

## Anexo A

# Agentes ortogonales en el modelo de Axelrod sin estructura de red

Es interesante hacer un análisis detallado del número de agentes ortogonales en el modelo de Axelrod sin estructura de red. Por una parte, estos varían con el tiempo pero además son inferiores a  $1 - n_{clo}$ , el número de agentes no-clones (a la cultura mayoritaria) en la situación final. Esto se debe a la posibilidad de formación de pequeños grupos de agentes no ortogonales entre ellos pero ortogonales a la cultura mayoritaria. Como ya comentamos en la sección 1.2, en la situación inicial tenemos:

$$\frac{\langle n_{ort}(t_0) \rangle}{N} = \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{NF} \quad (\text{A.1})$$

Para verificar esta expresión, representamos en la figura A.1(b) el valor  $\langle n_{ort}(t_0) \rangle / N$  obtenido como promedio de 50 simulaciones de nuestro modelo. Podemos ver que los resultados se ajustan perfectamente a (1.5).

Demostremos a continuación que  $n_{ort}(t)$  es no decreciente. Imaginemos un individuo  $i$  que es ortogonal a todos los demás y por lo tanto pertenece al conjunto de los  $n_{ort}$ . Esto quiere decir que no comparte ningún feature con ningún otro agente o lo que es lo mismo, que todo todo trazo que toman sus features es único para ese feature dentro de nuestra población:

$$\sigma_f(i) \neq \sigma_f(j) \quad \forall j \neq i, f = 0, \dots, F - 1$$

Por un lado, es imposible que este agente imite a ningún otro ya que su solapamiento es 0 con cualquier vecino. Pero también es imposible que ningún agente pase a compartir un feature con él, ya que todo cambio en nuestro modelo se hace por imitación y nuestro agente  $i$  posee trazos en sus features que son únicos en toda la sociedad. Por lo tanto, nuestro número  $n_{ort}$  no puede disminuir.

Además, podemos verificar que es posible su aumento. Imaginemos que esta vez nuestro individuo  $i$  es ortogonal a todos los demás *salvo* a otro individuo  $j$ , con el que tan solo comparte el feature  $f$  de tal manera que  $i$  y  $j$  son los únicos en tener ese trazo en  $f$ :

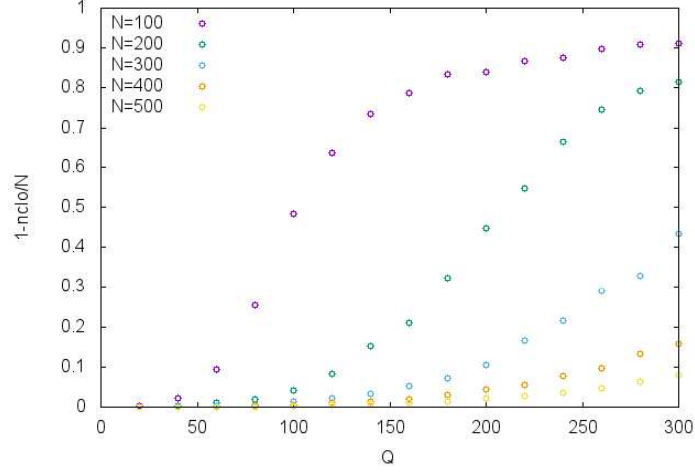
$$\sigma_f(i) = \sigma_f(j) \neq \sigma_f(k) \quad \forall k \neq i, j$$

Nótese que esto no quiere decir que  $j$  sea ortogonal a todos los demás agentes  $k$ . Imaginemos por ejemplo que comparte otro feature  $h$  con uno de estos agentes, por lo que su solapamiento con él es diferente de 0 y acaba imitándolo tomando el valor  $\sigma_f(k)$  en su feature  $f$ , haciendo que nuestro individuo  $i$  pase a ser el único en tomar el valor  $\sigma_f(i)$  y volviéndose de esta manera ortogonal a *todos* los demás.

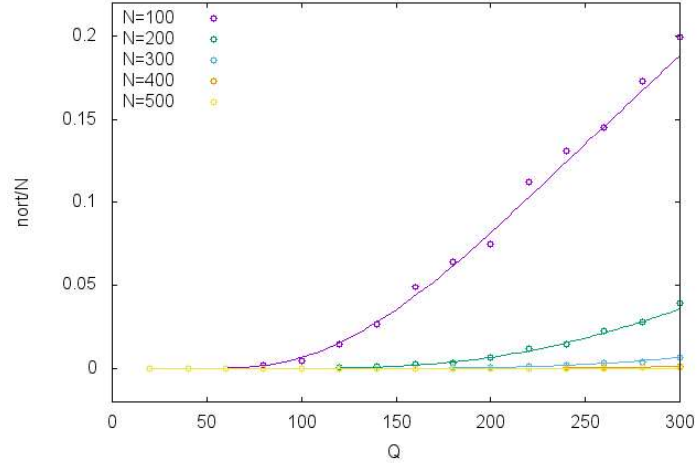
De esta manera demostramos que  $n_{ort}(t)$  es no decreciente, por lo que el número de agentes no-clones  $N - n_{clo}$  en la situación final ( $t = t_f$ ) cumplirá la siguiente desigualdad:

$$1 - \frac{n_{clo}}{N} \geq \frac{n_{ort}(t_f)}{N} \geq \frac{n_{ort}(t_0)}{N} \quad (\text{A.2})$$

Para verificar nuestro análisis, representamos en la figura A.1(a) el número  $\langle 1 - n_{clo}/N \rangle$  de la situación final (promediando en 50 simulaciones) para diferentes valores de  $Q$  y  $N$ , tomando  $F = 5$ . Efectivamente, se comprueba que  $1 - n_{clo}/N$  disminuye con  $N$  y aumenta con  $Q$  además de respetar el acotamiento de la ecuación (A.2).



(a)  $1 - n_{clo}/N$



(b)  $n_{ort}(t_0)/N$  y funciones teóricas  $n_{ort}(t_0, Q)/N = (1 - 1/Q)^{NF}$  para cada  $N$ .

Figura A.1: Dependencia de  $1 - n_{clo}/N$  y  $n_{ort}(t_0)/N$  con  $Q$  y  $N$ . Ambas gráficas corresponden a  $F = 5$  y 50 realizaciones por punto. En (a), se observa la dependencia prevista: creciente en  $Q$  y decreciente en  $N$ . En (b), los datos se ajustan perfectamente a las funciones teóricas.

## Anexo B

# Tiempos de equilibrio en diferentes redes. Modelo de Axelrod.

Es interesante comparar el número de iteraciones necesarias para alcanzar el equilibrio (*tiempo de equilibrio*) en las diferentes redes estudiadas para el modelo de Axelrod. Presentamos esta comparativa para  $F = 10$ ,  $N = 900$  y diversos valores de  $Q$  en la figura B.1, donde en general podemos observar un tiempo de equilibrio mayor para un sistema sin estructura de red. Por un lado, esto se explica por la posibilidad en una red cuadrada de alcanzar el equilibrio sin tener que alcanzar un consenso general. Pero este efecto se ve contrarrestado por la lentitud de transmisión de información en este tipo de redes, lo que hace que los dos tiempos se acerquen en las situaciones inmediatamente anteriores a la transición de fase, cuando aún es posible alcanzar una fase ordenada. En cambio, cuando los valores de  $Q$  son elevados, los tiempos de las dos situaciones divergen pues en el caso de la red la “ordenación” de nuestra población se vuelve imposible y la situación final (desordenada) es fácilmente alcanzable mientras que sin red no hay cambio de fase. Además, para este caso el tiempo aumenta con  $Q$  debido a que mayor diversidad inicial dificulta el consenso.

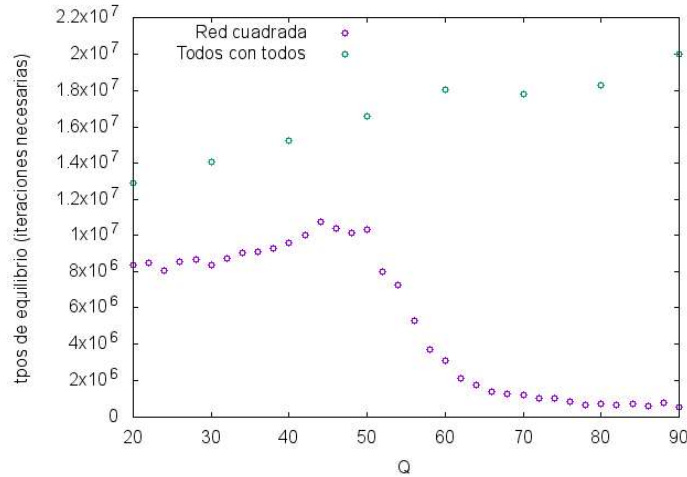


Figura B.1: Comparativa de los tiempos de equilibrio necesarios (iteraciones), para los dos casos estudiados: todos con todos y red cuadrada plana. Se presenta la dependencia con  $Q$  para los valores fijos  $F = 10$  y  $N = 900$ . Los resultados se obtuvieron promediando 50 simulaciones en el primer caso y 60 en el segundo. Se observa en general un tiempo mayor en ausencia de red, acentuándose la diferencia para valores altos de  $Q$ , donde las simulaciones en red cuadrada alcanzan el equilibrio a gran velocidad.

## Anexo C

# Efecto de las condiciones iniciales en el modelo Axelrod $i - g$

Dada la relación directa entre el estado final y las condiciones iniciales, nos proponemos estudiar posibles modificaciones en el establecimiento de éstas últimas y su efecto en los resultados obtenidos.

Creamos una situación inicial aleatoria y dejamos evolucionar nuestro sistema mediante interacciones pairwise registrando cualquier cambio en la identidad y en la fuerza del grupo. Cuando se ha alcanzado una identidad suficientemente fuerte ( $h(g) \geq h_{min}$ ) empezamos nuestra dinámica cultural de grupo (interacciones  $i - g$ ) hasta alcanzar el equilibrio. Presentamos los resultados para  $N = 1000$ ,  $F = 10$ ,  $Q = 5$  y  $h_{min} = 0,5$  en la figura C.1, donde observamos la evolución de  $h(g)$  en el tiempo.

Podemos constatar las siguientes diferencias respecto a los resultados obtenidos en la figura 2.2:

- \* La fuerza sigue una tendencia al alza en todo momento pero presenta numerosos picos de bajada durante las interacciones pairwise, hasta que se vuelve no decreciente en las interacciones  $i - g$ .
- \* El tiempo de equilibrio es mucho mayor en este caso ( $3,5 \cdot 10^6$  frente a  $1,1 \cdot 10^5$ ) dado el tiempo tan grande que necesita un grupo con interacciones pairwise para alcanzar una identidad fuerte.
- \* Se producen numerosos cambios en la identidad del grupo durante el primer periodo, por lo que la identidad final no está totalmente determinada por la situación inicial sino que es totalmente arbitraria. Aun así, las situaciones son equivalentes, dadas que las condiciones iniciales aleatorias en el ejemplo anterior (figura 2.2) nos dan una identidad igualmente aleatoria, aunque ésta sea luego invariante.
- \* La fracción de agentes ortogonales a la identidad  $\rho$  disminuye muy fuertemente (en el caso de la figura C.1 se anula) consiguiendo una identidad final con fuerza 1 (máxima). Esto se debe al elevado tiempo dedicado a las interacciones pairwise, que permite la homogenización de la población: Dado que el número de iteraciones durante esta primera parte es del orden de  $10^6$ , esto corresponde a 100 intentos por agente y feature. Esto permite que en general cualquier individuo no-ortogonal a todos los demás ( $N - n_{ort}$  según la definición del capítulo 1) acabe imitando alguno de los features mayoritarios, que acabarán siendo los de la identidad, limitando así nuestra fracción  $\rho(g)$  a un número cercano a  $n_{ort}/N$  que para los valores de  $N$ ,  $F$  y  $Q$  elegidos tiene valor esperado 0.

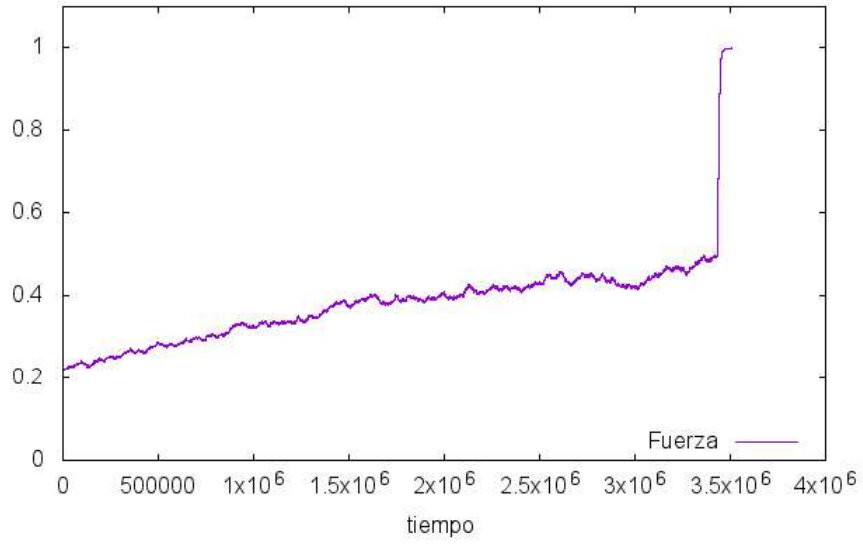


Figura C.1: Evolución de la fuerza  $h(g)$  para una simulación de Monte Carlo en un grupo, con iteraciones pairwise hasta alcanzar  $h(g) = h_{min} = 0,5$  e iteraciones  $i - g$  a continuación, hasta alcanzar el equilibrio. Se realizó la simulación a partir de una situación inicial aleatoria con  $N = 1000$ ,  $F = 10$  y  $Q = 5$ . Se alcanzó  $h_{min}$  con  $3,4 \cdot 10^6$  iteraciones (punto en el que se observa el cambio brusco) y se calcularon 0 agentes ortogonales en la situación final, que cuadra con el valor final alcanzado:  $1 - \rho(g) = 1$ .

## Anexo D

# Trayectorias posibles en Axelrod $i - g$ para dos grupos

Como describíamos en la sección 3.2, existen cuatro posibles estados asintóticos para el modelo de Axelrod  $i - g$  en el caso de dos grupos (numerados del 0 al 3 en este orden): ortogonales, idénticos, *diferentes* y fluctuantes.

Nos preguntamos ahora qué condiciones iniciales son las que permiten alcanzar cada uno de estos estados. Nos centramos en un análisis de la meso-escala, es decir en la relación entre las identidades de los dos grupos.

- \* El estado 0 puede ser alcanzado desde dos grupos inicialmente ortogonales o inicialmente diferentes. La situación inicial de dos grupos idénticos no permite la existencia de crisis (se reduce al caso estudiado en el capítulo 2) por lo que no puede llevar al estado final 0.<sup>1</sup>
- \* El estado 1 puede ser alcanzado desde cualquier situación inicial. Éste se alcanza de manera trivial si las identidades son iguales en la situación inicial, o a través de diversas crisis de identidad si son diferentes u ortogonales al inicio. Efectivamente, incluso dos grupos ortogonales pueden interaccionar entre ellos dando lugar a una crisis de identidad que termine con su ortogonalidad. Nótese que para dos grupos ortogonales  $p_{int}^+ = 0$  pero  $p_{int}^+ \neq 0$ , por lo que  $a_{l,m} < 0$  y  $h(l)$  tiende a decrecer, pudiendo generar una crisis de identidad.
- \* El estado 2, únicamente es alcanzable desde una situación de grupos diferentes con los agentes comunes ortogonales a ambos desde el inicio, de tal manera que ninguno de ellos sufran una crisis. Efectivamente, para que exista una crisis al menos un agente común debe ser no-ortogonal a los dos grupos (para permitir la interacción entre grupos). Además, este agente se mantendrá no-ortogonal a al menos uno de los dos grupos tras esta crisis (no puede volverse ortogonal a ambos a la vez) de tal manera que el estado final 2 no se puede alcanzar.
- \* El estado 3, como el estado 0, puede ser alcanzado desde dos grupos inicialmente ortogonales o inicialmente diferentes. Normalmente, se producirán algunas crisis en los dos grupos hasta que se alcance una situación de pre-equilibrio en la que sean imposibles las crisis, alcanzando así el estado fluctuante.

---

<sup>1</sup>Para ilustrar la segunda opción, menos intuitiva, imaginemos dos identidades que tan solo comparten el feature  $f$  y que poseen fuerzas muy débiles de tal manera que el segundo valor más alto del histograma  $f$  de  $l$ ,  $H_{l,f,q}$ , se encuentra muy cerca del valor máximo que corresponde a  $h_f(l)$  y muy por encima del valor correspondiente a la identidad de  $m$ ,  $H_{l,f,\hat{\sigma}_f(m)}$ . Así pues, si por efecto de la interacción con  $m$ ,  $h_f(l)$  disminuye pero es  $H_{l,f,\hat{\sigma}_f(m)}$  quien pasa a ser el valor máximo, entonces los grupos  $l$  y  $m$  se vuelven ortogonales. Es lo que se denomina “crisis mutagénicas” en la sección 3.3.

## Anexo E

# Crisis llevadas a cabo hasta alcanzar el equilibrio. Resultados.

Para ilustrar cuándo un sistema es capaz de alcanzar el equilibrio, calculamos el número medio de features no comunes  $\langle F_u(t_0) \rangle$  que tienen dos grupos diferentes (excluidos los ortogonales) en la situación inicial. Calculamos además el número medio de crisis  $\langle C \rangle$  que tienen lugar antes de alcanzar una situación asintótica y comparamos los valores para todo el rango de  $\langle n_c \rangle / N$  y dos valores de  $Q$  en la figura E.1. Podemos verificar que mientras  $\langle C \rangle < \langle F_u(t_0) \rangle$  se da el estado fluctuante (no hay el número suficiente de crisis) mientras que para  $\langle C \rangle > \langle F_u(t_0) \rangle$  la situación final mayoritaria pasa a ser la de grupos idénticos. El hecho de que para  $\langle n_c \rangle / N$  alto volvamos a tener  $\langle C \rangle < \langle F_u(t_0) \rangle$  aunque sólo se observe el estado asintótico 1, se debe a la aparición de las situaciones iniciales de grupos idénticos que bajan la media  $\langle C \rangle$ . Como hemos visto, estas situaciones iniciales aparecen antes cuanto más pequeño es  $Q$ , por lo que este efecto es mayor en la gráfica (a) que en la (b).

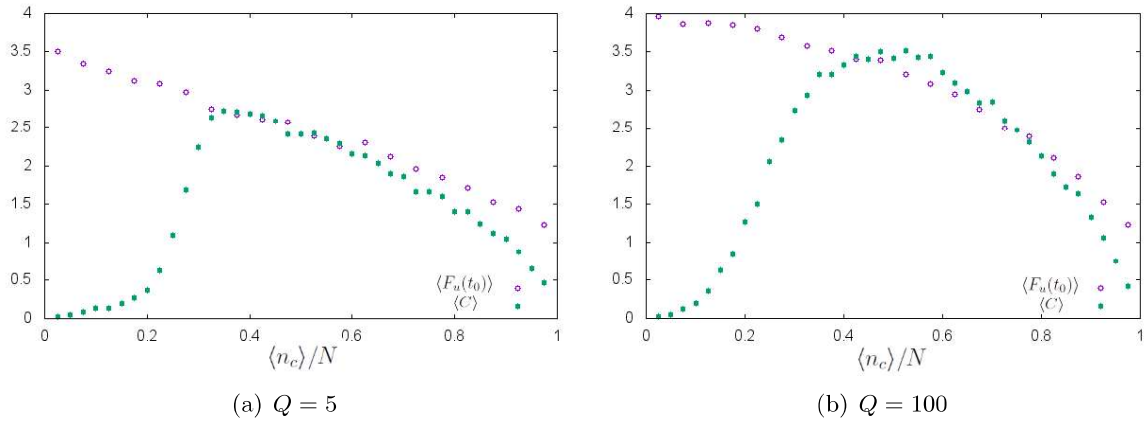


Figura E.1: Comparación del número medio de features no comunes en la situación inicial  $\langle F_u(t_0) \rangle$  y el número medio de crisis  $\langle C \rangle$ , en función de  $\langle n_c \rangle / N$  y para  $N = 100$ ,  $F = 5$  y  $Q = 5, 100$ . Se realizaron 500 simulaciones por punto.

Por otro lado, la dependencia de  $\langle F_u(t_0) \rangle$  con  $\langle n_c \rangle$  complementa la información sobre las situaciones iniciales de la figura 3.9, añadiendo un nuevo argumento que justifica la transición de fase. Al aumentar  $\langle n_c \rangle$ ,  $\langle F_u(t_0) \rangle$  disminuye, por lo que se vuelve más fácil que dos grupos se imiten incluso antes del pre-equilibrio.

## Anexo F

# Dependencia de la transición de fase con $N$

Tal y como hemos comentado en el apartado 3.5, la transición de fase parece estrecharse cuando aumentamos el valor de  $N$ . Esto podría explicarse por la disminución del número de agentes ortogonales y la disminución de la variación del histograma con cada cambio, aunque el análisis detallado es complejo como ya se ha comentado. Presentamos sin embargo tres gráficas de transición de fase en la figura F.1 para un valor alto de  $Q$  (que facilitan la simulación) que parecen confirmar esta dependencia.

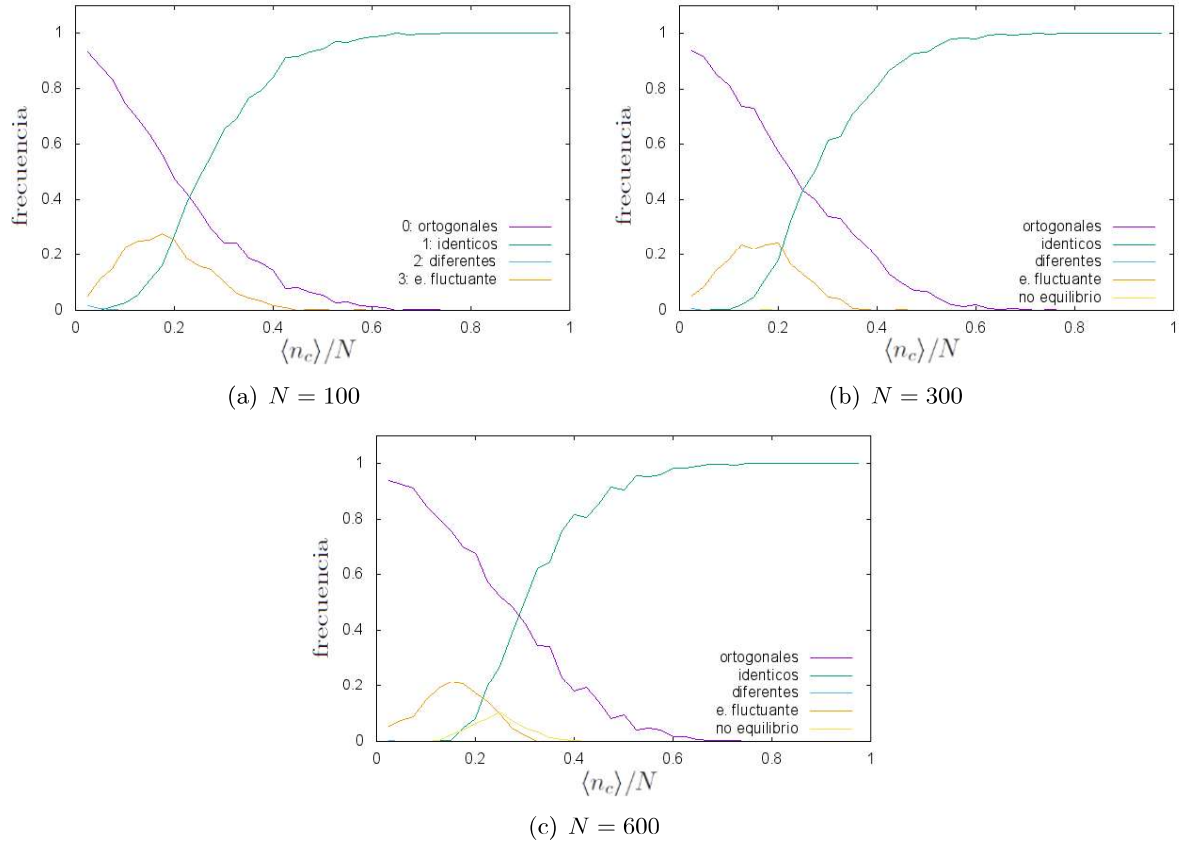


Figura F.1: Dependencia con  $N$  de la transición de fase en el modelo Axelrod  $i - g$ . Se presentan los resultados para 500 simulaciones por punto tomando  $F = 5$  y  $Q = 200$ . Se tomó  $NiterMax = 10^8$  que nos arroja algunas situaciones de no-equilibrio en (b) y en (c).



## Anexo G

# Códigos utilizados

Todos los códigos utilizados para las simulaciones computacionales pueden ser consultados en el siguiente enlace:

<https://drive.google.com/drive/folders/15wCWHpkKQifZAJI0TE3z0aGTYxYImjo6?usp=sharing>