Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Título del trabajo: Combinatoria para Matemáticas académicas en 4º de la ESO

English tittle: Combinatory for Academic Maths in 4th year of secundary school

Autor

Ayose Iturralde Valencia

Director

Alberto Arnal Bailera

Facultad de Educación

2018

Tabla de contenido

Introducción

El siguiente Trabajo Fin de Máster está enfocado dentro del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas, especialidad de Matemáticas, en la Universidad de Zaragoza. La realización del mismo ha estado supervisada por Alberto Arnal Bailera, profesor del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de esta Universidad.

El trabajo consiste en el desarrollo de una propuesta didáctica dónde como objeto matemático hemos elegido la combinatoria. Si comprobamos en los currículos de la ESO, en el bloque de estadística no se especifica en ningún curso la combinatoria como tal, pero es esencial dominarla para realizar otras competencias que están en todos los cursos de la ESO, la regla de Laplace. En 4º de ESO tanto en aplicadas cómo en académicas también hay objetivos muy relacionados cómo la frecuencia de un suceso o diagramas de árbol, por este motivo escogemos realizar este trabajo en 4º de ESO en la asignatura de matemáticas académicas.

El campo de problemas que podemos abordar con la combinatoria es muy extenso, nos centraremos en calcular variaciones, permutaciones y combinaciones tanto con repetición como sin ella y combinaciones de estos. Buscaremos problemas cotidianos, juegos de azar y situaciones que incluso puedan representarse en el aula. Para resolver estos problemas al final de la unidad utilizaremos las fórmulas (técnicas) que nos ayudan a resolverlo. Dónde profundizaremos más será en las tecnologías que nos hacen llegar a esas técnicas, iremos desde casos prácticamente triviales a casos generales de manera escalonada, utilizando distintas técnicas y con notaciones claras y ordenadas, que en este campo de problemas es muy importante.

Una vez introducido el objeto matemático a estudiar es interesante también analiza la situación actual de dicho objeto en las aulas. Para ello comenzaremos hablando de la enseñanza de dicho objeto para, en el siguiente capítulo, hacer un estudio de comparación de dos libros de texto.

Antes de hablar de cómo se enseña la combinatoria en los institutos debemos hablar de cuándo se enseña la combinatoria. Normalmente el bloque de estadística se encuentra al final del libro, y los profesores suelen dejarlo para el final, normalmente no da tiempo a verlo y por tanto en uno de los bloques que pocas veces se imparte en secundaria tal y como afirma Batanero (1996) "*La Combinatoria se considera difícil por los profesores quienes, a veces, han preferido omitir su enseñanza*".

La justificación de la combinatoria en los libros de secundaria es bastante aplicada a la vida real, se ponen ejemplos cómo la forma de crear distintos conjuntos de ropa con *x* pantalones, *y* camisetas y *z* zapatos, juegos de urnas con bolas de colores etc… Las tecnologías también suelen ser bastante correctas, es decir, las fórmulas para resolver combinaciones, permutaciones y variaciones con y sin repetición, son correctas, incluso en los casos en los que no están definidos los números combinatorios son correctas y adecuadas al nivel de los alumnos. El problema viene en las tecnologías, en los libros de texto suelen resolver un problema con una dimensión bastante baja y por un solo método y a partir de ahí definen la fórmula para resolver el resto de problemas similares. No se incide mucho en identificar cada tipo de problema ni en cómo se ha llegado a dicha fórmula, como vuelve a afirmar Batanero *"Esta enseñanza ha estado centrada en el aprendizaje de las definiciones y fórmulas de las operaciones combinatorias y en hacer ejercicios de cálculo con expresiones combinatorias"*.

Este tipo de enseñanza puede crear confusión en los alumnos, a la hora de identificar un problema y a la vez crea un algoritmo que hace que los alumnos se abstraigan mucho del problema en si para realizar unos cálculos rápidos, con lo que los alumnos no aprenden ni que es la combinatoria ni cómo aplicarla a la vida real.

Aunque la unidad didáctica que vamos a proponer es para 4º de la ESO en Matemáticas académicas es importante ver los conceptos previos que tienen los alumnos para ver desde que punto partimos a la hora de explicar nuestro objeto matemático.

Como ya hemos comentado antes, el bloque de la probabilidad y la estadística es uno de los grandes olvidados en las clases de matemáticas, por lo que aunque los alumnos deberían conocer por lo menos la notación de la probabilidad, manejar correctamente probabilidades y saber estudias algunos casos muy simples la probabilidad con la ley de Laplace. En el caso de la combinatoria deberían conocer la diferencia entre permutación, combinación y variación, aunque lo cierto es que no daremos ningún conocimiento de estos por explicado para evitar que los alumnos se desorienten.

Al trabajar con situaciones fácilmente simulables, podemos utilizar las ideas intuitivas de nuestros alumnos para facilitar la compresión de muchos conceptos y su rápida asimilación. Realizar juegos de azar con cartas, bolas en urnas, ordenar figuras, etc son actividades que ayudan a la comprensión de la combinatoria y además atrae la atención de nuestros alumnos.

Análisis de libros de texto

En esta parte del trabajo vamos a hacer una comparación del tema de la combinatoria en los libros de texto. Antes de comenzar la explicación es interesante comentar que no en todos los libros de texto de 4º de la ESO existe tema de combinatoria, dato que afirma la baja importancia que se le da a la combinatoria.

Los libros que vamos a analizar son los siguientes: Anzola y Vizmanos (1998) de SM y González, Llorente y Ruiz (1999) de Editex. En ambos libros el tema se encuentra en el bloque de estadística y dicho bloque es el último del temario. En cuanto al título de la unidad es curioso comentar que en ninguno de los dos casos el título es Combinatoria si no que es "Técnicas de recuento" en el caso del libro de SM y "Formas de contar" en el libro de Editex.

SM

Comenzaremos haciendo el comentario sobre el libro de SM, en él encontramos el tema algo escueto en el que no hay una razón de ser de la combinatoria, sino que directamente empieza explicando los diagramas de árbol como parte inicial de la unidad. A continuación explica distintas técnicas de conteo en el siguiente orden: Variaciones con repetición, Variaciones, Permutaciones y Combinaciones. Para deducir las fórmulas utiliza un caso concreto aunque con un lenguaje algo genérico como podemos ver en este ejemplo de variaciones:

La primera división de fútbol está formada por 20 equipos. ¿De cuántas formas diferentes podrán quedar clasificados al final de la temporada los tres primeros equipos?

Para la primera posición (campeón) hay 20 posibilidades; para la segunda posición (subcampeón), 19 posibilidades, y para el tercer puesto, 18 posibilidades.

Campeón	Subcampeón	Tercero
e_1 e_2 ... e_{20}	e_2 e_3 ... e_{20}	e_3 e_4 ... e_{20}
20 ×	19 ×	18

Cada uno de los caminos del diagrama en árbol corresponde a un resultado posible.

En total hay $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6\,840$ formas distintas de clasificarse.

A las distintas ordenaciones que acabamos de obtener se les llama **variaciones de 20 elementos tomados de tres en tres**, y su número se escribe $V_{20,3}$.

La intencin de los autores es relacionar implícitamente la resolución de este problema con el caso general obligando al alumno a relacionar el caso general y particular, labor que es demasiado compleja con solo un ejemplo, el cual ya tiene una dimensión bastante grande.

Una vez dada esa breve explicación, se institucionaliza la fórmula y se proponen ejercicios similares para que el alumno los resuelva. Es curioso que en ningún momento se define ni el factorial de un número ni los números combinatorios, llama más la atención cuando vemos cuál es la forma de deducir la fórmula para las combinaciones:

Hemos visto que $C_{5,2} = 10$. Si en cada combinación permutamos de todas las formas posibles sus elementos, obtendremos las variaciones de cinco elementos tomados de dos en dos.

$$V_{5,2} = C_{5,2} \cdot P_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5 \cdot 4 = 10 \cdot 2$$

Y, en general, se tiene: $V_{m,n} = C_{m,n} \cdot P_n$. O también: $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n}$.

Considero bastante exigente para el alumno dicho razonamiento con la breve explicación que se da en el libro. Los alumnos pueden ser capaz de razonar que las variaciones es un producto entre las combinaciones entre combinaciones y permutaciones, pero para ello necesitan mucho más que dos líneas de explicación.

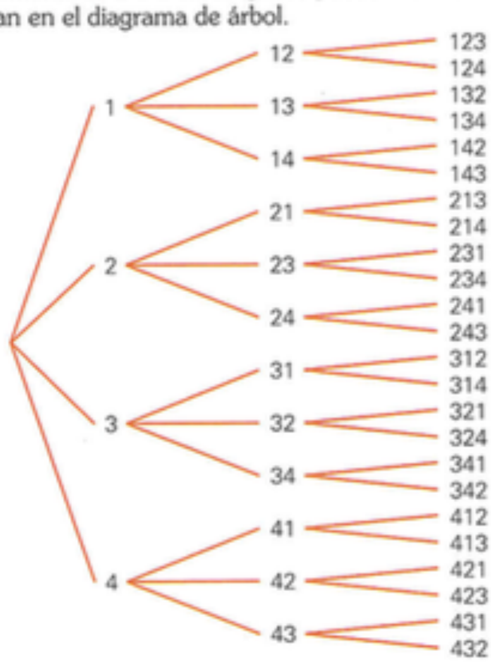
Editex

En libro de Editex tiene un temario más completo que el libro anterior, en este libro si que tenemos una breve razón de ser de la combinatoria. Además de eso llama la atención que se le dedica el primer apartado al principio de suma y al de multiplicación, ya que es importante a la hora de deducir las fórmulas que posteriormente se trabajan. A continuación se trabajan los diagramas de árbol, una vez explicados los diagramas de árbol se utiliza dicha técnica para deducir las fórmulas de las Variaciones con repetición, las Variaciones, permutaciones y Combinaciones como vemos en el siguiente ejemplo:

4. Variaciones ordinarias

Disponemos de una urna con cuatro bolas numeradas con las cifras 1, 2, 3 y 4, y realizamos extracciones, sin introducir cada bola después de sacarla y anotar la cifra extraída.

Los posibles números de 2 o 3 cifras que se pueden formar con las cuatro cifras se muestran en el diagrama de árbol.



Las situaciones como la anterior, en la que aparecen los elementos ordenados y sin repetición, se denominan **variaciones ordinarias** o **variaciones sin repetición**.

En el momento en el que se trabajan las permutaciones se introduce el concepto de factorial de un número y una vez explicadas las combinaciones se definen los números combinatorios y sus principales propiedades. Es curioso cómo una vez definidos estos nuevos conceptos vuelve a las fórmulas ya conocidas y las redefine con los conceptos nuevos adquiridos. Esto sirve tanto para reforzar las fórmulas anteriores cómo para trabajar los conceptos definidos.

5.1. Números factoriales

Para un número natural n mayor que 1, llamamos **factorial de n** al producto de los n primeros números naturales.

El factorial de n se representa por $n!$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Para $n = 0$ y $n = 1$, definimos $0! = 1$ y $1! = 1$

El número de variaciones y permutaciones ordinarias, en función de los números factoriales, toman las formas:

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_n = V_{n,n} = n!$$

Comparación

Las diferencias entre ambos libros radican en la profundidad. Ambos libros contienen las deducciones de las fórmulas por métodos bastantes similares de Variaciones con y sin repetición y de Combinaciones y Permutaciones sin repetición, además de los diagramas de árbol y de un nutrido grupo de ejercicios para practicas dichas técnicas de conteo. Por el contrario sólo el libro de Editex contiene además de todo lo comentado anteriormente conceptos interesantes en los que se apoya la combinatoria como son los principios de de suma y multiplicación, el factorial de un número y números combinatorios lo que refuerza algo las tecnologías que nos sirven para deducir las técnicas que utilizamos en la unidad didáctica. Esto hace que si comparamos sólo un apartado de ambos libros, no seamos capaces de hallar grandes diferencias, aunque si que las hay. Los conocimientos explicados antes como el principio de suma y el de multiplicación y la breve explicación de la razón de ser que se da en el libro de Editex hace que la misma explicación que puede dar SM para deducir una fórmula de conteo sea mucho más completa.

Como comentario general podemos decir que el libro de Editex es mucho más completo y se adecúa algo más a lo que buscamos en un tema de combinatoria. Aun así en ambos libros falta trabajar tanto las Permutaciones con repetición como las Combinaciones con repetición. Aun siendo más completo el libro de Editex, el comentario sobre los números combinatorios es bastante escueto y se mencionan propiedades sin demostrarlas o basando la deducción a partir de un ejemplo, cuando hay demostraciones son simples y se basan en las definiciones de factorial de un número y de números combinatorios por lo que puede ser interesante trabajarlas. Como aspectos positivos del libro de Editex tenemos la introducción del principio de la suma y del principio de la multiplicación que podrían servir para contar casos en problemas algo más complejos en los que haya que trabajar simultáneamente con varias técnicas de conteo. En nuestra propuesta didáctica utilizaremos algunos elementos de este libro aunque cambiaremos el orden en el que se explican los apartados del capítulo y añadiremos los puntos que hemos comentado arriba ya que buscamos una unidad didáctica que profundice más en la combinatoria de lo que lo hace el libro.

Razón de ser

En lo que respecta a la razón de ser histórica de la combinatoria os tenemos que remontar al S XVII, con la conocida historia del caballero de Meré, el cuál propuso el siguiente problema a Pascal que es considerado el primer problema de combinatoria:

> Los jugadores A y B apuestan a cara o cruz, tirando una moneda. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que A tiene 4 puntos y B tiene 3 puntos.
>
> ¿Cómo deben repartir la cantidad apostada para ser justos?

Otro problema en el que trabajó Pascal por encargo del Caballero De Meré es el siguiente:

> El Caballero de Meré sabía que era ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un seis en una serie de 4 lanzamientos de un dado. Entonces De Meré argumentó que debiera ser igualmente ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un doble seis en una serie de 24 lanzamientos con un par de dados. Para ello había razonado "por regla de tres": si en 4 lanzamientos se apuesta por un resultado específico entre 6 posibles, es lo mismo que si en 24 lanzamientos se apuesta por un resultado específico entre 36 posibles, ya que 6 : 4 = 36 : 24. La experiencia no corroboró la suposición de De Meré.

Desde entonces se han encontrado muchas aplicaciones para la combinatoria siendo una de las herramientas básicas de la probabilidad discreta no solo para juegos de azar sino que tiene aplicaciones muy importantes en otras ramas de las matemáticas mucho más teóricas como Algebra o Geometría.

Para hacer ver la razón de ser de la combinatoria en clase realizaremos una actividad inicial cada vez que vayamos a explicar una técnica de conteo. Antes de empezar a deducir fórmulas o a calcular los casos y sin ninguna información previa los alumnos deberán realizar por grupos unos juegos manipulativos los cuales en los que los alumnos trabajarán con policubos para calcular todos los casos posibles de un caso pequeño. Sin conocimientos previos la única manera de que los alumnos resuelvan los problemas de conteo es construir todas las opciones posibles.

Mientras los alumnos están realizando la actividad el profesor debe intentar que los alumnos sigan un orden meticuloso y alguna estrategia para no olvidarse ningún caso. Una vez realizada la actividad se busca que se haya cumplido el objetivo principal de dicho juego que no es otro que el que los alumnos comprendan la necesidad de la combinatoria cuando los números que aparecen en las actividades posteriores sean más grandes. Una vez explicada la intencionalidad de dichos juegos podemos los ejercicios a realizar por los alumnos, que son los siguientes:

RAZÓN DE SER PERMUTACIONES
Ordena los policubos de manera que la fila de 4 policubos de distintos colores sea siempre diferente. Construye todas las opciones posibles y represéntalas aquí.

1) ¿Qué pasaría si añadimos un color y las filas deberían ser de 5?
2) ¿Qué técnica has utilizado para asegurarte que no te has dejado ningún caso?
3) ¿Cuánto tiempo costaría encontrar las opciones posibles si hay que colocar 58 colores en una fila de 58 policubos?

RAZÓN DE SER PERMUTACIONES CON REPETICIÓN
Ordena los policubos de manera que creen todas posibles filas de 5 policubos con 3 policubos de un color y 2 policubos de otro y represéntalas aquí.

1) ¿Qué estrategia has seguido para no olvidarte ninguna fila?
2) ¿Qué diferencias existen entre este ejercicio y en el anterior, en el que tenias 5 colores para hacer las filas de 5?
3) ¿Qué pasaría si añadimos 5 piezas de otro color y las filas deberían ser de 10?

RAZÓN DE SER COMBINACIONES
Coloca en vasos de plástico todas las posibles parejas de policubos distintas teniendo 5 colores distintos sin que haya dos cubos del mismo color en el vaso y represéntalas aquí.

1) ¿Qué diferencia hay entre meter los cubos en un vaso o hacer una fila?
2) ¿Serías capaz de decir cuántas parejas se pueden formar si tuviéramos 23 colores distintos?

RAZÓN DE SER COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Coloca en vasos de plástico todas los posibles tríos de policubos distintas teniendo 4 colores distintos, siendo posible que haya más de un geocubo del mismo color en el vaso y represéntalos aquí.

1) ¿Cuáles son las diferencias entre la actividad 3 y la actividad 4?
2) En caso de tener que meter los mismo cubos en el vaso, ¿Cuál de las dos opciones tendría más casos?
3) Si en lugar de tríos hubiera que meter en los vasos 34 policubos ¿Serías capaz de calcular todos los casos posibles?

RAZÓN DE SER VARIACIONES

Crea todas las filas de 3 cubos posibles escogiendo entre 4 colores distintos, sin que sea posible repetir color y represéntalas aquí.

1) ¿Qué diferencia hay entre esta actividad y la actividad en la que metias los policubos en vasos?
2) ¿Calcularías todas las opciones teniendo 134 colores y teniendo que hacer filas de 45 policubos?
3) ¿Hubieras sido capaz de sacar todas las soluciones utilizando solo la actividad 1?¿Por qué?

RAZÓN DE SER VARIACIONES CON REPETICIÓN

Crea todas las filas de 2 cubos posibles escogiendo entre 4 colores distintos, siendo posible repetir color y represéntalas aquí.

1) ¿Hay diferencia entre una fila de 2 cubos y un vaso con 2 cubos?
2) ¿has seguido alguna estrategia para asegurarte que no te dejabas ninguna fila?
3) ¿Si las filas fueran de 46 policubos, verías viable crear todas las opciones posibles?

Una vez realizado el ejercicio los alumnos tendrán una idea aproximada de que es el objeto matemático a estudiar, en ese momento los alumnos habrán asumido que se necesitan nuevas técnicas ya que al trabajar con números más grandes la técnica de construir todos los casos posibles es inviable.

Campo de problemas

Con todo lo explicado anteriormente ya estamos en disposición de diseñar y desarrollar los campos de problemas que vamos a afrontar en esta unidad didáctica. Los campos de problemas son bastante distintos entre sí de manera que en cada uno de ellos usaremos una metodología diferente, aunque muy relacionada. Los campos de problemas son los siguientes:

CP1 Manejo simple de las técnicas de combinatoria (combinaciones, variaciones y permutaciones con y sin repetición)

Evidentemente este es el campo de problemas principal de la unidad didáctica, es el que se encuentra citado textualmente en el currículo de 4º de ESO y es el que servirá como enlace y base para el resto de campos a trabajar en la propuesta.

La metodología que vamos a seguir será similar cada uno de los distintos problemas que se encuentran en este campo. Antes de introducir ningún concepto trabajaremos la razón de ser, ya explicad anteriormente. Como ya hemos explicado antes, con esta actividad buscamos que los alumnos comprendan la utilidad de la combinatoria a la vez de que asuman que para construir todas las opciones necesitan realizar la actividad con un orden meticuloso.

Una vez realizado el juego manipulativo se espera que los alumnos estén más motivados para realizar los problemas a los que les vamos a enfrentar, en cada una de las técnicas de conteo se les propondrá un problema con unas dimensiones más grandes que los que han trabajado antes, de esta manera los alumnos asumirán que no pueden realizar "la cuenta de la vieja" para calcular todos los casos posibles. Ahí es donde entra la labor del profesor para guiarles con algunas pistas que guían el problema para ayudar a su resolución.

Una vez los alumnos hayan tenido tiempo para realizar el problema se abrirá un debate guiado por el profesor en el cual los alumnos explicarán que han hecho para realizar el problema y por qué creen que esa es la manera de hacerlo correctamente.

Con el debate terminado se proponen varios problemas similares a los alumnos, los cuales pueden utilizar ideas de otros compañeros que les hayan convencido como correctas. En este problemas las ultimas preguntas irán orientadas a que los alumnos deduzcan la fórmula general.

Notar que hasta este momento el profesor no ha intervenido de una manera notoria en las deducciones de los alumnos, esta es una de las cosas que buscamos en la propuesta, que los alumnos sean capaces de deducir las fórmulas por ellos mismos gracias a las ideas, la mayoría intuitivas, que ya tenían. Llegados al punto en el que los alumnos ya han deducido la formula será labor del profesor institucionalizar lo aprendido para que los alumnos sean capaces de utilizar una notación correcta y utilicen los términos correctos a la hora de expresarse. En este trabajo se encuentra resuelto el primer problema al que los alumnos se enfrentan, este problema es propio. En anexos se encuentra una batería de problemas encontrados en el portal web lallavedelexisto.wordpress.com, de estos problemas se obtendrán tanto los problemas que los alumnos deberán hacer una vez hayan hecho el primer problema como algunos problemas que deberán hacer en casa para afianzar los conceptos aprendidos.

En cuanto a las técnicas y tecnologías que vamos a utilizar en este campo de problemas, aunque muy similares, van variando según el problema al que nos enfrentamos por lo tanto haremos su estudio por separado y utilizando los ejercicios guiados que realizarán los alumnos para comprender las técnicas que utilizan.

CP1.1. <u>Permutaciones</u>

La primera técnica de conteo que estudiaremos es la permutación, comenzamos con esta ya que a la hora de deducir la fórmula es el más sencillo, además de porque nos apoyaremos en dicha fórmula para deducir otras como pueden ser la variación y la permutación con repetición. Para llegar a la fórmula a los alumnos se les propone el siguiente problema:

Si tu grupo de 20 amigos quiere formar una fila en línea recta ¿De cuantas maneras distintas podéis hacerlo? Para ayudarte rellena cada casilla con el número de personas distintas que pueden ocupar cada posición. Ten en cuenta que una persona no puede ocupar dos sitios al mismo tiempo. ¿Podrías dar una fórmula para este tipo de problemas?

Está claro que cualquiera de los 20 amigos puede situarse en la primera posición, una vez fijado quien se coloca en la primera posición existen 19 personas que pueden ocupar la segunda plaza (todos excepto el que está primero), análogamente la rejilla de ayuda al alumno quedaría de la siguiente manera:

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Para cada caso en el que has fijado alguna posición existen todas las combinaciones restantes el resultado es 20·19·18·17·16·15·14·13·12·11·10·9·8·7·6·5·4·3·2·1

Para resolverlo los alumnos se ayudarán de la cuadrícula que utilizarán como técnica, dicha técnica es bastante visual para los alumnos, el siguiente paso es comprender que deben multiplicar los números de cada casilla para obtener la solución inicial, esto está basado en la tecnología del principio multiplicativo que se irá utilizando durante toda la unidad didáctica.

CP1.2. Permutaciones con repetición

Una vez estudiadas las permutaciones simples se pueden introducir variantes del problema que incluyan elementos iguales dentro de los elementos a permutar, a esto lo llamaremos permutaciones con repetición y para que los alumnos deduzcan dicha fórmula utilizaremos el siguiente problema guiado:

Tenemos 15 botellas de refresco distintas ¿De cuantas maneras las podemos ordenar? De las 15 botellas 5 eran de refresco de cola teníamos Normal (N), Ligth (L), Zero (Z), Sin azúcar (S) y de Marca blanca (M).¿De cuántas maneras distintas puedo ordenar las botellas de cola por separado? Estudia la representación de estos dos casos, si al quitar las etiquetas no somos capaces de diferenciar las distintas botellas de cola ¿Qué sucede?

2	*3*	*N*	*7*	*L*	*9*	*1*	*Z*	*M*	*8*	*5*	*S*	*4*	*6*	*10*

2	*3*	*L*	*7*	*N*	*9*	*1*	*M*	*S*	*8*	*5*	*Z*	*4*	*6*	*10*

¿Con cuántas soluciones distintas por cada caso concreto del resto de botellas pasaría lo mismo? Si tenemos 15 botellas de refresco, de las cuales 5 son iguales ¿De cuántas maneras distintas las podemos ordenar?

Utilizando lo aprendido en CP1.1 podemos afirmar que las 5 botellas de cola se pueden ordenar de 5! Formas distintas.

Los dos casos que se nos plantean son distintos si diferenciamos los refrescos de cola pero si no somos capaces de diferenciarlos ambos casos son iguales.

Fijando las botellas que no son de cola en los 5 huecos vacíos se pueden colocar las botellas de cola de 5! Formas distintas por lo que hay 5! casos que en el momento en el que no diferenciamos las botellas de cola son iguales

Utilizando todo lo razonado antes podemos decir que la solución es $\frac{15!}{5!}$

La técnica a utilizar en el problema es dividir el problema en dos problemas distintos de permutación, en el primero ordenamos todos los elemento como si fuesen distintos dos a dos y posteriormente ordenamos los elementos que son iguales para calcular cuántas veces hemos contado cada solución correcta. Para llegar a la solución nos hemos tenido que apoyar en la tecnología que ya conocíamos sobre las permutaciones (definición y forma de calcularlas)

CP1.3. <u>Variaciones</u>

Una vez comprendido el concepto e permutación, vamos a un caso algo más general como son las variaciones sin repetición, en este caso ya no se ordenan todos los elementos si no unos pocos, en principio si se ha comprendido la idea de las permutaciones estos problemas no deberían suponer una dificultad elevada. El problema con el que buscaremos deducir la fórmula es el siguiente:

Un profesor de educación física en una clase de 32 alumnos tiene que formar un equipo de fútbol para representar al colegio. Al dar a los 11 alumnos seleccionados

los pone en orden del dorsal que llevarán, si el dorsal 1 es el portero, el dorsal 2 el lateral derecho… ¿Cuántas equipos distintos puede formar para representar al colegio? Para ayudarte rellena cada casilla con el número de personas distintas que pueden ocupar cada posición. Ten en cuenta que una persona no puede ocupar dos sitios al mismo tiempo y que no es lo mismo que juegue una persona de portero que de delantero centro.

¿Podrías dar una fórmula para este tipo de problemas?

Con un razonamiento similar al visto en el CP1.1 la cuadricula quedaría así:

32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	-	-	-

Por lo que la solución es: $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 22 = \frac{32!}{(32-11)!}$

La técnica que utilizamos para resolver dicho problema es la misma que la que hemos usado para resolver los problemas 1.1, pero en este caso los alumnos tienen que analizar hasta que momento tienen que completar la tabla, nótese que aunque debería ser de 11 casillas es de 14, con esto buscamos generar un debate y que los alumnos analicen hasta qué punto tienen que llegar. Al ser la técnica tan similar a la del 1.1 la tecnología es también la misma (principio multiplicativo)

CP1.4. Variaciones con repetición

Una variante interesante de las variaciones simples son las variaciones con repetición, gracias a este problema trabajar la idea de que un pequeño cambio en el enunciado cambia totalmente la forma de resolución, para ello proponemos el siguiente problema guiado:

En un restaurante cuya carta está formada por 34 platos distintos, una vez cocinados los platos que se van a servir se ponen en fila hasta que los camareros los sirven. Dicha fila está formada siempre por 10 platos ¿Cuántas filas distintas pueden existir? Para ayudarte rellena cada casilla con el número de personas distintas que pueden ocupar cada posición.

¿Podrías dar una fórmula para este tipo de problemas?

Como cualquier persona puede pedir cualquier plato aunque otra persona lo haya pedido ya en este caso la rejilla se completaría de la siguiente manera:

34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	-	-	-	-

Por lo tanto el resultado final es 34^{10}

La técnica que utilizamos para resolver dicho problema es la misma que la que hemos usado para resolver los problemas 1.1, pero en este caso los alumnos tienen que analizar hasta que momento tienen que completar la tabla, nótese que aunque debería ser de 10 casillas es de 14, con esto buscamos generar un debate y que los alumnos analicen hasta qué punto tienen que llegar. Al ser la técnica tan similar a la del 1.1 la tecnología es también la misma (principio multiplicativo)

CP1.5. Combinaciones

Hasta ahora todos los problemas que hemos visto el orden influye, en este caso el orden no es importante, por lo que es un problema algo distinto al resto, para deducir la formula utilizaremos los conceptos de permutación y variación de la siguiente manera:

El sorteo de la Bonoloto consta de 49 bolas de las cuales se extraen de un bombo 6, si consigues acertar la combinación de dichos números recibes un sustancioso premio. En el sorteo no importa el orden en el que salen las bolas, pero ¿Y si importara?¿Cuántas combinaciones posibles habría? Estas dos son opciones válidas: a) 4, 8, 15, 16, 23, 42 b) 4, 15, 8, 23, 42, 16

¿Qué sucede con ellas en caso de no importar el orden?¿Con cuántas combinaciones más sucede lo mismo?¿Puedes sacar ahora una fórmula para las combinaciones sin repetición?

En caso de importar el orden tenemos que utilizar lo trabajado en el CP1.3 con lo que la solución es $\frac{49!}{(49-6)!}$

En caso de no importar el orden las combinaciones a) y b) son iguales.

Utilizando lo estudiado en CP1.1 existen 6! combinaciones posibles.

Aplicando ahora un razonamiento similar al utilizado en el CP1.2 en caso de no importar el orden la solución es $\frac{49!}{(49-6)!6!}$

La técnica que se utiliza es buscar todas las soluciones correctas en caso de que el orden influya y una vez calculado el número de opciones comprobar cuantas veces estamos contando cada solución en caso de no importar el orden. Para poder usar esta técnica nos basamos en la tecnología que engloba a las permutaciones y variaciones.

CP1.6. Combinaciones con repetición

Este es el elemento más difícil a trabajar, en el necesitamos un proceso de abstracción más elevado ya que para llegar a la solución necesita de una "idea feliz" que debe introducir el profesor. Por esto en este caso la metodología será algo diferente y sólo se realizará un problema tipo, que además de ser guiado, se realizará poco a poco en clase y cada paso o pregunta respondida se debatirá ente los alumnos siendo posible que el profesor deba realizar alguna explicación durante el debate ya que ningún alumno haya sido capaz de deducir la respuesta. Aunque se dé ese caso consideramos que el momento a enfrentarse al problema por primera vez solos es un proceso por el que los alumnos tienen que pasar y aunque no sean capaces de llegar a la solución, ese esfuerzo que han realizado les será útil para comprender a posteriori las aclaraciones y explicaciones del profesor.

Una familia de cuatro miembros se dispone a comprar pasteles para merendar, en la pastelería hay 3 tipos de pasteles (Fresa, limón y chocolate), da igual el orden en el que los clientes pidan los pasteles, ya que el pastelero los colocará ordenados para que los pasteles de distintos sabores no se mezclen. ¿De cuantas formas distintas se pueden pedir los pasteles?¿Y si tuviéramos un cuarto sabor? Si para evitar que los pasteles de distintos sabores se mezclen se coloca un separador entre los de un sabor y otro ¿Cuántos separadores se necesitan? Si primero se colocan los pasteles y posteriormente se coloca el separador ¿En cuantas posiciones se puede poner el separador? ¿De cuantas formas distintas se pueden pedir los pasteles?¿Y si tuviéramos un cuarto sabor?¿Y si otro día acuden 5 personas en lugar de 4 y hay 4 sabores?

El número de separadores es igual al número de sabores de pasteles menos 1 ya que el último sabor no es necesario separarlo de nada.

Sean la P un pastel y la X un separador dar una combinación de P's y X's determina unívocamente la combinación de elementos que han pedido los familiares, es decir PPPPXX quiere decir que los cuatro miembros de la familia han pedido el pastel del primer sabor. De esta manera tenemos una permutación con repetición cuyo resultado es $\binom{6}{2}$

Si aumentamos un sabor tendríamos un separador más por lo que tendríamos que permutar 7 elementos de los cuales 4 son de un tipo (P) y 3 son de otro (X) por lo que el resultado sería $\binom{6}{3}$

Análogamente si son 5 personas y cuatro sabores tenemos 3 separadores (X) y 5 pasteles (P) por lo que son $\binom{8}{3}$

En este caso la técnica que se utiliza es añadir dos elementos que en ese caso son los separadores, gracias a la posición de estos separadores se pueden identificar cada caso posible por lo que el problema pasa a ser del tipo CP1.1 para ello lo importante es identificar el número de separadores y el número de posiciones donde se puede colocar cada uno. Esta técnica de resolución toma el papel de tecnología para justificar la fórmula de las combinaciones con repetición.

CP2 Manejo con números combinatorios y factorial de un número y sus propiedades

Una vez introducidas las técnicas de conteo y deducidas sus fórmulas el siguiente paso natural es trabajar con los números combinatorios y factoriales. Según el currículo es la primera vez que los alumnos se enfrentan a dichos números y por tanto es importante profundizar tanto en su cálculo como en algunas de sus propiedades. Esto ayudará tanto a la facilidad de los cálculos del campo de problemas 1, como a la hora de introducir algún resultado algo más teórico como preparación a Bachillerato como a favorecer el proceso de abstracción matemática en nuestros alumnos.

Para este campo de problemas en el que vamos a trabajar con algún elemento teórico la metodología que introduciremos será algo más clásica. El profesor en este caso llevará las riendas de la explicación aunque los alumnos deberán ir realizando ejercicios que les irán guiando y les servirán como ayuda para, al final, ser capaces de entender (después de la realización por parte del profesor), demostraciones simples de las propiedades de los números combinatorios.

El objetivo al final de este campo de problemas es que los alumnos sean capaces de demostrar las siguientes propiedades:

$$\binom{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{m-n}} = \binom{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$$

Dem:

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\,\big(m-(m-n)\big)!} = \frac{m!}{(m-n)!\,(m-m+n)!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \binom{m}{n}$$

$$\boldsymbol{\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} = \binom{m+1}{n}}$$

Dem:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} + \frac{m!}{(m-(n-1))!\,(n-1)!}$$
$$= \frac{m!}{(m-n)!\,n!} + \frac{m!}{(m-n+1))!\,(n-1)!}$$
$$= \frac{m!\,(m-n+1) + m!\,n}{(m-n+1)!\,n!} = \frac{m!\,((m-n+1)+n)}{(m-n+1)!\,n!}$$
$$= \frac{m!\,(m+1)}{(m-n+1)!\,n!} = \frac{(m+1)!}{(m+1-n)!\,n!} = \binom{m+1}{n}$$

Para conseguir esto antes los alumnos tienen que realizar ejercicios algo más sencillos que les ayuden a tener cierta facilidad para trabajar con factoriales y números combinatorios. Como vemos la primera propiedad el concepto cave es que se pueden realizar operaciones dentro de los números factoriales, para que los alumnos asimilen dicho concepto y a la vez comiencen a afianzar los números combinatorios realizarán ejercicios como:

Calcula:

$$\boldsymbol{a})\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{4}} = \frac{5!}{4!1!} = \frac{5\cdot 4!}{4!} = 5$$

$$\boldsymbol{b})\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{7}} = \frac{5!}{(-2)!7!} = ¡¡¡NO\ ESTÁ\ DEFINIDO!!!$$

$$\boldsymbol{c})\binom{\mathbf{4+3}}{\mathbf{2+1}} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} = 7\cdot 5 = 35$$

Al trabajar con números combinatorios necesariamente trabajarán con factoriales, para este tipo de ejercicios buscamos que los alumnos desarrollen los factoriales con criterio para reducir el cálculo lo máximo posible ya que esto ayuda a la comprensión de qué es un factorial y como se trabaja con ellos. También buscamos que comprendan que el número superior debe ser mayor que el inferior y que se pueden realizar operaciones antes de calcular los factoriales.

La demostración 2 es algo más compleja, el encontrar el común denominador en este caso es una idea que puede resultar complicada ara los alumnos, por eso afianzaremos algunas propiedades de los factoriales con ejercicios como el siguiente antes de intentar la demostración:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{a)}\ \boldsymbol{x\,4! = 5!} \Rightarrow x = \frac{5!}{4!} \Rightarrow x = \frac{5\cdot 4!}{4!} \Rightarrow x = 5$$

$$\boldsymbol{b)}\ \boldsymbol{8! = x\,3!} \Rightarrow x = \frac{8!}{3!} \Rightarrow x = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} \Rightarrow x = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 \Rightarrow x = 6720$$

$$\boldsymbol{c)}\ \boldsymbol{x\,7! = 10!} \Rightarrow x = \frac{10!}{7!} \Rightarrow x = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!} \Rightarrow x = 10\cdot 9\cdot 8 \Rightarrow x = 720$$

Este es el ejercicio introductorio con el que los alumnos pueden utilizar distintas técnicas para resolverlo. La primera consiste en analiza cuántos números quedan hasta el factorial mayor y multiplicarlos, otra forma de resolverlo es desarrollar los factoriales y posteriormente dividirlo. Ambas técnicas están basadas tanto en la definición de factorial cómo en la resolución de ecuaciones de primer grado. Lo que buscamos con este ejercicio es que los alumnos vean la primera técnica es más rápida y efectiva que la segunda y que a partir de ahora usen la segunda.

Realiza las siguientes sumas de fracciones:

$$\boldsymbol{a)}\ \boldsymbol{\frac{1}{3!} + \frac{3}{4!}} = \frac{1\cdot 4}{3!\cdot 4} + \frac{3}{4!} = \frac{4+3}{4!} = \frac{7}{4!}$$

$$\boldsymbol{b)}\ \boldsymbol{\frac{1}{7!} + \frac{2}{9!}} = \frac{1\cdot 8\cdot 9}{7!\cdot 8\cdot 9} + \frac{2}{9!} = \frac{72+2}{9!}$$

$$\boldsymbol{c)}\ \boldsymbol{\frac{2}{5!} + \frac{4}{4!}} = \frac{2}{5!} + \frac{4\cdot 5}{4!\cdot 5} = \frac{2+20}{5!} = \frac{22}{5!}$$

Gracias al ejercicio anterior este ejercicio debería ser algo más sencillo ya que la dificultad de dicho ejercicio consiste en obtener un denominador común. Al igual que el ejercicio de las ecuaciones existen dos maneras de hacer el ejercicio, la primera técnica que se puede hacer es utilizar la técnica que hemos considerado óptima en el ejercicio anterior para calcular el común denominador, otra opción, que sería la que los alumnos conocen y han aplicado más es desarrollar el factorial y después simplificar las fracciones y por último calcular el común denominador con el mínimo común múltiplo. Las tecnologías que apoyan dichas técnicas son muy similares, en ambas utilizamos la definición de factorial de un número, la diferencia es la forma de hallar un denominador común, para la segunda técnica necesitamos los conocimientos del mínimo común múltiplo y para la primera simplemente hacemos una igualdad. En este caso una vez los alumnos realicen los ejercicios en el debate también buscamos que comprendan que la primera técnica es la óptima también.

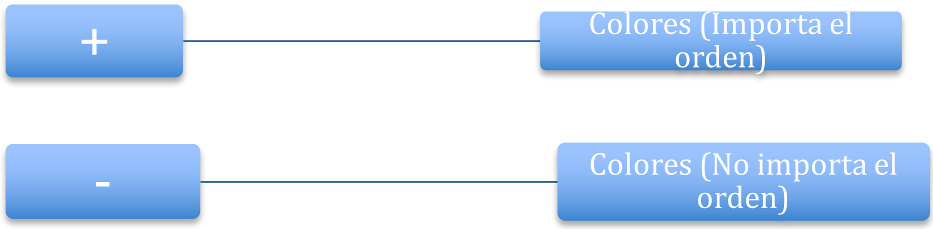
Con estos ejercicios practican técnicas basadas en las tecnologías que necesitarán en las demostraciones. Una vez trabajados estos ejercicios y otros similares ya que la repetición servirá para afianzar todavía más los conceptos que buscamos que adquieran, el profesor realizará en la pizarra las demostraciones, preguntado antes de cada paso por si algún alumno se le ocurre el paso correcto antes.

CP3 Manejo simultaneo de varias técnicas de combinatoria

Una vez los alumnos son capaces de trabajar cualquier técnica de combinatoria es interesante a la hora de resolver problemas trabajar simultáneamente con varias técnicas de conteo distintas. Este es un paso más a la hora de resolver problemas de conteo y exige a los alumnos más comprensión de los problemas ya que con identificar el tipo de problema sino que además los alumnos tienen que identificar qué operación deben hacer para operar cada una de las técnicas de conteo al dar la solución.

Como hemos comentado para realizar los problemas de este campo es necesario un buen manejo del primer campo de problemas. En la metodología que utilizaremos iremos desde el caso en el que se utiliza el principio sumativo al caso en el que se utiliza el principio de multiplicación. Se hará así ya que se considera más intuitivos los problemas en los que hay que sumar dos resultados, en ellos además de comprender la idea del principio sumativo se busca que los alumnos comprendan la idea de que se pueden operar entre sí resultados obtenidos de distintas técnicas de conteo. Se propondrá a los alumnos problemas como el siguiente:

Dos amigos inventan el siguiente juego: tiran una moneda, si sale cara deben escoger en orden 4 colores de una paleta de 15 colores, en caso de salir cruz también escogen 4 colores pero se ordenan por orden alfabético y es válido escoger el mismo color varias veces. Finalmente dan la solución de la siguiente manera: ***Se empieza con c (cara) o + (cruz) y luego la lista de los 4 colores***   ***¿Cuántas opciones hay en este juego? Para ayudarte crea el diagrama de árbol para ayudarte.***



El diagrama de árbol lo hemos simplificado y que si no era demasiado grande, pero como vemos simplemente tenemos que sumar una variación de 15 elementos cogidos de 4 en 4 con una combinación de las mismas características

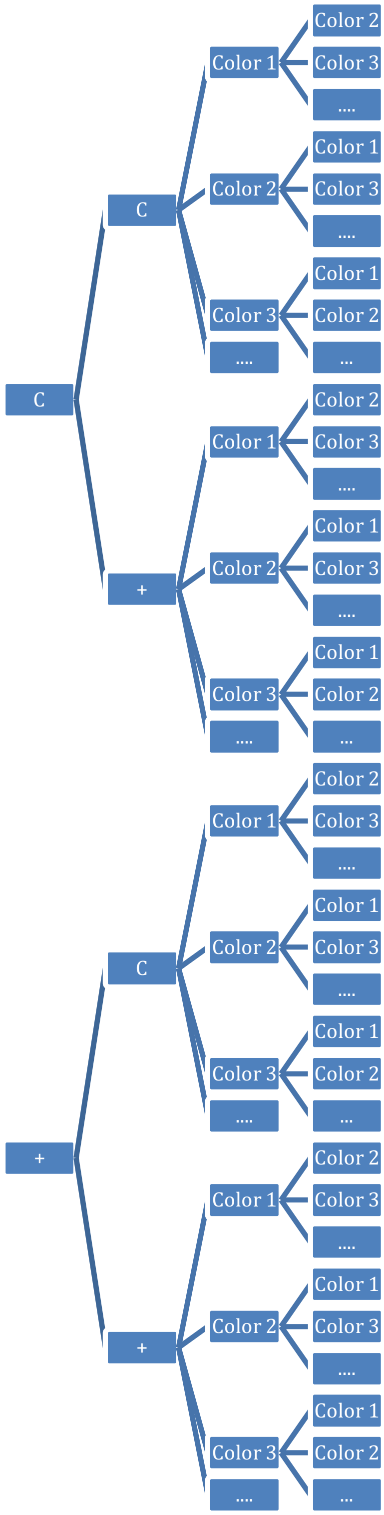
Posteriormente se abrirá un debate guiado por el profesor en el que los alumnos explicarán que han hecho y por qué. Posteriormente sin que el profesor de una solución correcta se planteará otro problema similar para ver si los alumnos han comprendido la idea.

Una vez los alumnos han comprendido la idea sumativa se plantea el siguiente problema:

Se plantea la siguiente variante del juego anterior, en lugar de tirar una vez la moneda se tirará dos veces e indiferentemente del resultado se escogen los 4 colores en orden y pudiendo repetir. Para escribir la solución se escribe el resultado de la primera tirada de moneda, los cuatro colores escogidos en el orden que que se escogen y el resultado del segundo lanzamiento de la moneda.

¿Qué diferencias hay entre los dos juegos? ¿Cuántas opciones distintas hay en esta nueva variante? Si en lugar de 2 lanzamientos de moneda hay 23 ¿cuántas opciones hay?

En este juego no tiene ninguna importancia el resultado que se ha obtenido en la tirada de la moneda para las normas en la parte de los colores. El diagrama se presenta debajo pero se ve claramente que hay que hacer una multiplicación por lo que multiplicaremos una combinación con repetición de 2 elementos tomados de 2 en dos con una variación de 15 elementos tomados de 4 en cuatro.



Las preguntas intentan hacer llegar a los alumnos a la conclusión de que deben multiplicar ambos resultados obtenidos. Como anteriormente, se iniciará un debate sobre cuales creen que son los procedimientos correctos y posteriormente se planteará un problema similar.

Para resolver estos problemas primero debemos separar e identificar cada una de las partes del CP1. Una vez calculadas todas las posibilidades por separado se deben combinar para ello hay que analizar si el resultado de uno depende necesariamente del otro, si es así se multiplican ambos resultados, en caso contrario se suman. Para ello los alumnos deben basarse tanto en la combinatoria simple como en el principio de multiplicación y de suma.

CP4 Redactar problemas de combinatoria

Este campo de problemas es el más novedoso al que se enfrentarán los alumnos, se trata del "Problem posing" o invención de problemas. En este campo los alumnos tendrán que completar el enunciado de un problema para que se adecue a una solución dada.

Esta nueva forma de problemas tiene muchos aspectos positivos que ayudan tanto al alumno como al docente, según Espinoza, Lupiañez y Segovia (2013) los ámbitos en los que la invención de problemas son positivos son muchos y variados desde fomentar la creatividad a ser una ventana para observar la compresión matemática de los alumnos, pasando por mejoras en la implicación y la actitud hacia las matemáticas. Estos mismos autores afirmas que "a partir del estudio se evidencia que en este tipo de actividades los estudiantes pueden reconocer mejor las partes de un problema y establecer relaciones. Además, se responsabilizan más en su propio aprendizaje, muestran mayor curiosidad y entusiasmo durante la clase, así como una mejor actitud hacia el trabajo."

En nuestro caso concreto este campo de problemas nos puede ser muy útil para que los alumnos afiancen más sus conocimientos sobre la combinatoria ya que los problemas tipo son muy parecidos unos de otros, la importancia (o no importancia) del orden, el uso de todos o solo algunos elementos o si existe la posibilidad de repetir un elemento juegan un papel clave en la resolución de los problemas. Es por esto que una frase puede cambiar por completo el problema, por lo que la identificación del tipo de problema es algo fundamental en la combinatoria y la invención de problemas puede ser una buena manera de ayudar a afianzar estos conceptos para facilitar la labor de identificación.

La metodología que seguiremos en este campo de problemas será también evolutiva, es decir, iremos de casos en los que los alumnos deberán rellenar una frase para terminar de completar el problema hasta llegar a casos en los que los alumnos tendrán que completar el problema completo. En todos estos casos los alumnos conocerán la solución del problema lo que hará que existan soluciones correctas e incorrectas.

Un ejemplo de problema al que los alumnos pueden hacer frente es el siguiente:

Lorena ha ganado un concurso de una famosa tienda de decoración, en la que se venden tazas, cuadros, posters, cuadernos y estuches. El premio consiste en 4 productos a escoger de la tienda, (Completa el problema para que se resuelva con combinaciones SIN repetición) ....
....

(Escribe ahora otro final para que la solución sea combinaciones CON repetición) ....
....

Como vemos, en este problema nos centramos en el tema de la repetición, aunque los alumnos tendrán que identificar que no importa el orden en el que se escogen los productos y no añadir al problema ninguna condición que implique orden. Como pequeña pista se han usado las mayúsculas para resaltar si es necesario o no la repetición.

También se propondrán problemas en los que los alumnos tengan que diferenciar entre combinación variación o permutación, como puede ser:

4 amigos van a una pizzería a comer, en la pizzería tienen pizzas de sabor barbacoa, jamón y queso, cuatro quesos y margarita. (Escribe el final para que la solución sea combinaciones con repetición) ....
....

(Escribe ahora otro final para que la solución sea variaciones con repetición) ....
....

(Escribe ahora otro final para que la solución sea permutaciones sin repetición) ....
....

Si los alumnos van trabajando problemas de este nivel poco a poco serán capaces de necesitar menos instrucciones hasta llegar a ser capaces de resolver:

Escribe un problema cuya solución sea $P_{11}^{2,3,4}$ ....

Estos problemas requieren un nivel alto de abstracción por parte del alumno, además de conocer la notación correctamente y tener muy claro los conceptos adquiridos en el campo de problemas 1.

Aunque el propio campo de problemas no se presta mucho a comentar sobre las técnicas y tecnologías ya que podríamos incluso considerarlos ejercicios teóricos. Las técnicas que podemos considerar consiste en identificar el tipo de problema que debe ser y una vez que lo hemos identificado buscar una situación cotidiana que se adecue al tipo de problema. Esto está fundamentado en la definición de cada una de las técnicas de conteo que hemos explicado en el campo de problemas 1.

Implantación de la propuesta en el aula

El objetivo final de este trabajo es hacer una propuesta para llevar al aula todo este trabajo, para ello una vez explicadas las actividades vamos a proceder a realizar una secuenciación para impartir en el aula.

En los libros de texto que hemos estudiado se introducían las variaciones antes que las permutaciones, en nuestro caso vamos a proceder a hacerlo de la manera contraria, ya que al ser las permutaciones un caso particular de las variaciones consideramos que para el alumno es mejor ver primero un caso algo más concreto y después pasar al caso general. Las combinaciones será la última parte a explicar en lo que respecta al primer campo de problemas ya que es lo que menos relacionado está además de porque las combinaciones con repetición es la parte más compleja y se necesita algo más de asimilación por parte de los alumnos por lo que buscamos que ya hayan estado varias sesiones familiarizándose con la combinatoria.

Una vez trabajadas todas las fórmulas pasaremos a trabajar con el factorial y los números combinatorios, de los cuales deduciremos sus propiedades. Esto lo haremos para trabajar varios aspectos importantes, además del campo de la combinatoria es interesante para introducir la teoría en matemáticas en una clase cuyos alumnos principalmente buscan cursar el bachillerato.

Ya con el manejo de los números combinatorios y las técnicas básicas de conteo trabajadas podemos comenzar a trabajar con los alumnos los problemas más interesantes cómo son los "problema posing" y los problemas que requieren trabajar varias técnica simultáneamente. Para ello habrá que introducir el principio de suma y el de multiplicación con el diagrama de árbol. Con ello los alumnos reforzarán los campos anteriores además de que llegarán a un entendimiento bastante alto de la combinatoria.

Para finalizar se realizará una sesión en la que se resolverán dudas antes de la sesión final que constará de un examen escrito. Por lo que la secuenciación será de la siguiente manera:

Número de la sesión	**Contenidos que se explican**
1	Permutaciones: Para comenzar se realizará el ejercicio de razón de ser de las permutaciones, a continuación se realizarán el ejercicio guiado que ayudan a la deducción de la fórmula, se define el factorial de un número y por último se proponen ejercicios de permutaciones para realizar en casa de los cuales los alumnos tendrán las respuestas correctas en un solucionario.
2	Permutaciones con repetición: Se resuelven las dudas (en caso de haberlas) de la sesión anterior, se realiza el ejercicio de razón de ser de las permutaciones con repetición y se realizan el ejercicio guiado con su respectivo debate el cual hace que los alumnos deduzcan las fórmulas. Para acabar se proponen ejercicios que los alumnos deben ser capaces de resolver en su casa y que tendrán las soluciones para

	comprobar si los han realizado correctamente.
3	Variaciones: Se resuelven las dudas (en caso de haberlas) de la sesión anterior, se realiza el ejercicio de razón de ser de las variaciones y se realizan el ejercicio guiado con su respectivo debate el cual hace que los alumnos deduzcan las fórmulas. Para acabar se proponen ejercicios que los alumnos deben ser capaces de resolver en su casa y que tendrán las soluciones para comprobar si los han realizado correctamente.
4	Variaciones con repetición: Se resuelven las dudas (en caso de haberlas) de la sesión anterior, se realiza el ejercicio de razón de ser de las variaciones con repetición con repetición y se realizan el ejercicio guiado con su respectivo debate el cual hace que los alumnos deduzcan las fórmulas. Para acabar se proponen ejercicios que los alumnos deben ser capaces de resolver en su casa y que tendrán las soluciones para comprobar si los han realizado correctamente.
5	Combinaciones: Se resuelven las dudas (en caso de haberlas) de la sesión anterior, se realiza el ejercicio de razón de ser de las combinaciones y se realizan el ejercicio guiado con su respectivo debate el cual hace que los alumnos deduzcan las fórmulas y se define el número combinatorio. Para acabar se proponen ejercicios que los alumnos deben ser capaces de resolver en su casa y que tendrán las soluciones para comprobar si los han realizado correctamente.
6	Combinaciones con repetición: Se resuelven las dudas (en caso de haberlas) de la sesión anterior, se realiza el ejercicio de razón de ser de las combinaciones con repetición y se realizan el ejercicio guiados con su respectivo debate, aunque en esta sesión el profesor tendrá que tomar un papel más explicativo que observador, el cual hace que los alumnos deduzcan las fórmulas. Para acabar se proponen ejercicios que los alumnos deben ser capaces de resolver en su casa y que tendrán las soluciones para comprobar si los han realizado correctamente.
7	Factorial de un número y números combinatorios: Se realizan los ejercicios para reforzar los conceptos y posteriormente el profesor realiza las demostraciones

8	Principio de suma, de multiplicación y diagrama de árbol: Se define el método del diagrama de árbol y se trabajará los problemas introductorios del tercer campo de problemas que los alumnos deberán realizar el diagrama y debatir entre ellos. Una vez trabajados se explicará los conceptos de principio de suma y de multiplicación. Si queda tiempo se propondrán otros ejercicios similares para realizar tanto en clase como en casa.
9	Problemas simultáneos: Se trabajarán los problemas enviados para casa y se resolverán las dudas que se generaron. Posteriormente se resolverán ejercicios similares mediante debate en clase.
10	Problem posing: Se proponen los problemas de problem solving, se hacen de manera gradual, de manera que al principio sólo deben rellenar un frase para acabar teniendo que realizar un problema completo.
11	Dudas
12	Prueba escrita

Prueba escrita

Una vez dadas esta explicaciones procedemos a desarrollar la prueba escrita en sí, los alumnos disponen de 1 hora para realizarlo y pueden utilizar una calculadora NO PROGRAMABLE. Al acabar el examen el profesor entregará una copia del examen resuelto a cada alumno con el fin de que comprueben sus errores y los procedimientos correctos. Se hace de esta manera ya que nada más acabar el examen los alumnos tienen más interés por conocer tanto el resultado como el procedimiento y por tanto harán mucho más caso a la hoja entregada que cuando se les entrega el examen corregido. Para notificar la nota conseguida por cada alumno el profesor entregará el examen corregido con la puntación a cada alumno individualmente y en caso de que algún ejercicio no haya sido resuelto correctamente por más del 50% de la clase el profesor lo resolverá en la pizarra.

1. **Demuestra: (1 pto)**
   a) $\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$

   b) $\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} = \binom{m+1}{n}$
   Solución:

a) $\binom{m}{m-n}=\frac{m!}{(m-n)!(m-(m-n))!}=\frac{m!}{(m-n)!(m-m+n)!}=\frac{m!}{(m-n)!n!}=\binom{m}{n}$

b) $\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}=\frac{m!}{(m-n)!n!}+\frac{m!}{(m-(n-1))!(n-1)!}=\frac{m!}{(m-n)!n!}+\frac{m!}{(m-n+1))!(n-1)!}=$
$\frac{m!(m-n+1)+m!n}{(m-n+1)!n!}=\frac{m!((m-n+1)+n)}{(m-n+1)!n!}=\frac{m!(m+1)}{(m-n+1)!n!}=\frac{(m+1)!}{(m+1-n)!n!}=\binom{m+1}{n}$

- **Campo de problemas:** Manejo con números combinatorios y factorial de un número y sus propiedades
- **Estándares de aprendizaje:** Est.MAAC.5.1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.
- **Tareas:**
  - **Tareas principales:** Conocer la definición de número combinatorio y las propiedades del factorial de un número
  - **Tareas auxiliares específicas:** Al tratarse de un ejercicio teórico los alumnos no deben apoyarse en ninguna tarea auxiliar específica.
  - **Tareas auxiliares generales:** En el apartado b) deben manejarse con alguna operación algebraica y común denominador.
- **Técnicas:** Las técnicas a trabajar son desarrollar un factorial o calcular un común denominador con factoriales.
- **Tecnologías:** Las tecnologías en las que nos basamos para aplicar dichas técnicas son la definición de factorial y de número combinatorio.
- **Criterios de evaluación:** El apartado a) es muy sencillo (prácticamente una demostración inmediata) por lo que su valor será de ¼ de la puntuación total (0,25 puntos) y se debe realizar correctamente para obtener la puntuación.
  En el caso del apartado b) la puntuación es de los 0,75 puntos restantes y en caso de realizar bien el común denominador de la suma de las fracciones se asignará 0,5 puntos siempre y cuando se haya definido bien las fracciones.
- **Posibles fallos:** Los posibles fallos que se prevén en este ejercicio son:
  - Que los alumnos no conozcan bien la definición de número combinatorio.
  - Que no se manejen correctamente con los factoriales a la hora de hacer el ejercicio b) (numerador común)
  - Fallo algebraico a la hora de hacer el (m-(n-1))!=(m-n+1)!

2. **En mi grupo de amigos vamos a jugar al juego de las sillas, somos 25 participantes para la primera ronda, en la que hay 24 sillas. Los árbitros de la partida no se han puesto de acuerdo para apuntar el resultado, el árbitro A ha enumerado las sillas del 1 al 24 y escribe una lista con todos los participantes por el orden de la silla en la que se han sentado. Por el contrario el árbitro B apunta en un papel a todos los que han conseguido pasar de ronda sin apuntar la silla. Según los criterios de cada árbitro ¿Cuál de los dos puede formar más listas distintas posibles?¿Por qué?¿Cuántas más?**
   Si en cada ronda quitamos una silla pero mantenemos el número de participantes ¿Existirá alguna ronda en la que el valor sea el mismo?(3 ptos)
   Solución:

Árbitro A) En la forma de escribir de este árbitro, el orden es importante ya que no es lo mismo estar sentado en la silla 1 que en la silla 7. Como asigna el hueco que queda libre a una silla imaginaria el resultado es una permutación sin repetición por lo tanto $V_{25}^{24} = \frac{25!}{1!} = 25! \cong 1{,}5\ 10^{25}$

Árbitro B) Este árbitro solo apunta una lista de nombres sin seguir ningún orden por lo que se trata de una combinación $C_{25}^{24} = \binom{25}{24} = \frac{25!}{1!24!} = 25$

Por lo tanto el árbitro A puede escribir aproximadamente $1{,}5\ 10^{25}$ soluciones más.

Escribimos las fórmulas de la variación y de la combinación sustituyendo el número de sillas por n:

$$C_{25}^{n} = \binom{25}{n} = \frac{25!}{(25-n)!\,n!}$$

$$V_{25}^{n} = \frac{25!}{(25-n)!}$$

Igualamos las fórmulas y obtenemos:

$$\frac{25!}{(25-n)!\,n!} = \frac{25!}{n!} \Rightarrow n! = 1 \Rightarrow n = 1 \text{ ó } n = 0$$

Por lo que cuando quede una silla las opciones serán las mismas (no ponemos el caso de cuando no hayas sillas porque no tendría sentido el juego)

- **Campo de problemas:** Manejo simple de las técnicas de combinatoria (combinaciones, variaciones y permutaciones con y sin repetición)

- **Estándares de aprendizaje:** Est.MAAC.5.1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación
  Est.MAAC.5.1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.
  Est.MAAC.5.1.4. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones.
  Est.MAAC.5.1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
  Est.MAAC.5.1.6. Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.
- **Tareas:**
  - **Tareas principales:**
    - Identificar y diferenciar entre permutación, variación (con y sin repetición) y combinación (con y sin repetición).
    - Calcular el número de distintas opciones que hay en cada tipo de combinación, permutación y variación.
  - **Tareas auxiliares específicas:**
    - Conocer las fórmulas de cada una de las variaciones, combinaciones y permutaciones.
    - Conocer las propiedades del factorial de un número
  - **Tareas auxiliares generales:** Cálculos algebraicos

- **Técnicas:** Al ser un ejercicio teórico no existen ni técnicas ni tecnologías a utilizar.
- **Tecnologías:** Al ser un ejercicio teórico no existen ni técnicas ni tecnologías a utilizar.
- **Criterios de evaluación:** En el primer apartado es en el que vamos a centrar la mayor parte de la puntuación del ejercicio ya que resolviéndola correctamente los alumnos demuestran los conocimientos que queremos evaluar en este ejercicio. Por lo que este apartado tendrá el valor de 1,75 puntos.
  Se aplicará el problema de tercios. Puede darse el caso de que algún alumno responda únicamente a la pregunta del árbitro sin calcular nada, en caso de justificarlo correctamente para premiar el razonamiento de que el orden crea muchas más combinaciones posibles en caso de calcular mal o directamente no calcular las combinaciones de cada árbitro se puntuará con 1 punto.
  En el caso del segundo apartado tendrá un valor de 0,25 puntos y consiste en comparar las fórmulas de la combinación y de la variación, es bastante inmediato identificar que se cumple sólo si n!=1 si llegan hasta ese punto se les asigna 0,15 puntos. De cualquier otra manera no se asignará nada.
- **Posibles fallos:** Los posibles fallos que se prevén en este ejercicio son:
  - Que los alumnos no conozcan bien la definición de número combinatorio.
  - Que no se manejen correctamente con los factoriales
  - Fallo a la hora de definir la fórmula en el apartado b)

3. **En el examen del año pasado sobre el mismo tema estoy seguro que la solución era: $VR_7^3 C_4^9$ para la pregunta a) y $VR_7^3 + C_4^9$ para la pregunta b) pero no recuerdo el problema. Crea un problema cuyas soluciones coincidan con el del año pasado.(3 ptos)**
   Solución:
   Evidentemente este tipo de problemas no tiene una única solución correcta pero esta es una de las propuestas que se hace como solución correcta:
   En un concurso de pintura los participantes deben pintar 3 cuadros distintos, para ello tienen que escoger 3 tamaños de cuadro entre 7 opciones pudiendo escoger el mismo tamaño 3 veces. Una vez escogidos los 3 tamaños del cuadro los participantes deberán que 4 colores utilizar entre una paleta de 4. El orden en el que escogen el tamaño de las cuadros es importante ya que en el primer cuadro podrán usar sus 4 colores en el segundo solo 3 y en el tercero 2 colores. ¿Cuántas opciones tienen para escoger en total? En el caso en el que sólo les dejaran elegir el tamaño o el color (pudiendo elegir ellos cuál de las dos cosas escogen)¿cuántas opciones tienen?

- **Campo de problemas:** Redactar problemas de combinatoria

- **Estándares de aprendizaje:** Est.MAAC.5.1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación
  Est.MAAC.5.1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.

Est.MAAC.5.1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.

- **Tareas:**
  - **Tareas principales:**
    - Comprender el significado práctico de las operaciones entre las fórmulas.
    - Conocer qué es exactamente una combinación, variación o permutación.
  - **Tareas auxiliares específicas:** Dominar correctamente la notación de la unidad didáctica.
  - **Tareas auxiliares generales:** Al tratarse de un ejercicio teórico-práctico los alumnos no deben apoyarse en ninguna tarea auxiliar general.
- **Técnicas:** Al ser un ejercicio de "*Problem posing*" no existen técnicas al uso que utilizar.
- **Tecnologías:** Al ser un ejercicio de "*Problem posing*" no existen tecnologías al uso que utilizar.
- **Criterios de evaluación:** Se premiará con 1 punto la identificación correcta de las variaciones con repetición y las combinaciones. Los 2 puntos restantes se asignarán de manera equitativa (1 punto a cada una) a identificar correctamente las operaciones entre variaciones con repetición y combinaciones.
- **Posibles fallos:** Los posibles fallos que se prevén en este ejercicio son:
  - Que los alumnos no comprendan el significado práctico de la multiplicación o de la suma entre las variaciones con repetición y las combinaciones.
  - Que confundan el significado de los subíndices con los superíndices
  - Que no conozcan qué es una combinación o una variación con repetición

4. **En un concurso de la tele hay que tirar 2 veces un dado, posteriormente ordenar 4 tarjetas en las que salen animales distintos y por último seleccionar tus 5 actores favoritos de una lista de 7 forma que haces un ranking. Tu resultado final se escribe de la siguiente manera:**
   - **Primero se ponen los resultados de tus tiradas ordenados de mayor a menor**
   - **Posteriormente se escriben en el mismo orden que tú has hecho los 10 animales**

   ¿Cuántas posibles soluciones hay? (3 ptos)

   Solución:

   En los números del dado como luego se ordenan de mayor a menor no importa el orden que salgan, además puede salir varias veces el mismo número por tanto existen $CR_6^2 = 21$ combinaciones

   En el caso de los animales sí que importa el orden, además utilizamos todos los animales en nuestro ranking sin que haya ninguno repetido por lo tanto tenemos $P_4 = 4! = 24$ combinaciones

Por último en los actores importa el orden ya que es un ranking, pero no utilizamos todos los actores que tenemos para hacerlo por lo que las combinaciones son: $V_7^5 = \frac{7!}{5!}$=54

Por cada combinación posible en cada una de las fases se pueden realizar el resto de combinaciones por lo que el resultado consiste en multiplicar todas las opciones de cada una de las fases por lo que la solución final es 21·24·54=27.216 opciones distintas

- **Campo de problemas:** Manejo simultaneo de varias técnicas de combinatoria

- **Estándares de aprendizaje:** Est.MAAC.5.1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación
    - Est.MAAC.5.1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.
    - Est.MAAC.5.1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.

  Est.MAAC.5.1.6. Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.
  - **Tareas:**
    - **Tareas principales:**
      - Comprender los conceptos de permutación, combinación y variación
      - Comprender el significado práctico de las operaciones entre las fórmulas.
    - **Tareas auxiliares específicas:** Conocer las fórmulas de la permutación con y sin repetición y combinación
    - **Tareas auxiliares generales:** Cálculos aritméticos.
  - **Técnicas:** La técnica a utilizar para este problema es utilizar la fórmula de cada técnica de conteo y posteriormente multiplicar ambos resultados.
  - **Tecnologías:** La tecnología principal en la que se basa esta ténica es el principio multiplicativo.
  - **Criterios de evaluación:** Se asignará 1 punto al cálculo de cada una de las fases del concurso. Dentro de esta parte se aplicará el método de tercios.
  - El punto que queda del problema se asignarán si el alumno opera correctamente los 3 resultados anteriores, sin tener en cuenta si estos están bien calculados o no. Dentro de esta parte se aplicará el método de tercios.
  - **Posibles fallos:** Los posibles fallos que se prevén en este ejercicio son:
    - Que los alumnos no identifiquen correctamente cada uno de los tipos de problemas que hay en las fases del concurso
    - Que los alumnos sumen las combinaciones calculas en lugar de multiplicarlas
    - Que los alumnos comentan fallos algebraicos

Bibliografía

BASULTO J. Y CAMUÑEZ J.A. (20076).El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII. SUMA. Noviembre, 43-54

BATANERO, M.C.;GODINO, J.D. y NAVARRO-PELAYO, V. (1994). Razonamiento combinatorio. Madrid: Sintesis

BATANERO, M.C.;GODINO, J.D. y NAVARRO-PELAYO, V. (1995). The use of implicative and correspondence analysis for assesing pupil's combinatorial reasoning. En: R. Gras y M. Artigue (Eds), Colloque "Methodes d'analyses statiques multidimmensionnelles en Didactique des Mathematiques." (pp. 245-2569. Caen: A.R.D.M

BATANERO, M.C.;GODINO, J.D. y NAVARRO-PELAYO, V. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. Educación matemática. 8(1), 26-39

ESPINOZA, J.; LUPIAÑEZ J.L. y SEGOVIA I. (2014). La investigación de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática.

ACTIVIDADES COMBINATORIA

1) Se distribuyen tres regalos distintos entre cinco chicos. De cuántas formas pueden hacerlo si:
   a) cada chico sólo puede recibir un regalo
   b) a cada chico le puede tocar más de un regalo;
   c) cada chico sólo puede recibir un regalo pero los tres son idénticos.

2) Una persona tiene 6 chaquetas y 10 pantalones. ¿De cuántas formas distintas puede combinar estas prendas?.

3) Un amigo le quiere regalar a otro dos libros y los quiere elegir entre los 15 que le gustan. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

4) ¿Cuántos planos distintos determinan 6 puntos en el espacio, si nunca hay más de 3 en un mismo plano? (Nota: tres puntos determinan un plano)

5) ¿Cuántos cuadriláteros se pueden formar con los vértices de un pentágono regular?

6) Un entrenador dispone de 22 jugadores para formar un equipo de fútbol. ¿Cuántas alineaciones de 11 jugadores puede hacer?

7) Una familia, formada por los padres y tres hijos, van al cine. Se sientan en cinco butacas consecutivas.
   a) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse?
   b) ¿Y si los padres se sientan en los extremos?

8) ¿Cuántas opciones tienes, si debes escoger tres asignaturas entre seis optativas?

9) Con los números 3, 5, 6, 7 y 9 ¿cuántos productos distintos se pueden obtener multiplicando dos de estos números? ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 2? ¿Cuántos cocientes distintos se pueden obtener dividiendo dos de estos números?

10) ¿Cuántos resultados distintos pueden aparecer al lanzar un dado 4 veces?

11) ¿Cuántos números hay entre 2000 y 3000 que tengan sus cifras diferentes?

12) El alfabeto Morse utiliza los signos . y -. Utilizando como máximo cuatro de estos signos, ¿cuántas secuencias distintas puedes formar?

13) Un barco tiene diez banderas diferentes para hacer señales y cada señal se forma colocando 4 banderas en un mástil. ¿Cuántas señales distintas pueden hacer desde el barco?

14) A un congreso asisten 60 personas de las cuales 40 sólo hablan inglés y 20 sólo alemán. ¿Cuántos diálogos pueden establecerse sin intérprete?

15) Una cafetería vende 10 tipos de café diferentes. Cinco amigos quieren tomar cada uno un café. ¿Cuántas formas posibles tienen de hacerlo?

16) a) ¿Cuántos números de 6 cifras puedes escribir con los dígitos 1, 2 y 3?. b) ¿Cuántos de ellos contienen todos los dígitos 1, 2 y 3 al menos una vez?

17) En un plano hay rectas que no son paralelas, ni concurren tres en un mismo punto. Si el número de intersecciones es 21. ¿Cuántas rectas hay?

18) Todas las personas que asisten a una reunión se estrechan la mano. Si hubo 105 apretones, ¿cuántas personas asistieron?

19) ¿Cuántos triángulos quedan determinados por 10 puntos si tres cualesquiera no están alineados?.

20) ¿De cuántas formas se pueden sentar tres personas en seis sillas?.

21) Con los números 2, 5, 7 y 9:
   a) ¿Cuántos números de tres cifras puedes formar?
   b) ¿Cuántos números de tres cifras distintas puedes formar?
   c) ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas puedes formar?
   d) ¿Cuántos de los números del apartado b) son pares?

22) ¿Cuántas columnas tenemos que cubrir para acertar seguro una quiniela?. Cada columna tiene 15 resultados a elegir entre 1, X, 2.

23) Para hacer una apuesta en la lotería primitiva hay que marcar con cruces seis números (donde figuran números del 1 al 49). ¿De cuántas formas diferentes puede marcar una persona?.

24) ¿De cuántas formas se pueden cubrir los puestos de Presidente y Secretario de una comunidad de vecinos, contando con 10 vecinos para ello?.

25) Te enseñan 6 discos para que elijas 3 como regalo. ¿De cuántas formas puedes elegir?.

26) ¿Cuántas palabras se pueden escribir con las letras de SOBRE, sin repetir ninguna?.

27) Ocho amigos van de viaje llevando para ello dos coches. Si deciden ir 4 en cada coche.
   a) ¿De cuántas formas pueden ir si todos tienen carnet de conducir?
   b) ¿De cuántas formas pueden ir si sólo tres tienen carnet de conducir?

28) En una carrera compiten 10 caballos. En los boletos hay que indicar el nombre del 1º, 2º y 3º. ¿Cuántos deberemos rellenar para asegurarnos de que ganaremos?.

29) En una estantería hay 6 libros de matemáticas y 3 de física. Queremos coger 2 de cada. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?.

30) En una clase de 20 alumnos se van a conceder 3 premios: uno al más destacado en matemáticas, otro al mejor en historia y otro al mejor deportista. ¿De cuántas formas distintas podemos hacerlo?.

31) Se quiere formar un equipo de futbol-sala (cinco jugadores) de un total de 10. Si sólo tenemos un portero, ¿cuántos equipos distintos podemos formar?.

32) Se juega un torneo entre 10 equipos por el sistema de liga, a una sola vuelta.
   a) ¿Cuántos partidos habrán de jugarse en total?
   b) Si reciben trofeo los tres primeros, ¿de cuántas forman pueden repartirse los trofeos si son distintos?

33) Con los dígitos 1, 3, 5 y 7, ¿cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar? ¿Y cuántos si se pueden repetir las cifras?.

34) En un campeonato de fútbol participan 12 equipos. ¿De cuántas maneras se pueden ocupar los tres primeros puestos?.

35) ¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, secretario y tesorero de un club deportivo sabiendo que hay 10 candidatos?. b) Si el puesto de presidente ya está asignado a uno de ellos ¿de cuántas formas se pueden cubrir los otros dos puestos?.

36) ¿De cuántas maneras pueden acomodarse 6 personas:
   a) En una fila de 5 sillas?
   b) En una fila de 6 sillas?
   c) Alrededor de una mesa redonda de 6 sillas?

37) Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números distintos de tres cifras distintas se pueden formar de modo que el 5 ocupe siempre el lugar de las decenas?

38) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con las cifras pares 1, 2, 3 y 4 sin que se repita ninguna? b) ¿Cuántos terminan en 34? c) ¿Cuántos habrá que sean mayores que 300?

39) ¿Cuántas quinielas de 14 resultados debemos sellar para estar seguros de obtener 14 aciertos:
   a) supuestos 5 resultados fijos.
   b) si ponemos nueve "1".
   c) si ponemos ocho "1", cuatro "x" y dos "2".

40) En una carrera ciclista participan 30 corredores, al llegar a la meta se entregan tres premios distintos a distintos corredores. ¿De cuántas formas se podrá realizar la entrega?

41) Las nuevas matrículas de los coches están formadas por tres letras seguidas de tres números repetidos o no. ¿Cuántos coches se podrán matricular por este sistema?. Se supone que el alfabeto tiene 26 letras.

42) Si se tienen 10 puntos no alineados, ¿cuántos segmentos habrán de trazarse para unirlos todos, dos a dos?

43) Con las letras de la palabra PARTIDO: a) ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer? b) ¿Cuántas empiezan por P? c) ¿Cuántas empiezan por PAR?

44) ¿De cuántas formas se pueden sentar cinco personas en una fila de butacas de un cine?

45) ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar cinco personas alrededor de una mesa circular?

46) Un matrimonio quiere invitar a sus amigos a cenar. Debido a las dimensiones de su casa sólo puede invitar a 5 de cada vez. Si quieren invitar a 10 amigos. ¿De cuántas maneras puede invitar a 5 de ellos?

47) ¿De cuántas formas se pueden colocar 10 personas en una fila si dos de ellas tienen que estar siempre en los extremos?

48) En una urna hay tres bolas rojas, tres verdes, cuatro negras y dos azules. ¿De cuántas maneras distintas pueden sacarse, bola a bola, de la urna?

49) En una clase hay 10 niños y 5 niñas.
   a) ¿De cuántas maneras puede escoger el profesor un grupo de 3 alumnos?
   b) ¿En cuántos grupos habrá una sola niña?

50) ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra MATEMATICAS?

51) ¿De cuántas formas distintas pueden llegar a la meta cinco atletas en una carrera?

52) ¿De cuántas formas distintas pueden tres chicas y dos chicos en una fila de butacas de un cine teniendo en cuenta que no pueden estar dos chicos juntos ni dos chicas juntas?

53) En un determinado programa de televisión intervienen cuatro presentadores. Si en la emisora trabajan 10 presentadores, ¿de cuántas formas distintas se puede presentar el programa?.

54) ¿Cuántas jugadas diferentes se pueden obtener si se sacan cinco cartas de una baraja de 40 cartas?.

55) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 6 libros en un estante si:

   a) es posible cualquier ordenación?
   b) 3 libros determinados deben estar juntos?
   c) dos libros determinados deben ocupar los extremos?
   d) tres libros son iguales entre sí?

56) Se quiere preparar una salsa con tres ingredientes. Si disponemos de siete ingredientes en la despensa. ¿Cuántas salsas distintas se podrían preparar?

57) En un centro escolar hay 40 en 1º de ESO, 35 en 2º, 32 en 3º y 28 en 4º. Para hablar con la dirección se quiere formar una comisión que esté integrada por un alumno de cada curso. ¿Cuántas comisiones se pueden formar?

58) A una reunión asisten 15 personas y se intercambian saludos entre todos, ¿cuántos saludos se han intercambiado?

59) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las ocho últimas localidades de un partido de fútbol entre los doce aficionados que aún esperan en la cola de entrada?

60) ¿Cuántas apuestas hay que rellenar en las quinielas de fútbol para tener la seguridad de acertar seis resultados, aparte del complementario?.

61) Tres matrimonios se reúnen para celebrar el aniversario de uno de ellos. Desean que les hagan una fotografía de forma que estén todos los hombres juntos y también las mujeres. ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse?.

SOLUCIONES:

1) Sol: a) $V_5^3 = 60$; b) $VR_5^3 = 125$; c) $C_5^3 = 10$
2) Sol: 60
3) Sol: $C_{15}^3 = 105$
4) Sol: $C_6^3 = 20$
5) Sol: $C_5^4 = 5$
6) Sol: $C_{22}^{11} = 705432$
7) Sol: a) $P_5 = 120$; b) $2 \cdot P_3 = 12$
8) Sol: $C_6^3 = 20$
9) Sol: a) $C_5^2 = 10$; b) $C_4^1 = 4$; c) $V_5^2 = 20$
10) Sol: $VR_6^4 = 1296$
11) Sol: $V_9^3 = 504$
12) Sol: $V_2^1 + VR_2^2 + VR_2^3 + VR_2^4 = 30$
13) Sol: $V_{10}^4 = 4320$
14) Sol: $C_{40}^2 + C_{20}^2 = 970$
15) Sol: $VR_{10}^5 = 177100000$
16) Sol: a) $VR_3^6 = 729$; b) $VR_3^6 - 3VR_2^6 + 3 = 540$ respectivamente.
17) Sol: 7
18) Sol: 15
19) Sol: $C_{10}^3 = 120$
20) Sol: $V_6^3=120$
21) Sol: a) 64; b) 24; c) 24; d) 6
22) Sol: 14.348.907
23) Sol: 13.983.816
24) Sol: $V_{10}^2 = 90$
25) Sol: $C_6^3 = 20$
26) Sol: $P_5 = 120$
27) Sol: a) $P_8 = 40320$; b) $V_3^2.P_6=4320$
28) Sol: $V_{10}^3 = 720$
29) Sol: $C_6^2.C_3^2 = 45$
30) Sol: $VR_{20}^3 = 8.000$
31) Sol: $C_9^4 = 126$
32) Sol: a) $C_{10}^2= 45$; b) $V_{10}^3 = 720$
33) Sol: $V_4^3 = 24$; $VR_4^3 = 64$
34) Sol: $V_{12} = 1320$
35) Sol: a) $V_{10}^3 = 720$; b) $V_9^2 = 72$
36) Sol: a) $V_6^5 = 720$; b) $P_6 = 720$; c) $P_5 = 120$
37) Sol: $V_4^2 = 12$
38) Sol: a) $V_4^3 = 24$; b) 2; c) $2.V_3^2 = 12$
39) Sol: a) $VR_3^9 = 19683$; b) $C_{14}^9 \,.\, VR_2^5 = 64064$; c) $C_{14}^8.C_6^4= 45045$
40) Sol: $V_{30}^3 = 24360$
41) Sol: $VR_{26}^3 \,.\, VR_{10}^4 = 175760000$
42) Sol: $C_{10}^2 = 45$
43) Sol: a) $P_7 = 5040$; b) $P_6 = 720$; c) $P_4 = 24$
44) Sol: $P_5 = 120$

45) Sol: $P_4 = 24$
46) Sol: $C_{10}^5 = 252$
47) Sol: $2.P^8 = 80640$
48) Sol: $PR_{12}^{3,3,4,2} = 277.200$
49) Sol: a) $C_{15}^3 = 455$; b) $5.C_{10}^2 = 225$
50) Sol: $PR_{11}^{2,2,3} = 1.663.200$
51) Sol: $P_5 = 120$
52) Sol: $P_3.P_2 = 12$
53) Sol: $C_{10}^4 = 210$
54) Sol: $C_{40}^5 = 658008$
55) Sol: a) $P_6 = 720$; b) $4.P_3.P_3 = 144$; c) $2.P_4 = 48$; d) $PR_6^3 = 120$
56) Sol: $C_7^3 = 35$
57) Sol: $40\cdot35\cdot32\cdot28$
58) Sol: $C_{15}^2 = 105$
59) Sol: $C_{12}^8 = 495$
60) Sol: $VR_3^6 = 729$
61) Sol: $2.P_3.P_3 = 72$