Resultados clásicos sobre el rango de funciones analíticas

Roberto Sánchez Latorre

Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Mario Pérez Riera
28 de junio de 2018

Prólogo

Hasta ahora han sido estudiados a lo largo del grado dos teoremas principales sobre el rango de funciones analíticas. Por un lado el teorema de Liouville que se ocupa de las funciones enteras y por otro el teorema de Casorati-Weierstrass que estudia el comportamiento de las funciones en un entorno de una singularidad esencial.

El teorema de Liouville sostiene que una función entera y acotada debe ser constante. Si nos fijamos en funciones concretas, la función $\sin z$ toma todo número complejo como valor luego su imagen es todo $\mathbb{C}$. Si estudiamos ahora la función e^z observamos que su imagen es $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. El comportamiento de estas dos funciones enteras viene justificado por el teorema pequeño de Picard. El teorema afirma que toda función entera no constante omite como mucho un valor. Así que supone una mejora del teorema de Liouville.

El teorema de Casorati-Weierstrass asegura que la imagen de cualquier entorno de una singularidad esencial es densa en $\mathbb{C}$. Al igual que el teorma pequeño de Picard mejora al teorema de Liouville, existe un teorema que mejora al de Casorati-Weierstrass, este es el teorema grande de Picard. El teorema sostiene que alrededor de una singularidad esencial una función holomorfa toma todo número complejo con una posible excepción. Por ejemplo, si tomamos la función $e^{1/z}$ observamos que tiene una singularidad esencial en $z = 0$ y en todo entorno de $z = 0$ la función toma todos los valores complejos con la excepción del valor 1.

Estos dos teoremas fueron desarrollados por Picard en 1879 gracias a la teoría de funciones elípticas. A partir de ese momento comenzó propiamente el estudio de resultados que tratan el rango de funciones analíticas que culminó en cierta manera con la publicación de la teoría de distribuciones de valores por parte de R. Nevanlinna.

En 1904 Hurwitz demostró gracias a diversos métodos de la teoría de funciones modulares el primer teorema que se ocupaba de encontrar el mayor disco contenido en la imagen de una función holomorfa, estas funciones debían cumplir ciertas propiedades. Hurwitz probó el siguiente resultado: *Si* $f \in H(D(0,1))$, *satisface* $f(0) = 0$ *y* $f'(0) = 1$ *y además* $f(z) \neq 0$ *para todo* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *entonces* $\overline{D}(0,s) \subset f(D(0,1))$ *para cierto* $s \geq 1/58$. En 1924 Bloch demostró el teorema que lleva su nombre, que establece un radio mínimo para el mayor de los discos contenidos en la imagen de toda función holomorfa. Este resultado cambió la forma de desarrollar la teoría de distribuciones de valores, ya que el teorema de Bloch supone un punto de partida para la demostración de una gran variedad de resultados, entre ellos los teoremas de Picard. Más adelante Ahlfors probó un teorema que suponía una sustancial mejora del teorema de Bloch: no solo daba una cota mayor para el radio mínimo, sino que añadía a los discos propiedades de conformidad.

Cabe destacar que el orden con el que se van a presentar los resultados no coincide con el orden cronológico. Nosotros demostraremos prácticamente todos los resultados a partir del teorema de Bloch con la idea de reducir la extensión del trabajo. El trabajo se nutre principalmente de los libros [2] y [7]. Sin embargo, para el estudio de temas más específicos del análisis matemático se ha utilizado [3], [4], [5] y [8]. Además, los artículos [1], [6] y [9] suponen una ampliación de los resultados vistos en el trabajo.

Abstract

Our purpose is to deal with the images of holomorphic functions more in depth than in the subject complex variable. For that, we will take families of functions which satisfy certain properties and we will study the size of their images through the discs contained therein.

In the first chapter we study the value of the radius of the largest disc we can find in the image of every holomorphic function. For instance, if we consider the function $f_n(z) = nz$, we can't say anything in general about the size of their images since they depend on $n \in \mathbb{N}$, that is $f_n(\mathbb{D}) = D(0,n)$. In order to normalize the problem we consider holomorphic functions in the unit disc whose derivative in zero is 1. The first statement which appears is Bloch's theorem, the classic theorem gives us a bound of $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$. However, with several modifications in the development of the proof we can polish the statement in order to get a bound of $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$. This improvement of the bound is due to Landau.

Theorem (Bloch's theorem)**.** *Let $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$ satisfying $f'(0) = 1$, then $f(\mathbb{D})$ contains a disc of radius* $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$.

This theorem is the basis of development of the other statements. Then Ahlfors's theorem appears, this statement continues with the same idea as Bloch's theorem, but instead of looking for any disc, it guarantees that the discs generate conformal transformations with their preimages.

Theorem (Ahlfors's theorem)**.** *Let $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$ satisfying $f'(0) = 1$, then $f(\mathbb{D})$ contains a disc D, of radius $\frac{\sqrt{3}}{4}$, such that the restriction of f to $f^{-1}(D)$ is a conformal transformation.*

The study of these two theorems indicate us the existence of two constants which represent the optimal boundes for the two theorems. We consider the following family of functions:

$$\mathscr{F} := \{f \in H(\overline{\mathbb{D}}), f'(0) = 1\}.$$

Landau's constant is the radius of the largest disc which we can assure is contained in $f(\mathbb{D})$ if $f \in \mathscr{F}$ and Bloch's constant is the the largest disc contained in $f(\mathbb{D})$ that generates a conformal transformation with its preimage for all $f \in \mathscr{F}$.

In the second chapter we will see Picard's little theorem. This theorem continues with the same idea as the previous statements, but instead of considering holomorphic functions in a disc, it considers entire functions. It is considered as one of the most important theorems of the function theory.

Theorem (Picard's little theorem)**.** *Let $f \in H(\mathbb{C})$ and suppose $0 \notin f(\mathbb{C})$ and $1 \notin f(\mathbb{C})$. Then f is constant.*

The theorem assures that the image of a nonconstant entire function is either $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ with $a \in \mathbb{C}$ or $\mathbb{C}$. The theorem has many possible applications, for instance it is used to study the existence of fixed points in certain entire functions or to prove the fundamental theorem of algebra.

Following with the idea of Picard's little theorem, in the third chapter we study the size of the image of a disc under a holomorphic function which omits two values of $\mathbb{C}$. Schottky's theorem is the main statement of the chapter and it is half-way between Picard's little theorem and Picard's great theorem.

Theorem (Schottky's theorem)**.** *Let $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$ such that $f(z) \neq 0, 1$ for all $z \in \overline{\mathbb{D}}$ and $|f(0)| \leq r$. Then*

$$|f(z)| \leq \exp\left[\pi \exp \pi \left(3 + 2r + \frac{p}{L(1-p)}\right)\right] \quad \forall |z| \leq p, \quad p \in (0,1).$$

This theorem has a great importance in the study of holomorphic functions, it lets us build a sharpened form of Picard's little theorem and prove the Picard's great theorem.

In the last chapter, we will first study Montel's theorem. It says that every locally bounded sequence is normal, in other words, it has a subsequence which converges uniformly on compacts. This result can be applied, thanks to Schottky's theorem, to the family of holomorphic functions which omits two values and we obtain a sharpened form of classic Montel's theorem. This form lets us prove Picard's great theorem.

Finally, we will see Picard's great theorem. The theorem studies the behavior of the image of a holomorphic function in an neighborhood of a essential singularity.

Theorem (Picard's great theorem)**.** *Let $c \in \mathbb{C}$ be an isolated essential singularity of a holomorphic function f. Then, in every neighborhood of c, f assumes every complex number as a value infinitely many times, with at most one exception.*

This statement has significant consequences. Because of it, we can say that every entire function which is not a polynomial, assumes infinitely many times every value, with one possible exception.

Índice general

Prólogo III

Abstract V

1. Teoremas de Bloch y Ahlfors 1
- 1.1. Teorema de Bloch 1
- 1.2. Mejora del teorema de Bloch 4
- 1.3. Teorema de Ahlfors 5
- 1.4. Constantes de Bloch y Landau 9

2. Teorema pequeño de Picard 11
- 2.1. Aplicaciones 13

3. Teorema de Schottky 15

4. Teorema grande de Picard 19
- 4.1. Teorema de Montel 19
- 4.2. Teorema grande de Picard 22

Bibliografía 25

Capítulo 1

Teoremas de Bloch y Ahlfors

Antes de desarrollar los resultados propios del trabajo vamos a introducir las notaciones que vamos a seguir a lo largo de los capítulos.

Sea G un conjunto de $\mathbb{C}$, llamamos $\overline{G}$ a la clausura de G y ∂G a su frontera. También podemos definir la distancia de un punto al conjunto:

$$d(z,G) := \text{ínf}\{|w-z|; w \in G\}.$$

Para las funciones vamos a tomar la siguiente notación:

$$\|f\|_G := \sup\{|f(z)|; z \in G\}.$$

Los discos vienen dados por:

$$D(c,r) := \{z \in \mathbb{C}; |z-c| < r\}; \quad \overline{D}(c,r) := \{z \in \mathbb{C}; |z-c| \leq r\}.$$

Denotaremos al disco unidad de forma especial:

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}.$$

En el capítulo vamos a ver resultados que nos permitirán hacernos una idea del tamaño mínimo del mayor disco contenido en la imagen de una función holomorfa. La idea es la siguiente: si tenemos un conjunto U abierto de $\mathbb{C}$ y $a \in U$ el objetivo es ver qué discos de la forma $D(f(a), \lambda)$ contiene $f(U)$. Todos los discos los podemos transformar por traslaciones y homotecias al disco $D(0,1)$, así que aunque veamos los resultados para el disco unidad se pueden extender para todo tipo de discos.

1.1. Teorema de Bloch

Vamos a estudiar el tamaño de la imagen $f(\mathbb{D})$ de una familia de funciones bastante general, las funciones que son holomorfas en $\overline{\mathbb{D}}$ y cuya derivada en el 0 es 1. La condición de la derivada es una simple normalización, ya que si multiplicamos la función por una constante el tamaño de su imagen se ve afectado.

El teorema de Bloch clásico afirma que si $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$ tal que $f'(0) = 1$, entonces $f(\mathbb{D})$ contiene un disco de radio $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$. En nuestro caso lo vamos a ver como consecuencia directa de un teorema más general, y para ello, son necesarios una serie de resultados previos.

Lema 1.1. *Sea G un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{C}$, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ una función continua con restricción a G abierta y $a \in G$. Tomamos $R := d(f(a), f(\partial G))$, entonces $D(f(a), R) \subset f(G)$.*

Demostración. Observar que si probamos que $R \leq d(f(a), \partial f(G))$ tendremos que $D(f(a), R) \subset f(G)$ ya que $d(f(a), \partial f(G)) = d(f(a), \mathbb{C} \setminus f(G))$. Ahora bien, como $R = d(f(a), f(\partial G))$ basta probar que $\partial f(G) \subset f(\partial G)$.

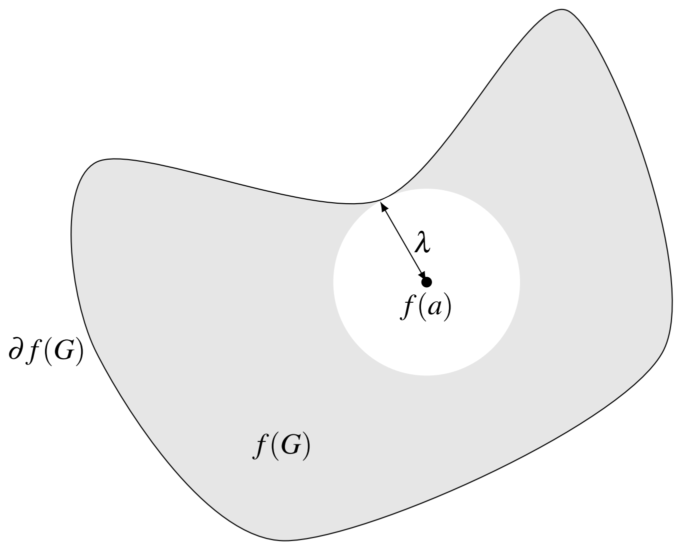

Figura 1.1: $R \leq d(f(a), \partial f(G)) \Rightarrow D(f(a), R) \subset f(G)$.

Como $\overline{G}$ es compacto y f es continua tenemos que $f(\overline{G})$ es compacto y por lo tanto cerrado. Trivialmente $f(G) \subset f(\overline{G})$ luego $\partial f(G) \subset f(\overline{G}) = f(G) \cup f(\partial G)$. Pero como $f(G)$ es abierto tenemos que $\partial f(G) \cap f(G) = \emptyset$ así que $\partial f(G) \subset f(\partial G)$. $\square$

El teorema de la aplicación abierta establece que si G es un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f \in H(G)$ no es constante, entonces f es una función abierta. Este resultado nos va a permitir a partir de ahora aplicar el lema anterior cuando f sea una función holomorfa no constante.

Lema 1.2. *Sea $f \in H(\overline{D}(a,r))$ una función no constante y tal que $|f'(z)| \leq 2|f'(a)|$ $\forall z \in D(a,r)$. Entonces $D(f(a),R) \subset f(D(a,r))$, con $R := (3-2\sqrt{2})r|f'(a)|$.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a = f(a) = 0$. Si no fuera así bastaría considerar la función $g(z) := f(z+a) - f(a)$ y trasladar el resultado.
Sea $A(z) := f(z) - f'(0)z$ para cada $z \in D(0,r)$; por lo tanto,

$$A(z) = \int_{[0,z]} \big(f'(x) - f'(0)\big)\, dx.$$

Parametrizando el segmento $[0,z]$ y tomando módulos nos queda:

$$|A(z)| = \left| \int_0^1 \big(f'(zt) - f'(0)\big)\, z\, dt \right| \leq \int_0^1 \big|f'(zt) - f'(0)\big|\, |z|\, dt.$$

Ahora por la fórmula integral de Cauchy tenemos que $\forall z_0 \in D(0,r)$

$$f'(z_0) - f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,r)} \left(\frac{f'(z)}{z - z_0} - \frac{f'(z)}{z} \right) dz = \frac{z_0}{2\pi i} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f'(z)}{z(z-z_0)} dz.$$

Tomando de nuevo módulos se sigue que

$$\big|f'(z_0) - f'(0)\big| \leq \left| \frac{z_0}{2\pi i} \right| 2\pi r \max_{z \in \partial D(0,r)} \left| \frac{f'(z)}{z(z-z_0)} \right| \leq \frac{|z_0|}{r - |z_0|} \|f'\|_{\overline{D}(0,r)}.$$

Así que

$$|A(z)| \leq \int_0^1 \frac{|zt| \|f'\|_{\overline{D}(0,r)}}{r - |zt|} |z| dt \leq |z|^2 \|f'\|_{\overline{D}(0,r)} \int_0^1 \frac{t}{r - |z|t} dt \leq \frac{|z|^2}{2(r - |z|)} \|f'\|_{\overline{D}(0,r)}.$$

Sea $\rho \in (0,r)$, si $|z| = \rho$ se tiene que $|A(z)| = |f(z) - f'(0)z| \geq |f'(0)|\rho - |f(z)|$. Ahora bien, usando la hipótesis $|f'(z)| \leq 2|f'(0)|$ tenemos que

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |f'(0)|\rho - |A(z)| \geq |f'(0)|\rho - \frac{\rho^2}{2(r-\rho)}\|f'\|_{\overline{D}(0,r)} \\ &\geq \rho|f'(0)| - \frac{\rho^2}{r-\rho}|f'(0)| = \left(\rho - \frac{\rho^2}{r-\rho}\right)|f'(0)|. \end{aligned}$$

La función $g(\rho) = \rho - \frac{\rho^2}{r-\rho}$ alcanza su máximo valor en $\rho_0 = (1-\frac{\sqrt{2}}{2})r \in (0,r)$ con $g(\rho_0) = (3-2\sqrt{2})r$. Esto nos lleva a ver que $|f(z)| \geq (3-2\sqrt{2})r|f'(0)| = R$ para todo $z \in \partial D(0,\rho_0)$. Tomando $G = D(0,\rho_0)$ en el lema 1.1 tenemos que $D(0,R) \subset f(G) \subset f(D(0,r))$. □

Sea $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$, para el siguiente resultado vamos a introducir la función $g(z) = |f'(z)|(1-|z|)$ que es continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Consideramos $M := \text{máx}\{|g(z)|, |z| \leq 1\}$ y a un punto de $\mathbb{D}$ tal que $g(a) = M$. Con estas notaciones podemos afirmar el siguiente resultado.

Teorema 1.3. *Sea $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$ una función no constante, entonces $f(\mathbb{D})$ contiene un disco de centro $f(a)$ y radio $(\frac{3}{2} - \sqrt{2})M \geq (\frac{3}{2} - \sqrt{2})|f'(0)|$.*

Demostración. Sea $r := (1-|a|)/2$, como $M = |f'(a)|(1-|a|)$, tenemos que $M = 2r|f'(a)|$. Además $D(a,r) \subset \mathbb{D}$, ya que $|a| + r < |a| + 2r = 1$, y $1 - |z| \geq r\ \forall z \in D(a,r)$. Ahora bien, como $r/(1-|z|) \leq 1$ de $|f'(z)|(1-|z|) \leq 2r|f'(a)|$ se sigue que $|f'(z)| \leq 2|f'(a)|$ para todo $z \in D(a,r)$. Luego estamos en condiciones de aplicar el lema 1.2 y nos queda que $D(f(a),R) \subset f(D(a,r)) \subset f(\mathbb{D})$ considerando $R := (3-2\sqrt{2})r|f'(a)| = (\frac{3}{2} - \sqrt{2})M$. Además de la definición se deduce que $M \geq |f'(0)|$. □

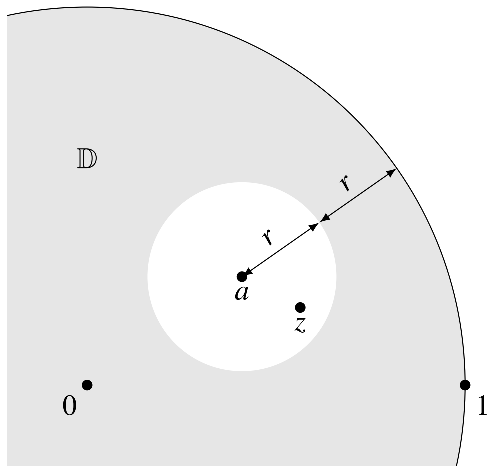

Figura 1.2: $r = \frac{1}{2}(1-|a|)$; $z \in D(a,r) \Rightarrow 1 - |z| > r$.

El teorema de Bloch que hemos presentado al principio de la sección está claramente contenido en este teorema. Para verlo basta considerar $f'(0) = 1$ y tener en cuenta la cota $M \geq 1$, que se cumple siempre que $f'(0) = 1$ ya que $M := \text{máx}\{g(z), z \in \mathbb{D}\}$.

Teorema 1.4 (Teorema de Bloch)**.** *Sea $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$ tal que $f'(0) = 1$, entonces $f(\mathbb{D})$ contiene un disco de radio $\frac{3}{2} - \sqrt{2} > \frac{1}{12}$.*

Corolario 1.5. *Sea $f \in H(G)$ con G un abierto de $\mathbb{C}$ y $f'(c) \neq 0$ para algún punto $c \in G$, entonces $f(G)$ contiene algún disco de radio $\frac{1}{12}s|f'(c)|$ para todo s tal que $0 < s < d(c,\partial G)$.*

Demostración. Para $0 < s < d(c,\partial G)$ tenemos que $\overline{D}(c,s) \subset G$, así que $g(z) := f(sz+c)/(sf'(c)) \in H(\overline{\mathbb{D}})$. Ahora bien, como $g'(0) = 1$, el teorema de Bloch implica que $g(\mathbb{D})$ contiene un disco de radio 1/12. Finalmente, $f(D(c,s)) = s|f'(c)|g(\mathbb{D})$ así que se tiene que $f(G)$ contiene un disco de radio $\frac{1}{12}s|f'(c)|$. □

1.2. Mejora del teorema de Bloch

El teorema 1.3 no solo afirma que $f(\mathbb{D})$ contiene un disco de cierto tamaño, sino que da una idea para su propia mejora. Si $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$ no es constante, gracias al teorema 1.3, podemos asegurar que cuanto mayor sea $|f'(0)|$ será posible encontrar discos mas grandes en $f(\mathbb{D})$. Esto nos lleva a buscar una función $F \in H(\overline{\mathbb{D}})$ tal que $F(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D})$ y con $|F'(0)|$ lo mayor posible.

Para ello vamos a considerar el conjunto de los automorfismos de $\mathbb{D}$, es decir, el conjunto de funciones $j : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ holomorfas y biyectivas. Gracias a un teorema clásico de caracterización de automorfismos del disco unidad sabemos que tienen la siguiente forma:

$$Aut\,(\mathbb{D}) = \left\{ j(z) = \frac{\lambda z - w}{\overline{w}\lambda z - 1},\, \lambda \in \partial\overline{\mathbb{D}}, w \in \mathbb{D} \right\}. \tag{1.1}$$

Consideramos el conjunto $\mathscr{F}$ dado por:

$$\mathscr{F} := \{h = f \circ j,\, j \in Aut\,(\mathbb{D})\}.$$

Ahora bien, como $j \in Aut(\mathbb{D})$, se sigue que:

$$h \in H(\overline{\mathbb{D}}) \;\; y \;\; h(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D}).$$

Y por lo tanto esto nos lleva a buscar $j \in Aut\,(\mathbb{D})$ con los que $|h'(0)|$ sea lo mayor posible. Además como $j'(0) = \lambda(|w|^2 - 1)$, $j(0) = w$ y $|\lambda| = 1$ tenemos que

$$|h'(0)| = |f'(w)|(1 - |w|^2) = \widetilde{g}(w) \;\; \forall h = f \circ j \in \mathscr{F}.$$

Luego podemos maximizar $|h'(0)|$ eligiendo el parámetro w adecuado. Tenemos que $\widetilde{g}$ es una función continua en el compacto $\overline{\mathbb{D}}$ y que $\widetilde{g}(w) = 0$ para todo $w \in \partial\mathbb{D}$ luego

$$\text{existe } q \in \mathbb{D} \text{ tal que } N = \widetilde{g}(q) \;\text{ con } N := \text{máx}\{|\widetilde{g}(z)|, z \in \overline{\mathbb{D}}\} \tag{1.2}$$

Así que el valor del parámetro $w = q$ es el que maximiza $|h'(0)|$. Por tanto, si construimos un automorfismo j con los parámetros $w = q$ y $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, por ejemplo $\lambda = 1$, tendremos que una solución a nuestro problema es la función:

$$F(z) := f\left(\frac{z - q}{\overline{q}z - 1}\right) \in \mathscr{F}, \tag{1.3}$$

que cumple que

$$F(0) = f(q) \quad y \quad |F'(0)| = \underset{|w| \le 1}{\text{máx}} |f'(w)|(1 - |w|^2) = N.$$

Ahora que hemos encontrado la función F podemos dar una cota para $|F'(z)|$. Como $F \circ j \in \mathscr{F}$ para toda $j \in Aut(\mathscr{D})$ y $N = \text{máx}\{|h'(0)|, h \in \mathscr{F}\}$ tenemos que $N \ge |(F \circ j)'(0)| = |F'(w)|(1 - |w|^2)$ para cada $w \in \mathbb{D}$. Luego

$$|F'(w)| \le \frac{N}{1 - |w|^2} \quad \forall w \in \mathbb{D}. \tag{1.4}$$

Tomando máximos nos queda

$$\underset{|z| \le r}{\text{máx}} |F'(z)| \le \frac{N}{1 - r^2} \quad \forall r \in (0, 1). \tag{1.5}$$

Después de este estudio de la función F, ya estamos en disposición de enunciar una versión mejorada del teorema de Bloch.

Teorema 1.6. *Sea $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$ no constante y N y q dadas por (1.2), entonces $D(f(q), (\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2)N) \subset f(\mathbb{D})$. En particular, si $f'(0) = 1$ entonces $f(\mathbb{D})$ contiene un disco de radio $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$.*

Demostración. Tomamos F como en (1.3). De la desigualdad (1.5) se sigue que $|F'(z)| \leq 2|F'(0)|$ si $|z| \leq \sqrt{2}/2$. Como $F(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D})$ y $f(q) = F(0)$, aplicando el lema 1.2 a la función F, con $a = 0$ y $r = \sqrt{2}/2$, tenemos que

$$D(f(q), (\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2)N) = D(F(0), (\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2)N) \subset F(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D}).$$

Si $f'(0) = 1$, entonces necesariamente $N \geq 1$ y se deduce la segunda parte. □

1.3. Teorema de Ahlfors

En esta sección vamos a demostrar el teorema de Ahlfors, el resultado sigue ocupándose de encontrar los discos de radio máximo contenidos en la imagen, sin embargo esos discos deben cumplir ciertas condiciones de conformidad. Este teorema mejora al teorema de Bloch porque a pesar de que se imponen más condiciones, se obtiene una cota mayor.

Definición. Sean U_1 y U_2 dos conjuntos abiertos de $\mathbb{C}$, una función $f : U_1 \longrightarrow U_2$ es una transformación conforme si es holomorfa y biyectiva, por lo tanto su inversa también es holomorfa.

Para demostrar el teorema son necesarios una serie de resultados previos.

Lema 1.7. *Consideramos las siguientes funciones:* $p(w) := \sqrt{3}\frac{(1-w)}{(3-w)}$ *y* $q(w) := \frac{9}{4}w(1-w/3)^2$*, entonces se tiene que:*

1. $p(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{D}$.
2. *p transforma* $[0,1]$ *en* $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $p([0,1]) = [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.
3. $|q(w)|(1 - |p(w)|^2) = 1 \ \ \forall w \in \partial\mathbb{D}$
4. $p : \mathbb{C} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\sqrt{3}\}$ *es biyectiva y*
$$p^{-1}(z) = \sqrt{3}\,\frac{1 - \sqrt{3}z}{\sqrt{3} - z}.$$
5. $q(p^{-1}(z)) = (1 - \sqrt{3}z)/(1 - \frac{z}{\sqrt{3}})^3$ *si* $z \neq \sqrt{3}$.

Demostración. 1. Es fácil comprobar que $|1 - 3w|^2 = |3 - w|^2 - 8(3 - |w|^2)$. De aquí se deduce que

$$\left|p(w) - \frac{\sqrt{3}}{4}\right|^2 = \left|\sqrt{3}\frac{1-3w}{4(3-w)}\right|^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - 8\frac{1-|w|^2}{|3-w|^2}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{si } |w| \leq 1.$$

Luego $p(\overline{\mathbb{D}}) \subset D(\sqrt{3}/4, \sqrt{3}/4) \subset \mathbb{D}$.

2. Tenemos que $p(0) = 1/\sqrt{3}$ y $p(1) = 0$, además $p'(w) = -2\sqrt{3}/(3-w)^2 < 0 \ \ \forall w \in [0,1]$ así que p es decreciente en $[0,1]$ y por tanto transforma $[0,1]$ en $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

3. Es facil comprobar que $|3 - w|^2 - 3|1 - w|^2 = 2(3 - |w|^2)$, luego

$$|q(w)|(1 - |p(w)|^2) = \frac{|3-w|^2}{4}\left(\frac{|3-w|^2 - 3|1-w|^2}{|3-w|^2}\right) = 1, \quad \text{si } |w| = 1.$$

4. Veamos que p es inyectiva, para ello tomamos $w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$ tales que $p(w_1) = p(w_2)$, tenemos que llegar a ver que $w_1 = w_2$.

$$\sqrt{3}\,\frac{(1-w_1)}{(3-w_1)} = \sqrt{3}\,\frac{(1-w_2)}{(3-w_2)} \Leftrightarrow (1-w_1)(3-w_2) = (1-w_2)(3-w_1) \Leftrightarrow w_1 = w_2.$$

Así que p es inyectiva. Para ver que es suprayectiva calculamos directamente su inversa. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{\sqrt{3}\}$, entonces

$$p(w) = z = \frac{\sqrt{3}\,(1-w)}{(3-w)} \Leftrightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}w = 3z - wz \Leftrightarrow w = \frac{\sqrt{3}-3z}{\sqrt{3}-z}.$$

Luego p es suprayectiva y por tanto biyectiva.

5. Como por el apartado 4 sabemos que $p : \mathbb{C} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\sqrt{3}\}$ es biyectiva, tenemos que $q(p^{-1}(z))$ está bien definida si $z \neq \sqrt{3}$. Ahora bien, conocemos el valor exacto de $p^{-1}(z)$, así que

$$\begin{aligned} q(p^{-1}(z)) &= \frac{9}{4}\,p^{-1}(z)\left(1 - \frac{p^{-1}(z)}{3}\right)^2 = \frac{9}{4}\sqrt{3}\,\frac{1-\sqrt{3}z}{\sqrt{3}-z}\left(1 - \frac{1-\sqrt{3}z}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-z)}\right)^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}(1-\sqrt{3}z)}{(\sqrt{3}-z)^3} = \frac{1-\sqrt{3}z}{(1-\frac{z}{\sqrt{3}})^3}. \end{aligned}$$

□

Lema 1.8. *Sea $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $f'(0) = 1$ y $|f'(z)| \leq 1/(1-|z|^2)$, entonces $f''(0) = 0$.*

Demostración. Por ser f holomorfa en $\mathbb{D}$, tenemos que gracias al desarrollo en serie de potencias,

$$\int_{[0,z]} f'(w)\,dw = f(z) - f(0) = z + az^2 + bz^3 + \dots \qquad \text{para ciertos } a, b \in \mathbb{C}.$$

Además todo $z \in \mathbb{D}$ es de la forma $z = re^{i\theta}$ con $0 \leq r < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, así que:

$$|z + az^2 + bz^3 + \dots| \leq \int_0^r \left|f'(te^{i\theta})\right| dt \leq \int_0^r \frac{dt}{1-|t|^2} = |z| + \frac{|z|^3}{3} + \dots$$

Luego tenemos que

$$|z + az^2 + \dots|^2 \leq \left(|z| + \frac{|z|^3}{3} + \dots\right)^2 = |z|^2 + \frac{2}{3}|z|^4 + \dots$$

Además se cumple que

$$|z + az^2 + \dots|^2 = |z|^2 + \overline{a}z\overline{z^2} + az^2\overline{z} + \dots = |z|^2 + \mathrm{Re}(az^2\overline{z}) + \dots$$

Así que

$$|z|^2\,\mathrm{Re}(az) = \mathrm{Re}(a|z|^2 z) = \mathrm{Re}(az^2\overline{z}) = O(|z|^4).$$

Entonces $\mathrm{Re}(az) = O(|z|^2)$ y por lo tanto $a = 0$. □

Lema 1.9. *Sea $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $|f'(z)| \leq 1/(1-|z|^2)$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f'(0) = 1$, entonces*

$$\mathrm{Re}\,f'(z) \geq \frac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\frac{|z|}{\sqrt{3}})^3} \quad \forall z \text{ tal que } |z| \leq 1/\sqrt{3}.$$

Demostración. Tomando las transformaciones del lema 1.7, consideramos la función auxiliar :

$$H(w) := \left(\frac{f'(p(w))}{q(w)} - 1 \right) \frac{w}{(1-w)^2}, \; w \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Sabemos que $p(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{D}$, luego H está bien definida. Vemos a simple vista que H puede tener problemas de holomorfía en $w = 1$ y en los ceros de $q(w)$, $w = 0$ y $w = 3$. Luego como H está definida para $w \in \overline{\mathbb{D}}$ tenemos que estudiar la holomorfía en 0 y 1. Simplificando nos queda

$$H(w) = \frac{4(f'(p(w)) - q(w))}{9(1-\frac{w}{3})^2(1-w)^2}$$

así que la función H es holormorfa en $w = 0$. Vamos a ver que la función es holomorfa en $w = 1$, para ello definimos

$$G(z) := f'(p(w)) - q(w), w \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Observar que si probamos que G tiene en $w = 1$ un cero doble tendremos que H tiene en $w = 1$ una singularidad evitable. Como $p(1) = 0$, $f(0) = 1$ y $q(1) = 1$, tenemos que $G(1) = 0$. Además

$$G'(1) = f''(p(1))p'(1) - q'(1) = -q'(1) = 0,$$

ya que por el lema 1.8 $f''(0) = 0$. Así que G tiene en $w = 1$ un cero doble y por lo tanto podemos extender de manera continua la función H en $w = 1$, luego $H \in H(\overline{\mathbb{D}})$. Observar ahora que $w/(1-w)^2$ es un número real negativo $\forall w \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$:

$$\frac{w}{(1-w)^2} = \frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} = \frac{1}{e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2} = \frac{1/2}{\cos\theta - 1} \leq 0, \quad w = e^{i\theta}, \; \theta \in (0, 2\pi).$$

Así que :

$$\operatorname{Re} H(w) = \frac{w}{(1-w)^2} \operatorname{Re}\left(\frac{f'(p(w))}{q(w)} - 1 \right) \text{ para todo } w \in \partial\mathbb{D}.$$

Además, tenemos que $|f'(z)|(1-|z|^2) \leq 1 \; \forall z \in \mathbb{D}$ y por el lema 1.7 tenemos que $|q(w)|(1-|p(w)|^2) = 1$ $\forall w \in \partial\mathbb{D}$, luego como $p(\partial\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ necesariamente $|f'(p(w))| \leq |q(w)|$ para todo $w \in \partial\mathbb{D}$ y por tanto $f'(p(w))/q(w) \in \overline{\mathbb{D}}$ para todo $w \in \partial\mathbb{D}$. Ahora tenemos que

$$\operatorname{Re}(z-1) \leq 0 \; \forall z \in \overline{\mathbb{D}} \Rightarrow \operatorname{Re} H(w) \geq 0 \; \forall w \in \partial\mathbb{D}.$$

Aplicando el principio del módulo máximo a $e^{-H(w)}$ nos queda que $\operatorname{Re} H(w) \geq 0 \; \forall w \in \overline{\mathbb{D}}$. Ahora bien, como $q(w) \geq 0$ y $w/(1-w)^2 \geq 0 \; \forall w \in [0,1)$ se tiene que $\operatorname{Re} f'(p(w)) \geq q(w) \; \forall w \in [0,1]$. Por el lema 1.7 todo $r \in [0, 1/\sqrt{3}]$ es de la forma $r = p(w)$ para algún $w \in [0,1]$. Gracias al lema 1.7 podemos afirmar también que

$$q(p^{-1}(r)) = \frac{1-\sqrt{3}r}{(1-\frac{r}{\sqrt{3}})^3}, \; r \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}].$$

Luego $\operatorname{Re} f'(r) \geq q(p^{-1}(r))$ para todo $r \in [0, 1/\sqrt{3}]$, es decir:

$$\operatorname{Re} f'(r) \geq \frac{1-\sqrt{3}r}{(1-\frac{r}{\sqrt{3}})^3} \quad \forall r \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}].$$

Esto demuestra el lema en el caso $r \in [0, 1/\sqrt{3}]$. Ahora bien, fijado $\theta \in [0, 2\pi)$ consideramos la función

$$g(z) := e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z), \; \forall z \text{ tal que } |z| \leq 1/\sqrt{3}.$$

Esta función g cumple que $g'(z) = f'(e^{i\theta} z)$, luego cumple las condiciones del lema así que:

$$\operatorname{Re} f'(re^{i\theta}) = \operatorname{Re} g'(r) \geq \frac{1-\sqrt{3}r}{(1-\frac{r}{\sqrt{3}})^3} \quad \forall r \in [0, 1/\sqrt{3}]$$

Con lo que f cumple la condición $\forall z$ tal que $|z| \leq 1/\sqrt{3}$. □

Lema 1.10. *Sea G un conjunto convexo de $\mathbb{C}$ y $f \in H(G)$ con $\operatorname{Re}(f'(z)) > 0\ \forall z \in G$. Entonces $f : G \longrightarrow f(G)$ es una transformación conforme.*

Demostración. Por ser G un conjunto convexo $\forall u, v \in G$ tenemos que $\gamma(t) = u + (v-u)t \in G\ \ \forall t \in [0,1]$. Así que:

$$f(v) - f(u) = \int_\gamma f'(z)\,dz = \int_0^1 (v-u)f'(\gamma(t))\,dt = (v-u)\left[\int_0^1 \operatorname{Re} f'(\gamma(t))\,dt + i\int_0^1 \operatorname{Im} f'(\gamma(t))\,dt\right]$$

Ahora bien, como $\operatorname{Re} f'(\gamma(t)) > 0\ \forall t \in [0,1]$ tenemos que si $v \neq u$ entonces $f(v) \neq f(u)$ con lo que $f : G \longrightarrow f(G)$ es biyectiva y por tanto es una transformación conforme. □

Ahora ya estamos en disposición de probar el teorema de Ahlfors. Para este teorema vamos a considerar una constante $N > 0$ que ya hemos utilizado anteriormente, $N := \text{máx}_{|z|\leq 1} |f'(z)|(1-|z|^2)$.

Teorema 1.11 (Teorema de Ahlfors)**.** *Sea $f \in H(\mathbb{D})$ entonces $f(\mathbb{D})$ contiene un disco D, de radio $\frac{\sqrt{3}N}{4}$, tal que la restricción de f a $f^{-1}(D)$ es una transformación conforme.*

Demostración. Vamos a suponer que $N = 1$. Elegimos F como en (1.3), es decir

$$F(z) := f\left(\frac{z-q}{\overline{q}z-1}\right), \text{ donde } |f(q)|(1-|q|^2) = 1.$$

Entonces podemos considerar $\delta \in \partial\mathbb{D}$ tal que $F'(0) = \delta$ ya que $|F'(0)| = N = 1$. Supongamos que $\delta = 1$. Todo $z \in \partial D(0, 1/\sqrt{3})$ es de la forma $z = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$, luego aplicando a F el lema 1.9 tenemos que $\forall z \in \partial D(0, 1/\sqrt{3})$:

$$\begin{aligned}
|F(z) - F(0)| &= |\int_0^{1/\sqrt{3}} F'(te^{i\theta})\,dt| \geq \int_0^{1/\sqrt{3}} \operatorname{Re} F'(te^{i\theta})\,dt \geq \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1-\sqrt{3}t}{(1-t/\sqrt{3})^3}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left[\frac{3}{(1-t/\sqrt{3})^2} - \frac{2}{(1-t/\sqrt{3})^3}\right] dt = \left[3\sqrt{3}(1-t/\sqrt{3})^{-1} - \sqrt{3}(1-t/\sqrt{3})^2\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \left[3\sqrt{3}\,\frac{3}{2} - \sqrt{3}\,\frac{9}{4}\right] - \left[3\sqrt{3} - \sqrt{3}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Así que como $\sqrt{3}/4 \leq |F(z) - F(0)|\ \ \forall z \in \partial D(0, 1/\sqrt{3})$ podemos afirmar que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq d\left(F(0), F\left(\partial D\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right).$$

Luego por el lema 1.1 aplicado a $G = D(0, 1/\sqrt{3})$, el conjunto $F(D(0, 1/\sqrt{3}))$ contiene un disco de radio $\sqrt{3}/4$.

Como $|F'(0)| = 1$ y, según (1.4)

$$|F'(w)| \leq \frac{1}{1-|w|^2} \quad \text{para todo } w \in \mathbb{D},$$

del lema 1.9 se deduce que, en particular, $\operatorname{Re} F'(z) > 0$ si $z \in D(0, 1/\sqrt{3})$. Luego, por el lema 1.10, F es una transformación conforme en $D(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Como

$$f = F \circ j, \quad \text{con } j(z) = \frac{z-q}{\overline{q}z-1},$$

que es un automorfismo de $\mathbb{D}$, resulta que f es una transformación conforme de $j^{-1}\left(D(0, 1/\sqrt{3})\right)$ en $F\left(D(0, 1/\sqrt{3})\right)$. Pero $F\left(D(0, 1/\sqrt{3})\right)$ contiene un disco de radio $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Esto demuestra el teorema en el caso $N = 1$.

La demostración está probada para los casos particulares de $N = 1$ y $\delta = 1$. En el caso general, basta aplicar el teorema a la función $\frac{1}{\delta}f$, que está en el caso ya demostrado. □

1.4. Constantes de Bloch y Landau

El estudio de teoremas como el clásico de Bloch nos lleva a buscar la constante que corresponde al mayor disco contenido en la imagen de una función genérica. Consideramos

$$\mathscr{F} := \{f \in H(\overline{\mathbb{D}}),\, f'(0) = 1\}$$

y definimos $\forall f \in \mathscr{F}$

$$\lambda(f) = \sup\{r;\, f(\mathbb{D}) \text{ contiene un disco de radio } r\}.$$

Definición. Llamamos constante de Landau, L, a $\text{ínf}\{\lambda(f) | f \in \mathscr{F}\}$.

Vamos a ver que la definición de la constante de Landau es acorde con la constante que buscábamos, es decir, $f(\mathbb{D})$ contiene un disco de radio L. Esta constante L va a corresponder al radio de mayor disco que podemos garantizar que contiene $f(\mathbb{D})$ si $f \in \mathscr{F}$. Es inmediato que si $r < L$, entonces $r < \lambda(f)$ para toda $f \in \mathscr{F}$ y entonces $f(\mathbb{D})$ contiene algún disco de radio r, para toda $f \in \mathscr{F}$. En cambio, si $L < r$, entonces existe alguna $f \in \mathscr{F}$ tal que $\lambda(f) < r$, luego $f(\mathbb{D})$ no contiene ningún disco de radio r. La siguiente proposición resuelve el caso $r = L$.

Proposición 1.12. *Si $f \in \mathscr{F}$ entonces $f(\mathbb{D})$ contiene un disco de radio L.*

Demostración. El resultado quedará probado si demostramos que $f(\mathbb{D})$ contiene un disco de radio $\lambda = \lambda(f)$, ya que $L \leq \lambda(f)\ \forall f \in \mathscr{F}$. Observar que para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe un punto $p_n \in f(\mathbb{D})$ tal que $D(p_n, \lambda - \frac{1}{n}) \subset f(\mathbb{D})$. Ahora, como $f(\overline{\mathbb{D}})$ es un conjunto compacto y $p_n \in f(\overline{\mathbb{D}})$, existe un punto $p \in f(\overline{\mathbb{D}})$ y una subsucesión $p_{n_k} \in f(\overline{\mathbb{D}})$ tal que $p_{n_k} \longrightarrow p$. Consideramos $w \in D(p, \lambda)$ entonces $|w - p| < \lambda$ y podemos tomar un n_0 tal que $|w - p| < \lambda - 1/n_0$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > n_0$ y

$$|p_n - p| < \lambda - \frac{1}{n_0} - |w - p| \quad \forall n \geq n_1$$

luego

$$|w - p_n| \leq |w - p| + |p - p_n| < \lambda - \frac{1}{n_0} < \lambda - \frac{1}{n} \quad \forall n \geq n_1.$$

Así que tenemos que $w \in D(p_n, \lambda - 1/n) \subset f(\mathbb{D})$ y se sigue que $D(p, \lambda) \subset f(\mathbb{D})$. □

Corolario 1.13. *Sea $f \in H(\overline{D}(a,R))$, entonces $f(D(a,R))$ contiene un disco de radio $R|f'(a)|L$.*

Demostración. Si $f'(a) = 0$ no hay nada que demostrar, así que suponemos que $f'(a) \neq 0$. Para probar el resultado basta aplicar la proposición anterior a la función $g(z) := [f(a+Rz) - f(a)]/[Rf'(a)]$, ya que g es una función holomorfa en $\overline{\mathbb{D}}$ y $g'(0) = 1$. □

Ahora vamos a introducir una constante que responde al radio del mayor disco, con las propiedades de conformidad del teorema de Ahlfors, que contiene $f(\mathbb{D})$ para funciones de $\mathscr{F}$. Definimos $\forall f \in \mathscr{F}$

$$\beta(f) = \sup\{r,\, f(\mathbb{D}) \text{ contiene un disco de radio r que genera una transformación conforme con su antiimagen}\}$$

Definición. Llamamos constante de Bloch, B, a $\text{ínf}\{\beta(f),\, f \in \mathscr{F}\}$.

Se observa inmediatamente que $B \leq L$. Por lo visto anteriormente conocemos cotas inferiores para ambas constantes: de acuerdo con la versión mejorada del teorema de Bloch, $L \geq \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$ y gracias al teorema de Ahlfors sabemos que $B \geq \sqrt{3}/4$. Actualmente los valores de estas constantes son desconocidos, sin embargo existen cotas que nos dan buenas aproximaciones. Se puede ver en [1, 6, 9] que:

$$0{,}5 + 10^{-335} < L < 0{,}544, \qquad 0{,}433 + 10^{-14} < B < 0{,}472.$$

En el caso de la constante de Bloch, tras muchas aproximaciones Ahlfors y Grunsky encontraron una posible expresión de dicha constante, sin embargo no se ha podido demostrar. La conjetura de Ahlfors-Grunsky establece que :

$$B = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{\Gamma(\frac{1}{4})}$$

Capítulo 2

Teorema pequeño de Picard

Si nos fijamos en funciones enteras generales, podemos hacernos una idea de como se comportan sus imágenes. Por ejemplo, la función seno toma todos los números complejos como valor y la función exponencial toma todos menos el origen.

En este capítulo estudiaremos uno de los teoremas más famosos sobre el rango de funciones holomorfas, el teorema pequeño de Picard. El teorema sostiene que la imagen de toda función entera no constante omite como mucho un valor de $\mathbb{C}$. Este resultado es más fuerte que el teorema de Liouville, que establece que una función entera y acotada debe ser constante.

El teorema se puede enunciar de varias formas equivalentes, y extender a funciones más generales como las meromorfas. Además dada su importancia tiene muchas aplicaciones a distintas áreas del análisis.

Para poder llegar a demostrar el teorema hace falta el desarrollo de dos lemas previos.

Lema 2.1. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto simplemente conexo y $f \in H(G)$ tal que $f(z) \neq -1$, $f(z) \neq 1$ para todo $z \in G$. Entonces existe $F \in H(G)$ tal que $f = \cos F$.*

Demostración. Como $1 - f^2$ no tiene ceros en G, existe una determinación de la raíz $g \in H(G)$ tal que $1 - f^2 = g^2$ luego $(f + ig)(f - ig) = f^2 + g^2 = 1$ y por lo tanto $f + ig$ no tiene ceros en G. Así que existe una determinación del logaritmo $F \in H(G)$ tal que $f + ig = e^{iF}$. De esto se sigue que $f - ig = e^{-iF}$, luego $f = \frac{1}{2}(e^{iF} + e^{-iF}) = \cos F$. $\square$

Lema 2.2. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto simplemente conexo y $f \in H(G)$ tal que $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq 1$ para todo $z \in G$. Entonces existe $g \in H(G)$ tal que*

$$f = [1 + \cos(\pi \cos \pi g)]/2.$$

Además $g(G)$ no contiene discos de radio 1.

Demostración. Tenemos que la función $2f - 1$ no toma los valores 1 y -1 en G, así que por el lema anterior podemos afirmar que $2f - 1 = \cos \pi F$ con $F \in H(G)$. Por como está construida F, esta no toma valores enteros, si no f tomaría los valores 0 o 1. Luego aplicando nuevamente el lema anterior nos queda que existe $g \in H(G)$ tal que $F = \cos \pi g$ y por tanto tenemos que

$$f(z) = \frac{1 + \cos(\pi \cos \pi g(z))}{2} \quad \forall z \in G.$$

Ahora que hemos probado la existencia de g veamos que $g(G)$ no contiene discos de radio 1. Para ello vamos a considerar primero un conjunto de puntos y veremos luego que esos puntos no están en $g(G)$. Sea:

$$\mathscr{A} := \{m \pm \frac{i \log(n + \sqrt{n^2 - 1})}{\pi},\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Consideramos $a := p \pm i\pi^{-1} log(q+\sqrt{q^2-1}) \in \mathscr{A}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\cos \pi a &= \frac{1}{2}(e^{i\pi a}+e^{-i\pi a}) = \frac{1}{2}(-1)^p\left[(q+\sqrt{q^2-1})+\frac{1}{q+\sqrt{q^2-1}}\right]\\ &= \frac{1}{2}(-1)^p\left[q+\sqrt{q^2-1}+q-\sqrt{q^2-1}\right] = (-1)^p q \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Luego $\cos(\pi \cos \pi a) = \pm 1$ y como $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq 1$ $\forall z \in G$ tenemos que $\mathscr{A} \cap g(G) = \emptyset$. Los puntos de $\mathscr{A}$ forman una cuadrícula en $\mathbb{C}$ donde el lado correspondiente al eje real mide 1. Ahora bien, gracias a que el logaritmo es una función monótona creciente tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\log\left(n+1+\sqrt{(n+1)^2-1}\right) - \log(n+\sqrt{n^2-1}) &= \log\frac{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\\ &\leq \log\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)\\ &\leq \log(2+\sqrt{3}) < \pi.\end{aligned}$$

Luego el lado correspondiente al eje imaginario es menor que 1. Así que $\forall z \in \mathbb{C}$ existe $a \in \mathscr{A}$ tal que $|\operatorname{Re} a - \operatorname{Re} z| \leq 1/2$ y $|\operatorname{Im} a - \operatorname{Im} z| \leq 1/2$, y se deduce que $|a-z| < 1$. Finalmente como $\mathscr{A} \cap g(G) = \emptyset$ tenemos que $g(G)$ no contiene discos de radio 1. $\square$

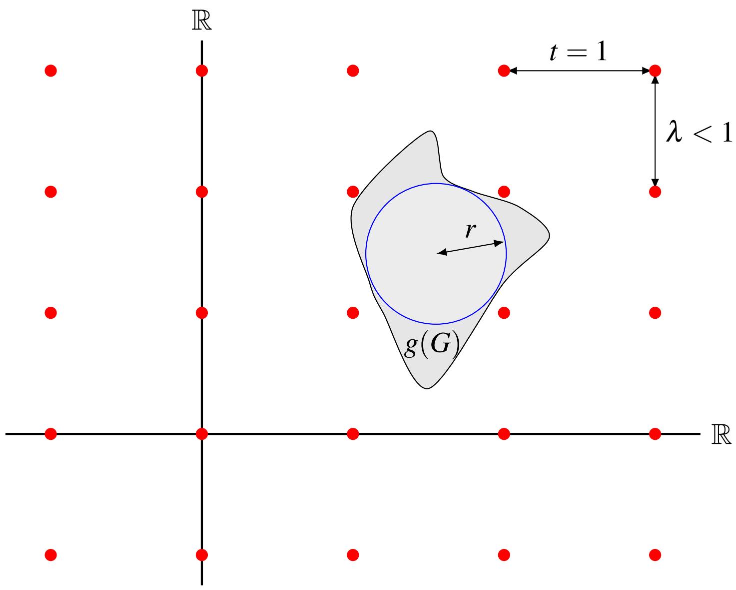

Figura 2.1: $t = 1, \lambda < 1 \Rightarrow r < 1$

Teorema 2.3 (Teorema Pequeño de Picard)**.** *Sea $f \in H(\mathbb{C})$ tal que $0 \notin f(\mathbb{C})$ y $1 \notin f(\mathbb{C})$, entonces f es constante.*

Demostración. Por el lema 2.2 tenemos que existe $g \in H(\mathbb{C})$ tal que $g(\mathbb{C})$ no contiene discos de radio 1 y que $f = \frac{1}{2}[1+\cos \pi(\cos \pi g)]$. Ahora bien, aplicando el corolario 1.5 a funciones enteras necesariamente g es constante, luego f es constante. $\square$

Aunque el resultado está probado para funciones que omiten el 0 y el 1, se extiende rápidamente para valores cualquiera.

Corolario 2.4. *Sea f una función entera que omite dos valores, entonces f es constante.*

Demostración. Supongamos que $f(z) \neq a$ y $f(z) \neq b$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Basta considerar la función $g(z) := (f(z)-a)/(b-a)$, que es una función entera y omite los valores 0 y 1. Aplicando el teorema anterior a g tenemos que g es una función constante, luego f también lo es. $\square$

Corolario 2.5. *Sean $f,g \in H(\mathbb{C})$ tales que $1 = e^f + e^g$, entonces f y g son constantes.*

Demostración. Tenemos que $e^{f(z)} = 1 - e^{g(z)}$ para cada $z \in \mathbb{C}$, luego por las propiedades de la función exponencial $e^f \neq 0$ y $e^f \neq 1$. Así que podemos aplicar el teorema pequeño de Picard a la función $e^f \in H(\mathbb{C})$ y tenemos que $e^f = c$ para cierta $c \in \mathbb{C}$. Ahora despejando la función f de esta expresión tenemos que

$$f(z) \in \{\log|c| + i \arg c\} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Lo que quiere decir que $f(\mathbb{C})$ está en un conjunto discreto de puntos de $\mathbb{C}$, pero $f(\mathbb{C})$ debe ser conexo por ser la imagen continua de un conexo. Luego $f(\mathbb{C})$ es un punto y por tanto f es constante, lo que implica que g también lo es. $\square$

En realidad este corolario es una forma alternativa de enunciar el teorema. Veamos que a partir de él se puede llegar al enunciado del teorema pequeño de Picard que hemos visto. Sea $f \in H(\mathbb{C})$ tal que $0 \notin f(\mathbb{C})$ y $1 \notin f(\mathbb{C})$, veamos que f es necesariamente constante. Como f no tiene ceros en $\mathbb{C}$, existe una determinación de la raíz $F \in H(\mathbb{C})$ tal que $f = e^F$. Además, como $1-f$ no tiene ceros en $\mathbb{C}$, existe $G \in H(\mathbb{C})$ tal que $1-f = e^G$. Ahora bien, se cumple que $e^G + e^F = 1$ luego F y G son funciones constantes y por tanto f también lo es.

Definición. Una función f es meromorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ si es holomorfa en todo Ω menos en un conjunto de aislado de singularidades, en cada una de las cuales f tiene un polo.

Si observamos la función $f(z) := 1/(1+e^z)$, esta es una función meromorfa no constante y omite los valores 0 y 1, así que vemos que el teorema pequeño de Picard no es válido para funciones meromorfas. Sin embargo, el teorema se puede generalizar a funciones meromorfas si permitimos que la imagen de la función omita dos valores complejos en lugar de uno solo.

Corolario 2.6. *Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que $a,b,c \notin f(\mathbb{C})$, entonces f es constante.*

Demostración. Consideramos la función $g := 1/(f-a)$ que es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y tal que $1/(b-a) \notin g(\mathbb{C})$ y $1/(c-a) \notin g(\mathbb{C})$. Por tanto, aplicando el Teorema Pequeño de Picard tenemos que g es una función constante, luego f también lo es. $\square$

2.1. Aplicaciones

La importancia del teorema es evidente, a continuación vamos a ver tres aplicaciones. La primera es relativa a los puntos fijos. Una función holomorfa no tiene por qué tener puntos fijos, sin embargo podemos garantizar la existencia de puntos fijos para unas determinadas funciones.

Teorema 2.7. *Sea $f \in H(\mathbb{C})$. Entonces $f \circ f$ tiene algún punto fijo, salvo si f es una traslación: $f(z) = z + b$ con $b \neq 0$.*

Demostración. Suponemos que $f \circ f$ no tiene ningún punto fijo, entonces f tampoco tiene y por lo tanto

$$g(z) := \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z} \in H(\mathbb{C})$$

cumple que $g(z) \neq 0$ y $g(z) \neq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Ahora bien, por el teorema pequeño de Picard g es constante, es decir existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ tal que $f(f(z)) - z = c(f(z) - z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Derivando nos queda que

$$f'(z)[f'(f(z)) - c] = 1 - c \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Así que $f'(z)$ no tiene ceros y $f'(f(z)) \neq c$. Por tanto,

$$f' \circ f \in H(\mathbb{C}) \text{ y } f' \circ f(z) \neq 0, f' \circ f(z) \neq c \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Así que por el teorema pequeño de Picard $f' \circ f$ es constante. Ahora bien, como f no es constante, se sigue que f' es constante y por tanto $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$. Además como f no tiene puntos fijos f tiene que ser de la forma $f(z) = z + b$ con $b \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$. $\square$

La segunda aplicación del teorema pequeño de Picard viene del estudio de la ecuación de Fermat $X^n + Y^n = 1$ con $n \geq 3$. El último teorema de Fermat sostiene que esta ecuación no tiene soluciones en el cuerpo de los números racionales, en nuestro caso vamos a estudiar la ecuación en el cuerpo de las funciones meromorfas.

Proposición 2.8. *Sean f y g funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ tales que $f^n + g^n = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 3$, entonces o f y g tienen polos comunes o son funciones constantes.*

Demostración. Primero de todo observar que como se cumple $f^n + g^n = 1$ necesariamente $P(f) = P(g)$ y $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$. Suponemos que f y g no tienen polos comunes luego $P(f) = P(g) = \emptyset$ así que $f, g \in H(\mathbb{C})$. Vamos a suponer que $g \neq 0$, si $g \equiv 0$ entonces $f \equiv 1$ y ya serían funciones constantes, como $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$, f/g es meromorfa en $\mathbb{C}$ y toma el valor $a \in \mathbb{C}$ en $w \in \mathbb{C}$ si y solo si $f(w) = ag(w)$. Ahora bien, de la factorización

$$1 = \prod_{j=1}^{n} (f - \eta_j g), \qquad \eta_1, ..., \eta_n \text{ las n raíces de } X^n + 1,$$

se sigue que f/g no toma ninguno de los valores $\eta_1, ..., \eta_n$. Como $n \geq 3$ tenemos que por el teorema pequeño de Picard para funciones meromorfas f/g es una función constante, luego $f = cg$ con $c \neq \eta_1, ..., \eta_n$. Así que se tiene que cumplir que $(c^n + 1)g^n = 1$, luego g es constante y por lo tanto f también. $\square$

Es conocido que el teorema fundamental del álgebra tiene múltiples demostraciones. En nuestro caso lo vamos a demostrar usando el teorema pequeño de Picard.

Teorema 2.9. *Todo polinomio no constante tiene una raíz en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea p un polinomio no constante. Según el teorema pequeño de Picard (el corolario 2.4, en concreto), p tiene que tomar todos los valores $1/k$ ($k \in \mathbb{N}$), con una posible excepción. Sea entonces $z_k \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_k) = 1/k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ (salvo uno quizás). Como $\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|p(z)| > 1$ si $|z| > c$. Luego $z_k \in \overline{D}(0, c)$ para todo k. Por compacidad hay alguna subsucesión de (z_k) cuyo límite es z; por continuidad $p(z) = 0$. $\square$

Capítulo 3

Teorema de Schottky

El resultado principal del cápitulo es un conocido teorema sobre el rango de funciones holomorfas, el de Schottky.

El teorema de Schottky nos da una cota para la imagen de una familia de funciones bastante general. Cabe destacar que lo importante del teorema no es el valor de la cota, puesto que el valor que veremos se puede mejorar considerablemente.

Para llegar al teorema de Schottky son necesarios una serie de resultados previos.

Lema 3.1. *Sean $a, b \in \mathbb{C}$, si $\cos \pi a = \cos \pi b$ entonces $b = \pm a + 2n,\ n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. El resultado se sigue directamente de la identidad trigonométrica

$$\cos \pi a - \cos \pi b = -2 \sin \pi \frac{(a+b)}{2} \sin \pi \frac{(a-b)}{2}. \qquad \square$$

Lema 3.2. *Sea $w \in \mathbb{C}$, entonces existe $v \in \mathbb{C}$ tal que $\cos \pi v = w$ cumpliendo $|v| \leq 1 + |w|$.*

Demostración. Veamos primero que existe $v \in \mathbb{C}$ tal que $\cos \pi v = w$, es decir, la suprayectividad de la función coseno. Sea $z = \pi v$;

$$w = \cos z \Leftrightarrow w = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Leftrightarrow 2we^{iz} = (e^{iz})^2 + 1 \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2we^{iz} + 1 = 0.$$

Llegamos a la siguiente ecuación: $u^2 - 2wu + 1 = 0$ con $u = e^{iz}$, que tiene dos soluciones distintas de cero, u_1 y u_2. Ya que la función exponencial toma todos los números complejos menos el 0 como valor, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $u_1 = e^{iz}$ y tenemos que $w = \cos z$.

Ahora que hemos visto la existencia de v, lo elegimos de forma que $v = \alpha + i\beta$ con $|\alpha| \leq 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Observar que la condición $|\alpha| \leq 1$ se puede tomar sin pérdida de generalidad gracias a la periodicidad de la función coseno. Tenemos que ver que $|v| \leq 1 + |w|$, ahora bien

$$w = \frac{e^{-\beta\pi + i\pi\alpha} + e^{\beta\pi - i\pi\alpha}}{2}, \qquad \overline{w} = \frac{e^{-\beta\pi - i\pi\alpha} + e^{\beta\pi + i\pi\alpha}}{2}.$$

Luego

$$\begin{aligned} |w|^2 = w\overline{w} = \frac{e^{-2\pi\beta} + e^{i2\pi\alpha} + e^{-i2\pi\alpha} + e^{2\pi\beta}}{4} &= \left(\frac{e^{i\pi\alpha} + e^{-i\pi\alpha}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{\beta\pi} - e^{-\beta\pi}}{2} \right)^2 \\ = \cos^2 \pi\alpha + \sinh^2 \pi\beta. \end{aligned}$$

Veamos ahora que se cumple $\sinh^2 x \geq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\sinh^2$ es una función par basta probar la desigualdad para $x > 0$. Ahora bien, $\sinh^2 x > 0$ para cada $x > 0$ luego tomando raíces en la desigualdad nos queda que basta probar $\sinh x \geq x$ para todo $x > 0$. Ahora, haciendo el estudio de la función $f(x) :=$

$\sinh x - x$ y su derivada podemos concluir que $f(x) \geq 0$ para todo $x > 0$. Así que podemos afirmar que $\sinh^2 \pi\beta \geq \pi^2\beta^2$. Luego tenemos:

$$|v| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leq \sqrt{\alpha^2 + \frac{\sinh^2 \pi\beta}{\pi^2}} \leq \sqrt{1+\frac{|w|^2}{\pi^2}} \leq 1+|w|. \qquad \square$$

Proposición 3.3. *Sea $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$ tal que $f(z) \neq 0,1$ $\forall z \in \overline{\mathbb{D}}$, entonces existe $g \in H(\overline{\mathbb{D}})$ tal que:*

1. $f = \frac{1}{2}[1+\cos(\pi\cos\pi g)]$ *y* $|g(0)| \leq 3+2|f(0)|$.
2. $|g(z)| \leq |g(0)| + \frac{p}{L(1-p)}$ $\quad \forall |z| < p$*, siendo L la constante de Landau y* $0 < p < 1$.

Demostración. 1. Se tiene por el lema 2.1 que $2f-1 = \cos\pi G$ con $G \in H(\overline{\mathbb{D}})$. Ahora por el lema anterior 3.2 existe $b \in \mathbb{C}$ tal que

$$\cos\pi b = 2f(0)-1 \text{ y } |b| \leq 1+|2f(0)-1| \leq 2+2|f(0)|.$$

Ahora bien, por el lema 3.1 tenemos que $b = \pm G(0)+2k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Consideramos $F := \pm G + 2k$ y tenemos que $F \in H(\overline{\mathbb{D}})$, $2f-1 = \cos\pi F$ y $F(0) = b$. Como F omite los valores enteros, ya que si no f tomaría los valores 0 y 1, aplicando de nuevo el lema 2.1 existe $h \in H(\overline{\mathbb{D}})$ con $F = \cos\pi h$. Ahora de nuevo por el lema anterior 3.2 existe $a \in \mathbb{C}$ tal que

$$\cos\pi a = b \text{ y } |a| \leq 1+|b| \leq 3+2|f(0)|.$$

Como $\cos\pi a = b = F(0) = \cos\pi h(0)$, podemos considerar la función $g = \pm h + 2m$ que cumple $g \in H(\overline{\mathbb{D}})$, $g(0) = a$ y $F = \cos\pi g$. De esta forma tenemos la función g del enunciado.

2. Procediendo como en el lema 2.2, se deduce que $g(\mathbb{D})$ no contiene discos de radio 1. Vamos a probar que

$$|g'(z)| \leq \frac{1}{L(1-p)}, \quad \text{si } |z| \leq p < 1,$$

Podemos suponer que $g'(0) \neq 0$, ya que si no la desigualdad es trivial. Como $|z| \leq p < 1$, tenemos que $\overline{D}(z, 1-p) \subset \mathbb{D}$. Definimos

$$h(w) = \frac{g(z+(1-p)w)}{(1-p)g'(z)};$$

como

$$w \in \overline{\mathbb{D}} \Rightarrow |(1-p)w| \leq 1-p \Rightarrow z+(1-p)w \in \mathbb{D},$$

se deduce que $h \in H(\overline{\mathbb{D}})$. Además es inmediato que $h'(0) = 1$ y como

$$h(\overline{\mathbb{D}}) \subset \frac{1}{(1-p)|g'(z)|} g(\overline{\mathbb{D}}),$$

sabemos que $h(\mathbb{D})$ no contiene discos de radio $(1-p)^{-1}|g'(z)|^{-1}$. Según las definiciones de la sección 1.4,

$$\lambda(h) \leq (1-p)^{-1}|g'(z)|^{-1} \text{ y por tanto } L \leq (1-p)^{-1}|g'(z)|^{-1},$$

como queríamos probar. Así que para todo z tal que $|z| \leq p$

$$|g(z)| - |g(0)| \leq |g(z)-g(0)| \leq \int_0^z |g'(t)|\,dt \leq |z| \max\{|g'(t)|, t \in (0,z)\} \leq \frac{p}{L(1-p)}. \qquad \square$$

Gracias a esta proposición obtenemos de forma muy directa el teorema de Schottky.

Teorema 3.4 (Teorema de Schottky)**.** *Sea $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$ tal que que $f(z) \neq 0,1$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$ y $|f(0)| \leq r$, entonces se tiene*

$$|f(z)| \leq \exp\left[\pi \exp \pi \left(3 + 2r + \frac{p}{L(1-p)}\right)\right] \quad \forall |z| \leq p, \quad p \in (0,1).$$

Demostración. Tenemos la siguiente desigualdad:

$$|\cos w| = \left|\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right| \leq \frac{|e^{iw}| + |e^{-iw}|}{2} = \frac{e^{\operatorname{Re} w} + e^{-\operatorname{Re} w}}{2} \leq e^{|\operatorname{Re} w|} \leq e^{|w|},$$

que implica que $\frac{1}{2}|1 + \cos w| \leq e^{|w|}$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Ahora por la proposición anterior 3.3 tenemos que

$$|f(z)| \leq \exp[\pi \exp \pi |g(z)|] \leq \exp\left[\pi \exp \pi \left(3 + 2|f(0)| + \frac{p}{L(1-p)}\right)\right].$$

Si consideramos $|f(0)| \leq r$, se tiene directamente el teorema. □

Destaquemos que el conjunto que se omite en el enunciado es $\{0,1\}$ por simple normalización. Si f omitiera a y b, bastaría considerar la función $(f-a)/(b-a)$ que omitiría $\{0,1\}$. Así que el resultado es más general de lo que pueda parecer. Además este supone una mejora sustancial de varios resultados, en particular generaliza el teorema pequeño de Picard. Vamos a ver la generalización de Landau del teorema pequeño de Picard.

Teorema 3.5. *Existe una función $R : \mathbb{C}\backslash\{0,1\} \longrightarrow (0,\infty)$ para la cual no existe ninguna función $f \in H(\overline{D}(0,R(a)))$ tal que*

1. *$f(0) = a$.*
2. *$f'(0) = 1$.*
3. *f omite los valores 0 y 1.*

Demostración. Vamos a considerar la función

$$R(a) := 3\exp\left[\pi \exp \pi \left(3 + 2|a| + \frac{1}{L}\right)\right].$$

Supongamos que existe la función f del teorema, como $f(0) = a$ y $f'(0) = 1$ su desarrollo en serie de potencias tiene que ser $f(z) = a + z + ... \in H(\overline{D}(0,R(a)))$. Ahora bien, f omite los valores 0 y 1, entonces $g(z) := f(R(a)z) = a + R(a)z + ... \in H(\overline{\mathbb{D}})$ omite también esos valores. Aplicando el Teorema de Schottky a la función g tenemos que

$$\text{máx}\{|g(z)|, |z| \leq \frac{1}{2}\} \leq \exp\left[\pi \exp \pi \left(3 + 2|a| + \frac{1}{L}\right)\right] = \frac{R(a)}{3}.$$

Por otra parte gracias a la fórmula de Cauchy para las derivadas tenemos que

$$R(a) = |g'(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{g(z)}{z^2}\,dz\right| \leq \frac{1}{2}\max_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{|g(z)|}{|z|^2} = 2\,\text{máx}\{|g(z)|, |z| \leq 1/2\}.$$

Por lo tanto llegamos a una contradicción, así que no existe la función f que hemos supuesto. □

De este teorema de Landau se deduce el teorema pequeño de Picard de la siguiente manera: si $f \in H(\mathbb{C})$ es una función no constante elegimos un punto $w \in \mathbb{C}$ tal que $f'(w) \neq 0$ y $a := f(w) \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Entonces

$$h(z) := f\left(w + \frac{z}{f'(w)}\right) = a + z + ... \in H(\mathbb{C})$$

cumple que $h(0) = a$ y $h'(0) = 1$, luego por el teorema anterior h necesariamente toma en $\overline{D}(0,R(a))$ los valores 0 o 1 y f también. Así que efectivamente se tiene el teorema pequeño de Picard: toda función entera no constante omite a lo sumo un valor.

El teorema de Schottky tiene más aplicaciones, en particular lo usaremos en el siguiente capítulo para probar los teoremas de Montel.

Capítulo 4

Teorema grande de Picard

4.1. Teorema de Montel

Los teoremas de Montel nos dan condiciones bajo las cuales una familia de funciones holomorfas es normal. Vamos a ver las dos versiones, la clásica que trata con familias localmente acotadas y la versión que trata con familias de funciones que omiten dos valores.

Antes de comenzar con los resultados propios de la sección vamos a definir algunos conceptos sobre familias acotadas y familias normales. Vamos a considerar G un conjunto abierto de $\mathbb{C}$.

Definición. Una familia $\mathscr{F} \subset H(G)$ se dice que es normal en G si toda sucesión de funciones en $\mathscr{F}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de G.

Definición. Una familia $\mathscr{F} \subset H(G)$ se dice que es acotada en G si existe $M > 0$ tal que $\|f\|_G \leq M$ para cada $f \in \mathscr{F}$.

Definición. Una familia $\mathscr{F} \subset H(G)$ es localmente acotada en G si para cada $z \in G$ existe un entorno $U \subset G$ de z tal que $\mathscr{F}$ está acotada en U.

Es obvio que si una familia está acotada entonces estará localmente acotada, no obstante, el recíproco no es cierto. Consideramos

$$f_n(z) = nz^n \in H(\mathbb{D}), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Tenemos que (f_n) está localmente acotada en $\mathbb{D}$, sin embargo no es acotada en $\mathbb{D}$.

De hecho, se cumple que una familia $\mathscr{F}$ es localmente acotada en G si y solo si $\mathscr{F}$ está acotada en todo compacto de G.

Proposición 4.1. *Sea $\mathscr{F} \subset H(G)$ una familia normal en G entonces $\mathscr{F}$ está localmente acotada en G.*

Demostración. Para probar que $\mathscr{F}$ está localmente acotada tenemos que ver que

$$\sup\{\|f\|_K, f \in \mathscr{F}\} < \infty \text{ para todo } K \text{ conjunto compacto de } G\,.$$

Supongamos que existe un compacto L para el que $\sup\{\|f\|_L, f \in \mathscr{F}\} = \infty$, entonces existe una sucesión de funciones $(f_n) \in \mathscr{F}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_L = \infty$. Pero esta sucesión no puede tener una subsucesión que converja uniformemente sobre compactos de G, ya que entonces su límite $f \in H(G)$ cumpliría

$$\|f\|_L \geq \|f_n\|_L - \|f - f_n\|_L \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando límites llegamos a contradicción con que $\mathscr{F}$ es una familia normal, luego no puede existir L y por tanto $\mathscr{F}$ está localmente acotada en G. $\square$

A continuación vamos a presentar tres resultados clásicos sin demostración.

El teorema de Montel nos muestra que en particular una familia es normal si y solo si está localmente acotada.

Teorema 4.2 (Teorema de Montel). *Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en G. Si (f_n) está localmente acotada en G, entonces tiene una subsucesión que converge sobre compactos en G, luego (f_n) es normal.*

El teorema de Vitali se sigue del teorema de Montel y del principio de prolongación analítica. Nos da un criterio para estudiar la convergencia sobre compactos de una determinada sucesión de funciones.

Teorema 4.3 (Teorema de Vitali). *Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y (f_n) una sucesión de funciones holomorfas localmente acotada en G, consideramos el conjunto*

$$A := \{w \in G, \exists \lim_{n\to\infty} f_n(w) \in \mathbb{C}\}.$$

Si A tiene puntos de acumulación en G entonces (f_n) converge uniformemente sobre compactos de G.

Usaremos el criterio de Hurwitz como resultado auxiliar. El criterio viene dado por la siguiente proposición.

Proposición 4.4 (Criterio de Hurwitz). *Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y sea una sucesión (f_n) que converge sobre compactos en G a f, con $f_n, f \in H(G)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si ninguna de las f_n se anula en G y f no es la función nula, entonces f no se anula en G.*

Ahora gracias al teorema de Schottky vamos a desarrollar una mejora del teorema de Montel aplicada a las familias de funciones holomorfas que omiten dos valores. Esta mejora del teorema nos ayudará a demostrar en la siguiente sección el teorema grande de Picard.

Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$, vamos a considerar la familia de funciones

$$\mathscr{F} := \{f \in H(G),\ f \text{ omite los valores 0 y 1}\}.$$

Fijando un $w \in \mathbb{C}$ y un $r \in (0,\infty)$ definimos la siguiente subfamilia de $\mathscr{F}$

$$\mathscr{F}(w,r) := \{f \in \mathscr{F}, |f(w)| \leq r\}.$$

Con estas notaciones se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.5. *Para todo $w \in \mathbb{C}$ existe un entorno de w en el que $\mathscr{F}(w,r)$ está acotada.*

Demostración. Tomemos $t > 0$ tal que $\overline{D}(w,2t) \subset G$. Dada $f \in \mathscr{F}(w,r)$, definimos $g(z) = f(w+2tz)$. Entonces,

$$g \in H(\overline{\mathbb{D}}), \quad g(z) \neq 0,1\ \forall z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad |g(0)| = |f(w)| \leq r.$$

Aplicando el teorema de Schottky (teorema 3.4) a la función g con $p = \frac{1}{2}$, se deduce que, si $|z| \leq \frac{1}{2}$,

$$|f(w+2tz)| = |g(z)| \leq \exp\left(\pi \exp\left(3 + 2r + \frac{1}{L}\right)\right).$$

Es decir,

$$|f| \leq \exp\left(\pi \exp\left(3 + 2r + \frac{1}{L}\right)\right) \quad \text{en } \overline{D}(w,t).$$

Luego $\mathscr{F}(w,r)$ está acotada en $\overline{D}(w,t)$. □

Fijamos ahora un $p \in G$ y consideramos la subfamilia de $\mathscr{F}(w,r)$ dada por

$$\mathscr{F}(p,1) = \mathscr{F}_1 := \{f \in \mathscr{F}, |f(p)| \leq 1\}..$$

Lema 4.6. *La familia $\mathscr{F}_1$ está localmente acotada en G.*

Demostración. Sea

$$U := \{w \in G, \mathscr{F}_1 \text{ es acotada en un entorno de w}\}.$$

Gracias al lema 4.5 sabemos que necesariamente $p \in U$. Por la definición, U es un subconjunto abierto de G. Vamos a suponer que $U \neq G$. No es difícil demostrar que entonces $\partial U \cap G \neq \emptyset$. Tomemos $w \in \partial U \cap G$. Por el lema 4.5 tenemos que existe

$$(f_n) \in \mathscr{F}_1 \text{ tal que } f_n(w) \xrightarrow{n \to +\infty} \infty.$$

Consideramos ahora $g_n = 1/f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, gracias a las condiciones que cumple f_n tenemos que $g_n \in \mathscr{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(w) = 0$, existe $r > 0$ tal que $|g_n(w)| \leq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que por el lema 4.5 (g_n) es acotada en un entorno de w, $D(w,t)$ para cierto $t > 0$. Por el teorema de Montel (4.2), existe una subsucesión g_{n_k} que converge uniformemente sobre compactos de $D(w,t)$ a una función $g \in H(D(w,t))$. Ahora bien, como las funciones g_n no se anulan nunca en $D(w,t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por continuidad $g(w) = 0$, por el criterio de Hurwitz (proposición 4.4) necesariamente $g \equiv 0$. Entonces como $f_n = 1/g_n$ en $D(w,t)$,

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z) = \infty \quad \text{para todo } z \in D(w,t).$$

Luego llegamos a contradicción ya que como $w \in \partial U$ entonces hay puntos de U en $D(w,t)$. Así que $U = G$ y por tanto $\mathscr{F}_1$ está localmente acotada en G. □

Con estos resultados podemos enunciar una versión del teorema de Montel aplicada a la familia de funciones que estamos estudiando. En este teorema vamos a ampliar la definición de familia normal, incluyendo en la definición las subsucesiones que convergen uniformemente a ∞.

Teorema 4.7. *La familia $\mathscr{F}$ es normal (en sentido amplio) en G.*

Demostración. Tenemos que probar que toda sucesión en $\mathscr{F}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de G. Sea $(f_n) \in \mathscr{F}$, si (f_n) tiene subsucesiones en $\mathscr{F}_1$, el resultado es claro por el lema 4.6, ya que si la subsucesión esta localmente acotada en G, por el teorema de Montel (teorema 4.2) la subsucesión tiene otra subsucesión que converge uniforme sobre compactos de G.
Si solo un número finito de f_n está en $\mathscr{F}_1$, entonces $|f_n(p)| > 1$ para un número infinito de f_n, luego

$$1 > \left| \frac{1}{f_n(p)} \right| \Rightarrow 1/f_n \in \mathscr{F}_1 \text{ para un número infinito de } f_n.$$

Ahora, al estar $\mathscr{F}_1$ localmente acotada en G por el lema 4.6, elegimos de entre las $1/f_n \in \mathscr{F}_1$ una subsucesión (g_{n_k}) que converge uniformemente sobre compactos de G. Notar que $(1/g_{n_k}) \subset (f_n)$. Llamamos g al límite de (g_{n_k}). Si este no se anula en G entonces $(1/g_{n_k})$ converge uniformemente sobre compactos de G a $1/g$ y se tiene el resultado. Si por el contrario $g(w) = 0$ para algún $w \in G$, entonces como g_n no se anula en G para ningún $n \in \mathbb{N}$ por el criterio de Hurwitz (proposición 4.4), $g \equiv 0$ y por tanto $1/g_n$ converge uniformemente sobre compactos de G a ∞. □

Gracias a este teorema se puede llegar a una versión del teorema de Vitali sin tener que exigir que la sucesión este localmente acotada.

Teorema 4.8. *Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en G tales que no toman los valores a, $b \in \mathbb{C}$. Supongamos que existe $\lim f_n(w) \in \mathbb{C}$ para un conjunto de $w \in G$ que tiene algún punto de acumulación en G. Entonces f_n converge uniformemente sobre compactos de G.*

Demostración. Podemos tomar como en otras ocasiones $a = 0$ y $b = 1$ sin pérdida de generalidad. Entonces $(f_n) \in \mathscr{F}$ y por el teorema 4.7 es una familia normal en el sentido amplio; pero como $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(w)$ para algunos $w \in G$, será normal en el sentido restringido. Luego está localmente acotada en G, por lo tanto aplicando el teorema de Vitali (teorema 4.3), (f_n) converge uniformemente sobre compactos de G. □

4.2. Teorema grande de Picard

Hasta ahora hemos estado trabajando con funciones holomorfas sin preocuparnos mucho de las singularidades. Hemos visto resultados con singularidades de tipo polo, funciones meromorfas, y con singularidades evitables, sin embargo no hemos visto nada sobre el rango de funciones cuando estas tienen una singularidad esencial. Un resultado ya conocido que trata con singularidades esenciales es el teorema de Casorati-Weierstrass. El teorema sostiene que si f es una función holomorfa con una singularidad esencial en $z = z_0$ entonces $f(V \setminus \{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$ siendo V cualquier entorno de z_0.

En esta última sección vamos a ver el teorema grande de Picard. El teorema grande de Picard afirma que alrededor de una singularidad esencial, una función holomorfa toma infinitas veces cada valor complejo, con a lo sumo una excepción. Este resultado extiende al teorema de Casorati-Weierstrass y supone en cierta manera una generalización del teorema pequeño de Picard, como veremos después.

Teorema 4.9 (Teorema grande de Picard)**.** *Sea c una singularidad aislada esencial de una función f holomorfa. Entonces en todo entorno de c, f toma todo número complejo como valor, con una posible excepción, infinitas veces.*

Demostración. Tomamos $c = 0$ sin pérdida de generalidad. Supongamos que existe $R > 0$ tal que el conjunto $\{f(z), 0 < |z| < R\}$ no contiene dos números complejos y llegaremos a contradicción.Vamos a suponer, como hemos hecho en otras ocasiones, que esos números son el 0 y el 1. Consideramos ahora la sucesión de funciones

$$f_n : D(0,R) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{dadas por } f_n(z) := f(z/n) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien, $f_n \in H(D(0,R) \setminus \{0\})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y f_n no toma los valores 0 y 1 para ningún $n \in \mathbb{N}$, luego podemos aplicar el teorema 4.7 y tenemos que (f_n) es normal en sentido amplio en $D(0,R) \setminus \{0\}$. Así que existe una subsucesión (f_{n_k}) que converge uniformente en el compacto $\partial D(0,R/2)$ a ϕ, donde o bien $\phi \in H(D(0,R) \setminus \{0\})$ o bien $\phi \equiv \infty$.

Si ϕ es holomorfa entonces considerando $M := \text{máx}\{|\phi(z)|, |z| = R/2\}$ tenemos que para cada $z \in D(0,R/2)$

$$\left| f\left(\frac{z}{n_k}\right) \right| = |f_{n_k}(z)| \leq |f_{n_k}(z) - \phi(z)| + |\phi(z)| \leq 2M, \quad \text{para } n_k \text{ suficientemente grande.}$$

Luego $|f(z)| \leq 2M$ para todo $z \in \partial D(0,R/2n_k)$ con n_k suficientemente grande. Así que por el principio del módulo máximo

$$|f(z)| \leq 2M, \quad \text{en toda corona de la forma } R/(2n_{k+1}) \leq |z| \leq R/(2n_k).$$

Por tanto tomando la unión de todas las coronas tenemos que f está acotada en un entorno del cero, luego $z = 0$ debe ser una singularidad evitable y llegamos a una contradicción, por tanto $\phi \equiv \infty$.

Si $\phi \equiv \infty$, entonces la subsucesión $1/f_{n_k}$ converge uniformemente a 0 en $\partial D(0,R/2)$. Procediendo de manera análoga se deduce que $1/f$ está acotada en un entorno de 0 y llegamos de nuevo a una contradicción.

Por lo tanto a lo sumo un punto no está en la imagen de cada entorno de la singularidad esencial. Notemos que la propiedad de que los valores se toman infinitas veces es obvia ya que si un valor solo se tomara un número finito de veces siempre podríamos considerar un entorno de c más pequeño donde la función no tomara ese valor. □

Si imponemos la condición de que f sea entera podemos llegar a una versión más general del teorema pequeño de Picard.

Corolario 4.10. *Sea f una función entera no constante.*

1. *Si f es un polinomio, f toma un número finito de veces cada valor de $\mathbb{C}$.*

2. *Si f no es un polinomio, entonces f toma todo valor, con una única posible excepción, un número infinito de veces.*

Demostración.

1. Si $f(z)$ es un polinomio no constante, aplicando el teorema fundamental del álgebra al polinomio $f(z)-w$ para cada $w \in \mathbb{C}$, como el grado de $f-w$ es al menos uno, tenemos que $f-w$ tiene por lo menos una raíz en $\mathbb{C}$ para cada $w \in \mathbb{C}$, y como máximo tantos como su grado.

2. Si f no es un polinomio, consideramos la función $g(z) := f(1/z)$ que tiene una singularidad esencial en $z=0$ ya que f la tiene en ∞. Así que aplicando el teorema grande de Picard se tiene el resultado.

$\square$

Bibliografía

[1] M. BONK, *On Bloch's constant*, Proceedings of the American Mathematical Society, **110** (1990), 889–894.

[2] J. B. CONWAY, *Functions of one complex variable*, Graduate Texts in Mathematics 11, Springer, 1973.

[3] E. DE AMO, *Lema de Schwarz. Automorfismos conformes del disco unidad. Isomorfismos conformes entre discos y semiplanos*, Universidad de Almería, `https://w3.ual.es/~edeamo/capitulo8_ac/vc0802.pdf` (visitado el 27/06/2018)

[4] B. FINE Y G. ROSENBERGER, *The Fundamental Theorem of Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1997.

[5] C. IVORRA CASTILLO, *Funciones de variable compleja con aplicaciones a la teoría de números*, Universitat de Valencia, `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Varcom.pdf` (visitado el 27/06/2018).

[6] C. D. MINDA, *Bloch constants*, Journal d'Analyse Mathématique, **41** (1982), 54–84.

[7] R. REMMERT, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Graduate Texts in Mathematics 172, Springer, 1998.

[8] A. SUÁREZ GRANERO, *Variable compleja y análisis funcional*, Universidad complutense de Madrid , `http://www.mat.ucm.es/~granero/VCAF/LecVCAF.pdf` (visitado el 27/06/2018).

[9] H. YANAGIHARA, *On the locally univalent Bloch constant*, Journal d'Analyse Mathématique, **65** (1995), 1–17.