

# **Trabajo de fin de grado:**

## **Grupos hiperbólicos**



**Inés Aldea Blasco**  
Trabajo de fin de grado en Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Conchita Martínez Pérez  
28 de junio de 2018



# Prólogo

Normalmente, el enfoque clásico a la hora de realizar un análisis de las propiedades de los grupos es principalmente algebraico. El objeto del presente trabajo consiste en realizar un análisis geométrico de estas estructuras matemáticas, asociando a cada grupo un grafo.

Así, por un lado analizaremos la relación entre los grupos y sus grafos de Cayley. Por otro lado, dotaremos de estructura métrica a estos grafos, lo que finalmente nos permitirá definir el concepto de grupo hiperbólico.

Finalmente, veremos como utilizando este punto de vista es posible resolver algunos problemas y estudiar ciertas propiedades para los grupos hiperbólicos.



# Summary

In this work we discuss the construction of hyperbolics groups.

Firstly, we introduce previous concepts such as the presentation of a group  $\langle S \mid R \rangle$ , where  $S$  is a set of letters that we call generators and  $R \subset \mathbb{F}(S)$  is a set of relations with  $\mathbb{F}(S)$  the free group over the set  $S$  that we define as follows:

**Definition.** The free group  $\mathbb{F}(S)$  is the group consisting of reduced words in  $S$ , with concatenation followed possibly by reduction as group operation. Here reduced means that there is no subword of the form  $ss^{-1}$  or  $s^{-1}s$ .

We continue with the defition of Cayley graphs where we differentiate between the directed or undirected version.

**Definition.** The directed Cayley graph  $Cay(G, S)$  of a group  $G$  with respect to a subset  $S$  is the graph whose vertex are the elements of  $G$  and an edge from  $g$  to  $h$  if and only if  $h = gs$  for some  $s \in S$ .

If the set  $S$  is simetric we can define the undirected Cayley graph identifying the edge from  $g$  to  $h$  with the edge  $h$  to  $g$ .

In this Cayley graph we define a estructure of geodesic metric space which restricts to the word metric for the elements of  $G$ . This metric measures the distance between two points  $g$  and  $h$  as the smallest number of letters that contains a word that represents  $g^{-1}h$ . The metric in the Cayley graph is the extension of the word metric to the edges of the graph under the requirement that the group action has to be an isometry (i.e a bijection that preserves distances).

This action is the extension of the action of the group on itself by left translation,

$$\begin{aligned}\phi : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto \phi(g, h) = gh\end{aligned}$$

In the third chapter we introduce the notion of quasi isometry.

**Definition.** Let  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  be metric spaces and let  $f : X_1 \longrightarrow X_2$  be a map from  $X_1$  to  $X_2$ . We say that  $f$  is a  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi isometric embedding if there are constants  $\lambda \geq 1$  y  $\varepsilon \geq 0$  such that for any  $x, y \in X_1$  we have:

$$\frac{1}{\lambda}d_1(x, y) - \varepsilon \leq d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y) + \varepsilon$$

Also if there is  $C \geq 0$  with the property that for any  $x_2 \in X_2$  exist  $x_1 \in X_1$  such that  $d_2(f(x_1), x_2) \leq C$  then  $f$  we say  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi isometry. In this case  $X_1$  and  $X_2$  are quasi isometric.

Using these type of maps we can relate two possible Cayley graphs of a group  $G$  associated to different generating families  $S_1$  and  $S_2$ . More precisely, we can prove that in that situation there is a quasi isometry between  $Cay(G, S_1)$  and  $Cay(G, S_2)$ .

The following result, Švarc-Milnor lemma, relates the geometry of a group with the geometry of the metric spaces on which the group acts. This is the topological formulation.

**Lemma 0.1.** *Let  $G$  be a group acting by isometries on a locally compact geodesic metric space  $(X, d)$ . Furthermore suppose that this action is proper and cocompact. Then  $G$  is finitely generated, and for all  $x \in X$  the map:*

$$\begin{aligned} (G, d_S) &\longrightarrow (X, d) \\ g &\longmapsto gx \end{aligned}$$

is a quasi isometry.

Next, we consider Gromov hyperbolic spaces. Later on, we will consider groups acting nicely on these spaces. To do that we need a series of definitions.

**Definition.** The geodesic metric space  $X$  is hyperbolic if there exists  $\delta \geq 0$  so that for any geodesic triangle  $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  and any  $p \in [x, y]$  there exists some  $q \in [y, z] \cup [z, x]$  with  $d(p, q) \leq \delta$

As examples of hyperbolic spaces we consider spaces of finite diameter, trees and the hyperbolic plane.

One of main results of this chapter is the following:

**Corollary 0.2.** *If the geodesic metric spaces  $X, Y$  are quasi isometric, then  $X$  is hyperbolic if and only if  $Y$  is hyperbolic.*

This allows us to define the hyperbolic groups as follows:

**Definition.** The finitely generated group  $G$  is hyperbolic if its Cayley graph respect to any finite symmetric generating family is hyperbolic.

And using the Švarc-Milnor Lemma we get:

**Lemma 0.3.** *If one group  $G$  acts properly and cocompact on the hyperbolic metric space  $X$ , then  $G$  is a hyperbolic group.*

As first examples of hyperbolic groups we consider finite and free groups. Later, we consider the family of triangle groups, which are groups given by the presentation:

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^n = (bc)^m = (ac)^l = 1 \rangle$$

where  $n, m, l$  are either positive integers or  $\infty$ .

These groups can be interpreted as simmetry groups of certain tesselations by triangles of either the Euclidean plane, the surface of the sphere or the hyperbolic plane. We show that in the hyperbolic case, which corresponds to the case when

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{l} < 1$$

these groups are in fact hyperbolic. To do that we use the action of these groups on the Poincaré model for the hyperbolic plane.

Finally, we talk about the word problem. Let  $\langle S \mid R \rangle$  be a finite presentation of a group  $G$ . The word problem is to decide whether given a word  $\omega \in \mathbb{F}(S)$  it represents the trivial element of  $G$  or not.

We prove:

**Theorem 0.4.** *The word problem is solvable for hyperbolic groups.*

# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>III</b>
<b>Summary</b>	<b>v</b>
<b>1. Conceptos Previos</b>	<b>1</b>
1.1. Grupos . . . . .	1
1.1.1. Grupos libres . . . . .	1
1.1.2. Presentaciones de grupos . . . . .	2
<b>2. Grafos de Cayley</b>	<b>3</b>
2.1. Definición y ejemplos . . . . .	3
2.2. Métrica de los grafos . . . . .	6
2.2.1. Métrica de la palabra . . . . .	7
2.3. Espacios métricos geodésicos . . . . .	8
2.4. Acción de un grupo $G$ sobre los grafos de Cayley . . . . .	8
<b>3. Cuasi isometrías</b>	<b>11</b>
3.1. Relación entre los grafos de Cayley y las cuasi isometrías . . . . .	13
3.2. Lema de Švarc-Milnor . . . . .	14
<b>4. Espacios hiperbólicos de Gromov</b>	<b>17</b>
4.1. Plano hiperbólico . . . . .	19
<b>5. Grupos Hiperbólicos</b>	<b>21</b>
5.1. Grupos Triangulares . . . . .	21
5.2. El problema de la palabra . . . . .	23
<b>Bibliografía</b>	<b>27</b>



# Capítulo 1

## Conceptos Previos

A continuación vamos a describir herramientas que nos serán útiles a medida que avancemos en la descripción del trabajo.

### 1.1. Grupos

**Definición.** Un *grupo*  $G$  es un conjunto con una operación binaria interna asociativa  $*$ , con elemento neutro e inverso para cada elemento.

Un grupo  $G$  se dice *abeliano* (o conmutativo) si  $*$  es conmutativa:  $a * b = b * a$  para todo  $a, b \in G$ .

**Definición.** Un *subgrupo*  $H$  de un grupo  $G$  es un subconjunto  $H \subset G$  que es un grupo con la operación heredada de  $G$  y se denota  $H \leq G$ .

**Definición.** Un subconjunto  $S$  de un grupo  $G$  es una *familia generadora* si no hay ningún subgrupo  $H \not\leq G$  que contenga a  $S$ . Esto es equivalente a que cada elemento del grupo se puede expresar como un producto finito de elementos del subconjunto y sus inversos.

**Definición.** Un subgrupo  $N$  de un grupo  $G$  se dice *normal* si  $g^{-1}Ng = N$  para todo  $g \in G$  y se denota  $N \trianglelefteq G$ . Así,  $G/N$  tiene estructura de grupo cociente.

**Definición.** Un *homomorfismo* entre dos grupos  $(G, .)$  y  $(H, .)$  es una aplicación  $f : G \rightarrow H$  tal que  $f(ab) = f(a)f(b)$  para todo  $a, b \in G$ .

**Definición.** Una *acción* de un grupo  $(G, *)$  sobre un conjunto  $X$  es una aplicación  $\phi : G \times X \rightarrow X$  que cumple:

1.  $\forall x \in X, \phi(e, x) = x$  donde  $e$  es el elemento neutro del grupo.
2.  $\forall x \in X, g, h \in G, \phi_{g*h}(x) = \phi_g \circ \phi_h(x)$  donde:

$$\begin{aligned}\phi_g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto \phi(g, x)\end{aligned}$$

Para simplificar la notación la operación del grupo se denota por yuxtaposición, es decir  $g * h = gh$ .

#### 1.1.1. Grupos libres

Veamos la construcción del grupo libre. Sea  $S$  un conjunto de símbolos  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  y  $S^{-1} = \{s_1^{-1}, s_2^{-1}, \dots, s_n^{-1}\}$ . Llamaremos *letras* a los elementos de  $S \cup S^{-1}$  y *palabra* a la yuxtaposición de letras. Denotaremos  $s_i^n = \underbrace{s_i \dots s_i}_{n \text{ veces}}$  y  $s_i^{-n} = \underbrace{s_i^{-1} \dots s_i^{-1}}_{n \text{ veces}}$ . Diremos que  $s_i^{-1}$  es el inverso de  $s_i$ .

**Definición.** Una *reducción* consiste en eliminar dos letras consecutivas de la forma  $ss^{-1}$  o  $s^{-1}s$ . Una palabra es *reducida* si no admite ninguna reducción, es decir si no tiene dos letras consecutivas de la forma  $ss^{-1}$  o  $s^{-1}s$ .

**Ejemplo 1.1.** Tomamos  $S=\{a,b,c\}$ . Una palabra (no reducida) en  $S$  sería  $a^2b^3acc^{-1}a^{-1}c$  y  $a^2b^3c$  es una palabra reducida.

**Definición.** Llamamos *grupo libre sobre  $S$*  al conjunto de todas las palabras reducidas en  $S \cup S^{-1}$  con la operación interna consistente en la concatenación seguida posiblemente de una serie de reducciones y cuya identidad es la palabra vacía, es decir, la palabra que no tiene ninguna letra. Lo denotaremos por  $\mathbb{F}(S)$ .

Otra forma alternativa, es definir el grupo libre sobre  $S$  como el conjunto de clases de equivalencia en el conjunto de palabras en  $S \cup S^{-1}$  respecto a la relación de equivalencia generada por:

$$\omega \equiv \omega' \Leftrightarrow \omega' \text{ es una reducción de } \omega \text{ o al contrario}$$

### 1.1.2. Presentaciones de grupos

Vamos a ver que una presentación es una forma de definir el grupo mediante dos conjuntos. Para ello relacionamos cualquier grupo con un grupo libre.

Tomamos un grupo  $G$  y una familia generadora  $S$ . Cada elemento se puede expresar como producto de elementos de  $S$ , aunque no necesariamente de modo único. Por tanto existe un homomorfismo suprayectivo  $\phi : \mathbb{F}(S) \longrightarrow G$ , luego por el primer teorema de isomorfía de grupos tenemos que  $G \cong \mathbb{F}(S)/N$  donde  $N$  es el núcleo de  $\phi$ . Como resultado, todo grupo  $G$  se puede poner como el cociente de un grupo libre por un subgrupo normal.

**Definición.** Sea  $R$  una colección de palabras de  $\mathbb{F}(S)$  tales que  $N(R)$  es el menor subgrupo normal que contiene a  $R$ . Entonces  $\langle S \mid R \rangle$  es una *presentación del grupo  $\mathbb{F}(S)/N(R)$* .

Diremos que  $G$  es un *grupo finitamente presentado* si existe  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  conjunto generador de  $G$  y  $R = r_1, \dots, r_n$  un conjunto de relaciones entre los elementos de  $S$  tales que  $G = \langle S \mid R \rangle$ . Si  $S$  es finito, el grupo se dice finitamente generado.

#### Ejemplos.

1.  $\langle y \mid \_ \rangle = \langle y \mid \_ \rangle = \mathbb{Z}$
2.  $\langle a, b \mid a^4, b^2, ab = ba^3 \rangle$  Es una presentación del grupo diédrico  $\mathbb{D}_4$  que es el grupo de los movimientos del plano que fijan un cuadrado donde  $a$  es un giro y  $b$  es una simetría.
3. Denotaremos al grupo libre generado por  $n$  elementos por  $\mathbb{F}_n = \langle a_1, \dots, a_n \mid \_ \rangle$ .

En las relaciones en las que un elemento de la igualdad es el neutro del grupo se suele omitir.

# Capítulo 2

## Grafos de Cayley

El objetivo de este capítulo es asociar a un grupo  $G$  y una familia generadora  $S$  un grafo de Cayley, al que dotaremos de una estructura de espacio métrico. Esto nos permitirá obtener información acerca de las propiedades de dicho grupo.

### 2.1. Definición y ejemplos

**Definición.** Un *grafo* es un conjunto de puntos a los cuales llamamos vértices y copias del segmento  $[0,1]$  conectando pares de estos vértices que se llaman aristas. Consideraremos que los interiores de estas aristas son disjuntos, es decir no se cortan unas con otras.

El grafo se dice *dirigido* si las aristas tienen una orientación.

**Definición.** El *grafo de Cayley dirigido*,  $Cay(G, S)$  de  $G$  respecto de un subconjunto  $S$  es el grafo cuyos vértices son los elementos de  $G$  y cuyas aristas son los pares ordenados  $(g, h)$  tales que  $\exists s \in S \quad h = gs$  (es decir  $g^{-1}h \in S$ ) y la orientación de la arista  $(g, h)$  de  $g$  a  $h$ .

Si el conjunto  $S$  es simétrico, es decir, si  $t \in S \Rightarrow t^{-1} \in S$ , entonces también se puede definir el *grafo de Cayley no dirigido* en el que se identifican las aristas  $(g, gs)$  y  $(h, hs^{-1})$  con  $h = gs$  en  $G$  y no se considera la orientación. Si no especificamos nada se entenderá que  $S$  es simétrico y  $Cay(G, S)$  no dirigido.

Más adelante definiremos una métrica en este grafo de manera que la longitud de las aristas sea 1.

El grafo depende del conjunto  $S$ . Tomaremos como subconjunto  $S$  una familia generadora de  $G$ , lo que hace al grafo conexo y si el neutro no está en  $S$  no tendremos lazos en el grafo. Además, aunque el grafo sea dirigido, identificaremos las aristas de la forma  $(g, gs)$  y  $(h, hs^{-1})$  cuando  $h = gs$  y tanto  $s$  como  $s^{-1}$  estén en  $S$ .

Sea  $G = (\mathbb{Z}, +)$  tomamos  $S_1 = \{1\}$  (conjunto generador) o  $S_2 = \{\pm 1\}$  (conjunto generador y simétrico) para construir el grafo de Cayley.

$Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$  (Dirigido)



$Cay(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$  (No dirigido)



A continuación veamos algunos ejemplos y construcciones de grafos de Cayley de algunos grupos.

**Ejemplo 2.1.**  $Cay(\mathbb{Z}_n, \{\pm 1\})$  (No dirigido)

Nos referimos a  $\mathbb{Z}_n$  como el grupo aditivo de los enteros módulo  $n$ . Su grafo será un polígono de  $n$  lados, identificando cada vértice con un elemento de  $\mathbb{Z}_n$ . Como tenemos  $S = \{\pm 1\}$  cada elemento  $i$  estará enlazado solo con otros 2.

Veamos como quedaría un ejemplo más concreto,  $n=6$ .

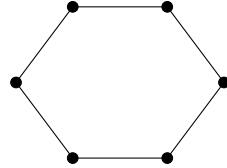


Figura 2.1:  $Cay(\mathbb{Z}_6, \{\pm 1\})$

**Ejemplo 2.2.**  $Cay(\mathbb{Z}^2, \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\})$  (No dirigido)

El conjunto  $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) | m, n \in \mathbb{Z}\}$  tiene estructura de grupo aditivo. Podemos observar que el grafo de Cayley es una cuadrícula infinita de  $\mathbb{R}^2$

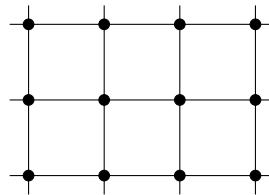


Figura 2.2:  $Cay(\mathbb{Z}^2, \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\})$

**Ejemplo 2.3.**  $Cay(S_3, \{(1 2), (1 2 3)\})$  (Dirigido)

Sea  $S_3$  el grupo simétrico de grado 3, es decir el grupo formado por las permutaciones de 3 elementos. Utilizaremos la notación por ciclos para denotar sus elementos. Todos los elementos del simétrico de orden 3 son  $S_3 = \{id, (1 2), (1 3), (2 3), (1 2 3), (1 3 2)\}$ . Veamos algunos productos entre ellos que nos son útiles para la construcción del grafo:

$$(1 2)(1 2 3) = (1 3)$$

$$(2 3)(1 2 3) = (1 2)$$

Si realizamos todos los posibles productos nos quedará el siguiente grafo:

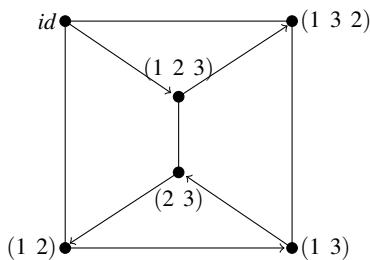
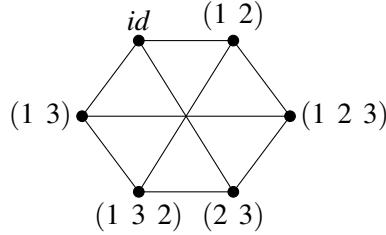


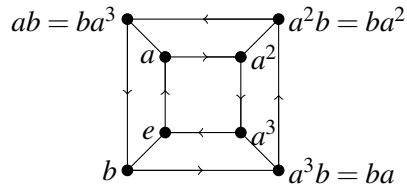
Figura 2.3:  $Cay(S_3, \{(1 2), (1 2 3)\})$

**Ejemplo 2.4.**  $Cay(S_3, \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\})$  (No dirigido)

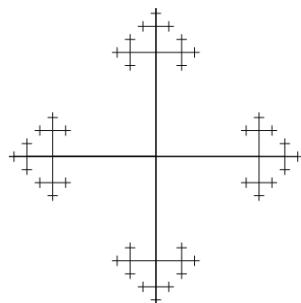
En este caso tenemos el mismo grupo que en el ejemplo anterior, sin embargo hemos escogido otro conjunto de generadores y el grafo obtenido es diferente.

Figura 2.4:  $Cay(S_3, \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\})$ **Ejemplo 2.5.**  $Cay(\mathbb{D}_4, \{a, b\})$  (Dirigido)

Tomamos la siguiente representación del diédrico  $\mathbb{D}_4 = \langle a, b \mid a^4, b^2, ab = ba^3 \rangle$  y mediante sus relaciones operamos entre los elementos del grupo los cuales son  $\mathbb{D}_4 = \{id, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ .

Figura 2.5:  $Cay(\mathbb{D}_4, \{a, b\})$ **Ejemplo 2.6.**  $Cay(\mathbb{F}_2, \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\})$  (No dirigido)

Tomamos el grupo libre con dos generadores y fijamos la identidad como el nodo central del grafo. Este nodo estará enlazado  $S = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$  con sus cuatro elementos, los cuales serán nodos del grafo. Haciendo esto en cada uno de los nodos resultantes obtenemos:

Figura 2.6:  $Cay(\mathbb{F}_2, \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\})$

## 2.2. Métrica de los grafos

Una vez definido el grafo de Cayley vamos a definir una noción de distancia para dotarlo de estructura de espacio métrico.

**Definición.** Llamamos *espacio métrico* al par  $(X, d)$  donde  $X$  es un conjunto y  $d$  es una aplicación  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  llamada *distancia* o *métrica* que satisface:

- $d(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in X$  y  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in X$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para todo  $x, y, z \in X$

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una *isometría* es una aplicación biyectiva  $\phi : X \rightarrow X$  que conserva las distancias, es decir, tal que:

$$d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y))$$

para cualesquiera  $x, y \in X$

Podemos asignar a cada arista  $e$  del grafo un número positivo  $l(e)$  al cual llamamos *longitud*. Mediante esta asignación podemos definir una *pseudo-métrica* de la siguiente manera:

Fijamos para cada arista  $e$  un homeomorfismo  $\phi_e : e \rightarrow [0, 1]$  y definimos una función auxiliar  $\rho(x, y) = l(e)|\phi_e(x) - \phi_e(y)|$  si  $x, y \in e$  y  $\rho(x, y) = \infty$  si ocurre lo contrario.

Así definimos la distancia:

$$d(x, y) = \inf_{x=x_0, \dots, x_n=y} \sum \rho(x_i, x_{i+1})$$

siendo  $\{x_i\}$  una cadena de  $x$  a  $y$ ; es decir un conjunto ordenado de puntos  $x_0, \dots, x_n$  del grafo con  $x = x_0$   $y = x_n$ .

**Lema 2.1.** En la definición anterior el ínfimo se puede calcular considerando solamente aquellas cadenas  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$  para las que los puntos  $x_1, \dots, x_{n-1}$  son vértices del grafo.

*Demostración.* Supongamos que  $\sum \{\rho(x_i, x_{i+1}) | x_i \text{ ó } x_{i+1} \text{ no es vértice}\}$  es finita. Entonces si  $x_i$  no es vértice tanto  $\rho(x_i, x_{i+1})$  como  $\rho(x_{i-1}, x_i)$  son finitos de manera que  $x_{i-1}$  y  $x_{i+1}$  están contenidos en la misma arista que  $x_i$  si  $i \neq 0, n$ .

Eliminando estos  $x_i$  intermedios que no son vértices no aumentamos el valor de la suma por la desigualdad triangular  $\rho(x_{i-1}, x_{i+1}) \leq \rho(x_{i-1}, x_i) + \rho(x_i, x_{i+1})$  y de esta forma encontramos una nueva cadena en las condiciones del enunciado de forma que la suma de los valores de  $\rho$  entre los puntos consecutivos es menor o igual que la de la cadena inicial.  $\square$

La única razón por la que la distancia podría no estar bien definida es que a priori el ínfimo podría ser cero. Pero esto es imposible para  $x \neq y$  siempre que haya límite inferior en la longitud de las aristas. Luego hemos definido una métrica sobre el conjunto de puntos que forman el grafo y por tanto  $Cay(G, S)$  es un espacio métrico.

### 2.2.1. Métrica de la palabra

Una vez hemos definido la métrica en los grafos de Cayley si hacemos una restricción a los puntos de  $G$ , es decir a los vértices de nuestro grafo, la métrica resultante es la llamada métrica de la palabra. Esta métrica mide la longitud más corta posible de un camino entre dos elementos de  $G$  en el grafo de Cayley.

Explícitamente, dado un elemento  $g \in G$  definimos  $\|g\|_S$  como el menor número de letras de  $S$  que puede contener una palabra que represente a  $g$ , es decir  $\|g\|_S = \min\{n \mid \exists s_1, \dots, s_n \in S \quad g = s_1 \cdot \dots \cdot s_n\}$ . De esta forma, dados  $g, h \in G$  definimos la distancia de  $g$  a  $h$  como:

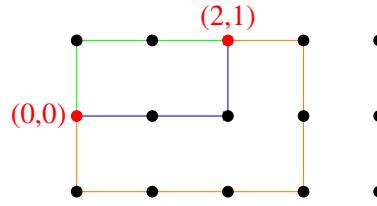
$$d_S(g, h) = \|g^{-1}h\|_S = \min\{n \mid \exists s_1, \dots, s_n \in S \quad g^{-1}h = s_1 \cdot \dots \cdot s_n\}$$

Observamos que la métrica cambia si cambiamos la familia generadora.

**Ejemplo.** Tomamos  $\mathbb{Z}^2$  y  $S = \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}$ . Calculemos la distancia entre  $g=(0,0)$  y  $h=(2,1)$ . Para ello, calculamos algunas palabras que representan a  $g^{-1}h$ .

Una palabra que lo representa es  $(0, -1) + (1, 0) + (1, 0) + (1, 0) + (0, 1) + (0, 1) + (-1, 0)$  cuya longitud es 7, sin embargo tanto  $(1, 0) + (1, 0) + (0, 1)$  como  $(0, 1) + (1, 0) + (1, 0)$  también lo representan y tienen longitud 3. Por definición  $d_S(g, h) = \|g^{-1}h\|_S = 3$ .

Como observamos en este ejemplo un elemento puede estar representado por varias palabras de distinta longitud. Además, no hay unicidad en la palabra que tiene el menor número de letras.



Por simplicidad denotaremos  $d(g, h)$  y  $\|g^{-1}h\|$ , es decir, omitiremos el subíndice si el conjunto  $S$  tomado para definir la métrica está claro.

**Teorema 2.2.** *La métrica de la palabra es una métrica*

*Demostración.* Veamos como dados dos puntos  $g, h \in G$ , la aplicación  $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $d(g, h) = \|g^{-1}h\|$  es una métrica.

- $d(g, h) \geq 0$  para todo  $g, h \in G$  puesto que hemos definido la distancia como el menor número de letras que contiene una palabra que representa  $g^{-1}h$
- $d(g, h) = 0 \Leftrightarrow g = h$  para todo  $g, h \in G$ .

$$d(g, h) = 0 \Leftrightarrow \|g^{-1}h\| = 0 \Leftrightarrow g^{-1}h \text{ viene representado por la palabra vacía} \Leftrightarrow g = h$$

- $d(g, h) = d(h, g)$  para todo  $g, h \in G$ . Supongamos que  $d(g, h) = n$ , entonces existen  $s_1, \dots, s_n \in S$  tales que  $g^{-1}h = s_1 \cdot \dots \cdot s_n$ . Por tanto  $(g^{-1}h)^{-1} = h^{-1}g = (s_1 \cdot \dots \cdot s_n)^{-1} = s_n^{-1} \cdot \dots \cdot s_1^{-1}$ . Esta palabra es reducida ya que  $s_1 \cdot \dots \cdot s_n$  lo es, pero además podemos asegurar que  $(s_1 \cdot \dots \cdot s_n)^{-1}$  tiene longitud mínima porque si no fuese así, al hacer el inverso encontraríamos una palabra con longitud menor lo que contradeciría que  $d(g, h) = n$ .

- $d(g, h) \leq d(g, l) + d(l, h)$  se cumple ya que

$$\|g^{-1}h\| = \|g^{-1}l l^{-1}h\| = \|g^{-1}l\| + \|l^{-1}h\| \text{ para todo } g, h, l \in G$$

□

### 2.3. Espacios métricos geodésicos

Fijamos un espacio métrico  $X$ . Un *camino*  $\alpha$  en  $X$  es una aplicación continua  $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$ . La longitud de un camino  $\alpha$  viene dada por:

$$l(\alpha) = \sup_{0=t_0 \leq \dots \leq t_n=1} \sum d(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1}))$$

**Definición.** Un camino es una *geodésica* si  $l(\alpha) = d(\alpha(0), \alpha(1))$ . Un espacio métrico  $X$  es un *espacio geodésico* si todo par de puntos en  $X$  están conectados por una geodésica no necesariamente única.

Dados puntos  $x$  e  $y$  en un espacio geodésico  $X$ ,  $[x, y]$  denotará un camino geodésico entre  $x$  e  $y$ .

**Teorema 2.3.** *Un grafo de Cayley es un espacio métrico geodésico.*

*Demostración.* Dados dos puntos  $g, h$  pertenecientes a  $G$ , es fácil ver que están conectados por una geodésica que viene dada por una palabra que representa a  $g^{-1}h$  y que tiene menor longitud posible. Otro caso fácil es cuando tenemos dos puntos en la misma arista.

Vamos a considerar dos puntos  $x, y \in \text{Cay}(G, S)$ . Por el lema 2.1 sabemos que en la definición de distancia basta considerar las cadenas  $\{x_i\}$  tales que  $x_i \in G$  para  $i \neq 0, n$ , donde  $x_0 = x$  y  $x_n = y$ . Con esto la distancia entre ambos puntos la podemos poner de la siguiente manera:

$$d(x, y) = \inf\{d(x, g) + d(g, h) + d(h, y) \mid d(x, g) < 1, d(h, y) < 1 \text{ con } g, h \in G\}$$

El ínfimo en realidad es un mínimo porque como mucho hay dos  $g$ 's y dos  $h$ 's que satisfacen lo anterior y se alcanzará con la concatenación de las geodésicas de  $x$  a  $g$ , de  $g$  a  $h$  y de  $h$  a  $y$  ( $d(x, y) = d(x, g) + d(g, h) + d(h, y)$ )  $\square$

### 2.4. Acción de un grupo $G$ sobre los grafos de Cayley

Sea  $G$  un grupo y  $S$  una familia generadora simétrica que consideramos fija. Supongamos que  $G$  actúa sobre sí mismo con la multiplicación a izquierda, es decir:

$$\begin{aligned} \phi : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto \phi(g, h) = gh \end{aligned}$$

Dado  $g \in G$ , consideramos la aplicación  $\phi_g$  tal que:

$$\begin{aligned} \phi_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto \phi(g, h) \end{aligned}$$

y calculamos para  $h_1, h_2 \in G$ :

$$d(\phi_g(h_1), \phi_g(h_2)) = d(gh_1, gh_2) = \|(gh_1)^{-1}gh_2\| = \|h_1^{-1}g^{-1}gh_2\| = \|h_1^{-1}h_2\| = d(h_1, h_2)$$

Como vemos  $\phi_g$  es una isometría y por tanto  $G$  actúa por isometrías en sí mismo. Nos gustaría extender dicha acción a través de las aristas para que actúe por isometrías en todo el grafo de Cayley respecto a una familia  $S$ .

Sean  $g, h_1, h_2 \in G$ , si existe una arista que une  $h_1$  y  $h_2$  hay una arista que une  $gh_1$  con  $gh_2$ . Esto es debido a que si existe una arista que une  $h_1$  con  $h_2$  entonces  $h_1^{-1}h_2 \in S$  luego  $h_1^{-1}g^{-1}gh_2 \in S$  y por tanto  $(gh_1)^{-1}gh_2 \in S$ . De esto se deduce que existe una arista que une  $gh_1$  con  $gh_2$ .

Para los puntos  $x$  de la arista entre  $h_1$  y  $h_2$ , definimos  $\phi_g(x)$  como el único punto entre  $gh_1$  y  $gh_2$  que satisface  $d(gh_1, \phi_g(x)) = d(h_1, x)$ . De esta manera,

$$\begin{aligned}\phi_g : \text{Cay}(G, S) &\rightarrow \text{Cay}(G, S) \\ x &\longmapsto \phi_g(x)\end{aligned}$$

es una isometría de  $\text{Cay}(G, S)$  y podemos definir:

$$\begin{aligned}\phi : G \times \text{Cay}(G, S) &\rightarrow \text{Cay}(G, S) \\ (g, x) &\longmapsto \phi_g(x)\end{aligned}$$

que es efectivamente una acción de  $G$  en  $\text{Cay}(G, S)$ . Para verlo vamos a considerar primero el caso en el que los puntos implicados sean vértices, es decir, elementos de  $G$ .

1.  $\phi_e(h) = eh = h$
2.  $\phi_{g_1}(\phi_{g_2}(h)) = \phi_{g_1}(g_2h) = g_1g_2h = \phi_{g_1g_2}(h)$

Sea ahora  $x$  un punto del grafo de Cayley situado en alguna arista, supongamos que los vértices de la arista sean  $h_1$  y  $h_2$ :

1.  $\phi_e(x) = x$  ya que por definición  $\phi_e(x)$  está en la arista entre  $eh_1 = h_1$  y  $h_2$  y el único elemento de esta arista que cumple la condición de la definición es el mismo  $x$ .
2.  $\phi_{g_1}(\phi_{g_2}(x)) = \phi_{g_1g_2}(x)$  ya que:

$\phi_{g_1g_2}(x)$  es el punto en la arista  $g_1g_2h_1$  y  $g_1g_2h_2$  con  $d(h_1, x) = d(g_1g_2h_1, \phi_{g_1g_2}(x))$

$\phi_{g_2}(x)$  es el punto en la arista entre  $g_2h_1$  y  $g_2h_2$  con  $d(h_1, x) = d(g_2h_1, \phi_{g_2}(x))$ . Aplicamos a este punto  $\phi_{g_1}$  luego  $\phi_{g_1}(\phi_{g_2}(x))$  es el punto en la arista  $g_1g_2h_1$  y  $g_1g_2h_2$  con  $d(h_1, x) = d(g_1g_2h_1, \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(x)))$ .

Por tanto tenemos dos puntos en la arista entre  $g_1g_2h_1$  y  $g_1g_2h_2$  con:

$$d(g_1g_2h_1, \phi_{g_1g_2}(x)) = d(h_1, x) = d(g_1g_2h_1, \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(x))) \Rightarrow \phi_{g_1g_2}(x) = \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(x))$$

Una propiedad de la acción que hemos definido es que es propia.

**Definición.** Una acción de un grupo  $G$  en un espacio métrico  $X$  es propia si para todo  $x \in X$  existe una bola  $U_x \subseteq X$  de forma que hay solo un número finito de elementos de  $G$  que llevan  $x$  a  $U_x$ , es decir el cardinal del conjunto  $\{g \in G | xg \subseteq U_x\}$  es finito para todo  $x \in X$ .

Podemos comprobar que nuestro caso la acción es propia ya que basta tomar bolas de radio menor que uno.



# Capítulo 3

## Cuasi isometrías

En el capítulo anterior hemos asociado a un grupo  $G$  y a una familia generadora finita  $S$  una métrica  $d_S$  con la que podemos dotar al grafo  $Cay(G, S)$  de una estructura de espacio métrico geodésico. Tanto la métrica  $d_S$  como el grafo  $Cay(G, S)$  dependen de la familia generadora  $S$ . Las cuasi isometrías nos permitirán relacionar estos objetos distintos.

**Definición.** Sean  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  dos espacios métricos. Se dice que una función (no necesariamente continua)  $f : X_1 \rightarrow X_2$  es una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi isometría encajada si existen constantes  $\lambda \geq 1$  y  $\varepsilon \geq 0$  tales que para todo  $x, y \in X_1$  se cumple:

$$\frac{1}{\lambda}d_1(x, y) - \varepsilon \leq d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y) + \varepsilon$$

Además si existe  $C \geq 0$  con la propiedad de que para todo  $x_2 \in X_2$  existe  $x_1 \in X_1$  tal que  $d_2(f(x_1), x_2) \leq C$  entonces  $f$  se dice  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi isometría y  $X_1$  se dice cuasi isométrico a  $X_2$ .

Podemos modificar la primera desigualdad de la definición de una cuasi isometría encajada obteniendo  $d_1(x, y) \leq \lambda d_2(f(x), f(y)) + \lambda \varepsilon$ , esta desigualdad nos será útil más adelante. Además cabe destacar que los parámetros toman un rol secundario, lo importante es la existencia de estos para poder obtener propiedades de las cuasi isometrías.

Una función es  $(K, 0)$ -cuasi isometría encajada si es bi-Lipstchitz.

**Definición.** Una función  $f : X_1 \rightarrow X_2$  es bi-Lipstchitz si existe un  $K \geq 1$  tal que:

$$\frac{1}{K}d_1(x, y) \leq d_2(f(x), f(y)) \leq Kd_1(x, y) \quad \text{con } x, y \in X_1$$

Las cuasi isometrías no mantienen las distancias entre los dos espacios métricos sin embargo la distancia de las imágenes queda acotada por un valor que depende de la distancia entre los puntos.

**Definición.** Sea  $f : X_1 \rightarrow X_2$  una aplicación entre espacios métricos. Diremos que  $g : X_2 \rightarrow X_1$  es una cuasi inversa de  $f$  si existe  $D$  de modo que para cada  $x_1 \in X_1$  se cumple  $d_1((g \circ f)(x_1), x_1) \leq D$  y del mismo modo para cada  $x_2 \in X_2$  tenemos  $d_2((f \circ g)(x_2), x_2) \leq D$ .

Veamos algunas propiedades de las cuasi isometrías encajadas y cuasi isometrías.

**Proposición 3.1.** La composición de cuasi isometrías encajadas (cuasi isometrías) es una cuasi isometría encajada (cuasi isometría).

**Demostración.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una  $(\lambda_f, \varepsilon_f)$ -cuasi isometría y  $g : Y \rightarrow Z$  una  $(\lambda_g, \varepsilon_g)$ -cuasi isometría encajada. Para cada  $x, y \in X$  tenemos:

$$d_X(g \circ f(x), g \circ f(y)) = d_X(g(f(x)), g(f(y))) \leq \lambda_g d_Y(f(x), f(y)) + \varepsilon_g \leq \lambda_g \lambda_f d_X(x, y) + \lambda_g \varepsilon_f + \varepsilon_g$$

$$d_X(g(f(x)), g(f(y))) \geq \frac{1}{\lambda_g} d_Y(f(x), f(y)) - \varepsilon_g \geq \frac{1}{\lambda_g} (\frac{1}{\lambda_f} d_X(x, y) - \varepsilon_f) - \varepsilon_g \geq \frac{1}{\lambda_g \lambda_f} d_X(x, y) - (\lambda_g \varepsilon_f + \varepsilon_g)$$

Por tanto como vemos la composición es una  $(\lambda_g \lambda_f, \lambda_g \varepsilon_f + \varepsilon_g)$ -cuasi isometría encajada.

Veamos ahora el caso en el que tanto  $f$  como  $g$  son cuasi isometrías. Queremos ver que existe una constante  $C$  tal que para todo  $z \in Z$  encontramos un  $x \in X$  tal que  $d(g \circ f(x), z) \leq C$ . Por hipótesis existen  $x \in X$  tal que  $d(f(x), y) \leq C_f$  y  $y \in Y$  tal que  $d(g(y), z) \leq C_g$  de modo que:

$$d(g(f(x)), z) \leq d(g(f)(x), g(y)) + d(g(y), z) \leq \lambda_g d(f(x), y) + \varepsilon_g + C_g \leq \lambda_g C_f + \varepsilon_g + C_g$$

Por tanto la composición es también una cuasi isometría. □

**Proposición 3.2.** *Sea  $f$  una cuasi isometría encajada. Entonces  $f$  es una cuasi isometría  $\Leftrightarrow$  tiene cuasi inversa. Además la cuasi inversa es una cuasi isometría.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $f : X \rightarrow Y$  es cuasi isometría, es decir existe una constante  $C$  de manera que para todo  $y \in Y$  existe  $x \in X$  tal que  $d_Y(f(x), y) \leq C$ .

Para cada  $y \in Y$  elegimos un  $x \in X$  que cumpla que  $d_Y(f(x), y) \leq C$  (basta tomar  $x$  en la preimagen de la bola con centro en  $y$  y radio  $C$ ) y definimos  $g(y) := x$

Por otra parte:

$$d_X(g(f(x)), x) \leq \lambda_f d_Y(f(g(f(x))), f(x)) + \lambda_f \varepsilon_f \leq \lambda_f C + \lambda_f \varepsilon_f$$

Luego  $g$  es una cuasi inversa. Veamos que además  $g$  es cuasi isometría. Sabemos que existe una constante  $D$  tal que  $d_Y(y_i, f \circ g(y_i)) \leq D$  para  $i = 1, 2$  porque  $g$  es cuasi inversa de  $f$ . Entonces:

$$\begin{aligned} d_X(g(y_1), g(y_2)) &\leq \lambda_f d_Y(f(g(y_1)), f(g(y_2))) + \lambda_f \varepsilon_f \leq \lambda_f [d_Y(f \circ g(y_1), y_1) + d_Y(y_1, y_2) + \\ &+ d_Y(y_2, f \circ g(y_2))] + \lambda_f \varepsilon_f \leq \lambda_f [2D + d_Y(y_1, y_2)] + \lambda_f \varepsilon_f \leq \lambda_f d_Y(y_1, y_2) + \lambda_f [2D + \varepsilon_f] \end{aligned}$$

Dados  $y_1, y_2 \in Y$  tales que  $g(y_1) = x_1$  y  $g(y_2) = x_2$  tenemos  $d_Y(f(x_1), y_1) \leq C$  y  $d_Y(f(x_2), y_2) \leq C$ , por tanto:

$$d_Y(y_1, y_2) \leq d_Y(y_1, f(x_1)) + d_Y(f(x_1), f(x_2)) + d_Y(f(x_2), y_2) \leq 2C + \lambda_f d_X(x_1, x_2) + \varepsilon_f$$

Donde obtenemos que  $\frac{1}{\lambda_f} d_Y(y_1, y_2) - \frac{2C + \varepsilon_f}{\lambda_f} \leq d_Y(g(y_1), g(y_2))$ .

Así que  $g$  es cuasi isometría.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $g$  es la cuasi inversa de  $f$ , entonces existe una constante  $D$  de forma que para todo  $y \in Y$   $d_Y(f \circ g(y), y) \leq D$ . Queremos probar que  $\forall y \in Y \exists x \in X$  tal que  $d_Y(f(x), y) \leq C$ . Por tanto basta tomar  $x = g(y)$  y  $C = D$  □

**Corolario 3.3.** *Ser cuasi isométricos es una relación de equivalencia entre espacios métricos.*

*Demostración.* Es reflexiva, simétrica por la proposición 3.2 y transitiva por la proposición 3.1 □

$\mathbb{Z}$  y  $2\mathbb{Z}$  con la distancia usual no son espacios isométricos ya que en  $\mathbb{Z}$  hay puntos a distancia 1 mientras que en  $2\mathbb{Z}$  la mínima distancia entre dos puntos diferentes es 2. Sin embargo estos espacios métricos son cuasi isométricos. Es claro que la inclusión  $i : 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  es una cuasi isometría encajada, pero podemos definir además la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow 2\mathbb{Z} \\ n &\longmapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in 2\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } n \notin 2\mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

que también es cuasi isometría y es cuasi inversa de  $i$ .

### 3.1. Relación entre los grafos de Cayley y las cuasi isometrías

Vamos a relacionar los distintos grafos de Cayley de un grupo que provienen de tomar distintas familias generadoras finitas mediante las cuasi isometrías.

**Proposición 3.4.** *Sea  $G$  un grupo y  $S_1, S_2$  dos familias generadoras simétricas finitas de  $G$ . Entonces hay una cuasi isometría entre  $\text{Cay}(G, S_1)$  y  $\text{Cay}(G, S_2)$ .*

*Demostración.* Consideramos una composición:

$$\text{Cay}(G, S_1) \xrightarrow{\psi} (G, d_{S_1}) \xrightarrow{id} (G, d_{S_2}) \xrightarrow{i} \text{Cay}(G, S_2)$$

Primero demostramos que  $(G, d_{S_k}) \xrightarrow{i} \text{Cay}(G, S_k)$  es una cuasi isometría encajada para  $k = 1, 2$ . Si tomamos un elemento  $x$  perteneciente al espacio métrico  $(G, d_{S_k})$  y le aplicamos la inclusión irá a un vértice de  $G$ . Recordamos que si restringimos la métrica del grafo de Cayley a los vértices tenemos la métrica de la palabra, es decir  $d_{S_k}$ , de modo que para estos puntos la distancia será la misma al aplicarle la inclusión por tanto podemos tomar  $\lambda = 1$  para que se cumplan las desigualdades de la definición de cuasi isometría encajada.

Por otro lado, dado un  $y \in \text{Cay}(G, S_k)$  existe un  $x \in G$  tal que  $d_{S_k}(y, f(x)) \leq 1$ , esto es debido a la forma en la que hemos definido la métrica en el grafo de Cayley cuyas aristas tienen longitud 1. Por tanto la inclusión es una cuasi isometría.

Como la inclusión es una cuasi isometría, por la propiedad 3.2 tiene una cuasi inversa  $\text{Cay}(G, S_k) \longrightarrow (G, d_{S_k})$  y esta además es cuasi isometría. Tomamos  $\psi$  como esta cuasi inversa para  $k = 1$ .

Por la proposición 3.1 tendremos una cuasi isometría entre los grafos de Cayley si la aplicación  $id : (G, d_{S_1}) \longrightarrow (G, d_{S_2})$  lo es.

Para ello vamos a tomar  $\lambda = \max\{\|x_2\|_{S_1}, \|x_1\|_{S_2} \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$  y  $\varepsilon = 0$ .

Supongamos que  $d_{S_1}(g, h) = m$  entonces podemos escribir  $g^{-1}h = s_1 \cdot \dots \cdot s_m$  con  $s_j \in S_1$ , y a su vez podemos escribir los elementos  $s_j$  como elementos de  $S_2$ :

$$s_1 \cdot \dots \cdot s_m = (s_{1,1} \cdot \dots \cdot s_{1,M_1})(s_{2,1} \cdot \dots \cdot s_{2,M_2}) \dots (s_{m,1} \cdot \dots \cdot s_{m,M_m})$$

con  $M_i \leq \lambda$  y  $s_{i,j} \in S_2$ . Entonces:

$$d_{S_2}(g, h) = \|(g^{-1}h)\|_{S_2} \leq m\lambda = \lambda d_{S_1}(g, h)$$

Con un argumento similar obtenemos  $d_{S_1}(g, h) \leq \lambda d_{S_2}(g, h)$  y entonces se cumple:

$$\frac{1}{\lambda} d_{S_1}(g, h) \leq d_{S_2}(g, h) \leq \lambda d_{S_1}(g, h)$$

Por tanto la identidad es una cuasi isometría encajada.

Además si tomamos la aplicación  $id' : (G, d_{S_2}) \rightarrow (G, d_{S_1})$  se cumple  $d_{S_2}(id \circ id'(x_2), x_2) = d_{S_2}(x_2, x_2) = 0$  para todo  $x_2 \in (G, d_{S_2})$  y  $d_{S_1}(id' \circ id(x_1), x_1) = d_{S_1}(x_1, x_1) = 0$  para todo  $x_1 \in (G, d_{S_1})$  y por la proposición 3.2  $id : (G, d_{S_1}) \rightarrow (G, d_{S_2})$  es una cuasi isometría.  $\square$

La condición de que las familias generadoras  $S_1$  y  $S_2$  sean finitas es necesaria para que la aplicación  $id : (G, d_{S_1}) \rightarrow (G, d_{S_2})$  se pueda extender a una isometría entre los grafos de Cayley. Para verlo vamos a considerar  $\mathbb{Z}$  con  $S_1 = \mathbb{Z}$  y  $S_2 = \{1\}$ . En el primer caso, la familia generadora no es finita y observamos que  $(\mathbb{Z}, d_{\mathbb{Z}})$  tiene diámetro finito, todos los elementos están a distancia 1 de los demás, al contrario que  $(\mathbb{Z}, d_{\{1\}})$  que tiene diámetro infinito. Por lo tanto no podremos encontrar constantes que nos cumplan las desigualdades de la definición.

### 3.2. Lema de Švarc-Milnor

Este lema, también llamado *Lema fundamental de la teoría geométrica de grupos* une la geometría de los grupos con la geometría de espacios métricos. Veremos dos enunciados diferentes del mismo lema, la primera en términos de cuasi isometrías.

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$ . Llamamos  $(c, b)$ -cuasi geodésica en  $X$  a una  $(c, b)$ -cuasi isometría encajada  $\gamma : I \rightarrow X$  donde  $I = [t, t'] \subset \mathbb{R}$  es un intervalo cerrado. Diremos que  $\gamma(t)$  es el extremo inicial y  $\gamma(t')$  es el extremo final.

Además diremos que  $X$  es *espacio  $(c, b)$ -cuasi geodésico* si para todo  $x, x' \in X$  existe una  $(c, b)$ -cuasi geodésica con el punto inicial en  $x$  y punto final en  $x'$ .

Notemos que un espacio geodésico es un espacio cuasi geodésico (en particular  $(1, 0)$ -cuasi geodésica) pero el recíproco no siempre es cierto.

Observamos que la imagen de una geodésica por una cuasi isometría no es necesariamente una geodésica. Sin embargo es fácil comprobar que es una cuasi geodésica aplicando la proposición 3.1.

**Definición.** Definimos *diámetro de un conjunto*  $U \subset X$  como:

$$\text{diam } U = \sup_{x, y \in U} d(x, y)$$

y ponemos para  $\alpha > 0$

$$N_\alpha(U) = \{x \in X \mid \exists y \in U \quad d(x, y) \leq \alpha\}$$

**Lema 3.5.** *Sea  $G$  un grupo que actúa por isometrías sobre un espacio métrico  $(X, d)$ . Supongamos que hay dos constantes  $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$  tales que  $X$  es  $(c, b)$ -cuasi geodésico y que existe un conjunto  $U \subset X$  con las siguientes propiedades:*

i *El diámetro de  $U$  es finito.*

ii *Las  $G$ -traslaciones de  $U$  cubren todo  $X$ , es decir*

$$\bigcup_{g \in G} gU = X$$

iii *El conjunto  $S := \{g \in G \mid gU' \cap U' \neq \emptyset\}$  es finito, donde*

$$U' = N_{2b}(U)$$

Entonces:

1. El grupo es generado por  $S$ ; en particular  $G$  es finitamente generado.
2. Para todo  $x \in X$ , la aplicación:

$$\begin{aligned} (G, d_S) &\longrightarrow (X, d) \\ g &\longmapsto gx \end{aligned}$$

es una cuasi isometría (respecto la métrica de las palabras  $d_S$  en  $G$ )

*Demostración.* Veamos que  $S$  genera  $G$ . Para ello tomamos  $g \in G$  y veamos si está en el subgrupo generado por  $S$ .

Sea  $x \in U$ . Como  $X$  es un espacio  $(c, b)$ -geodésico hay una  $(c, b)$ -cuasi geodésica  $\gamma: [0, L] \longrightarrow X$  que empieza en  $x$  y termina en  $gx$ .

Podemos tomar una partición del intervalo  $[0, L]$ , tomando  $n = \lfloor c \frac{L}{b} \rfloor$  para  $j \in \{0, \dots, n\}$  definimos:

$$t_j = j \frac{b}{c}$$

así  $t_0 = 0$ ,  $t_n = L$  y denotamos  $x_j = \gamma(t_j)$  para  $j \in \{0, \dots, n\}$ .

De esta manera tenemos:

$$x_0 = \gamma(t_0) = x \quad \text{y} \quad x_n = \gamma(L) = gx.$$

Como las traslaciones de  $U$  cubren todo  $X$ , hay elementos del grupo  $g_j$  tales que  $x_j \in g_j U$ . En particular podemos tomar  $g_0 = e$  y  $g_n = g$ .

Para todo  $j \in \{0, \dots, n\}$  el elemento del grupo  $s_j = g_{j-1}^{-1} g_j$  está en  $S$  porque si  $\gamma$  es una  $(c, b)$ -cuasi geodésica se cumple que:

$$d(x_{j-1}, x_j) \leq cd(t_{j-1}, t_j) + b \leq c|t_{j-1} - t_j| + b \leq c \frac{b}{c} + b \leq 2b$$

donde hemos aplicado que  $|t_{j-1} - t_j| = |(j-1)\frac{b}{c} - j\frac{b}{c}|$

Así que  $x_j \in N_{2b}(g_{j-1} U) = g_{j-1} N_{2b}(U) = g_{j-1} U'$  (Estas igualdades son correctas debido a la hipótesis de que  $G$  actúa por isometrías en  $X$ ).

Por otra parte:

$$x_j \in g_j U \subset g_j U' \Rightarrow x_j \in g_{j-1} U' \cap g_j U' \neq \emptyset$$

Y por definición de  $S$  tenemos que  $g_{j-1}^{-1} g_j \in S$ .

En particular,

$$g = g_n = \underbrace{g_{n-1} g_{n-1}^{-1}}^{s_n} g_n = \underbrace{g_{n-2} g_{n-2}^{-1}}^{s_{n-1}} \underbrace{g_{n-1} g_{n-1}^{-1}}_{s_n} s_n = \dots = g_0 s_1 \cdot \dots \cdot s_n = s_1 \cdot \dots \cdot s_n \in G$$

Vamos a probar ahora la segunda parte del enunciado, es decir que  $(G, d_S)$  es cuasi isométrico a  $(X, d)$ . Sea  $x \in X$ , veamos que la siguiente aplicación es cuasi isometría:

$$\begin{aligned} \varphi: (G, d_S) &\longrightarrow (X, d) \\ g &\longmapsto gx \end{aligned}$$

Sea  $x \in U$  (estamos en la misma situación que en la primera parte de la demostración),  $\varphi$  es una cuasi isometría porque:

$$\begin{aligned} d(\varphi(e), \varphi(g)) &= d(x, gx) = d(\gamma(0), \gamma(L)) \geq \frac{1}{c}L - b \geq \frac{1}{c} \frac{b(n-1)}{c} - b \geq \frac{b}{c^2}n - \frac{b}{c^2} - b \geq \\ &\quad \frac{b}{c^2}d_S(e, g) - \frac{b}{c^2} - b \end{aligned}$$

Suponemos que  $d_S(e, g) = n$ , luego existen  $s_1, \dots, s_n \in S = S^{-1} \cup S$  tales que  $g = s_1 \cdot \dots \cdot s_n$ . Utilizando la desigualdad triangular, el hecho de que  $G$  actúa por isometrías y que  $s_j U' \cap U' \neq \emptyset$  para todo  $j = \{0, 1, \dots, n\}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} d(\varphi(e), \varphi(g)) &= d(x, gx) \leq d(x, s_1x) + d(s_1x, s_1s_2x) + \dots + d(s_1 \cdot \dots \cdot s_{n-1}x, s_1 \cdot \dots \cdot s_nx) = \\ &\quad d(x, s_1x) + (x, s_2x) + \dots + d(x, s_nx) \leq 2n(\text{diam } U + 2b) \end{aligned}$$

Luego  $\varphi$  es una cuasi isometría encajada ya que podemos aplicar estas desigualdades para cualquier pareja  $g, h$  de elementos de  $G$  porque  $d(\varphi(g), \varphi(h)) = d(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h))$  y  $d_S(g, h) = d_S(e, g^{-1}h)$ .

Además si  $x' \in X$ , hay un  $\hat{g} \in G$  tal que  $x' \in \hat{g}U$ . Como  $\hat{g}x \in \hat{g}U$  tenemos:

$$d(x', \varphi(\hat{g})) = d(x', gx) \leq \text{diam } gU = \text{diam } U$$

Luego  $\varphi$  es una cuasi isometría. □

**Definición.** Diremos que una acción es *cocompacta* si se cumplen las hipótesis *i* y *ii* del lema de Švarc-Milnor.

El lema de Švarc-Milnor se puede formular desde un punto de vista topológico en el cual toman mayor importancia las propiedades de la acción del grupo sobre el espacio métrico.

**Lema 3.6.** *Sea  $G$  un grupo que actúa por isometrías en un espacio métrico geodésico localmente compacto no vacío  $(X, d)$ . Si la acción es propia y cocompacta entonces  $G$  es finitamente generado y para todo  $x \in X$  la aplicación:*

$$\begin{aligned} (G, d_S) &\longrightarrow (X, d) \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

*es cuasi isometría.*

## Capítulo 4

# Espacios hiperbólicos de Gromov

La geometría hiperbólica satisface cuatro de los cinco postulados de la geometría euclíadiana. El quinto postulado dice que “dada una recta  $r$  y un punto externo a ella  $P$ , hay una y solo una recta que pasa por el punto y no interseca a la recta” es falso para la geometría hiperbólica ya que hay al menos dos rectas que pasan por  $P$  y no intersecan a  $r$ . En esta sección vamos a hablar de espacios métricos hiperbólicos en el sentido de Gromov. Su definición será esencial para caracterizar los grupos hiperbólicos.

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Un *triángulo geodésico* (de vértices  $x, y, z$ ) es la unión de geodésicas de la forma  $\Delta(x, y, z) = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ , es decir la unión de  $\gamma_j : [0, L_j] \rightarrow X$  tales que:

$$\gamma_2(L_2) = \gamma_0(0) = x \quad \gamma_0(L_0) = \gamma_1(0) = y \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0) = z$$

Diremos, además que un triángulo geodésico es  $\delta$ -slim para  $\delta \geq 0$  si cada lado está contenido en un  $\delta$ -entorno de los otros dos. Es decir:

$$[x, y] \subset N_\delta([y, z] \cup [z, x]) \quad [y, z] \subset N_\delta([x, y] \cup [z, x]) \quad [z, x] \subset N_\delta([x, y] \cup [y, z])$$

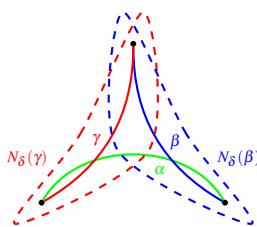


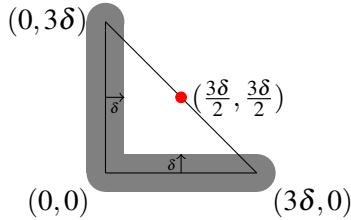
Figura 4.1: Figura de un triángulo geodésico con dos  $\delta$ -entornos

**Definición.** Un espacio geodésico  $X$  es  $\delta$ -hiperbólico si todo triángulo geodésico en él es  $\delta$ -slim. Así un espacio geodésico es *hiperbólico* si es  $\delta$ -hiperbólico para algún  $\delta \geq 0$ .

Ejemplos:

1. Espacios geodésicos métricos de diámetro finito  $X$  con  $\delta = \text{diam } X$
2.  $\mathbb{R}$  es 0–hiperbólico ya que todo triángulo es degenerado, es decir tiene sus vértices colineales o coincidentes.
3. Por la misma razón que  $\mathbb{R}$  cualquier árbol (es decir cualquier grafo conexo y sin ciclos) es 0–hiperbólico.

Sin embargo  $\mathbb{R}^2$  con la métrica usual no es hiperbólico. Sea  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , tomamos el triángulo geodésico con los vértices  $(0,0), (0,3\delta), (3\delta,0)$ . Se puede comprobar que el punto medio  $(\frac{3\delta}{2}, \frac{3\delta}{2})$  de la geodésica  $[(0,3\delta), (3\delta,0)]$  no está en el  $\delta$ -entorno de la unión de las otras dos geodésicas.



La definición de espacio  $\delta$ -hiperbólico viene dada en términos triángulos geodésicos, pero recordemos que la imagen por una cuasi isometría de una geodésica no es necesariamente una geodésica pero sí una cuasi geodésica. Para demostrar la invariancia de los espacios hiperbólicos por cuasi isometrías introducimos el concepto de distancia Hausdorff, la cual nos indica la distancia de dos compactos en un espacio métrico como:

$$d_{HAUS}(A, B) = \inf\{R : A \subset N_R(B) \quad B \subset N_R(A)\}$$

Vamos a enunciar sin demostración una proposición necesaria para la demostración del teorema que la sigue ya que la demostración es algo tediosa y no muy interesante.

**Proposición 4.1.** *Sea  $X$  un espacio hiperbólico. Para todo  $c, b$  existe una constante  $D$  tal que para toda pareja de  $c, b$ -cuasi geodésica  $\rho$  y geodésica  $\gamma = [x, y]$  cuyos extremos coinciden, la distancia Hausdorff entre ambas es a lo sumo  $D$ .*

**Teorema 4.2.** *Sea  $X, Y$  dos espacios métricos geodésicos. Si existe una cuasi isometría encajada  $f : X \rightarrow Y$  e  $Y$  es hiperbólico, entonces  $X$  también lo es.*

*Demostración.* Sea  $\delta$  la constante para la cual  $Y$  es hiperbólico. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi isometría y llamamos  $D$  a la constante de la proposición anterior.

Consideramos el triángulo geodésico  $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  en  $X$  y tomamos un punto  $p \in [x, y]$ . Aplicando  $f$  como  $Y$  es hiperbólico existe un triángulo geodésico  $\delta$ -slim de la forma:

$$\Delta(f(x), f(y), f(z)) = [f(x), f(y)] \cup [f(y), f(z)] \cup [f(z), f(x)]$$

La imagen resultante de la geodésica  $[x, y]$  por la cuasi isometría será una cuasi geodésica. Aplicando la proposición 4.1 a esta cuasi geodésica y a la geodésica  $[f(x), f(y)]$  obtenemos que para algún  $p_1$  en la geodésica  $[f(x), f(y)]$  se cumple  $d(f(p), p_1) \leq D$ .

Como  $Y$  es hiperbólico, existe algún  $p_2$  en una de las geodésicas  $[f(x), f(z)]$  o  $[f(y), f(z)]$  tal que para  $p_1$  se cumple  $d(p_2, p_1) \leq \delta$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $p_2$  que está  $[f(x), f(z)]$ .

Finalmente por la proposición 4.1 para  $p_2$  existe algún  $q \in [x, z]$  para el que se cumple que:

$$d(f(q), p_2) \leq D$$

Como resultado de estas desigualdades obtenemos que:

$$d(f(p), f(q)) \leq d(f(p), p_1) + d(p_1, p_2) + d(p_2, f(q)) \leq 2D + \delta$$

Por tanto, como  $f$  es una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi isometría tenemos:

$$d(p, q) \leq \lambda d(f(p), f(q)) + \lambda \varepsilon \leq \lambda(2D + \delta) + \lambda \varepsilon$$

Como los razonamientos no dependen del punto tomado ni de la pareja de geodésicas, podemos concluir con que el triángulo geodésico  $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  es  $(\lambda(2D + \delta) + \lambda \varepsilon)$ -slim, pero además como el razonamiento vale para cualquier triángulo geodésico en  $X$  hemos demostrado que  $X$  es un espacio hiperbólico.  $\square$

**Corolario 4.3.** *Sean  $X, Y$  dos espacios métricos geodésicos tales que son cuasi isométricos.  $X$  es hiperbólico si y solo si  $Y$  es hiperbólico.*

*Demostración.* Es una consecuencia directa el teorema 4.2 ya que toda cuasi isometría tiene cuasi inversa.  $\square$

## 4.1. Plano hiperbólico

Uno de los principales ejemplos de espacio hiperbólico es el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ . Para representar el plano hiperbólico vamos a utilizar el modelo del disco de Poincaré que se construye como sigue. Consideramos el hiperboloide equilátero de dos hojas de ecuación  $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$  en  $\mathbb{R}^3$  y proyectamos la hoja superior sobre el plano  $z = 0$  respecto al punto  $P = (0, 0, -1)$ . Esta proyección hace corresponder a cada punto  $Q$  del hiperboloide, el punto del plano  $z = 0$  donde interseca la recta que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ .

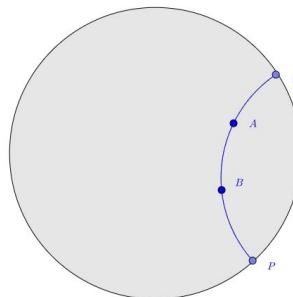
Así obtenemos un disco de radio uno donde los puntos del hiperboloide corresponden a puntos del interior del disco y cuya frontera representa los llamados puntos del infinito. Las rectas o geodésicas son los arcos de circunferencia que intersecan ortogonalmente con la frontera del disco. Nos centraremos en él ya que nos será de utilidad al definir los grupos triangulares más adelante.

Una de las particularidades de este modelo es que es conforme, es decir los ángulos en la superficie de la hipérbola coinciden con los ángulos euclídeos. El ángulo entre dos geodésicas es el ángulo que forman los círculos en el punto donde estos intersecan.

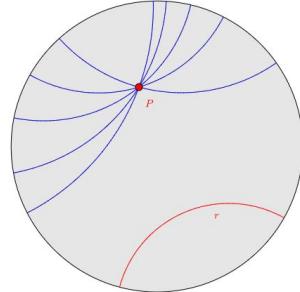
Definimos en el disco de Poincaré una métrica que nos dará una estructura de espacio métrico hiperbólico.

$$\begin{aligned} d : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto d(A, B) = \ln\left(\frac{|AP||BQ|}{|BP||AQ|}\right) \end{aligned}$$

con  $A, B \in \mathbb{H}$  y  $P$  y  $Q$  los puntos de corte de la geodésica que pasa por  $A$  y  $B$  con la frontera del disco de Poincaré.



Se puede probar que con la distancia anterior el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  es hiperbólico en el sentido de Gromov. También que en el espacio hiperbólico se cumplen los cuatro primeros postulados de la geometría euclídea pero no el quinto, ya que dado un punto  $P$  y una recta  $r$  podemos trazar infinitas rectas paralelas a  $r$  que pasan por  $P$ .



Para un estudio más riguroso sobre el plano de Poincaré podemos consultar [6]

## Capítulo 5

# Grupos Hiperbólicos

Los diferentes grafos de Cayley que resultan al tomar distintas familias generadoras son cuasi isométricos si las familias generadoras son finitas. La invariancia por cuasi isometrías de los espacios hiperbólicos nos permite definir los grupos hiperbólicos de la siguiente manera:

**Definición.** Un grupo  $G$  finitamente generado es hiperbólico si para alguna familia generadora finita  $S$  el grafo de Cayley  $Cay(G, S)$  es hiperbólico.

**Lema 5.1.** *Sea  $G$  un grupo que actúa de forma propia y cocompacta sobre un espacio métrico hiperbólico. Entonces  $G$  es un grupo hiperbólico.*

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata del lema de Švarc-Milnor. □

Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 1.** Todo grupo finito es hiperbólico porque viene asociado a un espacio métrico con diámetro finito.

**Ejemplo 2.** También lo son los grupos libres porque sus grafos de Cayley son árboles.

**Ejemplo 3.** Los grupos triangulares también cumplen esta propiedad, como veremos más en profundidad a continuación.

### 5.1. Grupos Triangulares

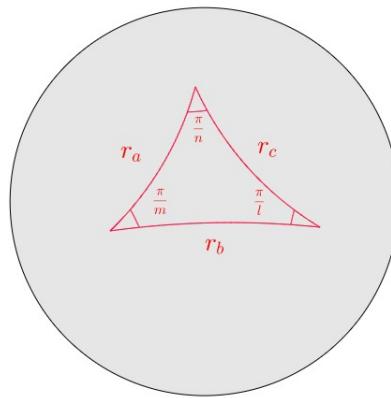
Durante esta sección haremos referencia a  $n, m, l$  como elementos pertenecientes al conjunto  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

**Definición.** Los grupos triangulares se puede definir mediante la presentación:

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^n = (bc)^m = (ac)^l = 1 \rangle$$

Estos grupos se pueden interpretar como grupos de simetrías de teselaciones mediante triángulos de  $\mathbb{R}^2$  (plano euclídeo),  $\mathbb{S}^2$  (superficie de una esfera) ó  $\mathbb{H}$  (plano hiperbólico). Nos centraremos en el caso hiperbólico.

Fijamos un triángulo en  $\mathbb{H}$  con lados segmentos geodésicos  $r_a, r_b, r_c$ , de forma que los ángulos que forman dichas rectas son  $\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{l}$  como se muestra en la figura.



Si tenemos un triángulo en el plano Euclídeo, la suma de sus ángulos es exactamente  $\pi$ . Sin embargo en el plano hiperbólico los triángulos son “delgados” lo que significa que la suma de sus ángulos es estrictamente menor que  $\pi$ , es más se tiene que:

**Lema 5.2.** *Si  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{l} < 1$  entonces existe un triángulo hiperbólico de ángulos  $\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{l}$  y además se puede teselar  $\mathbb{H}$  mediante copias de dicho triángulo.*

*Demostración.* Se puede ver, por ejemplo en, [9, §.7] □

Podemos representar los elementos  $a, b, c$  que generan un grupo triangular como el de arriba como las reflexiones en  $\mathbb{H}$  respecto a las geodésicas  $r_a, r_b, r_c$ . El producto de dos reflexiones de lados adyacentes es una rotación cuyo ángulo es el doble del ángulo que forman estos dos lados; es decir, el producto  $ca$  será una rotación de ángulo  $\frac{2\pi}{n}$ .

Así al aplicar los elementos de  $G$  al triángulo inicial se obtiene la teselación a la que nos hemos referido antes.

**Lema 5.3.** *Sean  $n, m, l \in \mathbb{N}$  tales que  $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{l} < 1$ . El grupo triangular  $G$  definido por estos parámetros es hiperbólico.*

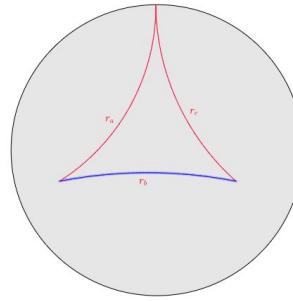
*Demostración.* Tomamos el triángulo con parámetros  $n, m, l$ . Con copias del triángulo podemos teselar el plano hiperbólico y su diámetro es finito, lo que implica que la acción de  $G$  sobre el plano hiperbólico es cocompacta. Como los parámetros son finitos al aplicar los elementos de  $G$  al triángulo obtenemos ciclos por tanto podemos tomar para cada elemento del triángulo un entorno suficientemente pequeño para demostrar que la acción es propia. Bastaría tomar como entorno la bola con radio menor que el diámetro del triángulo.

Aplicando el lema de Švarc-Milnor tenemos que  $G$  es un grupo hiperbólico por ser cuasi isométrico a  $\mathbb{H}$ . □

Si algún parámetro es infinito, es decir si el triángulo tiene algunos lados paralelos la acción de  $G$  en el plano hiperbólico no es cocompacta. Por este motivo no podemos aplicar el mismo razonamiento que en el caso anterior. Sin embargo es posible probar que el grupo considerado es hiperbólico mediante la acción del mismo en un objeto más pequeño al que llamaremos  $T$ .

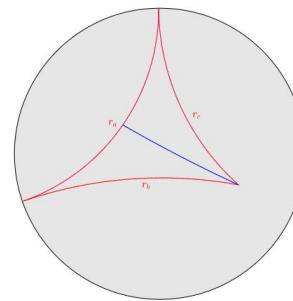
- Si  $n = \infty, m = l < \infty$

En este caso los lados del triángulo  $r_a$  y  $r_c$  son paralelos. Consideraremos  $T$  como la órbita bajo la acción de  $G$  de  $r_b$ , es decir el conjunto de las imágenes por elementos de  $G$  de  $r_b$ .



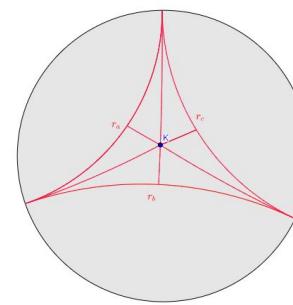
- Si  $n = m = \infty, l < \infty$ .

El triángulo tendrá además los lados  $r_a$  y  $r_b$  paralelos. En este caso tomaremos como  $T$  la órbita bajo la acción de  $G$  del segmento perpendicular a  $r_a$  que pasa por el vértice formado por los lados  $r_c$  y  $r_b$ .



- Si  $n = m = l = \infty$ .

Todos los lados son paralelos. Para tomar  $T$  se considera el árbol de vértices los centros de los triángulos pero no entraremos en detalles.



En estos tres casos  $T$  es un árbol luego es hiperbólico y  $G$  actúa de forma propia y cocompacta en  $T$ .

## 5.2. El problema de la palabra

Sea  $G$  un grupo determinado por una presentación finita  $\langle S \mid R \rangle$  y  $\mathbb{F}(S)$  el grupo libre en  $S$ . El problema de la palabra consiste en decidir si dos palabras  $\omega_1$  y  $\omega_2 \in \mathbb{F}(S)$  representan el mismo elemento de  $G$ . Equivalentemente, si una palabra dada  $\omega \in \mathbb{F}(S)$  representa el elemento identidad del grupo  $G$ .

Sea una presentación finita  $\langle S \mid R \rangle$  de un grupo  $G$ . El problema de la palabra es soluble para la presentación  $\langle S \mid R \rangle$  si existe un algoritmo que para toda palabra  $\omega \in \mathbb{F}(S)$  determina si  $\omega$  es la

identidad del grupo  $G$  o no.

Este problema algebraico clásico no siempre tiene solución, sin embargo podemos ver que es resoluble para los grupos hiperbólicos. Para demostrar esto necesitaremos un resultado que incluimos sin demostración puesto que su demostración es técnica y no aporta información relevante para la resolución del problema de la palabra. Si se desea ver, se puede consultar [4, pág. 168–169].

**Proposición 5.4.** *Sea  $G$  un grupo hiperbólico y  $S$  una familia generadora de  $G$ . Suponemos que el grafo de Cayley como espacio métrico es  $\delta$ -hiperbólico con  $\delta > 0$ . Si  $\gamma: [0, n] \rightarrow \text{Cay}(G, S)$  es un ciclo en el grafo de Cayley con longitud  $n > 0$  entonces existen  $t, t' \in [0, n]$  enteros tales que:*

$$\text{longitud}(\gamma|_{[t,t']}) < 8\delta$$

y además  $\gamma|_{[t,t']}$  no es geodésica.

Recordemos que asociado a una presentación  $G = \langle S \mid R \rangle$ ,  $S$  simétrico, tenemos un homomorfismo canónico

$$\varphi: \mathbb{F}(S) \rightarrow G$$

En esta sección vamos a comprar la longitud de palabras o elementos en  $\mathbb{F}(S)$  con la de los elementos que representan en  $G$ . Para ello utilizaremos la siguiente notación:

- Si  $\omega$  es una palabra en  $S$  (no necesariamente reducida), definimos  $l(\omega)$ = longitud de  $\omega$ , es decir, el número de letras de  $\omega$ .
- Si  $\varphi(\omega)$  es un elemento de  $G$ , denotamos  $\|\varphi(\omega)\|_S$  = menor número de letras de una palabra que representa a  $\varphi(\omega)$ .

**Definición.** Una presentación finita de un grupo  $G = \langle S \mid R \rangle$  con  $S$  simétrico es una *presentación de Dehn* si existe un  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  y palabras  $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$  en  $S$  tales que:

- 1.)  $R = \{u_1v_1^{-1}, \dots, u_nv_n^{-1}\}$
- 2.) Para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$   $l(v_j) < l(u_j)$
- 3.) Para todo  $\omega \in \mathbb{F}(S)$  que representa la identidad en  $G$  existe un  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $u_j$  es subpalabra de  $\omega$ ; es decir la secuencia de letras de la palabra  $u_j$  está en la de  $\omega$ .

Estas presentaciones tienen la siguiente particularidad.

**Teorema 5.5.** *Si  $\langle S \mid R \rangle$  es una presentación de Dehn de un grupo  $G$ , el problema de la palabra tiene solución para  $G$ .*

*Demostración.* Para ello utilizamos el llamado *algoritmo de Dehn*.

Supongamos que  $\langle S \mid R \rangle$  es una presentación de Dehn con  $R = \{u_1v_1^{-1}, \dots, u_nv_n^{-1}\}$ .

Tomamos una palabra  $\omega \in \mathbb{F}(S)$

\* Si  $\omega$  es la palabra vacía, entonces es la identidad.

\* Si no:

- Si ninguna  $u_j$  con  $j \in \{1, \dots, n\}$  es subpalabra de  $\omega$ , por la condición 3.) de la definición de presentación de Dehn,  $\omega$  no representa a la identidad de  $G$ .

- Si hay un  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $u_j$  es una subpalabra de  $\omega$  podemos escribir  $\omega = \omega' u_j \omega''$  para ciertos  $\omega'$  y  $\omega'' \in \mathbb{F}(S)$ .

Como tenemos la relación  $u_j v_j^{-1} \in R$ , las palabras  $\omega = \omega' u_j \omega''$  y  $\omega' v_j \omega''$  representan el mismo elemento en  $\langle S | R \rangle$ . Luego por 2.),  $\omega$  representa a la identidad en  $G$  si y solo si la palabra más corta  $\omega' v_j \omega''$  lo hace.

Repetiendo el proceso para  $\omega' v_j \omega''$  sabremos eventualmente si el elemento  $\omega$  representa o no la identidad en  $G$ .

□

**Nota.** Aunque tal y como hemos definido el grupo libre, sus elementos siempre son palabras reducidas, en esta demostración para evitar complicar la notación consideraremos palabras cualesquiera en el alfabeto  $S$  como elementos de  $\mathbb{F}(S)$ .

**Teorema 5.6.** *Sea  $G$  un grupo hiperbólico y  $S$  una familia generadora simétrica y finita de  $G$ . Entonces existe un  $R \subset \mathbb{F}(S)$  tal que  $\langle S | R \rangle$  es una presentación de Dehn y  $G = \langle S | R \rangle$ .*

*Demostración.* Como  $G$  es hiperbólico existe un  $\delta$  tal que el grafo de Cayley  $\langle S | R \rangle$  es  $\delta$ -hiperbólico.

Definimos  $D = \lfloor 8\delta \rfloor + 1$  y denotamos por  $\varphi : \mathbb{F}(S) \rightarrow G$  al homomorfismo canónico.

Por la proposición 5.4 podemos definir el conjunto finito:

$$\begin{aligned} R = \{ & uv^{-1} | u, v \in \mathbb{F}(S), \varphi(u) = \varphi(v), \|\varphi(u)\|_S = l(v) < l(u), \|u\| < D \} \\ & \cup \{ ss^{-1} | s \in S \} \end{aligned}$$

El homomorfismo canónico  $\varphi : \mathbb{F}(S) \rightarrow G$  es suprayectivo porque  $S$  es una familia generadora de  $G$ .

Por definición,  $R \subseteq \text{Ker } \varphi$  luego  $N(R) \subseteq \text{Ker } \varphi$  ya que  $N(R)$  es el subgrupo normal de  $\mathbb{F}(S)$  generado por  $R$  y  $\text{ker } \varphi$  es normal.

Recíprocamente, vamos a probar que para toda palabra  $\omega \in \text{Ker } \varphi$  se tiene que  $\omega \in N(R)$ . Además probaremos que  $\langle S | R \rangle$  es presentación de Dehn.

Procedemos por inducción sobre la longitud de  $\omega$ . Si la longitud de  $\omega$  es cero, entonces  $\omega = id$ .

Supongamos que la longitud de  $\omega$  no es cero y que todas las palabras del  $\text{Ker } \varphi$  con longitud menor que la de  $\omega$  están en  $N(R)$ .

Si  $\omega$  es no reducida, encontraremos una subpalabra en  $\omega$  que está en  $\{ss^{-1} | s \in S\}$ . Por tanto podemos poner  $\omega = \omega' ss^{-1} \omega''$ , con  $s \in S$ . Entonces tenemos:

$$\omega = \omega' \omega'' (\omega'')^{-1} ss^{-1} \omega''$$

y  $(\omega'')^{-1} ss^{-1} \omega'' \in N(R)$ . Además  $l(\omega' \omega'') < l(\omega)$  y  $\omega' \omega'' \in \text{Ker } \varphi$  luego por inducción  $\omega' \omega'' \in N(R)$  y  $\omega \in N(R)$ .

Si es reducida, por la proposición 5.4 podemos encontrar un ciclo  $\gamma$  en el grafo de Cayley  $Cay(G, S)$  con  $\gamma(0) = \gamma(n) = id$  tal que las imágenes por  $\gamma$  de los valores  $0, 1, \dots, n$  del intervalo  $[0, n]$  sean vértices del grafo de Cayley con  $n = l(\omega)$ . Sean  $\omega'$  la subpalabra correspondiente a  $\gamma([0, t])$ ,  $u$  la subpalabra correspondiente a  $\gamma([t, t'])$  y  $\omega''$  la subpalabra correspondiente a  $\gamma([t', n])$

$$id = \gamma(0) \xrightarrow{\omega'} \gamma(t) \xrightarrow{u} \gamma(t') \xrightarrow{\omega''} \gamma(n) = id$$

Esto nos permite descomponer la palabra en  $\omega = \omega' u \omega''$  de manera que  $u$  no es geodésica y:

$$\|\varphi(u)\|_S \leq l(u) \leq D$$

Sea  $v \in \mathbb{F}(S)$  un representante de  $\varphi(u)$  de longitud menor posible, es decir,  $\varphi(v) = \varphi(u)$ ,  $\|\varphi(u)\|_S = l(v)$  y  $l(v) < l(u)$ . Por la construcción de  $R$  tenemos:

$$id = \varphi(\omega) = \varphi(\omega')\varphi(u)\varphi(\omega'') = \varphi(\omega')\varphi(v)\varphi(\omega'') = \varphi(\omega'v\omega'')$$

Además:

$$\omega = \omega'u\omega'' = \omega'uv^{-1}v\omega'' = \omega'uv^{-1}(\omega')^{-1}\omega'v\omega''$$

Claramente  $\omega'uv^{-1}(\omega')^{-1} \in N(R)$  y  $\omega'v\omega'' \in \text{Ker } \varphi$ . Como  $\omega'v\omega''$  tiene longitud menor que  $\omega$ , por inducción  $\omega'v\omega'' \in N(R)$ . Luego  $\omega \in N(R)$  por ser producto de elementos de  $N(R)$ . Por el primer teorema de isomorfía tenemos que:

$$\mathbb{F}(S)/\text{ker } \varphi = \mathbb{F}(S)/N(R) \cong G$$

Y por tanto  $\langle S \mid R \rangle$  es una presentación de  $G$ . Queremos ver además que es una presentación de Dehn. Por contrucción,  $R$  cumple los puntos 1.) y 2.) de la definición. Además, como acabamos de ver, si  $\omega$  representa a la identidad de  $G$  entonces contiene una subpalabra en  $R$  de manera que se cumple también el punto 3.). Por tanto  $\langle S \mid R \rangle$  es una representación de Dehn.

□

Una propiedad de los grupos que podemos demostrar por ser consecuencia de este teorema es:

**Corolario 5.7.** *Los grupos hiperbólicos admiten una presentación finita.*

*Demostración.* Todo grupo hiperbólico admite una presentación Dehn por el teorema 5.6 por tanto admite una presentación finita. □

Para terminar demostraremos el resultado principal de esta sección.

**Teorema 5.8.** *El problema de la palabra tiene solución para los grupos hiperbólicos.*

*Demostración.* Esta demostración es una consecuencia del teorema 5.6 y del teorema 5.5. □

# Bibliografía

- [1] MARTINA PFLEGPETER, *Cayley-graphs and Free Groups*, <https://homepage.univie.ac.at/bernhard.kroen/bac04may.pdf>.
- [2] ALESSANDRO SISTO, *Lecture notes on Geometric Group Theory*, <https://people.math.ethz.ch/~alsisto/LectureNotesGGT.pdf>.
- [3] JUAN ALONSO, *Grupos hiperbólicos*, [http://www.cmat.edu.uy/cmat.../eventos/erag23/documentos/notas/notas\\_juan.pdf](http://www.cmat.edu.uy/cmat.../eventos/erag23/documentos/notas/notas_juan.pdf).
- [4] CLARA LÖH, *Geometric Group Theory: An Introduction*, [http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt\\_ws1011/lecture\\_notes\\_old.pdf](http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/lecture_notes_old.pdf),
- [5] JAVIER BRACHO, *Introducción analítica a las geometrías*, <http://www.matem.unam.mx/rolibrogeom/Libro/libroF3.pdf>.
- [6] *Hyperbolic Geometry*, [http://math2.uncc.edu/~frothe/3181allhyp1\\_12.pdf](http://math2.uncc.edu/~frothe/3181allhyp1_12.pdf).
- [7] SVERRIR THORGEIRSSON, *Hyperbolic geometry: history,models and axioms*, <https://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:729893/FULLTEXT01.pdf>.
- [8] *Wikipedia*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Triangle\\_group](https://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_group).
- [9] JEAN MORRISON, *Tessellating the hyperbolic plane*, <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2007/REUPapers/FINALFULL/Morrison.pdf>.