



**Universidad**  
Zaragoza

TRABAJO FIN DE GRADO

# Dinámica cultural de grupos

*Daniel Antón Galindo*

Directores:

Luis Mario Floría Peralta

Jesús Gómez Gardeñes

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA  
27 de junio de 2018

# Índice general

<b>Introducción y objetivos</b>	<b>2</b>
<b>1. Modelo de Axelrod</b>	<b>3</b>
1.1. Descripción del modelo . . . . .	3
1.2. Implementación en diferentes redes . . . . .	4
Todos con todos . . . . .	4
Red cuadrada plana . . . . .	5
<b>2. Identidad de grupo en el modelo de Axelrod</b>	<b>7</b>
2.1. Descripción básica del modelo . . . . .	7
Identidad de grupo . . . . .	8
Interacción homofílica . . . . .	9
Dinámica de evolución . . . . .	9
2.2. Implementación en un solo grupo (caso trivial). Resultados. . . . .	10
<b>3. Efecto de varios grupos en el modelo Axelrod <math>i - g</math></b>	<b>12</b>
3.1. Interacción entre grupos culturales . . . . .	12
3.2. Estados estacionarios posibles en el caso de dos grupos . . . . .	13
3.3. Crisis de identidad y estabilidad del sistema . . . . .	16
3.4. Implementación computacional: algoritmo de detección del estado asintótico . . .	19
3.5. Resultados . . . . .	22
<b>4. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>26</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>27</b>
<b>Anexos</b>	<b>28</b>
<b>A. Agentes ortogonales en el modelo de Axelrod sin estructura de red</b>	<b>28</b>
<b>B. Tiempos de equilibrio en diferentes redes. Modelo de Axelrod.</b>	<b>30</b>
<b>C. Efecto de las condiciones iniciales en el modelo Axelrod <math>i - g</math></b>	<b>31</b>
<b>D. Trayectorias posibles en Axelrod <math>i - g</math> para dos grupos</b>	<b>33</b>
<b>E. Crisis llevadas a cabo hasta alcanzar el equilibrio. Resultados.</b>	<b>34</b>
<b>F. Dependencia de la transición de fase con <math>N</math></b>	<b>35</b>
<b>G. Códigos utilizados</b>	<b>36</b>

# Introducción y objetivos

La física de sistemas complejos es sin duda una de las ramas que más desarrollo ha presentado en las últimas décadas, tanto por su relativa novedad como por su aplicación en numerosos campos antes ajenos a los modelos físicos. Esta disciplina parte a menudo de ideas que la física estadística ha arrojado sobre nuestra concepción de la naturaleza, como por ejemplo el abandono del *reduccionismo*. Esto quiere decir que numerosos comportamientos de los sistemas físicos son inexplicables como simple extrapolación de las características de cada elemento que los compone, de tal manera que cada nivel de complejidad añade nuevas propiedades *emergentes* que requieren de un estudio preciso [1].

Los modelos sociales basados en agentes (ABM) son un ejemplo de aplicación de esta disciplina: buscan descubrir mecanismos locales que expliquen los comportamientos sociales observados a gran escala [2, 3, 4]. En concreto, nos interesamos por un modelo que revolucionó conceptualmente la sociología y abrió la puerta a numerosos estudios que vinieron más tarde: el modelo de Axelrod. Éste busca ilustrar la tensión observada en los sistemas sociales entre multiculturalidad y globalización. En otras palabras, busca explicar *cómo es posible mantener la diversidad cultural pese a la tendencia humana de imitación entre individuos* [5]. Esta tendencia se cuantifica en el modelo mediante la introducción del *solapamiento* de cada individuo con el resto, que mide la similitud entre ambos y determina la probabilidad de imitación. El modelo ha sido de gran interés en investigaciones sobre física de sistemas complejos y sociología, introduciéndose numerosas variaciones y nuevos parámetros que han llevado a la caracterización de diversos comportamientos sociales [6, 7, 8, 9, 10, 11].

En el marco de estas variaciones sobre el modelo de Axelrod, nos planteamos si la imitación entre agentes vecinos es suficiente para explicar la evolución de la cultura de los individuos. Observamos por ejemplo que en toda sociedad es determinante la pertenencia a un determinado grupo con el que nos identificamos y que influye en nuestra manera de ser. Este grupo puede hacernos cambiar de opinión, influir en nuestros gustos... sin necesidad de un contacto directo con un gran número de miembros<sup>1</sup>. Además, en la sociedad actual las interacciones por las redes están tomando cada vez más relevancia, pudiendo una persona seguir una tendencia sin necesariamente interactuar físicamente con otros seguidores de ésta. Por todas estas razones, nos proponemos estudiar la introducción de la escala mesoscópica mediante la definición de grupos culturales a los que pertenecen nuestros agentes. En concreto, buscamos definir una interacción que no sea entre agentes sino que se dé entre cada individuo y el grupo cultural al que pertenece, tratado como un ente más.

Nos proponemos en primer lugar hacer un repaso del modelo de Axelrod y sus efectos en diferentes redes de agentes. A continuación, buscaremos estudiar los posibles efectos de la introducción de la escala mesoscópica y las interacciones del individuo con el grupo cultural. Por último, nos enfrentaremos a la emergencia de una interacción entre grupos culturales que trataremos de caracterizar, así como la transición de fase asociada. Además, indagaremos sobre los posibles efectos sociales que este modelo puede explicar, debatiendo posibles mejoras para futuras investigaciones.

---

<sup>1</sup>Pensemos por ejemplo en la identidad nacional.

# Capítulo 1

## Modelo de Axelrod

Dedicaremos este primer capítulo a familiarizarnos con el modelo de Axelrod, sus definiciones y su dinámica particular. De manera ilustrativa, presentaremos también los resultados ya conocidos del modelo para diversas redes a través de implementaciones propias que nos permitan comprobar que nuestro desarrollo computacional es correcto.

### 1.1. Descripción del modelo

Pasamos a describir el modelo de Axelrod de diseminación cultural, que constituirá la base sobre la que introduciremos el concepto de identidad de grupo en los capítulos 2 y 3. El modelo parte de una concepción de la sociedad como un conjunto de individuos -llamados *agentes*- donde cada uno de ellos posee una determinada “cultura” propia, definida como un conjunto de elementos que la componen (como podrían ser la lengua, la religión, los gustos musicales...) que pueden tomar diferentes valores discretos (en el caso de la música podría ser el rock, el flamenco, el jazz...). Los valores de estos elementos no son fijos sino que pueden variar en el tiempo por la interacción entre dos agentes, mediante el proceso que describiremos más adelante.

Consideramos pues un sistema de  $N$  agentes, donde cada *individuo*  $i$  tiene una *cultura*  $\vec{\sigma}(i)$  definida. Llamamos cultura a un vector de  $F$  componentes o *features* que pueden tomar  $Q$  valores diferentes o *trazos*.

$$\vec{\sigma}(i) = \{\sigma_f(i)\}, \text{ con } \begin{cases} i = 0, \dots, N-1 \\ f = 0, \dots, F-1 \\ \sigma_f = 0, \dots, Q-1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Nuestra población se puede representar por la matriz  $S$  ( $N \times F$ ), donde cada fila representa la cultura de un individuo, de tal manera que

$$S_{i,f} = \sigma_f(i) \quad (1.2)$$

Otra forma de registrar la información de nuestra población que nos será útil más adelante es definir la matriz  $H$  ( $F \times Q$ ) de los *histogramas*, donde cada fila  $f$  representa la distribución de los  $Q$  trazos que toma el feature  $f$  en la población total:

$$H_{f,q} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta_{\sigma_f(i),q} \quad (1.3)$$

Como ya hemos introducido antes, nuestro sistema varía con el tiempo mediante la interacción entre agentes. Este modelo parte de la premisa según la cual cada individuo tiende a imitar aquellos individuos con los que ya comparte algún rasgo, siendo muy improbable que imite aquellos a los que no se parece en nada. A este proceso lo conocemos como interacción *homofílica* y se modeliza matemáticamente mediante un proceso estocástico en el que los agentes se imitan con una probabilidad mayor cuantos más rasgos tienen en común en sus culturas.

Para cuantificar esta “similitud” definimos el *solapamiento* u *overlap*  $\langle \vec{\sigma}(i) | \vec{\sigma}(j) \rangle$  de dos agentes  $i$  y  $j$  como la suma normalizada del número de features compartidos por los dos (decimos que dos individuos “comparten un feature” cuando sus culturas toman el mismo trazo en ese feature).

$$\langle \vec{\sigma}(i) | \vec{\sigma}(j) \rangle = \frac{1}{F} \sum_{f=0}^{F-1} \delta_{\sigma_f(i), \sigma_f(j)} \quad (1.4)$$

donde  $\delta_{i,j}$  representa la *delta de Kronecker*, que toma el valor 1 cuando  $i = j$  y 0 en caso contrario. De esta manera, el solapamiento puede tomar valores que van desde 0, cuando los individuos no comparten ningún feature -decimos entonces que son *ortogonales*-, hasta 1, cuando los individuos comparten los  $F$  features -decimos entonces que son *clones*-.

El proceso de evolución es el siguiente: en cada paso de tiempo, un agente elige aleatoriamente uno de sus vecinos y prueba una interacción con él. Con probabilidad proporcional al solapamiento de los dos, el primero imita al segundo tomando el mismo trazo que él en uno de los features *no comunes* entre los dos, elegidos equiprobablemente. Nótese que tanto si los individuos son ortogonales como si son clones nunca se producirá cambio en las culturas de ninguno de ellos por lo que decimos que, si un agente es clon u ortogonal a todos sus vecinos en un instante de tiempo determinado, está *inactivo* en ese instante. Cuando todos los agentes se vuelven inactivos en un instante de tiempo, ya no es posible un cambio del sistema en ningún paso de tiempo posterior, por lo que decimos que hemos alcanzado una *situación de equilibrio*. El objetivo de las implementaciones desarrolladas en los siguientes apartados será crear diferentes poblaciones que evolucionen hasta alcanzar una situación de equilibrio que poder analizar.

## 1.2. Implementación en diferentes redes

Como ya hemos comentado, nuestro objetivo en las simulaciones será alcanzar una situación en la que todos los agentes sean inactivos. Esta situación estará muy determinada por el tipo de red que utilicemos para conectar nuestros agentes, ya que un individuo sólo puede interactuar con sus vecinos, es decir con aquellos nodos de la red con los que comparte un enlace.

Presentamos a continuación los dos casos tratados: el de un sistema sin estructura de red en el que todos interactúan con todos y el caso de una red cuadrada plana. En ambos casos comenzamos creando una población totalmente aleatoria (asignando a cada agente  $F$  números aleatorios entre 0 y  $Q - 1$ ) y definiendo los vecinos de cada agente. Realizamos un proceso de Monte Carlo en el que los individuos interactúan entre ellos de la manera descrita anteriormente, deteniendo la simulación cuando todos los agentes están inactivos (comprobamos que todas las parejas de vecinos tienen un solapamiento con valor 0 o 1).

### Todos con todos

Partimos del caso trivial en el que no existe una estructura de red y cada agente puede interactuar con todos los demás. En este caso la condición de equilibrio es que cada agente sea ortogonal o clon a *todos* los demás. Esto corresponde a que se forme uno o varios conjuntos de individuos idénticos entre ellos pero ortogonales al resto (formación de varias culturas ortogonales entre sí).

Además, es fácil notar que la interacción de todos con todos, a la vez que ralentizará el proceso de obtención del equilibrio, favorecerá que se alcance un consenso general y por lo tanto una cultura mayoritaria (por otro lado totalmente arbitraria dadas las condiciones iniciales aleatorias). De esta manera un número importante de individuos,  $n_{clo}$  acabará imitando esta cultura y el resto,  $N - n_{clo}$ , será ortogonal a ésta pudiendo formar pequeñas culturas entre ellos. Podemos deducir que  $N - n_{clo}$  será generalmente un número pequeño pues corresponderá a aquellos que desde el inicio no interactúen con ningún agente o con pocos de ellos, impidiendo

que imiten la cultura mayoritaria, y por lo tanto dependerá fuertemente de las condiciones iniciales. Además, estará acotado inferiormente por  $n_{ort}(t)$ , el número de agentes ortogonales a *todos* los demás, que podrá variar en el tiempo pero tendrá un valor esperado en la situación inicial,  $\langle n_{ort}(t_0) \rangle$ , totalmente determinado por los parámetros del sistema:

$$\frac{\langle n_{ort}(t_0) \rangle}{N} = \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{NF} \quad (1.5)$$

Para un análisis más detallado de los agentes ortogonales y la comprobación de (1.5), consultar el anexo A.

Procedemos ahora a la comprobación de estas predicciones mediante simulaciones de Monte Carlo para valores de  $N$ ,  $F$  y  $Q$  fijos. Calculamos y representamos los histogramas de cada feature en la situación inicial, la situación final de equilibrio y una situación intermedia que nos permita observar la evolución que lleva a cabo el sistema. Realizamos dos simulaciones, tomando dos parejas de valores diferentes para los parámetros  $N$  y  $Q$ , ambas <sup>1</sup> con  $F = 5$  (figura 1.1). Observamos que los histogramas iniciales reproducen una densidad de probabilidad plana de altura  $1/Q$ , y que tras numerosas iteraciones algunos trazos empiezan a tomar relevancia hasta que uno acaba siendo el que domina en la situación final, con altura  $n_{clo}/N$ .

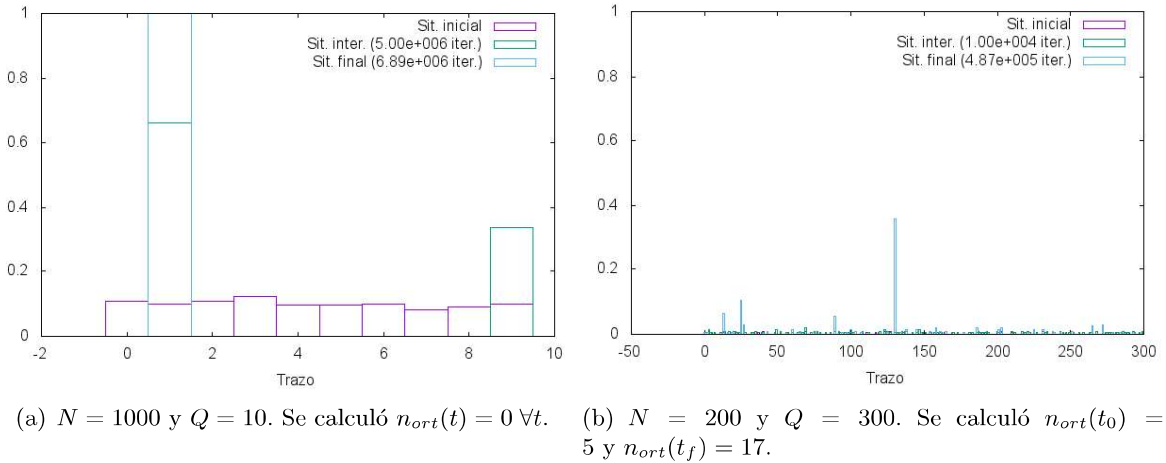


Figura 1.1: Histogramas de uno de los features, para una simulación a partir de una situación aleatoria con  $F = 5$ . Ambos valores de  $n_{ort}(t_0)$  parecen estar en acuerdo con (1.5). El resto de los  $F$  histogramas presentan un comportamiento equivalente.

## Red cuadrada plana

Nos interesamos ahora en un tipo de red que, aún sin ser compleja, ha sido ampliamente estudiada: la red cuadrada plana (2D). Colocamos nuestros agentes en un cuadrado de lado  $L$  tal que  $N = L \times L$  e imponemos condiciones de contorno periódicas de tal manera que todos los agentes posean exactamente cuatro vecinos. Asignamos a nuestros agentes unas coordenadas  $x$  e  $y$  (enteros) que corresponden a su posición horizontal y vertical respectivamente. Así pues, las coordenadas de sus vecinos son:

$$\left( \begin{array}{c} x+1 \\ y \end{array} \right) \text{mod}(L), \left( \begin{array}{c} x-1 \\ y \end{array} \right) \text{mod}(L), \left( \begin{array}{c} x \\ y+1 \end{array} \right) \text{mod}(L), \left( \begin{array}{c} x \\ y-1 \end{array} \right) \text{mod}(L) \quad (1.6)$$

<sup>1</sup>Entre los diferentes parámetros del sistema,  $F$  es el que menos afecta a la dinámica general. En cierta manera, nuestro modelo se puede entender como  $F$  problemas diferentes, uno para cada feature, de tal manera el aumento de  $F$  no aporta comportamientos esencialmente nuevos sino mayor complejidad y por lo tanto mayor tiempo de simulación computacional. Esta observación es válida para este capítulo y los siguientes.

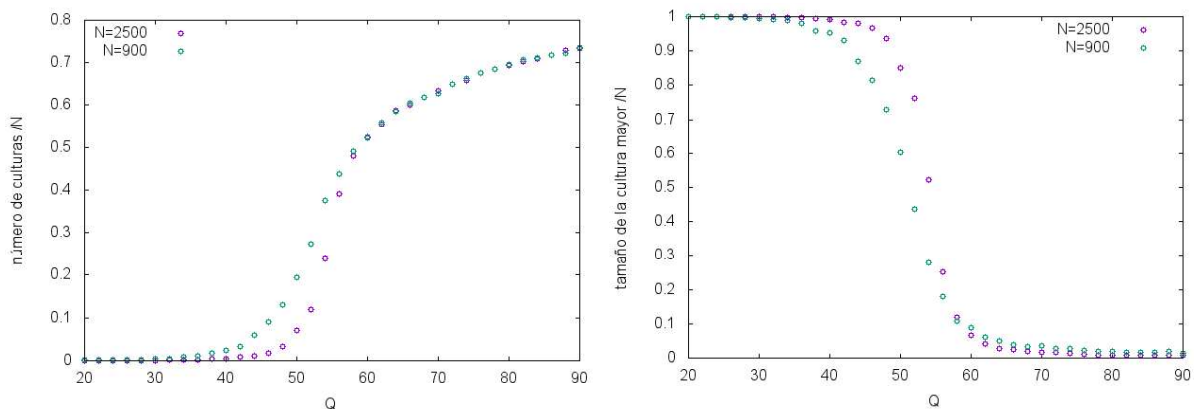
done  $\text{mod}(L)$  representa que tomamos ambas coordenadas en *módulo*  $L$  para asegurar que corresponden a un agente de nuestra red (condiciones de contorno periódicas).

En este caso, nuestra población se caracteriza por las dos matrices de siempre,  $S$  y  $H$ , además de una nueva matriz que caracteriza la estructura de la red: la matriz  $V$  ( $N \times 4$ ) que contiene en cada fila  $i$  los índices de los cuatro vecinos del individuo  $i$ . De esta manera, el proceso de evolución de nuestro sistema consiste en elegir un individuo  $i$  aleatoriamente y después elegir uno de los cuatro vecinos de índice  $V_{i,k}$  mediante la elección de  $k$  entre 0 y 3.

A pesar de la enorme simplicidad de este tipo de red, su estudio nos permite reproducir comportamientos más complejos. La situación de equilibrio es aquella donde todos los agentes son ortogonales o clones únicamente *a sus vecinos*. De esta manera, observaremos de nuevo la formación de “culturas” a las que se adhieren numerosos agentes pero que en este caso estarán localizadas en el espacio, dada la limitación de influencia de cada individuo. Además, este conjunto de culturas no tendrán por qué ser ortogonales entre sí para alcanzar el equilibrio, sino que les bastará con ser ortogonales a las culturas colindantes, siendo incluso posible que se formen culturas idénticas aisladas entre sí si éstas no poseen enlaces entre sus agentes.

Por esta razón, el estudio de los histogramas deja de tener sentido y necesitamos encontrar otros indicadores que nos den información sobre las diferentes situaciones finales que podemos alcanzar. La manera más visual es la implementación de un algoritmo que identifique las diferentes culturas formadas una vez alcanzado el equilibrio. De esta manera, podemos tomar como parámetros de orden el número de culturas formadas (normalizado)  $n_{cult}/N$  y el tamaño de la cultura mayor (también normalizado)  $t_{mayor}/N$  que presentan una transición de fase fuera del equilibrio, ampliamente caracterizada en diversos estudios [12, 13].

Procedemos a la simulación de nuestro modelo en una red cuadrada mediante un proceso de Monte Carlo y al cálculo de nuestros parámetros de orden en la situación final. Tomamos valores fijos de  $F$  y  $N$  y variamos la diversidad cultural  $Q$  para observar la transición de fase mencionada. En la figura 1.2 representamos los resultados obtenidos para  $F = 10$  y dos valores de  $N$ , realizando el promedio de 60 simulaciones. Podemos observar como al aumentar  $Q$ , se produce una transición entre una fase “ordenada” donde todos los individuos forman una sola cultura a otra fase “desordenada” donde el número de culturas tiende a  $N$  (es decir, cada agente es ortogonal a sus vecinos). También se observa que la transición se agudiza al aumentar el tamaño de nuestra población, pudiendo extrapolar que se producirá una singularidad para  $N \rightarrow \infty$ : la transición (de no-equilibrio [14]) se puede considerar “de primer orden” en el límite termodinámico.



(a) Número medio de culturas por individuo  $\langle n_{cult} \rangle / N$ . (b) Tamaño medio de la cultura mayor por individuo  $\langle t_{mayor} \rangle / N$ .

Figura 1.2: Variación de los dos parámetros de orden en función de  $Q$  y para dos valores de  $N$ , con  $F = 10$  y 60 realizaciones por punto. Se observa una transición de fase alrededor de  $Q = 55$  (aproximadamente) que se acentúa al aumentar  $N$ .

## Capítulo 2

# Identidad de grupo en el modelo de Axelrod

En el capítulo anterior nos familiarizamos con el modelo de Axelrod y sus resultados más relevantes ya conocidos. A partir de ahora introduciremos la aportación propia y novedosa de este trabajo, que consiste en añadir una estructura de red bipartita mediante la definición de *grupos culturales* y la introducción de nuevos mecanismos de interacción que describimos más abajo. Una vez presentado el modelo trataremos el caso sencillo de un solo grupo cultural, analizando la única situación final posible y mostrando los resultados obtenidos de la implementación propia del modelo. Casos menos triviales serán tratados en el capítulo 3.

### 2.1. Descripción básica del modelo

Nuestro modelo consiste principalmente en añadir una escala mesoscópica al modelo de Axelrod añadiendo la existencia de grupos culturales a los que pertenecen nuestros agentes. Esto corresponde a crear una red bipartita en la que una clase nodal son los agentes y otra los grupos culturales.

Así pues, consideramos una población de  $N$  agentes donde cada uno, como en el modelo básico de Axelrod, posee una cultura  $\vec{\sigma}_i$ . Pero ahora, los agentes de nuestro sistema pertenecen además a uno o varios grupos culturales  $g$  dentro de los  $G$  existentes ( $g = 0, \dots, G-1$ ). Definimos la matriz  $A_{i,g}$  ( $N \times G$ ) como la matriz de adyacencia asociada a la red bipartita, donde  $A_{i,g} = 1$  si  $i \in g$ , y  $A_{i,g} = 0$  en caso contrario. El número de grupos a los que pertenece  $i$  ( $i = 0, \dots, N-1$ ) se conoce como su *grado*  $k_i = \sum_g A_{i,g}$  y puede tomar valores de 1 a  $G$ . Los diferentes grados de nuestros individuos son invariantes del sistema y dependen de las condiciones iniciales que imponamos a la red. La manera más común es asignar valores aleatorios a  $k$  de acuerdo a una distribución de probabilidad definida, la distribución de grado  $P(k)$ . Igualmente, definimos el *tamaño* de un grupo  $g$  como  $q_g \sum_{i=1}^N A_{i,g}$  que depende de la misma manera de las condiciones iniciales impuestas.

El hecho de añadir esta pertenencia de los individuos a diferentes grupos culturales no se limita a una simple voluntad de restringir los vecinos de cada agente, reproduciendo la misma dinámica que el modelo de Axelrod. Queremos darle una relevancia especial a la pertenencia a un grupo, para que no sea la simple agregación de sus miembros, de tal manera que los agentes interaccionen directamente con el grupo como ente y no con el resto de agentes. Es decir, pasamos de un tipo de interacción *pairwise* o *a pares* para presentar una interacción *individuo-grupo*, como si el grupo fuese un agente más con su identidad propia. Esta variación propia y novedosa del modelo de Axelrod es lo que llamamos “modelo Axelrod  $i - g$ ”. Los detalles y sus mecanismos precisos de evolución los describiremos poco a poco durante esta sección.

La motivación para este tipo de cambio, es el intento de reproducir comportamientos sociales que escapan al modelo tradicional de Axelrod. Así, podríamos interpretar este tipo de interaccio-



nes como los efectos que se producen cuando los individuos se sienten parte de un grupo de gran tamaño, como puede ser una nación, sin poder interactuar fuertemente con sus miembros o los efectos actuales del seguimiento de diversas tendencias por las redes sociales, donde los individuos adhieren diferentes corrientes culturales o políticas sin llegar a interactuar fuertemente entre iguales.

## Identidad de grupo

El microestado de cada grupo está determinado por el conjunto de culturas de sus agentes miembros  $\{\vec{\sigma}(i)\}_{\forall i \in g}$ , lo nos da un total de  $q_g \times F$  números enteros (trazos). De manera análoga al capítulo 1, definimos para cada grupo una matriz que contenga los  $F$  histogramas, obteniendo así una hipermatriz  $H$  ( $G \times F \times Q$ ) que recoge la información del conjunto de nuestra población.

$$H_{g,f,q} = q_g^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} A_{i,g} \delta_{\sigma_f(i),q}$$

Consideramos la identidad de cada grupo como la cultura mayoritaria del conjunto de sus miembros. Entendemos mayoritaria como “mayoría simple”, lo que corresponde a calcular la *moda* -valor más frecuente- en la distribución de cada feature. Así pues, definimos la *identidad del grupo*  $g$  como un vector que toma los siguientes valores:

$$\vec{\sigma}(g) = \{\hat{\sigma}_f(g)\} \quad (2.1)$$

donde  $\hat{\sigma}_f(g)$  es la moda (trazo más frecuente) del histograma del feature  $f$  en el grupo  $g$ . En caso de empate entre varios trazos, tomamos por convenio aquel de valor menor.

Somos conscientes de la limitación que supone escoger el valor más frecuente para representar la identidad de un grupo, ya que podemos llegar a crear identidades prácticamente arbitrarias -véase el caso extremo de una distribución plana, por ejemplo-. En cambio, estamos seguros de que es la mejor de las opciones (frente a tomar la media, por ejemplo) dado el carácter discreto de los trazos y de su significado no cuantitativo (características culturales). Por esta razón, y con el objetivo de registrar mayor información acerca de la identidad de un grupo, definimos los siguientes elementos que cuantifican la fortaleza y no arbitrariedad de nuestras identidades.

Llamamos *vector fuerza* del grupo  $g$ ,  $\vec{h}(g)$ , al vector de los  $F$  máximos de cada histograma de  $g$  (valor de los histogramas en las modas  $\hat{\sigma}_f(g)$ ).

$$\vec{h}(g) = \{h_f(g)\} = H_{g,f,\hat{\sigma}_f(g)} \quad (2.2)$$

Y por último, definimos la *fuerza* del grupo  $g$  como la suma normalizada de los componentes del vector fuerza.

$$h(g) = F^{-1} \sum_f h_f(g) \quad (2.3)$$

Creerá el lector que nos extendemos excesivamente en la discusión de las definiciones que construyen nuestro modelo. Creemos en cambio que esta discusión es fundamental ya que, parafraseando a Shelling [4], los conceptos que definen un modelo son centrales a la hora de construir puentes conceptuales entre los diferentes micro-motivos y las situaciones macroscópicas asociadas en cualquier sistema complejo (social, económico, biológico...), no sólo en física. En esta línea, debemos tener claro en todo momento que la definición de la identidad de grupo conlleva una pérdida de información sobre las minorías, que en parte puede venir a representar efectos sociales reales (invisibilización de lo “raro”) pero que por otra parte es una limitación clara del modelo. En concreto, la información completa de cada micro-estado -contenida en la matriz  $S$ -corresponde para un grupo a  $q_g \times F$  números enteros positivos inferiores a  $Q$ , mientras que en la meso-escala de la identidad de grupo ésta se reduce a  $2F$  números enteros positivos (nótese que  $q_g h_f(g)$  es un entero). En todo caso, debemos tener claro que esta pérdida de información microscópica es común en cualquier modelo estadístico, incluso en aquellos más usados y efectivos de la física estadística (pensemos por ejemplo en la definición de temperatura).

## Interacción homofílica

En el modelo original de Axelrod, basado en interacciones pairwise, dos agentes se imitaban con una probabilidad proporcional a su “grado de similitud”, definido mediante su solapamiento. Esta cantidad nunca decrecía durante una interacción entre agentes: era la fuerza motriz de la dinámica cultural.

De manera análoga, definimos un nuevo indicador en nuestra interacción  $i-g$  que cuantifique la similitud entre un individuo  $i$  y la identidad de un grupo  $g$  al que pertenece: el *beneficio*  $\pi_{i,g}$ . De esta manera, una coincidencia de trazo en un feature  $f$  ( $\hat{\sigma}_f(g) = \sigma_f(i)$ ) beneficia la interacción (no-pairwise) de manera proporcional a la fuerza  $h_f(g)$ , mientras que una no coincidencia no aporta ningún tipo de beneficio para este feature. Es decir,

$$\pi_{i,g} = \langle \vec{\sigma}(i) | \vec{h}(g) | \vec{\sigma}(g) \rangle \equiv \frac{1}{F} \sum_{f=0}^{F-1} h_f(g) \delta_{\sigma_f(i), \hat{\sigma}_f(g)} , \quad (2.4)$$

lo que corresponde al solapamiento entre  $\vec{\sigma}(g)$  y  $\vec{\sigma}(i)$ , pesado con el vector  $\vec{h}(g)$ . El hecho de pesar nuestro beneficio en cada feature viene justificado por los argumentos que utilizamos al definir nuestro vector fuerza  $\vec{h}(g)$ : Dado que nuestra definición de identidad conlleva la posibilidad de no ser muy representativa de la población del grupo (en todos sus features o en uno de ellos), premiamos de manera diferente la coincidencia con un feature que sí lo es que con uno que es (cuasi-)arbitrario. Este premio sesgado se logra pesando las coincidencias con el vector fuerza, que nos da precisamente una idea de la “representatividad” de ese feature. Por último, cabe observar que  $\pi_{i,g}$  puede tomar valores que van de 0 -*agente ortogonal*- a  $h(g)$  -*agente clon*-.

De acuerdo a la definición anterior, podemos (re-)interpretar la fuerza  $h(g)$  de un grupo como su “beneficio propio”  $\pi_g$  que obtendríamos considerando al grupo como un ente cultural más:

$$\pi_g = \langle \vec{\sigma}(g) | \vec{h}(g) | \vec{\sigma}(g) \rangle = \frac{1}{F} \sum_{f=1}^F h_f = h(g) , \quad (2.5)$$

Nótese además que la fuerza de un grupo es intensiva respecto a su tamaño  $q_g$ .

Uno podría legítimamente preguntarse si, según nuestra definición, el beneficio de un agente con su grupo es realmente algo diferente a la suma de los solapamientos pairwise con el resto de miembros del grupo. La simple búsqueda de algún contra-ejemplo nos llevaría rápidamente a una respuesta negativa. Como argumento general, podemos decir que, mientras que la coincidencia en alguno de los trazos propios de las minorías podrían suponer un beneficio en el caso de interacciones pairwise, nunca podría suponerlo en el otro caso. Por lo tanto, podemos afirmar que la interacción con la identidad de un grupo como aquí la hemos definido no es, en general, equivalente a la interacción con todos los demás miembros del grupo.

## Dinámica de evolución

La dinámica del modelo es la siguiente: en cada paso de tiempo elegimos un agente  $i$  al azar y un grupo  $g$  al que pertenece, nuevamente al azar. Con probabilidad proporcional al beneficio de ambos,  $\pi_{i,g}$ , el agente imita el trazo  $\hat{\sigma}_{f_u}$  que toma la identidad de  $g$  en uno de los  $F_u$  features no compartidos por los dos, eligiendo  $f_u$  con probabilidad proporcional a la componente correspondiente del vector fuerza del grupo,  $h_{f_u}(g)$ .

Para simplificar la implementación de este proceso, definimos varios vectores que serán de gran utilidad práctica a la hora de simular el proceso. En primer lugar, definimos el conjunto de vectores  $\{\vec{G}(i)\}_i = 0, \dots, N-1$ , cada uno de dimensión  $k_i$  de tal manera que cada componente del vector  $\vec{G}(i)$  es el índice de cada grupo al que pertenece el agente  $i$ . Este conjunto de vectores se calcula una sola vez al definir la estructura de la red y es invariante durante toda la simulación

<sup>1</sup>. También definimos el vector  $\vec{F}_u(i, g)$  de dimensión  $F_u$  que contiene todos los índices de los features no comunes entre el agente  $i$  y el grupo  $g$ . Este vector se calcula únicamente en cada momento, durante el cálculo del beneficio, ya que puede evolucionar en el tiempo. De acuerdo a estas definiciones, presentamos en la figura 2.1 un esquema correspondiente a un paso temporal de nuestro modelo.

$$\begin{array}{c}
S = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}(0) \\ \vdots \\ \vec{\sigma}(i) \\ \vdots \\ \vec{\sigma}(N-1) \end{pmatrix} \xleftarrow{1/N} \vec{G}(i) = (\dots g \dots) \\
\begin{array}{c} \boxed{1/k_i} \\ \downarrow \end{array} \\
\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\pi_{i,g}} \vec{F}_u(i, g) = (\dots f_u \dots) \\ \xrightarrow{1 - \pi_{i,g}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \boxed{\frac{h_{f_u}(g)}{\sum_{f_u} h_{f_u}(g)}} \\ \downarrow \\ \text{cambio} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{f_u}(i, t+1) = \hat{\sigma}_{f_u}(g, t) \\ \hat{\sigma}_{f_u}(g, t+1) = \hat{\sigma}_{f_u}(g, t) \end{array} \right. \\ \\ \text{no cambio} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{f_u}(i, t+1) = \sigma_{f_u}(i, t) \\ \hat{\sigma}_{f_u}(g, t+1) = \hat{\sigma}_{f_u}(g, t) \end{array} \right. \end{array}
\end{array}$$

Figura 2.1: Paso temporal de nuestro modelo Axelrod  $i-g$ . Los valores encuadrados en rojo corresponden a probabilidades.

Observamos que durante la interacción  $i-g$  la identidad del grupo se mantiene intacta, mientras que la cultura del individuo es la que puede verse modificada. Esto afecta a la magnitud  $\pi_{i,g}$ , que es no decreciente en cada tentativa de interacción, análogamente al solapamiento en el capítulo 1. Además, la elección más probable de los features más “fuertes” (con componente mayor en el vector fuerza) impuesta por el modelo, optimiza este crecimiento del beneficio, imitando con más probabilidad aquellos features que más contribuirán a aumentarlo.

Por otro lado, estos cambios de micro-estado tienen consecuencias inmediatas en la meso-escala de nuestra estructura de grupos. En primer lugar, debemos tener en cuenta que cualquier cambio de un agente  $i$  debido a su interacción con la identidad del grupo  $g$  siempre conllevará al aumento de los valores  $h_f(g)$  (siendo  $f$  el feature imitado) y  $h(g)$ . En concreto, el incremento será de  $q_g^{-1}$  y  $(Fq_g)^{-1}$  respectivamente. Por otro lado, cuando  $i$  pertenezca a más grupos, podrá igualmente modificar las características de éstos (fuerza e identidad), lo que pone en evidencia la no-trivialidad de este modelo.

Por esta razón, procederemos en primer lugar a la implementación en un solo grupo, cuyos resultados presentamos en los próximos apartados. El desarrollo de las posibilidades emergentes al añadir más grupos serán presentadas en el capítulo 3, así como los resultados obtenidos y su discusión.

## 2.2. Implementación en un solo grupo (caso trivial). Resultados.

En el caso trivial de un solo grupo cultural, sus agentes solamente experimentarán aquellos cambios que incrementen su beneficio  $\pi_{i,g}$  de tal manera que la identidad del grupo se vea reforzada. Así pues, el comportamiento de cualquier sistema estará totalmente determinado por sus condiciones iniciales  $\{\vec{\sigma}(i, t_0)\}_{i=1, \dots, q_g}$  de tal manera que se podrá siempre caracterizar por las siguientes reglas:

<sup>1</sup>Para la simulación computacional, registramos todos estos vectores en una matriz de dimensión  $N \times G$  ya que  $G$  es el valor máximo que puede tomar  $k_i$ . Al tener registrados los  $N$  grados de cada agente, basta con recorrer solamente las  $k_i$  primeras columnas en cada fila  $i$  e ignorar las siguientes. Aun así, completamos estas últimas columnas con el valor '-1' para detectar posibles errores de implementación.

- i*) Si un agente  $i$  es ortogonal a la identidad del grupo,  $\langle \vec{\sigma}(i, t_0) | \vec{\sigma}(t_0) \rangle = 0$ , su beneficio es nulo y es por lo tanto un agente inactivo ( $\vec{\sigma}(i, t) = \vec{\sigma}(i, t_0) \forall t > t_0$ ). La fracción  $\rho(g)$  de agentes ortogonales en  $t = t_0$  es entonces una constante del movimiento totalmente determinada por las condiciones iniciales.
- ii*) Cualquier otro agente no ortogonal acaba imitando la identidad del grupo y volviéndose un clon de ésta (y por lo tanto inactivo).
- iii*) La identidad del grupo es una constante de movimiento determinada también por las condiciones iniciales. Las componentes de su vector fuerza  $h_f(g)$  así como su fuerza total  $h(g)$  son funciones monótonas no decrecientes en el tiempo. Todas ellas tienden al valor asintótico  $h(g) = 1 - \rho(g)$ , alcanzado en la *situación de equilibrio*, cuando todos los agentes están inactivos.

Así pues, en el caso de un solo grupo cultural, tenemos un solo micro-estado final de equilibrio fijado por (aunque en general diferente de) las condiciones iniciales. A nivel mesoscópico, podremos observar una identidad constante en el tiempo y una evolución estocástica del vector fuerza hasta el valor final esperado. Nos proponemos comprobar estos resultados para verificar que nuestro análisis es correcto.

Se realizó la simulación de un sistema con condiciones iniciales aleatorias y  $N$ ,  $F$  y  $Q$  fijos, registrando en cada paso temporal el valor de cada  $h_f(g)$  y calculando  $\rho(g)$  al final de la simulación. Presentamos en la figura 2.2 los resultados para  $N = 1000$ ,  $F = 10$  y  $Q = 5$  que nos muestran la evolución no-decreciente de estas componentes hasta el valor  $h(g) = 1 - \rho(g)$ , confirmando así nuestro análisis. Se observan además, como todas las componentes parten de una situación inicial “débil”, con valores ligeramente superiores a 0,2, que son los valores esperados para la moda de los histogramas con  $Q = 5$ . Una evolución desde otras condiciones iniciales se presenta en el anexo C.

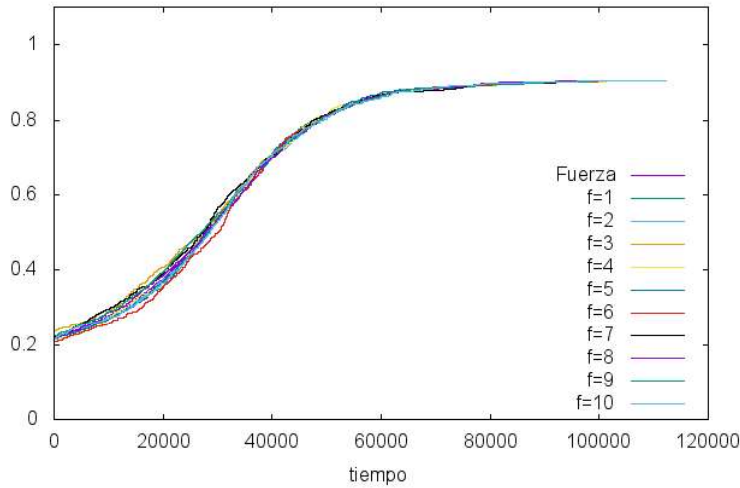


Figura 2.2: Evolución de las componentes  $h_f(g)$  del vector fuerza para una simulación de Monte Carlo para interacciones  $i - g$  en un solo grupo, a partir de una situación inicial aleatoria con  $N = 1000$ ,  $F = 10$  y  $Q = 5$ . Se calculó  $\rho(g) = 0,095$ , que cuadra con el valor alcanzado por  $h(g)$  en el equilibrio:  $1 - \rho(g) = 0,905$ .

## Capítulo 3

# Efecto de varios grupos en el modelo Axelrod $i - g$

En este capítulo, discutiremos y realizaremos la implementación del modelo Axelrod  $i - g$  en el caso de dos grupos culturales. Veremos cómo a través de interacciones individuales se forma una interacción entre grupos con efectos macroscópicos tales como las *crisis de identidad*. Estudiaremos las diferentes situaciones asintóticas posibles y en concreto el estado fluctuante por ser novedoso en este tipo de modelos. Analizaremos las condiciones necesarias para que tenga lugar una crisis y de ahí obtendremos un algoritmo capaz de detectar las situaciones fluctuantes. Finalmente, presentaremos los resultados obtenidos en nuestras simulaciones, donde podremos observar una transición de fase (de no-equilibrio) a través de la detección de los estados finales.

### 3.1. Interacción entre grupos culturales

Como ya comentamos en la sección 2.1, las interacciones  $i - g$  pueden dar lugar a cambios en la meso-escala. Aunque la imitación cultural sólo modifica la cultura de nuestros agentes, este cambio se ve reflejado en los histogramas  $H$ , provocando un cambio en las características del (de los) grupo(s) al que pertenece:  $\vec{\sigma}(g)$ ,  $\vec{h}(g)$  y  $h(g)$ . La evolución de la fuerza de un grupo ya fue caracterizada en el capítulo anterior para el caso trivial de un solo grupo, mientras que un cambio en la identidad no era posible en ese caso. Nos centraremos ahora en esta nueva posibilidad que surge al añadir más de un grupo.

En efecto, si dos grupos comparten al menos un miembro, una de las identidades puede lograr que algún agente común imite alguno de los features, influyendo así en el histograma del otro grupo y pudiendo incluso provocar un cambio de identidad en el otro si el trazo imitado pasa a ser el más frecuente. A este cambio de identidad provocado a raíz de los cambios individuales inducidos por otro grupo le llamamos *crisis de identidad*. Esto es equivalente a una “interacción entre grupos” a nivel de la meso-escala aunque su origen está en los pequeños cambios en el micro-estado. Nos proponemos caracterizar esta interacción.

Sean dos grupos  $l$  y  $m$  con al menos un agente común, de tamaños  $q_l$  y  $q_m$ , identidades  $\vec{\sigma}(l)$  y  $\vec{\sigma}(m)$  y vectores fuerza  $\vec{h}(l)$  y  $\vec{h}(m)$  respectivamente. Consideramos que en un determinado paso de tiempo, elegimos el agente común  $i$  de cultura  $\vec{\sigma}(i)$ , miembro de  $l$  y de  $m$ . El agente probará una interacción con  $l$  o con  $m$  de manera equiprobable (probabilidad 1/2). Queremos estudiar el efecto que tendrán sobre  $l$  una y otra opción.

- Si  $i$  prueba una interacción con  $l$ , la probabilidad de que  $h(l)$  incremente  $(q_l F)^{-1}$  es:

$$q^+(i, l|l) = \pi_{i,l}(1 - \delta(\pi_{i,l} - h(l))) , \quad (3.1)$$

donde el paréntesis descuenta el caso en el que  $i$  sea clon de  $l$ .

- Si  $i$  prueba una interacción con  $m$ ,  $h(l)$  puede incrementar o disminuir  $(q_l F)^{-1}$  con las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} p_{int}^+(i, l|m) &= \pi_{i,m} \sum_f \frac{h_f(m)(1 - \delta_{\sigma_f(i), \hat{\sigma}_f(m)})}{\sum_f h_f(m)(1 - \delta_{\sigma_f(i), \hat{\sigma}_f(m)})} \delta_{\hat{\sigma}_f(l), \hat{\sigma}_f(m)} , \\ p_{int}^-(i, l|m) &= \pi_{i,m} \sum_f \frac{h_f(m)(1 - \delta_{\sigma_f(i), \hat{\sigma}_f(m)})}{\sum_f h_f(m)(1 - \delta_{\sigma_f(i), \hat{\sigma}_f(m)})} \delta_{\sigma_f(i), \hat{\sigma}_f(l)} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde el beneficio viene multiplicado por un sumatorio donde cada sumando corresponde a la probabilidad de escoger un feature no-común entre  $i$  y  $m$ , multiplicada por una delta de Kronecker que, para  $p_{int}^+(i, l|m)$ , anula el sumando en caso de no ser un feature compartido entre  $l$  y  $m$  y, para  $p_{int}^-(i, l|m)$ , anula el sumando en caso de no ser un feature compartido entre  $i$  y  $l$ .

Podemos escribir, a partir de las ecuaciones (3.1) y (3.2), el valor esperado del incremento de la fuerza de  $l$  dada la elección de un agente común  $i$ , como:

$$\langle \Delta h(l) \rangle^{i \in l, m} = \frac{1}{2} \left( q^+(i, l|l) + p_{int}^+(i, l|m) - p_{int}^-(i, l|m) \right) (q_l F)^{-1} \quad (3.3)$$

Nótese que los dos últimos términos son la contribución esperada en la fuerza de  $l$  por la interacción con  $m$ . Mientras que el primer término nunca es negativo (dinámica de un solo grupo), la suma de los dos últimos términos puede tomar ambos signos y corresponde a un sumatorio pesado con las fuerzas de  $m$ . Es decir, cuanto más fuerte sea el grupo  $m$  mayor será en general su influencia en el grupo  $l$ .

Para facilitar la notación, definimos:

$$a_{l|i}(i) = (1 - \delta(\pi_{i,l} - h(l))) = \frac{q^+(i, l|l)}{\pi_{i,l}} , \quad (3.4)$$

que toma el valor 0 si el agente  $i$  es clon del grupo  $l$  y 1 en caso contrario, y

$$\begin{aligned} a_{l|m}(i) &= \sum_f \frac{h_f(m) [\delta_{\hat{\sigma}_f(l), \hat{\sigma}_f(m)} - \delta_{\sigma_f(i), \hat{\sigma}_f(l)}]}{\sum_f h_f(m) (1 - \delta_{\sigma_f(i), \hat{\sigma}_f(m)})} (1 - \delta_{\sigma_f(i), \hat{\sigma}_f(m)}) \\ &= \frac{p_{int}^+(i, l|m) - p_{int}^-(i, l|m)}{\pi_{i,l}} , \end{aligned} \quad (3.5)$$

que es el término de interacción entre  $l$  y  $m$ . De esta manera, la ecuación (3.3) se puede expresar como

$$\langle \Delta h(l) \rangle^{i \in l, m} = \frac{1}{2q_l F} (\pi_{i,l} a_{l|i}(i) + \pi_{i,m} a_{l|m}(i)) . \quad (3.6)$$

De manera análoga, intercambiando  $l$  por  $m$ , obtenemos el valor esperado del incremento de  $h(m)$ :

$$\langle \Delta h(m) \rangle^{i \in l, m} = \frac{1}{2q_m F} (\pi_{i,m} a_{m|m}(i) + \pi_{i,l} a_{m|l}(i)) . \quad (3.7)$$

### 3.2. Estados estacionarios posibles en el caso de dos grupos

Dada la complejidad de la interacción entre grupos, trataremos en primer lugar el caso más sencillo en el que aparece esta interacción: el caso de dos grupos culturales  $l$  y  $m$  con al menos un agente en común. Como en el caso de un grupo, nos interesa encontrar aquellos *estados de*

*equilibrio* donde todos los agentes sean *inactivos* es decir, ortogonales o clones a los grupos a los que pertenecen. Para los agentes *no comunes* (es decir los agentes  $i$  tal que  $k_i = 1$ ), el equilibrio se alcanzará inequívocamente siguiendo la dinámica de un solo grupo (capítulo 2). Si en cambio nos fijamos en los agentes comunes, los estados de equilibrio corresponden a aquellos donde

$$\langle \Delta h(l) \rangle^{i \in l, m} = \langle \Delta h(m) \rangle^{i \in l, m} = 0 \quad \forall i \in l, m \quad (3.8)$$

Partiendo de una población aleatoria y por lo tanto de dos identidades aleatorias,  $\vec{\sigma}(l, t_0)$  y  $\vec{\sigma}(m, t_0)$ , nos interesa caracterizar a nivel mesoscópico los diferentes estados de equilibrio que se pueden alcanzar (en  $t = t_f$ ). A priori y a falta de analizar si son posibles o no, estos estados pueden dividirse en tres casos: los grupos son idénticos, los grupos son ortogonales y el resto de los casos (lo que llamamos grupos *diferentes*).

Analicemos los microestados compatibles con cada uno de estos estados finales. Podemos representar el estado de cada agente *común* a  $l$  y  $m$  con el par  $(\delta(\pi_{i,l} - h(l)), \delta(\pi_{i,m} - h(m)))$  cuyas dos componentes sólo pueden tomar los valores 0 o 1 en una situación de equilibrio -dado que todos los agentes deben ser inactivos-. Tenemos por lo tanto cuatro posibles estados para estos agentes, que nos darán valores diferentes para los coeficientes (3.4) y (3.5). En la tabla de la figura 3.1 comprobamos que los cuatro cumplen efectivamente la condición de equilibrio (3.8) y pueden hacer parte por lo tanto de posibles micro-estados de equilibrio. En cambio, no todos son compatibles con cada uno de los tres meso-estados posibles, como analizamos a continuación.

Estado (y beneficios)	Estabilidad grupo $l$	Estabilidad grupo $m$
$(0, 0)$ $\pi_{i,l} = 0$ $\pi_{i,m} = 0$	$a_{l l} = 1$ $a_{l m} = \sum_f \frac{h_f(m)}{Fh(m)} \delta_{\hat{\sigma}_f(l), \hat{\sigma}_f(m)}$ $\Rightarrow \langle \Delta h(l) \rangle = 0$	$a_{m m} = 1$ $a_{m l} = \sum_f \frac{h_f(l)}{Fh(l)} \delta_{\hat{\sigma}_f(m), \hat{\sigma}_f(l)}$ $\Rightarrow \langle \Delta h(m) \rangle = 0$
$(1, 1)$ $\pi_{i,l} = h(l)$ $\pi_{i,m} = h(m)$	$a_{l l} = 0$ $a_{l m} = 0$ $\Rightarrow \langle \Delta h(l) \rangle = 0$	$a_{m m} = 0$ $a_{m l} = 0$ $\Rightarrow \langle \Delta h(l) \rangle = 0$
$(1, 0)$ $\pi_{i,l} = h(l)$ $\pi_{i,m} = 0$	$a_{l l} = 0$ $a_{l m} = \sum_f \frac{h_f(m)}{Fh(m)} (\delta_{\hat{\sigma}_f(l), \hat{\sigma}_f(m)} - 1)$ $\Rightarrow \langle \Delta h(l) \rangle = 0$	$a_{m m} = 1$ $a_{m l} = 0$ $\Rightarrow \langle \Delta h(m) \rangle = 0$
$(0, 1)$ $\pi_{i,l} = 0$ $\pi_{i,m} = h(m)$	$a_{l l} = 1$ $a_{l m} = 0$ $\Rightarrow \langle \Delta h(l) \rangle = 0$	$a_{m m} = 0$ $a_{m l} = \sum_f \frac{h_f(l)}{Fh(l)} (\delta_{\hat{\sigma}_f(m), \hat{\sigma}_f(l)} - 1)$ $\Rightarrow \langle \Delta h(lm) \rangle = 0$

Figura 3.1: Valores de los coeficientes (3.4) y (3.5) para cada uno de los cuatro estados inactivos posibles de un agente común. Calculando  $\langle \Delta h(l) \rangle^{i \in l, m}$  y  $\langle \Delta h(m) \rangle^{i \in l, m}$  con las expresiones (3.6) y (3.7), obtenemos en los cuatro casos que los valores esperados se anulan, confirmando la condición de equilibrio (3.8).

En el primer caso, donde los grupos son idénticos, las situaciones  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  son imposibles dado que si un agente es clon de un grupo lo es también del otro. En el segundo estado de equilibrio, donde los grupos son ortogonales, la situación  $(1, 1)$  es imposible ya que si un agente es clon de un grupo será ortogonal al otro. Por último, el caso de identidades diferentes excluye los estados  $(1, 1)$  que implica grupos idénticos y los estados  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  que implican grupos ortogonales. Por lo tanto esta situación será posible solamente cuando todos los agentes comunes sean ortogonales a los dos grupos (lo que es muy improbable salvo para un número pequeño de agentes comunes), eliminando cualquier interacción entre grupos, de modo que las identidades finales de los grupos serán las dadas por la situación inicial.

Efectivamente, estas tres situaciones descritas (grupos *idénticos*, *ortogonales* y *diferentes*) son los tres únicos estados de equilibrio compatibles con (3.8). En cambio, demostraremos ahora que

puede existir un comportamiento asintótico del sistema en el que, bajo determinadas condiciones, no sea posible alcanzar el equilibrio. Imaginemos un agente  $i$  común a dos grupos  $m$  y  $l$  que comparte todos los features que son comunes a los dos. Consideremos el feature  $f_u$ , uno de los  $F_u$  no compartidos por los dos grupos. El trazo asociado en el agente  $i$ ,  $\sigma_{f_u}(i)$ , alternará entre los valores  $\hat{\sigma}_{f_u}(l)$  y  $\hat{\sigma}_{f_u}(m)$  hasta que se produzca una crisis de identidad en uno de los dos grupos (tal que  $\hat{\sigma}_{f_u}(l) = \hat{\sigma}_{f_u}(m)$ ). Pero si las condiciones concretas del micro-estado impiden que esta crisis se produzca, nos encontraremos con una alternancia estocástica entre los  $2^{nF_u}$  micro-estados posibles -donde  $n$  es el número de agentes comunes fluctuantes<sup>1</sup>- sin alcanzar nunca una situación de equilibrio. A esta situación la llamamos *estado fluctuante* y su identificación requiere de un análisis detallado sobre la posibilidad de una crisis de identidad, que desarrollaremos en la sección 3.3. En este caso, no se cumple la condición de equilibrio, sino que las componentes  $h_{f_u}(l)$  (y  $h_{f_u}(m)$ ) del vector fuerza fluctúan dentro de un intervalo de anchura  $\Delta_1$ :

$$\Delta_1 = \frac{n}{|q_l|}, \quad (3.9)$$

y la fuerza total de cada grupo dentro de un intervalo de anchura  $\Delta_2$ :

$$\Delta_2 = \frac{F_u}{F} \frac{n}{|q_l|} \quad (3.10)$$

Así pues, cualquier agente común que no sea ortogonal a los dos (y por lo tanto comparta algún feature con alguno de los grupos) terminará en este estado fluctuante y los agentes no comunes seguirán la dinámica de un solo grupo, como en todos los casos. Así pues, aunque no existe un micro-estado final de equilibrio, sí podemos decir que la situación asintótica macroscópica corresponde a un subconjunto de  $2^{nF_u}$  micro-estados dentro de todos los posibles micro-estados dados por los parámetros  $N$ ,  $F$  y  $Q$ .

Finalmente, podemos resumir las cuatro situaciones asintóticas posibles, que podemos llamar *estados estacionarios*[15]:

0. Los grupos son ortogonales,  $\langle \vec{\sigma}(l, t_f) | \vec{\sigma}(m, t_f) \rangle = 0$ . Todos los agentes comunes son ortogonales a al menos una identidad. El resto son clones u ortogonales a su respectivo grupo.
1. Los grupos son idénticos,  $\vec{\sigma}(l, t_f) = \vec{\sigma}(m, t_f)$ . Todos los agentes son idénticos o ortogonales a la identidad única.
2. Los grupos no son ni ortogonales ni idénticos y se ha alcanzado una situación de equilibrio (grupos *diferentes*),  $\vec{\sigma}(l, t_f) \neq \vec{\sigma}(m, t_f)$  y  $\langle \vec{\sigma}(l, t_f) | \vec{\sigma}(m, t_f) \rangle \neq 0$ . Todos los agentes comunes son ortogonales a ambas identidades. El resto son clones u ortogonales a su respectivo grupo.
3. Estado fluctuante: no es posible alcanzar una situación de equilibrio. Los grupos no son ni ortogonales ni idénticos y sus identidades se mantienen constantes, pero las culturas de los agentes comunes no. Todos los agentes comunes y no ortogonales a ambos fluctúan entre ambas identidades en los features no comunes (y son clones en el resto). El resto de agentes son clones u ortogonales a su respectivo grupo.

Las posibles condiciones iniciales que llevan a cada uno de estos estados son discutidas en el anexo D.

---

<sup>1</sup>Excluidos los agentes comunes que son ortogonales a ambos grupos, ya que se mantienen invariantes.



### 3.3. Crisis de identidad y estabilidad del sistema

Como ya definimos anteriormente, llamamos crisis de identidad al proceso por el cual un grupo sufre un cambio en su identidad debido a que uno de sus features cambia de moda en su histograma. Este cambio en el trazo más “votado” de  $f$  en el grupo  $l$  puede deberse a un decremento de  $h_f(l)$  y/o a un incremento de la altura del histograma  $H_{l,f}$  en el nuevo trazo modal. Este cambio corresponde a un cambio en la meso-escala que nos lleva a una situación totalmente diferente ya que los beneficios de los miembros del grupo  $l$  cambian, pudiendo variar también el número de individuos ortogonales. Además, podemos definir dos tipos de crisis. En primer lugar, tenemos las crisis *infectivas*, en las cuales un grupo pasa a imitar el feature de otro grupo por influencia indirecta a través de sus agentes comunes. Por otra parte, las crisis *mutagénicas* son aquellas donde un grupo cambia de trazo modal por decremento de su fuerza a través de la interacción con otro grupo, sin que esta nueva moda sea la correspondiente al grupo influente.

Para ilustrar todo esto, representamos en la figura 3.2 las seis diferentes situaciones que pueden darse cuando un agente interacciona con éxito con alguno de los grupos a los que pertenece y su efecto en el histograma de uno de ellos. Podemos observar que cuatro de estas situaciones producen una crisis de identidad, dos de ellas manteniendo la fuerza del grupo constante. Además, tres de las situaciones corresponden a una crisis infectiva y una a una crisis mutagénica.

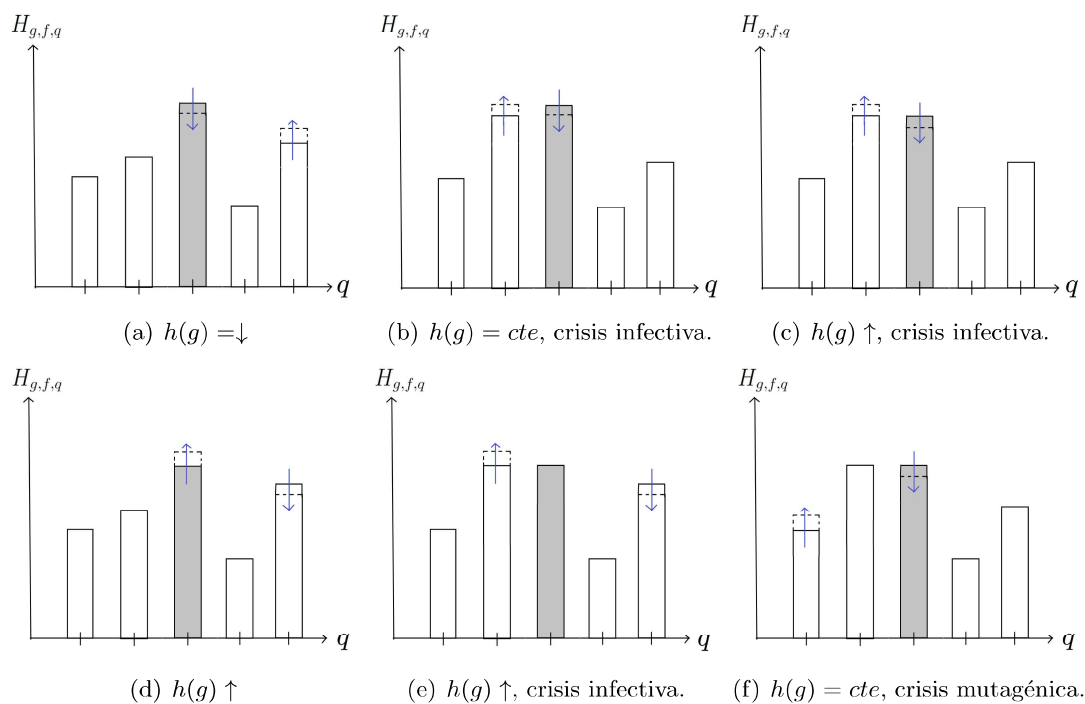


Figura 3.2: Posibles cambios en el histograma  $H_{g,f}$  tras un cambio en el feature  $f$  de un miembro del grupo  $g$ . Las situaciones (b), (c) y (e) corresponden a crisis infectivas ya que un nuevo trazo  $q$  pasa a ser el mayoritario por aumento de  $H_{g,f,q}$ , lo que solo es posible tras la imitación de un grupo  $m$  con  $\hat{\sigma}_f(m) = q$  por parte de un agente común. La situación (f) corresponde en cambio a una crisis mutagénica ya que el trazo imitado no pasa a ser el máximo sino que es un tercer trazo el que toma el relevo.

De esta manera, durante la simulación computacional de nuestro modelo, debemos analizar en cuál de estas situaciones nos encontramos tras cada interacción exitosa y actualizar en consecuencia el valor de las identidades y fuerzas de cada grupo. De esta manera, la implementación del modelo en  $G$  grupos es a priori sencilla: en cada paso de tiempo elegimos un agente  $i$  y un grupo  $g$  al que pertenece, probamos la interacción y si ésta tiene éxito actualizamos las identidades y fuerzas de cada grupo al que pertenece  $i$ . Sin embargo el problema viene en cuándo

detener la simulación. En este caso, no podemos hacer como en las demás implementaciones del modelo de Axelrod, donde simplemente seguíamos hasta que todos los agentes eran invariantes, puesto que ahora existe la posibilidad de alcanzar el estado fluctuante antes descrito. Este estado es el más característico y novedoso de nuestro modelo respecto a anteriores variaciones del modelo de Axelrod, y es la razón por la que requerimos de un análisis más exhaustivo de las posibles trayectorias de nuestro sistema para poder llevar a cabo simulaciones que nos arrojen resultados satisfactorios. Por esta razón nos centraremos de nuevo en el caso particular de dos grupos culturales.

Consideramos dos grupos  $l$  y  $m$  y sus respectivas identidades  $\vec{\sigma}(l)$  y  $\vec{\sigma}(m)$  que nos permiten definir las siguientes categorías de agentes (representadas esquemáticamente en la figura 3.3), que son invariantes mientras no se produzca una crisis de identidad en uno de los dos grupos (en tal caso deben redefinirse):

- \*  $n_l^{clo}$  : número de agentes que únicamente pertenecen a  $l$  y no son ortogonales a él. Acabarán siendo clones de  $l$ .
- \*  $n_l^{ort}$ : número de agentes que únicamente pertenecen a  $l$  y son ortogonales a él. Se mantendrán invariantes.
- \*  $n_m^{clo}$  y  $n_m^{ort}$ : definidos de forma análoga.
- \*  $n_c^{ort}$ : número de agentes comunes a los dos grupos y ortogonales a ambos. Se mantendrán invariantes.
- \*  $n_c^{flu}$  : número de agentes comunes a los dos grupos que no son ortogonales a ambos.

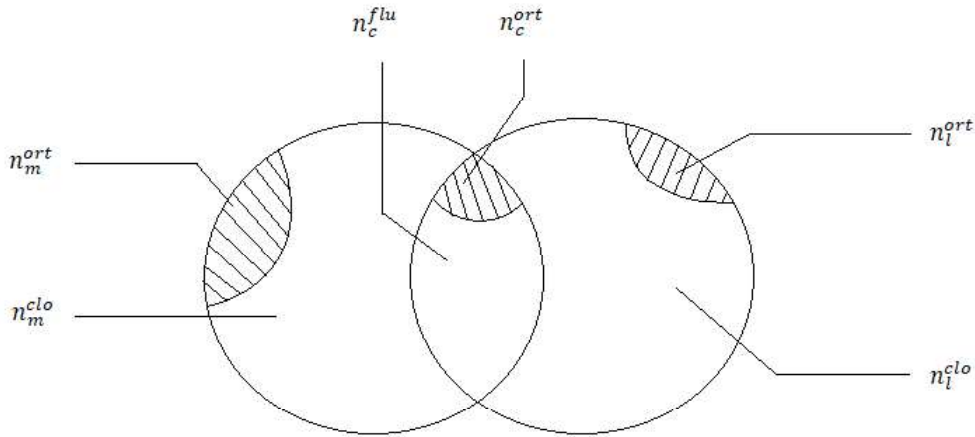


Figura 3.3: Diagrama con las diferentes categorías de agentes para dos grupos  $l$  y  $m$ .  $q_l = n_l^{ort} + n_l^{clo} + n_c^{ort} + n_c^{flu}$ ,  $q_m = n_m^{ort} + n_m^{clo} + n_c^{ort} + n_c^{flu}$

De los diferentes agentes mencionados, los cinco primeros grupos tienen su situación final determinada mientras que los  $n_c^{flu}$  agentes fluctuantes no. Si definimos  $F_c$  como el número de features comunes y  $F_u = F - F_c$ , podemos asegurar que tarde o temprano todos los agentes fluctuantes imitarán los  $F_c$  features y fluctuarán entre los dos valores (el de  $l$  y el de  $m$ ) de cada feature no común. Cuando los  $n_c^{flu}$  agentes han alcanzado esta situación y el resto de agentes está en situación invariante, decimos que hemos alcanzado una situación de *pre-equilibrio*. Cabe resaltar los casos particulares de esta situación de pre-equilibrio:

- Si  $F_c = 0$ , los grupos son ortogonales y los agentes comunes fluctúan hasta alcanzar el equilibrio de la situación 0 descrita en 3.2 (si todos se vuelven clones de uno de los dos grupos), o hasta provocar una crisis.
- Si  $F_u = 0$ , los grupos son idénticos y los  $n_c^{flu}$  agentes alcanzan el equilibrio al imitar los features comunes (todos). Corresponde a la situación 1 descrita en la sección 3.2.
- Si  $F_u, F_c \neq 0$ , los agentes fluctúan de la manera ya descrita salvo si  $n_c^{flu} = 0$  (en tal caso estamos en la situación 3 de equilibrio).

Nos situamos ahora en una situación ficticia de pre-equilibrio y nos proponemos estudiar las condiciones necesarias para que se produzca una crisis en el grupo  $l$  (un análisis equivalente será necesario en el grupo  $m$ ). Nos centramos en uno de los features no comunes,  $f_u$ , ya que la situación es obviamente equivalente para el resto y cada uno puede ser tratado como un problema independiente. En primer lugar, es fácil ver que la condición de pre-equilibrio impone que todas las alturas del histograma  $H_{l,f_u}$  se mantendrán constantes (ya que corresponden a los individuos ortogonales a  $l$ , ya sean de  $n_c^{ort}$  o  $n_l^{ort}$ ), salvo las correspondientes a los trazos  $\sigma_{f_u}(l) = q_1$  y  $\sigma_{f_u}(m) = q_2$  que variarán con la fluctuación de los agentes  $n_c^{flu}$ . De esta manera podemos escribir el valor de estas alturas de la siguiente manera:

$$H_{l,f_u,q_1} = h_{f_u}(l) = \frac{n_l^{clo} + n_c^{flu(1)}}{q_1} \quad (3.11)$$

$$H_{l,f_u,q_2} = \frac{n^* + n_c^{flu(2)}}{q_m} \quad (3.12)$$

donde  $n_c^{flu(1)}$  y  $n_c^{flu(2)}$  corresponden al número de agentes fluctuantes que en un instante se encuentran imitando al valor  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente, tal que  $n_c^{flu(1)} + n_c^{flu(2)} = n_c^{flu}$  en todo momento. Además, hemos llamado  $n^*$  al número de agentes de  $n_l^{ort}$  que comparten el trazo  $q_2$  con  $m$  en  $f_u$ , ya que contribuyen de manera constante a la altura del histograma en este valor. De esta manera, una crisis infectiva tendrá lugar cuando  $H_{l,f_u,q_2} > H_{l,f_u,q_1}$  mientras que la situación  $H_{l,f_u,q_3} > H_{l,f_u,q_1}$  dará lugar a una crisis mutagénica, siendo  $q_3$  el trazo en el que el histograma tiene su valor máximo (y constante en el tiempo), excluidos  $q_1$  y  $q_2$ .

Podemos establecer tres situaciones sencillas de analizar que nos dan una idea sobre la situación final en cualquier feature  $f_u$ :

- I. Si  $n_l^{clo} \geq q_1/2$ , cualquier tipo de crisis es imposible  $\forall f_u$ .
- II. Si  $n_c^{flu} > n_l^{clo}$ , un crisis infectiva está asegurada  $\forall f_u$  (mientras no ocurra otra crisis) sin importar el valor de  $n^*$ . Cualquier crisis mutagénica dependerá de cada  $H_{l,f_u,q_3}$ .
- III. Si en cambio  $q_1/2 > n_l^{clo} \geq n_c^{flu}$ , la posibilidad de una crisis infectiva dependerá del valor de  $n^*$  y será en general diferente para cada  $f_u$ . Cualquier crisis mutagénica dependerá igualmente de cada  $H_{l,f_u,q_3}$ .

En las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 representamos, para estas tres situaciones, el histograma (no normalizado) del feature  $f_u$  para el grupo  $l$  en una situación de pre-equilibrio. Representamos en azul los individuos invariantes  $n_l^{clo}$  y en gris los individuos invariantes  $n_c^{ort}$  y  $n_l^{ort}$  así como la situación extrema de fluctuación en línea discontinua.

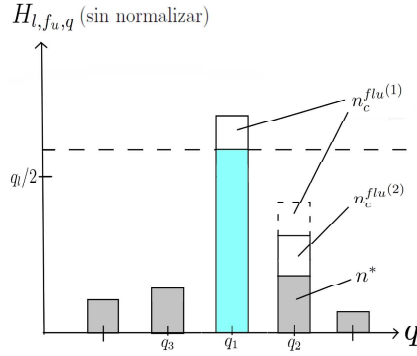


Figura 3.4: Situación I. Si  $n_i^{clo} \geq q_l/2$  cualquier crisis es imposible por muy alto que sean  $n^*$  o  $H_{l,f_u,q_3}$ .

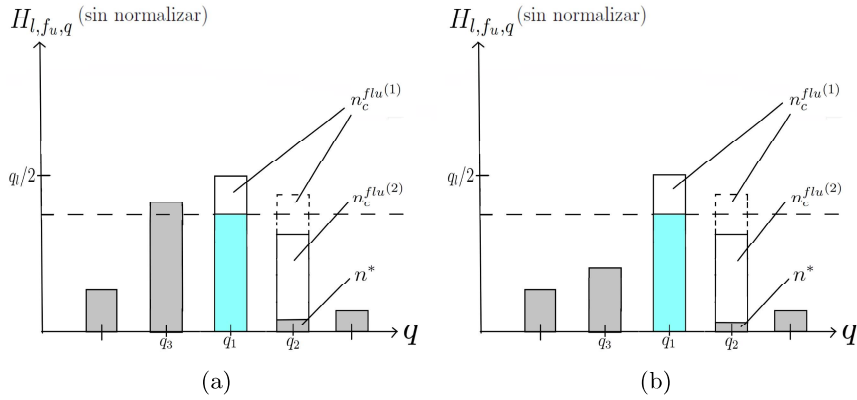


Figura 3.5: Situación II. Si  $n_c^{flu} > n_i^{clo}$ , una crisis infecciosa está asegurada, aunque  $n^*$  sea pequeño. Si además  $H_{l,f_u,q_3} > n_i^{clo}$  -caso (a)- también es posible una crisis mutagénica.

### 3.4. Implementación computacional: algoritmo de detección del estado asintótico

Nuestro propósito ahora es implementar un algoritmo que analice la situación del sistema en tiempo real para detectar si hemos alcanzado o no un estado estacionario y cuál de ellos. Este algoritmo estará compuesto por dos pasos principales:

- Evolución del sistema hasta alcanzar el pre-equilibrio. Si es un caso particular de equilibrio (estados estacionarios 1 o 2), la simulación finaliza. Si los grupos son ortogonales esperamos el equilibrio o a que se produzca una crisis (en tal caso volvemos a empezar). Para el resto de casos, pasamos al siguiente paso.
- Análisis del micro-estado de acuerdo al análisis de la sección anterior: ¿Es posible que se produzca una crisis? En caso afirmativo, dejamos que se produzca y volvemos a empezar. En caso negativo, finalizamos la simulación (hemos alcanzado el estado fluctuante).

Presentamos en la figura 3.7 un esquema de nuestro algoritmo. Nótese que éste sólo detecta si es posible o no de que se produzca una crisis, aunque la probabilidad de que se produzca sea ínfima. Así pues, si detectamos que puede haber crisis, dejaremos que avance la simulación esperando que ésta se produzca. Esto puede hacer que los tiempos de ejecución se eleven mucho, volviéndose en algunos casos imposibles de implementar en la práctica. Por esta razón, introducimos un número de iteraciones máximas en cada bucle (*NiterMax*) de tal manera que al alcanzarlas se interrumpa la simulación. Esto indetermina la situación asintótica de la simulación, por lo que es algo a evitar, pero nos permite salir de determinadas situaciones de bloqueo. En nuestra implementación, consideramos estas situaciones como una quinta “situación final”

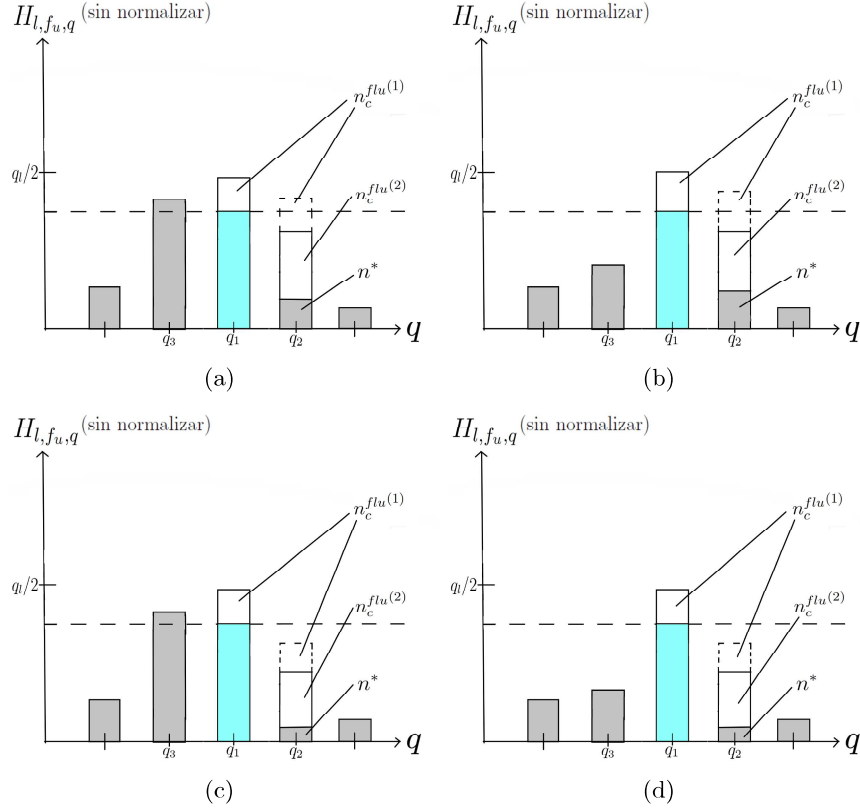


Figura 3.6: Situación III. Si  $q_l/2 > n_l^{clo} \geq n_c^{flu}$  existen múltiples posibilidades. Una crisis infectiva será posible para un valor  $n^*$  suficientemente grande -casos (a) y (b)- y una crisis mutagénica para  $H_{l,f_u,q_3} > n_l^{clo}$  -casos (a) y (c)-.

de *no-equilibrio* (entonces  $E$  vale -1 al final de la simulación). Además, podemos considerar que estas situaciones de no-equilibrio corresponden a situaciones de *fluctuación cuasi-permanente*, pues en la práctica tendrían un tiempo de relajación infinito en comparación con el resto de situaciones de equilibrio. En el esquema del algoritmo, llamamos *NiterInt* al número de pasos temporales del modelo que realizamos antes de cada comprobación.

Las funciones empleadas en el algoritmo son las siguientes:

1. **evolucion(...)**: Realiza un paso de tiempo de nuestro modelo de Axelrod en red bipartita.
2. **hayEquilGpos(...)**: Comprueba que todos los agentes no comunes a los dos grupos son inactivos. En caso afirmativo, registra el número de clones en cada grupo:  $n_l^{clo}$  y  $n_m^{clo}$ .
3. **fDiferentes(...)**: Compara las identidades de los dos grupos y registra los  $F_u$  features no comunes en un vector.
4. **hayEquilComunes(...)**: Comprueba que estamos en situación de pre-equilibrio: todos los agentes comunes son ortogonales a ambos o son agentes fluctuantes (han imitado ya los features comunes y han imitado uno de los trazos,  $\sigma_{f_u}(l)$  o  $\sigma_{f_u}(m)$ , en cada feature  $f_u$  no común). En caso afirmativo, registra el número de individuos fluctuantes  $n_c^{flu}$ . Si estamos en el caso particular de grupos ortogonales, comprobamos en cambio que todos los agentes comunes sean ya inactivos.
5. **estadoFluctuante(...)**: Comprueba que nos encontramos en estado fluctuante. Para cada grupo, evalúa si puede haber una crisis con la función `crisisGrupo(...)`. Si no puede haberla para ningún grupo, estamos en estado fluctuante y la respuesta es afirmativa. Si puede haberla en al menos uno de los grupos, la respuesta es negativa.

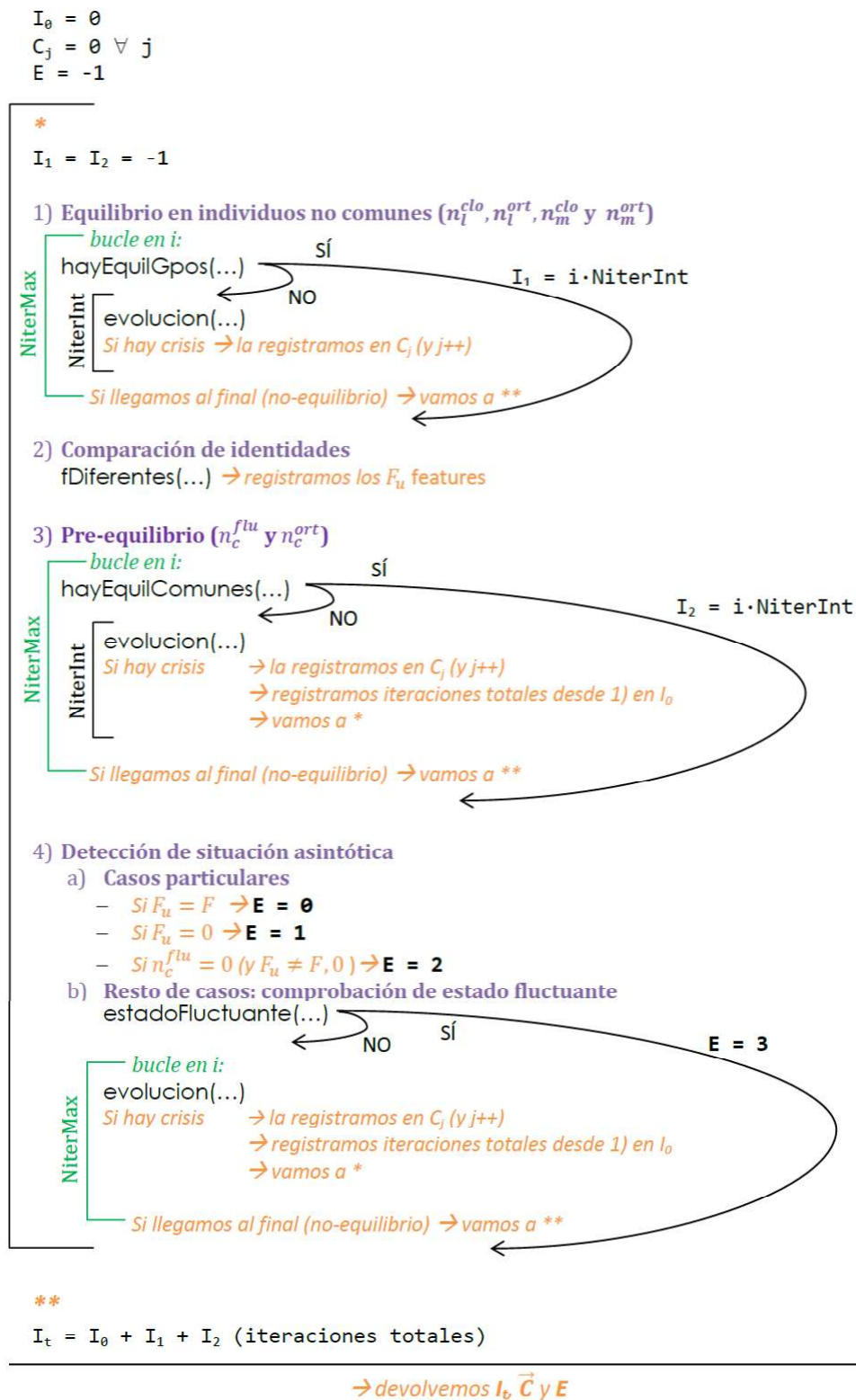


Figura 3.7: Algoritmo de evolución del modelo Axelrod  $i - g$  con detección del estado estacionario a tiempo real. Devolvemos el estado asintótico del sistema a través del valor de  $E$ , así como el número de iteraciones empleadas y el número de crisis que han tenido lugar, a través de  $I_t$  y  $C$  respectivamente.

6. **crisisGrupo(...)**: Sigue los siguientes pasos de análisis para detectar si es posible una crisis en el grupo  $g$ .

- \* Si  $n_g^{clo} \geq q_g/2$ , NO puede haber crisis.
- \* Si  $n_c^{flu} > n_g^{clo}$ , SÍ puede haber crisis.
- \* Si  $q_g/2 > n_g^{clo} \geq n_c^{flu}$ , realiza las siguientes comprobaciones para cada  $f_u$  no común. Si una crisis es posible para al menos un feature la respuesta es afirmativa para el grupo, y si no lo es para ninguno, la respuesta es negativa.
  - Calcula el segundo<sup>2</sup> máximo del histograma,  $h_2$ . Si  $h_2 > n_g^{clo}$ , SÍ puede haber crisis. Sino, seguimos:
  - Calcula  $n_c^{flu(1)} = H_{g,f_u,q_1} - n_g^{clo}$ . Si  $H_{g,f_u,q_2} + n_c^{flu(1)} > n_g^{clo}$ , SÍ puede haber crisis.

### 3.5. Resultados

Presentamos a continuación los resultados obtenidos en la simulación de nuestro modelo Axelrod  $i - g$  en dos grupos. Cada simulación requiere primero la creación de una población aleatoria (matriz  $S$ ) y la construcción de la red bipartita en la que están colocados los agentes. Para esto, establecemos como parámetro el valor esperado del número de agentes comunes  $\langle n_c \rangle$ . De esta manera asignamos a cada componente del vector  $\vec{k}$  (grado de cada agente) el valor 2 con probabilidad  $\langle n_c \rangle/N$  y el valor 1 con probabilidad  $1 - \langle n_c \rangle/N$ . En el segundo caso, asignamos la pertenencia a  $l$  o  $m$  de manera equiprobable, de tal manera que  $\langle q_l \rangle = \langle q_m \rangle$ . Si llamamos  $n_l$  y  $n_m$  al número de agentes que sólo pertenecen a  $l$  y  $m$  respectivamente, es fácil ver que entonces  $\langle n_l \rangle = \langle n_m \rangle = (N - \langle n_c \rangle)/2$ . Una vez construida la situación inicial, se calculan las identidades de los dos grupos y se lleva a cabo la evolución del sistema a través del algoritmo descrito anteriormente.

En la sección anterior estudiamos la importancia de los tamaños relativos de cada familia de agentes en el surgimiento de una crisis y las consecuencias en el estado final del sistema. El análisis cuantitativo se hizo únicamente para la situación de pre-equilibrio (figuras 3.4, 3.5 y 3.6), pero es fácil hacer un análisis cualitativo para el resto de situaciones. En primer lugar, para grupos con  $n_c/N$  pequeño la situación inicial será normalmente la de dos grupos con pocos features compartidos (pudiendo ser fácilmente ortogonales). Para  $n_c/N$  grande en cambio, será más probable obtener grupos inicialmente idénticos o con muchos features compartidos, ya que los agentes que han contribuido a la formación de las identidades son mayoritariamente los mismos. Por otra parte, una vez iniciada la evolución del sistema, los cambios en la meso-escala (crisis) serán más probables cuantos más agentes se compartan pues mayor será entonces la interacción entre grupos. Estas observaciones nos sugieren que  $\langle n_c \rangle/N$  es nuestro parámetro fundamental de variación.

De esta manera, llevamos a cabo simulaciones de Monte Carlo de nuestro modelo para diferentes valores de  $\langle n_c \rangle/N$ , registrando la frecuencia de aparición de cada tipo de situación asintótica alcanzada. Presentamos los resultados en la figura 3.8 para  $N = 100$ ,  $F = 5$  y  $Q = 5, 20, 100$ , donde podemos observar claramente la existencia de dos fases. La primera se da para valores de  $\langle n_c \rangle/N$  grandes y se trata de una fase “ordenada” que llamaremos de *hegemonía*, donde los dos grupos son siempre idénticos. Para  $\langle n_c \rangle/N$  pequeño, tenemos en cambio una fase “desordenada” que llamaremos de *diversidad*, donde los dos grupos no logran nunca ser idénticos y se mantienen mayoritariamente ortogonales o en estado fluctuante. Esta transición parece tener lugar entorno a  $\langle n_c \rangle/N \simeq 1/3$ .

Para interpretar estos resultados es bueno preguntarse qué trayectorias ha seguido el sistema en cada caso. Para ello, presentamos en la figura 3.9 el tipo de situación inicial (grupos idénticos,

---

<sup>2</sup>No especificamos que deba ser para un trazo diferente a  $q_2$  ya que no nos interesa qué tipo de crisis se producirá sino el hecho de que pueda producirse una.

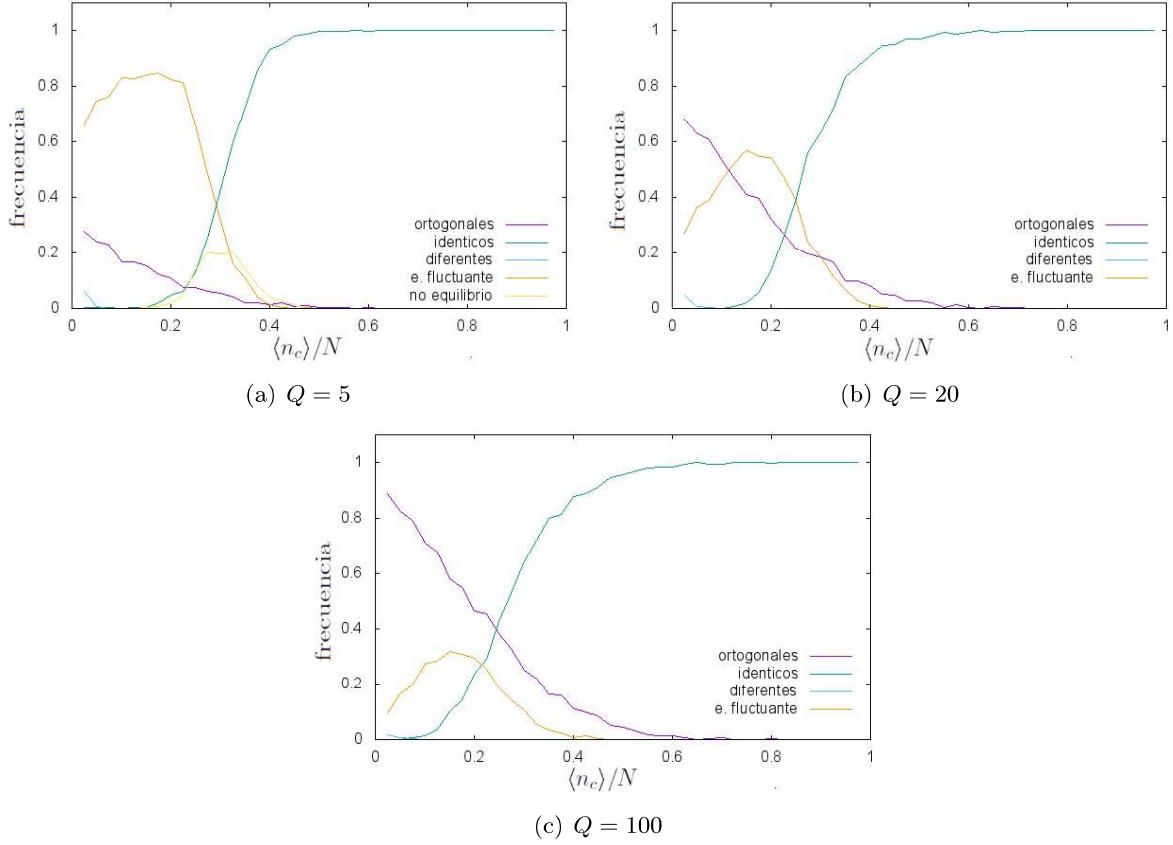


Figura 3.8: Estados asintóticos alcanzados (frecuencia) en función de  $\langle n_c \rangle / N$ , en el modelo de Axelrod  $i - g$  en dos grupos para  $N = 100$ ,  $F = 5$  y  $Q = 5, 20, 100$ . Se realizaron 500 simulaciones por punto y se estableció un máximo de iteraciones  $NiterMax = 10^8$ , que provoca la aparición de estados de no-equilibrio en (a).

ortogonales o diferentes) que se produce para cada valor de  $\langle n_c \rangle / N$  en dos valores extremos de  $Q$ . En primer lugar, cabe destacar que la frecuencia del estado *ortogonales* en la situación final es aproximadamente la misma que en la situación inicial, salvo que cae más rápidamente para valores altos de  $\langle n_c \rangle / N$ . Por esta razón, podemos concluir que el estado final 0 implica casi siempre una situación inicial ya ortogonal. La afirmación inversa no es en cambio cierta ya que parece que el sistema puede “romper” su ortogonalidad durante su evolución (mediante crisis)<sup>3</sup> y que esto ocurre sobre todo para  $\langle n_c \rangle / N$  grande. Por otra parte, vemos que las situaciones iniciales de grupos idénticos tan solo son relevantes para valores altos de  $\langle n_c \rangle / N$  por lo que concluimos que las situaciones finales 1 son alcanzadas mayoritariamente mediante crisis. En general, podemos decir que el grueso de los comportamientos que nos interesan por su relevancia y dependencia con nuestro parámetro de orden son aquellos donde dos grupos inicialmente *diferentes* sufren diversas crisis que los llevan a ser idénticos o a un estado fluctuante, según la fase en la que nos encontremos. Este comportamiento se ilustra en el anexo E.

Nos proponemos ahora justificar el punto alrededor del cual ocurre la transición de fase. Como ya estudiamos en la sección 3.3, existen dos condiciones extremas para la aparición o no de crisis durante el estado de pre-equilibrio. En primer lugar, si  $n_l^{clo} \geq q_l/2$  es imposible la aparición de crisis. Esto corresponde a un valor máximo  $n_c^{max} = q_l/2$  (despreciando los agentes ortogonales) y, dado que  $q_l = n_l + n_c$ , entonces  $n_l^{min} = q_l/2 = n_c^{max}$  y lo mismo para  $n_m$ . Por esta razón,  $N = n_l + n_m + n_c = 3n_c^{max} \Rightarrow n_c^{max} = N/3$ . Esto quiere decir que para valores de  $n_c$  inferiores a este valor es muy improbable la aparición de una crisis, por lo que dos

<sup>3</sup>La posibilidad de esta situación y de otras trayectorias posibles se discute en el anexo D.



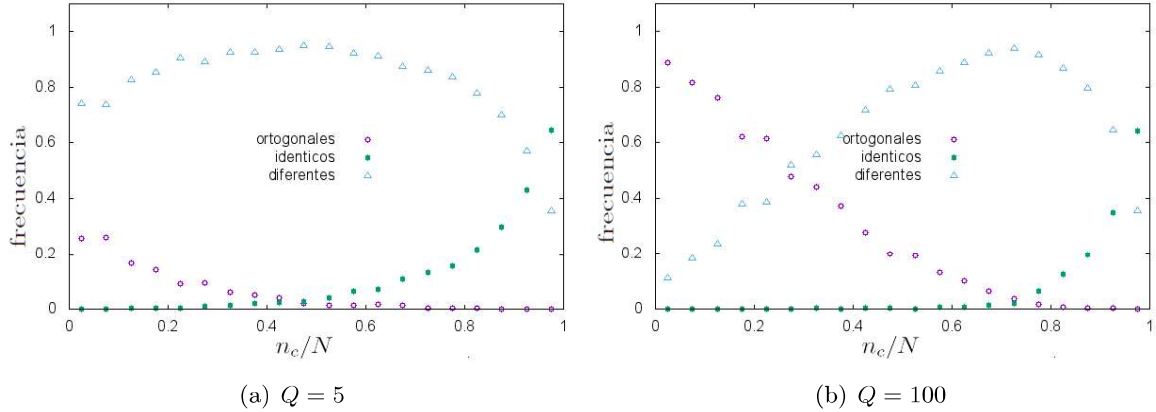


Figura 3.9: Estados iniciales (frecuencia de aparición) para una población en una red bipartita de dos grupos, en función de  $\langle n_c \rangle / N$  y para  $N = 100$ ,  $F = 5$  y  $Q = 5, 100$ . Se realizaron 500 simulaciones por punto.

grupos permanecerán ortogonales si lo eran en su inicio mientras que no lograrán alcanzar el equilibrio (permanecerán fluctuantes) si eran diferentes inicialmente. ¿Cómo se explica entonces que existan algunos estados finales 1 para valores inferiores a  $N/3$ ? En primer lugar, se debe a la aproximación que acabamos de hacer. Dado que la condición de ausencia de crisis es realmente  $n_c + n_l^{ort} < q_l/2$ , el valor máximo obtenido para  $n_c$  es mayor al real. En segundo lugar, esta condición nos asegura que no habrá crisis en un estado de pre-equilibrio pero alguna crisis puede ocurrir en algún momento anterior de la simulación y de hecho será fácil que ocurra al inicio, cuando las fuerzas de los grupos aún son pequeñas.

Un razonamiento similar al descrito en este párrafo se puede hacer en torno a la condición de crisis asegurada  $n_c^{flu} > n_l^{clo}$ , que nos arroja un resultado equivalente: para valores superiores a  $1/3$ , las crisis prevalecen y cualquier estado inicial es empujado a la situación de hegemonía, salvo aquellos grupos ortogonales que logran alcanzar el equilibrio rápidamente. Por último, la interpretación cualitativa es sencilla: el valor  $n_c = N/3$  corresponde a la situación de “igualdad de fuerzas” en la que los agentes  $n_l$ ,  $n_m$  y  $n_c$  tienen el mismo peso en la interacción sin lograr ninguno inclinar la balanza y llevarse el resto a su campo.

Finalmente, podemos establecer las fronteras de las diferentes fases del sistema: la fase ordenada *hegemónica* y la fase desordenada *diversa*. Esto corresponde a buscar los valores de  $\langle n_c \rangle / N$  para los cuales el estado final 1 se anula y alcanza frecuencia 1. Con este objetivo, se realizaron representaciones como las de la figura 3.8 para numerosos valores de  $Q$  y se obtuvo el diagrama de fases presentado en la figura 3.10. Observamos que la anchura de la transición aumenta con el parámetro  $Q$ . Por un lado, esto se debe al aumento de las situaciones iniciales ortogonales (ver figura 3.9), lo que desplaza la frontera “transición-hegemonía” a la derecha. Por otro lado, el aumento de  $Q$  conlleva el aumento  $n_{ort}(t_0)$  (ver capítulo 1) y por lo tanto el aumento de  $n_l^{ort}$ , lo que invalida más aún la aproximación realizada en el párrafo anterior para el punto de transición y desplaza la frontera “diversidad-transición” (límite de crisis imposible) hacia la izquierda. Además, valores altos de  $Q$  provocan situaciones iniciales de grupos muy débiles ( $h(g)$  pequeño), favoreciendo las crisis durante los primeros instantes de evolución.<sup>4</sup>

Lo que hemos logrado con este trabajo es caracterizar la interacción entre grupos culturales que emerge de nuestro modelo Axelrod  $i - g$ . Si analizamos este modelo con perspectiva, podemos ver que se basa en efectos puramente estadísticos ya que los agentes interactúan con

<sup>4</sup>Esto último sugiere además una dependencia inversa con  $N$ : cuando éste aumenta, las variaciones de los histogramas asociadas a un cambio disminuyen, dificultando las crisis. Además,  $n_{ort}(t_0)$  disminuye con  $N$  (ver de nuevo el capítulo 1) por lo que la transición se acerca más al valor  $1/3$ . El análisis detallado de esta dependencia requeriría mejores medios de simulación y excede los límites de este trabajo, pero se presentan datos aproximados en el anexo F.

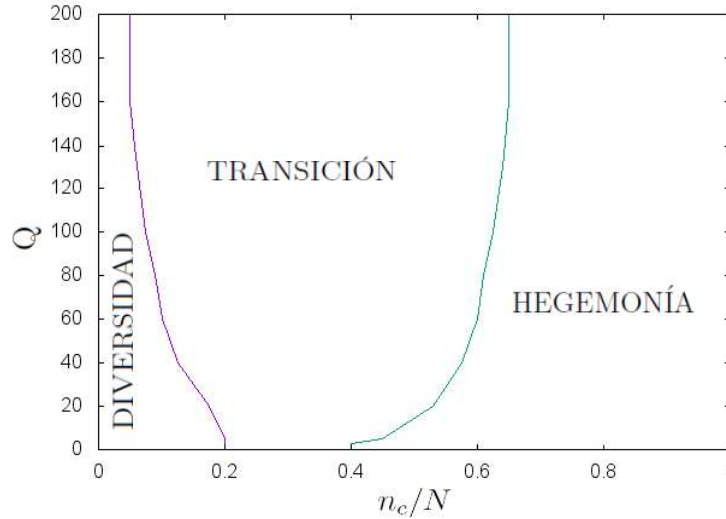


Figura 3.10: Diagrama de fases para el modelo de Axelrod  $i-g$  en dos grupos, con  $N = 100$  y  $F = 5$ .

la distribución de las culturas individuales de los miembros con los que comparten grupo. Esta interacción  $i-g$  provoca una interacción efectiva a nivel mesoscópico “ $g-g$ ” que puede ser caracterizada en función de los parámetros  $n_c$ ,  $Q$  y  $N$ . En concreto, el número de agentes compartidos por dos grupos determinará la intensidad de esta interacción, provocando la “unificación” de los dos grupos si éstos comparten una fracción importante de miembros o preservando su diversidad en caso contrario. Este comportamiento es bastante obvio, pero lo que parece interesante es comprobar que aún con valores de  $n_c$  pequeños, la interacción no es despreciable y el intercambio cultural impide una situación de equilibrio en la mayoría de situaciones. Efectivamente, nuestro modelo aporta un mecanismo que explica la situación asintótica de intercambio cultural permanente (estado fluctuante). Haciendo una conexión con sociedades reales, esto corresponde a dos culturas no-estáticas (con agentes comunes cambiantes) que sin embargo preservan su identidad: ninguna se “come” a la otra. Vemos sin embargo que esta situación es complicada de observar y solamente se obtiene para valores  $n_c$  pequeños, siendo aún menos probable cuanto mayor es  $Q$ .

Finalmente, podemos imaginar la dinámica de nuestro modelo para el caso de  $G$  grupos con  $G > 2$ . Por un lado, tendremos que cada pareja de grupos que comparta al menos un agente, presentará una interacción similar a la caracterizada en este trabajo. Es decir, observaremos dos tendencias según el número de agentes comunes: ruptura de identidades para fundirse en una sola (hegemonía) o preservación de las identidades originales (diversidad). Sin embargo, el conjunto de situaciones asintóticas posibles será mucho más complicado que el analizado hasta ahora, pues en los histogramas podremos tener más de dos trazos fluctuando incluso en una situación de “pre-equilibrio” como las descritas. Además, a nivel macroscópico, la crisis de un grupo podrá afectar a otro grupo que no comparta agentes con él, a través de otro grupo intermediario. Estos efectos son realmente complejos y requerirían de un trabajo mucho más extenso que el actual para su caracterización.

## Capítulo 4

# Conclusiones y perspectivas

A la luz de los resultados obtenidos, nos proponemos repasar los objetivos que nos proponíamos al inicio e imaginar futuras líneas de investigación en el modelo.

En primer lugar, hemos observado que el modelo de Axelrod, a pesar de presentar una tendencia hacia el consenso, permite la existencia de estados de equilibrio multiculturales bajo determinadas condiciones iniciales. Además, observamos la existencia de una transición de fase en una red cuadrada plana, que depende de la diversidad inicial  $Q$ .

Por otro lado, la introducción de la meso-escala y la interacción  $i - g$  nos ha arrojado la misma dinámica de consenso (incluso más eficaz) que el modelo de Axelrod sin estructura de red, al implementar el caso trivial de un solo grupo cultural. En cambio, la introducción de más grupos compartiendo agentes entre ellos añade efectos no triviales en el modelo.

En efecto, observamos como característica más importante la emergencia de una interacción efectiva entre los grupos culturales a través de la producción de crisis de identidad (cambios en la meso-escala). Además, aparece como concepto novedoso la situación asintótica fluctuante que permite la interacción permanente entre grupos, sin un cambio a nivel mesoscópico asociado. En esta línea, nuestro modelo se presenta como una explicación para el no-equilibrio durante la interacción de identidades culturales. Por último, observamos una transición de fase para esta interacción “ $g - g$ ”, donde el parámetro de orden  $n_c$  determina si la interacción conlleva hegemonía (grupos idénticos) o preservación de la diversidad, pudiendo extrapolar que estos comportamientos serán similares al introducir más de dos grupos en el modelo.

Cabe destacar un camino que no ha sido explotado y podría presentar gran interés: el efecto de la fuerza de los grupos sobre la situación asintótica alcanzada. Así pues, es evidente que si generamos grupos con fuerzas mayores a las que tiene una distribución aleatoria plana -únicas situaciones iniciales estudiadas-, dificultaremos la aparición de crisis (sobre todo aquellas que se producen en los primeros instantes de evolución).<sup>1</sup> Hipotetizamos que esto tendría como efecto la disminución de la anchura de transición en el cambio de fase, aunque dejamos esta afirmación bajo dudas hasta que se compruebe en estudios futuros. Un efecto similar podría tener la combinación a tiempo real de las interacciones  $i - g$  definidas con las interacciones clásicas del modelo de Axelrod ( $i - i$ ), estableciendo por ejemplo un parámetro  $t$  entre 0 y 1 que determine la probabilidad con la que un agente elige un tipo de interacción u otra en cada paso temporal.

Además, tampoco se ha analizado el efecto que tendría la situación asimétrica de grupos con diferentes tamaños y fuerzas, o la manera de compensar un tamaño pequeño con una fuerza grande.

---

<sup>1</sup>Esto se puede lograr generando situaciones iniciales aleatorias y estableciendo un periodo transitorio inicial de interacciones  $i - i$  dentro de cada grupo cultural hasta alcanzar una fuerza lo suficientemente grande. Una vez alcanzada esta fuerza, podría implementarse la interacción  $i - g$  estudiada. Esta idea se ilustra en el anexo C para el caso trivial de un grupo.

# Bibliografía

- [1] P.W. Anderson *Science* **177** (4047), 393-396 (1972).
- [2] R. Axelrod and L. Tesfatsion in *Handbook of Computational Economics, Vol. 2: Agent-Based Computational Economics*, eds. L. Tesfatsion, K.L. Judd (North Holland, Amsterdam) (2006). Available at <http://www.econ.iastate.edu/tesfatsi/abmread.htm>.
- [3] T.C. Schelling *J Math Sociol* **1**, 143-186 (1971).
- [4] T.C. Schelling *Micromotives and Macrobehavior* (Norton, New York) (1978).
- [5] R. Axelrod *J Conflict Resolut* **41**, 203-226 (1997).
- [6] C. Castellano, S. Fortunato and V. Loreto *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591 (2009).
- [7] D. Vilone, A. Vespignani and C. Castellano *Europhysics J. B* **30**, 399-406 (2002).
- [8] F. Vázquez and S. Redner *EPL* **78**, 18002 (2007).
- [9] K. Klemm, V.M. Eguíluz, R. Toral and M. San Miguel *Phys. Rev. E* **67**, 045101(R) (2003); *J. Economic Dynamics and Control* **29**, 321-334 (2005).
- [10] J.C. González-Avella, M.G. Cosenza, and K. Tucci *Phys. Rev. E* **72**, 065102 (2005).
- [11] J.C. González-Avella, V.M. Eguíluz, M.G. Cosenza, K. Klemm, J.L. Herrera and M. San Miguel *Phys. Rev. E* **73**, 046119 (2006).
- [12] C. Castellano, M. Marsili and A. Vespignani *Phys Rev Lett* **85**, 3536-3539 (2000).
- [13] K. Klemm, V.M. Eguíluz, R. Toral and M. San Miguel *Phys. Rev. E* **67**, 026120; *Physica A* **327**, 1-5 (2003).
- [14] J. Marro and R. Dickman *Nonequilibrium Phase Transition in Lattice Models* (Cambridge University Press, U.K.) (1999).
- [15] Se dice que el sistema está en un estado estacionario cuando el promedio sobre una distribución estacionaria es representativo del sistema después de un tiempo típico transitorio. Ver A. Barrat, M. Barthélemy and A. Vespignani *Dynamical Processes on Complex Networks* (Cambridge University Press, N.Y.) (2008).