Trabajo Fin de Máster

Probabilidad: una propuesta didáctica para 2º curso de ESO

Probability: a didactic proposal for the 2nd year of ESO

Autor

Carlos Baquero Muñoz

Director

Rafael Escolano Vizcarra

Facultad de Educación

2018

"*La Teoría de la probabilidad no es, al fin y al cabo, nada más que el sentido común reducido al cálculo*".
(Laplace)

Índice:

1. EL OBJETO MATEMÁTICO

1.1 El objeto matemático a enseñar

El objeto que procedo a presentar es la probabilidad, desde una visión conceptual, introduciendo el cálculo de probabilidades con experimentos y juegos sencillos.

1.2 Curso y asignatura en los que sitúo la probabilidad.

El curso en el que la sitúo es 2º de la ESO en la asignatura de Matemáticas.

Según la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, para 2º curso de ESO los siguientes contenidos:

Bloque 5. Estadística y probabilidad.

(…)

• Fenómenos deterministas y aleatorios.

• Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.

• Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.

• Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.

• Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.

• Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.

Relacionados con estos contenidos el currículo aragonés establece dos criterios de evaluación, a saber:

Crit.MA.5.3 Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.

Crit.MA.5.4 Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.

1.3 Campo de problemas, técnicas y tecnología asociados al objeto matemático pretendo enseñar.

Se comenzará con una introducción al alumnado de la probabilidad con la intención de que verbalicen las ideas preconcebidas que puede que tengan algunos de los alumnos sobre los fenómenos aleatorios. Seguidamente, hablaremos formalmente de los sucesos aleatorios y deterministas para proseguir con el espacio muestral de un experimento aleatorio. Trabajaremos los distintos posibles sucesos que pueden ocurrir en un experimento: sucesos imposibles, seguros, compatibles, equiprobables, etc. Tras hablar de estos sucesos procedemos a realizar operaciones con ellos.

Seguiremos con una idea frecuencial de la probabilidad a través de experimentos aleatorios repetidos que se acercan a la frecuencia teórica. Tras esta idea frecuencial entraremos de lleno en la idea clásica de probabilidad de casos favorables divididos por los casos probables con juegos y problemas que hagan trabajar esta técnica.

Terminaremos trabajando la probabilidad con el uso de diagramas de árboles y tablas de contingencia en sucesos compuestos.

2. ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

2.1 ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Con la introducción de la LOMCE, el último bloque de matemáticas de 2º de la ESO es el conformado por estadística y probabilidad y es por ello por lo que muchos centros por motivo de la falta de tiempo que suele haber en la programación del temario lo dejan de lado o lo ven muy por encima, cuando en realidad es uno de los contenidos de las matemáticas que más utilizan en su día a día.

Según Serrado, Azcárate y Cardeñoso (2006, pp 95-96), al realizar un amplio análisis de libros de textos de Educación Secundaria Obligatoria encuentran cuatro tipos de introducción de la probabilidad:

i. No incluye el "Tratamiento del Azar" de manera explícita.

No se introducen en la planificación de la intervención en el aula los bloques de contenidos relacionados con el "Tratamiento del Azar" de forma explícita, sino que se presentan las diferentes nociones distribuidas por los distintos bloques. Las argumentaciones por las cuáles no introduce este bloque de contenidos están basadas en otorgar más importancia a otros bloques de contenidos, que se sustentan bajo unas bases deterministas.

ii. Tratamiento intuitivo de la probabilidad.

Aparecen algunas explicaciones sobre el significado del azar, estableciendo la relación con los fenómenos, experimentos o sucesos aleatorios. Se otorga más importancia a la cuantificación de la probabilidad que a la comprensión de su noción. La falta de énfasis en una conceptualización adecuada de la probabilidad se intenta solucionar con una mayor incidencia en la cuantificación de la probabilidad, desde aceptaciones subjetivas como la referida a la contingencia del suceso hasta la cuantificación de la probabilidad, que se realiza a partir de razonamientos proporcionales asociados a espacios de sucesos equiprobables y finitos, que permiten introducir la Regla de Laplace.

iii. Tratamiento emergente.

Se presentan diferentes interpretaciones del significado del concepto de probabilidad, como puede ser la Laplaciana o la Frecuencial. Aplican estas nociones en la cuantificación de la probabilidad en cualquier tipo de contexto (juegos, físicos, químicos, meteorológicos…), como los indicados por Cardeñoso (2001a).

iv. Tratamiento normativo.

Se presenta una profunda reflexión sobre los modelos matemáticos para el tratamiento de la incertidumbre (Clásico- Laplaciano, Bayesiano o Frecuencial), de sus interacciones y de la complejidad de su aplicación en distintas situaciones. Estas reflexiones sustentan la necesidad de la introducción de una axiomática de la probabilidad y una visión integradora desde la Teoría de la Medida.

En conclusión, tras el detallado análisis de la noción de probabilidad que proponen los libros de textos Serrado, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2006, p.104) la caracterización escolar de la noción de probabilidad en los libros de texto se realiza asimilándola con su medida desde una perspectiva clásica, como el valor que se obtiene de aplicar la regla de Laplace, o desde una perspectiva frecuencial como el valor al cual tienden las frecuencias relativas, sin incidir en el significado de esta noción. Esto conlleva a enfatizar el cálculo por encima de la comprensión de la idea, hecho que por otro parte está presente en otros muchos casos del currículo escolar. Estos investigadores concluyen que los libros de textos priorizan el perfil "Tratamiento intuitivo de la probabilidad". Concluyen que la caracterización escolar de la probabilidad en los libros de texto se realiza asimilándola con su medida desde una perspectiva clásica. Esto conlleva a enfatizar el cálculo por encima de la comprensión de la idea.

En mi experiencia en el Practicum III, pude observar cómo se introducía la probabilidad en 2º de la ESO a través de la plataforma OnMat. En ella, el tratamiento es totalmente intuitivo a través de ejercicios en los que cuantifican la probabilidad de distintos juegos.

Desde mi punto de vista, la probabilidad se puede aplicar fácilmente, puesto que no necesita de complicadas herramientas. Es por ello por lo que no concuerda con el modelo clásico en el que se da prioridad al cálculo sobre la interpretación y comprensión de los resultados.

2.2 ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Los Campos de Problemas del cálculo de probabilidades usados en la mayor parte de los libros de texto y plataformas se suelen agrupar en tres grandes categorías:

1) Los experimentos aleatorios y el espacio muestral.
2) La probabilidad de un suceso.
3) Los experimentos compuestos y sus probabilidades.

Las técnicas que generalmente se enseñan son:

1) Establecer el carácter aleatorio o determinista.
2) Establecer los distintos resultados de un experimento aleatorio.
3) Recuento de sucesos.
4) Cociente de sucesos favorables y posibles.
5) Diagramas de árbol y tablas de contingencia.

Las tecnologías que generalmente se enseñan son:

1) La definición de sucesos aleatorios y deterministas, de espacio muestral, suceso, tipos de sucesos.
2) Operaciones con sucesos.
3) Propiedades de la probabilidad.
4) Regla de Laplace.
5) Probabilidad de uniones, intersecciones y sucesos contrarios.

2.3 ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Cuando a un alumno le preguntamos por la probabilidad no tiene una visión clara, lo asocia a los juegos de azar, lanzamiento de dados y monedas, etc., todo altamente relacionado con la probabilidad, pero cuando se le pregunta la importancia de la probabilidad no logra establecer una respuesta concreta. Más que saber que la probabilidad de que salga cara al lanzar una moneda es comprender e interpretar el significado de la cifra, qué se puede hacer con ese conocimiento o cómo se puede adaptar en la vida cotidiana.

El alumno tiene una concepción previa de distintos sucesos en los que interviene la probabilidad. Enseñar probabilidad cambia la concepción del alumno sobre distintos aspectos que ocurren en la vida cotidiana desde cosas tan triviales como jugar a juegos de mesa a aspectos complejos como la física, la meteorología, la medicina, etc. Además, el estudio de los fenómenos aleatorios es socialmente útil para cualquier ciudadano porque le permite discernir la publicidad engañosa y prevenir la ludopatía en una sociedad en la que proliferan los juegos de azar.

Esencialmente, la aplicación de la probabilidad reside en la capacidad para estimar o predecir eventos y, si mayor son los datos para predecir un evento, más factible será predecirlo. Cuanto mayor conocimiento de probabilidad mayor posibilidad de acertar en muchas decisiones.

.

3. CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

3.1 ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

En primaria, el alumno debe haber alcanzado un conocimiento aceptable de los siguientes objetos:

1. Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas.
2. Realizar conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería…).
3. Comparar cualitativamente probabilidades (más probable, menos probable, improbable).
4. Calcular la frecuencia relativa (de atributos) a partir de observaciones o datos.
5. Conocer el número racional como razón para cálculo de frecuencias relativas.
6. Resolver problemas muy elementales que impliquen dominio de los contenidos propios de probabilidad.

En 1º de la ESO, los siguientes objetos deben haber sido mencionados y aprendidos, dado que son los contenidos curriculares para este nivel educativo:

1. Fenómenos deterministas y aleatorios.
2. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.
3. Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.
4. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.

3.2 La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Teóricamente sí. El problema, ya mencionado antes, es que la parte de probabilidad es el último apartado que se da en matemáticas y, por ello, muchas veces ni se enfatiza correctamente, ni se ve con el rigor que requiere o, directamente, se pospone a este curso su aprendizaje en la ESO. Creo que el estudio de la probabilidad está muy poco valorado y debería dársele una mayor importancia para eliminar ideas preconcebidas sobre distintos fenómenos aleatorios de la vida cotidiana como, por ejemplo, los juegos de azar.

3.3 ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Supondré en este trabajo que los alumnos de primer curso han estudiado los contenidos curriculares de probabilidad, a pesar de que es el último apartado y se suele dejar un poco de lado. Para asegurar que los alumnos poseen los conocimientos previos necesarios planteo la siguiente prueba inicial.

Evaluación inicial:

1. DI CUÁLES DE LAS SIGUIENTES EXPERIENCIAS SON ALEATORIAS Y CUÁLES NO:

a) Tirar una moneda y observar si sale cara. → ________________

b) Comprar una papeleta de una rifa y esperar que toque. → ________________

c) Mirar por la ventana y esperar que el primer coche que pase sea rojo. → ________________

d) Tirar una pelota al aire y esperar que caiga. → ________________

e) Tirar un corcho al agua y esperar que flote. → ________________

2. EXTRAER UNA BOLA DEL BOMBO.

Indica en la tabla, con una cruz, el tipo de cada suceso.

SUCESO	SEGURO	POSIBLE	IMPOSIBLE
EXTRAER LA LETRA «a»			
EXTRAER UNA VOCAL			
EXTRAER UNA CONSONANTE			
EXTRAER UNA LETRA QUE NO SEA NI LA «a» NI LA «o»			

3. a) ¿Cuál es la probabilidad de un suceso seguro? →

b) ¿Cuál es la probabilidad de un suceso imposible? →

4. EXTRAER AL AZAR UNA BOLA DE LA BOLSA.

Ordena los siguientes sucesos desde el menos probable al más probable.

A – Sacar siete.

B – Sacar más de siete.

C – Sacar menos de siete.

D – Sacar par.

E – Sacar impar.

F – Sacar más de nueve.

G – Sacar menos de diez.

___ – ___ – ___ – ___ – ___ – ___ – ___

5. LANZAR EL DADO.

a) Escribe el conjunto de todos los resultados posibles.

____

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un cinco?

c) Escribe los resultados pertenecientes al suceso SACAR MENOS DE CINCO.

____

d) ¿Cuál es la probabilidad de sacar menos de cinco?

6. JUEGO DE CARTAS

Se te propone que participes en el siguiente juego: Se barajan y se colocan boca abajo sobre la mesa cuatro cartas: dos rojas y dos negras, y puedes apostar el dinero que desees a que sacas dos cartas del mismo color al levantar dos cartas a la vez ¿Te interesa jugar?

¿Qué pretendo con los anteriores ejercicios? ¿Qué quiero evaluar?

Con el primer y segundo ejercicios busco evaluar el conocimiento que manejan los alumnos con respecto al primer campo de problemas (experimentos aleatorios y espacio muestral).

Con el tercer, cuarto y quinto ejercicios se pretender ver el conocimiento del alumno sobre el segundo campo de problemas (probabilidad de un suceso).

Con el sexto y último pretendemos evaluar la probabilidad de un experimento compuesto, que trabajaremos en el campo de problemas tres.

4. RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

4.1 ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

Las razones de ser tenidas en cuenta en el aula son las de la vida cotidiana. La matemática sirve para modelar situaciones que se presentan en campos de la vida cotidiana a través de diferentes ciencias como la física, química, economía, biología, etc.; además juega un papel importante en el desarrollo tecnológico. De esta manera el saber matemático se puede considerar como un instrumento con el que es posible, a través de otras ciencias, reconocer y transformar la naturaleza y la sociedad.

Al tratar de modelar los fenómenos de la naturaleza, el hombre se ha encontrado con que hay situaciones que obedecen a un modelo determinista y otras que en cambio obedecen a un modelo aleatorio. Debemos enseñar un conjunto de teorías que den acceso a los estudiantes a los elementos básicos de probabilidades, que le permitan tomar decisiones en su vida cotidiana y contar con una formación mínima para que puedan desarrollarse desde esa perspectiva en cualquier campo profesional o científico. Como bien explica Batanero (2003, p.51), muchos problemas complejos se resuelven hoy día mediante simulación y mostrar a los alumnos ejemplos sencillos de esta técnica puede servir para ilustrar su aplicabilidad a campos y problemas reales. En la enseñanza de la estocástica en secundaria, la simulación cobra papel importante, ya que ayuda al alumno a conocer las diferencias entre la probabilidad experimental y la teórica.

4.2 ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

La teoría de la probabilidad está fuertemente ligada desde sus inicios a los juegos de azar. Etimológicamente, además, la palabra azar proviene del árabe “az-zahr”, que significa “el dado para jugar”.

Los primeros pasos en la teoría de las probabilidades fueron dados por el matemático y médico italiano Jerónimo Cardano (1501-1576). Se dice que Cardano era un jugador y que inclusive algunas veces estuvo en la cárcel a causa de sus trampas.

Históricamente, se asocia el origen de la teoría moderna de la probabilidad a un carteo entre Pascal (1623–1662) y P. Fermat (1601–1665). En 1653, otro jugador y matemático, el llamado Caballero de Méré, se interesó por la relación entre la matemática y los juegos de azar. De talento limitado, remitió a Pascal algunos problemas sobre el juego de dados. Y éste, en colaboración con Fermat, hizo avanzar un poco más el estudio de la probabilidad.

La razón de ser que se utiliza en el aula se centra en la existencia de la probabilidad en la vida cotidiana. En muchas de las situaciones y decisiones diarias interviene el azar. La probabilidad tiene la enorme cualidad de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales, y, por lo tanto, su conocimiento permite comprender y predecir mucho mejor el mundo en que vivimos.

Es por ello por lo que pienso que no coinciden las razones históricas con las actuales. Es cierto que los juegos de azar siguen presentes en la actualidad (desgraciadamente cada vez más) pero no son la razón por la que se enseña ahora mismo probabilidad en nuestro sistema educativo.

4.3 Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

La actividad siguiente se basa en afirmaciones que se pueden encontrar en el día a día los alumnos durante su vida en las que la probabilidad entra en juego.

Actividad 1: razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. A falta de 3 jornadas de liga el Real Madrid aventaja en 10 puntos al Barcelona por lo que es imposible que el Barcelona gane la liga.
2. Viendo la previsión meteorológica, el presentador ha comentado que en un 75% de seguridad mañana lloverá por lo que mañana seguro que caen precipitaciones.
3. El médico me ha dicho que la tasa de éxito de la operación a la que quiere someterme es del 20% por lo que lo mejor que puedo hacer es no operarme con ese método y buscar otra alternativa.
4. Mi compañía de seguros quiere subirme el precio ya que he tenido un accidente y comentan que es más probable que tenga otro a que no.

5. Como ayer tocó en la lotería del pueblo el número 00012 mañana no voy a jugar al 00012 porque ya ha salido.

La actividad se dividirá en cinco debates cortos tras cada una de las afirmaciones propuestas.

Con la primera afirmación espero que no haya debate ya que hablamos de un suceso seguro, término que introduciremos aprovechando esta afirmación. Se les propondrá, en contra de esta afirmación, que expresen ellos un suceso imposible para complementar.

Con la segunda afirmación, esperamos que surja un debate entre los alumnos que diferencie entre que un suceso tenga una alta probabilidad y que sea seguro (1 de probabilidad o 100%). Queremos que distingan correctamente que algo que es muy probable no implica que vaya a ocurrir.

Con la tercera afirmación queremos que platiquen sobre los riesgos o no beneficios de realizar actividades con poca probabilidad de éxito y la búsqueda de estrategias ganadoras.

Con la cuarta buscaremos que piensen en el porqué de ciertos aspectos cotidianos a los que se enfrentan sus familias, y ellos cuando crezcan, en los que la probabilidad entra en juego.

La quinta afirmación es la que más controversia generará en el debate ya que hay ideas preconcebidas respecto a los sucesos independientes difíciles de entender en una primera aproximación. Como el debate es “entre iguales” intentamos que sean ellos mismos los que se den cuenta del error de esas ideas y no que sea el profesor a través de explicaciones teóricas el que indique la solución.

4.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La idea es utilizar los conceptos básicos que traen los estudiantes tanto en la etapa de Educación Primaria como en 1º de la ESO sobre probabilidad. Queremos que los alumnos se cuestionen que implica que un suceso sea más o menos probable y si reconocen la certeza absoluta de que algo ocurra o no y de las implicaciones que tiene que una acción sea más probable que otra. Después de que los alumnos realicen el ejercicio individualmente, pondremos en común las distintas respuestas que vayan nombrando los alumnos y el profesor ahondará en los conceptos mencionados anteriormente sobre la certidumbre u ocurrencias e implicaciones de los sucesos probabilísticos.

5. CAMPOS DE PROBLEMAS

5.1 Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

En la siguiente tabla aparecen los campos de problemas que pretendo enseñar con respecto a la probabilidad, asociados a las técnicas y tecnologías correspondientes.

En el primer campo de problemas trabajaremos los conceptos de fenómeno aleatorio y determinista y en qué podemos diferenciarlos para introducir el concepto de azar y probabilidad. Vamos a promover que el alumno trabaje con fenómenos aleatorios sencillos de comprender como son ejercicios con monedas, fichas de dominó, cartas, perindolas, bolsas con bolas de colores, fichas de dominó, etc.

Con el segundo campo de problemas trabajamos la idea de probabilidad con un sentido frecuencial de forma intuitiva con el problema de la chincheta y planteándose la idea de probabilidad con frecuencia teórica al realizar un ejercicio como “las trampas de Pedro” y empezar a pensar en la idea de que la probabilidad es un cociente de posibilidades. Con el juego de Beano formalizaremos totalmente la idea de cociente entre casos favorables y casos posibles a través de un trabajo lúdico y participativo entre los alumnos. En este campo se realizará una primera aproximación al concepto de probabilidad a partir de los elementos del álgebra de Boole de sucesos aleatorios.

Para el tercero y último campo de problemas introducimos los experimentos compuestos con el problema “los dos dados”. Utilizaremos finalmente los diagramas de árbol y las tablas de contingencia para esquematizar las técnicas de cálculo de probabilidad.

Campo de problemas	Técnicas	Tecnologías
Experimentos deterministas y aleatorios.	Establecer el carácter aleatorio o determinista. Establecer los distintos resultados posibles de un experimento aleatorio.	Definición de sucesos aleatorios y deterministas. Definición de espacio muestral, suceso, tipos de sucesos y operaciones con sucesos.
Idea intuitiva de probabilidad, simulación de un suceso. Probabilidad de un suceso.	Recuento de sucesos. Cociente de sucesos favorables y posibles.	Propiedades de la probabilidad. Regla de Laplace. Probabilidad de uniones e intersecciones de sucesos y de sucesos contrarios.
Experimentos compuestos	Diagrama de árbol y tablas de contingencia	Regla de Laplace. Probabilidad de uniones e intersecciones de sucesos y de sucesos contrarios.

Con las 3 primeras actividades trabajaremos el campo 1 de problemas, con las actividades de la 4 al 10 trabajaremos el campo 2 que, en mi opinión es el que requiere más tiempo ya que es el tema central puesto que contiene la Regla de Laplace y, con las actividades de la 11 al 14, el campo 3.

Las actividades que propongo para aplicar son los siguientes:

Actividad 1

Determina si en los siguientes sucesos actúa el azar o no. En caso de que sí, indica los posibles resultados.

i) Después del relámpago llega el trueno.
ii) Sacar una carta sin mirar de una baraja francesa y saber de qué palo es.
iii) Elegir entre un grupo de personas a una y que ésta tenga menos de 150 años.
iv) Obtener cara al lanzar una moneda.

Soluciones:

i) Es un suceso determinista ya que el metálico pesa más y la gravedad hace que caiga antes. No actúa el azar.

ii) Al no poder mirar no tenemos certeza de cuál sacaremos. El espacio muestral es el siguiente: E.M = {Corazón, Pica, Trébol o Diamante}. Actúa el azar.

iii) Es un suceso determinista ya que, por ahora, ninguna persona es capaz de vivir tantos años. No actúa el azar.

iv) Es un suceso aleatorio porque no sabemos si saldrá cara o cruz. El espacio muestral es el siguiente: E.M: {Cara, Cruz}. Actúa el azar.

Con esta actividad queremos introducir el concepto de experimento aleatorio o determinista sin nombrarlos. Seguidamente al ejercicio, se dará la definición formal y se institucionalizarán los conceptos de experimento determinístico y aleatorio.

Actividad 2

Escoge el número posible de resultados distintos que cabe esperar al realizar los siguientes experimentos:

i) Lanzar tres monedas distintas
   a. 2
   b. 3
   c. 8

ii) Lanzar dos dados distintos
   a. 6
   b. 12
   c. 36

iii) Dejar caer una piedra
   a. 1
   b. 2
   c. Ninguno

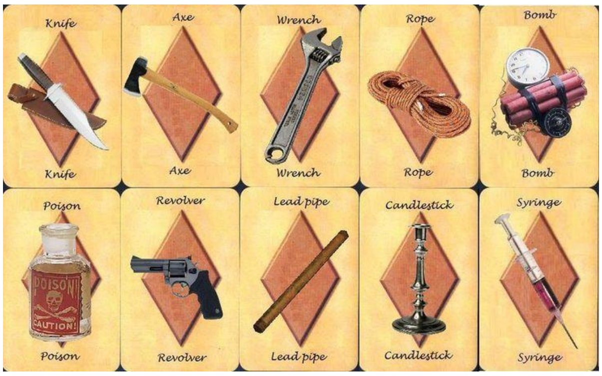
iv) Darle la vuelta a una ficha de dominó
   a. 7
   b. 14
   c. 28

Soluciones: i) c ii) c, iii) a y iv) c.

Con estas dos actividades hemos seguido insistiendo en la idea de suceso aleatorio y determinista. Además, añadimos el trabajo del espacio muestral al que no nombramos formalmente hasta terminar el ejercicio definiéndolo.

Actividad 3: Cluedo.

Enseñamos en el proyector el juego de mesa Cluedo. Les enseñaremos los personajes, las armas y los lugares. Les pedimos que escriban si las condiciones que pide cada afirmación son plausibles a la vez o no.



1) Que el asesino sea hombre y el asesino sea Miss Scarlett.
2) Que el asesinato haya sido en el ala oeste de la casa y en el comedor.
3) Que lleve un complemento en el cuello el asesino y sea Professor Plum.
4) Que el asesinato haya sido en el cuarto de baño, con el veneno y cometido por Reverend Green.
5) Que el asesinato haya sido con la soga y el muerto tenga una herida de bala.
6) Que el asesino tenga barba y sea cura.

Soluciones:

1) Incompatible ya que Miss Scarlett no es un hombre.
2) Compatible ya que el comedor está en el ala oeste.
3) Compatible ya que Plum lleva una pajarita.
4) Compatible ya que no tienen ninguna contradicción.
5) Incompatible ya que la soga no es un arma de fuego.
6) Incompatible ya que el único cura no tiene barba y el único con barba es el marinero.

La idea es la de trabajar con sucesos compatibles e incompatibles a través de una actividad contextualizada en un juego conocido que motive a los alumnos ya que, generalmente, los juegos de mesa son de interés a las edades de los alumnos de 2º de la ESO. En el ejercicio no se da la definición de sucesos compatibles e incompatibles, pero se trabaja y, tras terminar la actividad, el profesor sí que da la definición formal de sucesos compatibles e incompatibles.

Con esta actividad empezamos el trabajo del campo 2 de problemas.

Actividad 4 *Dados y estudiantes* *(Jiménez y Jiménez, 2005)*

Se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en distintos papeles. Cada estudiante selecciona un papel de modo que obtenga una asignación de números: Estudiante A: 1, 2. Estudiante B: 3, 4. Estudiante C: 5, 6. Un estudiante lanza un dado. Se asigna un punto a aquel estudiante que tiene el número que tiene la cara superior del dado. El ganador del juego es aquel que logre primero sumar 5 puntos.

i) Antes de lanzar el dado, ¿cuál de todos los jugadores tiene mayor posibilidad de obtener el punto?

ii) ¿Cuál es el número mínimo de veces que se debe lanzar el dado para obtener un ganador?

iii) ¿Cuál es el número máximo de veces que se debe lanzar el dado para obtener un ganador?

iv) Tras jugar varias veces, ¿has cambiado de opinión respecto al apartado i)?

Repetimos el juego y las cuestiones, pero esta vez con distinta distribución de papeles: Estudiante A: 1, 2, 3. Estudiante B: 4, 5. Estudiante C: 6.

Con esta actividad seguimos insistiendo en la idea de experimento aleatorio, siendo el primero con resultados equiprobables y el segundo con resultados no equiprobables de victoria de los distintos alumnos. El profesor solamente intervendrá para evitar falsas creencias probabilísticas en el apartado i) o en equivocaciones de conteo de resultados en el ii) y iii).

Soluciones: en la primera distribución de papeles

i) Todos tienen las mismas posibilidades. Quizá algún alumno no distinga entre que tener un 5 y un 1 es lo mismo y diga otra solución en función del valor del número.

ii) 5.

iii) 13.

En la segunda distribución

i) El alumno A tiene un 1/2 de probabilidad de victoria, el B 2/6 de probabilidad y el C 1/6.

ii) 5.

iii) 13.

Actividad 5: Lanzamiento de chinchetas

Se le dan diez chinchetas a cada alumno y se les pregunta: “si lanzamos las chinchetas al aire, ¿qué es más probable, que caigan con la punta hacia arriba o que lo hagan con ella hacia abajo?” ¿Qué podríamos hacer para saberlo?

Lo normal es que haya distintas respuestas a la pregunta basadas en los distintos criterios que hayan usado los alumnos para responder. Tras un pequeño debate en clase lo que se espera es que lleguemos a un sentido de frecuencial de la probabilidad y que propongan lanzar un gran número de veces las chinchetas. Además, esta actividad sigue la idea de que la experimentación en la probabilidad es importante para asimilarla. Llegaremos a un sentido frecuencial ya que cada alumno realizará 10 tiradas de 10 chinchetas y un compañero, a su vez, irá apuntando los resultados en una hoja Excel. Al haber tantos lanzamientos la frecuencia se acercará al 50%. Proyectaremos los resultados en un dispositivo audiovisual y los alumnos podrán, ahora sí, debatir los resultados y llegar al sentido frecuencial de la probabilidad.

Actividad 6: ¿Me hace trampas Pedro?

Hemos quedado Pedro y yo para ir al cine como hacemos cada sábado, pero no nos ponemos de acuerdo en qué película ver nunca. Para decidir quién escoge qué película ver decidimos lanzar una moneda 100 veces y si salen más cruces escoge Pedro la película y si salen más caras elijo yo la película. Pedro siempre me pide jugar con su "moneda de la suerte" y empiezo a sospechar que su moneda no está equilibrada porque me parece que escoge demasiadas veces película él. A la vista de la siguiente tabla de los resultados obtenidos las 9 últimas veces que hemos ido al cine, ¿podemos concretar que Pedro me ha hecho trampa?

Número de veces que lanzo 100 monedas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fi de Caras	0.20	0.17	0.10	0.05	0.25	0.27	0.36	0.18	0.21
fi de Cruces	0.80	0.83	0.90	0.95	0.75	0.73	0.64	0.82	0.79

Solución: estamos aún en un momento de la propuesta en el que no calculamos teóricamente las probabilidades (en este caso, la probabilidad teórica de cara y cruz es 1/2) pero sí que a través del problema del martillo de Thor y este de la moneda estamos introduciendo la idea de sucesos equiprobables y sucesos no equiprobables. Esperamos dos tipos de respuestas: aquellas que dicen que si sale muchas veces cruz hay que jugar a que salga cruz por influencia de los resultados anteriores y respuestas que aportan la misma solución, pero con la argumentación de que algo le ocurre a la moneda, que lo normal que después de 900 tiradas es que se acerquen los resultados a 450-450. A través de la idea de frecuencia estamos ya encarando que la probabilidad de un suceso de este tipo es $\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$.

Actividad 7: Beano Natalie Turbiville (2012)

Los alumnos se colocan en grupos de 3 o 4 y se le da a cada uno la siguiente tabla:

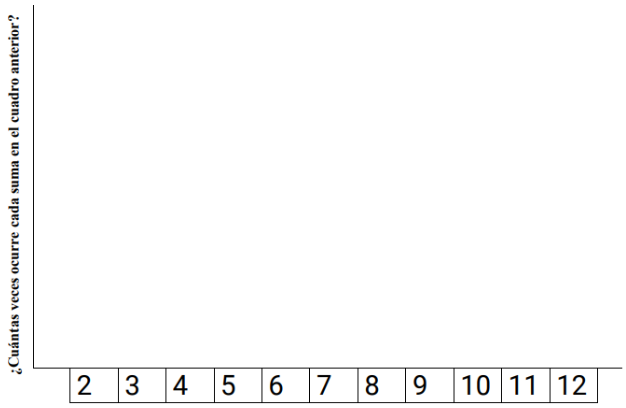
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

A continuación, les damos las siguientes instrucciones:

a) Toma doce trozos de papel y colócalos en la tabla de arriba. Puedes optar por ponerlos todos en el mismo número o extenderlos de forma separada.
b) El encargado de lanzar los dados lanzará una pareja de dados y dirá en voz alta la suma de los dos. Si tienes un trozo de papel debajo de uno de los números de la tabla lo dices y lo apartas de la tabla.
c) Gana el primer jugador que retira sus trozos de papel.

Después de jugar varias partidas, tienen que rellenar la tabla y el gráfico siguiente:

	1	2	3	4	5	6
1	2					
2						
3						
4						
5		7				
6						12



Y finalmente, les hacemos las siguientes preguntas:

a) Según el gráfico, ¿qué resultado es más probable? ¿Cuál es la probabilidad de tirar los dados y obtener esa suma?
b) Durante el juego real, ¿qué resultados aparecieron con más frecuencia?
c) Describe la forma en la que cambió tu estrategia en el transcurso del juego.
d) Después de este juego, ¿qué significa la probabilidad para ti? Si quieres ganar, ¿cómo debes organizar tus trozos de papel para que coincidan con tu gráfico?

Con este juego, ya introducido el concepto de suceso aleatorio, lo que queremos es profundizar en el de probabilidad de un suceso. Un suceso aleatorio puede tener varios resultados, pero no sabemos cuál va a producirse de una forma segura. Lo que debemos ver es que hay resultados más factibles (probables) que otros. Con este juego queremos hacerles ver una forma de introducir la regla de Laplace de forma lúdica.

Actividad 8

Tenemos 2 dados distintos que lanzamos. Calcula la probabilidad de:

a) La suma de los dados sea menor que 7.
b) La suma sea mayor o igual que 7.
c) La suma sea par.
d) Los dos dados caigan con el mismo número.
e) Probabilidad de que la suma sea 13.

Soluciones:

a) $P(> 7) = \frac{15}{36}$.

b) $P(\leq 7) = 1 - P(> 7) = 1 - \frac{15}{36} = \frac{21}{36}$

c) $P(suma\ par) = P(par\ los\ dos\ dados) + P(impar\ los\ dos\ dados\ =)\frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{1}{2}$

d) $P(mismo\ número) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

e) $P(13) = 0$

Con este ejercicio, habiendo ya dado la definición de probabilidad con el juego de Beano queremos que calculen probabilidades haciendo conteo en el espacio muestral de las posibilidades que se ajustan a la pregunta planteada y apliquen la regla de Laplace.

Actividad 9

De los 30 alumnos de una clase, hay alumnos que practican fútbol y baloncesto a la vez, otros sólo fútbol, otros solamente baloncesto y otros ninguno de los dos deportes. 17 dijeron que practican el fútbol, y 14, el baloncesto. 5 dicen que practican ambos y el resto que ninguno. Si elegimos aleatoriamente un alumno de clase calcula la probabilidad de:

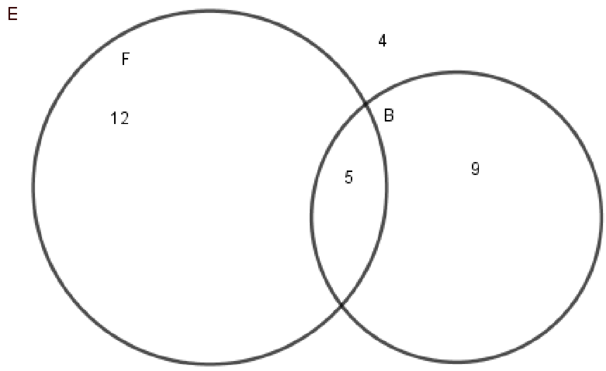
A) Que practique fútbol.
B) Que practique baloncesto.
C) Que no practique ninguno.
D) Que practique fútbol, pero no baloncesto.
E) Que practique baloncesto o fútbol.
F) Que practique ambos.

Los alumnos recibirán la siguiente consigna: "antes de plantear el problema numéricamente realizad un gráfico para saber qué hacen los alumnos de esta clase en relación con los dos deportes".

Solución: consideramos F = "practicar fútbol" y B = "practicar baloncesto".

Utilizaremos el diagrama de Venn, concepto que los alumnos no conocen y, posiblemente, ante el probable desconcierto que haya entre los alumnos el profesor deba introducirlo, para calcular cuántos practican sólo cada uno de los deportes. Ya que hay en clase 5 que hacen los 2 deportes y 17 que practican fútbol, 12 practican sólo fútbol.

Con el baloncesto al ser 14 que lo practican quedan 9 que hacen sólo baloncesto. Así, que practiquen deporte hay 26 y, por tanto, 4 que no hacen ninguno.



a) P(F) = $\frac{17}{30}$
b) P(B) = $\frac{14}{30}$
c) P((F ∪ B)^c) = $\frac{4}{30}$
d) P (F ∩ B^c) = $\frac{12}{30}$
e) P (F ∪ B) = $\frac{26}{30}$
f) P (F ∩ B) = $\frac{5}{30}$

Actividad 10

Sean los siguientes sucesos

A={2,4,6} B={1,3,5}

C={1,2} D={1,2,3,4}

E={4,5,6} F={1,2,3,6}

G={1,3}

Calcula: A ∪ B, E ∪ B, A ∩ F, C ∩ G, D ∩ B

Solución: A ∪ C= {1,2,4,6}

E ∪ B = {1,3,4,5,6}

A ∩ F = {2,6}

$C \cap G = \{1\}$

$D \cap B = \{1,3\}$

Con los siguientes problemas queremos trabajar el tercer campo de problemas: experimentos compuestos.

Actividad 11: el tran-tran (Barredas, 2008, p.197)

En la mesa del feriante hay cuatro dados de colores distintos. También es distinta la puntuación de cada una de sus seis caras.

ROJO 4 4 4 4 4 4 AZUL 8 8 2 2 2 2

VERDE 7 7 7 1 1 1 AMARILLO 6 6 6 6 0 0

El juego que propone el feriante es el siguiente: "Elije un dado. El que tú quieras. Yo elegiré otro. Ponemos un euro cada uno encima de la mesa. Tú tiras tu dado. Yo, el mío. Gana los dos euros el que saque mayor puntuación en su dado".

¿Te parece un juego justo?

Solución: no es un juego justo, para cada que escoja el jugador el feriante puede escoger otro dónde la probabilidad de sacar un número mayor que el jugador sea superior a la de éste.

Jugador	Feriante
Rojo	Amarillo (2/3 de probabilidad de victoria)
Azul	Rojo (2/3 de probabilidad de victoria)
Verde	Azul (5/6 de probabilidad de victoria)
Amarillo	Verde (5/6 de probabilidad de victoria)

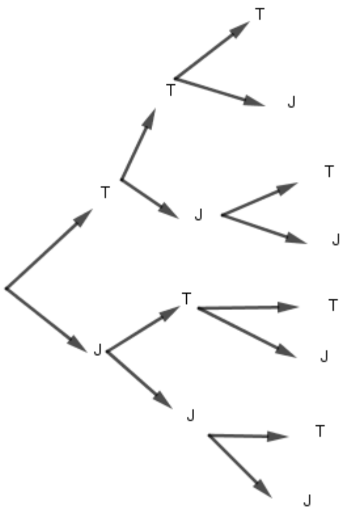
Con este problema queremos trabajar la regla de Laplace de una forma amena para los alumnos, precisando siempre el espacio muestral.

Actividad 12: Reparticiones (Barredas, 2008, p.200)

Jimmy y Telma están en plena partida de un juego donde se tienen que conseguir 6 puntos para ganar, y en el que cada uno de los jugadores tiene las mismas oportunidades para vencer en una ronda y llevarse un punto. Jimmy está ganando por 5 a 3, cuando llega la policía y se interrumpe la partida. ¿Cómo deberán repartirse las apuestas depositadas?

Solución: Problema propuesto por Fibonacci (1180-1250 en su Liber Abaci, mal resuelto por Luca Pacioli (1445-1514), que sostenía que la repartición debería ser de 5 a 3, cuando, realmente, debe ser de 7 a 1. Repartir 5 a 3 es, quizás, lo primero que le viene a uno a la cabeza. En esta respuesta no influye el número de partidas que hay que ganar (6, en este caso).

El máximo de partidas que les quedaría por jugar sería 3. Se trata de escribir en un diagrama de árbol todas las posibilidades (contando incluso con aquéllas en las que la partida habría acabado), y contar cuántas favorecen a cada uno.



En 7 de las 8 combinaciones posibles de resultados Telma gana al menos una partida y por tanto gana el juego, así que el reparto debería ser 7 a 1.

Actividad 13: Interpretando las tablas de contingencia (Batanero, 2015 , p.2)

La tragedia del Titanic se ha hecho famosa por películas y exposiciones como la existente en Belfast. Según la tabla que aparece después, calcula:

1. La proporción global de supervivientes.

2. Analizar si la "normal moral" de salvar primero a las mujeres (y niños) se cumplió en este caso.

	Sobrevive	No sobrevive	Total
Mujer	308	154	462
Varón	143	708	851
Total	451	862	1313

Soluciones:

1. $\mathrm{P(Sobrevivir)} = \frac{supervivientes}{pasajeros} = \frac{451}{1313} = 0.343$
2. $P(Sobrevivir\ siendo\ mujer) = \frac{supervivientes\ mujeres}{pasajeros\ mujeres} = \frac{308}{462} = 0.667$

$$P(Sobrevivir\ siendo\ hombre) = \frac{supervivientes\ varones}{pasajeros\ varones} = \frac{143}{851} = 0.168$$

Por lo que por cada varón que sobrevive hay 4 mujeres que sobreviven. Podemos suponer que la "normal moral" se cumplió en el Titanic.

Algunos alumnos podrían representar los datos en un diagrama de barras adosado (Figura 1) para visualizarlos con más claridad. El gráfico muestra que hubo más mujeres supervivientes que ahogadas y al contrario entre los varones. Pero al ser el número de hombres y mujeres diferentes, se dificulta la comparación. Se les puede hacer observar que casi 3 de cada 4 mujeres se salvaron y hombres alrededor 1 de cada 8; estas razones deberían ser iguales o parecidas, en caso de no preferencia.

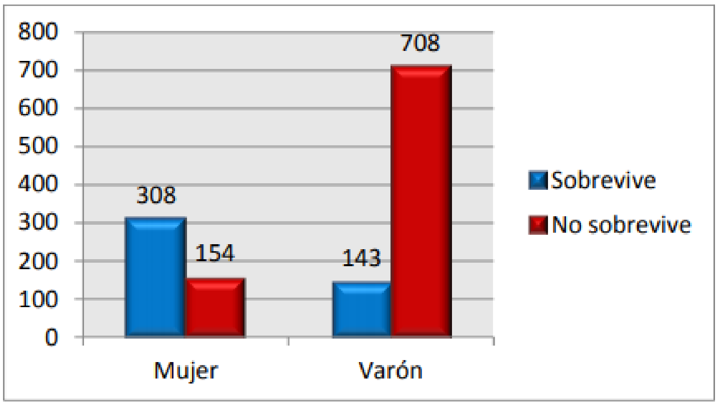


Figura 1. Supervivencia de mujeres y hombres en el Titanic

El diagrama en árbol (Figura 2) ayuda a visualizar el hecho de que de todos los que sobreviven la mayoría son mujeres también.

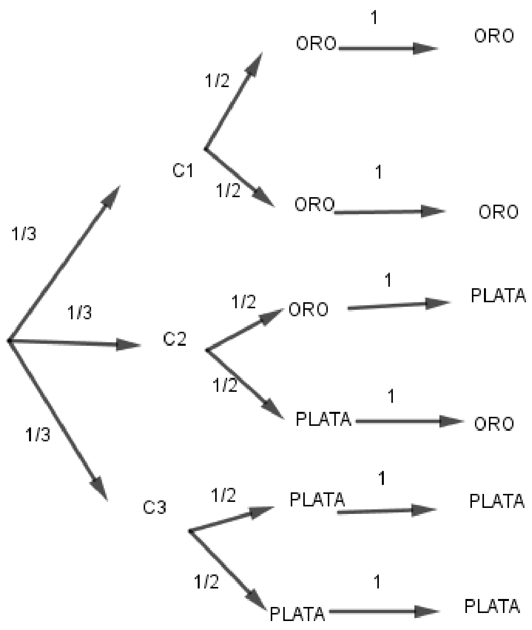
Figura 2. Diagrama en árbol representando los datos

Con este problema queremos trabajar el uso de tablas de contingencia, pero también queremos que el alumno se planteé distintas formas de visualización de los resultados. Con las figuras 1 y 2 damos dos ejemplos en los que el alumno puede verse más cómodo para luego plantear las probabilidades de supervivencia.

Actividad 14: La Paradoja de la Caja de Bertrand (Batanero, 2011, p.3)

Tenemos tres cajas y cada caja tiene dos cajones con una moneda cada uno: una caja contiene dos monedas de oro, otra caja dos monedas de plata, y la caja final con una de cada tipo. Después de elegir una caja al azar se toma un cajón al azar, y resulta por ejemplo que contiene una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también sea de oro?

Solución: Una solución correcta del problema se obtiene intuitivamente con ayuda de un diagrama de árbol. Un primer paso consiste en elegir al azar una de tres cajas con la siguiente composición Caja 1: (ORO, ORO), Caja 2: (ORO, PLATA), Caja 3: (PLATA, PLATA). El segundo paso consiste en abrir uno de los cajones, donde se pueden encontrar los casos representados en la segunda división en ramas del árbol. El tercer paso consiste en ver el tipo de moneda que queda en la caja, cuando se ha abierto uno de los cajones.



El enunciado nos pone una condición (una de las monedas es de oro) y, por tanto, nos pide una probabilidad condicional. Así, quedan tres posibilidades equiprobables (como observamos en las ramas finales del árbol):

• Que hayamos tomado la única moneda de oro en la caja (ORO, PLATA); en este caso, la otra moneda que queda en la caja es la de plata.

• Que hayamos tomado la primera moneda de oro en la caja con dos monedas de oro; en este caso, la otra moneda es de oro.

• Que hayamos tomado la segunda moneda de oro en la caja con dos monedas de oro; en este caso, la otra moneda también es de oro.

Dicho de otro modo, tenemos dos casos en que la caja elegida sea la (ORO; ORO) si la moneda observada es de oro y solo uno de que la caja sea (ORO; PLATA). En consecuencia, sabiendo que una moneda es de oro, la probabilidad de que la otra sea de oro es el doble (2/3) que la probabilidad de que sea de plata (1/3).

6. TÉCNICAS

A partir de la resolución de las actividades propuestas en el apartado "campo de problemas" van a ir apareciendo las diferentes técnicas.

En el campo de problemas 1 aparecen las técnicas de construcción del espacio muestral, establecimiento de sucesos (aleatorios y deterministas).

En el campo de problemas 2 aparecen técnicas de recuento de casos posibles y favorables y mediante frecuencias. A ello van asociada la tecnología de la Regla de Laplace y las propiedades de la probabilidad, entre otras. Cuando en el campo de problemas 2 hayamos introducido la probabilidad como límite de frecuencias relativas estaremos trabajando la técnica de cálculo de frecuencias relativas.

En este mismo campo cuando se introduzca el álgebra de Boole de sucesos aleatorios se van a trabajar las técnicas de la unión e intersección de sucesos compatibles e incompatibles, y la técnica de hallar el suceso complementario de uno dado.

En el campo de problemas 3 se introducen las técnicas de diagramas de árbol y tablas de contingencia.

6.1 Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Todas las técnicas usadas en cada uno de los campos de problemas propuestos anteriormente son adecuadas para que el alumno está capacitado para aprender los conceptos probabilísticos y resolver los distintos problemas y juegos propuestos.

7. TECNOLOGÍAS

7.1 ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

Comenzaremos con las ideas preconcebidas por los alumnos sobre el azar, como una forma de hablar de la probabilidad de una forma intuitiva. Aquellas ideas preconcebidas tanto correctas como erróneas serán usadas como herramientas de introducción del objeto matemático.

Inicialmente, nos hemos marcado como objetivo diferenciar entre fenómenos deterministas y aleatorios. Se justificará definiendo experimento aleatorio como aquel que, sabiendo las posibles soluciones, manteniendo las condiciones iniciales, no es posible predecir el resultado.

Para determinar dichos resultados de un experimento aleatorio acudiremos a la definición de espacio muestral como el conjunto formado por todos los resultados posibles del experimento aleatorio. Esos resultados serán los sucesos que definiremos como cada uno de los casos posibles que pueden darse en un fenómeno aleatorio.

Dentro de los distintos tipos de sucesos hablaremos de sucesos imposibles, seguros, contrarios, compatibles e incompatibles. Un suceso seguro es aquel que contiene todo el espacio muestral, un suceso imposible es el caso contrario, cuando el suceso no contiene ningún elemento del espacio muestral. Suceso contrario a un suceso A lo forman los elementos del espacio muestral que no están en A. Cuando dos sucesos tienen algún suceso elemental en común se dice que son compatibles y si no, incompatibles.

Finalmente hablamos de los dos tipos de sucesos en función de su probabilidad: equiprobables y no equiprobables. Diremos que un espacio muestral es equiprobable si todos los elementos que lo conforman tienen igual oportunidad de ser elegidos y, en consecuencia, tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Para hablar más formalmente de la probabilidad acudiremos a la idea de frecuencia relativa y de cómo cuanto más se repite un experimento más se acerca la frecuencia de los resultados del experimento a la frecuencia teórica y por tanto a la probabilidad del suceso.

La probabilidad es la mayor o menor posibilidad de que ocurra un determinado suceso. En otras palabras, su noción viene de la necesidad de medir o determinar cuantitativamente la certeza o duda de que un suceso dado ocurra o no. Introduciremos la regla de Laplace es tremendamente importante, puesto que nos permite calcular la probabilidad de un suceso, siempre que los sucesos elementales sean equiprobables, es decir, que todos los resultados posibles tengan la misma probabilidad. En estas condiciones, tenemos que:

La probabilidad de un suceso se obtiene dividiendo el número de resultados que forman el suceso A entre el número de resultados posibles.

Trataremos también las operaciones con sucesos: la unión de sucesos, denotada $A \cup B$, que implica que se da A o B o ambos sucesos, la intersección, denotada $A \cap B$, que implica que se dan los sucesos A y B a la vez y la probabilidad de dichas operaciones.

7.2 ¿ Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

La responsabilidad de justificarles siempre va a ser asumida casi totalmente por el profesor al formalizar los conceptos. No obstante, los alumnos con las actividades propuestas deben ser capaces de razonar o de tener una idea estructurada de las técnicas a través de la experimentación y resolución de las diferentes actividades. Los alumnos con sus aportaciones a las explicaciones dadas por el profesor también ayudarán a justificar las técnicas de una forma comprensible al resto de alumnos.

7.3 Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

La institucionalización de todos los conceptos tiene que partir de la intuición del alumno y de las actividades de simulación propuestas ya que, en mi opinión y observación, es la forma en la que el alumno mejor comprende los sucesos probabilísticos. A la intuición y las actividades de simulación le tiene que acompañar la consiguiente formalización por parte del profesor para que las ideas que el alumno tiene con respecto a la probabilidad sean asentadas correctamente. Para ello realizará las necesarias explicaciones en pizarra y debatiendo las respuestas de los ejercicios propuestos.

La intuición del alumno será fomentada a través de ejercicios simples en los que tengan que hacer suposiciones respecto a ideas teóricas de la probabilidad, juegos colaborativos que fomentan que compartan sus ideas y conocimientos de la probabilidad. También será reforzada con problemas de cálculo de probabilidades o de encontrar espacios muestrales de experimentos aleatorios. Finalmente, para formalizar esa intuición del alumno el profesor institucionalizará los conceptos mencionados en el apartado "tecnologías" para que los alumnos acaben con una correcta formación probabilística.

7.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología usada consiste en la proposición de distintas preguntas que hagan reflexionar a los alumnos sobre las ideas preconcebidas que tenían, que experimenten a través de juegos sobre la idea de probabilidad de una forma lúdica, que se cuestiones a través de los distintos problemas sobre los resultados obtenidos en los mismos. El profesor en todo momento será el que oriente el camino del aprendizaje e institucionalice los conceptos del objeto matemático.

Para los problemas y juegos los alumnos trabajarán de forma individual o por grupos en función de la actividad y de si se busca la reflexión personal o la colaboración para formar o consolidar ideas respecto a los conceptos de la probabilidad que aprenden. En el caso de las actividades individuales tras su realización los alumnos pondrán en común sus distintas respuestas y gracias a las posibles diferentes contestaciones podrán cambiar o reforzar su conocimiento de la materia.

8. SECUENCIACIÓN Y CRONOLOGÍA

8.1 Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

La unidad didáctica se dividirá en 9 sesiones: 6 para explicar los conceptos teóricos y trabajarlos a través de problemas y juegos, una sesión para hablar de los juegos de azar y de repaso, una para el examen y una última para la corrección de éste y la entrega de notas.

Cada sesión tiene la duración de una clase normal de instituto: 55 minutos.

Sesión 1

La primera sesión es una sesión que utilizaremos para hablar de ideas preconcebidas en probabilidad e intentar desmitificarlas y dar una razón de ser con respecto a la cotidianidad de la probabilidad

Las siguientes preguntas que les haremos serán las siguientes:

1. Si fueras a comprar lotería, ¿cuál elegirías el 11111 o el 12472?
2. Lanzamos 8 veces una moneda, se trata de sacar 7 caras seguidas y una cruz al final o de sacar 5 caras seguidas y 3 cruces seguidas, en este orden. ¿Cuál te parece más probable?

Con esto intentamos que el alumno aprenda a admitir la validez de un argumento porque es deducido de acuerdo con las reglas de juego de las matemáticas, aunque éste no coincida con lo que él piensa. En definitiva, que reconozca que no todo lo intuitivamente aceptable siempre es válido desde el punto de vista formal.

Proseguiremos con la visualización de 2 vídeos en los que la probabilidad aparece en situaciones más o menos posibles de nuestra vida diaria.

En el primer vídeo se habla de la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día.

Enlace al vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=9LNLBEm3wow

En el segundo, habla de cómo las casualidades en realidad son probabilidades.

Enlace al vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=6pSmv0Qmckc

Comentaremos que han entendido de los vídeos y qué pensaban antes y después de esta sesión.

Para terminar se les pedirá que realicen en casa el primer ejercicio para que hagan una primera reflexión sobre aquellos sucesos en los que interviene el azar y en los que no para, al día siguiente formalizar la idea de suceso aleatorio y determinista. Implícitamente en la actividad se trabaja el concepto de espacio muestral también pero no lo definiremos hasta terminar la actividad 2.

Sesión 2

En esta sesión queremos institucionalizar los conceptos de sucesos aleatorios y deterministas, espacio muestral y sucesos compatibles e incompatibles.

Al comenzar la sesión los alumnos, levantando la mano para poder responder, dirán sus respuestas al ejercicio. En el caso de que algún alumno no respondiera correctamente dejaremos que sea otro compañero el que justifique la respuesta correcta. Tras ello, definiremos los experimentos aleatorios y deterministas.

Seguidamente enunciaremos el ejercicio 2 en el que se trabaja el espacio muestral. Los alumnos al terminar el ejercicio dirán sus respuestas y, al igual que en el primer ejercicio, si hay alumnos que responden incorrectamente serán sus propios compañeros los que lo sacarán de su error. Tras terminar la ronda de respuestas definiremos el concepto de suceso y espacio muestral. Volveremos un momento al ejercicio 1 y les preguntaremos si ahora podrían identificar los sucesos y espacio muestral de los apartados aleatorios.

Para acabar, trabajaremos el problema 3 con el que trabajamos las definiciones de sucesos compatibles e incompatibles sin nombrarlos explícitamente. Tras los alumnos dar las soluciones, como en los anteriores ejercicios, si alguna respuesta es incorrecta los compañeros las corregirán. Después, se les pedirá más ejemplos de sucesos que pueden ocurrir a la vez y de sucesos que no. Para acabar se les explica que esos sucesos que pueden ocurrir a la vez son los compatibles y los que no, incompatibles.

Con estas dos sesiones damos por trabajado el campo 1 de problemas.

Sesión 3

En esta sesión introducimos el campo 2 a través de la experimentación, clave para que los alumnos comprendan la probabilidad.

En esta sesión realizaremos la actividad 4 "de los dados" para que los alumnos experimenten y consideren por primera vez el trabajo con posibilidades para introducir el concepto de probabilidad como un término en el que las posibilidades favorables y totales están presentes.

Para terminar la sesión realizaremos la actividad 5 con chinchetas para introducir la frecuencia como concepto de probabilidad. En la siguiente sesión con el problema de Pedro y el cine se formalizará el concepto de frecuencia y probabilidad.

Sesión 4

En esta sesión haremos el ejercicio 6 de las trampas de Pedro. Nos permitirá seguir hablando de lo que ocurre en el mundo en el que vivimos y la probabilidad, enseñándoles que lo que llamamos raro es en términos matemáticos poco probable y que lo común es lo que tiene una probabilidad alta de ocurrir o existir. Uno de los ejemplos sobre raro (o poco probable) que podríamos enseñar es el del porcentaje de rubios nacidos en España (https://www.20minutos.es/noticia/3143139/0/mapas-mundo-personas-pelo-rubio-ojos-claros/). Se propondrá a los alumnos que den sus propios ejemplos de sucesos poco probables de ver y los buscaremos en el ordenador (por ejemplo, de que te caiga un rayo encima).

Tras ello, el profesor formalizará el concepto de frecuencia relativa como probabilidad.

El grueso de la sesión recaerá en el problema de Beano con el que los alumnos trabajaran la definición de probabilidad como cociente de posibilidades favorables entre posibilidades totales. Además, seguimos reforzando la idea de espacio muestral y trabajamos el conteo de sucesos para calcular probabilidades.

Tras terminar el juego el profesor definirá formalmente la probabilidad como ese cociente: la regla de Laplace.

Sesión 5

En esta sesión trabajaremos principalmente la regla de Laplace con el ejercicio 8.

En ambos, trabajaremos el conteo de posibilidades favorables y totales en el espacio muestral.

Para terminar la sesión haremos el ejercicio 9 y 10 en el que trabajamos del nuevo el campo 1 con las operaciones entre sucesos (intersección, etc.). Al no haber definido el diagrama de Venn ni los conceptos de operaciones con sucesos puede haber múltiples representaciones a la pista dada en el ejercicio.

Si al observar el trabajo de los alumnos vemos que no encaminan correctamente el ejercicio 9 ya que no hemos comentado los conceptos iremos explicando a la vez que realizamos el ejercicio en la pizarra las definiciones de intersección, unión, complementario y diagrama de Venn.

Sesión 6

Para introducir el campo 3 de problemas trabajaremos el problema 11 del "tran-tran" en el que tienen que considerar opciones múltiples de elección. Con el problema 12 ahondaremos en el trabajo de los diagramas de árbol. El profesor les preguntará a los alumnos cómo harían la repartición del problema 12 de forma intuitiva. Como seguro que hay respuestas del tipo 5 3, uno de los alumnos que haya respondido erróneamente realizará con la ayuda del profesor un esquema en la pizarra, que resultará ser el diagrama de árbol, con el que se verá que el reparto es distinto al que pensaba.

Posteriormente, para trabajar las tablas de contingencia haremos el problema de los supervivientes del Titanic. Los alumnos trabajarán primero sin ayuda del profesor para observar los diferentes planteamientos que pueden dar los alumnos, pero luego el profesor formalizará el trabajo de las tablas y el cálculo de las probabilidades de sucesos compuestos.

Sesión 7

Para terminar el trabajo de los conceptos a través de los campos de problemas los alumnos harán con la guía del profesor el último problema para observar si son capaces de trabajar con diagramas de árbol .

Con lo que quedará de sesión queremos reforzar el trabajo hecho con las actividades a través de una presentación[1] de cómo funcionan los juegos de casino y del por qué no deben apostar nunca en ellos como refuerzo del estudio hecho en clase y concienciación de la importancia de no jugar a juegos de azar.

	CASOS FAVORABLES	CASOS POSIBLES	PROBABILIDAD	CUOTA	ESPERANZA
PLENO	1	37	0,03	36	-0,03
SEMIPLENO	2	37	0,05	18	-0,03
CALLE	3	37	0,08	12	-0,03
ESQUINA	4	37	0,11	9	-0,03
LINEA	6	37	0,16	6	-0,03
COLUMNA	12	37	0,32	3	-0,03
DOCENA	12	37	0,32	3	-0,03
PAR/IMPAR	18	37	0,49	2	-0,03
COLOR	18	37	0,49	2	-0,03
ALTA/BAJA	18	37	0,49	2	-0,03

Para finalizar las sesiones de teoría y problemas lo que quede de clase lo utilizaremos para hacer un pequeño resumen de lo estudiado y responder a las dudas que tengan los alumnos antes de la sesión del examen.

Sesión 8

Realización del examen escrito de evaluación.

Sesión 9

Entrega de las notas y corrección grupal del examen.

[1] Gráfico utilizado cuenta con la autorización de su autor Ayose Iturralde.

9. EVALUACIÓN

9.1 Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

El examen será realizado de forma individual y tendrá de duración el tiempo de una clase cualquiera. Tendrán que poner su nombre, apellidos y número de clase en cada hoja que usen y en el caso de que utilicen más de una numerarlas para no dar pie a supuestas pérdidas de hojas. Al terminar el examen tendrán que entregar la hoja de enunciados, las hojas de respuestas y la de operaciones.

Ejercicio 1 (1 punto): responde si son aleatorios o deterministas los siguientes hechos. Justifica el porqué de tu respuesta.

a) Acertar el número de la lotería.
b) Abrir un libro justo por la página 100.
c) Sacar una patata frita de una bolsa de Doritos.
d) El sexo de nacimiento de un bebé.
e) Cantar las cuarenta jugando al guiñote.

Ejercicio 2 (1.8 puntos): define el espacio muestral de los siguientes experimentos:

a) Lanzar tres monedas.
b) Lanzar tres dados y anotar la suma de los números obtenidos.
c) De una urna con 5 bolas, 1 es roja, 2 son azules y 2 son verdes, sacar 2 bolas a la vez. Las bolas del mismo color son indistinguibles.

Ejercicio 3 (2.5 puntos): Rafael y Carlos están jugando a los dados. Rafael gana si al lanzar dos dados la multiplicación de los números es par, mientras que Carlos gana si es impar.

a) ¿Es justo el juego? ¿Por qué?
b) Si en lugar de multiplicar los dados los sumáramos, ¿sería justo? ¿Por qué?

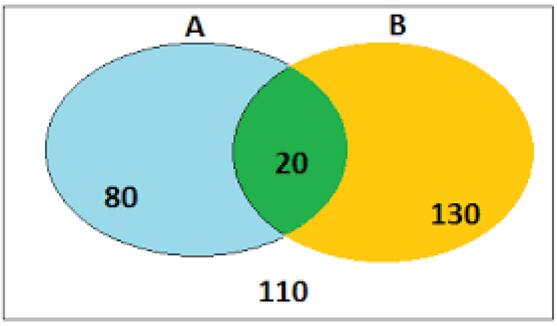
Ejercicio 4 (0.8 puntos): En el experimento que consiste en extraer una carta de baraja española, se consideran los siguientes sucesos:

A = "Salir un as" B = "Salir una copa"

C = "Salir un rey" D = "Salir una figura"

Relaciona los cuatro sucesos dos a dos y, para cada emparejamiento, indica si las parejas de sucesos son compatibles o incompatibles.

Ejercicio 5 (1.5 puntos): dado el siguiente diagrama de Venn del instituto en el que estamos, responde a las cuestiones:



Donde el azul representa los alumnos con Playstation y el amarillo con Xbox.

a) Cuál es la probabilidad de al sacar un alumno al azar tenga Playstation.
b) Cuál es la probabilidad de al sacar un alumno al azar tenga Xbox, pero no Playstation.
c) Cuál es la probabilidad de al sacar un alumno tenga video consola.
d) Cuál es la probabilidad de al sacar un alumno no tenga video consola.

Ejercicio 6 (0.9 puntos): respecto al ejercicio 5, ¿qué representan las siguientes operaciones con sucesos si A = "Tener Playstation"B= "Tener Xbox"?

a) $A \cap \mathrm{B}$
b) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$
c) $(A \cap \mathrm{B})^c$

Ejercicio 7 (1.5 puntos): Pedro y Javier quieren jugar a lanzar 3 monedas a la vez, pero antes de apostar por algún resultado deciden analizar todos los posibles resultados y predecir la probabilidad de cada uno de ellos. Como juego, Pedro dice que pueden hacerlo un millón de veces y ver quién gana. Javier, que sabe algo de probabilidad quiere plantear un diagrama de árbol para conocer el juego y tener más opciones de ganar a Pedro ¿Cómo tendrá que distribuir sus respuestas Javier tras hacer el diagrama de árbol?

9.2 ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Ejercicio 1: evaluaremos el campo de problemas correspondiente a determinar sucesos aleatorios y deterministas.

La técnica que usaremos es definir el carácter aleatorio o deterministas.

La tecnología, la definición de aleatorio y determinista.

Ejercicio 2: evaluaremos el campo de problemas respecto a la determinación de un espacio muestral.

La técnica es representación de los distintos posibles resultados.

La tecnología, la definición de espacio muestral y suceso.

Ejercicio 3: evaluaremos el campo de problemas correspondiente al espacio muestral y al cálculo de probabilidades.

La técnica es la representación del espacio muestral y el conteo de las posibilidades.

La tecnología, la definición de espacio muestral, suceso y probabilidad.

Ejercicio 4: evaluaremos en el campo de problemas del espacio muestral los sucesos compatibles e incompatibles.

La técnica es la identificación de los resultados posibles.

La tecnología, la definición de suceso compatible e incompatible.

Ejercicio 5: evaluaremos el campo de problemas de cálculo de probabilidades.

La técnica es la interpretación de un diagrama de Venn y el cálculo de la probabilidad.

La tecnología, la definición de probabilidad.

Ejercicio 6: evaluaremos dentro del campo del espacio muestral las operaciones con sucesos.

La técnica es la comprensión de las operaciones con sucesos.

La tecnología, la definición de intersección, unión, etc.

Ejercicio 7: evaluaremos el campo de problemas de sucesos compuestos.

La técnica es la creación de un diagrama de árbol y el cálculo de la probabilidad.

La tecnología es la definición de probabilidad y la de diagrama de árbol.

9.3 ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Ejercicio 1:

a) Aleatorio ya que el número que salga depende del azar.
b) Aleatorio ya que al no poder mirar la página es un hecho poco probable y no seguro.
c) Determinista ya que siempre de una bolsa de Doritos sacaremos una patata frita.
d) Aleatorio ya que depende de los cromosomas.
e) Aleatorio ya que depende de las cartas tuyas, del resto de jugadores y de las que se roban y el palo del triunfo.

El ejercicio es bastante sencillo por lo que espero que sea una pregunta sin fallos ya que trata sobre la base de la probabilidad, distinguir qué es aleatorio y qué no.

Ejercicio 2:

a) Si C es sacar cara y X es sacar cruz el resultado esperado es:

$$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XXX, XXC, XCC, XCX\}$$

b) La suma de 3 dados va del 3 al 18 por lo que el resultado es:

$$\Omega = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$$

c) Si R es sacar bola roja, A azul y V verde, al sacarlas a la vez no hay distinción entre RV y VR, por ejemplo. Así que la respuesta es:

$$\Omega = \{RA, RV, AA, AV, VV\}$$

Es un ejercicio en el que espero errores sólo en el apartado c) ya que hay sólo una bola roja y puede llevar a escribir sin pensar como respuesta “RR” o errores de equivocarse al no tener en cuenta que se sacan a la vez las bolas y que dupliquen resultados al escribir “ RV y VR”, por ejemplo.

Ejercicio 3:

El apartado a) puede llevar de un tiempo largo realizarlo a hacerlo en un minuto. Si el alumno se da cuenta de que no hace falta escribir toda la tabla del espacio muestral verá que el juego no es justo con el simple hecho de ver que:

Par*Par=Par Par*Impar=Par

Impar*Par =Par Impar*Impar=Impar

De forma que 3 de cada 4 resultados saldrá par y 1 de cada 4 será impar y por lo tanto no es justo.

El error que veo más factible en este apartado es que a la hora de hacer las posibles combinaciones de multiplicaciones es que se dejen alguna sin hacer y por tanto falseen el resultado correcto.

Producto	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

En el apartado b) espero una mayor tasa de éxito ya que los resultados posibles al hacer conteo son más fáciles de visualizar y no perder ninguno. Con un argumento parecido al primero podemos llegar a:

Par+Par=Par

Impar+Impar=Par

Par+Impar=Impar

Impar+Par=Impar

Y por lo tanto el juego es justo ya que es la probabilidad de cada suceso es de $\frac{1}{2}$.

Suma	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ejercicio 4:

A con B es compatible

A con C o con D son incompatibles

B con C y D son compatibles

C con D es compatible

Los posibles errores tendrán que ver con un incorrecto conocimiento de lo que significa compatibilidad.

Ejercicio 5:

a) $P(\text{Tener playstation}) = \frac{80}{300} = \frac{4}{15}$

b) $P(\text{Tener Xbox sólo}) = \frac{110}{300} = \frac{11}{30}$

c) $P(\text{Tener video consola}) = \frac{190}{300} = \frac{19}{30}$

d) $P(\text{No tener video consola}) = 1 - \frac{190}{300} = \frac{11}{30}$

Los errores que pueden darse en este ejercicio se espera que estén en la interpretación del diagrama al no saber diferenciar qué representar tener una o las dos video consolas.

Ejercicio 6:

a) Alumnos con Playstation yXbox.
b) Alumnos con Playstation o Xbox.
c) Alumnos sin las dos consolas.

Los posibles errores vendrían derivados del desconocimiento de los símbolos de intersección, unión y complementario.

Ejercicio 7:

Este ejercicio consiste en dibujar el diagrama de árbol de 3 lanzamientos de una moneda de forma que lleguen a que la probabilidad de que salgan 3 caras es de 1/8, de 3 cruces 1/8, de 2 caras y 1 cruz de 3/8 y de 2 cruces y 1 cara de 3/8 también. Al ser un número de lanzamientos tan grande lo que queremos es que respondan que jugarían de acuerdo con la probabilidad teórica ya que lo normal es que el experimento se acerque bastante a la probabilidad teórica.

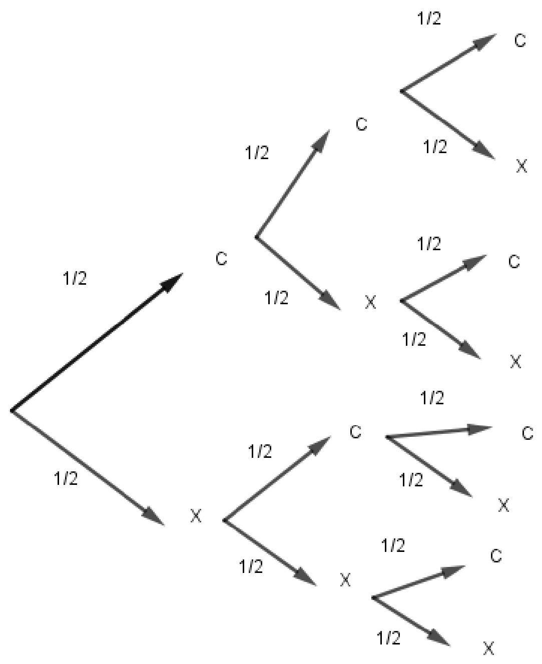


Diagrama de árbol del experimento

Los posibles errores vendrán a la hora de no saber cómo hacer el diagrama y equivocarse en las posibles combinaciones de resultados. Con respecto a la justificación teórica los errores pueden venir con que los alumnos no diferencien entre el espacio muestral y sus probabilidades y respondan cosas del tipo "como hay cuatro opciones distintas hay un 25% de probabilidad de cada resultado y por tanto jugaría al 25-25-25-25".

9.4 ¿ Qué criterios de calificación vas a emplear?

Ejercicio 1: cada apartado valdrá igual, 0.2. Al ser un ejercicio tan simple no hay términos medios en poder dar otra nota que no sea un 0.2 o un 0.

Ejercicio 2: cada apartado valdrá 0.6 en los que por cada error a la hora de escribir el espacio muestral se restará 0.2 de cada apartado.

Ejercicio 3: cada apartado valdrá 1.25. 0.25 por responder si es justo o no y 1 punto por una justificación correcta a través del cálculo de probabilidades de salir par o impar, sea el método que sea el que usen. Por errores de cálculo restaremos 0.25 si son leves y si son graves podemos restar 0.5 o más.

Ejercicio 4: hay 6 respuestas en total y cada una valdrá 0.15. No puede haber término medio entre el 0 y el 0.15 debido a la simplicidad de las respuestas.

Ejercicio 5: cada apartado valdrá 0.375. Si hay error de cálculo, pero el criterio es correcto se bajará sólo la mitad de la pregunta. Si hay error en ambas la respuesta está incorrecta en su totalidad.

Ejercicio 6: cada apartado valdrá 0.3. Debido a que la solución es única y no cabe interpretación o se dará 0 o 0.3 en cada apartado.

Ejercicio 7: el ejercicio vale 1.5. Al hacer correctamente el diagrama se le dará 0.5, a adjudicar las probabilidades bien 0.5 y a argumentar correctamente el 0.5 restante. En el diagrama por cada fallo se restará 0.1. Fallar en el diagrama implica fallar en el cálculo de las probabilidades por lo que se restará la mitad, mínimo, de los 0.5 asignados si el árbol es incorrecto. En cambio, si la argumentación con las probabilidades halladas es correcta y no es más sencilla que la original se podrá valorar el 0.5 asignado a la argumentación en su totalidad.

11. BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA

Araya. M. (2014, Junio 29). *Probabilidades de la vida diaria caso 1*. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=9LNLBEm3wow

Araya. M. (2014, Junio 29). *Probabilidades de la vida diaria caso 1*. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=6pSmv0Qmckc

Barreras. M. (2008) ¡Ah!, el azar…, *SIGMA*, 33, 193-208.

Batanero, C., Díaz, C., López-Martín. M. & Cañadas, G. R. (2015). Interpretando las tablas de contingencia, *UNO*, 70.

Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. En: *Revista Educación y Pedagogía.* Medellín: Universidad de
Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, No. 35, (enero-abril), 2003. 39 -54.

Contreras, J.M., Batanero, C., Arteaga, P. & Cañadas de la Fuente. G. (2011). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas, *Epsilón – Revista de Educación Matemática*, 28(2), 1-11.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. & Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En *Investigación en Educación Matemática XVI*, 261-274. Jaén: SEIEM.Archivo

Jiménez, L., & Jiménez, R. (2005). ¿Enseñar probabilidad en primaria y secundaria?¿ Para qué y por qué? *Revista Digital Matemática*, 6(1), 1-10.

Muñoz. A (1998). Algunas ideas preconcebidas sobre la probabilidad, *SUMA*, 29, 29-34.

Sánchez. P. (2007): *¿Por qué es importante estudiar probabilidades? (http://didactikmate.blogspot.com.es/2007/11/por-qu-es-importante-estudiar.html)*

Serrado, A., Azcárate, P. & Cardeñoso, J.M. (2006). *La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO.* Tarbiya: Revista de Investigación e Innovación Educativa, 38, 91-11.

Turbivile. N. (2014): *BEANO (Probability with beans) (http://walkinginmathland.weebly.com/teaching-math-blog/beano-probability-with-beans)*