Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Medida de magnitudes longitud y superficie: una propuesta didáctica para primer curso de ESO

Measurement of length and surface magnitudes: a didactic proposal for the first year of ESO

Autora

María Vallés Morales

Director

Rafael Escolano Vizcarra

Facultad de Educación

2018

ÍNDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar, indicando el curso y la asignatura en la que sitúas dicho objeto

Medida de las magnitudes longitud y superficie. Se impartirá en el curso de 1ºESO en la asignatura de Matemáticas

2. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Antes de responder a esta cuestión se considera conveniente situar el objeto en el currículo LOMCE de Educación Primaria y de Educación Secundaria Obligatoria dado que parte de los contenidos a enseñar se han presentado en la etapa de Educación Primaria.

Las magnitudes longitudes y superficie son objeto de estudio en Educación Primaria en dos bloques de contenidos. Estas magnitudes se estudian en el bloque de Medida, mientras que los conceptos de perímetro y área aparecen entre los contenidos curriculares de 5º y 6º curso en el bloque de Geometría del currículo aragonés de Matemáticas en Educación Primaria.

En efecto, el currículo aragonés para 6º curso de Matemáticas en Educación Primaria establece en el bloque de Medida los siguientes criterios de evaluación y sus respectivos estándares de aprendizaje son:

Crit.MAT.3.1. Seleccionar instrumentos y unidades de medida usuales, haciendo previamente estimaciones y expresando con precisión medidas de longitud, capacidad, peso/masa, superficie y volumen en contextos reales.

Est.MAT.3.1.1. Identifica las unidades del Sistema Métrico Decimal: longitud, capacidad, peso/masa, superficie y volumen.

Crit.MAT.3.2. Escoger los instrumentos de medida más pertinentes en cada caso, estimando la medida de magnitudes de longitud, capacidad y masa haciendo previsiones razonables.

Est.MAT.3.2.1. Estima longitudes, capacidades, masas, superficies y volúmenes de objetos y espacios conocidos, eligiendo la unidad y los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida y explicando de forma oral el proceso seguido y la estrategia utilizada.

Est.MAT.3.2.2. Mide con instrumentos, utilizando estrategias y unidades convencionales y no convencionales, eligiendo la unidad más adecuada para la expresión de una medida.

Crit.MAT.3.3. Operar con diferentes medidas.

Est.MAT.3.3.1. Suma y resta medidas de longitud, capacidad, masa, superficie y volumen en forma simple dando el resultado en la unidad determinada de antemano.

Est.MAT.3.3.2. Expresa en forma simple la medición de longitud, capacidad o masa dada en forma compleja y viceversa.

Est.MAT.3.3.3. Compara y ordena de medidas de una misma magnitud.

Est.MAT.3.3.4. Compara superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición.

Crit.MAT.3.4. Utilizar las unidades de medida más usuales, convirtiendo unas unidades en otras de la misma magnitud, expresando los resultados en las unidades de medida más adecuadas, explicando oralmente y por escrito, el proceso seguido y aplicándolo a la resolución de problemas.

Est.MAT.3.4.3. Resuelve problemas utilizando las unidades de medida más usuales, convirtiendo unas unidades en otras de la misma magnitud, expresando los resultados en las unidades de medida más adecuadas, explicando oralmente y por escrito, el proceso seguido.

Mientras que en el bloque de Geometría para 6º curso de Educación Primaria los siguientes criterios de evaluación y sus respectivos estándares de aprendizaje son:

Crit.MAT.4.3. Comprender el método de calcular el área de un paralelogramo, triángulo, trapecio, y rombo. Calcular el área de figuras planas.

Est.MAT.4.3.1. Calcula el área y el perímetro de: rectángulo, cuadrado, triangulo.

Est.MAT.4.3.2. Aplica los conceptos de perímetro y superficie de figuras para la realización de cálculos sobre planos y espacios reales y para interpretar situaciones de la vida diaria.

Crit.MAT.4.4. Utilizar las propiedades de las figuras planas para resolver problemas

Est.MAT.4.4.3. Calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

Est.MAT.4.4.4. Utiliza la composición y descomposición para formar figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras.

Tras un primer análisis del currículo de Educación Primaria se echa en falta mayor atención al reconocimiento y conservación de las magnitudes objeto de enseñanza a pesar de la existencia de un bloque específico de medida. Se priorizan las técnicas de medida en detrimento de aspectos conceptuales como el reconocimiento de la magnitud.

Centrándose en el currículo aragonés de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria en el bloque de Geometría se encuentra el descriptor de contenido "*Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples*"

El currículo aragonés y el currículo nacional establecen el mismo criterio de evaluación relacionado con este contenido: *Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado, expresar el procedimiento seguido en la resolución.*

El currículo nacional de la LOMCE para 1º y 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria asocia a este criterio los siguientes estándares de aprendizaje:

2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.

2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos.

Los **campos de problemas** se dividirán en cinco principales que se desarrollarán en el interior del trabajo, esta manera de diferenciar los campos de problemas se ha elegido porque se piensa que es la más adecuada para la comprensión de este objeto matemático. Esto es porque se considera que es preciso la comprensión de las magnitudes antes de pasar a medirlas (campo 1), se dedica un primer campo a trabajar aspectos conceptuales de las magnitudes longitud y superficie. Con la misma intencionalidad se propone realizar medidas directas (campo 2) antes que medidas indirectas (campo 3). Se dice que se realiza una medida directa cuando se reitera sucesivamente la unidad de medida, con sus múltiplos y submúltiplo, hasta completar la cantidad de magnitud a medir. En los casos que la medida se realice aplicando una fórmula o alguna operación aritmética se habla de medida indirecta. Del mismo modo, se ve necesario diferenciar y comparar las dos magnitudes estudiadas ya que se utilizan de manera simultánea y pueden intercambiarse si no se comprende adecuadamente. Adicionalmente se propone el campo 4 sobre la aproximación y estimación de cantidades de superficie y el campo 5 para estudiar la relación entre perímetro y área.

Campo C1L: Aspectos conceptuales de la magnitud longitud (conservación y comparación)

Campo C2L: Medida directa de cantidades de magnitud longitud

Campo C3L: Medida indirecta de cantidades de magnitud longitud

Campo C1S: Aspectos conceptuales de la magnitud superficie (conservación y comparación)

Campo C2S: Medida directa de cantidades de magnitud superficie

Campo C3S: Medida indirecta de cantidades de magnitud superficie

Campo C4S: Aproximación y estimación de cantidades de superficie

Campo C5LS: Relación longitud y superficie (perímetro y área)

Mientras los alumnos vayan resolviendo los diferentes campos de problemas irán apareciendo **técnicas** y **tecnologías** asociadas. Para el trabajo de la magnitud superficie se utilizarán las distintas formas de manifestaciones del área que plantea Corberán (1996): como cantidad de plano ocupado por la superficie (campo 1), el área como número de unidades que recubren la superficie (campo 2), el área como producto de dos dimensiones lineales (campo 3) y la disociación del área de la forma de la superficie del perímetro (campo 5) dada la confusión entre el área y el perímetro es una de las más habituales y más arraigada entre los estudiantes, que les lleva a cometer frecuentes errores.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Para el estudio del estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático de esta unidad didáctica se partirá del análisis y las críticas que hacen distintos autores sobre este tema. Después de esto, se analizarán dos libros actuales distintos. Uno de ellos es ONMAT, de la editorial Tekman BOOKS, que se trata de un libro virtual, libro que presenta metodologías renovadas, como por ejemplo plantear a los alumnos problemas para que ellos busquen una razón de ser del objeto matemático que van a conocer, pero del que se quiere ver si también ha renovado la manera de explicar este objeto matemático. Por otro lado, se analizará el libro de texto del proyecto de PITÁGORAS de la editorial SM y del cual la metodología que utiliza es similar a otros libros de texto.

La investigación en didáctica de las matemáticas aporta evidencias sobre que la introducción escolar y los campos de problemas de la medida de longitudes y áreas tienen margen de mejora. Se destacan, a continuación, algunas de las críticas sobre la enseñanza que resaltan algunos investigadores:

1. En referencia a la unidad de medida Luelmo (2001) indica que se pasa de la definición de las unidades de medida directamente a la manipulación numérica de estas, primando la asignación numérica frente a la comparación de magnitudes, también añade que no se encuentran actividades de descomposición y recomposición de figuras o que no se encuentran actividades de medida directa con sistemas de unidades no estándar y se introducen las unidades estándar del Sistema Métrico Decimal sin haber dado a los alumnos oportunidades para trabajar directamente con las magnitudes a medir. A la misma conclusión llega Chamorro (1998) con el instrumento de medida, haciendo pensar así que, por ejemplo, solo la cinta métrica puede medir metros y obviando otras unidades que midan la magnitud longitud, concluye que la enseñanza tradicional tiende a presentar de inmediato el sistema métrico decimal.
2. Las prácticas de enseñanza priorizan las técnicas de medida antes de haber asegurado que los alumnos comprenden importantes aspectos conceptuales de la magnitud. Estas críticas se manifiestan particularmente en el caso de la superficie, ya que rápidamente se introduce a los alumnos en el uso de fórmulas, sin haberles propuesto tareas de comparación de superficies. Además, con respecto al área, Gutiérrez (2004) afirma que existen problemas de comprensión ya que en muchos textos se denomina área a distintas cosas[1], teniendo en cuenta además que según Marmolejo y González (2015) en muchos textos se asume que es el alumno el que adquiere por si solo el concepto de superficie.

[1] Dado que existe confusión entre los términos de área y superficie, consideraremos que *área* es la magnitud que expresa la cantidad de la extensión de una superficie; y *superficie* es el objeto geométrico: es un conjunto de puntos de un espacio euclídeo que forma un espacio topológico bidimensional, es decir, que visto de cerca se parece al espacio euclídeo bidimensional (Cid y Escolano, 2013)

3. Afirman Marmolejo y González (2015) que se presentan siempre figuras prototípicas, alejándolas de la vida real y alejando con ellas la razón de ser de este objeto matemático, son figuras convexas y con formas estándar.

4. Además, Chamorro (1998) afirma que, se presentan siempre figuras del mundo real en el micro-espacio, destruyendo así el orden de magnitud y nunca utilizando objetos de la vida real para hacer mediciones en 2 dimensiones pero en el espacio, midiendo siempre con regla y en cm, produciendo con todo esto gran confusión en los alumnos.

5. Chamorro (1998) crítica la restricción que cometen los libros de texto al plantear actividades en las que los objetos no pueden ser medidos con una unidad de medida mayor que el objeto a medir, produciendo así que nunca se fraccione la unidad.

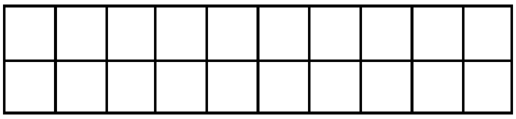
6. Marmolejo y González (2015), critican que hay pocas actividades o ninguna que muestren transformaciones sobre figuras que conservan el área o el perímetro.

7. Además, como indica Luelmo (2001), no se encuentran problemas de estimación, no se realizan ejercicios de medición, haciendo así que no tenga sentido, como decía Chamorro (1998), realizar ejercicios de aproximación ni de error, relacionándolo con el problema de que todas las figuras son ideales, vuelve a alejarse de esta manera de la razón de ser de este objeto matemático.

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Los dos libros que se analizan presentan algunas de las limitaciones que acabamos de indicar (se señala con un número entre paréntesis que hace referencia a las críticas y comentarios anteriores), que permiten responder a esta pregunta:

- En el libro de SM, las unidades didácticas previas a las del estudio de este objeto son aquellas que estudian los sistemas de medida donde conocen los conceptos de de longitud, superficie y volumen y las unidades del sistema métrico decimal con las que se miden estos, pero como se ha analizado en los distintos libros de texto no se proponen ejercicios de comparación (2). En el tema de sistemas de medida no aparece ningún ejemplo visual que les ayude a comprender el concepto de superficie, ya que solo se lo explica verbalmente para luego presentar los cambios de unidades y las unidades agrarias, en el caso de la superficie y, de manera casi análoga, en el caso de los volúmenes (1,2,4). En el caso de la superficie el texto opta por justifica la fórmula del cálculo del área de un rectángulo para, a partir, de esta fórmula justificar la fórmula del área de otras figuras. El texto apenas propone tareas de medida directa con unidades arbitrarias (2). Propone, por ejemplo, lo siguiente:



10 cuadrados de base y 2 cuadrados de altura, su área es 20. Para extender desde aquí al resto de áreas. Por lo tanto, lo que propone este texto si lo se compara con lo que nos proponen los distintos autores es insuficiente. Aunque hay cosas que se hacen bien y se está pretendiendo que se comprendan algunos conceptos, da la sensación que la introducción del concepto se hace de manera rápida, no poniendo énfasis en la comprensión de este, teniendo en cuenta además los problemas que surgen de esta introducción. Por otro lado, no se plantea ninguna actividad en la que se relacione el área con el perímetro, ni en la que sea necesario que se conserven (6, ni mucho menos se encuentran problemas de estimación (7).

- En el libro ONMAT se habla del sistema anglosajón de medidas comparándolo con el metro, explica un poco de historia sobre el metro, pero se acaba explicando las conversiones, volviendo a dotar de importancia a la aritmética y a las fórmulas de cálculo de áreas (1 y 2). Sin embargo, se plantean tareas diferentes, como mostrar distintos elementos de medida para las unidades, presentar unidades de medida antropométricas, hacer ejercicios que les hacen necesario pensar primero en cómo será el área y luego plasmarla, y en otro trata figuras tan estándar como las que anteriormente nombrábamos, pero eso sí, sigue trabajando en el micro-espacio (4) y además, platea problemas que les permite comprender el perímetro.

Tras este análisis de los dos libros de texto se intuyen algunas mejoras en el tratamiento de estos contenidos, sin embargo, no llegan verdaderamente a hacerlo dado que hay un insuficiente tratamiento de los aspectos conceptuales de las magnitudes longitud y superficie: ausencia de trabajo de los aspectos conceptuales de la magnitud, excesiva aritmetización del proceso de medida, primando la asignación numérica frente a la comparación de magnitudes; también dado a que no se encuentran actividades de descomposición y recomposición de figuras o que no se encuentran actividades de medida directa con sistemas de unidades no estándar y se introducen las unidades estándar del Sistema Métrico Decimal sin haber dado a los alumnos oportunidades para trabajar directamente con las magnitudes a medir, además de escaso trabajo de las magnitudes longitud y superficie en contextos tridimensionales.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

En el análisis anterior ya se han tenido en cuenta algunos campos de problemas, pero se planteaban como introducción al objeto matemático. En este apartado se hará el mismo análisis viendo lo que hacen los dos libros de texto que hemos analizado. Se ha visto en el análisis de los autores que la manera en la que se afronta este concepto matemático en muchos libros de texto hace que no se promueva la comprensión de magnitudes longitud y superficie.

- En el libro de SM, se observa que, a la hora de plantear los campos de problemas, directamente se empieza con el cálculo de áreas mediante fórmulas, que en nuestro trabajo etiquetamos como campo de problemas 3 (2), siendo lo opuesto a lo que se debería hacer, ya que se ha estudiado que estas técnicas son las más difíciles de comprender por los alumnos, siendo más aconsejable trabajar primero la idea de área como cantidad de plano que ocupa, para continuar con unidades bidimensionales y finalizar con las fórmulas (Corberán) (3). No se encuentran actividad de descomposición y recomposición de figuras, pero a la hora de desarrollar las distintas fórmulas de los polígonos que deben conocer se apoya en la tecnología de descomposición y recomposición (1), relacionando el área de los paralelogramos, triángulos y trapecios con las del rectángulo y las de los polígonos regulares con la del triángulo. Por otro lado, se observa un gran interés por introducir rápidamente las unidades del sistema métrico decimal, en vez de mostrar distintas actividades conceptuales que ayuden a comprender la longitud y la superficie y permitan diferenciarlas con claridad, estas aparecen desde el principio del tema, midiendo la mayoría de los casos en cm (1 y 5). Además, no se aprecian que los libros propongan actividades de comparación de cantidades de la misma magnitud sin medir, aunque proponen algún problema, al final del tema en el que deben comparar áreas de distintas figuras. Todos los problemas se enuncian sobre el papel, luego se proponen en el micro-espacio, incluso aquellos que hablan de situaciones de la vida real (4). Además, todos los ejercicios que propone el texto son del mismo tipo: en todos se proporcionan uno datos y se debe calcular el área o el perímetro, en ninguno se encuentra el procedimiento inverso.

- En el libro ONMAT, se observa algunas diferencias que se van a destacar: de la misma manera que en SM se observa un gran interés por introducir rápidamente las unidades del sistema métrico decimal aunque no con tanta prisa, ya que plantea distintas actividades de medidas antropométricas y otros sistemas de medida (1) hilándolo con esto realiza actividades con las que se sale del micro-espacio, permitiendo así darle más sentido a la razón de ser. Al igual que el texto de SM propone comenzar el cálculo de áreas mediante fórmulas obviando el trabajo previo de medida directa de cantidades de superficie (2). Además, igual que en el anterior, no se aprecia que este libro proponga actividades de comparación de cantidades sin medir. Tampoco se plantea ninguna actividad en la que se relacione el área con el perímetro, ni en la que sea necesario que se conserven estas magnitudes (6). Por otro lado, a pesar de que no se trabaja la estimación, si que plantea problemas que se le acercan.

Se observa en ambos libros que se trabaja fundamentalmente el campo de problemas de medidas indirectas y las tecnologías que se utilizan son básicamente la justificación de las técnicas de cálculo de las áreas de polígonos y la memorización del área del círculo y del sector circular.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

En muchos libros de texto, según aportan Marmolejo y González (2015), se asume que el alumno es el que adquiere por si solo el concepto de área, ya que dentro de los libros se observa que se pasa directamente a su medida o que se define el concepto de manera abstracta sin proponer actividades. Esto hace que si el alumno no tiene visión espacial para comprender lo que está realizando al principio, ya que la única relación que suelen tener con su concepto geométrico se realiza al principio de las explicaciones, terminará memorizando fórmulas, de manera que algunas le parecerán difíciles de aprender, sin saber qué es lo que está calculando en realidad y cometiendo, por lo tanto, errores. En estas condiciones no sabrá resolver problemas en los que la superficie de la figura de la que se tenga que calcular el área no sea de la forma de las figuras de las que se ha aprendido la fórmula. En relación a esto, Gutiérrez (2004) afirma que muchos estudiantes muestran que comprenden el concepto de área en ejercicios de recorte y pegado pero que, cuando les hacen preguntas referidas a ella, se centran en la realización de cálculos y no utilizan estas propiedades. Haciendo con esto que aquellos que tienen mejor concepción numérica del área obtienen mejores resultados.

Como hemos indicado anteriormente, la enseñanza tradicional concede excesiva importancia a las tareas de medir longitudes y superficies con el SMD, obviando la comprensión de la magnitud en sí. Esto supone una dificultad para comprender otros sistemas de medida y la idea de la medida de una magnitud, relacionando, así, el instrumento de medida con la unidad y añadiendo, también aquí, la creencia falsa de que la unidad de medida debe ser siempre menor que el objeto a medir, y considerando innecesario fraccionar la unidad. Además, no se encuentran actividad de descomposición y recomposición de figuras, lo cual dificulta que el alumno desarrolle la comprensión sobre las superficies que estas técnicas aportan.

Todas estas críticas, incluidas la excesiva aritmetización de la medida, llevan a la conclusión de que la enseñanza tradicional de la medida de estas magnitudes posee gran margen de mejora.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Para afrontar la unidad didáctica es necesario que los alumnos tengan conceptos claros con respecto al bloque de Geometría, por ejemplo reconocer las figuras geométricas más conocidas y sus propiedades, no solo en el papel sino también en la naturaleza o en el arte. Tener nociones del perímetro y el área.

Con respecto al bloque de Medida se supone que tienen que tener claro el concepto de la magnitud a medir y el significado de medida, conociendo así las unidades que se encargan de medir la longitud y la superficie, el proceso de medir y los instrumentos que se utilizan y además deberán diferenciar los momentos en los que es necesario medir con exactitud o cuando es suficiente con una aproximación. Con todo esto, los alumnos que empiezan la Educación Secundaria se supone que han tratado la mayoría de los contenidos relacionados con la medida, salvo aspectos conceptuales de la magnitud que no se trabajan en Educación Primaria y que se proponen trabajar en la unidad didáctica a partir de los campos de problemas que se definen posteriormente.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Para poder responder a esto se necesita primero recurrir al currículo de Educación Primaria y qué aprenden los alumnos al concluir esta etapa educativa.

Se supone que el alumno debe tener conocimientos sobre el bloque de Medida y el de Geometría. Sobre el primero se presenta la necesidad de conocer unidades, los procesos de medir, los números que expresan estas medidas, los instrumentos para hacerlo y su uso y la habilidad para diferenciar entre medir con exactitud o de modo aproximando, adquiriendo este sentido por experiencia de la vida real. Aunque desde las lecturas seleccionadas para el trabajo se puede decir que, los estudios constatan que, estos objetivos en la vida real no se cumplen y, los alumnos, llegan a secundaria sin dominar el sentido de medida, asociando las actividades de medida de longitudes y superficies con ejercicios en los que prima el cálculo aritmético, además de tener dificultades para cuantificar el resultado cuando la medición no es exacta.

Por otro lado, se supone que durante la etapa previa, la relación con la geometría tiene que ver con comprender conceptos espaciales y ser capaces de observarlos en su entorno, buscar relaciones y desarrollar la intuición. Para ello se proponen contenidos de clasificación de triángulos, cuadriláteros, identificar circunferencias y círculos, calcular perímetros y áreas de figuras estándar y de objetos de la vida cotidiana, componer y descomponer figuras planas y saber resolver problemas. De nuevo se observa en las investigaciones que esto tampoco se consigue ya que conceptos como el de superficie terminan relacionándolo con técnicas de productos unidimensionales que han memorizado.

Se podría decir con este análisis que en el currículo educativo hay una intención clara de que se haga un aprendizaje adecuado y que deberíamos asumir que los alumnos que comienzan secundaria están en condición de comprender los conceptos de longitud y superficie. Sin embargo, por las razones indicadas anteriormente, sabemos que los alumnos no llegan a la Educación Secundaria con la base adecuada, ya que esta ha prestado demasiada atención a las actividades aritméticas y a enseñar la medida de manera teórica y no con problemas que les hagan enfrentarse a comprenderla, lo cual hace necesario cuestionar que los alumnos estén preparados para aprender estos conceptos y por lo tanto dedicar parte de la unidad a la comprensión de aspectos conceptuales de las magnitudes longitud y superficie.

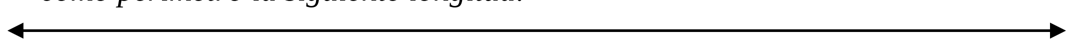
3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Para comprobar que los alumnos han adquirido en Educación Primaria los conocimientos que se consideran necesarios para desarrollar el tema se les hará una prueba previa de nivel, con la que se evaluarán distintos conceptos, relacionados con los criterios que mostramos a continuación. Para cada criterio se indican los ejercicios en los que se evalúa:

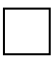
A. Comprende la conservación de las magnitudes longitud y superficie: 1, 6 y 7.
B. Compara cantidades de longitud o de superficie: 1.
C. Conoce figuras geométricas y algunos elementos básicos de dicha figuras: 1, 3, 5 y 7.
D. Conoce la formación de figuras planas a partir de otras por descomposición o composición: 4, 6 y 7.
E. Calcula la cantidad de superficie, con la medida directa de una cantidad de superficie con unidades enteras y menor que la cantidad a medir: 2, 3 y 4.
F. Relaciona los conceptos de perímetro y área: 1.
G. Convierte medidas de cantidades expresadas con diferentes unidades del sistema métrico decimal de longitud y superficie: 8.

<u>Enunciado de los ejercicios de la prueba inicial:</u>

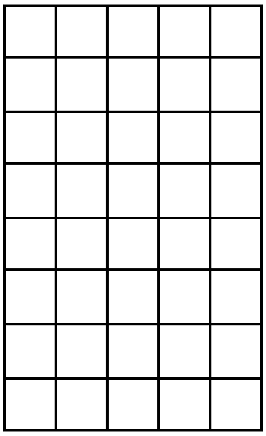
1. *Dibujar tres figuras: un triángulo, un cuadrado y un pentágono que tengan como perímetro la siguiente longitud:*

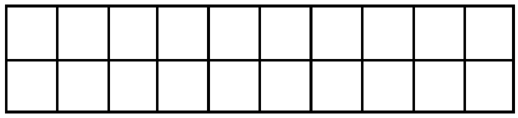


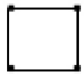
¿Cuál de ellas tiene área mayor? ¿Por qué?

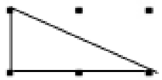
2. *Si se considera como unidad la siguiente figura, que tiene una superficie de $1u^2$:* 

¿Cuánta superficie tienen las siguientes figuras?

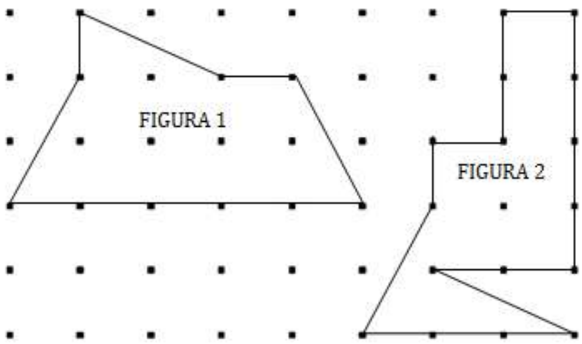




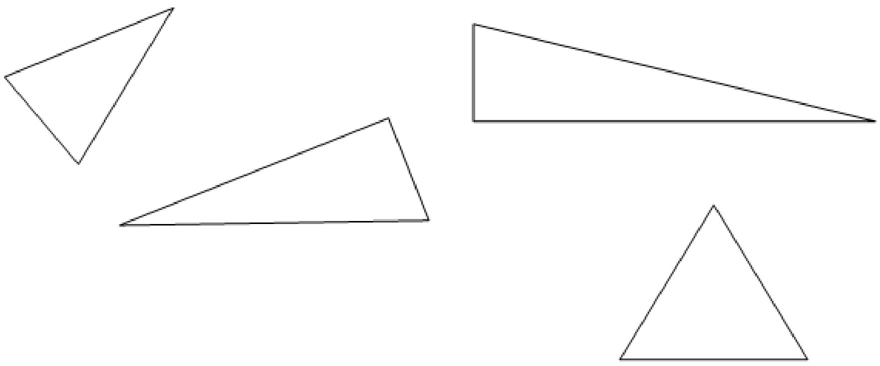
3. *Suponiendo que la unidad de medida es el cuadrado de superficie $1u^2$*  *.*
   Dibuja 3 figuras diferentes con superficie 4 u^2 y una con superficie $7u^2$ sobre la trama cuadrada que se te entrega.

4. *Si consideras que la figura tiene superficie $1u^2$.* 

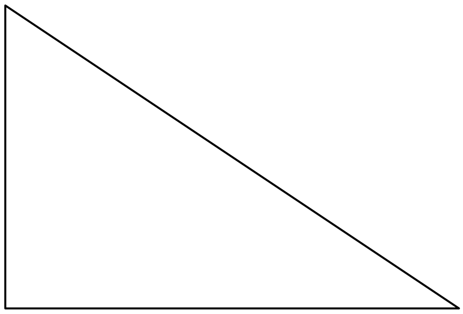
Calcula la superficie que tienen las figuras que aparecen en la cuadrícula de abajo:



5. *En cada triángulo elige una base y dibuja su altura correspondiente.*



6. A continuación tienes un triángulo, que tiene superficie 13 cm^2. Dibuja otras dos figuras, que tengan más lados y que tengan la misma superficie. Puedes utilizar el triángulo de cartulina que se te entrega.



7. De las siguientes afirmaciones elige las respuestas correctas:

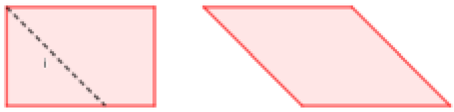
7.1 En el siguiente triángulo

a) El lado b es más largo que el lado c

b) El lado b es más corto que el lado c

c) El lado b es igual que el lado c

d) No se puede saber



7.2 De la siguientes figuras

a) El rectángulo tiene más área que el paralelogramo

b) El rectángulo tiene menos área que el paralelogramo

c) El rectángulo tiene la misma área que el paralelogramo

d) No se puede saber

8. Expresa el resultado de cada una de estas medidas con la unidad indicada

8.1 de longitud:

12 m = ……………… *dm*

3,4 km = ……………… *cm*

254 mm = ……………… *m*

0,05 cm = ……………… *hm*

8.2 de superficie:

$2 m^2$ = ……………… cm^2

$1{,}7\ m^2$ = ……………… dm^2

$34{,}1\ hm^2$ = ……………… m^2

$12\ dm^2$ = ……………… cm^2

$6100\ dm^2$ = ……………… cm^2

$456 cm^2$ = ……………… m^2

Metodología: La prueba inicial se realiza en el aula individualmente. Duración de la actividad: 50 minutos

Los resultados de la prueba se tendrán en cuenta a la hora de introducir conceptos a lo largo de la unidad didáctica, se elegirán para recordar aquellas respuestas correctas o se propondrán nuevas actividades que sean análogas a las que hayan obtenido peores resultados.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemáticos

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

En Frías, Gil y Moreno (2001) se señala que las personas aprendemos las magnitudes longitud y superficie siguiendo las siguientes etapas: percepción, comparación, medida y estimación. Esto es válido para cualquier magnitud porque su comprensión sigue un proceso que pasa por los cuatro estadios que se acaban de nombrar. El proceso comienza con la percepción de la cualidad que se va a medir, sigue con la comparación de objetos que comparten el atributo común medible, continúa con la medida, es decir, con la asignación de un número a una determinada cantidad de magnitud, y se completa este proceso con la estimación, que es una habilidad que consiste en realizar una aproximación de la medida de una cantidad de magnitud a ojo, sin utilizar instrumentos de medida. Estas fases se han tenido en cuenta al diseñar los campos de problemas que componen la propuesta didáctica de este trabajo.

Ahora bien, las razones de ser históricas son tan antiguas como el comercio humano o las relaciones humanas, ya que no se puede comprender actividades como ajustar una cuerda o un hacha a su mango sin medir. Se sabe que históricamente se paso por medidas antropométricas, luego por medidas ergométricas para acabar con medidas convencionales. Por esta razón, resulta muy complicado reproducir una génesis histórica, tan dilatada en el tiempo, en un aula de Educación Secundaria.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Como se acaba de indicar resulta muy difícil reproducir la génesis histórica en el aula. Por otra parte, el problema del cálculo del área desde las matemáticas, está actualmente resuelto con Teorías de la Medida y esto requiere un nivel de abstracción que no se tiene en Secundaria, según Moreno, Gil y Frías, (2001), ante esta disyuntiva se propone realizar en el aula un acercamiento de las razones históricas planteando algunos problemas que pongan en juego la necesidad de buscar técnicas de medida, todo esto, siguiendo las cuatro fases que se han comentado y que son percepción, comparación, medida y estimación.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

1. Problemas para introducir la magnitud longitud:

ACTIVIDAD L1

Preparación de la actividad: Cada alumno recibe los siguientes ejercicios escritos en un folio y se dejan en la mesa del profesor distintos utensilios de medida que el alumno podrá utilizar: varios ovillos de lana, tiras de papel o plástico (como de un metro de longitud), trozos de cartulina cuadrados y folios.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Elige un objeto que haya en la clase y mídelo. Después elige una cantidad de longitud de ese objeto y mide dicha cantidad. NO PUEDES UTILIZAR UNA REGLA CONVENCIONAL), pero deberás elegir una unidad de medida, la que quieras. Después rellena la siguiente tabla:*

OBJETO	*Magnitud que consideras*	*¿Con qué objeto realizas la medición?*	*¿Cuál es la unidad de medida?*	*Resultado*

Intervención del profesor: El profesor animará a los alumnos a que midan utilizando como unidad de medida la que les parezca más oportuna, pueden utilizar cualquier utensilio de la clase para hacerlo, incluso su propio cuerpo. Animará a que no tengan miedo de probar, insistiendo en que no hay forma de medición incorrecta a priori.

Después se procederá a realizar una puesta en común para que los alumnos indiquen qué procedimientos de medida han utilizado. Es importante que los alumnos perciban que aún midiendo un mismo objeto obtienen mediciones diferentes al utilizar diferentes unidades de medida. Resulta conveniente precisar estos términos. En este sentido en Cid y Escolano (2013, p. 5) se indica que el “vocabulario que aparece en el ámbito de las magnitudes y de sus técnicas de medida es muy complejo. De hecho, es necesario distinguir entre los siguientes términos:

- el objeto físico soporte de la cantidad de magnitud a medir.

- la magnitud a medir, es decir, la característica o cualidad del objeto susceptible de ser cuantificada.

- la cantidad de magnitud, es decir, el grado o intensidad de magnitud que posee el objeto físico o teórico considerado.

- la unidad de medida o cantidad de magnitud a la que se adjudica el valor 1.

- el objeto soporte de dicha unidad de medida.

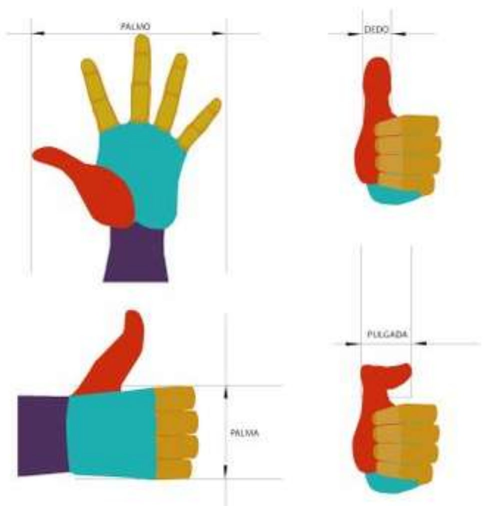
- el instrumento o instrumentos de medida necesarios para poder comparar la unidad de medida con la cantidad de magnitud que se quiere medir.

- la medición o técnica de medir, como conjunto de acciones que se ponen en marcha o proceso llevado a cabo para obtener la medida de una cantidad de magnitud.

- la medida de la cantidad de magnitud, resultado del proceso de medir, que viene dada por un número y una referencia a la unidad de medida empleada."

ACTIVIDAD L2

<u>Enunciado de la tarea:</u> *Antes se utilizaban medidas antropométricas (que venían de alguna parte del cuerpo) para expresar algunas medidas. En este folio que os entrego veréis como se definen diversas unidades de medida de longitud como: pulgada, palmo, dedo y palma.*



Considerando el objeto del ejercicio anterior y utilizando las cuatro unidades que puedes hacer con tu propia mano, mide su cantidad de longitud y rellena de nuevo la siguiente tabla:

OBJETO:			
Palmo	***Dedo***	***Palma***	***Pulgada***

Compara tus resultados con los de tus compañeros, ¿crees que este tipo de medidas tienen alguna desventaja? ¿Se te ocurre como solucionarla?

Intervención del profesor: El profesor señalará que deben medir con sus propias manos y no con la imagen que se les entrega. Después se procederá a realizar una puesta en común para que los alumnos indiquen qué conclusiones han sacado, sabiendo que lo que se pretende que ocurra es que se encuentren con resultados distintos aunque próximos para el mismo objeto medido con la misma unidad de medida, por ejemplo: dos alumnos que midan con el pulgar la longitud de la mesa, ambos verán que sus resultados se aproximan pero no son exactamente iguales y se encuentran, por lo tanto, con la necesidad de unificar la unidad. Por otro lado, se pretende que observen la relación inversamente proporcional que existe entre el tamaño de la unidad y el resultado de la medida.

2. Problemas para introducir la magnitud superficie:

ACTIVIDAD S1

Preparación de la actividad: Cada alumno recibe los siguientes ejercicios escritos en un folio y se dejan en la mesa del profesor las tijeras.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Ramón vivía en el pueblo y tenía una charquita para sus patos como la que se ve en la primera figura. Ahora se va a vivir a la ciudad, pero sus padres le han prometido que vivirán en una casa con jardín, que también tiene una charca, como la segunda imagen. ¿En cuál de las charcas estarán más anchos los patos de Ramón?*

Intervención del profesor: El profesor animará a los alumnos a que utilicen los procedimientos que consideren más oportunos, pueden utilizar las rejillas, pueden recortar una de las charcas y superponerla a la otra, pueden utilizar otra estrategia y explicarla posteriormente, etc. Cuando finalicen cada grupo explicará como lo ha hecho y el profesor hará las correcciones y las aclaraciones necesarias. Como es previsible que aparezca la técnica de descomposición y composición de cantidades de superficie el profesor aprovechará para institucionalizarla.

Acabará diciendo que con este problema de medir se han encontrado todas las civilizaciones y que se han ido encontrando técnicas y herramientas para facilitar la medición, como buscar figuras más simples de las que se podían encontrar patrones o tratar de aproximar la medida y por ello necesitar mejorar las técnicas de medida, para que ésta fuera más precisa. Añadiendo que muchas de estas técnicas las irán conociendo a lo largo de la unidad.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La manera en la que se llevarán a cabo estos problemas será entregándole a los alumnos unas fotocopias con estos problemas al comenzar cada campo de problemas: longitud y superficie.

Estas actividades que se proponen seguirán la misma metodología: en el caso de los problemas de longitud los alumnos tendrán alrededor de 15 minutos para resolver cada uno de los problemas, en el aula de manera individual, mientras que en el caso del problema de superficie será en grupos de cuatro alumnos. Después de realizarlos habrá una puesta en común donde el profesor pedirá que expliquen la estrategia utilizada en cada grupo. Durante la realización del problema, el profesor responderá a las preguntas que plantean los alumnos y observará las diferentes estrategias utilizadas para la resolución, que tendrá en cuenta a la hora de poner en común, para así elegir como quiere que aparezcan los contenidos en el aula. Para acabar institucionalizará las técnicas y las tecnologías que surjan como resultado de la resolución de los problemas planteados.

E. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula

Para facilitar la comprensión de la secuencia de actividades se van a presentar en primer lugar los tres campos de problemas que hacen referencia a la magnitud longitud, después se presentarán cuatro campos de problemas para la magnitud superficie y, finalmente, el campo de problemas llamado "relación perímetro y área" que relaciona las dos magnitudes.

En el diseño de la secuencia de los campos de problemas se ha seguido a Corberán (1996) que propone para el caso del área que el orden de aprendizaje sea el siguiente: primero procedimientos geométricos, luego procedimientos numéricos utilizando una unidad de medida bidimensional para acabar con procedimientos numéricos de medida unidimensional.

Teniendo en cuenta esto la distribución de los campos de problemas es la siguiente:

Magnitud longitud

Campo C1L: Aspectos conceptuales de la magnitud longitud (conservación y comparación)

Campo C2L: Medida directa de cantidades de magnitud longitud

Campo C3L: Medida indirecta de cantidades de magnitud longitud

Magnitud superficie

Campo C1S: Aspectos conceptuales de la magnitud superficie (conservación y comparación)

Campo C2S: Medida directa de cantidades de magnitud superficie

Campo C3S: Medida indirecta de cantidades de magnitud superficie

Campo C4S: Aproximación y estimación de cantidades de superficie

Relación longitud y superficie

Campo C5LS: Relación longitud y superficie (perímetro y área)

Se van a plantear 58 problemas de los distintos campos distribuidos del siguiente modo:

Aspectos conceptuales de la magnitud longitud (conservación y comparación)	C1L. 1, 2, 3, 4, 5, 6
Medida directa de cantidades de magnitud longitud	C2L. 1, 2, 3
Medida indirecta de cantidades de magnitud longitud	C3L. 1, 2, 3, 4
Aspectos conceptuales de la magnitud superficie (conservación y comparación)	C1S. 1, 2, 3, 4, 5, 6
Medida directa de cantidades de magnitud superficie	C2S. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Medida indirecta de cantidades de magnitud superficie	C3S. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22
Aproximación y estimación de cantidades de superficie	C4S. 1
Relación longitud y superficie (perímetro y área)	C5LS. 1, 2, 3, 4, 5, 6

CAMPOS DE PROBLEMAS DE LA MAGNITUD LONGITUD

C1L. Aspectos conceptuales de la magnitud longitud (conservación y comparación)

ACTIVIDAD C1L.1

Objetivo: Mostrar un aspecto conceptual de la longitud que en este caso consiste en que la comparación directa de cantidades de longitud exige la rigidez de los objetos a comparar.

Preparación de la actividad: Cada alumno recibe dos trozos de lana entre 20 y 40 cm, donde los de un color serán más grande que los del otro (siempre el mismo).

<u>Enunciado de la tarea:</u> Se te entregan dos trozos de lana de dos colores diferentes. Di cuál de los dos en más largo.

Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos.

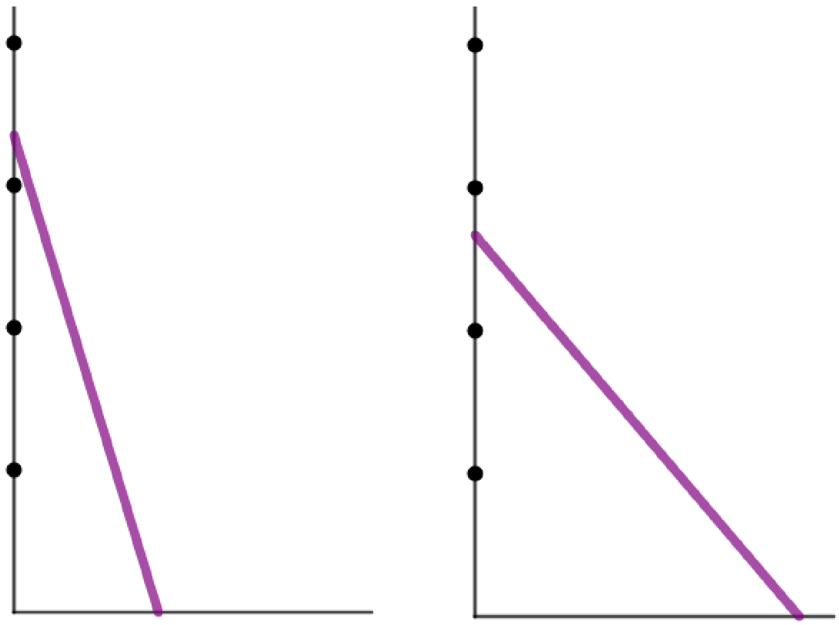
Intervención del profesor: El profesor animará a los alumnos a que expresen las estrategias utilizadas para comparar la longitud de los trozos de lana: llevando una sobre la otra de modo que coincida un extremo, con la exigencia de rigidez de los objetos a comparar. Cuando los alumnos hayan terminado la tarea, ellos mismos pondrán de manifiesto que la magnitud que expresa la largura o cortedad de un objeto se denomina longitud. Además, se espera que los alumnos reconozcan la necesidad de que los objetos a comparar o medir estén rígidos. Frías, Gil y Moreno (2001) afirman que esta técnica informa de la conservación de la magnitud longitud: “la rigidez es la realización física de la propiedad física que llamamos invarianza de la forma y medida bajo movimientos”. Aparecerá la técnica de exigencia de rigidez de los objetos a medir o comparar su cantidad de longitud.

ACTIVIDAD C1L.2

Objetivo: Comparar dos cantidades de longitud utilizando un objeto intermedio como puede ser una tira u hoja de papel.

Preparación de la actividad: A cada alumno se le entrega un folio con los dibujos que se muestran a continuación. No se les entrega ningún instrumento de medida como regla o compás.

Enunciado de la tarea: *Estas escaleras que están apoyadas sobre la pared ¿tienen la misma longitud? Si no es así, ¿cuál es más larga? ¿Cómo lo has sabido?*



Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos.

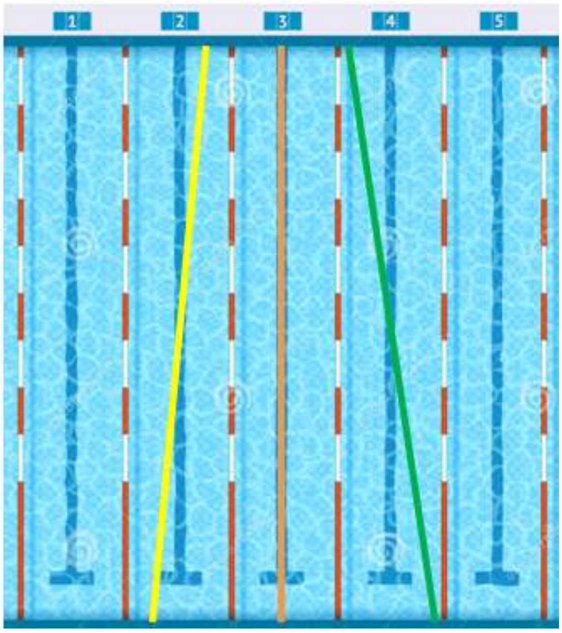
Intervención del profesor: El profesor pedirá a algunos alumnos que expongan sus respuestas, las dos escaleras miden lo mismo pero seguro que hay alumnos que piensan que no, es interesante escuchar sus argumentaciones. Finalizará explicando que no solo importa la altura o la distancia a la que está la escalera de la pared, que es importante medir la longitud de la escalera. Preguntará a los alumnos por el procedimiento que han utilizado para comparar las dos cantidades de longitud, se espera que los alumnos digan que han usado el borde de un folio como objeto intermedio de comparación. En este momento, se pondrá de manifiesto que la magnitud longitud cumple la propiedad transitiva que permite utilizar objetos intermedios para comparar cantidad de longitud. En esta actividad aparecerá la técnica de comparación utilizando objetos intermedios.

ACTIVIDAD C1L.3

Objetivo: Afianzar la conservación de la longitud, si bien los alumnos pueden comparar las longitudes utilizando un objeto intermedio (tira u hoja de papel).

Preparación de la actividad: A cada alumno se le entrega un folio con el dibujo que se muestra a continuación.

<u>Enunciado de la tarea:</u> *Observa el siguiente dibujo donde las líneas amarilla, naranja y verde son el recorrido que hacen tres nadadores y responde correctamente a la siguiente pregunta, ayudándote de lo que necesites:*



El nadador que menos distancia recorre es el de la línea:

a) Amarilla

b) Naranja

c) Verde

d) Los tres recorren lo mismo

e) No puede saberse

Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos.

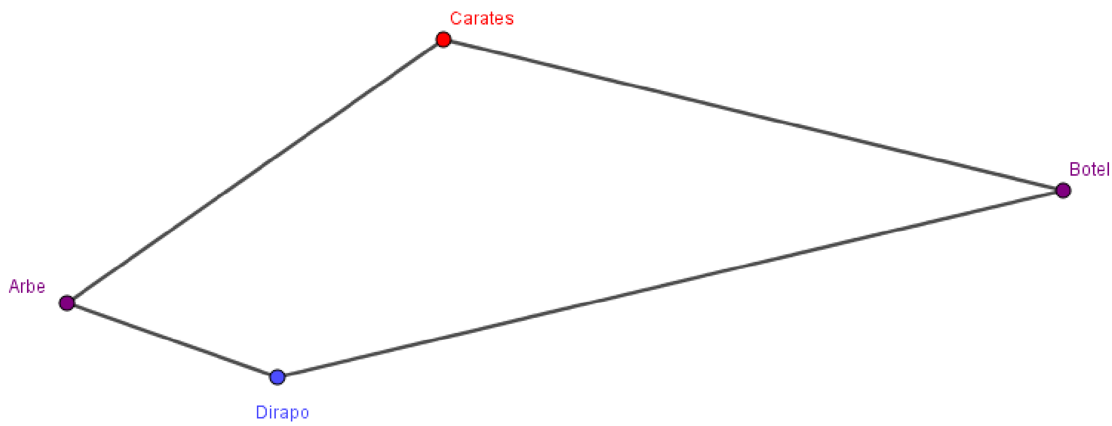
Intervención del profesor: Los alumnos compartirán sus respuestas y las justificarán, se espera que den diferentes respuestas: algunos dirán que el trayecto más corto es el del nadador que va recto por su calle y que el más largo es el del nadador (verde) que se ha torcido más. Estos alumnos tienen una buena comprensión de la magnitud. Otros darán la respuesta correcta utilizando algún objeto intermedio como el borde de un folio para comparar las tres cantidades de longitud. Interesa que aparezcan al menos estos dos tipos de respuestas y, fundamentalmente la primera de ellas. Aparecerá la técnica de comparación de cantidades de longitud utilizando un objeto intermedio.

ACTIVIDAD C1L.4

Objetivo: Comparar las longitudes de los lados de dos poligonales utilizando un objeto intermedio (tira u hoja de papel). Comprender que la magnitud longitud es sumable, es decir, medida de dos cantidades de longitud es igual a la medida de una cantidad de magnitud que se obtiene al recomponer o unir las dos cantidades de longitud iniciales.

Preparación de la actividad: A cada alumno se le entrega un folio con el dibujo que se muestra a continuación:

<u>Enunciado de la tarea:</u> *A continuación tienes las carreteras que unen 4 pueblos. Los habitantes de Arbe para llegar a Botel utilizan los dos caminos: el que pasa por Carates y el que pasa por Dirapo. ¿Qué camino es más corto? ¿Cómo lo sabes?*



Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 10 minutos.

Intervención del profesor: Los alumnos se encuentran con la necesidad de sumar longitudes, tal vez todos no sepan hacerlo de manera numéricamente exacta y esto les lleve a algún problema de razonamiento. Será interesante que los alumnos expongan sus respuestas, el profesor pedirá a uno de los alumnos que lo haya resuelto bien que ejemplifique en la pizarra el procedimiento de comparación que ha utilizado con las tiras de papel y sumando después las longitudes. Aparecerá la técnica de comparación de cantidades de longitud mediante la suma de cantidades de longitud.

ACTIVIDAD C1L.5

Objetivos: Reconocer la necesidad de utilizar una unidad de medida común para comparar cantidades de longitud

Enunciado de la tarea:

1. *¿Cuál de las siguientes cantidades de longitud es más larga?*
    - *a) El objeto A mide 17 pajitas*
    - *b) El objeto B mide 16 cerillas*
    - *c) El objeto C mide 14 pajitas*
    - *d) El objeto D mide 18 cerillas*
2. *Si sabes que la longitud de 9 pajitas es la misma que la de 10 cerillas ordena la longitud de los cuatro objetos*

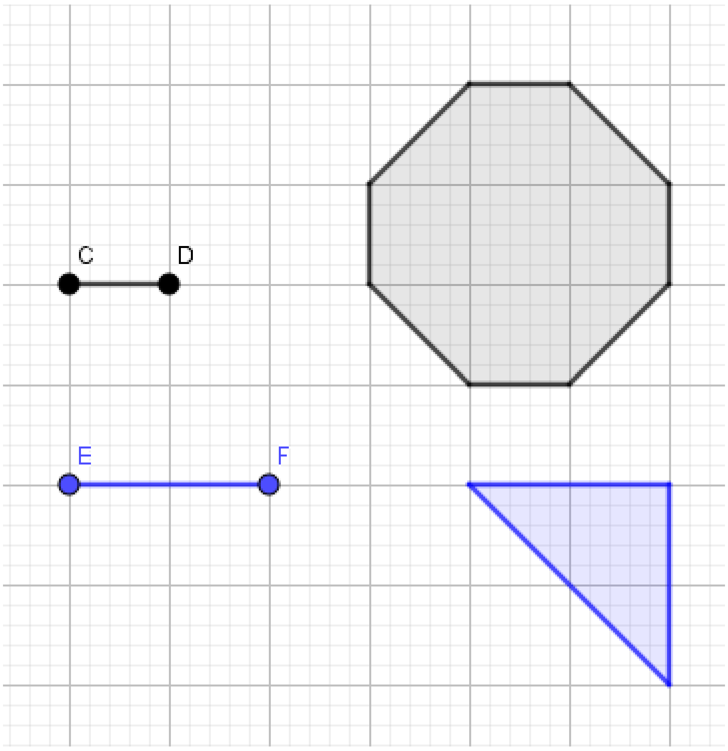
Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 10 minutos.

Intervención del profesor: Se espera que los alumnos al resolver el apartado a) digan que no pueden ordenar las cuatro cantidades porque desconocen la relación que hay entre las dos unidades arbitrarias. El profesor de nuevo deberá dirigir la reflexión a la necesidad de unificar el sistema de medida. No obstante, cuando sea el momento de resolver el apartado b), como sí existe una relación, se espera que algún alumno lo resuelva, siendo el orden 17 pajitas > 18 cerillas > 16 cerillas > 15 pajitas. Aparecerá la necesidad de utilizar una unidad de medida común para comparar cantidades de longitud.

ACTIVIDAD C1L.6

Objetivos: Repasar el concepto de perímetro y trabajar la conservación de la longitud e introducir las unidades del SMD.

<u>Enunciado de la tarea:</u> Sabiendo que el segmento CD mide 1 cm y el segmento EF mide 2 cm, contesta correctamente a las preguntas que se te hacen a continuación, SIN utilizar ningún instrumento de medida:-



1. *El perímetro del octógono es:*
   a) *8 cm*
   b) *Más de 8 cm*
   c) *Menos de 8 cm*
   d) *No puede saberse*
2. *El perímetro del triángulo es:*
   a) *6 cm*
   b) *Más de 6 cm*
   c) *Menos de 6 cm*
   d) *No puede saberse*

Metodología: Se propondrá como trabajo para casa para que lo resuelvan a modo individual y se corregirá en clase.

Intervención del profesor: Los alumnos pueden tener dificultades si consideran el octógono como si fuese un polígono regular o bien el triángulo como si fuese equilátero. Dado que los alumnos de 1º de ESO no han recibido enseñanza del teorema de

Pitágoras no pueden obtener el valor del perímetro. Sin embargo, sí que deberían distinguir las diferentes longitudes de los lados de ambos polígonos, dando como respuesta que es “más de 8 cm” en el apartado a) y “más de 6 cm” en apartado b). Como será una tarea que se propondrá como trabajo para casa y, dado que no se les ha explicado previamente el significado de perímetro, cuanto esta tarea se corrija tendrá que acompañarse de la institucionalización de este concepto y se espera que aparezca la técnica de comparación de cantidades de longitud sin necesidad de cuantificar el resultado de la medida.

C2L. Medida directa de la magnitud longitud

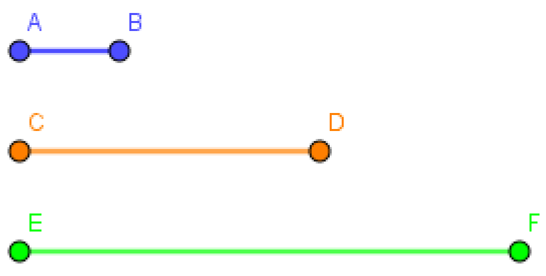
ACTIVIDAD C2L.1

Objetivos: Realizar medidas directas con unidades de medida arbitrarias. Explicar el proceso de medida tratándose de una tarea de cálculo.

Preparación de la actividad: A cada alumno se le entregan tiras de papel para que construyan la unidad de medida y además se les indicará que no necesitan la regla graduada para resolver el problema.

<u>Enunciado de la tarea:</u> *a) Si tomas como unidad de medida la longitud AB y la llamamos long. ¿Cuántos longs mide el segmento CD? ¿Y el segmento EF?*

b) Si tomas como unidad de media la longitud del segmento CD y le llamamos ling. ¿Cuántos lings mide el segmento AB? ¿Y el segmento EF?

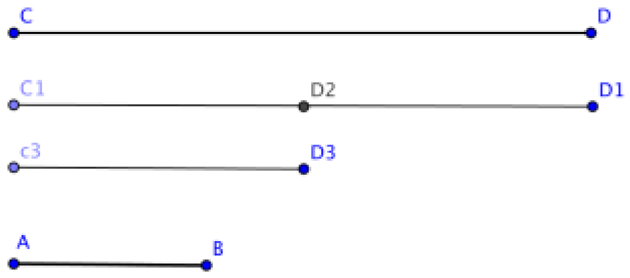


Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 15 minutos.

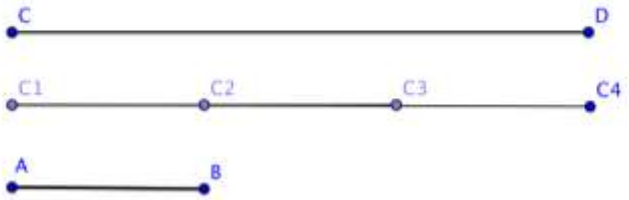
Intervención del profesor: Para resolver la primera parte de la tarea se espera que los alumnos construyan con tiras de papel la longitud de los tres segmentos. Después reiterando la unidad (AB) comprobarán rápidamente que CD mide 3 unidades (AB) y que EF mide 5 unidades (AB).

El segundo apartado torna más interesante porque el resultado de la medida ya no va a ser un número natural. Ahora la unidad de longitud es el segmento CD.

Para calcular la medida de AB habrá que fraccionar el segmento unidad CD. En primer lugar probamos fraccionando la unidad de dos partes iguales y vemos que la mitad de la unidad es superior a la longitud del segmento a medir AB:



Probamos ahora con tercios de la unidad y vemos la longitud de AB es 1/3 de CD:



Ahora vamos a proceder a medir el segmento EF. Observamos que si fraccionamos la unidad en dos partes iguales no conseguimos cubrir completamente la longitud de EF:

Vamos a probar ahora con fraccionamientos en tres partes iguales de la unidad y comprobamos que la longitud de EF es 5/3 de CD.

De esta manera enseñaremos a los alumnos la técnica de medida directa utilizando fraccionamientos iguales de la unidad de medida, esta idea deberá institucionalizarse, dado que fraccionar la unidad nos permitirá realizar las mediciones con precisión. Conviene indicar que los alumnos pueden llegar a medir de forma correcta el segmento EF utilizando un razonamiento proporcional, dado que conocen los resultados obtenidos en el apartado a): EF = 5 AB y CD = 3 AB.

A pesar de que este razonamiento es valioso y recomendable que aparezca en la fase de puesta en común se instará a los alumnos que procedan a realizar el proceso de medida directa. Se espera que aparezca la técnica de medida directa con unidades medida arbitrarias, tratándose de una tarea de cálculo. Durante la fase de institucionalización aparecerá como conocimiento tecnológico la relación inversamente proporcional entre el resultado de la medida y la cantidad de magnitud de la unidad de medida.

ACTIVIDAD C2L.2

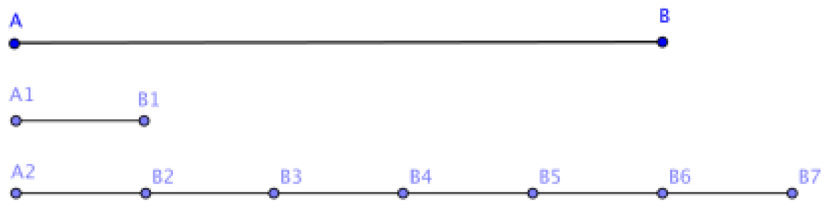
Objetivo: Realizar medidas directas con unidades de medida arbitrarias. Explicar el proceso de medida tratándose de una tarea de construcción

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Considerando como unidad la tira de papel que te entrego construye dos tiras de longitudes 5/6 y 6/5 de unidad***.**

Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 15 minutos.

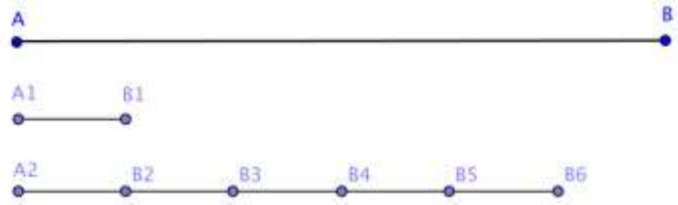
Intervención del profesor: La longitud de la unidad es la del segmento AB que mostramos a continuación:

En primer lugar procedemos a construir una tira de papel de longitud 6/5 de AB. Para ello fraccionamos la unidad en 5 partes iguales y reiteramos 6 veces consecutivas la subunidad 1/5 de AB:



El segmento A_2B_7 mide 6/5 de AB.

Procedemos ahora a construir una tira de papel de longitud 5/6 de AB. Para ello fraccionamos la unidad en 6 partes iguales y reiteramos 5 veces consecutivas la subunidad 1/6 de AB:



El segmento A_2B_6 mide 5/6 de AB.

Se espera que aparezca la técnica de medida directa con unidades medida arbitrarias, tratándose de una tarea de construcción.

ACTIVIDAD C2L.3

Objetivos: Comprender y utilizar instrumentos de medida de longitud. Comprender la relación inversamente proporcional que existe entre la unidad de medida y las veces que esta aparece el resultado de la medida. Generar la necesidad de utilizar una misma unidad de medida para comunicar la medición, en concreto las unidades del sistema métrico decimal

Preparación de la actividad: Para la primera tarea cada alumno recibe: dos tiras, una que tiene de longitud la mayor dimensión de un folio A4 (roja) y otra tira que mide la mitad que esta (verde), para la segunda tarea a los alumnos se les entrega una cinta métrica.

Enunciado de la tarea: *PRIMERA PARTE*

a) Utilizando las dos tiras que os he entregado como unidad de longitud mide la largura de tu mesa

OBJETO	*Longitud de la tira roja como unidad de medida*	*Longitud de la tira verde como unidad de medida*
Largura de la mesa		

b) Compara los resultados de la medida obtenidos con las dos unidades de medida. Explica si son o no son iguales estas mediciones y justifica los resultados.

C) Compara los resultados de medida obtenidos con los de tus compañeros.

SEGUNDA PARTE:

a) Os entrego esta cinta métrica. Utiliza la cinta métrica para medir la largura de tu mesa y rellena el otro hueco de la tabla con la unidad de medida que elijas, la de la cinta verde o la roja:

OBJETO	*Longitud en cm*	*Longitud de tira roja/verde como unidad de medida*
Largura de la mesa		

B) Compara los resultados de medida obtenidos con los de tus compañeros.

Metodología: Se realizará en el aula, los apartados en minúscula en parejas y los apartados en mayúsculas en grupos de 4 alumnos. Duración: 25 minutos.

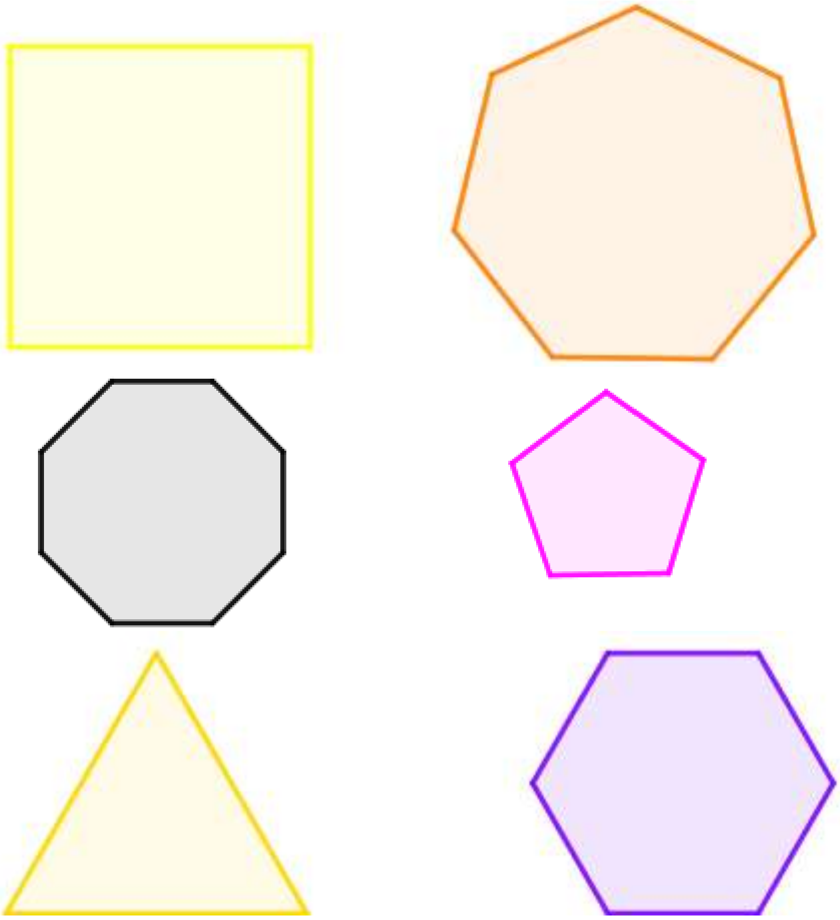
Intervención del profesor: En la primera parte del problema se pretende que los alumnos reconozcan la relación inversa del tamaño de la unidad con las veces que esta se repite, dado que una unidad es el doble que la otra se quiere que los alumnos se den cuenta de que un resultado sale la mitad que el otro y así poder trabajar sobre este concepto, si los alumnos no son conscientes de esto el profesor deberá guiarles para que lo vean. En la segunda parte con la necesidad de unificar el sistema de medida, dado que puede que no se pongan de acuerdo al elegir la unidad con la que medir y esto hará que vean que es útil tener un sistema universalizado. Aparecerá la técnica de medida directa con unidades de medida arbitrarias y con unidades del Sistema Métrico Decimal, tratándose de tareas de cálculo. Durante la fase de institucionalización aparecerá como conocimiento tecnológico la relación inversamente proporcional entre el resultado de la medida y la cantidad de magnitud de la unidad de medida.

C3L. Medida indirecta de la magnitud longitud

ACTIVIDAD C3L.1

Objetivo: Comprensión de propiedades de los polígonos regulares. Medida directa del perímetro de un polígono regular.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *A continuación tienes dibujadas polígonos regulares, esto es que sus lados son iguales. Debes rellenar la siguiente tabla:*



POLÍGONO	*p=PERÍMETRO*	*l=LONGITUD del LADO*	$\frac{p}{l}$	*¿Qué obtienes?*
Triángulo				
Cuadrado				
Pentágono				
Hexágono				
Heptágono				
Octógono				

¿Llegas a alguna conclusión? ¿Cuál?

Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 10 minutos.

Intervención del profesor: Se espera que los alumnos conjeturen la fórmula del polígono regular. Durante la puesta en común será el profesor el que lo institucionalice. Utilizando la técnica de medida directa con el centímetro como unidad de medida los alumnos conjeturarán el conocimiento tecnológico que permite calcular, de modo indirecto, el perímetro de un polígono regular.

ACTIVIDAD C3L.2

Objetivo: Conocer y comprender que 2π en realidad es una constante que relaciona el radio con la longitud de la circunferencia. Se espera que aparezca en el aula la tecnología: fórmula de la longitud de la circunferencia con radio dado

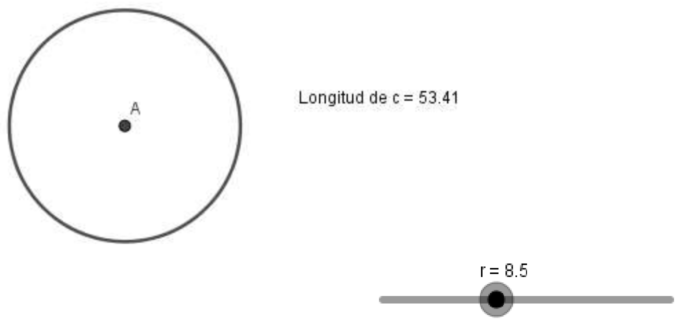
<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Con ayuda de este Geogebra rellena la siguiente tabla:*

L=Longitud							
r=radio							
d=diámetro							
L/d							

Al rellenar esta tabla, ¿llegas a alguna conclusión?

Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 10 minutos.

Intervención del profesor: El profesor explicará cómo funciona Geogebra y en qué se deben fijar. Además, deberá recomendar que rellenen primero las dos primeras filas eligiendo los datos del radio que deseen, con ayuda de la aplicación, y al finalizar rellenen las dos última. Para finalizar, deberá institucionalizar la fórmula del cálculo de la longitud de la circunferencia.



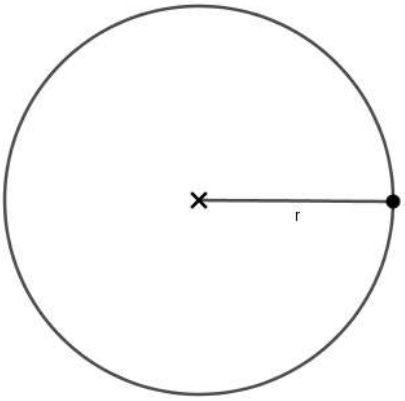
Utilizando el programa informático Geogebra los alumnos conjeturarán el conocimiento tecnológico que permite calcular, de modo indirecto, la longitud de la circunferencia conociendo el radio o el diámetro de ésta.

ACTIVIDAD C3L.3

Objetivo: Afianzar la comprensión de la de la longitud de la circunferencia conocido el radio o el diámetro de esta, apoyándose en la medida directa de la longitud.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *A continuación tienes una circunferencia cuyo radio es 2 cm, con ayuda del trozo de lana que tienes y de una regla, mide la longitud aproximada*

de esta circunferencia y luego, por otro lado, calcúlala de la manera que has aprendido, por medio de la fórmula:



Longitud medida	*Longitud calculada*

Metodología: Se realizará individualmente en casa, se corregirá en clase.

Intervención del profesor: Se trata de una comprobación de que la medida directa da una aproximación al valor de la longitud de la circunferencia obtenido al aplicar la fórmula, no se espera que los alumnos tengan dificultades, aun así, como será una tarea que realicen en casa, si surge algún problema se resolverá al día siguiente en clase. Los alumnos realizan una medida directa para dar una aproximación de la longitud de la circunferencia. También utilizarán el conocimiento tecnológico que permite calcular, de modo indirecto, la longitud de la circunferencia, conocido el radio o el diámetro de ésta. Y, finalmente, que compararán la bondad de ambas mediciones.

ACTIVIDAD C3L.4

Objetivo: Conocer y comprender que la relación que existe entre el ángulo central que abarca un determinado arco de circunferencia y la longitud del arco.

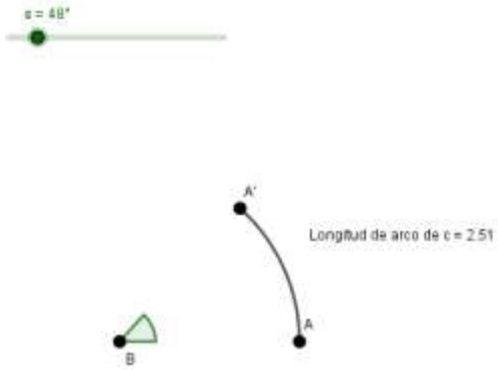
<u>Enunciado de la tarea:</u> *De nuevo, con ayuda de este Geogebra debes rellenar la siguiente tabla, el arco de circunferencia siempre va a tener el mismo radio r=3 cm:*

α = ángulo	*30º*	*45º*	*60º*	*90º*	*150º*	*180º*	*270º*
L=Longitud							
L/ (3· α)							

Al rellenar esta tabla, ¿llegas a alguna conclusión?

Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 10 minutos.

Intervención del profesor: El profesor deberá institucionalizar al finalizar el problema todos los conocimientos que se les enseñe sobre la fórmula para calcular la longitud de arco de una circunferencia conociendo el radio y la amplitud del ángulo central. Pretendiendo que aparezca en el aula la cuarta tecnología: la fórmula de la longitud de un arco de circunferencia conocido su radio y la amplitud del ángulo central.



Utilizando el programa informático Geogebra los alumnos conjeturarán el conocimiento tecnológico que permite calcular, de modo indirecto, la longitud de un arco de circunferencia conocido su radio y la amplitud del ángulo central que abarca el arco de circunferencia.

CAMPOS DE PROBLEMAS DE LA MAGNITUD SUPERFICIE

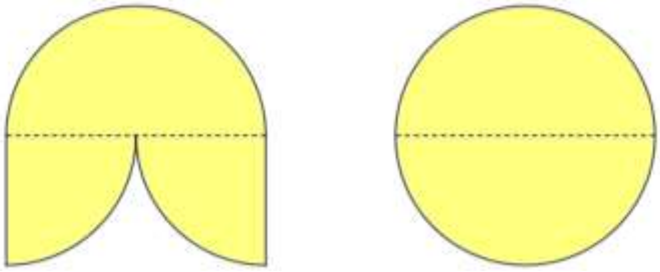
C1S. Aspectos conceptuales de la magnitud superficie (conservación y comparación)

ACTIVIDAD C1S.1

Objetivo: Mostrar que la superficie de un objeto es independiente de la forma de este, lo cual puede hacer que dos objetos con formas muy diferentes tengan la misma superficie, haciéndoles capaces de ver esta conservación en la superficie a pesar de la transformación, entendiendo así la superficie como cantidad de plano ocupado.

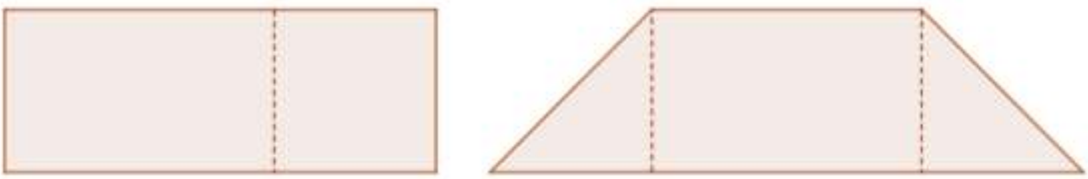
<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *A continuación tienes unas figuras y unas preguntas respecto a ellas, contesta correctamente, debes justificar tu respuesta:*

1. *De las dos figuras, ¿cuál tiene más superficie?*
    a) *La primera*
    b) *La segunda*
    c) *Las dos tienen la misma*
    d) *No puede saberse*



2. *De las dos figuras, ¿cuál tiene más superficie coloreada?*
    a) *La primera*
    b) *La segunda*
    c) *Las dos tienen la misma*
    d) *No puede saberse*

3. *De las dos figuras, ¿cuál tiene más superficie?*
    a) *La primera*
    b) *La segunda*
    c) *Las dos tienen la misma*
    d) *No puede saberse*



Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 15 minutos.

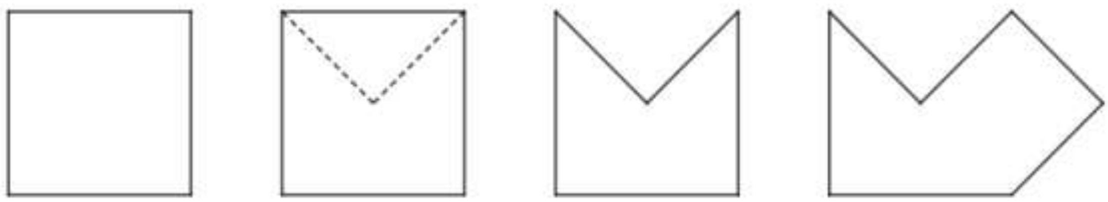
Intervención del profesor: El profesor animará a los alumnos a que expresen las estrategias utilizadas para comparar la superficie. Cuando los alumnos hayan terminado, introducirá el concepto de área como cantidad de plano ocupado por la superficie y comentará que la medida de las cantidades de magnitud de estas figuras geométricas se mantiene constante a pesar de los movimientos que se realizan. Los alumnos realizan comparaciones de cantidades de superficie mediante la técnica de descomposición y recolocación de cantidades.

ACTIVIDAD C1S.2

Objetivos: Insistir en el aspecto conceptual de la superficie en el que la superficie de un objeto es independiente de la forma de este.

Preparación de la actividad: A cada alumno un cuadrado que deben recortar y manipular.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Con el folio que tienes haz lo siguiente: recórtalo por las líneas de puntos, colocando lo recortado en otro lado:*



¿Tiene la misma superficie la primera figura y la última?

Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos

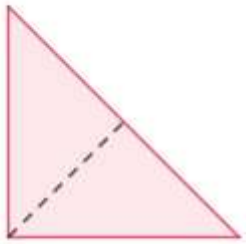
Intervención del profesor: El profesor comenzará comparando las dos figuras, antes de realizar el ejercicio y preguntándoles si tienen la misma superficie, dejando las respuestas abiertas, mientras los alumnos realizan el problema el profesor reproducirá la actividad también. Al finalizar se responderá de nuevo a las preguntas, ahora corrigiendo en caso de error. Como en el problema anterior, se espera que los alumnos realicen comparaciones de cantidades de superficie mediante la técnica de descomposición y recolocación de cantidades

ACTIVIDAD C1S.3

Objetivos: Insistir en el aspecto conceptual de la superficie en el que la superficie de un objeto es independiente de la forma de este.

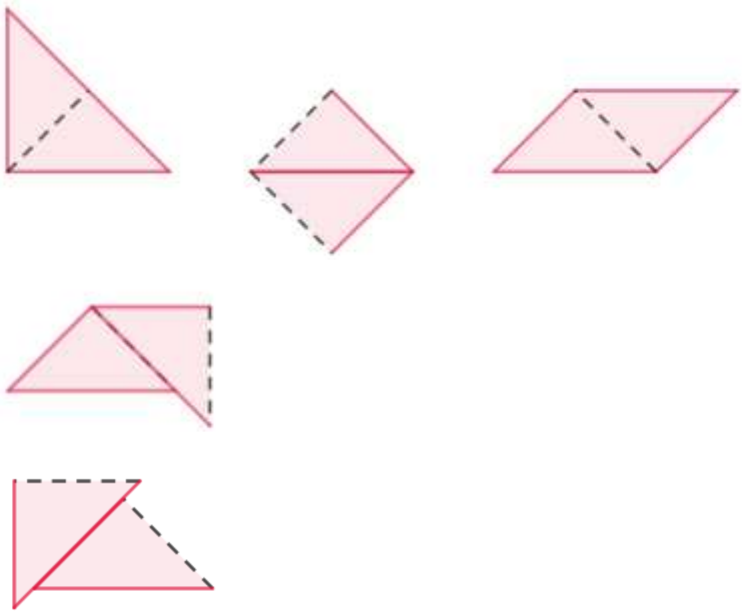
Preparación de la actividad: A cada alumno se le entrega un triángulo que deben recortar y manipular.

<u>Enunciado de la tarea:</u> Corta por la línea de puntos y obtén al menos cuatro polígonos que tenga la misma superficie que el triángulo dado.



Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: El profesor animará a los alumnos a que realicen la actividad de manera correcta, recordando la relación que tiene con el ejercicio anterior. No se ha puesto ninguna restricción sobre la convexidad de estos polígonos, así que las soluciones pueden ser muy variadas, el profesor deberá darlas por buenas siempre y cuando estén bien, las siguientes que se proponen, considerando que del último caso hay infinitas y del segundo hay que considerar los movimientos, son todas las que pueden aparecer:



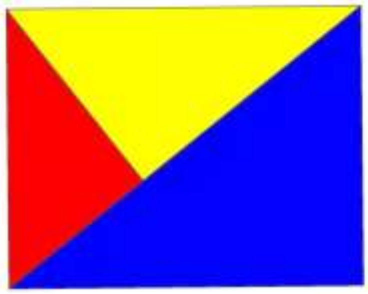
Se espera que los alumnos obtengan nuevas figuras geométricas con la misma cantidad de superficie que una dada mediante la técnica de descomposición y recolocación de cantidades.

ACTIVIDAD C1S.4

Objetivos: Insistir en el aspecto conceptual de la superficie en el que la superficie de un objeto es independiente de la forma de este y trabajar la conservación del área cuando las figuras son sometidas a movimientos.

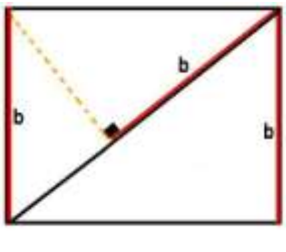
<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Vas a dibujar en una cartulina todas las figuras poligonales convexas que se pueden hacer con estos tres triángulos. En total son 16. Para ello, recorta la figura de manera que te salgan tres triángulos y colócala de todas las maneras que se te ocurra que pueden ser.*

Antes de empezar, todas estas figuras que construyas ¿tendrán la misma superficie?



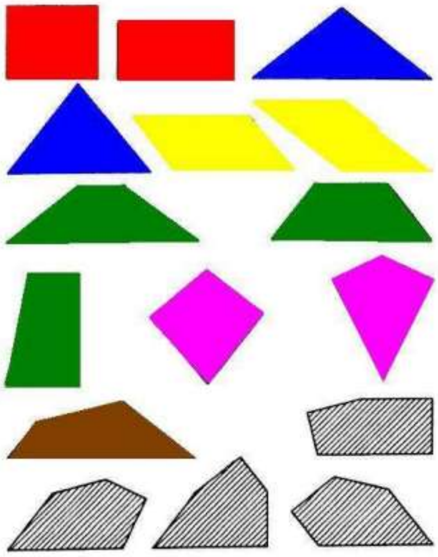
Metodología: Se realizará en casa, se expondrá y corregirá en clase.

Intervención del profesor: El profesor explicará lo que muestra el siguiente dibujo, y es que hay tres lados que miden lo mismo, ya que esta característica es relevante en este Tangram, conocido como de Brügner, y por eso permite que salgan tantos polígonos convexos.



Además, puede que encuentren más polígonos que no sean convexos, en ellos la superficie sigue manteniéndose pero ya no se tratará de formas poligonales convexas, al realizar el problema si los alumnos se encuentran con este elemento el profesor debe aprovechar para recordarles qué es un polígono convexo y en qué se diferencia de un polígono cóncavo.

Todos los posibles polígonos convexos que se obtienen son los siguientes:

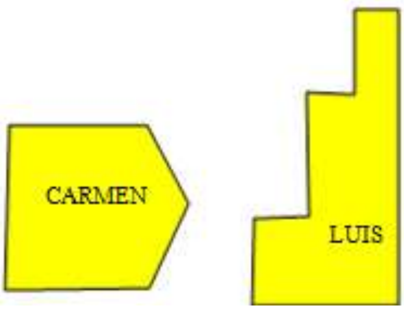


Como en el problema anterior, se espera que los alumnos obtengan nuevas figuras geométricas con la misma cantidad de superficie que una dada mediante la técnica de descomposición y recolocación de cantidades.

ACTIVIDAD C1S.5

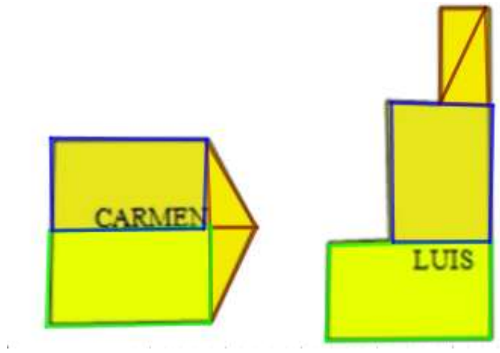
Objetivos: Insistir en el aspecto conceptual de la superficie en el que la superficie de un objeto es independiente de la forma de este.

<u>Enunciado de la tarea:</u> *A Carmen y a Luis, que son hermanos, les han dado un trozo de tarta cortada de una manera peculiar. Carmen dice que ella tiene menos que Luis, Luis dice que tiene menos que Carmen, sin embargo, su madre dice que tienen lo mismo. ¿Quién de los tres tiene razón?*



Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 15 minutos

Intervención del profesor: El profesor animará a los alumnos a que expresen las estrategias utilizadas para comparar la superficie y concluirá invitando a los alumnos a que expongan las soluciones, considerando diversas formas de hacerlo, e insistiendo en que la forma de la superficie es independiente a su superficie. Invitará a que recorten y así hagan descomposición y recomposición. Finalmente se deberá ver que ambos trozos tienen la misma superficie. Una posible solución es esta, aunque no es la única:

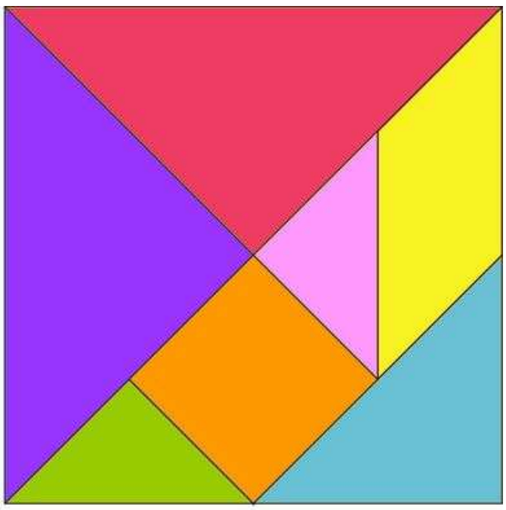


Los alumnos realizarán comparaciones de cantidades de superficie mediante la técnica de descomposición y recolocación de cantidades de superficie.

ACTIVIDAD C1S.6

Objetivo: Poner en práctica los conocimientos aprendidos, demostrando que comprenden la adición de superficies.

<u>Enunciado de la tarea:</u> En este dibujo Carlos dice que tiene más superficie el paralelogramo de color amarillo. En cambio, su amigo Mario dice que es el cuadrado de color naranja el que tiene mayor superficie. ¿Quién de los dos tiene razón?



Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos

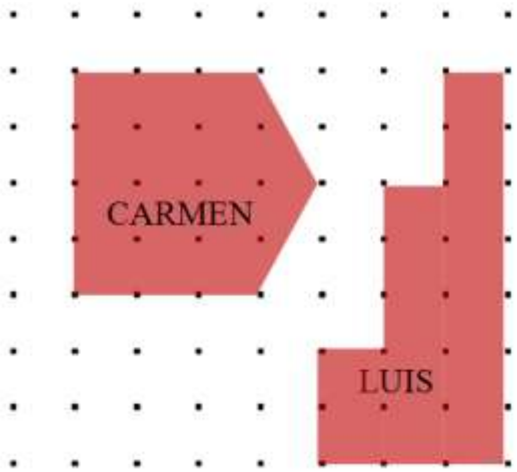
Intervención del profesor: El profesor dejará que los alumnos den sus soluciones y sus justificaciones durante la fase de puesta en común. Lo que ocurre es que el triángulo verde y el cuadrado naranja miden lo mismo que el paralelogramo amarillo y el triángulo rosa como se puede observar en la imagen, además ambos triángulos son exactamente iguales, así que por este razonamiento la superficie del cuadrado y del paralelogramo es la misma, aunque la forma no lo sea y eso pueda llevar a confusión. Los alumnos realizarán comparaciones de cantidades de superficie mediante la técnica de comparación de cantidades de superficie que contengan a las cantidades a comparar. En este caso, utilizamos como conocimiento tecnológico que la magnitud superficie es sumable.

C2S. Medida directa de cantidades de magnitud superficie

ACTIVIDAD C2S.1

Objetivos: Insistir en el aspecto conceptual de la superficie en el que la superficie de un objeto es independiente de la forma de este, pero utilizando la medida para comparar dos cantidades.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *A Carmen y a Luis, que son hermanos, les han dado un trozo de tarta cortada de una manera peculiar. Carmen dice que ella tiene menos que Luis, Luis dice que tiene menos que Carmen. Sin embargo, su madre dice que tienen lo mismo. ¿Quién de los tres tiene razón?*



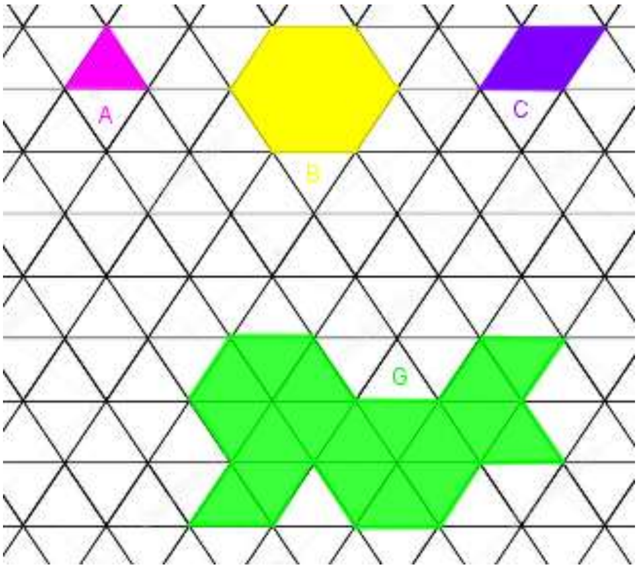
Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: El profesor animará a los alumnos a que expresen las estrategias utilizadas para comparar la superficie y concluirá invitando a algunos alumnos a que expliquen sus soluciones. Dado que los vértices de las figuras están sobre puntos de una trama cuadrada, a diferencia del problema C1S.4, se espera que los alumnos utilicen como unidad básica el área de un cuadrado 1x1 y procedan a medir. El profesor recordará el problema C1S.4 matizando la ayuda que supone la trama cuadrada. Se espera que los alumnos realicen comparaciones de las dos cantidades de superficie mediante la técnica de medida directa de las dos cantidades de superficie.

ACTIVIDAD C2S.2

Objetivo: Trabajar la medida directa para el cálculo de superficies, insistiendo en la relación que existe entre el tamaño de la unidad y el resultado de la medida.

Enunciado de la tarea: *A continuación, tienes unas figuras. Rellena la siguiente tabla calculando cuantas figuras A, B y C, caben en la figura G. Es decir, realiza tres mediciones del área de G tomando como unidad el área de las figuras A, B y C, respectivamente.*



	Usando como unidad la Figura A	*Usando como unidad la Figura B*	*Usando como unidad la Figura C*
Superficie (G)			

¿Hay alguna relación entre el tamaño de la unidad utilizada y el número de estas? ¿Cuál?

Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: La solución al problema es la siguiente:

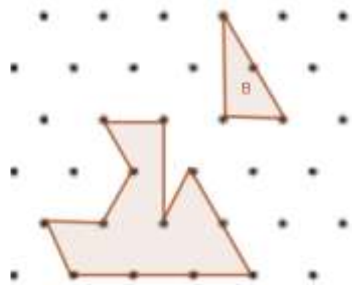
	Figura A (unidad A)	Figura B (unidad B)	Figura C (unidad C)
Superficie (G)	18	3	9

El profesor hará hincapié al finalizar el ejercicio en comparar las unidades de cada figura y el tamaño de estas, para hablar de la relación inversamente proporcional que existe entre la unidad elegida y el resultado de la medida. Además, al finalizar este ejercicio deberá institucionalizar la tecnología de que el área de una cantidad de superficie es inversamente proporcional al área de la unidad elegida para medir. Se espera que los alumnos apliquen la técnica de medida directa de cantidades de superficie dibujadas sobre una trama isométrica o cuadrada con unidades arbitrarias.

ACTIVIDAD C2S.3

Objetivo: Trabajar la medida directa para el cálculo de cantidades de superficies y las estrategias de conservación de superficies.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Calcula el área de la figura considerando como unidad el área del triángulo rectángulo B.*



Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: El profesor aconsejará a los alumnos para que realicen transformaciones que conserven la superficie pero que permitan realizar la medida con la unidad triangular. Una posible es la que se indica a continuación, viendo que la superficie de la figura es 5 veces la unidad B:

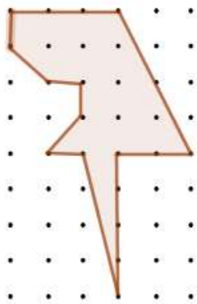
Se espera que los alumnos apliquen la técnica de medida directa de cantidades de superficie dibujadas sobre una trama isométrica o cuadrada con unidades arbitrarias.–Y como técnicas suplementarias medida por descomposición de la cantidad en partes y suma de cada parte. Técnica de medida encuadrando la figura en otra que la contenga y que sea más fácil de medir.

ACTIVIDAD C2S.4

Objetivos: Medir el área de una figura cuyos vértices están sobre puntos de una trama cuadrada. Insistir en el aspecto conceptual de la superficie en el que la superficie de un objeto es independiente de la forma de este y trabajar la conservación del área mediante descomposición y recomposición de la figura

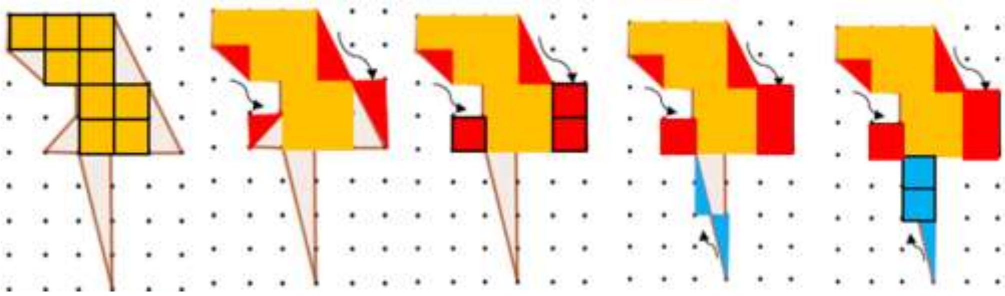
Preparación de la actividad: A los alumnos se les entrega una trama cuadrada por si desean utilizarla para realizar las descomposiciones y recomposiciones de la figura cuya área se desea medir:

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Calcula el área del polígono considerando como unidad de medida el área del cuadrado más pequeño de la trama:*



Metodología: Se realizará en casa y corregirá en clase.

Intervención del profesor: El profesor animará a los alumnos a que expongan las diferentes estrategias de descomposición y composición de la figura que han medido. Se muestra una posible solución, en la que primero se cuentan los cuadrados que hay (9) y luego se descompone y compone la figura para hacer nuevos cuadrados con las trasformaciones (3+2) y así comprobar que en total hay 14 cuadrados, luego el área será 14 considerando como unidad de medida el área del cuadrado más pequeño de la trama:



Se espera que los alumnos apliquen la técnica de medida directa de cantidades de superficie dibujadas sobre una trama isométrica o cuadrada con unidades arbitrarias. Y como técnicas suplementaria las indicadas en el problema anterior.

ACTIVIDAD C2S.5

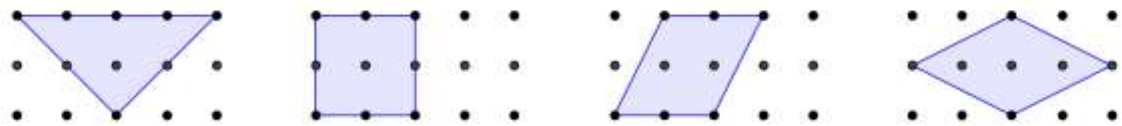
Objetivo: Construir una cantidad de superficie conocida la medida de dicha superficie. Reconocer que la solución no es única dado que existen infinitas figuras geométricas que poseen la misma cantidad de superficie. La novedad de este problema con respecto a los anteriores es que ahora se solicita construir cantidades de superficie de una medida dada.

Preparación de la actividad: A cada alumno recibe una trama cuadrada, en el que figura como unidad de superficie el cuadrado de menor área, y les da la siguiente consigna.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Dibuja, al menos, cuatro polígonos convexos cuya área sea 4 unidades.*

Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 15 minutos

Intervención del profesor: El profesor invitará a los alumnos a que expongan los diferentes polígonos que han construido. Además de mostrar las estrategias utilizadas interesa poner de manifiesto que hay infinitas figuras que poseen una misma cantidad de superficie. Entre otras muchas soluciones, algunas muy básicas son:

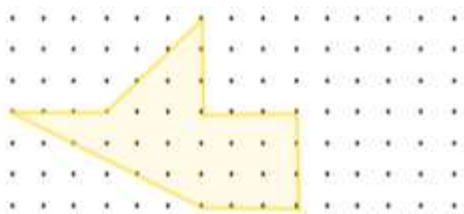


Se espera que los alumnos apliquen la técnica de medida directa para construir cantidades de superficie de medida dada sobre una trama isométrica o cuadrada con unidades arbitrarias.

ACTIVIDAD C2S.6

Objetivo: Trabajar la medida directa para el cálculo de superficies y la elección de la unidad de medida de superficie.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Si se sabe que el área de la figura que se muestra mide 5 unidades, dibuja la unidad. ¿La solución es única? Razona la respuesta*



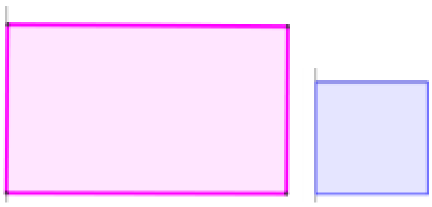
Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 15 minutos

Intervención del profesor: Este problema es de medida directa pero en cierto modo es inverso a los planteados hasta el momento. Ahora lo que plantea el problema es la búsqueda de una unidad de superficie y la respuesta no es inmediata. Los alumnos tienen dos opciones para realizar el problema: buscar la unidad recomponiendo 5 veces (procedimiento gráfico o manipulativo) o bien medir el área de la figura y calcular el valor numérico de la unidad (procedimiento aritmético), parece razonable suponer que los alumnos utilizarán el cuadrado básico (1x1) como unidad para obtener que el área de la figura es 22,5 unidades 1x1. Según esto el área de la unidad que buscan será de 4,5 unidades 1x1. En consecuencia, se espera que los alumnos digan que una posible unidad de medida es la mitad del cuadrado 3x3, entre otras posibles soluciones, dado que el problema no es de respuesta única. El profesor velará, durante la puesta en común, para que los alumnos expliquen y dibujen las diferentes unidades de medida que hayan obtenido. Se espera que los alumnos apliquen la técnica de medida directa para reconstruir la unidad de medida, conocida la cantidad de superficie dibujada sobre una trama cuadrada y la medida de la cantidad.

ACTIVIDAD C2S.7

Objetivo: Trabajar la medida directa para el cálculo de cantidades de superficie de figuras que no están dibujadas sobre una trama. Trabajar el fraccionamiento de la unidad.

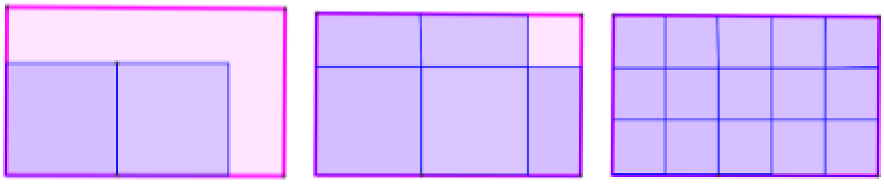
<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *A continuación tienes dibujado un mantel rectangular de color rosa y la unidad de superficie de color azul. Calcula el área del mantel.*



Metodología: Se realizará en el aula en parejas o tríos. Duración: 15 minutos

Intervención del profesor: Deberá supervisar el ejercicio y dar recomendaciones de cómo hacerlo, recordando que deberán fraccionar la unidad que se les da y que deben hacer referencia a ella en el siguiente proceso de medida.

En primer lugar deberán reiterar 2 unidades enteras sobre la superficie del mantel rectangular. En segundo lugar, recubrirán la superficie con subunidades de media unidad, si es posible, En este caso cubren 3 subunidades de ½ unidad. Finalmente fraccionarán la unidad en cuartos de unidad para recubrir la superficie que queda. En total la medida del mantel es 2 + 3/2 + 1/4 de unidad, o bien 15/4 de unidad:



Se espera que los alumnos apliquen la técnica de medida directa de cantidades de superficie de figuras no dibujadas sobre una trama isométrica o cuadrada utilizando unidades arbitrarias.

ACTIVIDAD C2S.8

Objetivo: Reforzar la comprensión de la superficie como cantidad de espacio ocupado y tarea de medida directa con una unidad arbitraria.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Considerando como unidad de medida el cuadrado que se muestra en el gráfico calcula el área de la figura de color amarillo.*

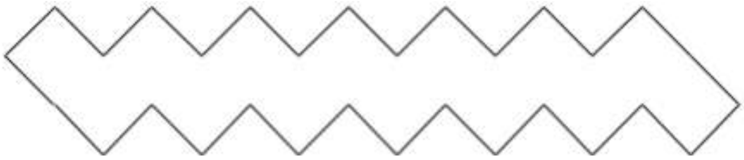
Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: Para resolver el problema los alumnos deberán estudiar la figura para descomponerla y componerla formando un rectángulo de área la mitad del área del cuadrado que se utiliza como unidad de medida. El profesor velará porque los alumnos expliquen sus estrategias de resolución en la fase de puesta en común posterior a la de resolución de la actividad. Se espera que los alumnos apliquen la técnica de medida directa de cantidades de superficie de figuras no dibujadas sobre una trama isométrica o cuadrada utilizando unidades arbitrarias.

ACTIVIDAD C2S.9

Objetivo: Trabajar la medida directa para el cálculo de superficies, insistiendo en la relación que existe entre el tamaño de la unidad y el resultado de la medida.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Tres amigas, Nuria, Rosa y Miguel, tienen que medir la superficie de la siguiente figura:*



No tienen regla, pero disponen de las siguientes unidades. Nuria utiliza la unidad A, Rosa la unidad B y Miguel la unida C.

Indica qué mediciones obtendrán cada una de las tres amigas y explica, de forma razonada, si existirá alguna relación entre las tres mediciones.

Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos

*Intervención del profesor: S*e espera que los alumnos sepan calcular el área de la figura utilizando las tres unidades y que se percaten de la relación que existe entre los resultados de las medidas. Antes de hacer las mediciones los alumnos deberían anticipar que el resultado obtenido por Miguel (unidad C) deberá ser 3 veces mayor que el obtenido por Rosa y 6 veces mayor que el obtenido por Nuria. El profesor se encargará de institucionalizar el conocimiento tecnológico de todo el proceso de medida: el resultado de una medición es inversamente proporcional a la cantidad de magnitud de la unidad de medida. Como en los dos problemas anteriores, se espera que alumnos apliquen la técnica de medida directa de cantidades de superficie de figuras no dibujadas sobre una trama isométrica o cuadrada utilizando unidades arbitrarias.

ACTIVIDAD C2S.10

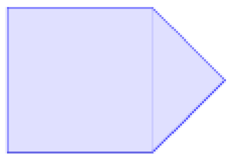
Objetivo: Construir una cantidad de superficie conocida la medida de dicha cantidad de superficie. Reconocer que la solución no es única dado que existen infinitas figuras geométricas que poseen la misma cantidad de superficie. La novedad de este problema frente a los anteriores es que ahora hay que construir una cantidad de superficie.

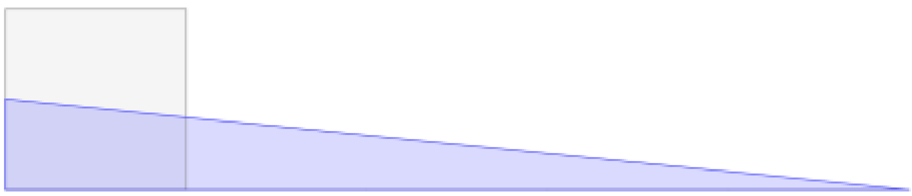
Preparación de la actividad: A cada alumno se le entrega un cuadrado de papel de 20cms x 20cms

<u>Enunciado de la tarea</u>: Con la unidad de medida cuadrada que os he entregado en formato papel construye, al menos, 4 polígonos convexos diferentes que midan 5/4 de unidad. Después dibuja estos polígonos en el folio que os he entregado.

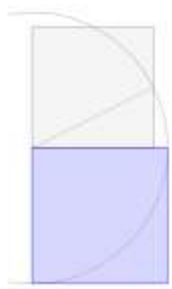
Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 15 minutos

Intervención del profesor: El profesor invitará a los alumnos a que expongan los diferentes polígonos convexos que han construido. Además de mostrar las estrategias utilizadas interesa poner de manifiesto que hay infinitas figuras que poseen una misma cantidad de superficie. Entre otras muchas soluciones, algunas muy básicas son:





Además del rectángulo, el pentágono y el triángulo dibujados los alumnos podrían dibujar un cuadrado de lado $\frac{\sqrt{5}}{2}u$, si supieran construir un segmento de esta longitud construyendo un triángulo rectángulo de catetos 1 y ½ de unidad:



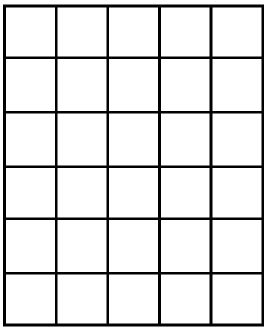
Se espera que los alumnos apliquen la técnica de medida directa para construir cantidades de superficie de medida dada de figuras geométricas que no estén dibujadas sobre una trama isométrica o cuadrada con unidades arbitrarias.

C3S. Medida indirecta de cantidades de magnitud superficie

ACTIVIDAD C3S.1

Objetivo: Introducir la medida indirecta de la superficie rectangular como producto de magnitudes lineales y trabajar la conservación de la magnitud superficie.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Ahora considera que tienes un montón de piezas cuadradas que, como ves, está dibujando un rectángulo. Reorganiza las piezas cuadradas para hacer otra figura rectangular utilizando todas las piezas cuadradas, pero que tenga LA MISMA SUPERFICIE. Dibuja los rectángulos indicando la medida de la anchura y altura de los rectángulos que puedas construir sin romper las piezas utilizando todas ellas.*



Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 5 minutos

Intervención del profesor: El rectángulo que se les muestra a los alumnos tiene 30 cuadrados de superficie que están dispuestos en 6 filas de 5 columnas cada una. La descomposición factorial de 30 como 2x3x5 permite obtener, de modo sistemático, las siguientes composiciones rectangulares:

1 x 30, es decir, 1 fila con 30 columnas cada una,

2 x 15, es decir, 2 filas con 15 columnas cada una,

3 x 10, es decir, 3 filas con 10 columnas cada una,

5 x 6, es decir, 5 filas con 6 columnas cada una,

6 x 5, es decir, 3 filas con 10 columnas cada una, la del enunciado de la tarea,

10 x 3, es decir, 10 filas con 3 columnas cada una,

15 x 2, es decir, 15 filas con 2 columnas cada una,

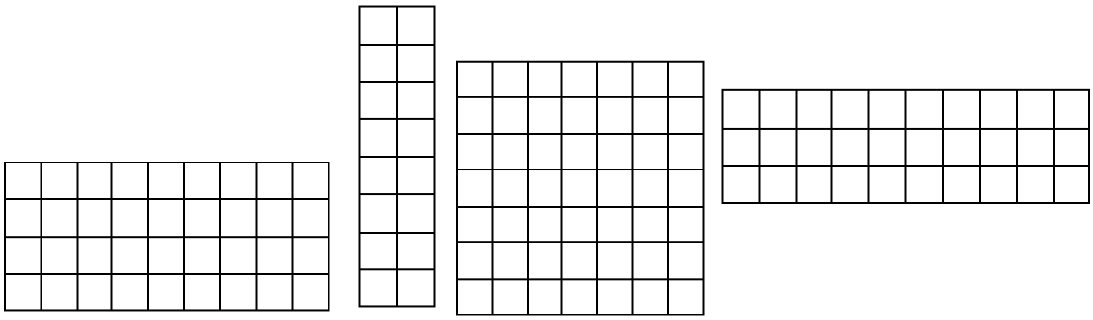
30 x 1, es decir, 30 filas con 1 columna cada una.

Los alumnos comprobarán que todos estos rectángulos tienen la misma cantidad de superficie y que en lugar de tener que contar, uno a uno, los cuadrados básicos o unidades, pueden multiplicar las filas por las columnas para calcular el área del rectángulo. El profesor institucionalizará este conocimiento tecnológico informando que el área de un rectángulo se calcula multiplicando las dos dimensiones lineales de los lados perpendiculares del rectángulo. Mediante una técnica de medida directa los alumnos conjeturarán la fórmula para calcular el área de un rectángulo como producto de las medidas lineales de sus lados perpendiculares.

ACTIVIDAD C3S.2

Objetivo: Encontrar de manera empírica la medida indirecta de la superficie del cuadrado y el rectángulo

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *A continuación tienen unas figuras formadas por cuadrados, rellena la tabla fijándote en ellas:*



FIGURAS	*nº cuadrados totales*	*b=nº cuadrados base*	*h=nº cuadrados altura*	*b·h*
1				
2				
3				
4				

Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos

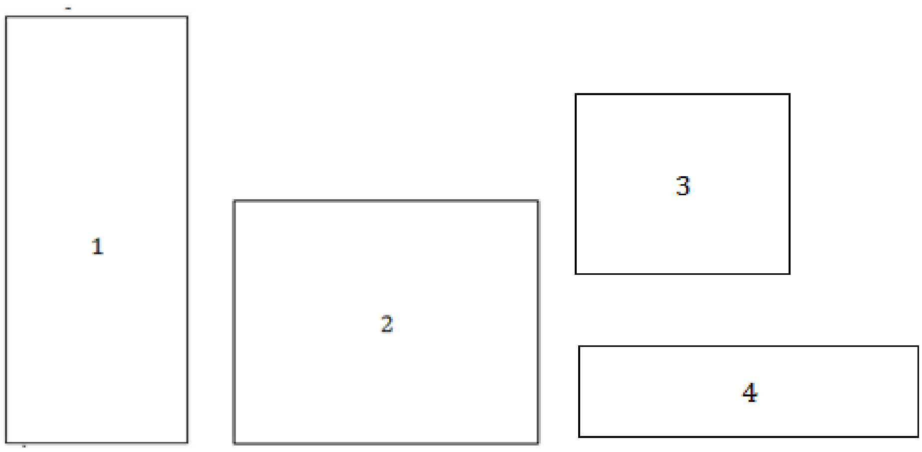
Intervención del profesor: El profesor institucionalizará este conocimiento tecnológico informando que el área de un rectángulo se calculo multiplicando las dos dimensiones lineales de los lados perpendiculares del rectángulo. Se espera que aparezca la técnica indicada en el problema anterior.

ACTIVIDAD C3S.3

Objetivo: Trabajar con medida indirecta de la superficie de rectángulos con unidades del SMD, en particular, con centímetros cuadrados.

Preparación de la actividad: A cada alumno se le entregan cuatro rectángulos dibujados y una trama cuadrada con los puntos separados a un cm uno de otro.

<u>Enunciado de la tarea:</u> Calcula el área de los siguientes rectángulo dando el resultado en centímetros cuadrados. Después lleva los rectángulos sobre la trama cuadrada y verifica si el cálculo que has realizado es correcto.



FIGURAS	*Base(cm)*	*altura(cm)*	*Área(cm^2)*
1			
2			
3			
4			

Metodología: Se realizará en casa y se corregirá en clase.

Intervención del profesor: Los alumnos ya conocen el cálculo indirecto del área del rectángulo, se pretende aplicar la fórmula como producto de sus dos dimensiones perpendiculares comprobando el resultado y, además, introducir el centímetro cuadrado como unidad de superficie. Se espera que los alumnos apliquen la fórmula del área del rectángulo y expresen las medidas de las áreas en centímetros cuadrados. Pueden utilizar la trama que se les entrega o una regla o ambas. En el caso 1, la tabla se rellenaría de este modo:

1	2 cm	4,6 cm	9,2 cm^2

ACTIVIDAD C3S.4

Objetivo: Técnica de aplicación de cálculo indirecto de área en problemas en los que dan el área de un rectángulo y preguntan por la longitud de uno de sus lados.

Enunciado de la tarea: *Si se sabe que un rectángulo tiene de superficie 27,5 cm^2 y que uno de sus lados mide 5,5 cms. ¿Cuánto miden los otros lados? Dibuja el rectángulo.*

Metodología: Se realizará en casa y se corregirá en clase.

Intervención del profesor: El profesor pretende que demuestren que han comprendido la fórmula, es un problema en que tienen que despejar en la fórmula, y mediante una división calcular el valor de uno de los lados. Se espera que pueda llevar a duda que solo les den un lado del rectángulo, aun así se supone que será fácil de realizar y que a la hora de ponerlo en práctica el profesor preguntará sobre las posibles estrategias utilizadas para realizarlo. Se espera que los alumnos apliquen la fórmula del área del rectángulo y expresen la medida de uno de los lados en centímetros.

ACTIVIDAD C3S.5

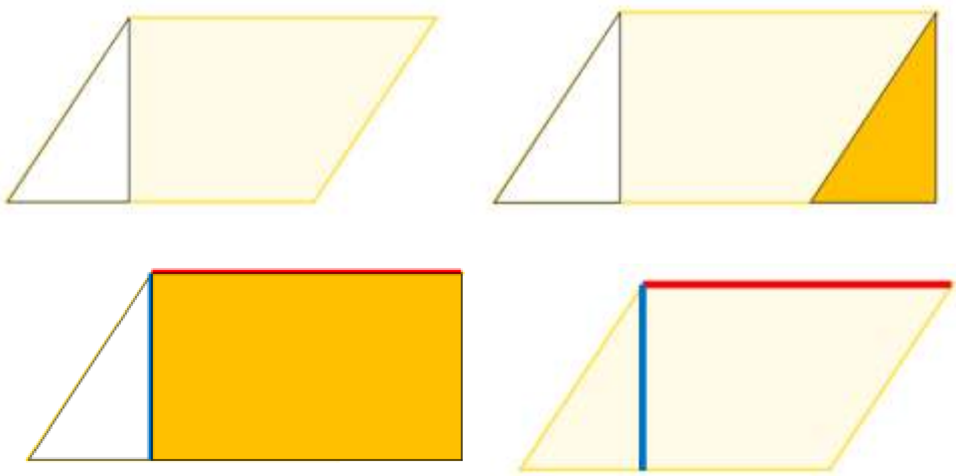
Objetivo: Deducir y justificar la fórmula del área del paralelogramo.

Enunciado de la tarea: *Construye un rectángulo que tenga la misma superficie que el siguiente paralelogramo, puedes hacerlo descomponiéndolo en piezas que te permitan hacerlo, si necesitas tijeras las hay en la mesa del profesor.*

A partir de lo que acabas de hacer, escribe y justifica la fórmula del área de un paralelogramo cualquiera.

Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 15 minutos

Intervención del profesor: El profesor pretende que con este problema, el alumno por si solo sepa conjeturar la fórmula del cálculo indirecto del área del paralelogramo y la relación que tiene con el rectángulo. Por medio de descomposición y composición vemos que se puede transformar el paralelogramo en un rectángulo, donde la altura y la base son la misma, como podemos ver a continuación:



Se espera que mediante técnicas de descomposición y recomposición de cantidades los alumnos conjeturen el conocimiento tecnológico que permite hallar el área de un paralelogramo conocido uno de sus lados y la altura que cae sobre dicho lado.

ACTIVIDAD C3S.6

Objetivo: Deducir y justificar la fórmula del área del triángulo

Enunciado de la tarea: Te presento tres triángulos. Transforma cada uno de ellos en un rectángulo que tenga la misma cantidad de superficie. Después completa la tabla.

Finalmente, encuentra la fórmula que indica el área de los triángulos en función de uno de los lados del triángulo y de la altura que cae sobre ese lado?

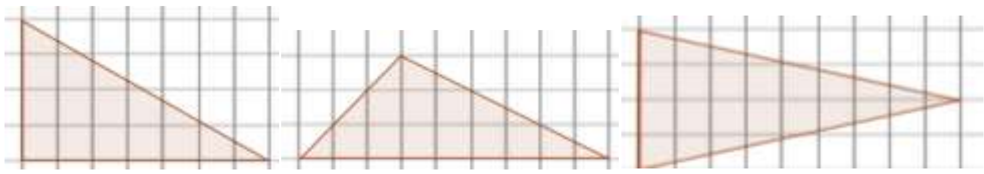
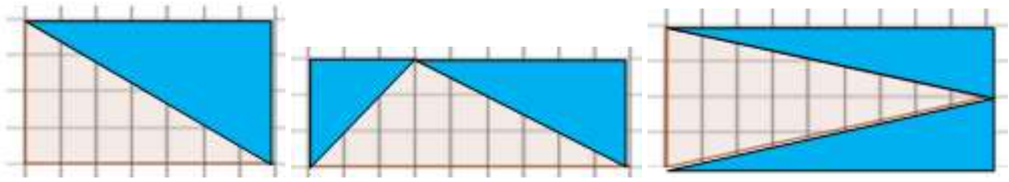


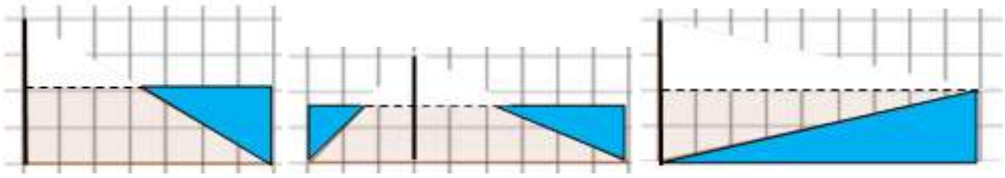
Figura	*Área del triángulo*	*Área del rectángulo*	*Base del rectángulo*	*Altura del rectángulo*	*Base del triángulo*	*Altura del triángulo*
1						
2						
3						

Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 20 minutos

Intervención del profesor: El profesor pretende que con este problema, el alumno por si solo conjeture la fórmula del cálculo indirecto del área del triángulo y la relación que tiene con el rectángulo para así facilitar la comprensión. Existen varias maneras de resolverlo, aquí vamos a plantear dos distintas, en la primera tienen que compararlo con el rectángulo que se forma al doblar el triángulo, calcular el área de este rectángulo y observar que es el doble que el triángulo, por lo tanto así comprender la norma:



Y la segunda, será partir el triángulo por su altura o su base justo por la mitad, trasladando el nuevo trozo a otro lugar para formar un nuevo rectángulo, que tendrá la mitad de base o de altura que el triángulo, por lo tanto así comprender la fórmula.



Se pretende que los alumnos utilicen las dos técnicas para resolverlo, pero en caso de no utilizar una se considera conveniente que el profesor se la muestre. Además, deberá institucionalizar la fórmula del cálculo indirecto del área del triángulo. Se espera que mediante técnicas de medida directa los alumnos conjeturen el conocimiento tecnológico que permite hallar el área de un triángulo conocido uno de sus lados y la altura que cae sobre dicho lado.

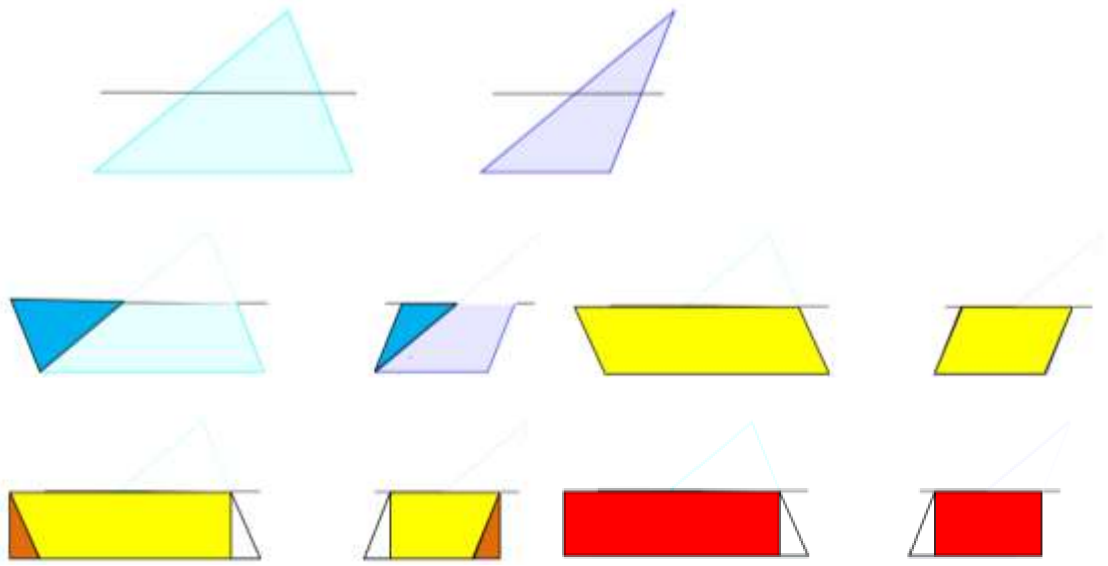
ACTIVIDAD C3S.7

Objetivo: Por medio de descomposición y composición justificar la fórmula del área del triángulo relacionándolo con un rectángulo.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Construye ahora un rectángulo equivalente a cada uno de los siguientes triángulos. Demuestra con la forma de hacerlo que conoces la fórmula del área de un triángulo cualquiera. Si necesitas tijeras las encontrarás encima de la mesa del profesor:*

Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 15 minutos

Intervención del profesor: El profesor pretende que demuestren que realmente han comprendido la fórmula del cálculo indirecto del área de cualquier triángulo, independientemente de su forma. Se espera que los alumnos tengan dificultades para descomponer los triángulos de forma adecuada, si esto es así, el profesor estará atento para sugerirles que tracen una paralela a uno de los lados por el punto medio de otro de los lados. Después no deberán tener dificultades para construir un paralelogramo equivale (de la misma área) que los triángulos y así un rectángulo. Una forma será como se sigue a continuación:

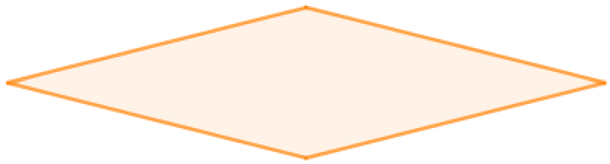


Se espera que mediante técnicas de descomposición y recomposición de cantidades los alumnos conjeturen el conocimiento tecnológico que permite hallar el área de un triángulo.

ACTIVIDAD C3S.8

Objetivo: Deducir y justificar la fórmula del área de un rombo

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Construye un rectángulo equivalente a este rombo*

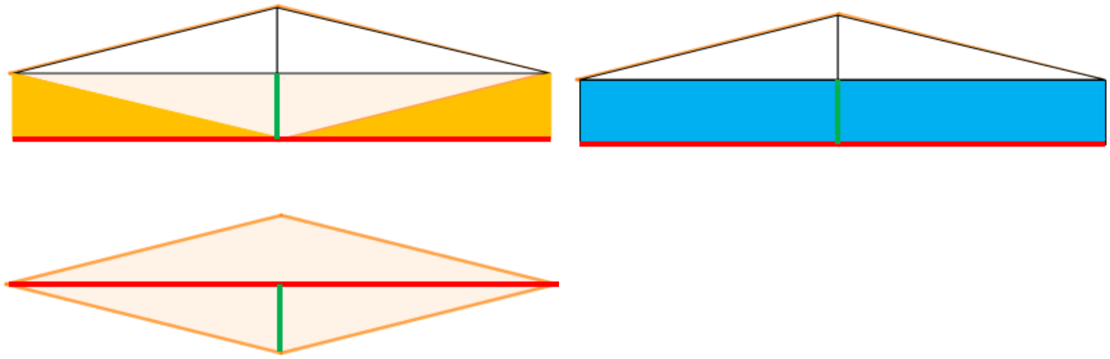


A partir de lo que acabas de hacer, escribe y justifica la fórmula del área de un rombo cualquiera en función de sus diagonales, si necesitas tijeras las encontrarás sobre la mesa del profesor.

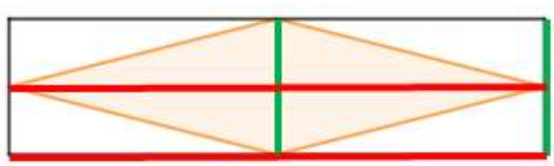
Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 15 minutos

Intervención del profesor: El profesor pretende que con este ejercicio, los alumnos conjeturen la fórmula del cálculo indirecto del área del rombo y la relación que tiene con el rectángulo. En aula se espera que aparezcan al menos dos técnicas de cálculo directo del área de rombo, son las siguientes:

En la primera se pretende que recorten y peguen como se ve a continuación, donde se puede observar que la altura del rectángulo resultante es la mitad de la diagonal menor del rombo, mientras la base es igual a la diagonal mayor, lo que da lugar a la fórmula:



La segunda de las técnicas plantea contener al rombo en un rectángulo, donde se puede observar que si dividimos el rombo por sus diagonales nos aparecen 4 triángulos que son del mismo tamaño que el triángulo con el que comparten hipotenusa, luego que el triángulo tiene doble área que el rombo, y si consideramos la altura y base del triángulo coincidente con la diagonal menor y mayor del rombo, respectivamente, de nuevo vuelve a tener sentido esta fórmula:

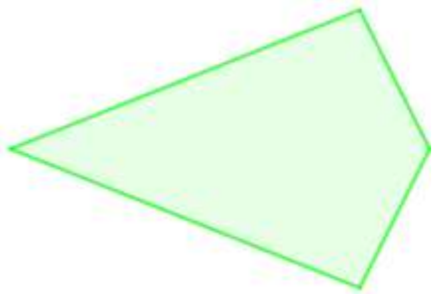


Se espera que mediante técnicas de descomposición y recomposición de cantidades los alumnos conjeturen el conocimiento tecnológico que permite hallar el área de un rombo en función de sus diagonales.

ACTIVIDAD C3S.9

Objetivo: Deducir y justificar la fórmula del área de un deltoide

<u>Enunciado de la tarea:</u> Construye un rectángulo equivalente a este deltoide



A partir de lo que acabas de hacer, escribe y justifica la fórmula del área de un deltoide cualquiera en función de sus diagonales, si necesitas tijeras las encontrarás encima de la mesa del profesor.

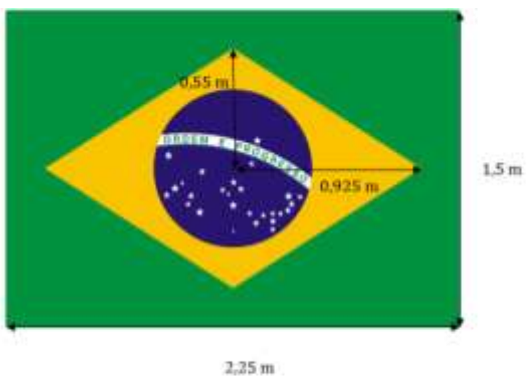
Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 15 minutos

Intervención del profesor: La intervención del profesor será análoga al problema anterior, proporcionando a los alumnos las herramientas que necesiten. Las posibles soluciones que pueden surgir de nuevo son análogas al problema anterior, así que este se puede considerar como un problema para reforzar el razonamiento utilizado en la actividad anterior. Se espera que mediante técnicas de descomposición y recomposición de cantidades los alumnos conjeturen el conocimiento tecnológico que permite hallar el área de un deltoide en función de sus diagonales.

ACTIVIDAD C3S.10

Objetivo: Aplicar las fórmulas enseñadas para calcular áreas de superficie

<u>Enunciado de la tarea:</u> Para una fiesta intercultural el grupo de Paula tiene que hacer la bandera de Brasil, necesitan saber exactamente cuanta superficie verde hace falta para construir la bandera. Los datos que han tomado son los de la bandera real (aquí están a escala). Considerando los datos reales, calcula el área de la superficie verde de la bandera:



Metodología: Se realizará en casa y se corregirá en el aula al día siguiente.

Intervención del profesor: Como se trata de un problema de aplicación de las fórmulas obtenidas en las actividades anteriores, se podrá realizar en casa. En el aula se corregirá preguntando las diferentes estrategias que han utilizado para calcularlo. La más sencilla (aunque no necesariamente la que utilicen todos) será el cálculo del rectángulo verde y del rombo amarillo y después restar la superficie del rectángulo menos la del rombo. Se espera que los alumnos apliquen técnicas de medida indirecta para calcular cantidades de superficie.

ACTIVIDAD C3S.11

Objetivo: Deducir y justificar la fórmula del área de un trapecio

<u>Enunciado de la tarea:</u> *Construye un rectángulo equivalente a este trapecio*

A partir de lo que acabas de hacer, escribe y justifica la fórmula del área de un trapecio cualquiera en función de bases y de su altura. Si necesitas tijeras las encontrarás encima de la mesa del profesor.

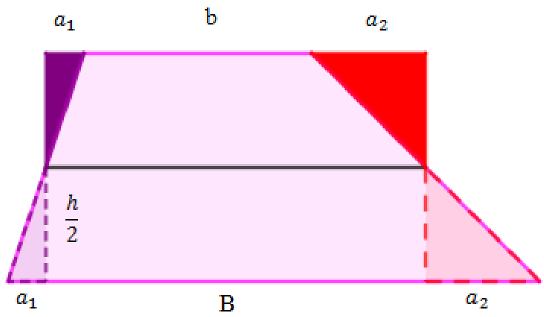
Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: El profesor pretende que con este problema que los alumnos conjeturen la fórmula del cálculo indirecto del área del trapecio y la relación que tiene con el rectángulo para así facilitar la comprensión. Planteamos dos formas de hacerlo, en la primera habrá que despejar una variable y así llegar a la fórmula:

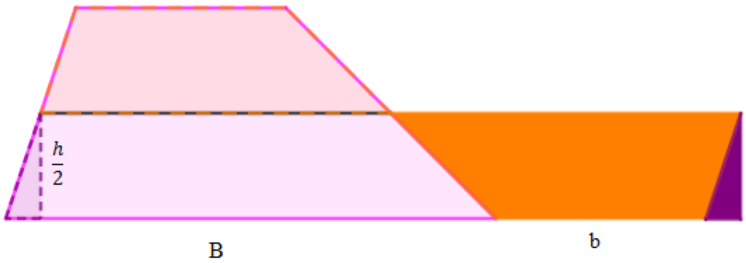
$$a_1 + a_2 = a$$

$$a + b = B - a \rightarrow 2a = B - b \rightarrow a = \frac{B-b}{2}$$

$$A = h \cdot (b + a) = h \cdot \left(b + \frac{B-b}{2}\right) = h \cdot \left(\frac{2 \cdot b}{2} + \frac{B-b}{2}\right) = h \cdot \left(\frac{B+b}{2}\right)$$



La segunda resolución es más visual, se comienza construyendo un paralelogramo de altura $\frac{h}{2}$ y base $b + B$, para luego construir el rectángulo equivalente.

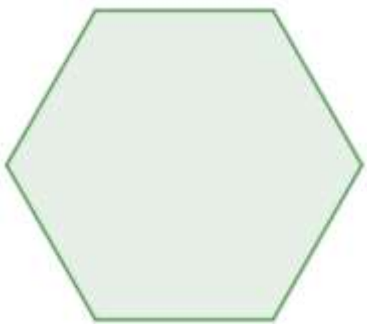


Se espera que mediante técnicas de descomposición y recomposición de cantidades los alumnos conjeturen el conocimiento tecnológico que permite hallar el área de un trapecio en función de sus bases y la altura del mismo.

ACTIVIDAD C3S.12

Objetivo: Deducir y justificar la fórmula del área de un hexágono regular

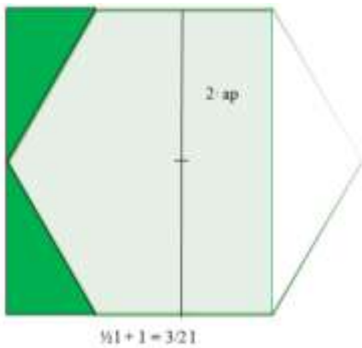
Enunciado de la tarea: *Construye un rectángulo o un paralelogramo que tenga la misma superficie que el siguiente hexágono regular, puedes hacerlo descomponiéndolo en piezas que te permitan hacerlo.*



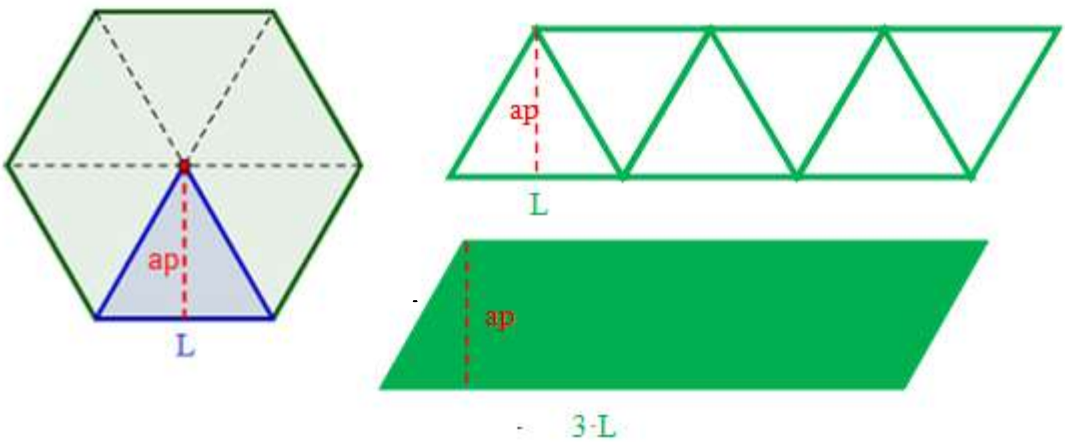
A partir de lo que acabas de hacer, escribe y justifica la fórmula del área de un hexágono regular. Si necesitas tijeras las encontrarás sobre la mesa del profesor.

Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 20 minutos

Intervención del profesor: El profesor pretende que con este problema los alumnos conjeturen la fórmula del cálculo indirecto del área del hexágono y la relación que tiene con el rectángulo o el paralelogramo, para así facilitar la comprensión. Aquí planteamos dos técnicas distintas para resolver el problema que los alumnos pueden utilizar. En la primera se tiene en cuenta que al hacer el corte que se propone, lo que se añade a la base mide la mitad que el lado del hexágono. Esto solo ocurre así en el hexágono regular, pero en este ejercicio podemos utilizarlo, de esta manera llegamos a la fórmula del hexágono en función de la apotema, que es lo que queríamos:



La segunda técnica va a ser más elaborada, pero a la vez se podrá extender mejor a polígonos regulares de más lados y además es más visual la relación que existe con la apotema y el rectángulo resultante. Aquí vemos como llegar al paralelogramo pero si se considerase, para comprenderlo mejor, se podría seguir transformando hasta llegar al rectángulo de igual área:



Se espera que mediante técnicas de descomposición y recomposición de cantidades los alumnos conjeturen el conocimiento tecnológico que permite hallar el área de un hexágono regular en función del perímetro y de su apotema.

ACTIVIDAD C3S.13

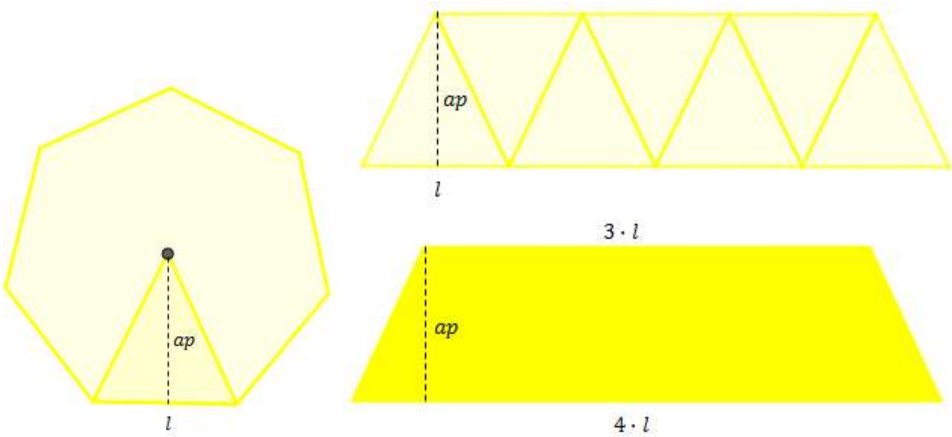
Objetivo: Deducir y justificar la fórmula del área de un heptágono regular

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Descompón el heptágono regular en triángulos y construye un paralelogramo o rectángulo de la misma área:*

A partir de lo que acabas de hacer, escribe y justifica la fórmula del área de un heptágono regular.

Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 15 minutos

Intervención del profesor: La realización de este problema es análoga a la anterior, en este ejercicio el profesor deberá aconsejar que la descomposición la hagan como la segunda planteada en el ejercicio anterior, para facilidad de ellos. La diferencia en este caso es que primero se llega a un trapecio en vez de a un paralelogramo y es desde ahí donde deben llegar al paralelogramo, como se ha realizado en ejercicios anteriores.



Se espera que mediante técnicas de descomposición y recomposición de cantidades los alumnos conjeturen el conocimiento tecnológico que permite hallar el área de un heptágono regular en función del perímetro y de su apotema.

ACTIVIDAD C3S.14

Objetivo: Deducir y justificar la fórmula del área de un polígono regular de n lados.

<u>*Enunciado de la tarea*</u>*: Después de realizar esto para los dos polígonos anteriores. Escribe y justifica la fórmula del área de un polígono regular cualquiera en función del perímetro y de la apotema del polígono regular*

Metodología: La actividad la realizan en el aula en parejas. Duración de la actividad: 15 minutos.

Intervención del profesor: El profesor quiere que sean los alumnos los que conjeturen la fórmula, así que la ayuda que les mostrará es que vean qué relación existe entre los polígonos regulares de lado par y los de lado impar, y así poder conseguir una fórmula general:

$$A = \frac{p \cdot a}{2}$$

Se espera que los alumnos conjeturen el conocimiento tecnológico que permite hallar el área de un polígono regular de n lados.

ACTIVIDAD C3S.15

Objetivo: Deducir y justificar la fórmula del área de un círculo

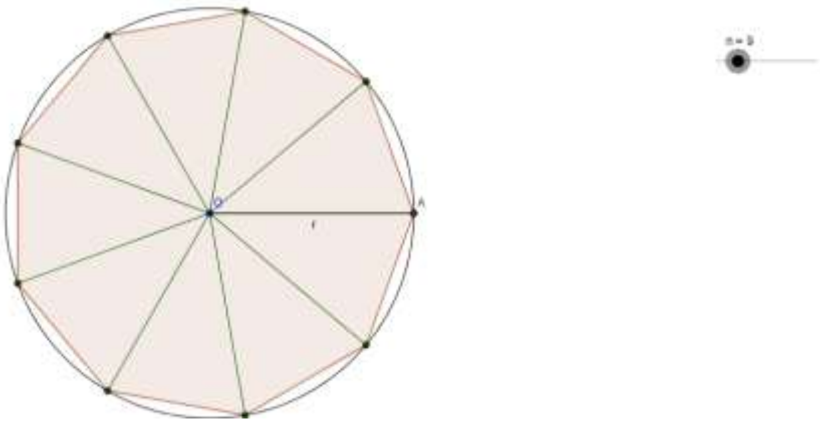
<u>*Enunciado de la tarea*</u>*: Abre este documento Geogebra. Si mueves el deslizador verás que el polígono regular inscrito en la circunferencia se aproxima a dicha circunferencia cuando aumentas el número de lados.*

Si aumentamos mucho el número de lados, a lo que hemos llamado apotema en el polígono, ¿a qué corresponde ahora?

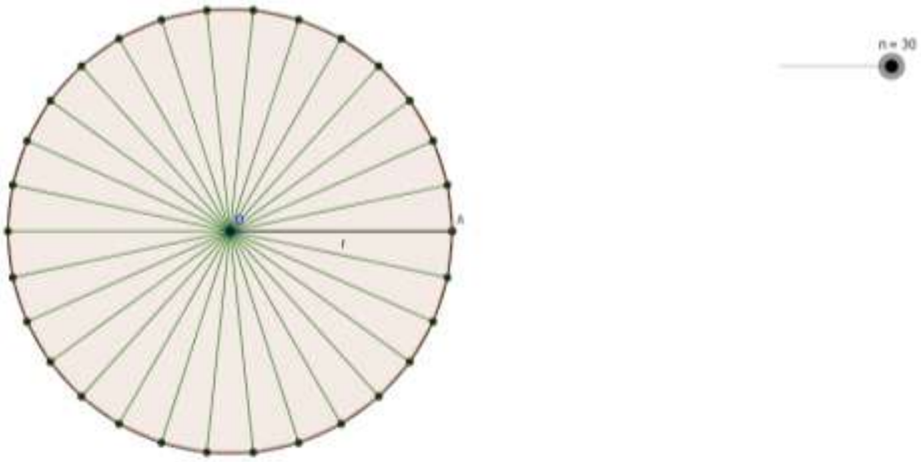
Sabiendo que la longitud de la circunferencia es 2πr, y conociendo el área del polígono regular, justifica la fórmula del área del círculo de radio es r.

Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 20 minutos

Intervención del profesor: El profesor pretende que los alumnos conjeturen la fórmula del área del círculo de radio r. Al finalizar el ejercicio el profesor institucionalizará esta fórmula y también la del caso de la sección circular, en caso de hacerlo los alumnos en parejas, el profesor repetirá los pasos para que todos lo comprendan. Los alumnos para responder a la primera pregunta van a utilizar el programa Geogebra. Como vemos el programa les permite aumentar el número de lados del polígono contenido en la circunferencia, por ejemplo el caso de 9 lados es el siguiente:



Si aumentamos al máximo (que les permite el programa) el número de lados, ellos mismos ven que el radio de la circunferencia coincide no solo con el segmento que une el vértice con centro, sino que se aproxima mucho a la apotema del polígono como vemos a continuación:



Responder a la última pregunta, sin duda puede ser lo que más problemas les suponga, dado que deben pasar de una fórmula a otra y despejar, etc. El profesor puede aconsejarles que tengan presente el área del polígono regular $\frac{p \cdot a}{2}$ y que tengan en cuenta lo que han aprendido en el apartado anterior sobre la apotema, $a = r$ y que tengan presente también las longitudes. De esta manera: $A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{p \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$. Se espera que a partir de la fórmula del área de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia los alumnos conjeturen la fórmula del área de un círculo en función de su radio.

ACTIVIDAD C3S.16

Objetivo: Justificar y aplicar la fórmula del área de un sector circular.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Andrea y Víctor se van a disfrazar para carnaval del Pacman y los fantasmas. ¿Cuál será la superficie de amarillo que necesitarán (considerando que el ojo se pinta después) para hacer el disfraz si se sabe que la boca tiene un ángulo de 30º y el radio es de 0,55m?*

Metodología: Se realizará en el aula individualmente, lo que no dé tiempo a finalizar se realizará en casa. Duración: 20 minutos

Intervención del profesor: Se trata de un problema en el que los alumnos van a conjeturar y aplicar la fórmula del área de un sector circular. Se espera que los alumnos razonen la obtención del área del sector circular, si ellos no llegan por si solos se les propondrá el siguiente razonamiento:

Si se toma el círculo entero, el ángulo central que se forma es 360º y el área es $A_{360} = \pi\, r^2$; mientras que si se toma medio círculo, su ángulo central es 180º y su área es $A_{180} = \frac{\pi\, r^2}{2}$; con el razonamiento análogo, cuando se toma un cuarto de círculo, el ángulo es 90º y el área $A_{90} = \frac{\pi\, r^2}{4}$. Se ve entonces que existe una relación entre el ángulo y el área del sector circular que enunciamos: $A_\alpha = \frac{\pi\, r^2\, \alpha}{360}$

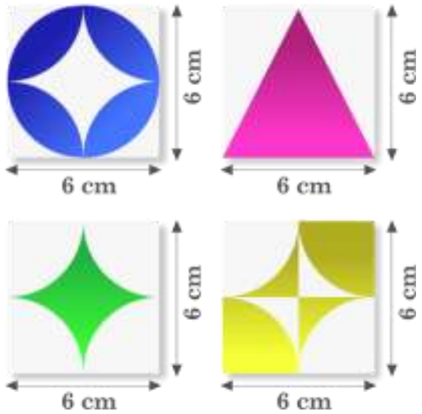
Después de este razonamiento, si se toma en este ejercicio como ángulo aproximado $\alpha = 330^o$ tenemos que $A_\alpha = \frac{\pi\, r^2\, \alpha}{360} = \frac{\pi\ (0{,}55)^2\ 330}{360} = 0{,}87 m^2$

Se espera que los alumnos conjeturen el conocimiento tecnológico que permite hallar el área de un sector circular de radio dado y que apliquen dicha fórmula para resolver el problema.

ACTIVIDAD C3S.17

Objetivo: Aplicar las fórmulas enseñadas para calcular áreas de superficie

<u>Enunciado de la tarea</u>: Debes calcular en estos dibujos las cantidades de superficie de las partes coloreadas:

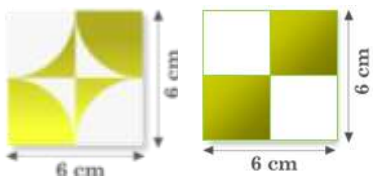


Metodología: Se realizará en casa individualmente y se corregirá en clase.

Intervención del profesor: Se trata de un problema largo, pero no muy complicado. El profesor les da dos pautas para realizarlo, la primera y que les pide que tengan en cuenta para el amarillo, es que primero pueden realizar transposiciones y luego calcular el área. Y segundo, les recomienda que calculen primero el verde, que ese les puede ayudar con el azul. Planteamos a continuación alguna forma de resolverlos, aunque no es la única:

El cálculo de la figura rosa es directo, se calcula el área de un triángulo con base y altura 6 cm.

El caso de la amarilla puede afrontarse de, al menos dos maneras, la primera, se descompone la figura y se vuelve a componer de modo que quedan como se ve, y así, calculando el área de dos cuadrados de lado 3 cm se deduce el área:

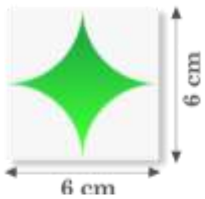


Se pretende que los alumnos sigan el anterior método, dado que se piensa que es el más sencillo, pero no el más intuitivo, así que otra posible forma sería considerar dos tipos de figuras, que se sabe que aparecen dos veces, luego se deberá multiplicar su resultado por 2:

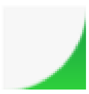
En la primera se calculará el área del cuadrado de lado 3cm y se le restará el área de la sección del círculo de radio 3cm con ángulo 90^{o}

Mientras que en la segunda se calculará el área de la sección del círculo de radio 3cm con ángulo 90^{o}.

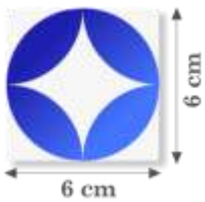
En el caso de la figura verde, de nuevo se van a considerar dos formas diferentes, pero muy parecidas, la primera de ella considera que los alumnos ven que la parte ausente forma un círculo de radio 3cm y es tan fácil como restar al área del cuadrado de radio 6 cm el área del círculo de radio 3 cm.



Mientras que la segunda opción, consiste en dividir la figura en cuatro partes iguales, calcular el área de una de ellas y multiplicarla por 4, figuras como la siguiente donde se calculará el área del cuadrado de lado 3cm y se le restará el área de la sección del círculo de radio 3cm con ángulo 90^{o}:



Para terminar, la figura azul, se puede resolver calculando el área del círculo de radio 3cm y restando el área de la figura verde, que corresponde con el interior blanco del círculo azul:



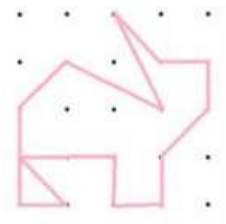
Se espera que los alumnos utilicen técnicas de medida indirecta para calcular cantidades de superficie.

ACTIVIDAD C3S.18

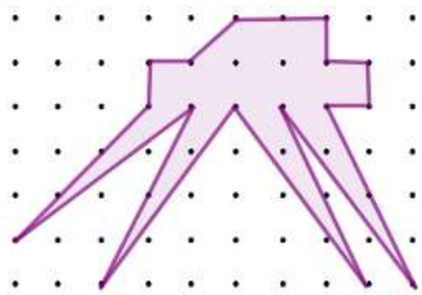
Objetivo: Trabajar de manera tangible la descomposición de figuras para calcular su superficie.

<u>*Enunciado de la tarea*</u>*: Vas a usar la trama cuadrada para resolver estos problemas, ya que te va a ayudar a ver en qué figuras sencillas se pueden descomponer figuras más complejas y además, para saber cuanto miden los lados de las figuras, ya que consideras que entre punto y punto hay 1cm. Puedes aplicar las fórmulas estudiadas anteriormente.*

Calcula la superficie de la figura cuyo contorno tiene forma de conejo:



Calcula la superficie de la figura cuyo contorno tiene forma de medusa:



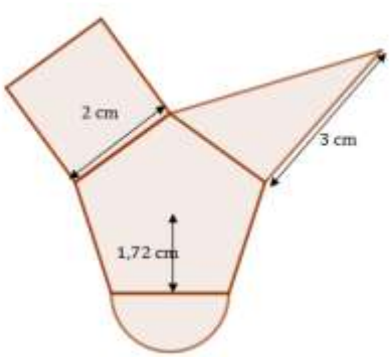
Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 20 minutos

Intervención del profesor: En el momento de la puesta en común algún alumno saldrá a la pizarra para mostrar las técnicas utilizadas. Como en el problema anterior se espera que los alumnos utilicen técnicas de medida indirecta para calcular cantidades de superficie.

ACTIVIDAD C3S.19

Objetivo: Practicar la descomposición de los polígonos para el cálculo de superficies y la lectura correcta de los datos, ya que en ocasiones proporcionan más información de la que pensamos

Enunciado de la tarea: Calcula el área de la siguiente figura:



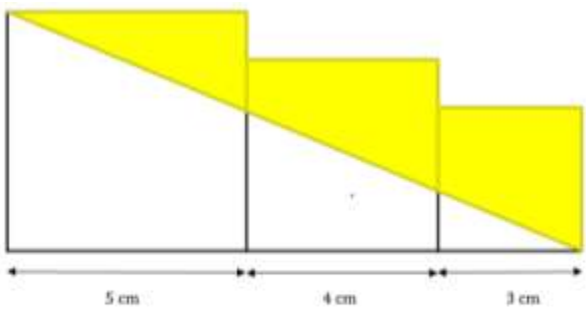
Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: Se espera que los alumnos sepan resolver este problema, dado que ya se ve claramente cuáles son las distintas figuras sencillas que componen la figura. Sin embargo, pueden encontrarse con dificultades como la creencia de que faltan datos, el profesor deberá supervisar esto y orientar, si es necesario, el trabajo de los alumnos. Se espera que los alumnos identifiquen las longitudes perimetrales de la figuras y que apliquen técnicas de medida indirecta para calcular cantidades de superficie.

ACTIVIDAD C3S.20

Objetivo: Practicar la medida indirecta y la técnica de buscar una cantidad de superficie que contenga a la cantidad a medir y que sea fácil de medir.

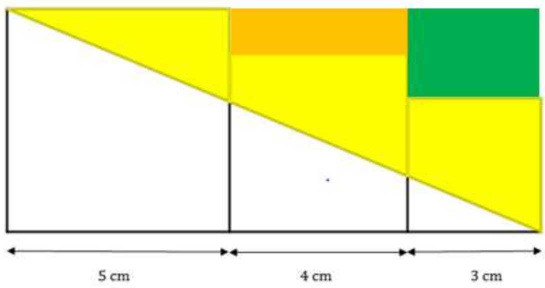
Enunciado de la tarea: Calcula el área de la superficie de color amarillo:



Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: Se proponen dos resoluciones, la primera calcular el área de los tres cuadrados: $A_5 = 5^2 = 25\ cm^2$, $A_4 = 4^2 = 16\ cm^2$ y $A_3 = 3^2 = 9\ cm^2$, sumándolas: $A_c = 25 + 16 + 9 = 50\ cm^2$. A continuación calcular el área del triángulo "blanco", de base $5 + 4 + 3 = 12 \quad cm$ y altura $5\ cm$, que es $A_t = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$. Para terminar restando el área del triángulo a la de los 3 cuadrados: $A = A_c - A_t = 50 - 30 = 20\ cm^2$.

La segunda, consistirá en considerar el triángulo superior como la parte amarilla y la que le faltaría si la base fuera paralela a la base inferior de los cuadrados, es decir, calcular el área del triángulo de base $12\ cm$ y altura $5\ cm$, que es $A_t = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$. A continuación calcular el área de las superficies que faltan, dado que se sabe la medida del lado de los cuadrados puede saberse, y así la figura que a continuación consideramos naranja tiene base $4\ cm$ y altura $1\ cm$ y la figura verde tiene de base $3\ cm$ y de altura $2\ cm$, luego tiene superficie $A_{r1} = 4 \cdot 1 = 4\ cm^2$ y $A_{r2} = 3 \cdot 2 = 6\ cm^2$, luego en total el área que se le "quita" al triángulo amarillo habrá que restársela, así: $A = A_t - A_{r1} - A_{r2} = 30 - 4 - 6 = 20\ cm^2$

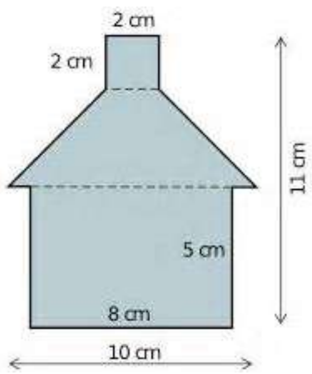


Se espera que los alumnos realicen una descomposición apropiada de la figura para saber así las superficies a calcular y que apliquen técnicas de medida indirecta para calcular cantidades de superficie.

ACTIVIDAD C3S.21

Objetivo: Practicar la descomposición de los polígonos para el cálculo de superficies y la adición de la magnitud longitud y superficie

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Calcula el área y el perímetro de la siguiente figura:*



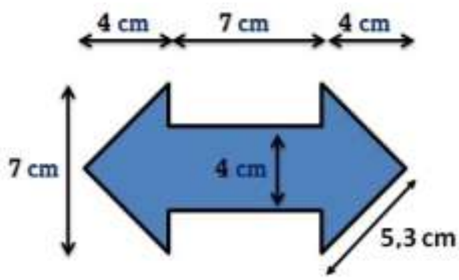
Metodología: Se realizará en casa y se corregirá en clase.

Intervención del profesor: Se espera que los alumnos sepan resolver este problema, dado que ya han practicado la descomposición de figuras y han hecho un ejercicio similar, así que deberían saben hacerlo. Se espera que los alumnos realicen una descomposición apropiada de la figura para saber así las superficies a calcular y que apliquen técnicas de medida indirecta para calcular cantidades de superficie.

ACTIVIDAD C3S.22

Objetivo: Practicar la descomposición de los polígonos para el cálculo de superficies y la adición de la magnitud longitud

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Calcula el área y el perímetro de la siguiente figura:*



Metodología: Se realizará en casa y se corregirá en clase.

Intervención del profesor: Se espera que los alumnos sepan resolver este problema. Se debe tener cuidado sobretodo con el perímetro porque igual no calculan el perímetro de la figura sino el que tendría la suma de cada una de las figuras descompuestas, si se confunden con esto el profesor deberá hacer hincapié. Se espera que los alumnos identifiquen las longitudes perimetrales de la figuras y que apliquen técnicas de medida indirecta para calcular el perímetro y el área de la figura.

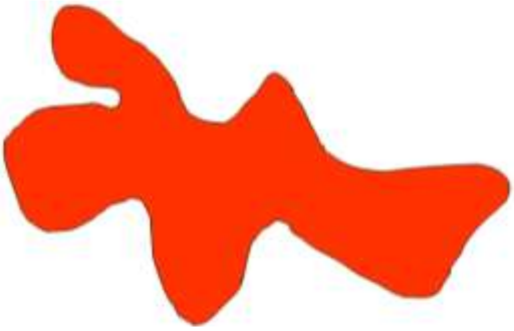
C4S. Estimación de cantidades de magnitud superficie

ACTIVIDAD C4S.1

Objetivo: Medir cantidades de superficie irregulares de modo que se realice una estimación de la medida utilizando unidades del SMD

Preparación de la actividad: Los alumnos reciben un folio en el que consta el enunciado de la actividad, además se les dice que pueden utilizar una regla convencional graduada en centímetros y milímetros.

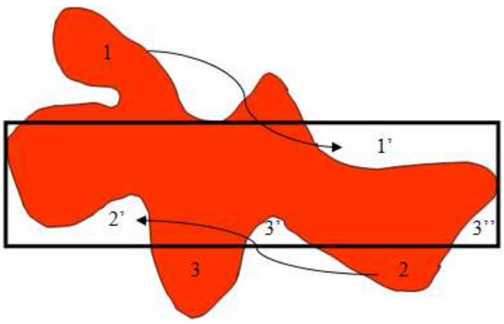
<u>Enunciado de la tarea:</u> Calcula, con la ayuda de una regla graduada, la superficie de la figura que ves dibujada en este folio, expresando el resultado en centímetros cuadrados. Dado que se trata de una figura irregular tendrás que dar un valor aproximado de la medida. Indica cómo procedes para hacer una estimación lo más real posible de la superficie de esta figura.

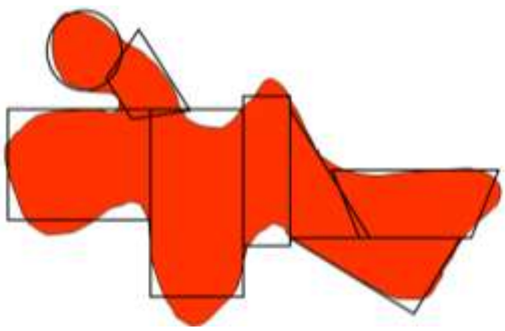


Metodología: Se realizará en el aula en grupos de cuatro. Duración: 20 minutos

Intervención del profesor: Con las indicaciones dadas en el enunciado de la tarea se espera que los alumnos aproximen la cantidad de superficie de la figura mediante un rectángulo y procedan después a calcular el área del rectángulo que se aproxima al contorno de la figura. No es aconsejable que el profesor les sugiera esta estrategia, lo recomendable, es que esta estrategia, u otras posibles, las comenten los alumnos durante la fase de puesta en común. Se espera que en esta fase aparezcan diferentes respuestas si aproximan la cantidad de superficie con figuras geométricas diferentes. En la fase de puesta en común el profesor decidirá si para verificar los resultados obtenidos se ayuda de la trama cuadrada de un centímetro cuadrado de unidad para que los alumnos puedan verificar su resultado mediante un proceso de medida directa.

Una posible resolución, podría ser la primera, en la que se encajan las curvas de la figura aproximándola a un rectángulo. Otra posible solución, es más elaborada, consiste en buscar figuras simples a lo largo de la figura, y aproximar la figura a todas ellas, por ejemplo, como en el segundo caso:





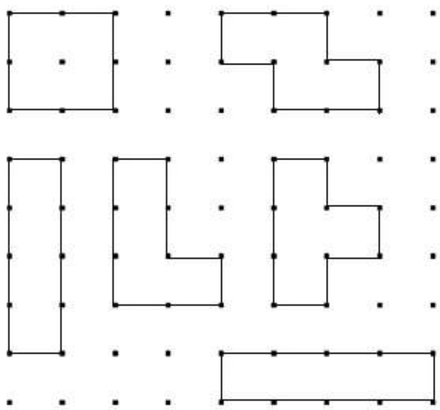
Se espera que mediante técnicas de descomposición y recomposición de cantidades los alumnos construyan una figura elemental (rectángulo, círculo, etc.) equivalente a la que se desea estimar y, posteriormente, calculen el área de esa figura mediante técnicas indirectas.

C5LS. Relación longitud y superficie (perímetro y área)

ACTIVIDAD C5LS.1

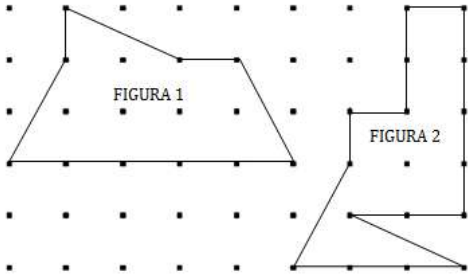
Objetivo: Diferenciar entre área y perímetro, comprendiendo que además varias figuras pueden conservar una de las dos magnitudes pero no necesariamente la otra. Se presentan diferentes figuras equivalentes pero que tienen diferente perímetro.

Enunciado de la tarea: *De los tetraminos que tienes a continuación, y que tienen todas una superficie de 4 cm^2. ¿Tienen que tener el mismo perímetro? ¿Por qué? Si se considera que mide 1cm, Indica cuál tiene mayor perímetro y cuál menor.*



Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: Se pretende que ellos vean que no todos los perímetros son iguales, luego la relación entre el área y el perímetro no es tan evidente como en un pasado han podido pensar y además, que cuanto más regular es una figura menor será su perímetro. Un ejemplo para explicar que si dos figuras son equivalentes la más regular será la de menor perímetro consiste en mostrar estas dos figuras, donde el área de la figura 1 es mayor que la de la figura 2 mientras que el perímetro es menor, esto se debe a que es más regular:

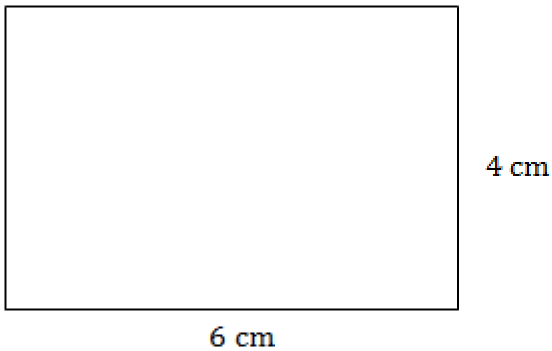


Se espera que los alumnos utilicen técnicas de medida directa de cantidades de longitud para estudiar la relación entre perímetros y áreas.

ACTIVIDAD C5LS.2

Objetivo: Estudiar la relación entre área y perímetro. Construir rectángulos que tengan el mismo perímetro (isoperimétricos) que uno dado pero diferente área.

<u>Enunciado de la tarea:</u> Dibuja rectángulos que tenga el mismo perímetro que el rectángulo de la figura pero que tenga un área menor que el rectángulo dado. *Además, dibuja rectángulos que tengan el mismo perímetro pero mayor área. ¿Hay más de una solución? Razona tu respuesta.*



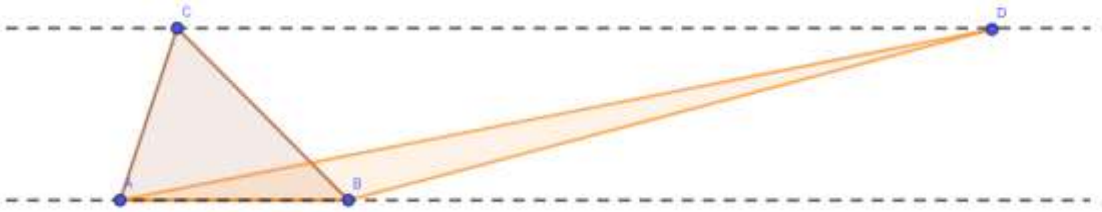
Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: Durante la puesta en común se espera que los alumnos muestren diferentes rectángulos al responder a la primera pregunta: los rectángulos 1x9, 2x8 y 3x7. Por otra parte se espera que cuando respondan a la segunda pregunta los alumnos dibujen el cuadrado de 5 cms de lado. Se trata de que los alumnos conjeturen que entre las figuras isoperimétricas las más regulares son las que poseen mayor superficie. Se espera que los alumnos utilicen técnicas de medida directa de cantidades de superficie para estudiar la relación entre perímetros y áreas.

ACTIVIDAD C5LS.3

Objetivo: Estudiar la relación entre área y perímetro

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *El triágulo ABC se ha transformado en el nuevo triángulo ABD. Observa sus áreas y sus perímetros y responde, justificando:*



1. *El área de ABC es*
a) *Mayor que la de ABD*
b) *Menor que la de ABD*
c) *Igual que la de ABD*
d) *No es posible comprarla con la de ABD*
2. *El perímetro de ABC es*
a) *Mayor que el de ABD*
b) *Menor que el de ABD*
c) *Igual que el de ABD*
d) *No es posible comprarla con el de ABD*

Metodología: Se realizará en el aula en parejas. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: Se espera que los alumnos conjeturen que entre triángulos equivalentes el más regular será el de menor perímetro. El profesor valorará utilizar Geogebra para proponer o ejemplificar este problema. Los alumnos utilizan técnicas de medida indirecta de cantidades de longitud y de superficie para estudiar la relación entre perímetros y áreas.

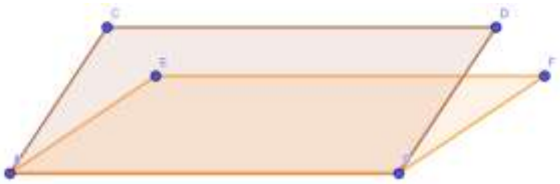
ACTIVIDAD C5LS.4

Objetivo: Estudiar la relación entre área y perímetro. Construir rectángulos que tengan el mismo perímetro (isoperimétricos) que uno dado pero diferente área.

Preparación de la actividad: Se le proporcionará a cada grupo de alumnos una serie de geotiras que podrán utilizar para resolver este problema.

<u>Enunciado de la tarea:</u> El paralelogramo ABCD se ha transformado en el nuevo paralelogramo ABEF. Observa sus áreas que tiene el mismo perímetro que el inicial porque tienen sus cuatro lados de la misma longitud *y responde, justificando:*

El área de ABCD es



a) Mayor que la de ABEF
b) Menor que la de ABEF
c) Igual que la de ABEF
d) No es posible comprarla con la de ABEF

Metodología: Se realizará en el aula en grupos de 4. Duración: 10 minutos

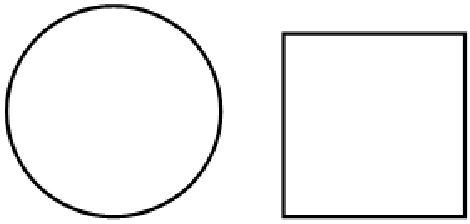
Intervención del profesor: El profesor les facilitará a los alumnos geotiras, que podrán manipular para tener una comprobación empírica del resultado, de manera que comprobarán cuanto más "achaten" el paralelogramo menor área cubrirá este:

Es decir, durante la puesta en común aparecerá en el aula el resultado teórico de que entre figuras isoperimétricas las más regulares son las que poseen mayor superficie. En efecto, en este caso el rectángulo es el paralelogramo que posee mayor superficie. Los alumnos utilizan técnicas de medida indirecta de cantidades de superficie para estudiar la relación entre perímetros y áreas

ACTIVIDAD C5LS.5

Objetivo: Estudiar la relación entre área y perímetro. Dadas dos figuras que tienen el mismo perímetro (isoperimétricos) compara sus áreas.

<u>Enunciado de la tarea:</u> Carlos y Martina son hermanos y hacen unos regalos. Primero cada uno con la misma cantidad de alambre hace una figura y luego la rellenan con Pysla. Si Carlos hace el círculo y Martina el cuadrado. ¿Quién de los dos utiliza más Pysla para hacer el regalo? Es decir, ¿cuál de las dos figura tiene mayor área? Podéis utilizar trozos de cuerda para construir la figura circular y cuadrada



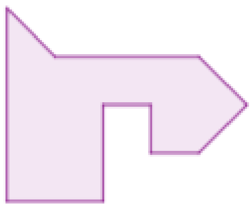
Metodología: Se realizará en el aula individualmente. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: Durante la puesta en común se espera que los alumnos lleguen a la conclusión de que a igualdad de perímetro, la figura más regular será la de mayor área, luego como el círculo es más regular tendrá mayor área. Se espera que los alumnos utilicen técnicas de comparación directa de cantidades de superficie para estudiar la relación entre perímetros y áreas. Los alumnos pueden utilizar un trozo cuerda de una determinada longitud para construir una circunferencia y un cuadrado, y después calcular el área de las figuras construidas con un trozo de cuerda.

ACTIVIDAD C5LS.6

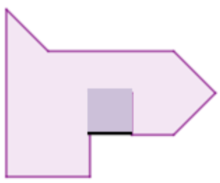
Objetivo: Estudiar la relación entre área y perímetro. Modificar el área y el perímetro de una figura para obtener otra figura de mayor área y menor perímetro.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Transforma esta figura para que tenga mayor área y menor perímetro:*



Metodología: Se realizará en el aula en parejas, pero en caso de no terminarla la realizarán en casa. Duración: 10 minutos

Intervención del profesor: Hay diversas y variadas soluciones pero la más sencilla es la siguiente:



De nuevo aparece un resultado teórico que se ha puesto de manifiesto en los problemas anteriores y que puede enunciarse de siguiente modo: cuando una figura se transforma en otra más regular aumenta su área y disminuye su perímetro.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Son muchas las técnicas que se trabajan, de manera que afirmar que existe una modificación de la técnica inicial sería erróneo, lo que se puede afirmar es que se trabajan muchas técnicas que van necesitando del conocimiento de las anteriores. La naturaleza del tema de estudio que nos ocupa hace que no se desarrollen todas las técnicas encadenadas a partir de una dada.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Todos los alumnos trabajaran con un cuaderno y fotocopias. De manera que todos los campos de problemas se propondrán mediante los enunciados que se han visto anteriormente escritos en fotocopias y el cuaderno servirá para las institucionalizaciones de la teoría, es decir, cuando el profesor explique la teoría los alumnos deberán escribirla en el cuaderno. Las fotocopias, independientemente de que se realicen en parejas o en grupos, se repartirán a cada uno de los alumnos. Es necesario que las fotocopias se guarden juntas y ordenadas, ya que al finalizar el tema se podrán corregir a la vez que el cuaderno con la teoría.

Los alumnos pueden trabajar individualmente, en parejas o en grupos de cuatro, en cada problema se ha especificado. Todos tendrán los materiales anteriormente mencionados y en caso de necesitar alguno más se especifica en la actividad concreta. Los campos de problemas propuestos son problemas acompañados de algún ejercicio para reforzar alguna idea que a priori parece más difícil de comprender. Realizarán los problemas en clase, pero alguno de los ejercicios del campo de problemas se propone para que lo realicen en casa. Estos últimos son problemas que llevan mucho tiempo y no son imprescindibles las aportaciones del profesor para realizarlos.

F. Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula

La propuesta de enseñanza se ha centrado en aspectos conceptuales de las magnitudes y que se intuye que han sido poco trabajados en cursos precedentes. Se propone reforzar un conocimiento que los alumnos ya han trabajado en cursos anteriores: se trata de asegurar que dominan las conversiones más básicas entre unidades del Sistema Métrico Decimal (SMD) y reforzar aspectos conceptuales de las magnitudes longitud y superficie.

Por otro lado, no se han diseñado ejercicios específicos obligatorios para robustecer las técnicas que han ido apareciendo al resolver los diferentes campos de problemas, pero dado que pueden ser necesarios se plantean algunos problemas con esta finalidad. Todos estos se encuentran en el anexo 2, al finalizar el trabajo, y podrían ser utilizados y seleccionados en función de las necesidades que considere el profesor.

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

En primer lugar se describen las técnicas asociadas a la magnitud longitud que los alumnos han utilizado al resolver los problemas de los campos de problemas 1, 2 y 3.

Así, en el campo de problemas 1 han aparecido las siguientes técnicas:

- TL1.1 de comparación directa de cantidades de longitud,
- TL1.2 de comparación utilizando objetos intermedios,
- TL1.3 conservación de la cantidad después de movimientos,
- TL1.4 exigencia de la rigidez de los objetos a medir o comparar,
- TL1.5 de la suma cantidades de magnitud.

En el campo de problemas 2 han aparecido las siguientes técnicas:

- TL2.1 de medida directa de cantidades de longitud reiterando la unidad de medida y subdividiendo la unidad en partes iguales, si es preciso, en tareas de cálculo,
- TL2.2 de medida directa de cantidades de longitud reiterando la unidad de medida y subdividiendo la unidad en partes iguales, si es preciso, en tareas de construcción,
- TL2.3 de medida directa de cantidades de longitud utilizando la cinta métrica, es decir, con unidades del Sistema Métrico Decimal, en tareas de cálculo,
- TL2.4 de medida directa de cantidades de longitud utilizando la cinta métrica, es decir, con unidades del Sistema Métrico Decimal, en tareas de construcción,
- TL2.5 de medida de perímetro de figuras mediante la suma de las longitudes de los lados de la figura.

En el campo de problemas 3 han aparecido las siguientes técnicas:

- TL3.1 de medida indirecta de una cantidad de longitud a partir del conocimiento de la medida de esa cantidad con una unidad que tiene una relación conocida con la nueva unidad utilizada para medir,
- TL3.2 de cálculo de la longitud de la circunferencia conocido el radio de esta,
- TL3.3 de cálculo de la longitud del arco de circunferencia conocido el radio y la amplitud del ángulo central.

Se indican ahora las técnicas asociadas a la magnitud superficie que los alumnos han utilizado al resolver los problemas de los campos de problemas 1, 2, 3 y 4.

En el campo de problemas 1 han aparecido las siguientes técnicas:

- TS1.1 de comparación de cantidades de superficie por descomposición y recolocación de cantidades,
- TS1.2 de la suma cantidades de magnitud,
- TS1.3 conservación de la cantidad después de movimientos.

En el campo de problemas 2 han aparecido las siguientes técnicas:

- TS2.1 de medida directa de cantidades de longitud reiterando la unidad de medida y subdividiendo la unidad en partes iguales, si es preciso,
- TS2.2 de construcción de cantidades de longitud conocido el resultado de una medición,
- TS2.3 de medida al descomponer la cantidad en partes y sumar el área de cada parte,
- TS2.4 de medida al descomponer y recolocar cantidades de superficie,
- TS2.5 de medida completando la cantidad inicial con otras que faciliten el cálculo del área de la inicial.

En el campo de problemas 3 han aparecido las siguientes técnicas:

- TS3.1 de medida indirecta del área de un rectángulo multiplicando las longitudes de los dos lados,
- TS3.2 de medida indirecta del área de un cuadrado conocido su lado,
- TS3.3 de medida indirecta del área de un paralelogramo conocidos su lados desiguales,

- TS3.4 de medida indirecta del área de un rombo conocidas su diagonales,
- TS3.5 de medida indirecta del área de un triángulo conocidos un lado y la altura sobre ese lado,
- TS3.6 de medida indirecta del área de un trapecio conocidas sus bases y la altura del mismo,
- TS3.7 de medida indirecta del área de un polígono regular conocido su lado,
- TS3.8 de medida indirecta del área de un círculo conocido su radio,
- TS3.9 de medida indirecta del área de un sector circular conocido su radio y la amplitud del ángulo central.

En el campo de problemas 4 ha aparecido la siguiente técnica:

- TS4.1 estimación de la cantidad de superficie utilizando técnicas de medida directa e indirecta.

Finalmente, se indican las técnicas asociadas a la relación entre la magnitud longitud y la magnitud superficie:

- TS5.1 técnicas de medida directa o indirecta de figuras equivalentes que tengan diferente perímetro,

- TS5.2 técnicas de medida directa o indirecta de figuras isoperimétricas que tengan diferente área ,
- TS5.3 transformar una figura para obtener otra que tenga mayor/menor área y menor/mayor perímetro.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

A lo largo del campo de problemas se trabajan todas las técnicas, dado que estas son las que permiten construir el conocimiento sobre el objeto matemático. Son adecuadas a los campo de problemas porque se han elegido de manera adecuada para que cuando se finalice la propuesta didáctica los alumnos comprendan las características que definen las magnitudes longitud y superficie para, de esta manera, poder realizar medidas directas, indirectas o estimaciones comprendiendo lo que están haciendo.

Durante el campo de problemas se han ido mencionando las técnicas que se utilizan para la resolución de estos, de manera que en el aula estas iran apareciendo en el momento en el que los alumnos resuelvan el problema y, o bien la deduzcan o bien la utilicen.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

Todas estas tecnologías se van a ir institucionalizando durante la secuencia de enseñanza, se enumera a continuación el orden en el que van a ir apareciendo:

LONGITUD

- TgL.1: Justificación de la relación entre el tamaño de la unidad y el resultado de la medición
- TgL.2: Justificación de la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia conociendo su radio
- TgL.3: Justificación de la fórmula para calcular la longitud de arco de una circunferencia conociendo su radio y la amplitud del ángulo central

SUPERFICIE

- TgS.1: Justificación de la relación entre el tamaño de la unidad y el resultado de la medición
- TgS.2: Justificación de la fórmula área de un rectángulo ,
- TgS.3: Justificación de la fórmula del área del triángulo,
- TgS.4: Justificación de la fórmula del área de un paralelogramo,
- TgS.5: Justificación de la fórmula del área de un rombo conocidas su diagonales,
- TgS.6: Justificación de la fórmula del área de un trapecio conocidas sus bases y la altura del mismo,
- TgS.7: Justificación de la fórmula del área de un polígono regular conocido su lado y mediante triangulación o descomposición del polígono,
- TgS.8: Justificación de la fórmula del área de un círculo conocido su radio,
- TgS.9: Justificación de la fórmula del área de un sector circular conocido su radio y la amplitud del ángulo central.

A este listado se podrían haber incorporado otras posibles justificaciones de técnicas o tecnologías que han aparecido, principalmente, en los campos de problemas 1 de longitud y de superficie. Sin embargo, no se va a hacer porque la justificación de dichas técnicas se encuentra en la propia naturaleza de las dos magnitudes estudiadas. En consecuencia, se entiende que no es necesario justificar estas técnicas de carácter básico y por eso se introducen nuevas tecnologías. Ahora bien, sí que parece oportuno y pertinente que los alumnos expliciten y comprendan que están utilizando técnicas básicas en las tareas de comparación y de medida de ambas magnitudes, como son la conservación de cantidades al realizar movimientos, la búsqueda de la rigidez de los objetos cuyas longitudes se van a comparar o medir, la técnica de suma de cantidades de magnitud, la comparación o medida de cantidades por descomposición y recolocación de cantidades, la comparación o medida al descomponer la cantidad en partes y sumar las cantidades de cada parte, etc. Por este motivo se han explicitado dichas técnicas en cada uno de los problemas que conforman la propuesta didáctica y que hemos descrito en el apartado “campos de problemas”

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar dichas técnicas?

En ocasiones serán los alumnos y en ocasiones será el profesor. En todos los problemas se especifica quién y cómo se realizará la institucionalización de las técnicas, que salvo excepciones se realizará en la puesta en común después de que los alumnos hayan resuelto el problema propuesto.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático

Como se ha indicado anteriormente, las técnicas y tecnologías van a ir apareciendo durante el desarrollo de la propuesta didáctica cuando los alumnos vayan resolviendo las actividades propuestas en los campos de problemas.

En la siguiente tabla se muestra la secuencia de aparición de las diferentes técnicas y tecnologías de esta propuesta didáctica, en la que aparecen cada uno de los problemas y la referencia a la técnica y tecnología que en él se trabajan:

Problema	Técnicas	Tecnologías
C1L.1	TL1.1, 4	
C1L.2	TL1.1, 2, 3	
C1L.3	TL1.1, 2, 3	
C1L.4	TL1.1, 3, 5	
C1L.5	TL1.1, 5	
C1L.6	TL1.1, 5	
C2L.1	TL2.1	TgL.1
C2L.2	TL2.2	
C2L.3	TL2.3, 4	TgL.1
C3L.1	TL2.5, TL3.1	
C3L.2	TL3.2	TgL.2
C3L.3	TL3.2	TgL.2
C3L.4	TL3.3	TgL.3
C1S.1	TS1.1, 3	
C1S.2	TS1.1, 3	
C1S.3	TS1.1, 3	
C1S.4	TS1.1, 3	
C1S.5	TS1.1, 3	
C1S.6	TS1.1, 2, 3	
C2S.1	TS2.1	
C2S.2	TS2.1	TgS.1
C2S.3	TS2.1, 4, 5	
C2S.4	TS2.1, 4, 5	
C2S.5	TS2.1	
C2S.6	TS2.1, 2	
C2S.7	TS2.1, 3	
C2S.8	TS2.4, 5	
C2S.9	TS2.1, 3	TgS.1
C2S.10	TS2.1, 4	
C3S.1	TS2.1	TgS.2
C3S.2	TS2.1, TS3.1, 2	
C3S.3	TS3.1, 2	

Problema	Técnicas	Tecnologías
C3S.4	TS3.1	
C3S.5	TS3.1, 3	TgS.4
C3S.6	TS3.1, 3, 5	TgS.3
C3S.7	TS3.1, 3, 5	TgS.3
C3S.8	TS3.1, 3, 4	TgS.5
C3S.9	TS3.1, 3	
C3S.10	TS3.1, 4	
C3S.11	TS3.1, 3, 6	TgS.6
C3S.12	TS3.1, 3, 7	TgS.7
C3S.13	TS3.6, 7	TgS.7
C3S.14	TS3.7	TgS.7
C3S.15	TS3.7, 8	TgS.8
C3S.16	TS3.8, 9	TgS.9
C3S.17	TS3.2, 5, 8	
C3S.18	TS3.1, 2, 5, 6	
C3S.19	TS3.2, 5, 7, 8, 9	
C3S.20	TS3.1, 2, 5	
C3S.21	TS3.1, 2, 6	
C3S.22	TS3.1, 5	
C4S.1	TS4.1	
C5LS.1	TS4.1	
C5LS.2	TS4.2	
C5LS.3	TS4.1	
C5LS.4	TS4.2	
C5LS.5	TS4.2	
C5LS.6	TS4.3	

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Las tecnologías irán apareciendo a lo largo de la propuesta didáctica cuando se necesite justificar una nueva técnica, porque la técnica que conocen es insuficiente para resolver el problema o porque necesitan una técnica más avanzada para facilitar la resolución del mismo.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores y establece una duración temporal aproximada

Cada sesión que aparece a continuación muestra lo que se pretende realizar en una clase ordinaria de 55’, donde se establece el tiempo estimado para cada uno de los ejercicios que se plantean.

SESIÓN 1: *Prueba inicial*

Prueba para conocer cómo se encuentran previamente los alumnos ante este tema (50’)

SESIÓN 2: *Longitud. Aspectos conceptuales de la magnitud longitud (conservación y comparación)*

Problemas de comparación y conservación (C1L1-5, 50’ en clase; C1L6 tarea para casa)

Institucionalización: longitud

Introducción de la noción de perímetro

SESIÓN 3: *Longitud. Aspectos conceptuales de la magnitud longitud (conservación y comparación), toma de contacto con la necesidad de medir longitudes, comprensión y medida directa de la longitud*

Problemas de medida directa de longitudes (C2L1-2, 30’ en clase)

Problemas de razón de ser (L1-2, 30’ en clase)

SESIÓN 4: *Longitud. Medida directa y comprensión de la necesidad de unificar el sistema de medida e introducción de medida indirecta de cantidades de magnitud longitud, utilizando unidades del SMD*

Problemas de medida directa de longitudes (C2L3, 25’ en clase)

Introducción SMD. Con su razón histórica

Problemas de medida indirecta de longitud (C3L1, 2, 4, 30’ en clase; C3L3 en casa)

Definición de perímetro

Uso de Geogebra para la circunferencia

SESIÓN 5: *Superficie. Aspectos conceptuales de la magnitud superficie (conservación y comparación), toma de contacto con la necesidad de medir superficies*

Problemas de comparación y conservación (área como cantidad de plano ocupado) (C1S1-3, 30’ en clase; C1S4 en casa)

Problemas de razón de ser (S.1) (30’)

SESIÓN 6: *Superficie. Aspectos conceptuales de la magnitud superficie (conservación y comparación), comprensión y medida directa de la superficie, trabajando la relación de la unidad de medida y el valor numérico*

Problemas de comparación y conservación (C1S5-6, 30’ en clase)

Problemas de medida directa de superficies (C2S1-3, 30’ en clase; C2S4 en casa)

Introducción de la definición de área (como magnitud autónoma y como unidad que recubre la superficie)

SESIÓN 7: *Superficie. Medida directa de la superficie, trabajando la relación de la unidad de medida y el valor numérico*

Problemas de medida directa de superficies (C2S5-8, 55’ en clase)

SESIÓN 8: *Superficie. Medida directa de la superficie e introducción de la medida indirecta de la superficie. Elección del cuadrado como unidad de medida consensuada.*

Problemas de medida directa de superficies (C2S9-10, 30’ en clase)

Introducción de la superficie como magnitud bidimensional

Introducción SMD. Con su razón histórica

Problemas de medida indirecta de superficies (C3S1-2, 20’ en clase, C3S3-4 en casa)

Institucionalización de la fórmula del área del cuadrado y rectángulo (5’)

SESIÓN 9: *Superficie. Medida indirecta de la superficie.*

Problemas de medida indirecta de superficies (C3S5-7, 50’ en clase)

Desarrollo y fórmula del área del triángulo y paralelogramo (desde el rectángulo)

SESIÓN 10: *Superficie. Medida indirecta de la superficie.*

Problemas de medida indirecta de superficies (C3S8-9 y C3S11 -12 55’ en clase, C310 en casa)

Desarrollo y fórmula del área del rombo, deltoide y trapecio (desde el rectángulo)

Desarrollo y fórmula del área del hexágono regular (desde el triángulo y el rectángulo)

SESIÓN 11: *Superficie. Medida indirecta de la superficie.*

Problemas de medida indirecta de superficies (C3S13-16, 55’ en clase, C3S17 en casa)

Desarrollo y fórmula del área del polígono regular (desde el triángulo y el rectángulo)

Desarrollo y fórmula del área del círculo (desde el polígono regular)

SESIÓN 12: *Superficie. Medida indirecta de la superficie y aproximación y estimación de superficies*

Problemas de aproximación de superficies (C4S1, 20’ en clase)

Problemas de medida indirecta de superficies y descomposición de figuras irregulares en polígonos (C3S18-20, 40’ en clase, C3S21-22 en casa)

Descomposición de figuras irregulares en polígonos de los que se sepa calcular el perímetro y el área Desarrollo y fórmula del área del círculo (desde el polígono regular)

SESIÓN 13: *Longitud-superficie. Comparación y relación de área y perímetros*

Problemas de relación entre la longitud y la superficie de las figuras geométricas (CLS1-6, 60’ en clase)

SESIÓN 14: *Prueba escrita*

I. Sobre la evaluación

1. Diseña una prueba escrita que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos

Se va a proponer una prueba o examen que consta de 6 ejercicios. Los enunciados y el formato de la prueba se detallan en el ANEXO 1, además, a los alumnos se les dará la consigna de no poder utilizar regla graduada en centímetros y milímetros. El examen tendrá un duración de 55’.

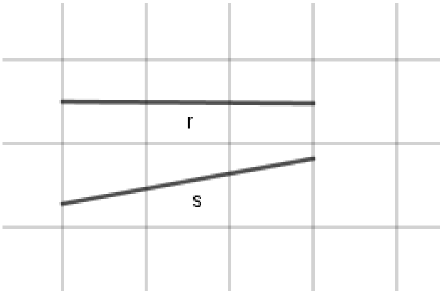
En cada uno de los seis ejercicios, por separado, se van a detallar los aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático que se pretende evaluar, las respuestas esperadas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos y los criterios de evaluación. Además, se debe tener en cuenta que la nota total será sobre 10 puntos, pero la manera de corregir será evaluando **cada uno de los**

ejercicios sobre 10 pero sabiendo que 2, 3, 4 y 6 valdrán, cada uno, 1,5 puntos de la nota global y 1 y 5 valdrán, cada uno, 2 puntos de la nota global. Los criterios de calificación contemplan la penalización de errores o la falta de precisión, cuestiones que restarán puntuación. En cada ejercicio se especificarán los criterios de calificación.

Ejercicio 1.

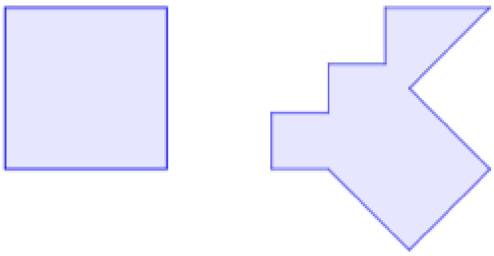
I. Responde a las siguientes preguntas con verdadero y falso. Explicando en caso de que sea afirmativa y corrigiendo en caso de que sea falsa (si ***sólo*** *contestas verdadero o falso se contará como no respondida):*

I. A. Los dos segmentos tienen la misma longitud



I. B. Cuando comparamos dos rectángulos A y B, si A tiene más área que B además, A siempre tendrá más perímetro que B

I. C. Estas dos figuras tienen la misma área



II. Dispones de cuatro geotiras iguales de 20 centímetros cada una. Si las unes por sus extremos obtendrás diferentes rombos según vayas variando la amplitud de los ángulos que forman las geotiras.

II. A. ¿Entre que valores varía el perímetro de todos los rombos que se pueden construir? Razona tu respuesta.

II. B. ¿Entre que valores varía el área de todos los rombos que se pueden construir? Razona tu respuesta.

II. C. ¿Qué nombre recibe el rombo de mayor área?

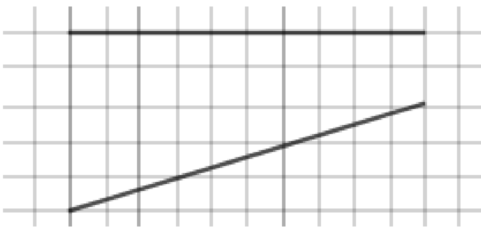
¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar?

TAREAS PRINCIPALES:
- Comprender y diferenciar los conceptos de área y perímetro - Comprender la conservación y comparación de magnitudes - Calcular área y perímetro de un rombo que se modifica al variar sus ángulos
TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS:
- Saber descomponer y recomponer cantidades de superficie - Medir las cantidades de superficie para compararlas - Identificar el cuadrado con un caso particular del rombo - Expresar correctamente las unidades

¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

I.A. La afirmación es falsa: Los dos segmentos NO tienen la misma longitud.

1. Se puede hacer más trozos en la cuadrícula y ver que aunque la distancia horizontal es la misma, el de abajo recorre más cuadraditos en vertical



2. Se puede medir con un trozo de cartulina (que utilizan para otro ejercicios) y ver que las cantidades de longitud son distintas

3. Se puede justificar que la distancia perpendicular (tomando como referencias la cuadrícula) es el segmento más corto.

Luego, en todos los casos, el primer segmento tiene menos longitud.

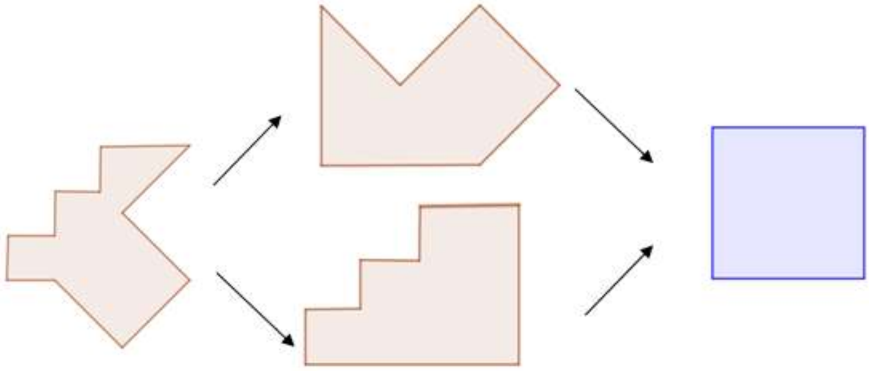
I.B. La afirmación es falsa: Cuando comparamos dos rectángulos A y B, si A tiene más área que B además, A NO siempre tendrá más perímetro que B

1. Los rectángulos de lados 4x4 y 1x9 en un contraejemplo de esto, ya que el área del primero es mayor que la del segundo, mientras que el perímetro es menor.

2. Hay veces que sí y hay veces que no, son dos magnitudes que están relacionadas pero no de esta manera. Por ejemplo, hay veces que figuras que tienen la misma área tienen distinto perímetro y viceversa.

I.C. La afirmación es verdadera: Estas dos figuras SÍ tienen la misma área

Se puede pasar de una a otra y se comprueba que es la misma



II.A. ¿Entre que valores varía el perímetro de todos los rombos que se pueden construir? Razona tu respuesta.

Todos tienen el mismo perímetro: 80 cm. Se calcula sumando lo que miden las 4 geotiras y nunca varía esta longitud.

II.B. ¿Entre que valores varía el área de todos los rombos que se pueden construir? Razona tu respuesta.

Va variando entre un valor cercano a 0 cms cuadrados y 400 cms cuadrados, porque va aumentando conforme aumenta el ángulo que une los lados del rombo, hasta que los ángulos son de 90 grados o, dicho de otra manera, porque conforme más regular es el rombo más grande es el área, es decir, cuanto más se parece al cuadrado más grande es el área, mientras que cuando es más alargado el área del rombo es más pequeña.

¿Qué nombre recibe el rombo de mayor área?

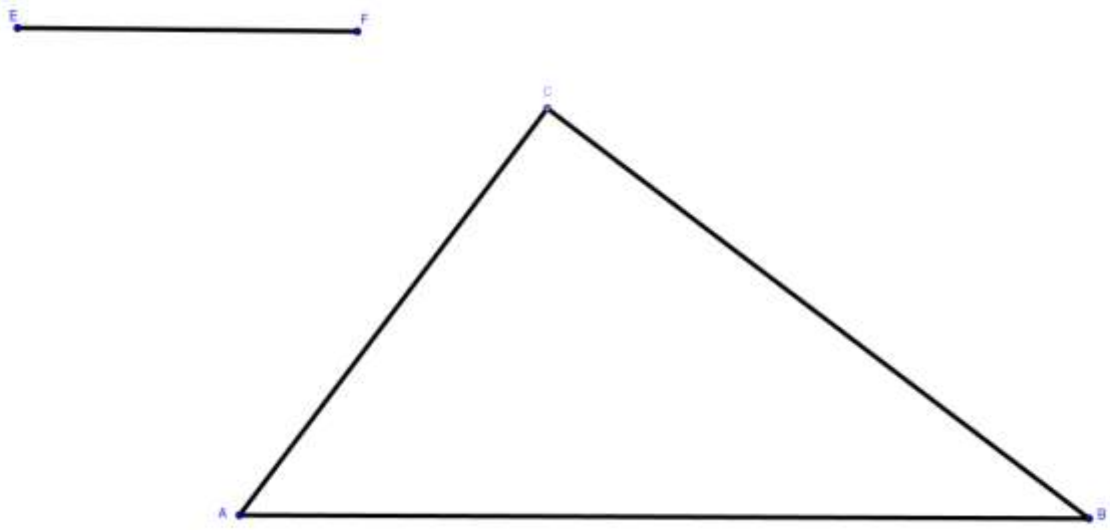
Cuadrado

¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

ERROR	PENALIZACIÓN (sobre 10 p)
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS PRINCIPALES	
Apartado IA: Considerar que miden igual	2 p (penalización máxima)
Apartado IB: No mostrar que diferencia con claridad área y perímetro	2 p (penalización máxima)
Apartado IC: Dar como respuesta que la figura irregular tiene más área al confundir los conceptos de área y perímetro.	2 p (penalización máxima)
Apartado IIA, B: Dar una respuesta incorrecta, por equivocaciones al medir.	0,5 p (por cada error)
Apartado IIA: Por responder de manera errónea, sin comprensión	1 p (penalización máxima)
Apartado IIB: Por responder de manera errónea, sin comprensión.	1 p por cada uno de los extremos erróneos (el ejercicio se valora en 2p)
Apartado IIC: Dar una respuesta incorrecta	1 p (penalización máxima)
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS	
Apartado IC: Yerra en la respuesta porque realiza medidas indirectas pero se confunde en los cálculos	1 p si comete algún error. Cada nuevo error se penalizará con 0,5 p (hasta 6,5 p)
No conoce el área del rombo	0,5 p
No conoce como calcular el perímetro del rombo	0,5 p
No expresa correctamente las unidades	0,5 p por cada ejercicio

Ejercicio 2.

Utilizando como unidad de medida el segmento EF, es decir, lo que mide el segmento es "un EF", mide el perímetro del triángulo ABC. Dispones de tiras de papel para construir la unidad EF.



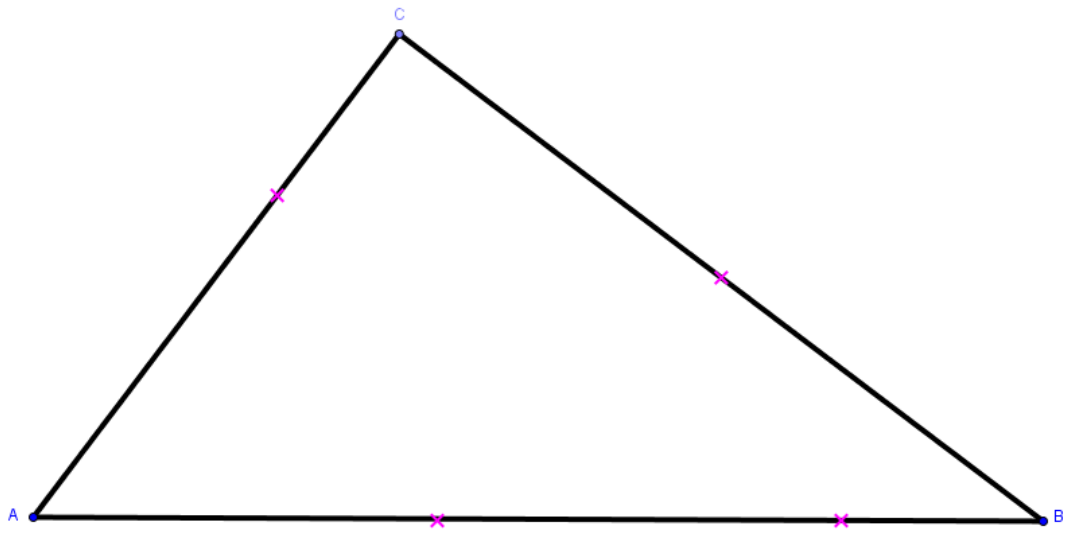
¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar?

TAREAS PRINCIPALES:
- Calcular el perímetro, realizando fraccionamientos de la unidad.
TAREAS AUXILIARES GENERALES:
- Expresar el resultado en función de la unidad de medida - Realizar correctamente las operaciones aritméticas con fracciones o números decimales

¿Qué respuestas esperas en función del conocimiento de los alumnos?

1. La unidad de medida que se va a utilizar mide esta longitud, que como dice el enunciado es "un EF":

Utilizando como referencia esta unidad, que con ayuda de un papel se puede apoyar sobre el triángulo, hago las mediciones, fácilmente se ve que el segmento BC mide 2 EF, y que en el segmento AC y AB hará falta fraccionar la unidad EF. De nuevo, fácilmente se ve que doblando el papel por la mitad, se encuentra la longitud que se está buscando. Es decir, el segmento AB mide (2 + 0,5) EF = 2,5 EF y el segmento AC mide (1 + 0,5) EF = 1,5 EF



Hay que expresar el resultado de forma decimal o en forma de fracción, pero correctamente.

2. Se va medir con la cartulina todo lo que mide el perímetro, poniendo una longitud detrás de la otra y luego, teniendo en cuenta la unidad, se repetirá tantas veces como esta aparezca. La unidad de medida aparece 6 veces, se puede tener en cuenta que se mide de uno en uno realizando los cálculos como en el apartado anterior, o que se mide todo seguido y no hace ni falta fraccionar la unidad.

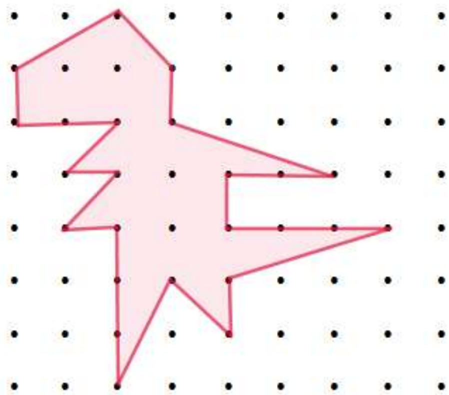
¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

ERROR	PENALIZACIÓN (sobre 10 p)
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS PRINCIPALES	
No dar un resultado, porque no realiza fraccionamientos de la unidad o se reproduce mal la longitud	10 p
Expresar en unidades del SMD (dado que no pueden utilizar regla).	5 p

ERROR	PENALIZACIÓN (sobre 10 p)
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS	
No expresar el resultado en función de la unidad de medida (puede determinar otra)	3 p
Realizar una medida del perímetro pero se confundiéndose en los cálculos	2 p (por un error y hasta 3,5 por los siguientes).

Ejercicio 3.

Calcula el área de la siguiente figura. Explica cómo has realizado, puedes ayudarte de representaciones para hacerlo (si solo contestas el resultado numérico sin justificación se considerará no contestada):



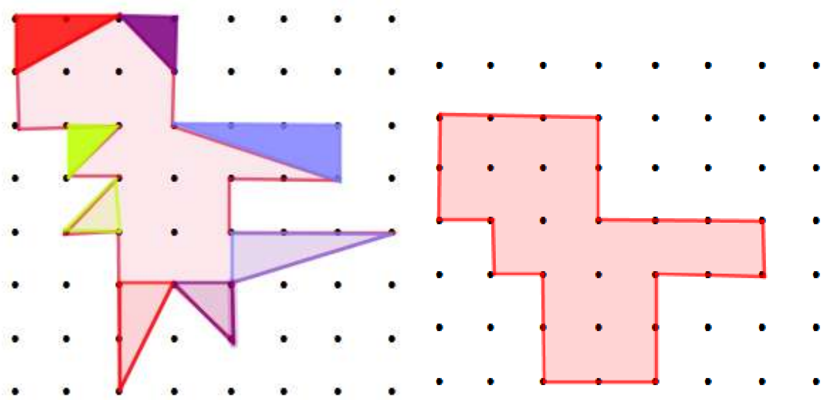
¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar?

TAREAS PRINCIPALES:
- Descomponer y recomponer la figura en otra más sencilla que se pueda medir - Medir la superficie
TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS:
- Calcular el área descomponiendo y componiendo cantidades de superficie - Explicitar la unidad de medida - Calcular el área utilizando fórmulas de medida indirecta de cantidades de superficie

TAREAS AUXILIARES GENERALES:
- Realizar cálculos aritméticos

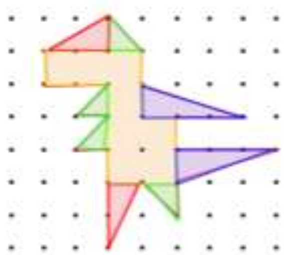
¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

1. Se puede medir con facilidad contando cuadrados 1x1 delimitados por la rejilla. Para ello se va a "recortar" triángulos para "pegar" en aquellos lugares donde sí que puedan ir y formas así la mayor cantidad de cuadrados posibles. Una posible manera de hacerlo es como la que hay a continuación (pero no es la única), donde los triángulos translucidos se recortan y se pegan apareciendo los opacos; dando lugar a la figura de la derecha. Contando se ve que la figura tiene 15 unidades de superficie.



2. Se puede ver cuántas figuras de cada tipo tiene y calcular el área de cada una:

	FIGURA 2
Cuadrados enteros	8
Medios cuadrados	4
Triángulos base 2 altura1	2
Triángulos base 3 altura1	2
Triángulos base 6 altura1	-



Se calculan áreas: se considera el cuadrado 1x1 de área 1 y se compara todo con este. Por esta razón 2 triángulos que son medios cuadrados hacen área 1, el triángulo de base 2 y altura 1 tiene área 1 y en los otros dos casos se calculan: $A = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5$ y $A = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3$

	FIGURA 2	Áreas
Cuadrados enteros	8	8
Medios cuadrados	4	2
Triángulos base 2 altura1	2	2
Triángulos base 3 altura1	2	3
Triángulos base 6 altura1	0	0

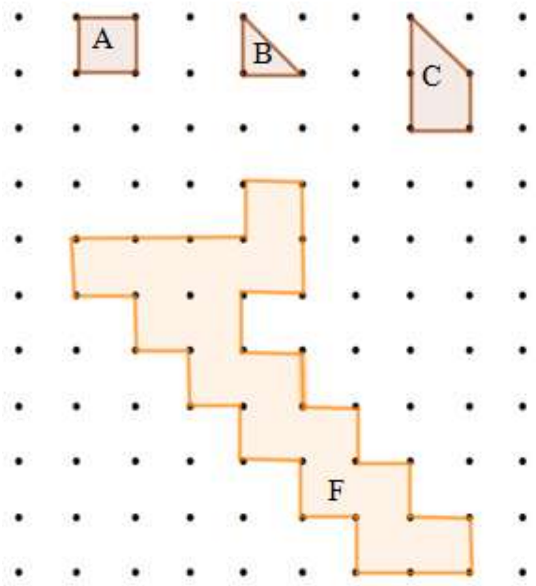
Y se suman las áreas: 8 + 2 + 2 + 3 + 0 = 15

¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

ERROR	**PENALIZACIÓN (sobre 10 p)**
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS PRINCIPALES	
Errar al descomponer la figura	Si no se trata de una equivocación puntual: 2 p (por cada vez) Si se aprecia que no sabe descomponerla: 10 p
Errar al calcular el área de la figura	Si no cuentan bien las unidades: 2 p (por cada fallo). Si los errores se repiten: 2 p por cada error hasta 10 p
ERROR	**PENALIZACIÓN (sobre 10 p)**
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS	
No explicitar la unidad de medida pero calcular correctamente el área	5 p
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS AUXILIARES GENERALES	
Errores al realizar cálculos aritméticos	1 p (por cada fallo, si se hace de manera incorrecta, hasta 3,5 p.)

Ejercicio 4.

Expresa la medida del área la siguiente figura utilizando como unidad de medida las de las otras figuras. Descompón la figura y rellena la tabla:



	Medida A	*Medida B*	*Medida C*
Área figura F			

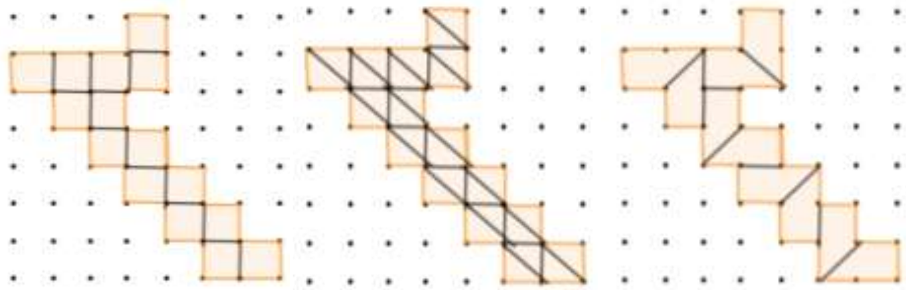
Existe una relación entre el número de unidades que recubre la superficie y el tamaño de la unidad de medida. Explícalo apoyándote de este ejemplo.

¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar?

TAREAS PRINCIPALES:
- Medir el área de F utilizando diferentes unidades de medida - Comprender y explicar la relación entre el tamaño de la unidad y el valor numérico de la medición
TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS:
- Descomponer la figura y realizar el conteo de las cantidades de cada unidad adecuadamente

¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

1. Se divide la figura F en las distintas unidades que se proponen y se cuenta cuantas hay de cada una, como se ve a continuación:

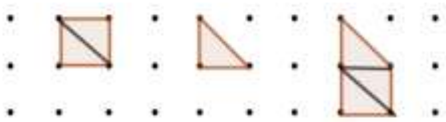


Rellenando así la tabla:

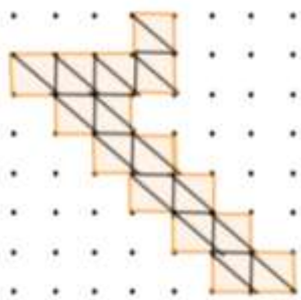
	Medida A	Medida B	Medida C
Área figura F	15	30	10

Respondiendo a la segunda pregunta: Se ve que de la *medida C* hay menos unidades, ya que esta es más grande en superficie que las otras dos, y por el contrario se ve que de *la medida B* es de la que más unidades hay dado que es la más pequeña. En concreto, como la *medida B* es dos veces *la medida A* la relación es inversamente proporcional y entonces hay el doble de unidades de *B* que de *A*. Y la relación entre la *medida B y C* es que *C* es 3 veces mayor que *B* así tiene 3 veces menos unidades.

2. Se comparan primero las figuras:



Y se ve que la *medida A* es dos veces la *medida B* y la *medida C* es 3 veces la *medida B*. Se elige la *medida B* para hacer las cuentas. Se divide la figura F en figuras *medida B, como se ve en la figura:*



Se ve que hay 30, luego F tiene de superficie 30 *medida B*. Si *medida A* es dos veces *medida B*, la superficie de F será la mitad, 15 *medida A*. Si *medida C* es tres veces *medida B*, la superficie de F será un tercio, 10 *medida C*.

Rellenando con estos datos la tabla se tiene:

	Medida A	Medida B	Medida C
Área figura F	15	30	10

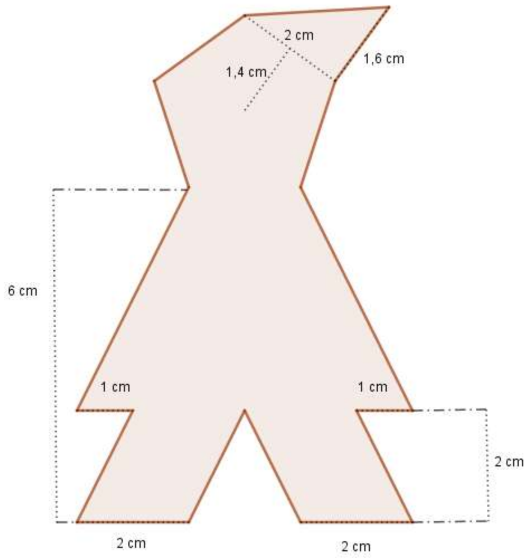
La relación que existe es una relación inversamente proporcional entre el resultado de la medida y la unidad de medida utilizada.

¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

ERROR	PENALIZACIÓN (sobre 10 p)
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS PRINCIPALES	
No comprender la relación entre el tamaño de la unidad y el valor numérico que esta toma	10 p
Explicar de manera errónea la relación entre el tamaño de la unidad y el valor numérico	De 3 p a 5 p (en función de cómo de incorrecta sea la explicación)
ERROR	**PENALIZACIÓN (sobre 10 p)**
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS PRINCIPALES	
No realizar alguna de las tres descomposición de la figura F o errar al hacerla	Por cada descomposición errónea pierde 2 p
No rellena la tabla pero sabe resolver los tres apartados del problema	5 p
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS	
Equivocarse en el conteo de las cantidades de cada unidad adecuadamente	2 p (por el primer error, hasta 3,5 p)

Ejercicio 5.

Calcula el área de la siguiente figura, con los datos que aparecen puedes calcularlo todo (expresa el resultado en las unidades correctas):

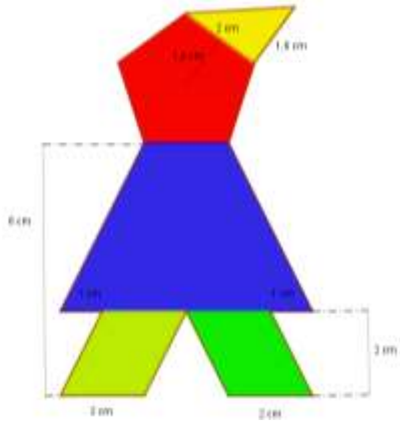


¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar?

TAREAS PRINCIPALES:
- Calcular el área utilizando técnicas de medida indirecta después de descomponer la figura de forma adecuada.
TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS:
- Expresar las fórmulas de cálculo del área necesarios en la figura. - Expresar correctamente las unidades - Calcular las longitudes de los lados de las figuras en que se descompone la figura inicial.
TAREAS AUXILIARES GENERALES:
- Realizar cálculos aritméticos

¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Se separa la figura en las distintas figuras que la forman de las cuales con ayuda de fórmulas se saben calcular las áreas:



Se calcula el área del triángulo rectángulo: se sabe que altura es $1{,}6\ cm$ y base $2\ cm$

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 1{,}6}{2} = 1{,}6\ cm^2$$

Se calcula el área del pentágono regular: se sabe que el lado mide $2\ cm$ y la apotema $1{,}4\ cm$

$$A_P = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(5 \cdot 2) \cdot 1{,}4}{2} = 7\ cm^2$$

Se calcula el área del trapecio: se sabe que la base menor mide $2\ cm$, la base mayor $1 + 2 + 2 + 1 = 6\ cm$ y la altura $6 - 2 = 4\ cm$

$$A_{Tr} = \frac{(b + B) \cdot h}{2} = \frac{(2 + 6) \cdot 4}{2} = 16\ cm^2$$

Se calcula el área del romboide, hay dos romboides con la misma área: se sabe que altura es $2\ cm$ y base $2\ cm$

$$A_R = b \cdot h = 2 \cdot 2 = 4\ cm^2$$

Se sabe que el área total es la suma de todas las áreas:

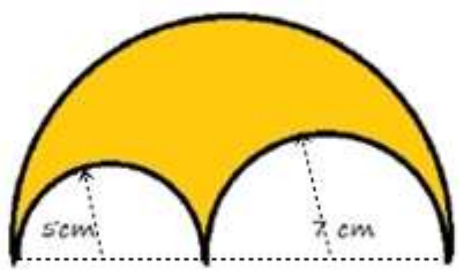
$$A_T = A_T + A_P + A_{Tr} + 2 \cdot A_R = 1{,}6 + 7 + 16 + 2 \cdot 4 = 32{,}6\ cm^2$$

¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

ERROR	PENALIZACIÓN (sobre 10 p)
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS PRINCIPALES	
Errores al descomponer la figura que imposibilite la resolución del problema	10 p
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS	
Confundir área y longitud	6 p
Confundir las unidades o no expresarlas	4 p ni no se expresa la unidad al final.
Calcular de manera incorrecta las áreas de la figura	1,5 p por cada figura (máximo 6 p)
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS AUXILIARES GENERALES	
Errores de cálculo	1 p cada fallo. Máximo 3,5 p

Ejercicio 6.

Calcula el perímetro de la figura amarilla de la siguiente figura, donde las longitudes que se te dan son los radios de las semicircunferencias dibujadas:



[2]

¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar?

TAREAS PRINCIPALES:
- Calcular el perímetro de la figura dada

[2] Imagen sacada de: https://es.scribd.com/document/144861675/Perimetros-y-Areas

TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS:
- Expresar las fórmulas de cálculo necesarias en la figura: desde el arco de circunferencia o desde el razonamiento de que se trata de media circunferencia - Expresar correctamente las unidades - Calcular correctamente el radio de la circunferencia grande
TAREAS AUXILIARES GENERALES:
- Realizar los cálculos aritméticos

¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

En todas se parte de esta afirmación, se puede realizar al principio de la resolución o al final, pero tiene que estar de alguna manera evidenciada, no es necesario que explícitamente, se considerará como bueno también cuando no lo esté, mientras lo que se haga sea: **Longitud:** $L_T = L_G + L_{P1} + L_{P2}$

Vamos a diferenciar tres procedimientos ligeramente diferentes:

1. En el primero de ellos, se considera la longitud de media circunferencia: $L_i = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} = \pi \cdot r$. De manera que:

$$L_G = \pi \cdot (7 + 5) = \pi \cdot (12) = 12\pi \ cm$$

$$L_{P1} = \pi \cdot 7 = 7\pi \ cm$$

$$L_{P2} = \pi \cdot 5 = 5\pi \ cm$$

$$L_T = L_G + L_{P1} + L_{P2} = 12\pi + 7\pi + 5\pi = 24\pi \ cm$$

Todas se considerarían igual de correctas sí, por un lado, solo se pusiera la unidad en el último de los cálculos y si, por otro lado, se aproximara π.

2. Otra solución correcta sería aquella en la que se considera la longitud de la circunferencia: $L_i = 2 \cdot \pi \cdot r$. De manera que:

$$L_G = 2 \cdot \pi \cdot (7 + 5) = 2 \cdot \pi \cdot (12) = 24\pi \ cm$$

$$L_{P1} = 2 \cdot \pi \cdot 7 = 14\pi \ cm$$

$$L_{P2} = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi \ cm$$

$L_T = \ L_G + L_{P1} + \ \ L_{P2} = 24\pi + 14\pi + 10\pi = 48\pi\ cm$

Habiendo calculado así la longitud de la figura y calculando luego la longitud de media figura:

$$L_F = \frac{L_T}{2} = \frac{48\,\pi}{2} = \ 24\,\pi\ cm$$

De igual manera, todas se considerarían igual de correctas sí, por un lado, solo se pusiera la unidad en el último de los cálculos y si, por otro lado, se aproximara π.

3. Como tercera realización correcta se considera utilizar el cálculo de la longitud de arco de circunferencia, donde α es el ángulo del arco de circunferencia $\alpha = 180°$, entonces:

$$L_i = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \ \alpha}{360} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \ 180}{360}$$

Y el resto del procedimiento sería el mismo que en el apartado 1.

En todo caso se considerará correcto que no utilicen subíndices para referirse a las distintas longitudes, ni que les llamen a todos igual, sin embargo, se penalizara levemente las equivocaciones que el hecho de no diferenciarlos pueda provocar.

¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

ERROR	**PENALIZACIÓN (sobre 10 p)**
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS PRINCIPALES	
No tener claro como plantear el problema, dudando sobre como calcular la longitud de la figura. Si es sumando, restando…	10 p
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS	
Confundir área y longitud	6 p si se confunde o mezcla
Confundirse con el α cuando se plantea por el procedimiento 3.	4 p si se confunde en un apartado. 5 p si es en todos.
Calcular la longitud de la figura considerándolas circunferencias y no medias circunferencias	4 p si se confunde en un apartado. 5 p si es en todos.

ERROR	PENALIZACIÓN (sobre 10 p)
Confundir radio con diámetro	4 p si es en un apartado. 5 p si es en todos.
Confundir las unidades o no expresarlas	4 p
Calcular de manera incorrecta el radio de la figura grande	4 p
ERRORES COMETIDOS EN TAREAS AUXILIARES GENERALES	
Errores de cálculo	1 p cada fallo. Máximo 3,5 p

J. Sobre la bibliografía y páginas web

Chamorro, M.C. (1998). Fenómenos de enseñanza de la medida en la escuela elemental. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (18), 95-112.

Cid, E. y Escolano, R. (2013). *Apuntes de clase de la asignatura Didáctica de la Aritmética II. Grado en Magisterio en Educación Primaria. Universidad de Zaragoza.*

Corberán, R. M. (1989). *Didáctica de la geometría: el modelo Van Hiele* (Vol. 1). Universitat de València.

Corberán, R. (1996). El área: recursos didácticos para su enseñanza en primaria. *O. Mourut, Procesos de transferencia de resultados de investigación de aula: El caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas*, 1-87.

Del Olmo Romero, M. A., Carretero, M. F. M., & Cuadra, F. G. (1989). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. (19). Madrid: Síntesis

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, MEC: Labor.

Equipo editorial de Tekman. (2017). *Matemáticas 1º ESO.* Proyecto *ONMAT*. Barcelona: Tekman books

Gutiérrez, A. (2004). Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas. *Líneas de investigación en educación matemática*, *1*, 83-108.

Luelmo, M. J. (2001). Medir en secundaria: algo más que fórmulas. *Actas del X JAEM*, 727-737.

Marmolejo, G. A., & González-Astudillo, M. T. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática: Estado de la cuestión. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *10*(1), 45-57.

Moreno, F., Gil, F. & Frías, A. (2001). Área y volumen. En Castro, E. (Ed.). Didáctica de la matemática en la Educación Primaria. (pp. 503-532). Madrid: Síntesis

Vizmanos, J. R., Bujanda, M. P., Mansilla, S. & Anzola, M. (Eds.). (2010). *Matemáticas, Pitágoras. 1 ESO. Conecta 2.0*. EDICIONES SM

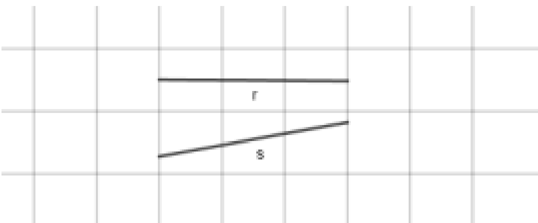
ANEXO 1 – PRUEBA DE EVALUACIÓN

Nombre y apellidos:	*Curso:*
Fecha:	

No se utilizará regla graduada en centímetros y milímetros. Se pueden utilizar lápices de distintos colores.

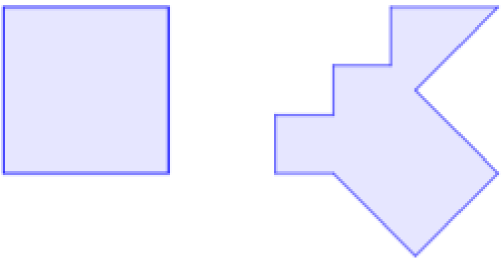
1. *I. Responde a las siguientes preguntas con verdadero y falso. Explicando en caso de que sea afirmativa y corrigiendo en caso de que sea falsa (si* ***solo*** *contestas verdadero o falso se contará como no respondida):*

I. A. Los dos segmentos tienen la misma longitud



I. B. Cuando comparamos dos rectángulos A y B, si A tiene más área que B además, A siempre tendrá más perímetro que B

I. C. Estas dos figuras tienen la misma área



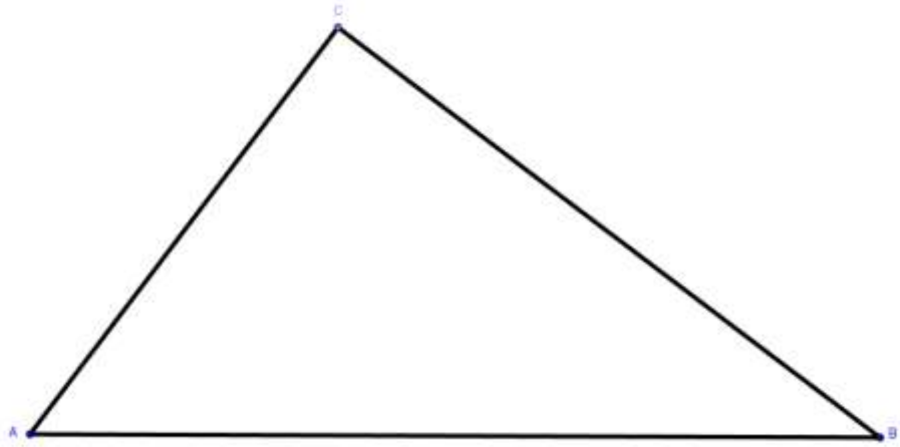
II. Dispones de cuatro geotiras iguales de 20 centímetros cada una. Si las unes por sus extremos obtendrás diferentes rombos según vayas variante la amplitud de los ángulos que forman las geotiras.

II. A. ¿Entre que valores varía el perímetro de todos los rombos que se pueden construir? Razona tu respuesta.

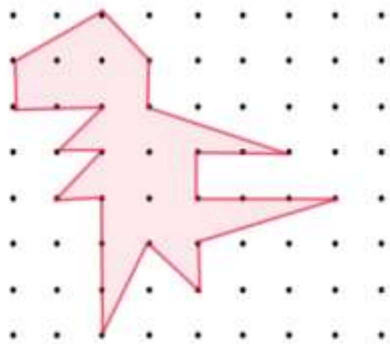
II. B. ¿Entre que valores varía el área de todos los rombos que se pueden construir? Razona tu respuesta.

II. C. ¿Qué nombre recibe el rombo de mayor área?

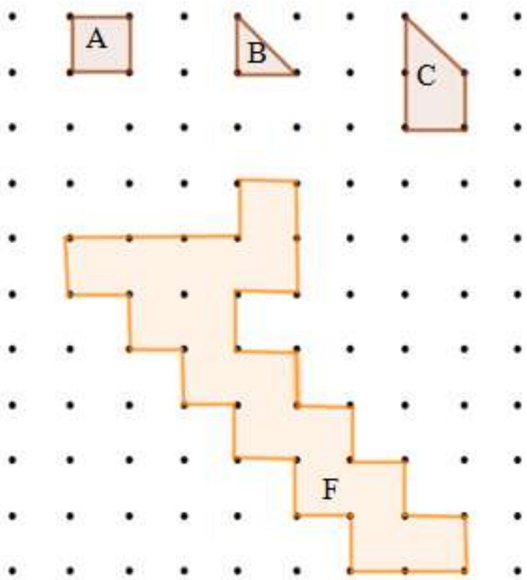
2. *Utilizando como unidad de medida el segmento EF, es decir, lo que mide el segmento es "un EF", mide el perímetro del triángulo ABC. Dispones de tiras de papel para construir la unidad EF.*



3. *Calcula el área de la siguiente figura. Explica cómo has realizado, puedes ayudarte de representaciones para hacerlo (si solo contestas el resultado numérico sin justificación se considerará no contestada):*



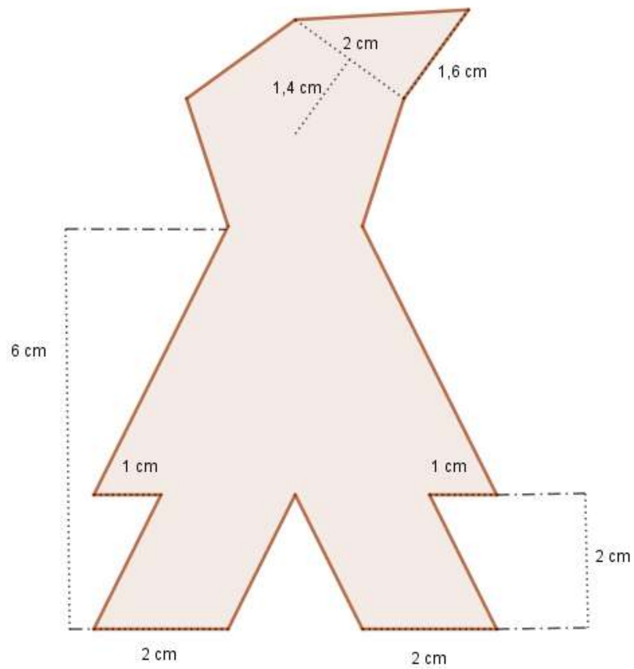
4. *Expresa la medida del área la siguiente figura utilizando como unidad de medida las de las otras figuras. Descompón la figura y rellena la tabla:*



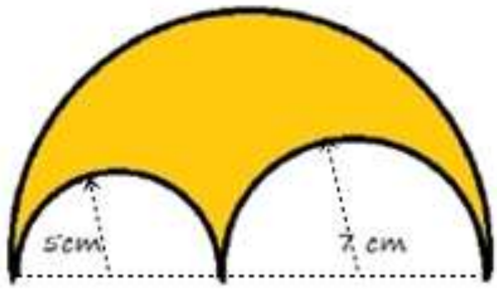
	Medida A	*Medida B*	*Medida C*
Área figura F			

Existe una relación entre el número de unidades que recubre la superficie y el tamaño de la unidad de medida, explícalo apoyándote en este ejemplo.

5. *Calcula el área de la siguiente figura, con los datos que aparecen puedes calcularlo todo(expresa el resultado en las unidades correctas):*



6. *Calcula el perímetro de la figura amarilla de la siguiente figura, donde las longitudes que se te dan son los radios de las semicircunferencias dibujadas:*



ANEXO 2 – ACTIVIDADES EXTRA

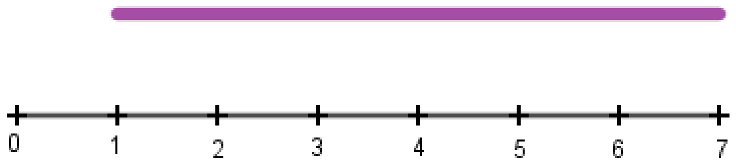
CAMPOS DE PROBLEMAS DE LA MAGNITUD LONGITUD

C1L. Aspectos conceptuales de la magnitud longitud

ACTIVIDAD C1L.1* (REFUERZO, SESIÓN 2)

Objetivo: Confirmar que los alumnos comprender la medida y la metodología de medición.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Di cuál es la longitud de la barrita morada:*



Intervención del profesor: Los alumnos se encuentran con la necesidad de interpretar los instrumentos de medida de longitudes, tal vez todos no sepan hacerlo de manera correcta. Será interesante que los alumnos expongan sus respuestas, el profesor acabará explicando el ejercicio.

ACTIVIDAD C1L.2* (REFUERZO, SESIÓN 2)

Objetivo: Mostrar un aspecto conceptual de la longitud que en este caso consiste en que la comparación directa de cantidades de longitud exige la rigidez de los objetos a comparar.

Preparación de la actividad: Cada alumno recibe dos trozos de alambre de distintos colores (dorado y plateado) de manera que uno sea curvo y el otro recto y donde el que se vaya a curvar es ligeramente más grande que el que no, pero que cuando este curvado parezca más pequeño.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Se te entregan ahora dos alambres de distintos colores. Como puedes observar uno está curvo y el otro recto. De nuevo, di cuál de los dos en más largo. ¿Cómo lo has sabido?*

Intervención del profesor: El profesor animará a los alumnos a que utilicen estrategias para comparar las longitudes de las varillas, aunque tal vez haya alguno que no considere la posibilidad de alargar o curvar el otro alambre. El profesor aclarará que hay aspectos que modifican la cantidad de magnitud y otros que no, curvar o estirar un alambre no la modifica.

C2L. Medida directa de la magnitud longitud

ACTIVIDAD C2L.1* (EXTRA, antes de la SESIÓN 4)

Objetivos: Buscar la razón de ser de las unidades de medida. Comprender y realizar instrumentos de medida de longitud.

Preparación de la actividad: A cada alumno se le entrega trozos largos de papel continuo.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *A continuación vas a inventarte, junto a tus compañeros, una unidad de medida, con las siguientes instrucciones:*

a) Elige lo que va a ser LA UNIDAD

b) Dibújala en la pizarra

c) Cópiala o guárdala de alguna manera (la puedes necesitar más adelante). Puedes dibujarla en este folio, o coger algún utensilio que mida esa magnitud…debes hacerlo de alguna manera para que puedas recordarla

d) Ponle nombre

e) Responde a estas preguntas:

¿Consideras que es una unidad grande o pequeña? ¿Por qué?

¿Consideras que el utensilio que has utilizado para recordarla es adecuado o se te ocurre alguno mejor que te pueda proporcionar el profesor?

Intervención del profesor: Los alumnos pueden encontrarse en la situación de no comprender el concepto de unidad, el profesor debe dar pautas para que esto se realice de manera ágil. Además el profesor deberá tener tiras de papel continuo largas que podrá proporcionar a los alumnos en caso de que las soliciten, esto será en caso de que quieran fabricar un instrumento de medida repitiendo la unidad o en caso de que la unidad sea suficientemente grande como para que sea necesario.

ACTIVIDAD C2L.2* (EXTRA)

Objetivos: Generar la necesidad de unificar el sistema de medida.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Retomando la actividad C2L.1* y teniendo de nuevo presente tu unidad de medida inventada. Ve a otro grupo de la clase y pídele que te de un trozo de papel que mida 3 (unidad inventada) ¡pero sin llevarte ninguna referencia! ¿Te encuentras con algún problema? Esta situación ¿te sugiere algo?*

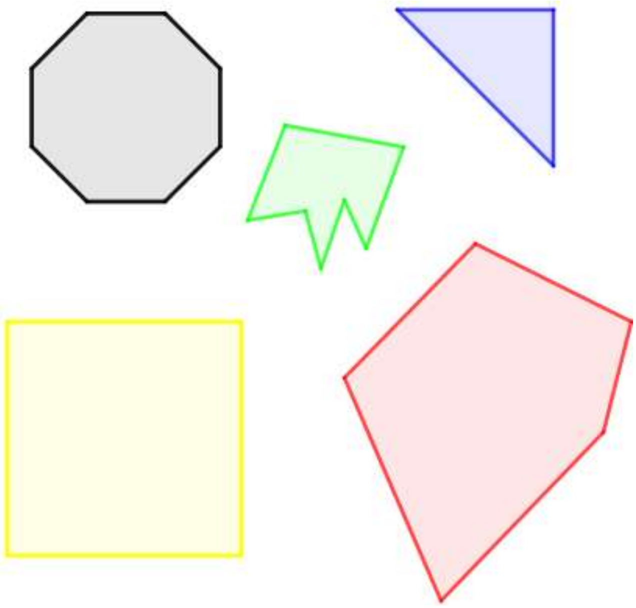
Intervención del profesor: El profesor querrá que los alumnos se encuentren en problemas, insistirá en que no se pueden llevar su unidad de referencia a otra mesa y vigilará esto. Al finalizar la actividad introducirá la idea del sistema métrico decimal, apoyándose en las actividades que se han realizado durante este día en clase, teniendo en cuenta por un lado la necesidad de unificar las medidas y por otro, teniendo presenta la elección de esta forma de partir la unidad.

ACTIVIDAD C2L.3* (EXTRA, después de la SESIÓN 4)

Objetivo: Medida directa para el cálculo de longitudes con unidades arbitrarias y unidades del sistema métrico decimal..

Preparación de la actividad: Cada alumno deberá tener una regla que mida unidades del SMD y cada grupo deberá tener trozos de papel que representen una unidad arbitraria.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *De las figuras que se te dan a continuación, calcula su perímetro con la unidad que os entrego y en unidades del sistema métrico decimal***.**



POLÍGONO	*Unidad arbitraria*	*cms*
Octógono		
Triángulo		
Heptágono		
Cuadrado		
Pentágono		

Intervención del profesor: El profesor habrá dado previamente la definición de perímetro, deberá estar pendiente de la correcta realización del ejercicio y finalizarán con los resultados en voz alta, solo en unidades del SMD dando por concluida la utilización de la otra medida y "universalizando" esta. Además, la unidad que se les entregará será de 2cm, pero sin que los alumnos sepan que es de 2cm, permitiendo además así encontrar una relación inversamente proporcional entre la longitud de la unidad de medida y el resultado de la medición.

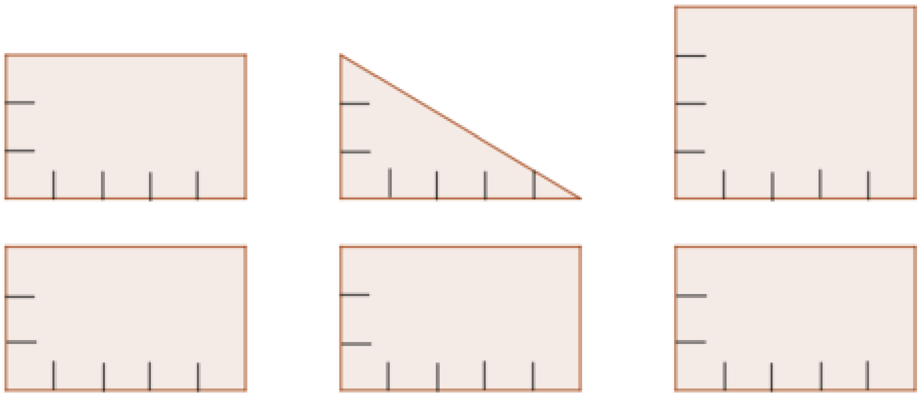
CAMPOS DE PROBLEMAS DE LA MAGNITUD SUPERFICIE

C1S. Aspectos conceptuales de la magnitud superficie

ACTIVIDAD C1S.1* (REFUERZO, SESIÓN 5)

Objetivos: Mostrar un aspecto conceptual de la superficie, que es que la medida de esta depende de las dos dimensiones: altura y anchura y no solo de una de estas.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *De las siguientes figuras relaciona aquellas de arriba que tienen la misma superficie que la que tienen justamente abajo, justifica en todos los casos porque sí o porque no tienen la misma superficie:*



Intervención del profesor: El profesor no interferirá en la realización de este ejercicio. Al finalizar este preguntará las respuestas y justificará porque una sí y las otras no haciendo referencia a las dos dimensiones de esta magnitud. Entendiendo en este ejercicio el área como magnitud bidimensional.

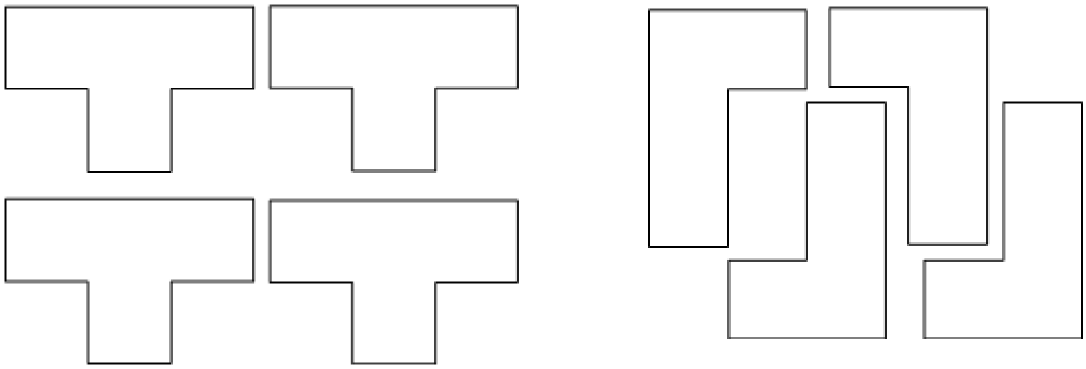
ACTIVIDAD C1S.2* (REFUERZO, SESIÓN 5)

Objetivo: Trabajar la conservación de superficies y la utilización de la medida directa para el cálculo de superficies.

Preparación de la actividad: A cada alumno se le entrega unas imágenes como las que se muestran a continuación que los alumnos deberán imprimir.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Con las figuras que se te entregan, que tienen forma de L y de T hay que construir un cuadrado, uno con las 4 eLes y otro con las 4 Tes.*

Antes de hacerlo, responde a esta pregunta: ¿La figura de la forma L tiene la misma superficie que la figura de la forma T? Si la respuesta fuera que sí, ¿el cuadrado sería el mismo? Explica la estrategia que has utilizado



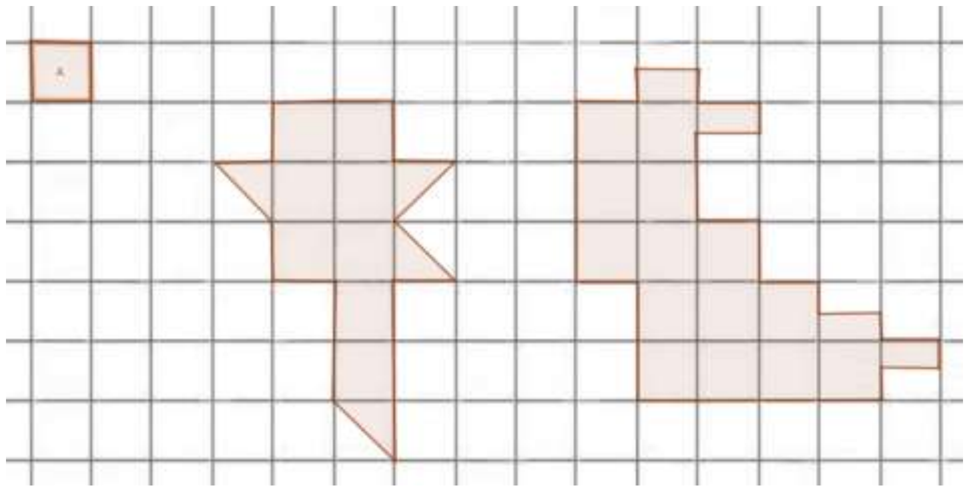
Intervención del profesor: Deberá supervisar que se realiza el ejercicio correctamente y cuando se finalice que los alumnos compartan como lo han realizado.

C2S. Medida directa de cantidades de magnitud superficie

ACTIVIDAD C2S.1*(REFUERZO, después de SESIÓN 8)

Objetivo: Trabajar la medida directa para el cálculo de superficies y las estrategias de conservación de superficies.

<u>Enunciado de la tarea:</u> *¿Cuántos cuadrados como A se necesitan para formar las siguientes figuras? Preguntado de otro modo: ¿cuál es el área de las figuras dibujadas si la unidad de medida es el área del cuadrado A?*

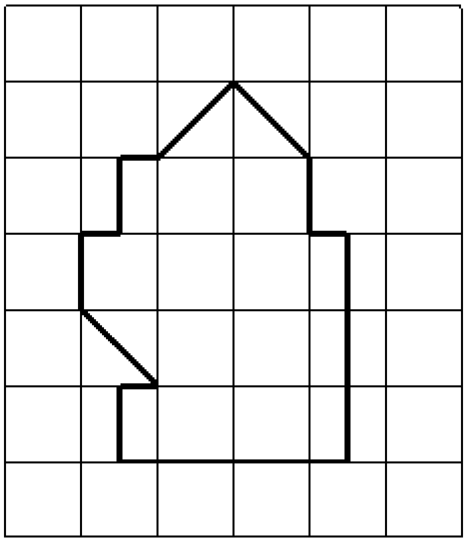


Intervención del profesor: El profesor invitará a los alumnos a que expongan las diferentes estrategias de descomposición y composición de las figuras que van a medir.

ACTIVIDAD C2S.2* (REFUERZO, después de SESIÓN 8)

Objetivo: Reforzar la comprensión de la superficie como unidad que recorre otra superficie y la conservación de superficie. Trabajar la medida directa para el cálculo de superficies.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Di cuántas unidades cuadradas tiene esta figura:*

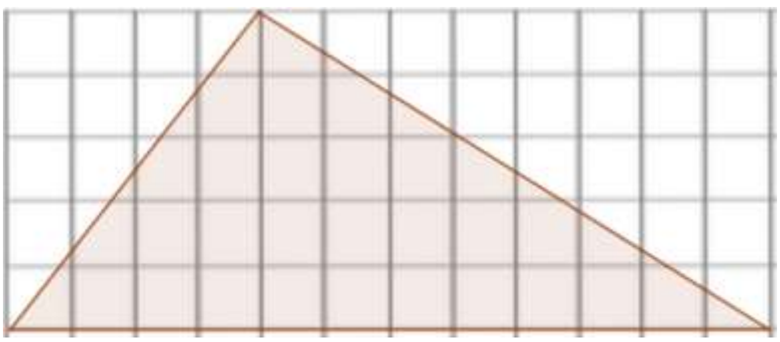


Intervención del profesor: Deberá supervisar el ejercicio y dar recomendaciones de cómo hacerlo, recordando lo que saben de conservación de superficie.

ACTIVIDAD C2S.3* (REFUERZO, después de SESIÓN 9)

Objetivo: Trabajar el cálculo directo de superficies

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Ahora calcula la superficie de este triángulo, considerando que cada cuadrado mide 1 cm^2*

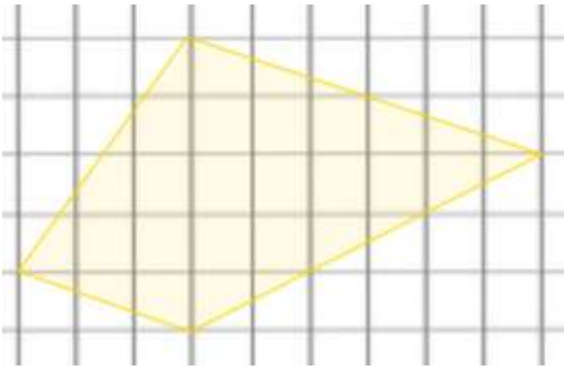


Intervención del profesor: Deberá supervisar el ejercicio y dar recomendaciones de cómo hacerlo en caso de que no se esté haciendo de manera correcta, en realidad los alumnos deberían saber hacerlo.

ACTIVIDAD C2S.4* (REFUERZO, después de SESIÓN 9)

Objetivo: Trabajar el cálculo directo de superficies

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *De manera análoga, calcular el área del siguiente cuadrilátero. Nota: el anterior ejercicio y lo que sabes sobre rectángulos puede ayudarte.*



Intervención del profesor: Deberá supervisar el ejercicio y dar recomendaciones de cómo hacerlo en caso de que no se esté haciendo de manera correcta, en realidad los alumnos deberían saber hacerlo.

ACTIVIDAD C2S.5* (EXTRA, antes de SESIÓN 8)

Objetivo: Recordar de manera empírica la relación que existe en las conversiones del SMD y comprender la necesidad de la comprensión bidimensional del área y su utilización

Preparación de la actividad: A cada grupo de alumnos se les entregará un cuadrado de papel continuo con medida $1m^2$.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Se os entrega a cada grupo de alumnos un papel cuadrado que mide $1m^2$. Con ayuda de él y de lo que sabéis, debéis medir el suelo rectangular de la clase. Antes de medir deberéis hacer una estimación. Luego, debéis ser lo más precisos posible, si es necesario que dobléis, marquéis, pintéis… el papel, podéis hacerlo. También podéis marcar con tiza el suelo si es preciso.*

NOTA: PODÉIS AYUDAROS ENTRE TODA LA CLASE PARA HACERLO

ESTIMACIÓN	*m^2*
MEDICIÓN	*m^2*

Explicad a continuación como habéis realizado la medición:

Intervención del profesor: Deberá supervisar la actividad, dando consejos que ayuden a realizarla de manera correcta, además de controlar la clase, ya que al ser una actividad movida puede generarse caos.

ACTIVIDAD C2S.6* (EXTRA, antes de SESIÓN 8)

Objetivo: Trabajar la comprensión bidimensional del área y su utilización

Preparación de la actividad: A cada alumno se le entrega un folio en el que se encuentra este enunciado:

Material necesario: El profesor facilitará a los alumnos metros

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *¿Se os ocurre una forma más cómoda de hacer la actividad anterior que tenga que ver con lo que sabemos del cálculo del área del rectángulo? Con ayuda de los metros que os da el profesor podéis hacerlo.*

Explicad como lo habéis realizado y en que ha sido diferente a lo realizado en el día anterior.

Debéis dar la medida de la superficie del suelo rectangular de la clase en m^2.

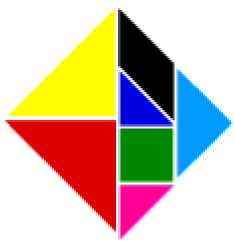
Intervención del profesor: Deberá supervisar la actividad, dando consejos que ayuden a realizarla de manera correcta, además de controlar la clase, ya que al ser una actividad movida puede generarse caos.

C3S.: Medida indirecta de cantidades de magnitud superficie

ACTIVIDAD C3S.1* (REFUERZO, después de SESIÓN 10)

Objetivo: Poner en práctica los conocimientos aprendidos, demostrando que comprenden la adicción de superficies.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *En este dibujo Carlos dice que tiene más superficie el paralelogramo de color negro y Mario que el cuadrado de color verde. Con ayuda de una regla, ¿puedes decir quién de los dos tiene razón?*

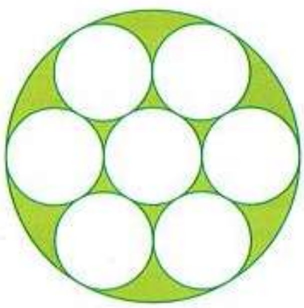


Intervención del profesor: Como se trata de un ejercicio, pues los conocimientos que necesitan para realizarlo los alumnos ya los han obtenido, el profesor deberá supervisar que el ejercicio se está realizando correctamente y dar pistas si no lo están realizando correctamente.

ACTIVIDAD C3S.2* (REFUERZO, después de SESIÓN 12)

Objetivo: Practicar la adición y sustracción de superficies

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Halla el área de la superficie de color verde, sabiendo que el radio de la circunferencia grande es 6 cm:*

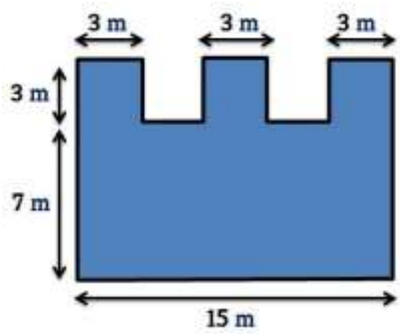


Intervención del profesor: Se trata de un ejercicio diferente pero que deben saber hacer, el profesor supervisará la realización de este y concluirá haciendo que un alumno que lo haya realizado bien lo realice para el resto de compañeros, pero además, podrá aconsejar a los alumnos que así lo necesiten.

ACTIVIDAD C3S.3* (REFUERZO, después de SESIÓN 12)

Objetivo: Practicar la descomposición de los polígonos para el cálculo de superficies y la adición de la magnitud longitud

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Marcos va a hacer un castillo para una obra de teatro, ha pensado que las medidas podían ser las siguientes, pero necesita calcular la superficie y el perímetro para comprar el material. Ayúdale*



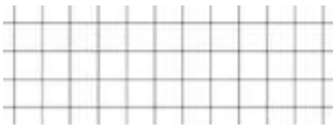
Intervención del profesor: Se trata de un ejercicio que los chavales deben saber resolver, además ya han practicado la descomposición de figuras con el geoplano, así que deberían saben hacerlo en este caso, el profesor debe supervisar el ejercicio, ayudar en caso de que lo soliciten pero deben ser los alumnos los que lo resuelvan, eso sí, al finalizar el ejercicio el profesor mandará que alguno de los alumnos que lo ha resuelto bien salga a la pizarra a resolverlo.

C4S. Aproximación y estimación de cantidades de magnitud superficie

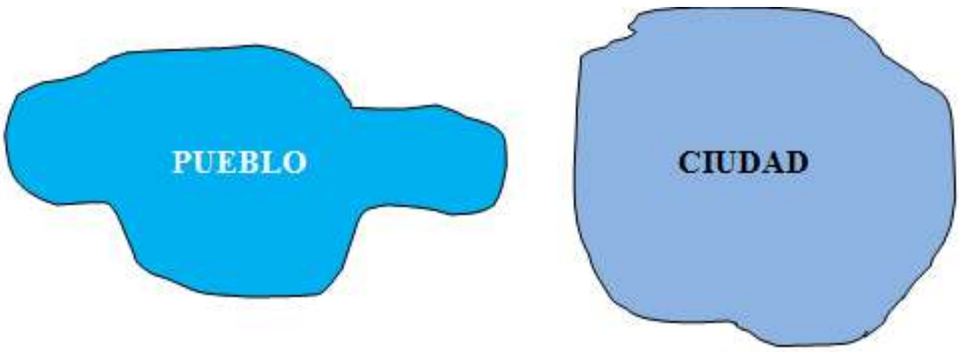
ACTIVIDAD C4S.1* (EXTRA, SESIÓN 12)

Preparación de la actividad: Se dejan en la mesa del profesor distintas rejillas en plástico transparente y tijeras.

Material necesario: 1 tijera para cada 4 alumnos, lo mismo con papel de plástico transparente, en el que se haya dibujada una rejilla: de manera que haya dos medidas distintas, donde la rejilla más precisa trace líneas en mitad de las horizontales y en mitad de las verticales.



Enunciado de la tarea: *Ramón vivía en el pueblo y tenía una charquita para sus patos como la que se ve en la primera figura. Ahora se va a vivir a la ciudad, pero sus padres le han prometido que irán a una casa con jardín, que también tiene una charca, como la segunda imagen. ¿En cuál de las charcas estarán más anchos los patos de Ramón?*



Intervención del profesor: Los alumnos trabajan con rejillas el concepto de unidad de medida y de medida de la cantidad. Si estas son de distinto tamiz el profesor institucionalizará que el resultado de la medida es inversamente proporcional a la medida de la unidad utilizada en la medición. Además de trabajar sobre la aproximación en el cálculo de superficies y comprobar que el error es menor cuanto más pequeña es la unidad de medida.

ACTIVIDAD C4S.2* (EXTRA, SESIÓN 12)

Objetivo: Medir cantidades de superficie irregulares de modo que se realice una estimación de la medida utilizando unidades del SMD.

Preparación de la actividad: Se les dice a los alumnos que pueden utilizar una regla convencional graduada en centímetros y milímetros.

<u>Enunciado de la tarea:</u> *Dibuja en el folio que te entrego el contorno de una de tus manos y calcula, con la ayuda de una regla graduada, la superficie de tu mano expresando el resultado en centímetros cuadrados. Dado que el contorno de las manos es una figura irregular tendrás que dar un valor aproximado de la medida. Indica cómo procedes para hacer una estimación lo más real posible de la superficie de tu mano.*

Intervención del profesor: Con las indicaciones dadas en el enunciado de la tarea se espera que los alumnos aproximen la cantidad de superficie de su mano mediante un rectángulo y procedan después a calcular el área del rectángulo que se aproxima al contorno de su mano. No es aconsejable que el profesor les sugiera esta estrategia, lo recomendable es que esta estrategia, u otras posibles, las comenten los alumnos durante la fase de puesta en común. Se espera que en esta fase aparezcan diferentes respuestas debido a causas distintas, porque las manos de los alumnos no tienen todas la misma superficie o porque han aproximado la cantidad de superficie con figuras geométricas diferentes. El profesor velará porque ambas causas aparezcan en la fase de discusión de las soluciones.

En la fase de puesta en común el profesor decidirá si para verificar los resultados obtenidos se ayuda de la trama cuadrada de un centímetro cuadrado de unidad para que los alumnos puedan verificar su resultado mediante un proceso de medida directa.

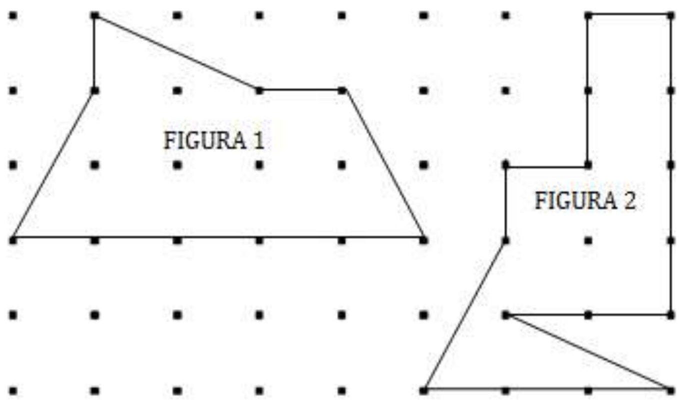
C5LS. Relación longitud y superficie (perímetro y área)

ACTIVIDAD C5LS.1* (REFUERZO, SESIÓN 13)

Objetivo: Diferenciar entre área y perímetro, trabajando que ambas magnitudes no tienen porqué tener una relación clara.

Preparación de la actividad: A cada alumno se le entrega un folio en el que se encuentra este enunciado:

<u>Enunciado de la tarea</u>: ¿A más área más perímetro? ¿A menos área menos perímetro?



Calulad el perímetro de las figuras, sabiendo que estas figuras miden: 2,24 cm y 1cm

Intervención del profesor: El profesor pretende que ellos mismos lleguen a la conclusión que se plantea que además ha dejado pendiente en el anterior ejercicio.

ACTIVIDAD C5LS.2* (REFUERZO, SESIÓN 13)

Objetivo: Insistir en la diferencia entre área y perímetro y las cualidades de estos.

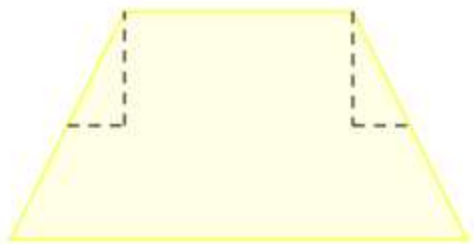
Enunciado de la tarea: Las siguientes figuras ¿tienen el mismo área y el mismo perímetro?

Intervención del profesor: El profesor supervisará que el ejercicio se está realizando correctamente y pedirá argumentaciones de los alumnos para las respuestas que dan, comprobando así que lo están comprendiendo.

ACTIVIDAD C5LS.3* (REFUERZO, SESIÓN 13)

Objetivo: Insistir en la diferencia entre área y perímetro y las cualidades de estos.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Las siguientes figuras ¿tienen el mismo área y el mismo perímetro?*



Intervención del profesor: El profesor supervisará que el ejercicio se está realizando correctamente y pedirá argumentaciones de los alumnos para las respuestas que dan, comprobando así que lo están comprendiendo

ACTIVIDAD C5LS.4* (EXTRA, SESIÓN 13)

Objetivo: Insistir en la diferencia entre área y perímetro y las cualidades de estos.

Material necesario: Por grupos de cuatro tendrán un trozo de corcho o de poliexpan, lana y rotuladores.

<u>*Enunciado de la tarea:*</u> *Con un corcho, chinchetas, un trozo de lana y un rotulador deberás responder a las siguientes preguntas. Corta un trozo de lana de 10 cm, hazle un nudo y dibuja una figura con él y con ayuda de las chinchetas tensa y clava esta figura en el corcho y dibújala. Haz esto 3 veces.*

¿Todas estas figuras tienen la misma superficie? ¿Y el mismo perímetro?

Intervención del profesor: El profesor irá guiando el ejercicio para que todos vayan a la vez y hará que los alumnos compartan en voz alta aquellas conclusiones a las que llegan.

ACTIVIDAD C5LS.5* (EXTRA, SESIÓN 13)

Objetivo: Insistir en la diferencia entre área y perímetro y las cualidades de estos.

Preparación de la actividad: A cada alumno se le entrega un folio en el que se encuentra este enunciado:

<u>Enunciado de la tarea:</u> *a) Sobre la trama dibuja dos figuras que tengan superficie 3/2 cm^2 y distinto perímetro.*

b) Sobre la trama dibuja dos figuras que tengan perímetro 12cm y distinta superficie.

c) Sobre la trama dibuja una figura que tenga superficie 20 cm^2 y perímetro 21 cm.

Intervención del profesor: El profesor supervisará que el ejercicio se está realizando correctamente y dará pistas para aquellos alumnos que considere que las necesitan. De a) y de b) hay varias soluciones, mientras que de c) solo puede tratarse del mismo rectángulo colocado en horizontal o en vertical, esto el profesor puede comentarlo si considera necesario que los alumnos lo sepan para resolver el ejercicio.