir, g_p es un tensor de tipo $(0,2)$ sobre T_pM). La condición de índice constante indica que su forma cuadrática es del mismo tipo para todo $p \in M$.

Nota. Se suele escribir $g(v,w) := \langle v,w \rangle$, y $g(v,v) = |v|^2$, por abuso de notación, en analogía al producto escalar usual, sin perder de vista que estas cantidades escalares pueden ser positivas, negativas o nulas.

Componentes tensoriales del tensor métrico Por definición $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, y por la descomposición en términos de las componentes tensoriales, para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$g(X,Y) = g_{ij}dx^i \otimes dx^j(X,Y) = g_{ij}dx^i(X)dx^j(Y) = g_{ij}X(x^i)Y(x^j) = g_{ij}X^iY^j. \tag{3.2}$$

Además, $g_{ij} = g_{ji}$ por la simetría de g, y para cada $p \in M$; y por ser no degenerado, podemos definir la matriz $g^{ij}(p) := (g_{ij}(p))^{-1}$. Vamos a usar esta descripción de g en términos de sus componentes para definir lo que es un *elemento de línea*.

Elemento de línea y ecuación de la métrica Dado un sistema de coordenadas $\mathbf{x}$, y $p \in Dom(\mathbf{x}) \subset M$, para todo $v \in T_pM$, denotamos q_v a su forma cuadrática asociada. Dado que

$$g_p(v,w) = \frac{1}{2}(q_p(v+w) - q_p(v) - q_p(w)), \tag{3.3}$$

[1]El *índice* de una forma bilineal simétrica es la dimensión del mayor subespacio para el cual es definido negativo.

tenemos que g queda determinada por su forma cuadrática. Se le dice *elemento de línea* y se denota $q = ds^2$ por el siguiente motivo. Observar que si tenemos dos puntos $p, p' \in Dom(\mathbf{x})$ dos puntos cercanos con coordenadas $p = (x^1, \cdots, x^n), p' = (x^1 + \Delta x^1, \cdots, \Delta x^n)$, entonces, para el campo $\Delta = \Delta^i \partial_i \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos que

$$|\Delta_p|^2 = g(\Delta_p, \Delta_p) = g_{ij}(p)\Delta^i(p)\Delta^j(p). \tag{3.4}$$

De aquí se define la *ecuación de la métrica* como

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j. \tag{3.5}$$

Subir y bajar índices con la métrica Se puede comprobar que las magnitudes

$$X_i = g_{ik}X^k, \qquad Y^i = g^{ik}Y_k, \tag{3.6}$$

verifican la regla de transformación tensorial, por lo tanto, son tensores con índices covariantes, contravariantes obtenidos a partir índices contravariantes, covariantes, respectivamente; lo que hace que usualmente se llame a esta operación 'subir y bajar índices con la métrica'. Además, la subir y después bajar un índice te devuelve el mismo tensor, y viceversa, es decir, son operaciones inversas. Este hecho se respalda en una propiedad característica de variedades semi-Riemannianas.

Proposición 3.1. Sea M una variedad semi-Riemanniana. La aplicación $* : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M) \ni V \longmapsto V^*(X) := \langle V, X\rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(M)$, es un $F(M)$*-isomorfismo lineal*. En particular, en una variedad semi-Riemanniana podemos identificar campos vectoriales con uno-formas.

Para el caso particular de un tensor de tipo $(1,3)$, se puede conseguir su forma, equivalente, totalmente covariante a partir de la métrica,

$$T_{ijkl} = g_{im}T^m_{ijkl}. \tag{3.7}$$

3.2. Derivada covariante de Levi-Civita

En el capítulo anterior, hemos introducido la *derivada covariante* como un operador diferenciable sobre campos vectoriales que extiende a las derivadas parciales usuales, sin embargo, dados dos conexiones distintas, tenemos dos maneras de operar diferenciablemente. Esto no será un problema, si (M, g) es una variedad semi-Riemanniana, hay una derivada covariante privilegiada. Este es un importante resultado de geometría diferencial. Puede verse una demostración, por ejemplo, en [8].

Teorema 3.1. *Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana. Existe un único operador derivada covariante que verifica $\nabla_k g_{ij=0}$ (compatibilidad con la métrica).*

Definición 3.2. A la conexión ∇ descrita por el Teorema 3.1 se le dice *derivada covariante de Levi-Civita de la variedad semi-Riemanniana (M, g)*.

Proposición 3.2. Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana. Los símbolos de Christoffel asociados a la derivada covariante de Levi-Civita son:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}\left[\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right]. \tag{3.8}$$

Nota (Simetría de los símbolos de Christoffel)**.** La simetría de la derivada covariante jugará un papel clave de aquí en adelante. De momento ya podemos decir que en una variedad semi-Riemanniana tenemos $\frac{n(n+1)}{2}$ símbolos de Christoffel independientes en lugar de n^3.

3.3. Geodésicas en variedades semi-Riemannianas

En geometría euclídea, entendemos curvas geodésicas como aquellas cuyo vector tangente permanece constante, o como aquellas que extremizan[2] la distancia entres dos puntos. Vamos a generalizar estas características. Empezamos con un resultado que desvela en parte la condición de compatibilidad con la métrica. Su demostración puede verse en [5].

Lema 3.1. Sea (M,g) una variedad semi-Riemanniana y ∇ su conexión asociada. Si c es una curva sobre M, y $V^k, W^k \in \mathfrak{X}(c)$, entonces

$$\frac{d}{d\lambda}\langle V^k, W^k\rangle = \langle \frac{DV^k}{d\lambda}, W^k\rangle + \langle V^k, \frac{DW^k}{d\lambda}\rangle. \tag{3.9}$$

Definición 3.3. Sea $\mathbf{x}$ un sistema de coordenadas. Dado una curva c sobre M, definimos *vector velocidad* como el campo vectorial (verifica la regla de transformación) $c' \in \mathfrak{X}(c)$ dado por[3]

$$c'(\lambda) = \frac{d(x^i \circ c)}{d\lambda}(\lambda) \tag{3.10}$$

Nota. De la Proposición 2.3, tenemos una derivada covariante a lo largo de una curva unívocamente determinada por g, y dada por[4]

$$\frac{DV^k}{d\lambda} = \frac{dV^k}{d\lambda} + V^j \frac{dx^i}{d\lambda}\Gamma^k_{ij}. \tag{3.11}$$

Definición 3.4. Con las mismas notaciones

- Al campo $\frac{DV^k}{d\lambda}$ se le dice *derivada covariante de V a lo largo de c*.
- Se dice que $V^k \in \mathfrak{X}(c)$ es *paralelo* cuando $\frac{DV^k}{d\lambda} = 0$.
- Para el caso particular en que $V^k = c'$ se dice que $\frac{DV^k}{d\lambda} = c''$ es la *aceleración* de la c.
- Y una curva c es una *geodésica afín* cuando su vector velocidad o campo vectorial tangente es paralelo, es decir, cuando $c'' = 0$

La condición (formal) de imponer que la derivada covariante del vector tangente sea nula es la que buscábamos. Además, la derivada covariante a lo largo de una curva nos permite definir lo que significa transportar *'paralelamente'* un vector a lo largo de una curva.

Nota. Solo con un operador derivada covariante $\overline{\nabla}$ definido sobre M, se pueden definir curvas geodésicas, pero como ya hemos comentado, siempre serían relativas a $\overline{\nabla}$ y perderíamos una interpretación física clara.

Transporte paralelo y noción de curvatura (adelanto) En una variedad semi-Riemanniana (M,g), el resultado de hacer transporte paralelo de un vector $V_o \in T_pM$ a lo largo de una curva cerrada, no es el mismo vector en general. (En el espacio euclídeo usual sí). Veremos que esta característica de las variedades semi-Riemannianas nos servirá para dar una definición acerca de cuando podemos decir que un espacio (M,g) es *curvo* o *plano*.

[2] En variedad Riemannianas índice $\nu = 0$, extremizar se traduce en minimizar.
[3] Por abuso de notación, usaremos indistintamente según convenga $c = c(\lambda) = (x^1(\lambda), \ldots, x^n(\lambda)) = x^i(\lambda) = x^i$.
[4] Para campos tensoriales covariantes, se define de manera análoga, resultando $\frac{DV_i}{d\lambda} = \frac{dV_k}{d\lambda} - V_k \frac{dx^j}{d\lambda}\Gamma^k_{ij}$.

Cálculo de geodésicas Para calcular de manera explícita qué condiciones debe cumplir una curva c para que sea geodésica a partir de su definición, por la ecuación 3.11 tenemos que

$$0 = \frac{D}{d\lambda}(\frac{dc}{d\lambda}) = \frac{d^2x^k}{d\lambda^2} + \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}\Gamma^k_{ij}, \tag{3.12}$$

Y de aquí, que si $\mathbf{x} = (x^1, ..., x^n)$ un *sistema de coordenadas* sobre $Dom(\mathbf{x})$. Una curva c es *geodésica* si y solo si sus *funciones coordenadas* $x^k \circ \gamma$ satisfacen las n ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{d(x^i \circ \gamma)}{d\lambda}\frac{d(x^j \circ \gamma)}{d\lambda} = 0, \qquad 1 \leq k \leq n. \tag{3.13}$$

Para determinar la naturaleza del parámetro λ, multiplicando por $2g_{ip}\frac{dx^p}{d\lambda}$ y mediante manipulaciones algebraicas, se tiene que[5] $2g_{ip}\frac{d^2x^i}{d\lambda^2}\frac{dx^p}{d\lambda} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^j}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^p}{d\lambda} = 0$, de donde una integral primera es

$$g_{ip}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^p}{d\lambda} = \kappa(\text{cte}). \tag{3.14}$$

Por lo tanto, si α es otro parámetro (*parámetro afín*), debe de ser

$$\alpha = a\lambda + b, \qquad (a \neq 0). \tag{3.15}$$

Nota. En el siguiente capítulo daremos una clasificación, de interpretaciones físicas, para las geodésicas según el valor de constante κ.

Propiedad extremizante de las geodésicas La segunda característica que poseen las geodésicas en el espacio euclídeo usual es la de ser curvas que extremizan la distancia entre dos puntos. Aunque aparentemente es un propiedad distinta de la que hemos comentado, en variedad semi-Riemannianas son equivalentes.

Sean $p, q \in M$. Para simplificar la situación, supongamos que ambos puntos están en un mismo $Dom(\mathbf{x})$, y sea $c(s)$ una curva parametrizada por el arco, con $s \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ y tal que $c(a) = p, c(b) = q$. Una variación de c es una aplicación diferenciable

$$\begin{array}{rccc} H: & (-\varepsilon, \varepsilon) \times (a - \varepsilon, b + \varepsilon) & \longrightarrow & M \\ & (t, s) & \longmapsto & H_t(s), \end{array}$$

tal que para todo $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$, $H_t(a) = c(a), H_t(b) = c(b)$, y también $H_0(\lambda) = c(\lambda)$. Es decir, podemos entender la imagen de H como el conjunto de curvas que, fijando $p = c(a), q = c(b)$, varían c diferenciablemente en un entorno (es el análogo diferencial de una homotopía topológica). Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ fijo, tenemos definida la longitud de la curva de p a q,

$$long(H_t) = \int_a^b \sqrt{\langle \frac{\partial H_t}{\partial \lambda}(\lambda), \frac{\partial H_t}{\partial \lambda}(\lambda) \rangle} d\lambda. \tag{3.16}$$

Y se dice que la curva c *extremiza la distancia* si $\frac{d(long(H_s))}{ds}|_{s=0} = 0$. Se puede probar, ver [4], que c es geodésica si y solo si extremiza la longitud[6]. En particular, ambos generalizaciones del concepto de geodésica en el espacio euclídeo usual son equivalentes en variedades semi-Riemannianas.

3.4. Tensores de curvatura

Ya tenemos una estructura matemática que nos va a permitir tener un concepto preciso de curvatura.

[5] Los detalles pueden verse en [1].

[6] Veremos en el Capítulo 4 que el signo de $\langle \frac{\partial H_t}{\partial \lambda}(\lambda), \frac{\partial H_t}{\partial \lambda}(\lambda) \rangle$ permanece fijo a lo largo de toda la geodésica, con lo que la integral 3.16 está bien definida simplemente cambiando el signo si el argumento de la raiz es negativo, y la variación H puede definirse en un entorno de $t = 0$ donde el signo no cambie.

Tensor de curvatura de Riemann

Definición 3.5. Se define el *tensor de curvatura de Riemann*, como el tensor de componentes

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kl} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}. \tag{3.17}$$

Nota. A pesar de que los símbolos de Christoffel no verifican la regla de transformación tensorial, si lo verifica el tensor de curvatura de Riemann. Se puede comprobar de manera directa.

El tensor de curvatura de Riemann es de tipo $(1,3)$, por lo que en principio habrá n^4 componentes independientes (Para $n = 4$, tendríamos 256 componentes). Sin embargo, se presentan algunas propiedades de simetría, que como veremos enseguida, además de reducir el número de componentes, son útiles para otros propósitos. Para hacer más visibles estas propiedades, podemos tratar con su versión completamente covariante utilizando la fórmula 3.7,

$$R_{ijkl} = g_{im}R^m_{ijkl}. \tag{3.18}$$

Proposición 3.3. El tensor de curvatura de Riemann verifica las siguientes propiedades,

- Simetría y antisimetría

$$R_{ijkl} = R_{klij}, \qquad R^l_{ijk} = -R^l_{jik}, \qquad R_{ijkl} = -R_{ijlk}. \tag{3.19}$$

- Identidades de Bianchi

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0, \qquad \nabla_i R_{jkhl} + \nabla_j R_{kihl} + \nabla_k R_{ijhl} = 0. \tag{3.20}$$

Demostración. Comprobación directa utilizando la expresión 3.17. □

Corolario 3.1. Se puede comprobar, a través de estas identidades, que el número de componentes independientes del tensor de curvatura de Riemann se reduce a $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ (para $n = 4$, serán 20), lo que reduce enormemente los cálculos. Un argumento detallado valiéndose de estas propiedades puede verse en [3].

Interpretaciones geométricas del tensor de curvatura de Riemann

Vamos a darle sentido a por qué un objeto tan concreto como lo es R^i_{jkl} recibe nos permite definir de manera razonable un concepto de curvatura para (M,g).

Definición 3.6. Una variedad semi-Riemanniana (M,g) se dice que es *plana* cuando las componentes del tensor de Riemann $R^i_{jkl} = 0$.

Teorema 3.2. *Son equivalentes:*

1) *El resultado de transportar paralelamente un vector a lo largo de toda curva cerrada es el mismo vector.*

2) *Las componentes del tensor de Riemman son nulas:* $R^i_{kjl} = 0$.

3) *Las derivadas covariantes conmutan.*

4) *Existe un sistema de coordenadas en el cual el tensor métrico es constante.*

Demostración. En términos de componentes, desarrollando se llega mediante operaciones algebraicas y propiedades de simetría a

$$\nabla_{\partial_l}(\nabla_{\partial_k}X^j) - \nabla_{\partial_k}(\nabla_{\partial_l}X^j) = R^j_{ilk}X^i, \tag{3.21}$$

de donde se puede observar que las derivadas covariantes conmutan si y solo si las componentes del tensor de Riemann son nulas. En geometría euclídea, esto se traduce a que las derivadas parciales conmutan, pues para g constante, los símbolos de Christoffel son nulos y de aquí que la derivada covariante se reduzca a la derivada parcial, y las componentes del tensor de Riemann también por la ecuación 3.17.

Por otro lado, como ya hemos comentado, el resultado de hacer transporte paralelo de un vector $V_o \in T_pM$ a lo largo de una curva cerrada, no es el mismo vector en general. Veamos cómo el tensor de curvatura de Riemann está íntimamente relacionado con esta cuestión.

Sea $p \in M$, y $\mathbf{x}$ tal que $p \in Dom(\mathbf{x})$. Por tratarse de un abierto, siempre podemos tomar un camino cerrado $x^i(\lambda)$, $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, lo suficientemente pequeño como para que esté totalmente contenido en $Dom(\mathbf{x})$, y tal que $x^i(0) = p = x^i(\lambda_1)$, para algún λ_1 en el dominio de la curva. Además, la región de M donde está contenida la imagen de la curva está identificada con $\mathbb{R}^n$ mediante la carta, luego podemos trasladar los cálculos que hagamos a $\mathbb{R}^n$ y suponer que $x^i(0) = 0 = x^i(\lambda_1)$. Tomemos un vector $V_o \in T_pM$, por la Proposición 2.4, existirá un (único) campo vectorial (que lo podemos tomar en su versión covariante por la Proposición 3.1) $V_k \in \mathfrak{X}(c)$ tal que $\frac{DV_k}{d\lambda} = 0$ a lo largo de c. Así, por la fórmula 2.13 obtenemos la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dV_i(x(\lambda))}{d\lambda} = \Gamma^k_{ij}(x(\lambda))\frac{dx^j(\lambda)}{d\lambda}V_k(x(\lambda)). \tag{3.22}$$

Así, dada la curva $x^i(\lambda)$ y un vector inicial $V_o = V_i(0)$, tenemos determinada el valor de $V_k(\lambda)$, y en particular $V_k(\lambda_1)$. Veamos cuál es la variación

$$\Delta V = V_i(\lambda_1) - V_i(0). \tag{3.23}$$

Observar que la podemos escribir, utilizando la ecuación 3.22, como

$$\Delta V = \int_0^{\lambda_1} \frac{dV_i(\lambda)}{d\lambda}d\lambda = \int_0^{\lambda_1} \Gamma^k_{ij}\frac{dx^j}{d\lambda}V_k d\lambda, \tag{3.24}$$

y desarrollando en serie de Taylor, tenemos

$$x^j(\lambda) = x^j(0) + \left.\frac{dx^j}{d\lambda}\right|_0 (\lambda - 0) + \cdots = \left.\frac{dx^j}{d\lambda}\right|_0 \lambda + \cdots \tag{3.25}$$

Además, podemos considerar que la curva es lo suficientemente pequeña como para que podamos considerar despreciables los términos de orden superior (sino, siempre se puede hacer más pequeña, en este sentido). Para la conexión afín (está definida en todo el entorno, no solo en la curva)

$$\Gamma^k_{ij}(x) = \Gamma^k_{ij}(0) + x^h \left.\frac{\partial \Gamma^k_{ij}(x)}{\partial x^h}\right|_0 + \cdots \tag{3.26}$$

Y de nuevo, utilizando la ecuación 3.22,

$$V_i(\lambda) = V_i(0) + \Gamma^l_{ij}(0)\frac{dx^j}{d\lambda}\lambda V_k(0) + \cdots = V_i(0) + \Gamma^l_{ij}(0)x^j(\lambda)V_k(0) + \cdots \tag{3.27}$$

De donde se llega a

$$\int_0^{\lambda_1} \left[\Gamma^k_{ij}(0) + x^h\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^h}\right] \left[V_k(0) + \Gamma^l_{kh}(0)x^h V_l(0)\right] \frac{dx^j}{d\lambda}d\lambda + \cdots \tag{3.28}$$

Ahora, despreciando términos de segundo orden y reordenando (los detalles pueden verse en [9]) obtenemos

$$\boxed{\Delta V_i = \frac{1}{2} R^l_{ijh} V_l(0) \oint x^h dx^j} \tag{3.29}$$

Siendo

$$\oint x^h dx^j = \int_0^{\lambda_1} x^h \frac{dx^j}{d\lambda} d\lambda, \tag{3.30}$$

no nula en general, lo que demuestra 1) si y solo si 2). Para el caso en que la curva sea más grande, solo hay que tener en cuenta que si hacemos transporte paralelo de un vector $V_o \in T_pM$ a través de una curva no cerrada desde p a p' y luego volvemos a p, obtenemos siempre V_o como consecuencia de la unicidad de la Proposición 2.4, luego si la curva es más grande, basta con dividirla en curvas cerradas más pequeñas, y por esta apreciación, el resultado de efectuar el transporte paralelo a través de la curva cerrada entera y los bucles más pequeños, no se verá alterado.

Hemos argumentado $1), 2)$ y $3)$, que junto con $4)$ pueden encontrarse en detalle en varios textos relacionados, por ejemplo [9].

□

Tensor de Ricci, y escalar de curvatura

Dada la descripción geométrica del tensor de curvatura de Riemann, podemos pensar que a través de sus componentes tenemos una descripción geométrica del espacio, así como a través de los símbolos de Christoffel tenemos una descripción directa de cómo son las curvas geodésicas. Vamos a construir otros dos tensores a partir del tensor de Riemann que aparecerán en las ecuaciones de Einstein.

Se puede comprobar de manera directa que el tensor de curvatura de Riemann solo tiene dos contracciones no triviales, por ejemplo, (utilizando que $\Gamma^j_{jk} = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x^k}$) si contraemos

$$R^i_{ijl} = \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^i_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{ij} + \Gamma^i_{il}\Gamma^m_{mj} - \Gamma^i_{ij}\Gamma^m_{mj} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}) - \frac{\partial}{\partial x^l}(\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x^l}) + \Gamma^i_{il}\Gamma^m_{mj} - \Gamma^i_{ij}\Gamma^m_{ml} = 0. \tag{3.31}$$

Sin embargo, si contraemos

$$R^i_{ijl} = \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^i_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^l_{ij} + \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{ml}, \tag{3.32}$$

que no será nula en general. Para la otra contracción no trivial posible se tiene

$$R^i_{ijl} = -R^i_{ijl}. \tag{3.33}$$

Definición 3.7. Fijando un signo, el tensor obtenido en la ecuación 3.33 se denomina *tensor de curvatura de Ricci* ($Ric = C^1_3 R \in T^2_0 M$,), que será simétrico debido a las propiedades de simetría de R^i_{jkl}. El *escalar de curvatura* se define como la (única) contracción del tensor de Ricci sobre sus dos índices.

$$R = g^{ij} R_{ij}.$$

Nota. Aunque el tensor de Ricci sea la única contracción no trivial (salvo el signo) del tensor de curvatura de Riemann, este no contiene toda su información. Es decir $R_{ij} = 0$ no es equivalente a ninguna de las condiciones del Teorema 3.2. A las métricas tales que verifiquen esta condición se les dice *Ricci planas* (Minkowski, por ejemplo). En el Capítulo 4 vamos a ver un ejemplo concreto de una métrica Ricci plana no trivial.

Capítulo 4

Relatividad General

4.1. Variedad espacio-tiempo

Aunque en el contexto de geometría semi-Riemanniana se trata con variedades con métrica de índice v constante, en Relatividad General, nos restringimos a variedades de tipo Lorentz para recuperar en un entorno de cada punto el espacio de Minkowski. Y dado que nuestra variedad es un objeto geométrico con un espacio vectorial en cada punto, lo primero será imponer algunas condiciones de suavidad.

Lema 4.1. Sea $(\mathscr{M}, \eta_{ij})$ el espacio de Minkowski de dimensión $n = 4$.

- El subconjunto de $\mathscr{M}$ formado por todos los vectores temporales tiene dos componentes conexas. Se denominan *conos temporales*.
- El subconjunto de $\mathscr{M}$ formado por todos los vectores luminosos tiene dos componentes conexas. Se denominan *conos de luz*.

Definición 4.1. Sea (M, g) una variedad de Lorentz, y $p \in M$. Un *orientación* temporal del espacio tangente T_pM es una elección $\mathscr{T}_p$ de uno de los dos *conos temporales* de T_pM. $\mathscr{T}_p$ se dice *cono futuro* y $-\mathscr{T}_p$ *cono pasado*.

Definición 4.2. Sea (M, g) una variedad de Lorentz (Definición 3.1). Una *orientación temporal* sobre M es una aplicación que a cada $p \in M$ asigna una orientación temporal $\mathscr{T}_p$ verificando que $\forall p \in M$, y $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, existe un entorno U de p tal que , para todo $q \in U$, $X_q \in \mathscr{T}_q$. Se dice que M es *orientable temporalmente* si admite una orientación temporal.

Definición 4.3. Un *espacio-tiempo* (M, g) es una variedad de Lorentz 4-*dimensional*, conexa y orientada temporalmente. A cada punto $p \in M$ se le dice *evento*.

Clasificación de geodésicas en un variedad espacio-tiempo En analogía al espacio de Minkowski, en una variedad espacio-tiempo, tenemos bien definidas las siguientes nociones en función de la constante κ dada en la fórmula 3.14.

- Geodésica de tipo espacio, si $\kappa > 0$.
- Geodésica de tipo tiempo, si $\kappa < 0$.
- Geodésica nula, si $\kappa = 0$.

Proposición 4.1. Una geodésica de tipo tiempo (nulo, espacio) en un punto, lo sigue siendo en todo punto.

Demostración. Sea $c(\tau)=x^i(\tau)$ una geodésica. De la definición de geodésica y utilizando el Lema (3.1) tenemos que

$$\frac{d}{dt}\langle\frac{dx^i}{dt},\frac{dx^i}{dt}\rangle = 2\langle c'',\frac{dx^i}{dt}\rangle = 0 \tag{4.1}$$

luego, a lo largo de la geodésica,

$$\kappa = g_{ip}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^p}{d\tau} = \langle\frac{dx^i}{d\tau},\frac{dx^i}{d\tau}\rangle = \text{cte.} \tag{4.2}$$

□

4.2. Principio de equivalencia

Principio de equivalencia: En un laboratorio que cae libremente y sin rotación ocupando una región pequeña del espacio tiempo, las leyes de la física son las de la Relatividad Especial.

Debido a la elección arbitraria de coordenadas, estas no tienen un significado físico directo, sin embargo, fijado un punto en la variedad, existen coordenadas 'privilegiadas' que van a dar un contenido matemático formal al principio de equivalencia.

Sea $p\in M$ y $\mathbf{x}$ un sistema de coordenadas tal que $p\in Dom(\mathbf{x})$. Siempre podemos encontrar un sistema de coordenadas donde el cambio $g'_{ij}=\frac{\partial x^a}{\partial x'^i}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}g_{ab}$ verifique

$$g'_{ij}(p)=\eta_{ij}, \tag{4.3}$$

siendo η_{ij} la métrica del espacio de Minkowski. En efecto, por ser g_p una matriz cuadrada, bilineal, y simétrica de signatura $(-1,1,1,1)$, existirá (Teorema de *Relación de Congruencia*) una matriz J regular de la misma forma bilineal congruente con η_{ij}, es decir $\eta_{ij}=Jg_pJ^T$. Sabiendo esto, y conociendo las componentes J_{ij}, basta tomar el cambio $x^i=J_{ij}x'^j$, y se verifica que $\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}=J$, $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}=J^T$.

En estas nuevas coordenadas x'^i, mediante una expansión en serie de Taylor en un entorno de $p\equiv x_0\in\mathbb{R}^n$,

$$g'_{ij}(x)=\eta_{ij}+\frac{\partial g'_{ij}}{\partial x'^k}(x'^k-x'_o)+\frac{\partial^2 g'_{ij}}{\partial x'^l\partial x'^h}(x'^l-x^l_o)(x'^h-x^h_o)+\cdots \tag{4.4}$$

De esta manera, recuperamos el espacio de Minkowski en p, y de manera aproximada, en un entorno suyo. Sin embargo, esta aproximación resulta ser aún mejor.

Teorema 4.1. *Sea (M,g) una variedad semi-Riemanniana de índice $v=1$ (variedad de Lorentz), y $p\in M$. Existe un sistema de coordenadas x'^i en un entorno de p en el que se verifica*

$$g'_{ij}(x)=\eta_{ij}+\frac{\partial^2 g'_{ij}}{\partial x'^l\partial x'^h}(x'^l-x^l_o)(x'^h-x^h_o)+\cdots \tag{4.5}$$

Demostración. Puede verse en [9]. □

Corolario 4.1. Sea (M,g) una variedad de Lorentz, y $p\in M$. Existe un sistema de coordenadas en el que las derivadas primeras de la métrica son nulas y se tiene una aproximación de orden cuadrático para puntos en un entorno de p al espacio de Minkowski. En particular, los símbolos de Christoffel Γ^i_{jk} son nulos en p, y la derivada covariante se puede identificar con la derivada parcial usual.[1]

Nota. Este es el resultado que nos da el contenido matemático preciso del principio de equivalencia.

[1] Ver ecuación 2.11.

4.3. Ecuaciones de Einstein

«El espacio le dice a la materia cómo moverse; la materia le dice al espacio cómo debe curvarse». John A. Wheeler.

La propuesta teórica de la Relatividad General pretende entender los efectos gravitacionales como una manifestación de la curvatura de una variedad de Lorentz M. Además, en el modelo se plantea que sea la materia la causante de esa curvatura, para esto último tenemos también una descripción precisa, como comentaremos, mediante el tensor energía-momento. Las ecuaciones de Einstein (1915) nos darán la relación que buscamos.

Nota (Tensor de energía-impulso)**.** En la teoría clásica de Newton la fuente de los efectos gravitatorios es la masa, y dado que en Relatividad Especial masa y energía son esencialmente lo mismo, podríamos pensar en la densidad de energía $\frac{E}{V}$ como fuente del campo. Se puede demostrar que esta magnitud es la componente T_{00} de un tensor simétrico de tipo $(0,2)$ $T_{\mu\nu}$ (*tensor de energía impulso*). Esta propiedad, junto con las deducciones acerca de cuales deben ser el resto de componentes del tensor y su propiedad simétrica, están basadas en consideraciones puramente físicas, y se escapan de los contenidos de este trabajo. Puede consultarse, por ejemplo [3].

Conociendo la descripción matemática que debe tener la fuente del campo gravitatorio, podemos esperar que las ecuaciones tomen la forma[2]

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{4.6}$$

donde $G_{\mu\nu}$ será un tensor que describa la curvatura del espacio (*tensor de Einstein*), $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-impulso, y κ una constante de proporcionalidad.

Tensor de Einstein Para obtener una expresión explícita del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, se le imponen ciertas condiciones razonables:

- $G_{\mu\nu}$ debe ser un tensor de tipo simétrico de tipo $(0,2)$, por serlo $T_{\mu\nu}$.
- $G_{\mu\nu}$ tiene que ser un objeto puramente geométrico, es decir, debe venir dado en función de la métrica $g_{\mu\nu}$.
- $G_{\mu\nu}$ debe contener segundas derivadas de la métrica para poder tener una teoría dinámica y recuperar la ecuación de Poisson
$$\nabla\Phi = 4\pi G_N \rho M.$$
- $G_{\mu\nu}$ debe ser lineal en el tensor de curvatura de Riemann para obtener una ecuación diferencial de segundo orden (y no más) en los potenciales gravitatorios.
- $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, de la ley de la conservación de energía y el momento[3], $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.
- $G_{\mu\nu} = 0$ para el espacio de Minkowski.

Se puede demostrar (ver [3]) que la expresión más general para un tensor simétrico de tipo $(0,2)$, construido por la métrica y sus derivadas, y que sea lineal en $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ es de la forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \alpha g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu}\Lambda, \tag{4.7}$$

[2] A partir de aquí seguimos el convenio usual de utilizar letras griegas como índices para describir las ecuaciones de Einstein, como es habitual en los textos de Relatividad General.

[3] Dado que en Relatividad Especial, la ecuación de la conservación de la energía y el momento tiene la forma $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, su generalización covariante será $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (principio de equivalencia).

donde α y Λ son constantes[4]. El límite newtoniano fija $\Lambda = 0$, y si además debe verificar el resto de condiciones, queda completamente determinado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{4.8}$$

Ecuaciones de Einstein (1915) Una comparación con la formulación newtoniana nos da el valor de la constante de proporcionalidad impuesta en la ecuación 4.6 como $\kappa = 8\pi G_N$, donde G_N es la constante de gravitación de Newton. Con esto, se tiene que

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G_N T_{\mu\nu}} \tag{4.9}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas de segundo orden. Las soluciones exactas conocidas hasta ahora son casos en los que hay presente condiciones de alta simetría. También puede obtenerse soluciones de modo aproximado, y más recientemente mediante métodos numéricos.

4.4. Solución de Schwarzschild

La *solución de Schwarzschild*, que corresponde a la solución estática, con simetría esférica, de las ecuaciones en el *vacío* (en este contexto quiere decir $T_{\mu\nu} = 0$), fue la primera solución exacta encontrada de las ecuaciones de Einstein mediante métodos directos. Apareció unos meses después de que fuera formulada la teoría.

Nota. Las ecuaciones de Einstein pueden reescribirse como [5]

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\mu}_{\mu}. \tag{4.10}$$

Condiciones

- De la condición de vacío, por la ecuación 4.10, la métrica debe ser Ricci plana, es decir $R_{\mu\nu} = 0$. (En particular, la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = 0$ es solución, pero no es la única).
- Una solución estática implica que existe un sistema de coordenadas en el que $g_{\mu\nu}$ es independiente de la coordenada temporal.
- Una solución con simetría esférica implica que las secciones espaciales tienen una simetría que es invariante bajo rotaciones ortogonales en tres dimensiones.

Con estas condiciones, en un sistema de coordenadas angulares (r, θ, ϕ), para las secciones espaciales, la métrica debe tener la forma

$$f(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2(\theta)d\phi^2). \tag{4.11}$$

Luego la ecuación de la métrica (con la coordenada temporal) debe ser

$$ds^2 = -e^{2A(r)}dt^2 + e^{2B(r)}dr^2 + r^2\left(d\phi^2 - sen^2(\theta)d\phi^2\right), \tag{4.12}$$

donde $A(r), B(r)$ son funciones independientes de la coordenada temporal y que van a caracterizar la solución.

[4] A la constante Λ se la conoce como *constante cosmológica*. Hoy en día se sabe que no es exactamente cero. Esto no contradice el límite newtoniano, pues su aproximación sigue siendo buena.

[5] Ya que $g^{m\mu} g_{m\nu} = g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$, subiendo un índice y contrayendo $T^{\mu}_{\mu} = R - \frac{1}{2} g^{\mu}_{\mu} R = R - 2R = -R$

Solución de Schwarzschild Se puede probar, a partir de la métrica propuesta por la ecuación 4.12, que la forma de la métrica de la solución es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\phi^2 - sen^2(\theta)d\phi^2), \tag{4.13}$$

donde M es una constante de integración que hay que fijar en la resolución de las ecuaciones diferenciales.

Interpretación de la solución Para soluciones estáticas y con curvatura pequeña, se tiene que (ver [3]) $g_{00} \approx 1 + 2\Phi$. En nuestro caso $g_{00} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, luego $\Phi \approx -\frac{M}{r}$. Y como $\Phi = -G_N \frac{m}{r}$ (mecánica newtoniana), tenemos

$$M \approx G_N m, \tag{4.14}$$

y podemos interpretar que la solución de Schwarzschild describe la curvatura en el vacío provocada por un objeto esférico y estático en el origen. Esta interpretación es coherente con que para $M = 0$ (aunsencia del cuerpo masivo), recuperamos la solución trivial (Minkowski). Y que para valores de coordenada radial muy elevados, se tiene

$$\frac{M}{r} << 1, \tag{4.15}$$

y la ecuación de la métrica se parece cada vez más a la de Minkowski, un resultado también consistente con la teoría gravitacional clásica a distancias muy alejadas de la fuente del campo.

Nota. La singularidad matemática que presenta la solución en $r = 2M$ es irrelevante por el siguiente motivo. Para los casos usuales como, por ejemplo, el campo gravitatorio generado por una estrella, la cantidad la cantidad $2M$ suele ser muy pequeña comparada con el radio de estos objetos. Dentro de ellos, donde r se aproximaría cada vez más a $2M$, la solución de Schwarzschild ya no es válida, pues sería $T_{\mu\nu} \neq 0$. De todos modos, incluso en un caso en el que la cantidad $2M$ fuera lo suficientemente grande, esta singularidad no es física, porque puede eliminarse mediante un cambio de coordenadas.

Así, la solución viene definida por un abierto conexo de $\mathbb{R}^4$ (luego orientable temporalmente), es decir, para una variedad espacio-tiempo (M, g) con la métrica dada por la ecuación 4.13. La posibilidad extender las soluciones a dominios más grandes viene descrita mediante las *extensiones de Krustal*. Un desarrollo completo puede verse en [8].

Nota. Aunque matemáticamente las restricciones planteadas por Schwarzschild sean muy fuertes, debido a la interpretación de su solución, modeliza una situación que nos es familiar. En particular, la solución de Schwarzschild nos permite calcular las geodésicas mediante la ecuación 3.13, y con ellas calcular correcciones relativistas en órbitas planetarias (perihelio de Mercurio) o deflexiones de luz.

Teorema de Birkhoff Una de las condiciones que impuso Schwarzschild para encontrar la primera solución a las ecuaciones de Einstein fue la de un modelo estático, para el cual hay unicidad en la solución en función de M. Sin embargo, las condiciones se pueden relajar y tiempo después se descubrió (teorema de Birkhoff) que la solución de Schwarzschild es la única con simetría esférica en el vacío, sin necesidad de imponer una independencia temporal. La demostración es similar (más laboriosa), y consiste en buscar las métricas posibles que se ajusten a

$$ds^2 = -e^{2A(t,r)}dt^2 + e^{2B(t,r)}dr^2 + r^2\left(d\phi^2 + sen^2(\theta)d\phi^2\right), \tag{4.16}$$

donde ahora la dependencia de las funciones $A(t,r), B(t,r)$ que determinan la métrica, es también temporal. En particular, del teorema de Birkhoff se deduce que no existen soluciones del vacío que no sean estáticas.

Bibliografía

[1] AHSAN Z., *TENSORS. Mathematics of Differential Geometry and Relativity*. Aligarh Muslim University, Aligarh, 2015.

[2] ALBALADEJO A., *TEOREMAS DE SINGULARIDAD EN RELATIVIDAD GENERAL*. Trabajo de fin de grado. Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia, 2016.

[3] BERT J., *Teoría de la Relatividad General*, Dpto de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, 2013.

[4] CABRERA K., *Una introducción a la Relatividad General*. Trabajo de fin de grado. Facultad de Ciencias, Sección de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, 2017.

[5] CARMO M. DO, *Riemannian Geometry*, BIRKHÄUSER, Berlin, 1992.

[6] CRESPO, M., *Ecuaciones del campo de Einstein*. Universidad de Murcia, Murcia, 2013.

[7] O'NEILL B., *SEMI-RIEMANNIAN GEOMETRY With Applications to Relativity*, Academic Press, San Diego, 1983.

[8] WALD ROBERT M., *GENERAL RELATIVITY*. The University of Chicago, Chicago, 1984.

[9] WEINBERG S., *GRAVITATION AND COSMOLOGY. Principles and applications of general theory of relativity.*. Massachussetts Institute of Technology, Massachustts, 1972.