Grupos finitos de movimientos en el espacio

Alberto Anglés Fernando
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Paz Jiménez Seral
14 de septiembre de 2018

Resumen

When a solid moves in space the distance between its points is maintained. In Linear Geometry and in Linear Alegbra is formalized the concept of point with the idea of affine space and vector, scalar product and norm, and the distance between points. It is also formalized the concept of motion as bijective maps or transfromations which preserve the distance.

In Galois Theory we have studied the concept of group. Motions form a group with the composition. Direct motions also form a group. In this work we will relate what we have studied in the three subjects in order to proof the last theorem.

Let A be a set of point in the space, think now of the motions f that fix this set of points, it is said, $\{f|A^f = A\}$. This set of motions that fix A is clearly a group (subgroup of the group of all motions). The points of the space that determine a regular plyhedron are the vertices. The group of motions that fix a polyhedron is called the *symmetry group of polyhedron*. Each motion determines a permutation in the set of vertices, (bijective map between the vertices) and the permutation determines the motion. For this reason and for being the set of vertices of a finite polyhedron, the group of symmetries of a polyhedron is finite. If we choose the eight vertices of a cube which is origin-centred, its coordenates are $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, as the number of a permutation of eight elements is finite, the symmetry group of a cube is finite. The motions which fix the points of a polyhedron also univocally determine a permutation of its edges or faces.

The main theme of this work is to proof that the unique finite rotational groups in $\mathbb{R}^3$ are the group of rotational symmetries of a pyramid with basis a regular polygon which is isomorphic to a cyclic group, the group of rotational symmetries of a prism with basis a regular polygon which is isomorphic to a dihedral group, the group of rotational symmetries of a tetrahedron which is isomorphic to A_4; the group of rotational symmetries of a cube (or an ocyahedron) which is isomorphic to S_4; and the group of rotational symmetries of a dodecahedron (or an icosahedron) which is isomorphic to A_5.

In the first chapter we talk about polyhedrons, particulary about the unique five regular polyhedrons and how are they related. This relation, called duality, will be used when we describe the symmetry groups.

In the next chapter we define and proof some theory about groups and actions that we have to use in the principal theorem. For example: the number of elements in the orbit of x is the order of G divided by the order of the stabilizer of x; all the orbits together form a partition of X; the number of distinct orbits it's equal to $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$, where $g \in G$ and $X^g = \{x \in X | x^g = x\}$.

In the third chapter we introduce what an affine space is. We show that the barycenter of r points is unique and the image of the baricenter is the barycenter of the images of this r points. From the affine space $\mathbb{R}^n$ and the definition of a scalar product, $x \cdot y^t = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, we obtain the euclidean affine space. From now on we use the concept of orthonormal reference system $\mathscr{R} = (p; v_1, \ldots, v_n)$ where p is a point called origin and $(v_1, \ldots, v_n)$ is an orthonormal basis. We also define distance between two points and from here the definition of motion. We see that each motion has an isometry associated.

On chapter number four, we are going to describe motions with fixed points in dimensions 2 and 3.

This motions are rotations and symmetries. In some orthonormal reference system, are described in their coordenate expresion. We can see that symmetries have order 2, and if we compose two rotations over the same point or over the same axis, we have that the angle of the resulting rotation is the sum of the angles of the two rotations.

In chapter five, we describe the three distinct symmetry group of regular polyhedrons. Firstly, we describe symmetry group of a regular tetrahedron which have 12 differents motions that fix the tetrahedron. Forming all the possible permutations of the vertices is easy to see that the symmetry group of a regular tetrahedron is isomorphic to A_4.

Using duality we show that the symmetry group of a cube and the symmetry group of a regular octahedron are the same group. There are 24 differents motions that fix a cube, and using some theory from chapter 2 we conclude that symmetry group of a cube is isomorphic to S_4.

Finally, and as before we show that the symmetry group of a regular dodecahedron and the symmetry group of a regular icosahedron are the same group. We have 60 differents motions that fix a dodecahedron. In the last chapter we see that the symmetry group of a regular dodecahedron is isomorphic to A_5.

In the last chapter, we proof the main theorem of this work. First of all, we proof, using barycenter theory, that if we have a finite group of motions there's a common fixed point to all the elements.

Now, if G is a finite subgroup of motions in $\mathbb{R}^2$ then G is a cyclic group or a dyhedral group. And also, in $\mathbb{R}^3$, if G is a finite group form by rotations with the same rotation axis then is a cyclic group.

With all these, we are able to proof the last and main theorem of this work, which is named before.
Let G be a finite group of motions, then exits a common fixed point to all the elements of G, and we consider it the centre of the sphere of ratio 1, $\mathbb{S}$. The intersection between $\mathbb{S}$ and the axis of a rotation $g \in G$ results in two points that we called them poles. Poles are the unique points in $\mathbb{S}$ that are fixed by a rotation $g \in G$ distinct to the identity.

Let X be a set formed by all the poles of all the elements of G, distinct to the identity, $X = \{x \in \mathbb{S} | \exists\, e \neq g \in G \text{ t.q } x^g = x\}$.

First, it is proved that there is an action of G over X. This action of is given by

$$\begin{array}{rccl} \varphi(g): & G & \longrightarrow & Per_X \\ & g & \mapsto & x \mapsto x^g = g(x) \end{array}$$

Let N be de number of distinct orbits, using the number of distinct orbits theorem, $N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$.

If g is the identity $|X^g| = |X|$, in other case $|X^g| = 2$. The orbits form a partition of X, we choose a polo of each orbit so $|X| = \sum_{i=1}^N |G(x_i)|$. Therefore $N = \frac{1}{|G|} \left[2(|G|-1) + \sum_{i=1}^N |G(x_i)|\right]$.

We have that $|G(x)| = \frac{|G|}{|G_x|}$, hence $N - \sum_{i=1}^N \frac{1}{|G_{x_i}|} = \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}\right)$.

Assuming that G is not the trivial group, we conclude that $N = 2, 3$.

If $N = 2$, it is proved that all the elements of G have the same rotation axis, then G is a cyclic group.

Let N be now equal to 3. Doing some elementary operations we cocnlude in

$$1+\frac{2}{|G|}=\frac{1}{|G_{x_1}|}+\frac{1}{|G_{x_2}|}+\frac{1}{|G_{x_3}|}.$$

Hence, there are four possibilities, which are described below.

In the first case, $|G_{x_1}|=|G_{x_2}|=2$, $|G_{x_3}|=n$, $|G|=2n$. The axis through x_3 is fixed by every rotation in the stabilizer G_{x_3}, so G_{x_3} is a cyclic group of order n.

The elements of G_{x_3} act over the points of $G(x_1)$ so the n points of this orbit are in the same parallel of the sphere respect to $G(x_3)$ and they are equidistant. The same thing happens with the n points in $G(x_2)$.

We deduce that the elements of $G(x_1)$ and $G(x_2)$ are all in the ecuator of $\mathbb{S}$ respect to the poles of x_3. We have a regular polygon of n vertices, so we have the motions that fix this regular polygon. That is to say, G is a dihedral group of order $2n$

In the second case,$|G_{x_1}|=2$ and $|G_{x_2}|=|G_{x_3}|=3$, $|G|=12$. G acts faithfully over the four elements of $G(x_3)$ then G is isomorphic to a subgroup of S_4. We see that this subgroup contains all the 3-cycles, and taking into account the orders we conclude that $G\simeq A_4$. G is the symmetry group of the tetahedron which is formed by the four points of the third orbit.

In case number three, $|G_{x_1}|=2$, $|G_{x_2}|=3$ and $|G_{x_3}|=4$, $|G|=24$. It is prooved that the eight poles of the second orbit form a cube and G is the symmetry group of this cube.

Finally, $|G_{x_1}|=2$, $|G_{x_2}|=3$ y $|G_{x_3}|=5$, $|G|=60$. G acts over the twelve elements in $G(x_3)$. Let $x\in G(x_3)$, as the stabilizer of x has order 5 we can take a g generator from the stabilizer. When considering g as an element of S_{12} must fix at least another element and as you cannot fix more than two you have that the other 10 are distributed in two 5-cycles and located in two parallel with respect to x. But this happens with all the elements of $G(x_3)$, then the parallels are in different hemispheres.

In addition, if each pole is joined with the five closest to it, we have a regular polyhedron with 12 vertices, 30 edges and 20 faces that are equilateral triangles, the icosahedron.

We see now that this group G is simple, from where it can be deduced that it is isomorphic to A_5 because this is the only simple group of 60 elements.

Índice general

Capítulo 1

Poliedros Regulares

Antes de abordar el tema principal de este trabajo, hay que tener unos conocimientos previos sobre poliedros, en particular, sobre poliedros regulares.

Para los geómetras griegos, el estudio de los poliedros fue muy importante y conocieron la existencia de esos cinco únicos sólidos regulares, cuyo descubrimiento atribuyeron algunos al propio Pitágoras y a los que Platón recurrió incluso para explicar la creación del universo. No consta que conocieran un importante resultado relativo al número de vértices, aristas y caras de un poliedro convexo, observado ya por Descartes en 1640 y del que el matemático suizo Leonhard Euler dio una famosa demostración en 1752.

Definición 1. Un poliedro es *convexo* si todos los vértices que no están en una cara dada, están en uno de los subespacios que define el plano que determina la cara.

Teorema 1.1 (Fórmula de Euler)**.** *Si un poliedro convexo tiene v vértices, a aristas y c caras, se tiene que*

$$v - a + c = 2$$

Definición 2. Un *poliedro regular* es un poliedro convexo que tiene todas sus caras polígonos regulares de p lados y además en cada vértice concurren el mismo número q de aristas .

Proposición 1.2. *Los números p y q determinan el poliedro. Para cada p y q existe un único poliedro regular que denotamos $\{p,q\}$*

Demostración. Sea $p \geq 2$ y $q \geq 2$. Supongamos que existe un poliedro regular cuyas caras son polígonos regulares de p lados y que en cada vértice concurren q aristas; siendo a el número de aristas del poliedro, c el número de caras y v el número de vértices.
En cada cara hay p aristas y cada arista está en dos caras $\Rightarrow 2a = pc$ (1)
En cada arista hay dos vértices y cada vértice está en q aristas $\Rightarrow 2a = qv$ (2)
Aplicando la *Fórmula de Euler* tenemos que:

$$2 = v - a + c = v - \frac{qv}{2} + \frac{qv}{p} = \frac{v}{2p}(2p - pq + 2q)$$

De aquí, $v = \dfrac{4p}{2p - pq + 2q}$ y sustituyendo en (1) y (2), se tiene que:

$$v = \frac{4p}{2p - pq + 2q}$$
$$a = \frac{2pq}{2p - pq + 2q}$$
$$c = \frac{4q}{2p - pq + 2q}$$

□

Proposición 1.3. *Los únicos poliedros regulares posibles son los siguientes:*
p=3, q=3, v=4, a=6, c=4 tetraedro regular
p=3, q=4, v=6, a=12, c=8 octaedro regular
p=3, q=5, v=12, a=30, c=20 icosaedro regular
p=4, q=3, v=8, a=12, c=6 cubo
p=5, q=3, v=20, a=30, c=12 dodecaedro regular

Demostración. De la proposición anterior tenemos que

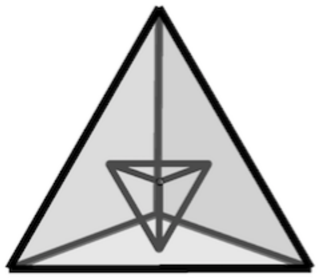
$$2 = \frac{v}{2p}(2p - pq + 2q) = \frac{v}{2p}(4 - (p-2)(q-2))$$

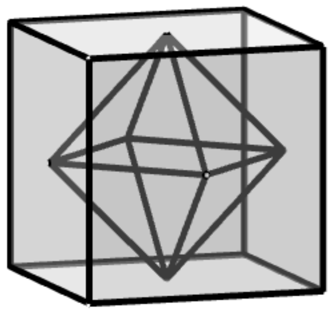
. Luego $4 > (p-2)(q-2)$ y sabiendo que $p,q \geq 2$ se tiene que $3 \leq p,q \leq 5$. Por tanto los únicos pares $\{p,q\}$ posibles son los que aparecen en el enunciado. □

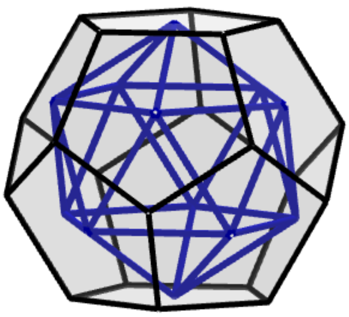
Definición 3. El *dual* de un poliedro regular es el que se obtiene uniendo los puntos medios de caras adyacentes.

El dual de $\{p,q\}$ debe tener tantos vértices como caras tiene $\{p,q\}$. Luego el dual de $\{p,q\}$ es $\{q,p\}$. Entonces tenemos que:

- El dual de un tetraedro es un tetraedro
- El dual de un cubo es un octaedro y el dual de un octaedro es un cubo
- El dual del dodecaedro es el icosaedro y recíprocamente







Capítulo 2

Grupos y acciones

Definición 4. Un *grupo* es un conjunto G con una operación multiplicación en G satisfaciendo:

i) Existe un elemento $e \in G$, llamado elemento identidad, tal que $ge = g = eg$ $\forall g \in G$

ii) La operación multiplicación es asociativa, es decir, $(xy)z = x(yz)$ $\forall x, y, z \in G$

iii) Cada elemento $g \in G$ tiene un elemento inverso, g^{-1}, tal que $g^{-1}g = e = gg^{-1}$

Si G es finito, llamaremos *orden de G* al número de elementos de G, $|G|$.

Es fácil de probar que en todo grupo G se tiene que el elemento identidad es único y que el elemento inverso es único para cada elemento de G.

Definición 5. Un *subgrupo H* de un grupo G es un subconjunto de G que con la operación multiplicación restringida es también un grupo. Se escribe, $H \leq G$.

Proposición 2.1. *Sea G un grupo. Si H es un subconjunto no vacío de G, $H \leq G$ si y solo si $xy^{-1} \in H$ $\forall x, y \in H$.*
En el caso de G finito, H es subgrupo de G si y solo si $xy \in H$.

Definición 6. Un subgrupo N de G dice *subgrupo normal* si se verifica $xN = Nx$ para todo x. Se escribe $N \trianglelefteq G$.

Ejemplo. El conjunto de las matrices $n \times n$ invertibles y reales forman un grupo con la multiplicación de matrices. Este grupo se denomina *Grupo General Linear*, GL_n.

Cada matriz A de este grupo determina una transformación lineal invertible $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f_A(x) = Ax^t$ para cada vector $x \in \mathbb{R}^n$.

Como $f_{AB}(x) = (AB)x^t = A(Bx^t) = f_A(f_B(x))$ vemos que el producto de matrices AB determina la composición de transformaciones lineales $f_A f_B$. Por otro lado, si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal invertible y A es la matriz que la representa con respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^n$, entonces A es invertible y $f = f_A$.

Una matriz A se dice ortogonal si $A^t = A^{-1}$. Si A y B son matrices ortogonales $n \times n$ entonces AB^{-1} es ortogonal; en efecto,

$$(AB^{-1})^t(AB^{-1}) = (B^{-1})^t A^t AB^{-1} = (B^t)^t(A^t A)B^{-1} = BI_nB^{-1} = BB^{-1} = I_n$$

Como AB^{-1} es ortogonal (por Porposición 2.1) tenemos que el grupo de todas las matrices $n \times n$ ortogonales es un subgrupo de GL_n. Este grupo se denomina *Grupo Ortogonal*, O_n. Si $A_{n\times n}$ es ortogonal su determinante es ± 1. En efecto, $1 = det(A^tA) = (det(A))^2$. Las matrices pertenecientes a O_n que tienen determinante igual a $+1$ forman un subgrupo de O_n llamado *Grupo Ortogonal Especial*, SO_n.

Definición 7. Un grupo G se dice *cíclico* si existe $x \in G$ tal que $G = \langle x \rangle = \{x^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

Para más detalles sobre grupos ver [1].

Definición 8. Un grupo G es producto semidirecto de H por N, con $H, N \leq G$, si $N \trianglelefteq G$, $H \cap N = \{1\}$ y $HN = G$.

Definición 9. Un *grupo diédrico*, D_n, es el producto semidirecto de un grupo cíclico $H = \langle x \rangle$ de orden 2 por un grupo cíclico $N = \langle y \rangle$ de orden n tal que $y^x = y^{-1}$.

Definición 10. Una *permutación* de un conjunto $C \neq \emptyset$ es una aplicación biyectiva de C en sí mismo.

Si $c \in C$ y α es una permutación denotaremos como $c\alpha$ para indicar la imagen de c por α. Una permutación α se dice que es un *ciclo de longitud r* o un *r-ciclo* si existen r elementos de c (cifras) distintos y ordenadas $c_1, c_2, ..., c_r$ de tal forma que α mueve cada cifra en la siguiente, la última en la primera y fija el resto de cifras. Es decir, $c_i\alpha = c_{i+1}$ para $i = 1, ..., r-1$, $c_r\alpha = c_1$ y $c\alpha = c$ para $c \neq c_i$. Este ciclo se suele indicar de la forma

$$\alpha = (c_1, c_2, ..., c_r)$$

En particular, a los 2-ciclos se les denomina *trasposiciones*.
La composición de dos permutaciones α y β se denotará como $\alpha\beta$.

Como cada permutación α es una aplicación biyectiva, entonces exista la permutación inversa α^{-1}. Por ejemplo,

$$(c_1, c_2, ..., c_r)^{-1} = (c_r, c_{r-1}, ..., c_1)$$

Definición 11. El *grupo simétrico* definido sobre un conjunto X es el grupo con la operación composición cuyos elementos son todas las permutaciones de X. Se denota S_X.
El *grupo simétrico de grado n*, S_n, es el grupo simétrico de un conjunto finito de n elementos. Se tiene que $|S_n| = n!$.

Definición 12. Un elemento de S_n se dice que es *par* si es producto de un número par de trasposiciones. En otro caso se dice *impar*.
El conjunto de las permutaciones pares es un subgrupo de S_n que se llama *grupo alternado de grado n*, A_n, y es el menor subgrupo que contiene a todos los 3-ciclos.

Definición 13. Un grupo G se dice *simple* si no tiene subgrupos normales propios. Es decir si $N \trianglelefteq G$ entonces $N = 1$ o $N = G$.

Proposición 2.2. *Si $n > 4$, A_n es simple*

Demostración. Ver el capítulo 14 de [2]. □

Proposición 2.3. *Sea $N \trianglelefteq G$. El conjunto $G/N = \{Nx | x\}$ es grupo con la operación $(Nx)(Ny) = Nxy$ para todo $x, y \in G$. Se denomina* grupo cociente. $|G/N| = \dfrac{|G|}{|N|}$.

Definición 14. Un *homomorfismo* entre dos grupos G y H es una aplicación $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)\ \forall a, b \in G$.

Definición 15. Llamamos *acción* de un grupo G sobre un conjunto X a un homomorfismo de G en S_X.

$$\begin{array}{rccc} \varphi(g): & G & \longrightarrow & S_X \\ & g & \mapsto & x \mapsto x^g \end{array}$$

Definición 16. Sean G actuando sobre X y un elemento $x \in X$, el conjunto de todas las imágenes x^g, con $g \in G$, lo llamamos *órbita* de x y la escribimos $G(x)$. Notar que $G(x) \subseteq X$.

Definición 17. Sea $x \in X$, los elementos de G tal que dejan fijo a x forman un subgrupo llamado el *estabilizador* de x, $G_x \leq G$. $G_x = \{g \in G | x^g = x\}$

Proposición 2.4. *Sea G un grupo que actúa sobre X, $x \in X$, $G(x)$ la órbita de x, y G_x el estabilizador de x. Entonces, se tiene que:*

a) $|G(x)| = \dfrac{|G|}{|G_x|}$

b) el conjunto de todas las órbitas forma una partición de X

c) si x e y están en la misma órbita, $|G_x| = |G_y|$

Demostración. a) $x^g = x^{g_1} \iff x^{g_1 g^{-1}} = x \iff g_1 g^{-1} \in G_x \iff g_1 = hg$ para algún $h \in G_x$. Para un g el número de elementos la forma hg es el cardinal de $G_x g := \{hg | h \in G_x\}$, que es el mismo que el de G_x, luego hay $|G_x|$ elementos que llevan x al mismo x^g. Así, $|G(x)| = \dfrac{|G|}{|G_x|}$.

b) Sean $G(x_1), G(x_2)$ dos órbitas que tienen un elemento en común, vamos a ver que son la misma órbita. Si existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $x_1^{g_1} = x_2^{g_2}$, entonces $x_1^{g_1 g_2^{-1}} = x_2$ luego x_1, x_2 están en la misma órbita. Si $g \in G$, $x_1^g = \left(x_2^{\left(g_1 g_2^{-1}\right)^{-1}}\right)^g \in G(x_2)$, luego los elementos de la órbita x_1 están el a de x_2 y, análogamente, los de x_2 están en la de x_1.

c) Por estar x e y en la misma órbita existe $g \in G$ tal que $x^g = y$. Sea $h \in G_x$, el estabilizador de y es $\{g^{-1}hg \in G | y^{g^{-1}hg} = y\}$. En efecto, $y^{g^{-1}hg} = x^{hg} = x^g = y$. Recíprocamente, si $y^k = y$ tenemos $x^{gk} = y = x^g$ y por tanto $gkg^{-1} \in G_x$. Así existe $h \in G_x$ tal que $gkg^{-1} = h$ y $k = g^{-1}hg$. Es claro que $G_y = \{g^{-1}hg \in G | y^{g^{-1}hg} = y\}$ tiene el mismo número de elementos que G_x.

□

Teorema 2.5. *Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto X, y sea X^g el subconjunto de X cuyos elementos son fijados por $g \in G$, $X^g = \{x \in X | x^g = x\}$. El número de órbitas distintas es*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

Demostración. Vamos a contar el número de parejas (g, x) de $G \times X$ para los cuales $x^g = x$. El número de estas parejas es

$$\sum_{g \in G} |X^g|. \tag{2.1}$$

También es igual a

$$\sum_{x \in X} |G_x|. \tag{2.2}$$

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ las distintas órbitas, reescribimos (2.2):

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in X_i} |G_x|. \tag{2.3}$$

Los estabilizadores de dos elementos de la misma órbita tienen el mismo orden, elegimos $x_i \in X_i$, y usando Proposición 2.4 tenemos que

$$\sum_{x \in X_i} |G_x| = |X_i| \cdot |G_{x_i}| = |G(x_i)| \cdot |G_{x_i}| = |G|. \tag{2.4}$$

Por lo tanto, (2.3) es igual a $k|G|$. Luego

$$\sum_{g \in G} |X^g| = k|G| \Rightarrow k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

□

Capítulo 3

Espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$. Movimientos. El grupo ortogonal

Definición 18. Se dice que $(\mathbb{A}, V, \varphi)$ es un *espacio afín*, donde V un espacio vectorial, $\mathbb{A}$ un conjunto no vacío cuyos elementos denominaremos *puntos* y φ es una aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} &\longrightarrow V \\ (p,q) &\mapsto \overrightarrow{pq} \end{aligned}$$

que posee las siguientes propiedades:

i) Para todo punto $a \in \mathbb{A}$ y todo vector $v \in V$ existe un único punto $b \in \mathbb{A}$ tal que $\overrightarrow{ab} = v$

ii) Para tres puntos cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{A}$ se tiene que $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$

Es fácil ver que $\overrightarrow{aa} = \vec{0}$ y $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$.

Definición 19. Sea $(\mathbb{A}, V, \varphi)$ un espacio afín sobre $\mathbb{R}$. Dados r puntos $p_1, ..., p_r$ de A, el *baricentro* de $p_1, .., p_r$ es el punto b dado por

$$\overrightarrow{pb} = \frac{1}{r}(\overrightarrow{pp_1} + ... + \overrightarrow{pp_r}).$$

donde p es un punto cualquiera de $\mathbb{A}$.

El punto p no tiene relevancia, tomemos otro punto q entonces si

$$\overrightarrow{qb'} = \frac{1}{r}(\overrightarrow{qp_1} + ... + \overrightarrow{qp_r})$$

se debe tener $b = b'$.

$$\overrightarrow{bb'} = \overrightarrow{bp} + \overrightarrow{pb'} = \overrightarrow{bp} + \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qb'} = \overrightarrow{pq} + \frac{1}{r}(\overrightarrow{p_1p} + ... + \overrightarrow{p_rp}) + \frac{1}{r}(\overrightarrow{qp_1} + ... + \overrightarrow{qp_r}) = \overrightarrow{pq} + \frac{1}{r}(\overrightarrow{qp} + ... + \overrightarrow{qp}) = \vec{0}$$

Se tiene pues que $b = b'$ y, por lo tanto, el baricentro es único.

Proposición 3.1. *El baricentro de r puntos $p_1, .., p_r$ es el único punto b que cumple $\overrightarrow{bp_1} + ... + \overrightarrow{bp_r} = \vec{0}$.*

Demostración. Tomar en la definición $b = p$.

□

Definición 20. Sean $(\mathbb{A}, V, \varphi)$ un espacio afín. Dada $f : V \longrightarrow V$ lineal, sean $o, o' \in \mathbb{A}$ existe una única aplicación $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $\varphi(o) = o'$ y $\overrightarrow{o'\varphi(a)} = f(\overrightarrow{oa})$. A φ se le llama aplicación afín de aplicación lineal asociada f.

Proposición 3.2. *Sea $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una aplicación afín y sean $p_1,...,p_r$ puntos de $\mathbb{A}$. Entonces el baricentro de los r puntos $\varphi(p_1),...,\varphi(p_r)$ es $\varphi(b)$, siendo b el baricentro de $p_1,...,p_r$.*

Demostración. Por 3.1 b es el único punto cumpliendo $\overrightarrow{bp_1}+...+\overrightarrow{bp_r}=\vec{0}$, y por ser φ aplicación afín aplicamos f, que es lineal, a la expresión anterior

$$f(\overrightarrow{bp_1})+...+f(\overrightarrow{bp_r})=\overrightarrow{\varphi(b)\varphi(p_1)}+...+\overrightarrow{\varphi(b)\varphi(p_r)}=\vec{0}$$

luego $\varphi(b)$ es el baricentro de $\varphi(p_1),...,\varphi(p_r)$. □

En nuestro caso $\mathbb{A}=V=\mathbb{R}^n$ y, si $a=(x_1,x_2,...,x_n)$ y $b=(y_1,y_2,...,y_n)$ dos puntos de A, entonces $\overrightarrow{ab}=(y_1-x_1,y_2-x_2,...,y_n-x_n)$

Sean $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ e $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, y el *producto escalar* $x\cdot y^t = x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$. $\mathbb{R}^n$ con este producto escalar es un *espacio afín euclídeo*.

Definimos como *norma* de un vector $x\in\mathbb{R}^n$ como $||x||=\sqrt{x\cdot x^t}$. La norma satisface las siguientes propiedades:

1) $||x||\geq 0$ y $||x||=0\Leftrightarrow x=(0,...,0)=\vec{0}\ \forall x\in\mathbb{R}^n$

2) $||x+y||\leq ||x||+||y||\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n$

3) $||kx||=|k|\ ||x||\ \forall x\in\mathbb{R}^n$ y $\forall k\in\mathbb{R}$

Definición 21. Una *base ortonormal* $\mathscr{B}=(v_1,...,v_n)$ es una base donde $||v_i||=1$ y $v_i\cdot v_j^t=0$ para todo $i\neq j$.

Un *sistema de referencia ortonormal* es un conjunto $\mathscr{R}=(p;v_1,...,v_n)$ donde p es un punto de $\mathbb{A}$ y $(v_1,...,v_n)$ una base ortonormal de V. Al punto p se le llama *origen* del sistema. Para cualquier punto $a\in\mathbb{A}$ sus coordenadas en el sistema son las coordenadas de $\overrightarrow{pa}$ respecto a las base $(v_1,...,v_n)$,

$$\overrightarrow{pa}=x_1v_1+...+x_nv_n$$

es decir, $\overrightarrow{pa}$ tiene coordenadas $(x_1,...,x_n)$ respecto $(v_1,...,v_n)$. Notar que las coordenadas de p en el sistema son $(0,...,0)$.

Dados dos puntos $a,b\in A$ cualesquiera, tenemos que

$$\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{ap}+\overrightarrow{pb}=(y_1-x_1)v_1+...+(y_n-x_n)v_n$$

Definición 22. Sean $x,y\in\mathbb{R}^n$ dos puntos, llamaremos *distancia* entre x e y a $d(x,y)=||\overrightarrow{xy}||$.

Usando las propiedades de la norma es fácil comprobar que:

a) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

b) $d(x,y)=d(y,x)$

c) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

Definición 23. Llamaremos *movimiento* a toda aplicación $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ biyectiva tal que $d(\varphi(x),\varphi(y))=d(x,y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n$.

Definición 24. $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ aplicación lineal es una *isometría* si $||f(\vec{v})||=||\vec{v}||\ \forall\vec{v}\in\mathbb{R}^n$.
Se puede probar que si f es una isometría $\forall u,v$ $f(u)\cdot f(v)=u\cdot v$.

Sea A la matriz de una isometría lineal en una base ortonormal, A es una matriz *ortogonal*, es decir, $A^tA = I_n$. En efecto; si A es una matriz asociada a f respecto a una base ortonormal y sean X,Y son las coordenadas de v,w en columna, $v \cdot w = X^tY$ y $f(v) \cdot f(w) = (AX)^t(AY) = X^tA^tAY$, y como sabemos que si f es isometría conserva el producto escalar

$$X^tY = X^tA^tAY \Longrightarrow A^tA = I$$

Proposición 3.3. *Sea φ un movimiento y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}$. Entonces f es una isometría.*
Esta función f se dice que es la isometría *a φ.*

Demostración. Tenemos que $||f(\overrightarrow{ab})|| = ||\overrightarrow{\varphi(a)\varphi(b)}|| = d(\varphi(a),\varphi(b)) = d(a,b) = ||\overrightarrow{ab}||$ para todos puntos $a,b \in \mathbb{R}^n$. En particular, para todo vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ $||f(\vec{v})|| = ||\vec{v}||$ (1) .
Para ver que es lineal primero voy a ver que f conserva el producto escalar: sean dos vectores $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera, y sean a,b dos puntos en $\mathbb{R}^n$ tales que $\vec{u} = \overrightarrow{pa}$, $\vec{v} = \overrightarrow{pb}$. Entonces,

$$d(a,b)^2 = ||\overrightarrow{ab}||^2 = ||\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{pb}||^2 = ||\overrightarrow{ap}||^2 + ||\overrightarrow{pb}||^2 + 2(\overrightarrow{ap} \cdot \overrightarrow{pb}^t) = d(a,p)^2 + d(b,p)^2 + 2(\overrightarrow{ap} \cdot \overrightarrow{pb}^t)$$

y

$$d(\varphi(a),\varphi(b))^2 = ||\overrightarrow{\varphi(a)\varphi(b)}||^2 = ||\overrightarrow{\varphi(a)\varphi(p)} + \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(b)}||^2 =$$

$$= ||\overrightarrow{\varphi(a)\varphi(p)}||^2 + ||\overrightarrow{\varphi(p)\varphi(b)}||^2 + 2(\overrightarrow{\varphi(a)\varphi(p)} \cdot \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(b)}^t) =$$

$$= d(\varphi(a),\varphi(p))^2 + d(\varphi(b),\varphi(p))^2 + 2(\overrightarrow{\varphi(a)\varphi(p)} \cdot \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(b)}^t) =$$

$$= d(a,p)^2 + d(b,p)^2 + 2(\overrightarrow{\varphi(a)\varphi(p)} \cdot \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(b)}^t)$$

Luego, $\overrightarrow{ap} \cdot \overrightarrow{bp}^t = \overrightarrow{\varphi(a)\varphi(p)} \cdot \overrightarrow{\varphi(b)\varphi(p)}^t = f(\overrightarrow{ap}) \cdot f(\overrightarrow{bp})^t$ (2).

Veamos ahora que f es lineal: sean $\vec{v},\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ dos vectores como antes y $t \in \mathbb{R}$. Se puede ver que $||f(t\vec{v}) - tf(\vec{v})|| = 0$ y $||f(\vec{v}+\vec{u}) - (f(\vec{v}) + f(\vec{u}))|| = 0$. Para ello usar las propiedades de norma y producto escalar, (1) y (2). Por lo tanto, se tiene que:

$$f(t\vec{v}) = tf(\vec{v})$$

$$f(\vec{v}+\vec{u}) = f(\vec{v}) + f(\vec{u})$$

Así, f es isometría. □

Proposición 3.4. *Sean a,b dos puntos de $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ isometría lineal. Entonces existe un único movimiento φ con isometría asociada f tal que $\overrightarrow{b\varphi(p)} = f(\overrightarrow{ap})$.*

Expresión coordenada

Sea $\mathscr{R} = (p; v_1,...,v_n) = (p;\mathscr{B})$ un sistema de referencia ortonormal y suponer que φ es un movimiento. Para cada $a \in \mathbb{R}^n$ veamos cómo están relacionadas las coordenadas $(x_1,...,x_n)$ de a en $\mathscr{R}$ y las $(y_1,...,y_n)$ de $\varphi(a)$ en $\mathscr{R}$. Sea f la aplicación lineal asociada a φ. Llamar A a la matriz de f respecto $\mathscr{B}$ y $(t_1,...,t_n)$ a las coordenadas de $\varphi(p)$ en $\mathscr{R}$.

Si escribimos $(x_1,...,x_n)$ como una columna X, luego AX son las coordenadas de $f(\overrightarrow{pa}) = \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(a)}$ respecto $\mathscr{B}$.

Por otra parte $(t_1,..,t_n)$, en columna T, son las coordenadas respecto $\mathscr{B}$ de $\overrightarrow{p\varphi(p)}$. Llamamos Y a la columna formada por $(y_1,...,y_n)$ que son las coordenadas de $\overrightarrow{p\varphi(a)} = \overrightarrow{p\varphi(p)} + \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(a)}$ respecto B. Luego tenemos que las coordenadas en $\mathscr{R}$ de $\varphi(a)$ son :

$$Y = T + AX \tag{3.1}$$

Como A es la matriz de f respecto de la base ortonormal $\mathscr{B}$, es ortogonal. Equivalentemente, A es cuadrada y $A^tA = A$. Veamos que (3.1) es la expresión de un movimiento: por ser A $n \times n$ existe una única $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineal cuya matriz respecto $\mathscr{B}$ es A, como A es ortogonal entonces f es una isometría lineal. Sea $p' \in \mathbb{R}^n$ de coordenadas $(t_1,..,t_n)$ en $\mathscr{R}$, luego por Proposición 3.4 existe un único movimiento φ con aplicación asociada f tal que $\varphi(p) = p'$. Así, (3.1) representa en $\mathscr{R}$ un movimiento con aplicación lineal asociada f, que es la de la matriz A respecto $\mathscr{B}$.

La columna T es nula si y solo si $\varphi(p) = p$. Cuando $\varphi(a) = a$ se dice que a es *punto fijo* de φ. Tenemos pues que, un movimiento tiene algún punto fijo si y solo si existe algún sistema de referencia ortonormal en el que su expresión coordenada es de la forma $Y = AX$. Sabemos que existe una base ortonormal en la que la matriz de f es ortogonal canónica, luego si el movimiento tiene algún punto fijo existirá un sistema de referencia ortonormal en el que su expresión coordenada es $Y = CX$ con C ortogonal canónica.

Capítulo 4

Clasificación de los movimientos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

En Álgebra Lineal I, se ve de forma más detallada esta clasificación.

Nos centramos en los movimientos que tienen algún punto fijo. Si A es ortogonal, $Y = AX$ representa en un sistema de referencia ortonormal un movimiento que fija el origen del sistema de referencia. Si un movimiento tiene algún punto fijo, hay un sistema de referencia ortonormal en el que su expresión es $Y = CX$ con C ortogonal canónica, C es la matriz de la isometría lineal f asociada. Veamos ahora cómo son los movimientos con puntos fijos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

En dimensión 2, en algún sistema de referencia ortonormal su expresión es:

1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es la aplicación identidad.

2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\sin\theta \neq 0$. 1 no es valor propio luego hay un único punto fijo p. Es un giro de ángulo θ y de centro p.

   Para el caso $\cos\theta = -1$ tenemos $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ este giro también es la simetría respecto a p.

3) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ 1 es valor propio luego hay puntos fijos y $S_f(1) = \{a \in \mathbb{R}^2 | f(a) = a\}$ tiene dimension 1, luego los puntos fijos forman una recta r. Este movimiento es la simetría respecto a r (eje de simetría).

En dimensión 3, en algún sistema de referencia ortonormal su expresión es:

1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es la aplicación identidad.

2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ * \\ * \end{pmatrix}$ $\sin\theta \neq 0$. Como hay puntos fijos y $\dim S_f(1) = 1$, los puntos fijos forman una recta r que pasa por el origen y con dirección $S_f(1)$. Es un giro de ángulo θ de eje r.

En el caso particular de $\cos\theta = -1$ se tiene $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ también es la simetría respecto a la recta r.

3) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$ como hay puntos fijos y $\dim S_f(1) = 2$, los puntos forman un plano α. Este movimiento es la simetría respecto al plano α (plano de simetría). Este plano contiene al origen y como vectores directores tiene los que forman $S_f(1)$.

4) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ * \\ * \end{pmatrix}$, $\sin\theta \geq 0$ y $\cos\theta \neq 1$. 1 no es valor propio luego hay un único punto fijo p. La matriz se puede poner como $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ por lo que este movimiento se puede describir como un giro alrededor de un eje en la dirección del primer vector de la base seguido de una simetría respecto a un plano. Al ser sistema ortonormal podemos decir que el plano es el perpendicular al eje por el punto p.

En el caso de que $\cos\theta = -1$ tenemos que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ también es la simetría respecto al punto p.

Se deduce que las simetrías tienen orden 2, ya que para cada matriz A que representa una simetría, sea cual sea su dimensión, es claro que $A^2 = I$.

También se deduce que si en $\mathbb{R}^2$ se realizan dos giros sobre un mismo punto, el ángulo total de giro es la suma de los ángulos de cada giro. En efecto; sea A_θ la matriz que representa un giro de ángulo θ y A_β la matirz de giro de ángulo β:

$$A_\theta A_\beta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\beta) & -\sin(\theta+\beta) \\ \sin(\theta+\beta) & \cos(\theta+\beta) \end{pmatrix} = A_{\theta+\beta}$$

Y en $\mathbb{R}^3$ ocurre igual que en $\mathbb{R}^2$ pero realizando los giros sobre un mismo eje. Podemos tomar como primer vector de la base uno en la dirección del eje y los otros dos en el ortogonal. La matriz es de la forma canónica y se tiene

$$A_\theta A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta+\beta) & -\sin(\theta+\beta) \\ 0 & \sin(\theta+\beta) & \cos(\theta+\beta) \end{pmatrix} = A_{\theta+\beta}$$

Capítulo 5

Simetrías de los poliedros

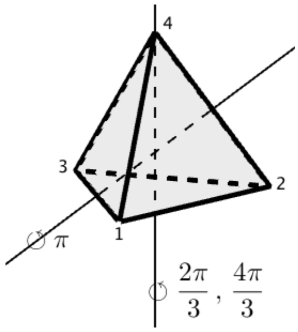
Dado un conjunto A de puntos del espacio pensemos en los movimientos f que dejan fijo ese conjunto de puntos, es decir, $\{f|A^f = A\}$. A partir de este momento si f es un movimiento y x un punto escribiremos x^f en vez de $f(x)$. Este conjunto de movimientos que fijan A es claramente un grupo (subgrupo del grupo de todos los movimientos). Los puntos del espacio que determinan un poliedro regular son los vértices. Al grupo de los movimientos que dejan fijo un poliedro se le llama *grupo de simetrías de un poliedro*. Cada movimiento determina una permutación en el conjunto de los vértices (aplicación biyectiva entre los vértices) y tal permutación determina el movimiento. Por lo anterior y por ser el conjunto de vértices de un poliedro finito, el grupo de simetrías de un poliedro es finito. Las coordenadas de los ocho vértices de un cubo centrado en el origen son $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Como el número de permutaciones de ocho elementos es finito, el grupo de las simetrías del cubo es finito. Los movimientos que dejan fijos los puntos de un poliedro también determinan unívocamente una permutación de sus aristas o de sus caras.

Se sabe que los movimientos que dejan fijo algún punto fijo son los giros o rotaciones alrededor de un eje, simetrías respecto un plano, y composiciones de rotaciones y simetrías respecto de un plano perpendicular al eje. Vamos a describir los grupos de movimientos directos que dejan fijo un poliedro regular, los giros o rotaciones.

5.1. Grupo de rotaciones de un tetraedro

Consideremos, primero, un tetraedro regular. El movimiento que lleva cada vértice otra vez a sí mismo se llama identidad. Existen 4 ejes que van desde un vértice hasta el punto medio de la cara opuesta y sobre cada eje se puede girar con un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ y de $\frac{4\pi}{3}$. Luego tenemos 8 giros distintos.

Por otro lado, existen 3 ejes que van desde el punto medio de una arista a la arista opuesta, y en cada eje solo se puede girar con un ángulo de π. Por lo tanto, tenemos 12 movimientos distintos que dejan fijo a un tetraedro regular.



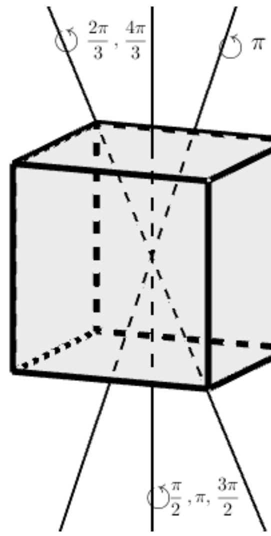
Cada movimiento produce una permutación en los vértices. Denotemos a los vértices como $1,2,3,4$. Formando todas las permutaciones de los vértices posibles obtenemos $\mathbb{A}_4$. En efecto: I_d, (2,3,4), (2,4,3), (1,3,4), (1,4,3), (1,2,4), (1,4,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,2)(3,4).

5.2. Grupo de rotaciones de un cubo y de un octaedro

Además de la identidad tenemos los 3 ejes que van desde el centro de una cara hasta el centro de la cara opuesta; girando sobre este con un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, de π y de $\frac{3\pi}{2}$.

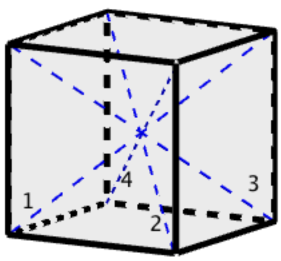
También tenemos 4 ejes de un vértice al vértice opuesto (las diagonales internas del cubo), realizando sobre este dos giros, uno de $\frac{2\pi}{3}$ y otro de $\frac{4\pi}{3}$.

Y, por último, 6 ejes desde el punto medio de una arista al punto medio de la otra, con un único giro de π. Por lo tanto, tenemos 24 movimientos que dejan fijo a un cubo.



Si numeramos las cuatro diagonales, cada movimiento va a producir una permutación de las mismas. Por ejemplo, si cogemos el eje que va desde el centro de la cara de arriba hasta el centro de la de abajo y aplicamos un giro de $\frac{\pi}{2}$ obtenemos (1,2,3,4). Un movimiento que deja fijas las cuatro diagonales es la identidad.

Sea G el grupo de movimientos fijos de un cubo y $\varphi : G \longrightarrow S_4$, como es inyectiva y $|G| = |S_4|$ tenemos que G es isomorfo a S_4.



El grupo de movimientos que dejan fijo a un octaedro es el mismo que el del cubo ya que son duales, y cualquier movimiento del cubo es un movimiento del octaedro inscrito en él y viceversa.

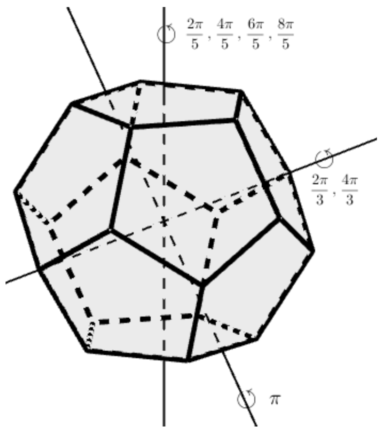
5.3. Grupo de rotaciones de un dodecaedro y de un icosaedro

Por la misma razón el grupo de movimientos de que dejan fijo a un icosaedro es el mismo que el del dodecaedro. Tomemos pues el dodecaedro.

Argumentando como antes, primero tomamos los 6 ejes que van del centro de una cara a la opuesta, 4 giros de $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}$ y $\frac{8\pi}{5}$; teniendo así 24 giros distintos.

Sean ahora los ejes que van desde el centro de un arista al centro de la opuesta, un total de 15 por tener 30 aristas. Se realiza 1 giro de π por eje; luego son 15 nuevos movimientos.

Por último, tenemos 10 ejes de un vértice al opuesto, ya que tiene 20 vértices. Se pueden hacer 2 giros de $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$; sumando 20 giros distintos más. Todos estos más la identidad suman 60 movimientos que fijan un dodecaedro.



Se verá en la demostración del Teorema 6.4 que el grupo de movimientos que deja fijo a un dodecaedro es un grupo simple y, por lo tanto, isomorfo a A_5.

Capítulo 6

Grupos finitos de movimientos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Proposición 6.1. *Si G es un grupo finito de movimientos hay un punto fijo común a todos los elementos de G.*

Demostración. Si $G = \{g_1,...,g_n\}$ y C es un punto cualquiera, el conjunto de puntos $\{C^{g_1},...,C^{g_n}\}$ queda fijo por cualquier elemento de G pues $\forall g \in G$, $G = \{g_1,...,g_n\} = \{g_1 g,...,g_n g\}$, luego por la Proposición 3.2 el baricentro de ese conjunto de puntos también queda fijo. Y como es único, por la Proposición 3.1, se tiene que este es el punto fijo común a todos los elementos de G. $\square$

Teorema 6.2. *Si G es un subgrupo finito de movimientos de $\mathbb{R}^2$ entonces es o cíclico C_n o es diédrico D_n.*

Demostración. Sea $H \leq G$ el subgrupo de los giros. Si $H \neq 1$ cogemos un $\alpha \in H$ siendo $\theta(\alpha)$ el ángulo que define α mínimo. Dado un $\tau \in H$ elegimos un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n\theta(\alpha) \leq \theta(\tau) < (n+1)\theta(\alpha) \Rightarrow 0 \leq \theta(\tau) - n\theta(\alpha) < \theta(\alpha).$$

Como $\theta(\alpha)$ es mínimo, y si se realizan dos giros sobre un punto el ángulo total es la suma de los ángulos de cada giro tenemos $\theta(\tau) - n\theta(\alpha) = \theta(\alpha^{-n}\tau) = 0$, luego $\alpha^{-n}\tau = 1$ y $\alpha^n = \tau$. Se tiene pues que H es cíclico de orden $\dfrac{2\pi}{\theta(\alpha)}$. Si $H = G$ tenemos que G es cíclico de orden $\dfrac{2\pi}{\theta(\alpha)}$. Si $H \neq G$ y sea $p \in G - H$, p es una simetria respecto de una recta que pasa por el punto fijo, que tiene orden 2, se tiene que $G = \langle p \rangle \langle \alpha \rangle$ y además $p\alpha p = \alpha^{-1}$. Por lo tanto, G es un grupo diédrico. $\square$

Lema 6.3. *En $\mathbb{R}^3$, si G es un grupo finito formado por giros de eje fijo es cíclico*

Demostración. Se hace igual que en el Teorema 6.2. $\square$

Teorema 6.4. *Sea G un grupo finito de movimientos, entonces es isomorfo a un grupo ciclico, es isomorfo a un grupo diédrico, el grupo de movimientos que dejan fijo a un tetraedro, A_4, el grupo de movimientos que dejan fijo a un cubo, S_4; o el grupo de movimientos que dejan fijo a un icosaedro, A_5.*

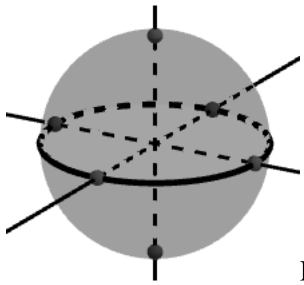
Demostración. Como G es un grupo finito de movimientos por 6.1 existe un punto fijo común a todos los elementos de G, O.

Consideramos la esfera unidad con centro este punto común, la denotamos por $\mathbb{S}$. Los dos puntos del eje sobre el que se produce un giro $g \in G$ que intersecan con la esfera unidad se denominan *polos de g*. Los polos son los únicos puntos en la esfera unidad que son fijados por un giro g distinto de la identidad.

Sea X el conjunto formado por todos los polos de todos los elementos de G, distinto de la identidad, $X = \{x \in \mathbb{S} | \ \exists\, e \neq g \in G \text{ t.q } x^g = x\}$.

Suponer $x \in X$ y $g \in G$, sea x un polo de $h \in G$. Luego $(ghg^{-1})(g(x)) = g(h(x)) = g(x)$, entonces $g(x)$ es un polo de ghg^{-1} y, por lo tanto, $g(x) \in X$. Tenemos pues una acción de G sobre X dada por

$$\begin{array}{rccl} \varphi(g): & G & \longrightarrow & S_X \\ & g & \mapsto & x \mapsto x^g = g(x) \end{array}$$



Esfera unidad y polos

Sea N el número de órbitas distintas, por Teorema 2.5

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

Si g es la identidad entonces $|X^g| = |X|$, y si $g \neq e$ entonces $|X^g| = 2$. Así,

$$N = \frac{1}{|G|} [2(|G|-1) + |X|]$$

Las órbitas forman una partición de X, escogiendo un polo de cada órbita $x_1, \ldots, x_N$, tenemos que $|X| = \sum_{i=1}^{N} |G(x_i)|$, por tanto,

$$N = \frac{1}{|G|} \left[2(|G|-1) + \sum_{i=1}^{N} |G(x_i)| \right]$$

De aquí se tiene que:

$$2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = N - \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{N} |G(x_i)| \tag{1}$$

Por Proposición 2.4 tenemos que $|G(x)| = \dfrac{|G|}{|G_x|}$, luego

$$N - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|G_{x_i}|} = \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}\right) \tag{2}$$

Suponiendo que G no es el grupo trivial. Tenemos que $1 \leq 2\left(1 - \dfrac{1}{|G|}\right) < 2$, pero cada estabilizador G_x tiene orden como mínimo 2 así que, $\dfrac{1}{2} \leq 1 - \dfrac{1}{|G_{x_i}|} < 1$ para $1 \leq i \leq N$. Por lo tanto, N es 2 ó 3.

Si $N = 2$, usando (1) tenemos que

$$2 - \frac{2}{|G|} = 2 - \frac{G(x_1)}{|G|} - \frac{G(x_2)}{|G|}$$

$$\frac{2}{|G|} = \frac{G(x_1)}{|G|} + \frac{G(x_2)}{|G|}$$

así $2 = |G(x_1) + |G(x_2)|$. Es decir, en cada órbita hay un polo, luego hay un total de dos polos. Como x_1 es un polo existe $g \in G$ tal que $x_1^g = x_1$ esto significa que el eje de giro es la recta que pasa por O y por

x_1. Sea $-x_1$ la intersección de este eje Ox_1 con $\mathbb{S}$, como $-x_1^g = -x_1$ entonces $-x_1$ también es polo. Así, $-x_1 = x_2$ y tenemos que todos los elementos de G tienen el mismo eje de giro, luego por el Lema 6.3 G tiene que ser cíclico.

Sea ahora $N = 3$, a partir de (2) tenemos que

$$2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = 3 - \left(\frac{1}{|G_{x_1}|} + \frac{1}{|G_{x_2}|} + \frac{1}{|G_{x_3}|}\right)$$

y, por lo tanto, que

$$1 + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{|G_{x_1}|} + \frac{1}{|G_{x_2}|} + \frac{1}{|G_{x_3}|}$$

La suma de los tres sumandos del término de la derecha es mayor que 1 y menor o igual que $\frac{3}{2}$ ya que $|G_{x_i}| \geq 2$, luego hay cuatro posibilidades:

(a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}$ con $n \geq 2$

(b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

(d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$

Caso (a): $|G_{x_1}| = |G_{x_2}| = 2$, $|G_{x_3}| = n$, $|G| = 2n$. Por Proposición 2.4 tenemos que el número de elementos en la órbita x_1 y en la órbita x_2 es n, y en la órbita x_3 hay 2 elementos.

Los elementos de G_{x_3} dejan fijo a uno de los puntos de la órbita de x_3, el otro punto lo llevan a un punto de la misma órbita, por lo tanto, a sí mismo, luego es fijo. Así se tiene que los elementos de G_{x_3} tienen los mismos puntos fijo, luego el mismo eje. Entonces por Lema 6.3 G_{x_3} es cíclico de orden n.

Los elementos de G_{x_3} actúan sobre los puntos de la órbita x_1, luego los n puntos de la órbita x_1 están situados sobre el mismo paralelo de la esfera respecto a los polos de la órbita x_3, además sobre este paralelo son equidistantes. Análogamente, con los n puntos de la órbita x_2.

Un elemento que no está en G_{x_3} debe llevar a cada polo de x_3 al otro, luego su eje debe ser perpendicular al eje de los elementos de G_{x_3} y el ángulo de giro será π. Así los n elementos de la órbita x_1 y los otros n de la órbita x_2 deben de estar en el ecuador con respecto a los polos de x_3. Trazamos en este ecuador un polígono regular de n vértices uniendo los polos de una órbita. Como G consiste en $2n$ giros, cada cual envía a este polígono regular a sí mismo, tenemos pues los movimientos que dejan fijo a un polígono regular de n vértices. Es decir, G es isomorfo al grupo diédrico $2n$.

Caso (b): Si $|G_{x_1}| = 2$ y $|G_{x_2}| = |G_{x_3}| = 3$, $|G| = 12$. Tenemos pues, $|G(x_1)| = 6$ y $|G(x_2)| = |G(x_3)| = 4$. G actúa sobre los elementos de $G(x_3)$, además si un elemento $e \neq g \in G$ fija 2 elementos y aquí hay 4 luego es una acción fiel. Luego G es isomorfo a un subrgrupo de S_4, veamos que contiene a todos los 3-ciclos. Sean a, b, c, d los cuatro polos de la órbita $G(x_3)$.

G_a es un grupo cíclico de orden 3, sea $e \neq g \in G_a$, si $b^g = b$ se tendría que $c^g = d$ y $d^g = c$ con lo que g de orden 2 y no puede ser pues $|G_a| = 3$.

Sea $b^g = c$ y $c^g = d$. Como G actúa sobre $G(x_3)$ así $G_a = \langle (b,c,d) \rangle$, análogamente ocurre con los otros estabilizadores, por lo tanto, G contiene a todos los 3-ciclos. Teniendo en cuenta los órdenes tenemos que $G \simeq A_4$. Así, por el capítulo anterior, G es el grupo de rotaciones que deja fijo un tetraedro.

Caso (c): Si, luego $|G| = 24$. En la órbita de x_2 hay 8 polos. Sea $y \in G(x_2)$, $-y$ es estabilizado por un elemento de orden 3 entonces se tiene que $-y \in G(x_2)$. Así, los 8 elementos de $G(x_2)$ son $\pm y_i$ con $i = 1,2,3,4$.

Veamos que G actúa fielmente sobre el conjunto $\{\pm y_1, \pm y_2, \pm y_3, \pm y_4\}$. En efecto tenemos una acción puesto que si $y_i^g = y_j$, la recta Oy_i la lleva a la recta Oy_j. $-y_i$ es la intersección de la recta Oy_i con $\mathbb{S}$ luego se tiene $-y_i^g = -y_j$. Sea g tal que $\pm y_i^g = \pm y_i$ $\forall i$. Se tiene en este caso que g es la identidad o tiene orden 2, pero si g es un elemento de orden 2 no estabiliza a ningún elemento de la órbita luego $y_i^g = -y_i$ $\forall i$.

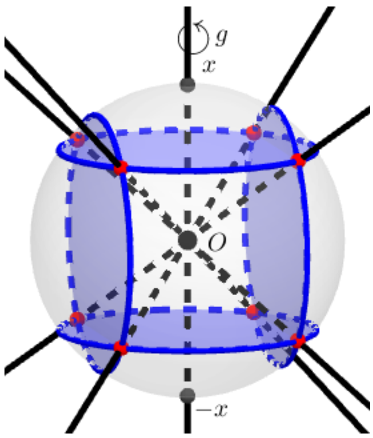
Sea y un polo de g. La recta Oy_i es perpendicular a Oy luego los elementos de $G(x_2)$ están en el mismo plano. Sea ahora $h \in G_{y_1}$ y $|h| = 3$, se tiene que que $y_2, y_2^h, y_2^{h^2}$ están en un plano perpendicular a la recta Oy_1 y además los cincos son polos de $G(x_2)$ lo que contradice que todos los polos de $G(x_2)$ están en el mismo plano.

Tenemos pues que g es la identidad y por lo tanto la acción es fiel. Asi G es isomorfo a un subgrupo de S_4 y como $|G| = 24$, $G \simeq S_4$.

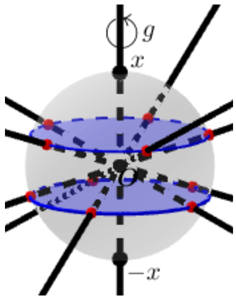
Los 8 polos de $G(x_2)$ corresponden con 4 ejes de giro y para cada uno hay un $g \in G$ de orden 3, luego tenemos 8 elementos de G distintos de la identidad que fijan algún polo de $G(x_2)$.

Sea ahora $x \in G(x_3)$, los elementos del estabilizador de x pueden tener orden 2 ó 4. Pero con un mismo polo, de orden solo hay un giro, el giro de ángulo π; luego $G_X \simeq C_4$.

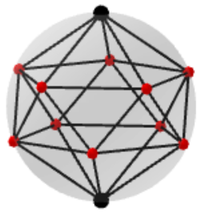
Si $g \in G_x$ y de orden 4, los ocho polos de $G(x_2)$ deben de estar en dos paralelos con respecto x y equidistantes.



Caso (d): Si $|G_{x_1}| = 2$, $|G_{x_2}| = 3$ y $|G_{x_3}| = 5$, luego $|G| = 60$. Sea $x \in G(x_3)$, como el estabilizador de x tiene orden 5 podemos tomar un generador g del estabilizador. Al considerar g como elemento de S_{12} debe fijar al menos otro elemento y como no puede fijar más de dos se tiene que los otros 10 están repartidos en dos 5-ciclos y situados en dos paralelos respecto x. Pero esto ocurre con todos los elementos de $G(x_3)$, luego los paralelos están en distintos hemisferios.



Además si se une cada polo con los cinco que tiene más próximos tenemos un poliedro regular de 12 vértices, 30 aristas y 20 caras que son triángulos equiláteros, el icosaedro.



Veamos ahora que este grupo G es simple, de donde se deduce que es isomorfo a A_5 por ser este el único grupo simple de 60 elementos.

Supongamos que existe $1 \neq N \trianglelefteq G$ y $N \neq G$. Podemos tomar N de modo que G/N se simple. Supongamos que 2 divide al orden de N. En este caso existe un elemento de N que tiene orden 2. Este elemento estabilizará a algún polo, en este caso el polo estará en la órbita de x_1. En esta órbita hay al menos 15 polos estabilizados por 15 elementos distintos. Por ser los estabilizadores de los elementos de una misma órbita conjugados, estos 15 elementos deben ser conjugados y por tanto están en N. Luego $|N| \geq 16$, pero N es un grupo de movimientos directos de orden menor que 60, $|N|$ divide a 60. Las posibilidades son $|N| = 20$ o $|N| = 30$, y además debería ser cíclico o diédrico y en los dos casos tendría al menos un elemento de orden 10 que no puede ser por como son los estabilizadores de los polos. Por consecuencia, el orden de N es impar y por tanto isomorfo a un cíclico de orden 3 o de orden 5. Tenemos pues $|G/N| = 20$ o $|G/N| = 12$ pero no hay grupos simples ni de 20 ni de 12 elementos. Así G es simple. $\square$

Bibliografía

[1] M.A. ARMSTRONG, *Groups and Symmetry*, 1988

[2] IAN STEWART, *Galois Theory*, 2015

[3] PAZ JIMÉNEZ, *Apuntes Teoría de Galois*, 2016

[4] PILAR GÁLLEGO, *Apuntes Álgebra Lineal*, 2013

[5] AGUSTÍ REVENTÓS TARRIDA, *Affine maps, Euclidean motions and quadrics*, 2011