



TRABAJO DE FIN DE GRADO
GRADO EN FÍSICA

INDICACIONES DE NUEVA FÍSICA EN EL ESPECTRO DE NEUTRINOS CÓSMICOS

AUTOR:

Maykoll A. Reyes Hung

DIRECTORES:

José Manuel Carmona

José Javier Relancio

Facultad de Ciencias
Zaragoza, 28 de junio de 2018

*Muchas gracias a mis directores
José M. Carmona y J. Javier Relancio,
así como al profesor José L. Cortés,
por su gran ayuda en este trabajo.*

Índice de contenidos

1. Introducción	1
2. La coordenada <i>redshift</i> z	3
3. Flujo de neutrinos	7
3.1. Distribución de fuentes	7
3.2. Flujo de una fuente	8
3.3. Flujo de una distribución de fuentes	10
4. Efectos sobre la energía de un neutrino	11
4.1. Efectos de la expansión del universo	11
4.2. Efectos de la creación de pares	11
4.3. Efectos durante la trayectoria	13
4.4. Expresión del flujo detectado	15
5. Integración numérica y resultados	19
6. Conclusiones y discusión	23
7. Bibliografía	25

1. Introducción

Actualmente la Mecánica Cuántica (QM) y la Relatividad General (GR) son las bases de nuestras teorías modernas. Sin embargo, muchos descubrimientos y experimentos recientes evidencian que estos modelos no son suficientes para tener una completa comprensión de muchos fenómenos observados. Ejemplo de ello son la masa no nula del neutrino, la existencia de materia y energía oscura, o, el caso que nos concierne, la explicación a un hipotético *cut-off* en el espectro de neutrinos cósmicos de altas energías (figuras 1 y 2).

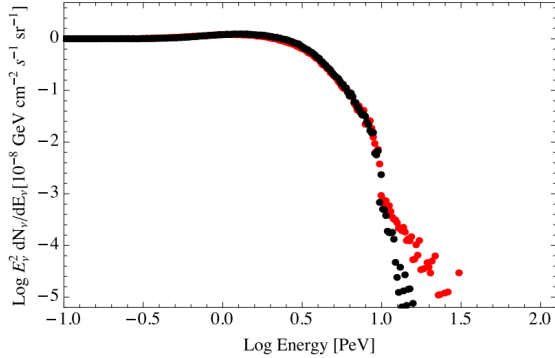


Figura 1: Espectros de neutrinos obtenidos mediante métodos de Montecarlo para $n = 0$ (rojo) y $n = 2$ (negro). Se han tenido en cuenta la pérdida de energía mediante la creación de pares en el vacío y la expansión del universo (pero no se ha tenido en cuenta el *splitting*). Se ha utilizado una energía umbral E^* de 10 PeV. [1]

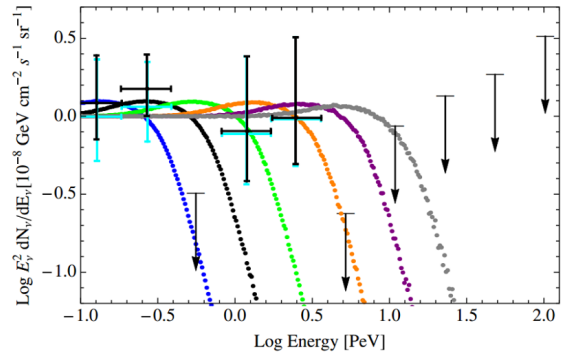


Figura 2: Eventos de IceCube sobre espectros de neutrinos obtenidos mediante métodos de Montecarlo teniendo en cuenta la pérdida de energía mediante la creación de pares en el vacío y la expansión del universo. Las curvas de izquierda a derecha corresponden a espectros con una energía umbral E^* de 1, 2, 4, 10, 20 y 40 PeV. [2]

Este *cut-off* se propone para dar explicación a la ausencia de neutrinos detectados por el experimento IceCube¹ por encima de 2 PeV. Neutrinos de energía superiores a este valor son esperables tanto por la extrapolación del espectro detectado para energías menores, como porque cerca de los 6 PeV se da la resonancia de Glashow [3]. No obstante, no existe en la actualidad explicación convencional para este corte en el espectro de neutrinos detectados.

Esto nos lleva a buscar teorías de nueva física que modifiquen los modelos actuales. Sin embargo, hemos de imponer que estas modificaciones sólo sean relevantes a altas energías, para que no entren en contradicción con el marco actual. De esta forma, podemos esperar que dichos efectos se manifiesten a escalas de energía del orden de la energía de Planck ($E_{\text{Pl}} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$). Sin embargo, estas escalas se encuentran todavía lejos de nuestro alcance, ya que las energías que se exploran en la física de aceleradores están muy por debajo de la energía de Planck ($E \sim 10^4 \text{ GeV}$). Y lo mismo ocurre con las observaciones astronómicas, ya que las mayores energías observadas provienen rayos gamma cósmicos ($E \sim 10^3 \text{ GeV}$), de los neutrinos cósmicos ($E \sim 10^6 \text{ GeV}$), y de los rayos de núcleos cósmicos ultraenergéticos ($E \sim 10^{11} \text{ GeV}$).

Sin embargo, esto no significa que aún no se pueda obtener información experimental de una teoría de nueva física. Existen muchas formas de acercarse a la nueva física, y una muy útil es proponer modelos cuyos efectos puedan ser observados de manera indirecta a energías menores a la de Planck. Un ejemplo de ello es proponer la ruptura de alguna simetría fundamental,

¹<https://icecube.wisc.edu/>

por ejemplo, la invariancia CPT [4]. Ya ha sido probado por O. W. Greenberg *et al.* [5] que la violación de la invariancia CPT implica la Violación de la Invariancia Lorentz (LIV). Un cambio en la Invariancia Lorentz afectará al comportamiento cinemático de una partícula. Este efecto se verá amplificado si la partícula se propaga durante distancias cosmológicas.

En este trabajo nos centraremos en los cambios producidos en la propagación de los neutrinos. Para ello consideramos que la LIV produce un cambio en la relación de dispersión usual de las partículas, proponiendo que no es una identidad perfecta, sino que hemos de añadir un término adicional de corrección que toma relevancia a altas energías:

$$E^2 - p^2 = m^2 \quad \rightarrow \quad E^2 - p^2 = m^2 + a_n \frac{p^{2+n}}{\Lambda^n}, \quad (1.1)$$

donde a_n es un coeficiente adimensional, p es el momento de la partícula, Λ la escala de energías donde se hacen patentes de forma directa los efectos de la nueva física (como se ha discutido con anterioridad, se espera que $\Lambda \sim E_{\text{Pl}}$) y n es el orden de la corrección. En el caso de los neutrinos, los efectos de la LIV sobre la relación de dispersión implican, entre otros efectos, que se hacen posibles algunas desintegraciones antes prohibidas, como son la Producción de Pares en el Vacío (VPE) y el Neutrino *Splitting* (NSpl).

El VPE y NSpl podrían explicar la formación del *cut-off* en el espectro. Para comprobar esta afirmación, F. W. Stecker *et al.* [1, 2, 6] utilizaron la cinemática modificada dada por la ecuación 1.1 para simular mediante métodos de Montecarlo un espectro de neutrinos altas energías. Los resultados obtenidos fueron que se forma un corte en el flujo que se adapta a los resultados experimentales con una elección adecuada de los parámetros ($E^* \sim 10 \text{ PeV}$).

En este trabajo se intentará simular el mismo espectro de neutrinos, para reafirmar que el cambio en la relación de dispersión predice un corte en el espectro, pero en lugar de utilizar métodos de Montecarlo utilizaremos un método analítico que nos permita, además, entender como las desintegraciones antes prohibidas afectan al flujo, para provocar dicho corte.

Con anterioridad, L. E. Suelves [7] obtuvo, a partir de un desarrollo analítico, una relación diferencial entre la evolución de la energía de un neutrino y la distancia de propagación (considerando pérdidas de energía debido a la expansión del universo y la VPE). En este trabajo se repasará la obtención de dicha relación diferencial, y a partir de esta, se propondrá una fórmula integral que predice el flujo detectado. Además se realizará una integración numérica, utilizando la fórmula analítica que deduciremos, con el objetivo de obtener el espectro de flujo detectado. Finalmente, compararemos los resultados obtenidos con las simulaciones de Montecarlo presentadas por F. W. Stecker *et al.* en [1, 2, 6].

2. La coordenada *redshift* z

Supongamos que detectamos un flujo de partículas proveniente de una fuente emisora lejana. Si deseamos saber la distancia recorrida por dichas partículas, puede parecer un dato inmediato al conocer la distancia a la que se encuentra la fuente. No obstante, si tenemos en cuenta que el universo está en permanente expansión, la distancia recorrida por las partículas no será ni la distancia que existía entre fuente y detector en el momento de la emisión, ni la distancia que existía entre los dos en el momento de la detección.

De esta forma, cuando hablamos de distancias lo suficientemente grandes como para que haya que tener en cuenta los efectos de la expansión del universo, la noción de distancia se distorsiona. Por ello, los astrónomos usualmente dejan de utilizar unidades espaciales para medir cuán alejado está un objeto e introducen un nuevo concepto, el *redshift* z .

Para definir el *redshift*, debemos notar que, debido a la expansión espacial, la longitud de onda de las partículas y de la radiación electromagnética también se expande, y con ello disminuyen su frecuencia y energía (figura 3).



Figura 3: La expansión del universo provoca una expansión de la longitud de onda

En consecuencia, definimos el *redshift* como el cambio relativo (debido a la expansión del universo) entre la longitud de onda detectada (λ_d) respecto a la emitida (λ_e):

$$z(t) \equiv \frac{\lambda_d(t) - \lambda_e}{\lambda_e} \quad \rightarrow \quad \lambda_d = \lambda_e (1 + z) . \quad (2.1)$$

Podemos utilizar esta coordenada para etiquetar las posiciones de cuerpos lejanos, ya que cuanto más alejado esté un cuerpo de nosotros, más se expande el espacio que hay entre los dos y mayor *redshift* tendrá. De esta forma el *redshift* se convierte en una nueva forma de medir la lejanía.

Para hallar la relación matemática entre la variable espacial y el *redshift*, hallaremos en primer lugar la relación entre éste (z) y la coordenada temporal (t). Para ello, partimos de la métrica usualmente usada para describir formalmente la expansión del universo, la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega \right] , \quad (2.2)$$

donde r es la distancia comóvil y $a(t)$ el factor de escala del universo. Podemos entender la distancia comóvil como la distancia medida en unas coordenadas que se adaptan a la expansión del universo, de forma que las distancias medidas en estas coordenadas no varían con el tiempo. Un ejemplo de este tipo de coordenadas, en una superficie esférica, son la latitud y longitud. Si variamos el radio de la esfera, las distancias medidas sobre dicha superficie cambiarán, sin embargo, cada punto sigue conservando su misma latitud y longitud.

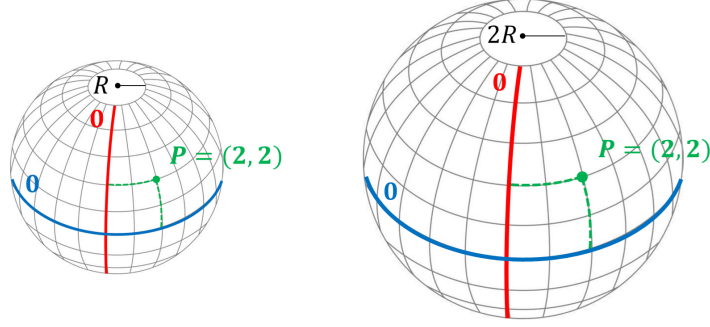


Figura 4: Aunque cambie la distancia medida sobre la superficie entre el pto. origen y el pto. P , la distancia entre ellos medida en las coordenadas comóviles sigue siendo la misma

Por otra parte, podemos entender el factor de escala como la relación entre las distancias físicas (que varían con el tiempo: $R(t)$) y las distancias comóviles (constantes: r):

$$R(t) = a(t) \cdot r . \quad (2.3)$$

El factor de escala es un parámetro que nos proporciona información de cómo se expande el universo, por lo que está íntimamente relacionado con el *redshift*. Podemos obtener uno del otro mediante la siguiente relación:

$$1 + z(t) = \frac{a_0}{a(t)} \quad \rightarrow \quad a(t) = \frac{a_0}{1 + z(t)} , \quad (2.4)$$

donde el subíndice cero significa el valor medido hoy ($a_0 = a(t)|_{\text{hoy}}$). Continuaremos utilizando esta notación para otras magnitudes de ahora en adelante. Si diferenciamos la anterior relación respecto al tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[a(t)] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{a_0}{1 + z(t)} \right] \quad \rightarrow \quad \dot{a}(t) = -\frac{a_0}{(1 + z)^2} \frac{dz}{dt} \\ \rightarrow \quad \dot{a}(t) dt &= -\frac{a(t)}{1 + z} dz \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dt = -\frac{dz}{1 + z(t)} , \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde el cociente $\dot{a}(t)/a(t)$ es el valor del parámetro de Hubble $H(t)$. Sustituyendo dicha definición en la ecuación anterior:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad \rightarrow \quad dt = -\frac{dz}{H(t)(1 + z)} . \quad (2.6)$$

Ahora, para continuar necesitamos hallar la expresión de $H(t)$ en función del redshift z . Para ello podemos partir de la ecuación de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda_v}{3} - \frac{\kappa}{a^2(t)} , \quad (2.7)$$

donde G es la constante de gravitación universal, ρ la densidad de energía del universo (que separaremos en densidad de masa ρ_m y densidad de radiación ρ_r), Λ_v la constante de energía del

vacío, y κ la curvatura del universo. Si definimos $H(t)|_{\text{hoy}} \equiv H_0$, podemos sacar factor común dicho valor en el miembro izquierdo de la igualdad y sustituir la expresión de $a(t)$ (fórmula 2.4). De esta forma obtenemos:

$$H^2(t) = H_0^2 \left[\frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_m + \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_r + \frac{\Lambda_v}{3H_0^2} - \frac{\kappa}{a_0^2 H_0^2} (1+z)^2 \right]. \quad (2.8)$$

La densidad de materia depende del volumen que esta ocupa (que a su vez depende de la distancia física $R(t)$ al cubo); por lo tanto, su dependencia con el tiempo variará según:

$$\rho_m \propto \frac{1}{V} \propto \frac{1}{R^3(t)} \propto \frac{1}{a^3(t)}. \quad (2.9)$$

La densidad de radiación depende del volumen de la misma forma, pero a su vez también su energía se ve modificada debido a la expansión de su longitud de onda:

$$\rho_r \propto \frac{E}{V} \propto \frac{1/\lambda(t)}{R^3(t)} \propto \frac{1/a(t)}{a^3(t)}. \quad (2.10)$$

Recordando que $a(t) \propto (1+z)^{-1}$ (fórmula 2.4), podemos expresar la evolución de las densidades en función del *redshift*:

$$\rho_m = \rho_{m0} (1+z)^3, \quad \rho_r = \rho_{r0} (1+z)^4, \quad (2.11)$$

donde recordemos que el subíndice cero indica el valor hoy en día. De esta forma, podemos utilizar las notaciones usuales de cosmología y definir:

$$\Omega_m \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m0} \quad \Omega_r \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{r0} \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda_v}{3H_0^2} \quad \Omega_\kappa \equiv \frac{-\kappa}{a_0^2 H_0^2}, \quad (2.12)$$

que son las fracciones de densidad de materia, radiación, energía oscura y curvatura, respectivamente, respecto a la densidad crítica del universo ($\rho_{\text{cr}} = 3H_0^2/(8\pi G)$). En función de dichas constantes, la expresión de $H(z)$ (fórmula 2.8) toma la forma:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_r (1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa (1+z)^2 \right]. \quad (2.13)$$

Consultando los valores de dichas constantes en la referencia [8], podemos hacernos una idea de la relevancia de cada término, con intenciones de simplificar la expresión:

$$\begin{aligned} \Omega_\Lambda &\sim 0.692 \pm 0.012 & \Omega_m &\sim 0.308 \pm 0.012 \\ \Omega_\kappa &\sim 0.005 \pm 0.017 & \Omega_r &\sim 5.38 \cdot 10^{-5} \pm 0.0015. \end{aligned} \quad (2.14)$$

De esta manera, las contribuciones de la curvatura y de la radiación son mucho menor que las de energía oscura y materia ($\Omega_\kappa, \Omega_r \ll \Omega_\Lambda, \Omega_m$). Sin embargo, aunque la contribución de la radiación es la más pequeña, es la que mayor dependencia tiene con el *redshift* ($\sim z^4$).

A pesar de ello, los valores de z para los que el término de radiación se hace comparable con el término de energía oscura, el cuál es el término mayor en la expresión de $H(z)$ (fórmula 2.13),

son del orden de $z \sim 9.7$. Nosotros trabajaremos con valores de *redshift* dentro del intervalo $z \in [0.5, 2.0]$ (rango de valores utilizados por F. W. Stecker *et al.* en [2], [1], [6]). De esta forma, para el rango de *redshift* en estudio, podemos despreciar las contribuciones de radiación y curvatura en la expresión 2.13, obteniendo:

$$\boxed{H(z) \approx H_0 \sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} . \quad (2.15)$$

Finalmente, sustituimos la expresión de $H(z)$ hallada en la relación diferencial 2.6 que relacionaba dt y dz :

$$dt = -\frac{dz}{H(z)(1+z)} = -\frac{dz}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} . \quad (2.16)$$

Con esto ya tenemos la relación buscada entre la coordenada temporal y el *redshift*. Ahora, para obtener la relación diferencial entre la coordenada espacial comóvil r y el *redshift* z , volvemos a partir de la métrica FLRW (fórmula 2.2). Aplicándola a partículas que viajan a la velocidad de la luz sabemos que $ds = 0$. En el caso de los neutrinos tendremos un caso similar:

$$ds^2 \approx 0 \approx -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega \right] . \quad (2.17)$$

Escogiendo de forma apropiada las coordenadas podemos conseguir que $d\Omega = 0$, es decir, que la partícula viaje radialmente desde la fuente hasta el detector. Además, podemos tomar la curvatura como nula ($\kappa \sim 0$). Con estas simplificaciones conseguimos la siguiente relación:

$$0 = -dt^2 + a(t)^2 dr^2 \quad \rightarrow \quad dr = -\frac{dt}{a(t)} = -\frac{dt}{a_0/(1+z)} . \quad (2.18)$$

Sustituyendo la relación hallada entre dt y dz (fórmula 2.16), obtenemos la relación diferencial buscada entre dr y dz :

$$dr = -\frac{dt}{a_0/(1+z)} = \frac{1}{a_0/(1+z)} \frac{dz}{H(z)(1+z)} = \frac{dz}{a_0 H(z)} . \quad (2.19)$$

En este caso, además, nos conviene además saber la expresión explícita entre una cierta distancia expresada como *redshift* z y su correspondiente distancia comóvil $r(z)$, por lo que integramos la relación diferencial:

$$r(z) = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} . \quad (2.20)$$

Definimos por comodidad (para su futura resolución computacional) la función $k(z)$:

$$\boxed{k(z) = \int_0^z \frac{dz}{H(z)}} \quad \rightarrow \quad r(z) = \frac{k(z)}{a_0} . \quad (2.21)$$

3. Flujo de neutrinos

En este apartado deduciremos la expresión analítica que ha de tener el flujo de neutrinos detectados, en función de la energía detectada. Para ello, establecemos que las fuentes de nuestro interés serán aquellas que se encuentran entre $z_1 = 0.5$ y $z_2 = 2.0$.

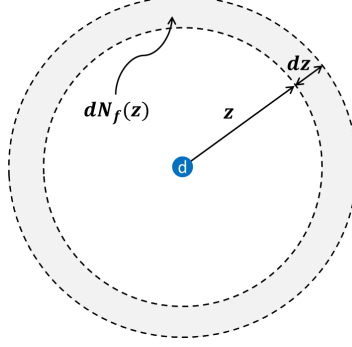


Figura 5: Corteza esférica de grosor dz con origen en el detector

Situemos el origen de coordenadas en nuestros detectores (punto d azul de la figura 5). Supongamos que, para cierta distribución de fuentes, es conocido el número diferencial de ellas entre una corteza de radio z y una de radio $z + dz$: llamémoslo $dN_f(z)$. Si supieramos además cuál es el flujo de neutrinos detectado de energía E_d para una fuente situada a una distancia z : llamémoslo $\phi_{E_d}(z)$, podríamos expresar el flujo de neutrinos de cierta energía detectada, proveniente de fuentes entre z_1 y z_2 , de la siguiente manera:

$$\delta\Phi(E_d) = \int_{z_1}^{z_2} \phi_{E_d}(z) \cdot dN_f(z) . \quad (3.1)$$

Podemos entender $\delta\Phi(E_d)$ como el flujo de neutrinos detectado con energía E_d , tal que el flujo total detectado sea una integral a todas las energías detectadas:

$$\Phi_{\text{Total}} = \int \delta\Phi(E_d) dE_d . \quad (3.2)$$

Sin embargo, el flujo de nuestro interés es el espectro dado por la fórmula 3.1, por lo que a continuación analizaremos la expresión los términos del integrando.

3.1. Distribución de fuentes

En este subapartado queremos relacionar el número diferencial de fuentes $dN_f(z)$ que hay en entre una corteza de radio z y una de radio $z + dz$, con una cierta distribución de fuentes unidimensional. Para ello, sólo debemos notar que:

$$dN_f(z) = \frac{dN_f}{dz}(z) \cdot dz , \quad (3.3)$$

donde dN_f/dz es la distribución de fuentes unidimensional. Esta función se puede tomar en coincidencia con la distribución de la tasa de formación estelar (figura 6).

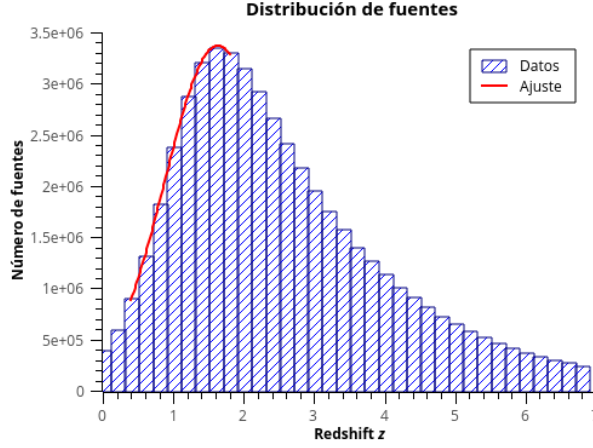


Figura 6: Distribución de la tasa de formación estelar en función de z

Dicha distribución es la utilizada en los artículos [2], [1] y [6]. Tras extraerla de [2], para poder utilizarla, hemos realizado un ajuste en el intervalo de interés $z \in [0.5, 2.0]$, con el objetivo de sustituir dN_f/dz por la función resultante de dicho ajuste (función $f(z)$ representada en rojo en la figura 6). Según el ajuste, el comportamiento de esta función es de carácter exponencial y viene dado por:

$$\boxed{f(z) = e^{az^2+bz+c}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a \approx -0.873 \\ b \approx 2.854 \\ c \approx 12.697 \end{cases} \quad (3.4)$$

De esta manera, obtenemos que el número diferencial de fuentes en una corteza esférica de grosor dz situada a una distancia z se puede expresar en función de la densidad lineal de fuentes $f(z)$ de la siguiente forma:

$$dN_f(z) = f(z) dz \quad (3.5)$$

3.2. Flujo de una fuente

En este subapartado vamos a examinar la expresión del flujo detectado producido por una fuente situada a una distancia z . Para ello, esta vez nos conviene situar nuestro origen de coordenadas en la fuente (punto rojo s en la figura 7).

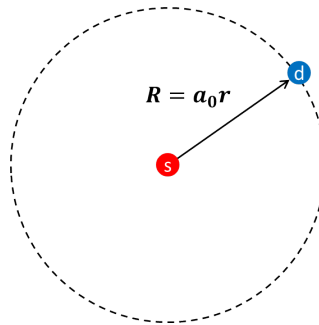


Figura 7: El detector se encuentra, en el momento de la detección (hoy), a una distancia $R = a_0 r$ de la fuente (origen de coordenadas)

Ahora, consideremos que los neutrinos emitidos han recorrido una trayectoria tal que la distancia física entre emisor y detector en el momento de la detección es $R(t)|_{\text{hoy}} = a_0 r$. Entonces los neutrinos emitidos en un cierto diferencial de tiempo dt_e se habrán repartido en una superficie esférica de área $4\pi a_0^2 r^2$. De esta forma, el flujo de neutrinos detectados (número de neutrinos para cada energía de detección, por unidad de espacio y tiempo) será:

$$\phi_{Ed}(z) = dn_e(E_e) \cdot \frac{1}{4\pi a_0^2 r^2} \cdot \frac{1}{dt_d}, \quad (3.6)$$

donde $dn_e(E_e)$ es el número diferencial de neutrinos de energía E_e emitidos en un tiempo dt_e . Nótese que el tiempo que se tardaron en emitir dichos neutrinos (dt_e) no coincide con el tiempo que se ha tardado en detectarlos (dt_d), sino que entre ambos existe la relación:

$$dt_d = (1 + z)dt_e \quad (3.7)$$

El problema ahora es que no tenemos la dependencia explícita del flujo de una fuente en función de z , sino que tenemos la dependencia implícita dentro de $r = r(z)$. No obstante, en el apartado 2 hemos hallado ya esta relación (fórmula 2.21). De esta forma, sustituyendo la expresión de $r(z)$ de la fórmula 2.21 en la ecuación del flujo 3.6 obtenemos:

$$\phi_{Ed}(z) = \frac{dn_e(E_e)}{dt_d} \frac{1}{4\pi a_0^2} \frac{a_0^2}{k^2(z)} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dn_e(E_e)}{dt_d} \frac{1}{k^2(z)}. \quad (3.8)$$

Para simplificar la fórmula, podemos relacionar alguna de las magnitudes que se incluyen en ella con modelos conocidos. Por ejemplo, podemos definir para una fuente su luminosidad de neutrinos de energía E_e como $\delta L(E_e)$. Supongamos que la fuente emite un número $dn_e(E_e)$ de neutrinos de energía E_e en un tiempo dt_e . Estos valores definen luminosidad de la fuente según:

$$\delta L(E_e) = \frac{dn_e(E_e)}{dt_e}. \quad (3.9)$$

Como esta luminosidad solo tiene en cuenta los neutrinos de cierta energía E_e , la luminosidad total de la fuente se hallaría a partir de esta según:

$$L_{\text{Total}} = \int \delta L(E_e) dE_e. \quad (3.10)$$

Para lograr sustituir la luminosidad en la fórmula del flujo (3.8), debemos lograr que aparezca el tiempo de emisión. De esta forma, utilizando la relación 3.7 que nos relaciona los tiempos de emisión y detección, obtenemos que el flujo se puede expresar como:

$$\phi_{Ed}(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{dn_e(E_e)}{dt_e} \frac{1}{(1+z)} \frac{1}{k^2(z)} \rightarrow \phi_{Ed}(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta L(E_e)}{k^2(z)(1+z)}. \quad (3.11)$$

Una vez identificada la luminosidad, la podemos modelizar al igual que en las referencias [2], [1] y [6], con una función proporcional a una ley de potencias:

$$\boxed{\delta L(E_e) = E_0^2 / E_e^2}, \quad (3.12)$$

donde E_0^2 es la constante de proporcionalidad, que será irrelevante al ser un factor multiplicativo que desaparecerá en el proceso de normalización de los resultados.

3.3. Flujo de una distribución de fuentes

En vista de los resultados anteriores, ya estamos en condiciones de volver a la fórmula del flujo de una distribución de fuentes (fórmula 3.1) y sustituir las expresiones obtenidas:

$$\delta\Phi(E_d) = \int_{z_1}^{z_2} \phi_{E_d}(z) \cdot f(z) \cdot dz \quad \rightarrow \quad \delta\Phi(E_d) = \frac{1}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\delta L(E_e) f(z)}{k^2(z)(1+z)} dz . \quad (3.13)$$

Como se puede apreciar, el flujo para cada energía detectada E_d es una integral a la luminosidad de todas las fuentes, correspondiente a una energía E_e que es distinta según el *redshift* z al que se encuentra cada fuente. Por tanto, necesitamos conocer la forma explícita de la función que nos permite hallar la energía de emisión E_e en función de la energía detectada E_d y el *redshift* de la fuente z_e . Para ello, en el siguiente apartado analizaremos como es la evolución de la energía de un neutrino a través de su trayectoria.

4. Efectos sobre la energía de un neutrino

En este capítulo analizaremos como relacionar la energía detectada de un neutrino con su energía de emisión. Para ello analizaremos como varía su energía a lo largo de su recorrido.

Durante el trayecto, el neutrino se verá afectado en todo momento por la expansión del universo. Como se ha explicado con anterioridad, esto provocará una disminución de su energía. Pero además, si tiene suficiente energía durante el trayecto, podrá verse afectado por desintegraciones antes prohibidas que ahora se pueden producir gracias a la LIV. Estas son la producción de pares en el vacío (VPE) y el neutrino *splitting* (NSpl). En este trabajo tendremos en cuenta el efecto de la VPE, pero no el del NSpl (eso queda pendiente como un posible futuro trabajo).

4.1. Efectos de la expansión del universo

La pérdida de energía debido a la expansión del universo es directamente deducible de las expresiones ya utilizadas en el apartado 2, ya que, de la definición de *redshift* (fórmula 2.1), obtenemos que:

$$\lambda_d = \lambda_e (1 + z) \quad \rightarrow \quad \nu_d = \frac{\nu_e}{(1 + z)} . \quad (4.1)$$

Aplicando que la energía detectada depende de la frecuencia según $E_d = h\nu_d$, y que ocurre lo mismo con la energía emitida, $E_e = h\nu_e$, la evolución de la energía con el redshift será:

$$h\nu_d = \frac{h\nu_e}{(1 + z)} \quad \rightarrow \quad E_d = \frac{E_e}{(1 + z)} . \quad (4.2)$$

Despejando la energía emitida (que para cada valor de z es la energía en ese punto de la trayectoria) podemos obtener una relación diferencial de la evolución de la energía debida a la expansión del universo:

$$E = E_d(1 + z) \quad \rightarrow \quad dE = E_d \cdot dz = \frac{E}{(1 + z)} \cdot dz \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{E} = \frac{1}{(1 + z)} dz . \quad (4.3)$$

4.2. Efectos de la creación de pares

El proceso de creación de pares electrón-positrón supone una desintegración del tipo:

$$\nu_e \rightarrow \nu_e + e^- + e^+ . \quad (4.4)$$

Este proceso puede ser mediado a través de una corriente neutra Z_0 (figura 8) o mediante una corriente cargada W^+ (figura 9). Sin embargo, mientras que el proceso de creación de pares mediado por W^+ sólo puede ocurrir para los neutrinos electrónicos, el proceso mediado por Z^0 puede ocurrir para cualquier tipo de sabor. Como los neutrinos detectados habrán viajado suficiente distancia para que las oscilaciones de neutrinos permitan que se igualen las probabilidades de tener cada uno de los tres sabores, el proceso mediado por la corriente cargada W^+ sólo será relevante 1/6 de las veces. Por ello consideraremos que el proceso relevante es el mediado por la corriente neutra Z_0 .

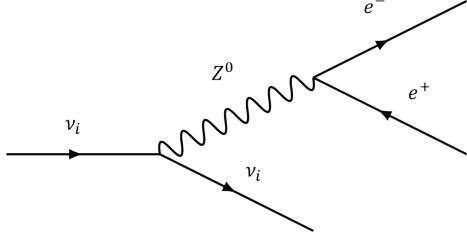


Figura 8: Creación de pares mediante Z^0

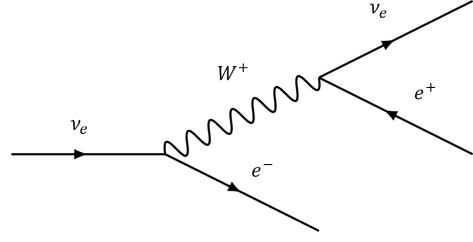


Figura 9: Creación de pares mediante W^+

Ambos procesos sólo son posibles para neutrinos con energía mayor a cierta energía umbral E^* . Este valor viene definido por la nueva física, es decir, depende de los parámetros de la corrección en la ecuación de dispersión 1.1 debido a la LIV. La forma explícita ha sido deducida por L. E. Suelves en la referencia [7]:

$$E^* = \left(4m_e^2\Lambda^n\right)^{1/(2+n)}, \quad (4.5)$$

donde n es el orden de la corrección y Λ la escala de energía. El proceso de desintegración relevante (el mediado por la corriente neutra) ya ha sido caracterizado por J. M. Carmona *et al.* en la referencia [9], donde se obtiene que su anchura de desintegración es:

$$\Gamma = \frac{G_F^2 p^5}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right] \left(\frac{p}{\Lambda} \right)^{3n} \xi_n, \quad (4.6)$$

donde G_F es la constante de acoplamiento de Fermi (propia de las desintegraciones débiles), $s_W \equiv \sin(\theta_W)$ el seno del ángulo de Weinberg (que proviene de la definición del bosón Z^0 como combinación de los bosones B^0 y W^0 en la teoría electrodébil), ξ_n es un número de orden 1 que proviene del elemento de matriz de la interacción, y, como se ha dicho antes, n y Λ proceden de la modificación en la ecuación de dispersión debido a la LIV (fórmula 1.1).

En la misma referencia, a partir de la anchura de desintegración, se halla la variación del momento lineal con el tiempo:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{G_F^2 p^6}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right] \left(\frac{p}{\Lambda} \right)^{3n} \xi'_n, \quad (4.7)$$

donde ξ' corresponde a una nueva constante del mismo orden que ξ , cuya expresión en función de n se da en [9]. Para aligerar la notación se define α_n como:

$$\alpha_n = \frac{G_F^2 \xi'_n}{192\pi^3 \Lambda^{3n}} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right]. \quad (4.8)$$

Con esta notación, a partir de la ecuación de la variación del momento (4.7), podemos obtener directamente la variación de la energía con el tiempo teniendo en cuenta que $m_\nu \approx 0$:

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha_n E^{6+3n}. \quad (4.9)$$

Finalmente, para expresar esta evolución en función del *redshift* utilizamos la expresión obtenida en el apartado 2 que relaciona dt y dz (fórmula 2.16).

$$dt = -\frac{dz}{H(t)(1+z)} \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{E} = \frac{\alpha_n E^{5+3n}}{H(z)(1+z)} dz . \quad (4.10)$$

4.3. Efectos durante la trayectoria

Ahora que tenemos el efecto individual de las dos contribuciones, queremos combinarlas para conocer el efecto conjunto. Sin embargo, como hemos nombrado anteriormente, el efecto de la creación de pares sólo es aplicable mientras los neutrinos tengan una energía superior a la umbral. Por lo que, en el caso más general, tendremos un neutrino que en la primera parte de su trayectoria se verá afectado por ambos efectos, y el resto del trayecto, tras alcanzar la energía umbral, se verá afectado únicamente por la expansión del universo.

Para analizar esta cinemática, consideremos el escenario de la figura 10. En él, un neutrino se emite con una energía inicial E_i desde una distancia z_i . Este realiza un recorrido, durante el cual va perdiendo energía mediante los dos procesos antes nombrados, hasta que, en cierto punto z_k , su energía alcanza el valor E_k . A partir de allí, desde z_k hasta z_f no habrá VPE, y sólo se verá afectado por la expansión del universo.

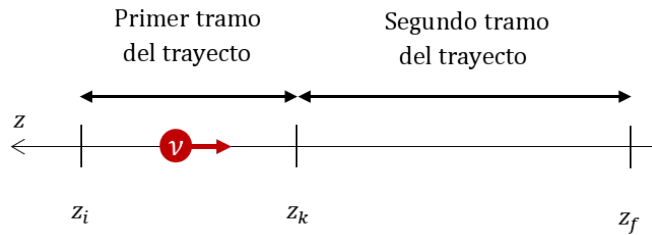


Figura 10: La primera parte del trayecto va desde z_i (que normalmente será la $z_i = z_e$ de emisión), hasta z_k (momento en el que se dejan de producir pares). El segundo tramo va desde z_k hasta z_f (que normalmente será $z_f = 0$, correspondiente a la detección)

Dependiendo del valor de z_k , podemos encontrarlos en casos donde el primer tramo sea todo el trayecto ($z_k = z_f$, y por lo tanto se den ambos procesos de pérdida durante toda la trayectoria), casos donde el segundo tramo sea todo el trayecto ($z_k = z_i$, y por lo tanto sólo haya que tener en cuenta la expansión del universo) o casos intermedios donde se den ambos tramos de la trayectoria ($z_k \in [z_i, z_f]$). No obstante, discutiremos estos casos en el subapartado siguiente a la hora de calcular el flujo. En este subapartado resolveremos el caso general.

Intentemos relacionar la energía del neutrino al iniciar cada tramo, con la energía que tendrá al finalizarlo. Esto es sencillo en el último tramo del trayecto, ya que la cinemática viene dada únicamente por la contribución de la expansión:

$$\frac{dE}{E} = \underbrace{\frac{dz}{(1+z)}}_{\text{Expansión}} , \quad (4.11)$$

por lo que para relacionar la energía entre el punto inicial y final de dicho tramo, sólo debemos

integrar esta relación diferencial entre sus extremos:

$$\int_{E_f}^{E_k} \frac{dE}{E} = \int_{z_f}^{z_k} \frac{dz}{(1+z)} \quad \rightarrow \quad E_k = (1+z_k)E_f . \quad (4.12)$$

Ahora toca resolver el primer tramo de la trayectoria. En ese tramo, la cinemática vendrá dada por la contribución de ambos efectos:

$$\frac{dE}{E} = \underbrace{\frac{dz}{(1+z)}}_{\text{Expansión}} + \underbrace{\frac{\alpha_n E^{5+3n} dz}{H(z)(1+z)}}_{\text{VPE}} . \quad (4.13)$$

Para resolverla, debemos integrar entre el extremo inicial z_i y el extremo final z_k de este tramo de la trayectoria. Sin embargo, esto no es sencillo de realizar con la ecuación expresada de esta forma, así que realizaremos una serie de cambios de variable para simplificar la expresión. Comenzamos con definir $\tilde{E} \equiv E/(1+z)$:

$$E = \tilde{E}(1+z) \quad \rightarrow \quad dE = d\tilde{E}(1+z) + \tilde{E} dz . \quad (4.14)$$

Teniendo en cuenta esta definición y sustituyendo:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{E}(1+z) + \tilde{E} dz}{\tilde{E}(1+z)} &= \frac{dz}{(1+z)} + \frac{\alpha_n \tilde{E}^{5+3n} (1+z)^{5+3n} dz}{H(z)(1+z)} \\ \rightarrow \frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}} &= \frac{\alpha_n \tilde{E}^{5+3n} (1+z)^{4+3n} dz}{H(z)} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Recordando la expresión de $H(z)$ (fórmula 2.15) y definiendo $t \equiv (1+z)^3$, con $dt = 3(1+z)^2 dz$:

$$\frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}^{6+3n}} = \frac{\alpha_n}{3H_0} \frac{t^{2/3+n}}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} dt . \quad (4.16)$$

Ahora ya podemos integrar para este tramo de la trayectoria, es decir, desde z_i , donde la energía es E_i , hasta z_k , donde la energía es E_k :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{E}_k}^{\tilde{E}_i} \frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}^{6+3n}} &= \int_{t_k}^{t_i} \frac{\alpha_n}{3H_0} \frac{t^{2/3+n}}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} dt \quad \rightarrow \\ \frac{1}{(5+3n)} \left(\tilde{E}_k^{-(5+3n)} - \tilde{E}_i^{-(5+3n)} \right) &= \frac{\alpha_n}{3H_0} \int_{(1+z_k)^3}^{(1+z_i)^3} \frac{t^{2/3+n}}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} dt , \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde la última integral se puede resolver numéricamente, así que le asignaremos un valor $J(z_i, z_k)$ que resolveremos en el capítulo 5:

$$\boxed{J(z_i, z_k) \equiv \int_{(1+z_k)^3}^{(1+z_i)^3} \frac{t^{2/3+n}}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} dt .} \quad (4.18)$$

De esta forma, despejando la energía del neutrino al finalizar el primer tramo, en función de la energía cuando lo inició:

$$\frac{1}{(5+3n)} \left(\widetilde{E}_k^{-(5+3n)} - \widetilde{E}_i^{-(5+3n)} \right) = \frac{\alpha_n}{3H_0} J(z_i, z_k) . \quad (4.19)$$

$$\rightarrow E_i = (1+z_i) \left(\widetilde{E}_k^{-(5+3n)} - (5+3n) \frac{\alpha_n}{3H_0} J(z_i, z_k) \right)^{-\frac{1}{(5+3n)}} . \quad (4.20)$$

Finalmente, para unir las dos partes del trayecto, recordemos la expresión de E_k en función de E_f obtenida para la segunda parte del trayecto (fórmula 4.5). De esta forma:

$$E_k = (1+z_k)E_f \quad \rightarrow \quad \widetilde{E}_k = \frac{E_k}{(1+z_k)} = \frac{(1+z_k)E_f}{(1+z_k)} = E_f . \quad (4.21)$$

Por lo que, con ello, ya tenemos la relación completa entre la energía al comenzar todo trayecto (E_i) y al final de toda la trayectoria (E_f):

$$E_i = (1+z_i) \left(E_f^{-(5+3n)} - (5+3n) \frac{\alpha_n}{3H_0} J(z_i, z_k) \right)^{-\frac{1}{(5+3n)}} . \quad (4.22)$$

4.4. Expresión del flujo detectado

Ahora que conocemos la evolución de la energía de un neutrino desde su emisión hasta su detección, vamos a combinar esta información con la del capítulo 3 para establecer las ecuaciones que rigen el flujo de neutrinos detectados en función de su energía. Una primera diferenciación que podemos hacer es separar el espectro en una parte con $E_d > E^*$ y otra con $E_d < E^*$:

1) Caso con $E_d > E^*$

En este caso, como los neutrinos son detectados con una energía mayor a la umbral, se deduce que han tenido suficiente energía como para verse afectado por los efectos de producción de pares y expansión del universo durante toda la trayectoria. De esta forma, para estos neutrinos no existe el segundo tramo del trayecto, ya que son detectados antes de terminar el primero (por lo que $z_k = z_f = 0$).

De esta forma, la ecuación que gobierna su cinemática durante toda la trayectoria es la 4.13, que debe ser integrada para el tramo de validez, que en este caso es desde la emisión (situado en $z_i = z_e$, donde la energía $E_i = E_e$) hasta la detección (con $z_k = z_f = 0$, donde la energía es $E_k = E_f = E_d$). Particularizando el resultado 4.22 (que es la solución de 4.13), obtenemos que la relación entre la energía de emisión y detección es:

$$E_e = (1+z_e) \left(E_d^{-(5+3n)} - (5+3n) \frac{\alpha_n}{3H_0} J(z_e, 0) \right)^{-\frac{1}{(5+3n)}} . \quad (4.23)$$

Para simplificar la notación, vamos a definir esta relación entre energía emitida y detectada como una función que denominaremos $F_2(z_e, E_d)$:

$$F_2(z_e, E_d) \equiv (1+z_e) \left(E_d^{-(5+3n)} - (5+3n) \frac{\alpha_n}{3H_0} J(z_e, 0) \right)^{-\frac{1}{(5+3n)}} , \quad (4.24)$$

de forma que para $E_d > E^*$, la energía emitida en función de la detectada es $E_e(z_e, E_d) = F_2(z_e, E_d)$. Por tanto, para este rango de E_d podemos expresar el flujo como:

$$\delta\Phi_2(E_d) = \frac{1}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} L(F_2(z_e, E_d)) \frac{f(z)}{k^2(z)(1+z)} dz. \quad (4.25)$$

Sin embargo, hemos de realizar algunas correcciones a esta fórmula, ya que la ecuación 4.19 pone un límite a las fuentes que pueden contribuir a el flujo. Consideremos la ecuación 4.19 aplicada a una fuente situada a una distancia z_c , tal que sea necesario que emita con una energía infinita ($E_e \rightarrow \infty$) para que sus neutrinos puedan llegar a nosotros con energía E_d :

$$\frac{1}{(5+3n)} \frac{1}{E_d^{5+3n}} = \frac{\alpha_n}{3H_0} J(z_c, 0) \rightarrow z_{c_0} \equiv z_c(E_d, 0). \quad (4.26)$$

La resolución de esta ecuación define el valor de *redshift* crítico z_{c_0} . Según su definición, aquellas fuentes con un valor de z mayor a z_{c_0} deberían emitir con una energía mayor a infinito para poder ser detectadas con energía E_d . O dicho de otra forma, estas fuentes no emiten con suficiente energía como para contribuir al flujo de neutrinos detectados con energía E_d . De esta manera, hemos de modificar el límite superior de la integral 4.25, el cuál dejará de ser z_2 si el valor de $z_{c_0} \equiv z_c(E_d, 0)$ es más restrictivo (es decir, menor):

$$\delta\Phi(E_d) = \frac{1}{4\pi} \int_{z_1}^{\min[z_{c_0}, z_2]} \delta L(F_2(z_e, E_d)) \frac{f(z)}{k^2(z)(1+z)} dz. \quad (4.27)$$

Ahora, al haber introducido como límite superior de la integral un valor que depende de la energía detectada, debemos imponer que si z_{c_0} es menor que z_1 no hay fuentes que contribuyan al flujo y por lo tanto debe ser cero (ya que no consideramos fuentes por debajo de z_1). Para imponer esta condición debemos modificar también el límite inferior de integración de forma que, cuando se de el caso, los límites de la integral tengan el mismo valor y la integral sea idénticamente nula:

$$\delta\Phi_2(E_d) = \frac{1}{4\pi} \int_{\min[z_{c_0}, z_1]}^{\min[z_{c_0}, z_2]} \delta L(F_2(z_e, E_d)) \frac{f(z)}{k^2(z)(1+z)} dz. \quad (4.28)$$

2) Caso con $E_d < E^*$

En este caso, los neutrinos llegan al detector con una energía menor a la umbral, es decir, cuando son detectados ya no producen pares. Sin embargo, esto puede deberse tanto porque han alcanzado la energía umbral en algún punto de la trayectoria, como porque nunca tuvieron suficiente energía para empezar la producción de pares.

Para distinguir que neutrinos se encuentran en un caso u otro, utilizamos el *redshift* umbral z^* . Esta es la distancia a la que un neutrino ha tenido que alcanzar la energía E^* , para poder ser detectado con una energía E_d . De esta manera, el valor z^* dependerá del valor de la energía detectada: $z^* \equiv z^*(E_d)$.

Para poder obtener una expresión que nos relacione dichos valores, analicemos el recorrido del neutrino tras alcanzar la energía umbral. En dicho caso, la única contribución a tener en cuenta es la expansión del universo, por lo que se comporta como en el último tramo de la

trayectoria del ejemplo general (gobernada por la ecuación 4.11). De esta forma, particularizando el resultado 4.12 (que es la solución de 4.11) con $E_k = E^*$ y $E_f = E_d$:

$$E^* = (1 + z^*)E_d \quad \rightarrow \quad z^*(E_d) = \left(\frac{E^*}{E_d} - 1 \right). \quad (4.29)$$

A partir de esta relación, podemos notar que, para una energía detectada determinada, como el valor de E^* es fijo (ya que queda determinado por los parámetros de la nueva física, según la ecuación 4.5), el valor de z^* es el mismo para todos los neutrinos detectados con la misma energía E_d .

Esto nos permite, conociendo la energía detectada, preguntarnos para cada valor de z , con qué energía se han tenido que emitir dichos neutrinos para que nos lleguen con energía E_d . De esta forma, a una distancia z^* , los neutrinos han debido de emitirse justamente con energía E^* , por lo que ninguna fuente que se encuentre por debajo tendrá energía suficiente para iniciar la producción de pares (ya que habrán de emitir con $E_e < E^*$).

Esto nos permite distinguir por un lado los neutrinos provenientes de fuentes con $z_e > z^*$ (que serán capaces de producir pares, durante un tramo de su trayectoria), y por otro lado los que provienen de fuentes con $z_e < z^*$ (que no se emiten con energía suficiente para producir pares, y por lo tanto sólo se verán afectados por la expansión).

En el caso de los neutrinos con $z_e < z^*$, al ser emitidos con una energía inferior a la umbral, toda su cinemática está gobernada por la fórmula 4.11, es decir, el segundo tramo supone la totalidad de su trayectoria. De esta manera, su solución será el resultado 4.12 (que es la solución de 4.11), particularizado al caso $z_k = z_e$ y $z_f = 0$:

$$E_e = (1 + z_e)E_d. \quad (4.30)$$

Por analogía con el caso anterior, definimos esta relación mediante una función $F_1(z_e, E_d)$:

$$\boxed{F_1(z_e, E_d) = (1 + z_e)E_d.} \quad (4.31)$$

Así, los neutrinos emitidos por fuentes con $z_e < z^*$ se habrán emitido con una energía dada por $E_e(z_e, E_d) = F_1(z_e, E_d)$. Ahora vamos a analizar el segundo tipo de neutrinos, que son aquellos que provienen de fuentes con una $z_e > z^*$. Estas fuentes emiten con una energía mayor a la umbral, por lo que los neutrinos emitidos se verán afectados tanto por la VPE como por la expansión, por lo menos durante un tramo de su trayectoria.

El primer tramo comenzará en el momento de la emisión, $z_i = z_e$, y acabará cuando los neutrinos alcancen la energía umbral, $z_k = z^*$. Tras esto, los neutrinos comenzarán el segundo tramo desde $z_k = z^*$ hasta que se da la detección en $z_f = 0$.

Este es el caso intermedio que hemos resuelto en el subapartado anterior (caso con $z_k \in [z_i, z_f]$), sólo que en este caso $z_k = z^*(E_d)$. De esta forma, particularizando el resultado 4.22 para una energía inicial $E_i = E_e$ (en $z_i = z_e$) y una energía final $E_f = E_d$:

$$E_e = (1 + z_e) \left(E_d^{-(5+3n)} - (5 + 3n) \frac{\alpha_n}{3H_0} J(z_e, z^*) \right)^{-\frac{1}{(5+3n)}}. \quad (4.32)$$

Por analogía con los casos anteriores, definimos esta relación como una función $F_3(z_e, E_d)$:

$$F_3(z_e, E_d) = (1 + z_e) \left(E_d^{-(5+3n)} - (5 + 3n) \frac{\alpha_n}{3H_0} J(z_e, z^*) \right)^{-\frac{1}{(5+3n)}}. \quad (4.33)$$

De esta forma, los neutrinos provenientes de fuentes con $z > z^*$ se habrán emitido con una energía dada por $E_e(z_e, E_d) = F_3(z_e, E_d)$. En vista de estos resultados, ya podemos expresar la fórmula correspondiente al flujo de neutrinos detectados para esta parte del espectro, con la particularidad de que debemos separar la integral entre aquellas fuentes con $z < z^*$ (cuyos neutrinos cumplen la relación dada por $E_d(z_e, E_d) = F_1(z_e, E_d)$) y aquellas con $z > z^*$ (cuyos neutrinos se rigen por la relación $E_d(z_e, E_d) = F_3(z_e, E_d)$). De esta forma:

$$\delta\Phi(E_d) = \frac{1}{4\pi} \int_{z_1}^{z^*} \delta L(F_1(z_e, E_d)) \frac{f(z)}{k^2(z)(1+z)} dz + \frac{1}{4\pi} \int_{z_*}^{z_2} \delta L(F_3(z_e, E_d)) \frac{f(z)}{k^2(z)(1+z)} dz. \quad (4.34)$$

Sin embargo, al igual que caso anterior, la fórmula 4.19 define un *redshift* crítico que limita la cantidad de fuentes capaces de producir flujo. Particularizando la expresión 4.19 para este caso, la fórmula que define el *redshift* crítico z_c es:

$$\frac{1}{(5+3n)} \frac{1}{E_d^{5+3n}} = \frac{\alpha_n}{3H_0} J(z_c, z^*) \rightarrow z_c \equiv z_c(E_d, z^*). \quad (4.35)$$

Pero si recordamos la definición del *redshift* umbral (fórmula 4.29), vemos que $z^* \equiv z^*(E_d)$ y por lo tanto la única dependencia de z_c es con la energía detectada: $z_c(E_d)$. Cambiaremos de este modo el límite superior de la segunda integral (que es donde se tiene en cuenta el efecto de la VPE), de forma que el flujo tomará la siguiente forma:

$$\delta\Phi(E_d) = \frac{1}{4\pi} \int_{z_1}^{z^*} \delta L(F_1(z_e, E_d)) \frac{f(z)}{k^2(z)(1+z)} dz + \frac{1}{4\pi} \int_{z_*}^{\min[z_c(E_d), z_2]} \delta L(F_3(z_e, E_d)) \frac{f(z)}{k^2(z)(1+z)} dz. \quad (4.36)$$

Ahora, al poner unos límites de integración que dependen del valor de E_d , debemos imponer nuevamente que si el límite superior de la integral es menor que el límite inferior, la integral debe arrojar un flujo nulo. Para ello hemos de modificar los límites a:

$$\delta\Phi_1(E_d) = \frac{1}{4\pi} \int_{\min[z^*, z_1]}^{\min[z^*, z_2]} \delta L(F_1(z_e, E_d)) \frac{f(z)}{k^2(z)(1+z)} dz + \frac{1}{4\pi} \int_{\min[\max[z_*, z_1], z_2]}^{\max[\min[z_c(E_d), z_2], z_1]} \delta L(F_3(z_e, E_d)) \frac{f(z)}{k^2(z)(1+z)} dz. \quad (4.37)$$

En principio, con el flujo definido por las ecuaciones 4.37 y 4.28 ya deberíamos estar preparados para calcular computacionalmente valores numéricos. En el capítulo siguiente mostramos la realización de la simulación y en el último apartado discutiremos los resultados.

5. Integración numérica y resultados

En este apartado nos disponemos a diseñar un programa, con el software *Wolfram Mathematica*, para resolver numéricamente los valores del flujo de neutrinos detectados. A continuación explicaremos el proceso realizado y expondremos de forma visual los resultados.

En primer lugar, debemos dar valores numéricos a las constantes que aparecen de forma recurrente en las ecuaciones. Estos se han obtenido en su mayoría consultando la referencia [8].

```
z1 = 0.5; (*Cota inferior de fuentes*)
z2 = 2.0; (*Cota superior de fuentes*)

n = 2.0; (*Orden de la corrección*)
m = 5 + 3n; (*Útil para ahorrar notación*)

Mp = 1.220910 * 10^(13); (*PeV*)(*Masa de Planck*)
La = 0.008; (*Adimensional*)(*Λ = La * Mp*)(*Escala*)

me = 0.510998928 * 10^(-9); (*PeV*)(*Masa del electrón*)
Eu = ((4 * me^2 * Mp^n)^(1/(2 + n))) * La^(n/(2 + n)); (*PeV*)(*Energía umbral*)

GF = 1.1663787 * 10^7; (*PeV^-2*)(*Constante de Fermi*)
ξn = (13/10) - (12(2n + 15))/((n + 3)(n + 4)(n + 5)(n + 6)) +
(12(4n + 3))/((2n + 3)(2n + 4)(2n + 5)(2n + 6)) - (2(5n + 4))
/((3n + 4)(3n + 5)(3n + 6)) + (10)/(3(3n + 7)(3n + 8)); (*Constante ξ'n*)
sw = 0.2223; (*Adimensional*)(*Seno del ángulo de Weinberg*)

αn = (GF^2 * ξn * ((1 - 2 * sw^2)^2 + (2 * sw^2)^2)/(192 * Pi^3)) * (La * Mp)^(-3n);
(*Constante de creación de pares*)

αn3H0 = αn/(3 * H0); (*Útil para ahorrar notación*)
```

Como se puede apreciar en el bloque anterior, además de dar valores a las constantes, hemos debido escoger valores numéricos para algunos parámetros de la simulación. Dos parámetros importantes que definen la nueva física son la escala Λ y el orden de corrección n . Estos a su vez determinarán el valor de la energía umbral E^* según la fórmula 4.5.

En la referencias [2], [1] y [6], Stecker *et al.* utilizan, por motivos empíricos, una energía umbral $E^* = 10 \text{ PeV}$ (porque las observaciones hechas por IceCube muestran una caída en el espectro de neutrinos a ese orden). Para poder comparar nuestros resultados con estos datos, se intentarán escoger valores n y Λ de tal forma que la energía umbral sea de ese orden, teniendo en cuenta también que la escala Λ se espera de un orden cercano a la masa de Planck.

Para el caso $n = 1$, proponiendo una escala $\Lambda \sim M_p$ obtenemos $E^* \sim 10^{-5} \text{ PeV}$. En vista de los resultados de IceCube, esta energía umbral es demasiado pequeña para estar acorde con los resultados experimentales. Por ello el caso $n = 1$ queda descartado.

En el caso $n = 2$, suponiendo $\Lambda \sim M_{\text{Pl}}$ se obtiene $E^* \sim 100 \text{ PeV}$. Como el orden de esta energía no dista demasiado del PeV, podemos intentar cambiar un poco la escala para conseguir $E^* \sim 10 \text{ PeV}$. De esta forma, el valor escogido es $\Lambda = 0.008 M_{\text{Pl}}$.

Definidos los valores de las constantes y parámetros, podemos pasar a definir las distintas funciones que irán dentro de la integral de flujo. Estas son las funciones $H(z)$ (fórmula 2.15), $k(z)$ (fórmula 2.21), la distribución $f(z)$ (fórmula 3.4), y la luminosidad $L(E_e)$ (fórmula 3.12):

```
Ωm = 0.308; (*Adimensional*)
ΩΛ = 0.692; (*Adimensional*)
H0 = 1.382262857 * 10^(-48); (*PeV*)

H[z_]:=H0 * Sqrt[Ωm * (1 + z)^3 + ΩΛ];
```

```
k[z_?NumericQ]:=(1/H0) * NIntegrate[1/Sqrt[Ωm * (1 + x)^3 + ΩΛ], {x, 0, z}];
```

```
a = -0.872659348799341; (*Adimensional*)
b = 2.85385016357682; (*Adimensional*)
c = 12.6972427290702; (*Adimensional*)

f[z_]:=E^(a * z^2 + b * z + c);
```

```
L[Ee_]:=1/Ee^2;
```

Conocidas las funciones del integrando, antes de examinar la relación entre la energía emitida y detectada, debemos definir la función $J(z_i, z_k)$ (fórmula 4.18), donde recordemos que z_i y z_k corresponden a las posiciones donde comienza y termina la producción de pares, respectivamente:

```
PrimJ[t_] = Integrate[(t^(2/3 + n))/(Sqrt[Ωm * t + ΩΛ]), t];

J[zi_, zk_]:=PrimJ[(1 + zi)^3] - PrimJ[(1 + zk)^3];
```

Hecho esto, ya podemos definir las funciones $F_1(z_e, E_d)$, $F_2(z_e, E_d)$ y $F_3(z_e, E_d)$, dadas por las fórmulas 4.31, 4.24 y 4.33, respectivamente. Recordemos que estas funciones nos dicen la energía de emisión que debe tener una fuente localizada a un *redshift* z_e para que sus neutrinos nos lleguen con energía E_d :

```
F1[ze_, Ed_]:= (1 + ze) * Ed;
F2[ze_, Ed_]:= (1 + ze) * (Ed^(-m) - m * αn3H0 * J[ze, z0])^(-1/m);
F3[ze_, Ed_]:= (1 + ze) * (Ed^(-m) - m * αn3H0 * J[ze, (Eu/Ed) - 1])^(-1/m);
```

Definidas las funciones $F_1(z_e, E_d)$, $F_2(z_e, E_d)$ y $F_3(z_e, E_d)$, el siguiente paso es escribir la expresión del flujo. Pero para ello necesitamos definir los límites de integración. Recordemos que uno de ellos podía ser el *redshift* crítico z_c ; de esta forma, hemos de plantear cómo hallar su valor.

Sabemos que su definición surge de las igualdades 4.35 y 4.26 en cada caso; sin embargo, no es una expresión de la que sea posible despejar la variable, así que la resolución se llevará a cabo mediante un ajuste que busque el valor adecuado para que se dé la igualdad. Aclarado esto, escribimos los dos casos por separado, $z_{c0} = z_c(E_d, 0)$ y $z_c(E_d, z^*)$:


```

zc0[Ed_] := x /. FindRoot[(m *  $\alpha$ n3H0 * Ed^m)^(-1) - J[x, z0] == 0, {x, 10^4}];
zc[Ed_] := x /. FindRoot[(m *  $\alpha$ n3H0 * Ed^m)^(-1) - J[x, (Eu/Ed) - 1] == 0, {x, 10^4}];

```

Conviene representar los valores de este *redshift* crítico para ambos casos, ya que el orden de magnitud respecto al rango de z escogido ($z \in [0.5, 2.0]$) será muy relevante en el resultado final. Esto es así, ya que recordemos que z_c limita la cantidad de fuentes que pueden producir flujo:

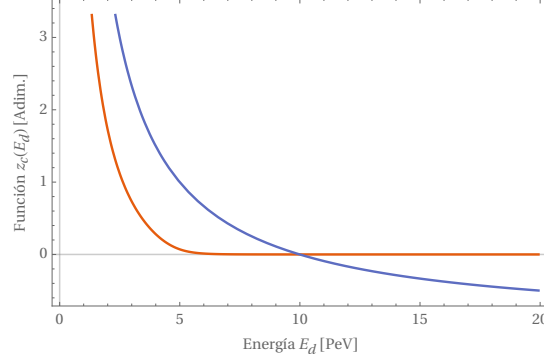


Figura 11: Redshift crítico $z_c(E_d, 0)$ (naranja) y $z_c(E_d, z^*)$ (azul)

Como se puede apreciar en la gráfica, ambas funciones decrecen rápidamente con la energía a valores mucho menores que $z_1 = 0.5$ y $z_2 = 2.0$. Esto implica que, incluso desde energías inferiores al umbral, el número de fuentes capaces de producir flujo decrece drásticamente, prediciendo una caída en el número de neutrinos. Para comprobar esta afirmación, escribiremos a continuación el código correspondiente a las expresiones del flujo:

- Caso $E_d < E^*$

En este caso usamos la primera definición de flujo:

```

 $\Phi$ 1[Ed_] :=
NIntegrate[
(L[F1[z, Ed]] * f[z] * Ed) / (F1[z, Ed] * (k[z])^2 * (1 + z)),
{z, Min[z1, (Eu/Ed) - 1], Min[(Eu/Ed) - 1, z2]}] +
NIntegrate[
(L[F3[z, Ed]] * f[z] * Ed) / (F3[z, Ed] * (k[z])^2 * (1 + z)),
{z, Min[Max[(Eu/Ed) - 1, z1], z2], Max[Min[z2, zc[Ed]], z1]}];

```

- Caso $E_d > E^*$

En este caso usamos la segunda definición de flujo:

```

 $\Phi$ 2[Ed_] := NIntegrate[
(L[F2[z, Ed]] * f[z] * Ed) / (F2[z, Ed] * k[z] * k[z] * (1 + z)),
{z, Min[z1, zc0[Ed]], Min[z2, zc0[Ed]]}];

```

Con todo ello, ya tenemos todos los ingredientes para iniciar la simulación. Simulamos un flujo detectado entre una energía mínima $E_{\min} = 0.1$ PeV y una energía máxima $E_{\max} = 100$ PeV.

La primera definición de flujo será válida hasta la energía umbral $E^* = 10$ PeV (figura 12), y la segunda será la que valga para energías mayores (figura 13):

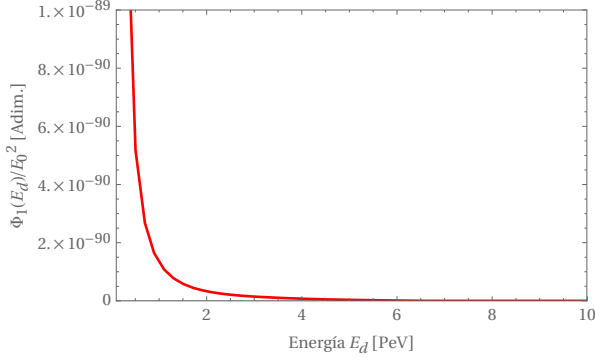


Figura 12: Flujo detectado para $E_d < E^*$

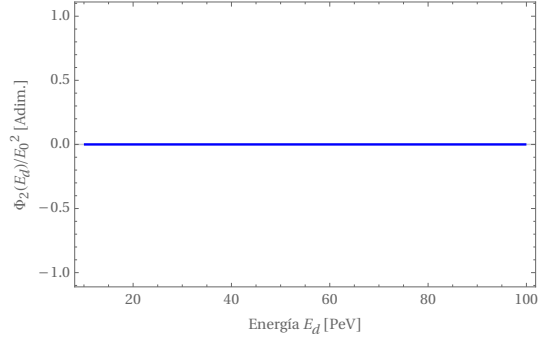


Figura 13: Flujo detectado para $E_d > E^*$

Se puede apreciar en la figura 12 que el flujo detectado (en concordancia con el emitido) decrece rápidamente con la energía según $\Phi \sim E^{-2}$. De esta forma, para poder observar la existencia de un corte, se ha multiplicado por E_d^2 (de forma que obtengamos una constante para energías inferiores a la caída) y hemos normalizado el resultado dividiendo para un flujo $\Phi_1(E_d = 1 \text{ PeV})$ (que nos permite trabajar con valores numéricos del orden de la unidad). El resultado se muestra en la figura 14. Además, hemos representado dicho flujo en forma logarítmica (figura 15), para poder comparar con las gráficas de las simulaciones de Montecarlo realizadas por F. W. Stecker *et al.* (figuras 1 y 2).

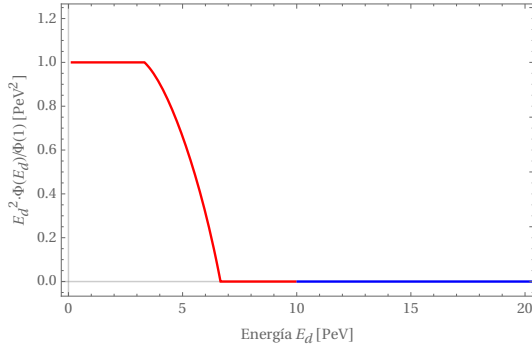


Figura 14: Flujo completo en función de E_d

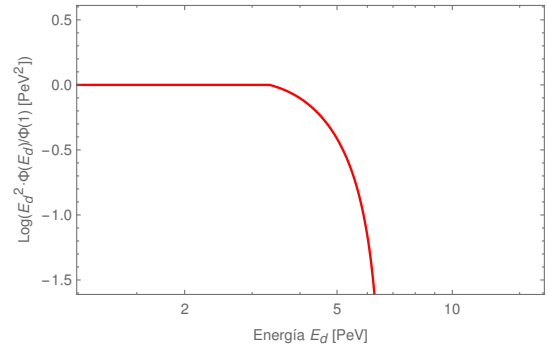


Figura 15: Representación logarítmica del flujo

Podemos apreciar cómo se reproduce claramente el *cut-off* esperado; no obstante, discutiremos estas gráficas y sus implicaciones en el siguiente apartado.

6. Conclusiones y discusión

En este apartado trataremos de realizar un breve reflexión de los resultados obtenidos en el apartado anterior. Para ello, recordemos el contexto y marco que rodean el trabajo.

Al principio de la memoria, en el apartado de introducción, se mostraron las gráficas 1 y 2, correspondientes a los artículos de las referencias [1] y [2] de F. W. Stecker *et al.*. En la gráfica 2, se muestran los eventos detectados por el detector de neutrinos IceCube, donde se puede notar cómo para valores de energía por encima de los 2 PeV no se tienen eventos detectados.

Este hecho choca con lo esperable para un espectro que se comporta según $\sim E_d^{-2}$. Pero además, otra razón adicional para encontrar neutrinos en dicho tramo del espectro, es que para una energía del orden de 6.3 PeV ocurre la formación resonante de un bosón W , denominada resonancia de Glashow [3]. Esta resonancia aumenta la sección eficaz de detección de neutrinos en torno al pico. De esta forma, teniendo en cuenta el aumento en la sección eficaz y que el espectro de energías disminuye con la energía al cuadrado, se puede calcular que se deberían obtener cerca de 3 eventos. Sin embargo, éstos no se observan.

Podemos encontrar una explicación para esta ausencia de eventos si consideramos que existe un corte en el flujo de neutrinos para dichas energías. De esta forma, asumiendo que no es un efecto intrínseco del espectro de emisión, ha de existir algún efecto externo que impide que nos lleguen neutrinos de más altas energías. La solución que más acorde está con los resultados experimentales es considerar un escenario de LIV, donde se puede dar la producción de pares en el vacío en conjunción con el efecto de la expansión del universo, de forma que provoquen una disminución drástica en el número de neutrinos para valores de energía cercanos al PeV.

F. W. Stecker *et al.* ha realizado simulaciones de Montecarlo para observar cómo sería el *cut-off* provocado por la nueva física, con intenciones de comprobar si el corte obtenido podría explicar la ausencia de neutrinos de más de 2 PeV. El resultado que obtuvo es que el espectro simulado puede explicar la ausencia de eventos si el valor de la energía umbral está entorno a 10 PeV. Sin embargo, cabe destacar que el corte ocurre antes de llegar a esta energía.

De esta forma, las simulaciones de Montecarlo han logrado comprobar que los efectos de la LIV pueden provocar un corte en el espectro, el cual se puede ajustar a los datos experimentales para una elección adecuada de los parámetros ($E^* \sim 10$ PeV). Sin embargo, no nos proporciona información sobre el funcionamiento del propio proceso. De ahí la potencia de la estrategia utilizada en este trabajo para analizar el espectro del flujo detectado.

Como primera conclusión, podemos confirmar que considerando los efectos de LIV, la producción de pares en conjunción con la expansión provocan analíticamente un *cut-off* en el espectro de neutrinos, que puede explicar datos experimentales de IceCube. Pero además, gracias a la fórmula de integral de flujo, podemos saber que este corte se debe mayormente a la restricción dada por el *redshift* crítico z_c en el número de fuentes que son capaces de aportar contribución al flujo, más que por grandes variaciones en la relación entre la energía emitida y detectada en los casos con VPE ($F_2(z_e, E_d)$ y $F_3(z_e, E_d)$) respecto al caso trivial ($F_1(z_e, E_d)$).

Pero además, podemos argumentar una razón de por qué el *cut-off* del espectro se da a una energía menor al umbral (siendo que esta es la energía que debería marcar la escala característica a la que se produce este efecto). Partamos de la ecuación 4.16, la cual representa de forma

diferencial la variación de la energía al tener en cuenta VPE y *redshift*. Reescribámosla de la siguiente forma:

$$\frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}^{6+3n}} = \frac{\alpha_n}{3H_0} \frac{t^{2/3+n}}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} dt \quad \rightarrow \quad \frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}} = \frac{\tilde{E}^{5+3n}}{\left(\frac{3H_0}{\alpha_n}\right)} j(t) dt, \quad (6.1)$$

donde $j(t)$ es el integrando de la función $J(z_i, z_k)$, y absorbe toda la dependencia con el *redshift* z (ya que $t = (1+z)^3$). Si identificamos el término entre paréntesis con una energía, obtenemos:

$$E_n = \left(\frac{3H_0}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{5+3n}} \quad \rightarrow \quad \frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}} = \left(\frac{\tilde{E}}{E_n}\right)^{5+3n} j(t) dt. \quad (6.2)$$

De esta forma, la energía E_n se convierte en una nueva escala característica del sistema que dicta cómo de rápido un neutrino pierde energía debido a la producción de pares. Si la energía $\tilde{E} \gg E_n$, el cociente es mayor que uno y al estar elevado a un exponente positivo grande (para $n = 2$, el exponente vale 11), hará que el neutrino pierda rápidamente energía, hasta alcanzar un valor donde $\tilde{E} \sim E_n$. En ese momento, el cociente se acerca a uno, y la variación de \tilde{E} se ralentiza hasta ser despreciable. De esta forma, $\tilde{E}|_{\text{detectado}} \sim E_n$:

$$\tilde{E}|_{\text{detectado}} = \frac{E_d}{1+0} = E_d \sim E_n, \quad (6.3)$$

y hay una clara tendencia a apantallar todos aquellos neutrinos con energías mayores a E_n , de forma que siempre nos llegan con energías del orden de E_n o menores. Así, uno puede darse cuenta de cómo la escala de energías que dicta la posición del *cut-off* es E_n y no E^* . Para nuestros datos, obtenemos que el valor de esta escala es $E_n \approx 5 \text{ PeV} < E^*$, lo cual está en acuerdo con el flujo simulado.

Por último, nos gustaría destacar que, a pesar de que ambas escalas energéticas (E^* y E_n) tienen definiciones completamente diferentes, involucrando constantes de distinta naturaleza elevados a exponentes diferentes, se conjuntan de tal forma que ambas predicen una escala de energía característica del orden del PeV, para el valor de Λ que hemos tomado ($\Lambda = 0.008 M_{\text{Pl}}$):

$$E^* = \left(4m_e^2 \Lambda^n\right)^{\frac{1}{2+n}} \propto \left(m_e^2 \Lambda^n\right)^{\frac{1}{2+n}} \sim \text{PeV} \quad (6.4)$$

$$E_n = \left(\frac{3H_0}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{5+3n}} \propto \left(\frac{H_0 \Lambda^{3n}}{G_F^2}\right)^{\frac{1}{5+3n}} \sim \text{PeV}. \quad (6.5)$$

De esta forma, notamos cómo el PeV es una escala de energías apropiada para estudiar este fenómeno, que surge de forma natural de las ecuaciones, y justifica en gran medida los valores de los parámetros escogidos.

Como posible extensión del trabajo expuesto, cabría considerar la incorporación del *neutrino splitting*, así como una distribución de fuentes más realista, sin los cortes artificiales que hemos tomado en $z_1 = 0.5$ y $z_2 = 2.0$. No obstante, es de esperar que el añadido de estas mejoras no afecte de modo significativo a las conclusiones de este trabajo.

7. Bibliografía

- [1] Floyd W. Stecker y col. «Searching for Traces of Planck-Scale Physics with High Energy Neutrinos». En: *Phys. Rev. D* 91, 045009 (2015) (21 de nov. de 2014). DOI: 10.1103/PhysRevD.91.045009. arXiv: 1411.5889v3 [hep-ph].
- [2] Floyd W Stecker y Sean T Scully. «Propagation of superluminal PeV IceCube neutrinos: a high energy spectral cutoff or new constraints on Lorentz invariance violation». En: *Physical Review D* 90.4 (2014), pág. 043012.
- [3] Sheldon L. Glashow. «Resonant Scattering of Antineutrinos». En: *Phys. Rev.* 118 (1960), págs. 316-317. DOI: 10.1103/PhysRev.118.316.
- [4] Stefano Liberati y Luca Maccione. «Quantum Gravity phenomenology: achievements and challenges». En: (31 de mayo de 2011). DOI: 10.1088/1742-6596/314/1/012007. arXiv: 1105.6234v1 [astro-ph.HE].
- [5] O. W. Greenberg. «CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance». En: *Phys. Rev. Lett.* 89:231602 (2002) (28 de ene. de 2002). DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.231602. arXiv: hep-ph/0201258v3 [hep-ph].
- [6] Floyd W Stecker. «Search for the footprints of new physics with laboratory and cosmic neutrinos». En: *Modern Physics Letters A* 32.20 (2017), pág. 1730014.
- [7] L. E. Suelves Casaus y J. M. Carmona Martínez. «Posibles efectos de la escala de Planck en la propagación de neutrinos de muy alta energía». En: (2016).
- [8] C. Patrignani y col. «Review of Particle Physics». En: *Chin. Phys.* C40.10 (2016). DOI: 10.1088/1674-1137/40/10/100001.
- [9] J. M. Carmona, J. L. Cortes y D. Mazon. «Uncertainties in Constraints from Pair Production on Superluminal Neutrinos». En: *Phys. Rev. D* 85, 113001 (2012) (12 de mar. de 2012). DOI: 10.1103/PhysRevD.85.113001. arXiv: 1203.2585v2 [hep-ph].