Geometría Riemanniana en dimensión baja. Riemannian Geometry in low dimension.

Rodrigo Morón Sanz
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Enrique Artal Bartolo
28 de junio de 2018

Prólogo

El trabajo de fin de grado presentado a continuación lleva el título de "Geometría Riemanniana en dimensión baja: ¿En qué consiste?". La base de esta investigación ha consistido en encontrar una caracterización de las cónicas en $\mathbb{P}^2$. Este trabajo ha sido escrito como parte de los requisitos de graduación para el programa de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. El periodo de investigación y redacción de este trabajo de fin de grado ha durado desde enero hasta junio de 2018.

El proyecto se llevó a cabo bajo petición mía, ya que tenía interés en conocer en que consistía la geometría Riemanniana y aplicarla a un caso práctico. La pregunta principal del trabajo fue formulada conjuntamente con mi tutor, Enrique Artal. El proceso de investigación ha sido tedioso, pero realizar un estudio exhaustivo nos ha permitido responder a la pregunta formulada al inicio. Afortunadamente, mi tutor siempre ha estado disponible y dispuesto a ayudarme con todas mis cuestiones.

Me gustaría, por tanto, dar las gracias Enrique Artal por su excelente orientación y soporte durante todo el proceso de realización de mi trabajo. También me gustaría dar las gracias a todos los demás profesores que han atendido dudas puntuales relacionadas con nuestro trabajo, ya que sin su cooperación no habría sido capaz de llevar a cabo este proyecto.

A todos mis compañeros de la universidad: me gustaría daros las gracias por vuestra increíble cooperación. Ha sido un placer poder debatir con vosotros las ideas sobre mi investigación. También me ha ayudado discutir sobre varios asuntos de mi TFG con mis amigos, en especial una de ellos, Celia, si alguna vez perdí el interés, me mantuviste motivado. Mis padres se merecen un especial agradecimiento: vuestros consejos y apoyo me han sido, como siempre, de gran ayuda, además, aguantarme cuando llevo todo el día la cabeza metida en cosas de matemáticas sé que no es fácil, muchas gracias.

Espero que disfrutéis de la lectura.

Rodrigo Morón

Zaragoza, 28 de junio de 2018.

Summary

The gaol of this work is characterize the smooth conics in the complex projective plane from a differential geometry point of view. The first question that arises is how these conics are embedded in $\mathbb{P}^2$ and how they inherit a metric from the projective plane. As a previous step I introduce the complex projective space complex which is endowed with a hermitian metric. The work is divised into three parts. The first two will introduce us concepts necessary to work with and the last will deal with the actual goal of the work. Next I will explain what is in each of them.

In the first part, we begin by briefly defining what is the tensor product of any two vector spaces in order to find a natural isomorphism between the space of bilinear forms and the tensor product of the dual of a vector space with itself and, in addition, defining what are the alternate forms, as a subspace of the latter. This will allow us to express Hermitian forms as elements in these spaces, something that allows us to obtain comfortable expressions, which behave quite naturally. In turn, we will show how a complex vector space can be seen as a real one, something that will be useful in order to characterize the Hermitian forms, and to work with the tangent spaces of the manifolds in the next chapter. Finally we will define what a sesquilineal form is, as a previous step to consider hermitian forms, We define a Hermitian scalar product and we present some examples of hermitian forms written as a linear combination of tensors and alternating forms.

In the second chapter we will introduce the concept of derivations in a real manifold in order to define its tangent space. Once done, we will briefly introduce the concepts of 1-forms, 2-forms and fields. Subsequently, we extend these concepts to analytical manifolds. In particular, we will compare real and complex tangent spaces. With these concepts we can define what is a Hermitian product in an analytical manifold, express it as an element in the tensor product of the dual the complex tangent space and its conjugate (which is an exterior product if we consider only the real structure). Its real part is a Riemannian metric and the imaginary one an alternate 2-form. To finish this chapter we will define the complex projective space which is the ambient space of the objects we are going to study: we will present its topological and analytic manifold structures. The projective line is homeomorphic to the 2-sphere and $\mathbb{P}^2$ can be expressed as the with the disjoint union of a copy of $\mathbb{C}^2$ (open and dense) with the projective line of infinity (closed).

The third and final chapter will collect all the results of our work. Once the terrain is prepared with the previous chapters, we will equip the projective space with a metric, the Fubini-Study metric, to later restrict it to the projective line, projective plane and to the conics within the latter. This metric is defined by a hermitian metric in the vector space defining the projective space.

Proposition 1. *The riemannian metric of the projective line (obtained as the real part of the hermitian metric) is isometric to the riemannian metric of a sphere of radius $\frac{1}{2}$ in $\mathbb{R}^3$.*

This is done studying the metric in a chart. As a consequence, with the distance defined by the infimum of lenghts of rectifiable paths in $\mathbb{P}^1$, this space has $\frac{\pi}{2}$ as diameter, and moreover, for any $P \in \mathbb{P}^1$, $\exists! Q \in \mathbb{P}^1$ such that $d(P, Q) = 1$. If we consider the vector lines in $\mathbb{C}^2$ defined by P, Q, the distance is the angle (in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) of these lines, with respect to the scalar product.

This also can be extended to the projective plane, and gives us the following interesting result, the diameter of the projective plane seen as metric space is $\frac{\pi}{2}$ and even more, the set of elements where it is reached the maximum diameter is a projective line and is the space orthogonal to the one generated by a point of the projective plane seen as a vector line. This is a consequence of the previous results, once one proves that geodesics are contained in projective lines.

The rest of the chapter is devoted to the geometric study of smooth conics in $\mathbb{P}^2$. It is well-known that there exists a change of coordinates in $\mathbb{P}^2$ sending a smooth conic to the standard conic $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. This is no more true if we admit only change of coordinates preserving the hermitian metric.

Proposition 2. *Let $C \subset \mathbb{P}^2$ be a smooth conic. Then ther is a change of coordinates preserving the hermitian metric sending C to*

$$C_{r,s} := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 | x_0^2 + r^2 x_1^2 + s^2 x_2^2 = 0\}$$

where $0 < s \leq r \leq 1$. Moreover if one can send C_{r_1,s_1} to C_{r_2,s_2} (with the previous conditions for r_i, s_i), then $r_1 = r_2$ and $s_1 = s_2$.

In particular, if one is interested in the metric properties of a smooth conic, it is enough to study $C_{r,s}$ as above. Algebraic parametrizations of the conics provide isothermal charts, for which it is easy to find invariants as Gauss curvature.

Theorem 3. *Let $C_{r,s}$ a smooth conic as above. Then, its Gauss curvature has the following properties.*

- *If $s = r = 1$, we have constant curvature $K = 2$.*
- *If $s = r < 1$, we have $K_{\max} = -2s^2 + 4$ in $[-i(y_0^2 s^2 + y_1^2) : y_0^2 s^2 - y_1^2 : 2s y_0 y_1]$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, and $K_{\min} = \frac{2(2s^4-1)}{s^4}$ at the points $[0 : \pm i : 1]$.*
- *If $s < r = 1$, we have $K_{\max} = -2s^4 + 4$ at the points $[\pm i : 0 : 1]$ and $K_{\min} = \frac{2(2s^2-1)}{s^2}$ in $[s^2 x_0^2 - x_1^2 : i(x_0^2 s^2 + x_1^2) : 2x_0 x_1]$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*
- *If $s < r < 1$, we have $k_{\max} = -\frac{2\left(s^4 - 2r^2\right)}{r^2}$ at the points $[r : \pm i : 0]$ and $K_{\min} = \frac{2\left(2r^2 s^2 - 1\right)}{r^2 s^2}$ at the points $[0 : \pm is : r]$. Also in this case, we have two saddle points in $[\pm is : 0 : 1]$ where $K = -\frac{2\left(r^4 - 2s^2\right)}{s^2}$.*

One can check that the extremal values of the curvature can be used to recover r, s. Note also that the case $r = s = 1$ is quite special as they have the same riemannian metric as a sphere of radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in $\mathbb{R}^3$, in particular the conic with equation $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ is homothetic to the projective line. As a final result, we prove that two smooth conics are homothetic if and only if they are isometric.

Índice general

Prólogo **iii**

Summary **v**

1. Breve introducción al algebra tensorial y formas hermíticas **1**
1.1. Álgebra tensorial 1
1.2. Espacios vectoriales complejos 3
1.3. Formas sesquilineales y hermitianas 4

2. Conceptos necesarios de geometría diferencial y plano proyectivo complejo **7**
2.1. Derivaciones, campos y derivaciones en $\mathbb{C}^n$ 7
2.2. Variedades analíticas 9
2.3. El espacio proyectivo complejo 10

3. Rectas y cónicas en el espacio proyectivo **13**
3.1. Métrica hermitiana sobre la recta y el plano proyectivo complejo 13
3.2. Curvas algebraicas 17
3.3. Caracterización de las cónicas en $\mathbb{P}^2$ 17

Bibliografía **23**

Anexo A **25**
A.1. Curvatura 25
A.2. Curvatura máxima/mínima, caso $s = r = 1$ 25
A.3. Curvatura máxima/mínima, caso $s \neq r = 1$ 25
A.4. Curvatura máxima/mínima, caso $s = r$ 26
A.5. Curvatura máxima/mínima, caso $s \neq r \neq 1$ 27

Anexo B **29**
B.1. Homotecias 29

Capítulo 1

Breve introducción al algebra tensorial y formas hermíticas

El objetivo del trabajo va a ser estudiar las rectas y cónicas dentro del plano proyectivo complejo con una métrica hermitiana fija. En este capítulo vamos a comenzar con una breve introducción al álgebra tensorial y mostrar su relación con las formas sesquilineales y hermíticas. Veremos que podremos verlas como tensores y 2-formas alternadas. Esta interpretación nos permitirá trabajar más cómodamente.

1.1. Álgebra tensorial

Sean V, W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Queremos encontrar un espacio vectorial que *parametrice* las aplicaciones bilineales de V, W.

Definición 1.1. El *producto tensorial* de V, W es un par (U, p) donde U es un espacio vectorial y $p : V \times W \to U$ es una aplicación bilineal tal que $\forall F : V \times W \to H$ aplicación bilineal en un espacio vectorial H existe una única aplicación lineal $\tilde{F} : U \to H$ que satisface el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "F"] & \\ U \arrow[r, dashed, "\tilde{F}"'] & H \end{tikzcd}$$

El siguiente lema es sencillo y garantiza la unicidad del producto tensorial.

Lema 1.2. *Si el producto tensorial de dos espacios vectoriales existe, es único. De manera más precisa, sean (U_i, p_i), $i = 1, 2$, dos productos tensoriales de V, W. Entonces, existe un único isomorfismo $\Phi : U_1 \to U_2$ que satisface el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} & V \times W \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ U_1 \arrow[rr, dashed, "\Phi"'] & & U_2 \end{tikzcd}$$

Queda por ver que existe dicho producto tensorial. Para ello vamos a construir un espacio vectorial T que no es de dimensión finita. Una base de este espacio vectorial está formada por los elementos de $V \times W$; los elementos de T son las combinaciones lineales finitas de elementos $\{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$. Dentro de T vamos a considerar el subespacio vectorial R engendrado por los siguientes tipos de elementos

$$
\begin{aligned}
&(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w), && v_1,v_2\in V, w\in W,\\
&(v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2), && v\in V, w_1,w_2\in W,\\
&(tv,w)-t(v,w),(v,tw)-t(v,w), && v\in V, w\in W, t\in\mathbb{K}.
\end{aligned}
$$

Vamos a denotar $V\otimes_{\mathbb{K}} W := T/R$ (normalmente omitiremos el subíndice); además la clase de equivalencia de (v,w) en $V\otimes W$ se denotará como $v\otimes w$. Vamos a definir la aplicación $p : V\times W\to V\otimes W$ como $p(v,w) := v\otimes w$. Los generadores de R se han elegido para que esta aplicación sea bilineal, ya que estos se traducen en

$$
\begin{aligned}
&(v_1+v_2)\otimes w = v_1\otimes w + v_2\otimes w, && v_1,v_2\in V, w\in W,\\
&v\otimes(w_1+w_2) = v\otimes w_1 + v\otimes w_2, && v\in V, w_1,w_2\in W,\\
&(tv)\otimes w = t(v\otimes w) = v\otimes(tw), && v\in V, w\in W, t\in\mathbb{K}.
\end{aligned}
$$

Sea H otro espacio vectorial y sea $F : V\times W\to H$ una aplicación bilineal. Definimos primero una aplicación $\hat{F} : T\to H$ tal que $\hat{F}(v,w) = F(v,w)$; esta aplicación existe y es única por definir los elementos de $V\times W$ una base de T. Además, la bilinealidad de F implica que $R\subset \ker\hat{F}$. Esto permite definir una aplicación $\tilde{F} : V\otimes W\to U$ para la que se satisface el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(v,w) \arrow[d, mapsto] & T \arrow[d] \arrow[dr, "\hat{F}"] & \\
v\otimes w & V\otimes W \arrow[r, "\tilde{F}"'] & H
\end{tikzcd}
$$

Es fácil ver que $\tilde{F}$ es la única aplicación (lineal) que satisface el diagrama para p y F, por lo que $(V\otimes W,p)$ cumple las propiedades de producto tensorial. Habitualmente diremos simplemente que $V\otimes W$ es el producto tensorial de V,W.

Proposición 1.3. *Sean V,W dos espacios vectoriales de dimensión finita.*

(1) *Sea $(v_1,\ldots,v_n)$ una base de V y sea $(w_1,\ldots,w_m)$ una base de W. Entonces, la familia $(v_i\otimes w_j)_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$ es una base de $V\otimes W$; en particular,* $\dim V\otimes W = \dim V\dim W$.

(2) *Hay un isomorfismo natural $V^*\otimes W\to \mathrm{Hom}(V,W)$ determinado por la aplicación bilineal $\Phi : V^*\times W\to\mathrm{Hom}(V,W)$ definida como sigue. Sean $\alpha\in V^*$, $w\in W$, entonces $\Phi(\alpha,w) : V\to W$ es el homomorfismo*

$$\Phi(\alpha,w)(v) := \alpha(v)w, \qquad v\in V.$$

(3) *Hay un isomorfismo natural $V^*\otimes W^*\to (V\otimes W)^*$ determinado por la aplicación bilineal $\Phi : V^*\times W^*\to (V\otimes W)^*$ definida como sigue. Sean $\alpha\in V^*$, $\beta\in W^*$, entonces $\Phi(\alpha,\beta) : V\otimes W\to\mathbb{K}$ es el homomorfismo*

$$\Phi(\alpha,\beta)(v\otimes w) := \alpha(v)\beta(w), \qquad v\in V, w\in W$$

(bien definido por las propiedades del producto tensorial).

(4) *Hay un isomorfismo natural $V^*\otimes W^*\to\mathrm{Bil}(V,W)$.*

Demostración. (1) + (2) Por las relaciones en el producto tensorial, es fácil ver que la familia $(v_i\otimes w_j)_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$ es un sistema generador de $V\otimes W$. En particular, $\dim V\otimes W\leq\dim V\dim W$.

Sea $\mathrm{Bil}(V,W)$ el espacio vectorial de las formas bilineales de V,W. Por la definición de producto tensorial, tenemos una aplicación lineal $\Phi : \mathrm{Bil}(V,W)\to (V\otimes W)^*$ (el superíndice

$*$ indica espacio dual). Esta aplicación es obviamente inyectiva, por lo que $\dim V \dim W = \dim \mathrm{Bil}(V, W) \leq \dim(V \otimes W)^* = \dim V \otimes W$. Como las dimensiones coinciden, el sistema generador es base. En particular tenemos un isomorfismo natural $\mathrm{Bil}(V, W) \cong (V \otimes W)^*$. El resto de los resultados son sencillos. $\square$

Observación 1.4. Hay un isomorfismo natural $V \otimes W \to W \otimes V$ tal que si $\mathbf{v} \in V$ y $\mathbf{w} \in W$, se tiene que $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \mapsto \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$. En particular identificando $\mathrm{Bil}(V, V) \equiv V^* \otimes V^*$, las formas bilineales simétricas son las invariantes por el anterior isomorfismo.

Ahora, fijamos un espacio vectorial V (de dimensión finita). Vamos a definir el espacio $\bigwedge^r V$. Denotamos por $V^{\otimes r}$ el producto tensorial de r *copias* de V.

Definimos $\bigwedge^r V$ como el subespacio de $V^{\otimes r}$ engendrado por los elementos de la forma

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r := \sum_{\sigma \in \Sigma_r} (-1)^\sigma v_{1^\sigma} \otimes \cdots \otimes v_{r^\sigma}, \qquad v_1, \ldots, v_r \in V.$$

Es inmediato ver que $v_{1^\sigma} \wedge \cdots \wedge v_{r^\sigma} = (-1)^\sigma v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$. Nos va a interesar especialmente el caso $r = 2$. Ya hemos identificado $V^{*\otimes 2}$ con $\mathrm{Bil}(V; \mathbb{K})$, de manera que si $\alpha_1, \alpha_2 \in V^*$ y $v_1, v_2 \in V$, si vemos $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ como una forma bilineal, entonces

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2)(v_1, v_2) = \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2).$$

Denotemos por $\mathrm{Alt}^2(V; \mathbb{K})$ el espacio de las 2-formas alternadas; como subespacio de $\mathrm{Bil}(V; \mathbb{K}) \equiv V^{*\otimes 2}$ se identifica con $\bigwedge^2 V^*$, de manera que si $\alpha_1, \alpha_2 \in V^*$ y $v_1, v_2 \in V$, si vemos $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ como una forma alternada, entonces

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2)(v_1, v_2) = \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2) - \alpha_2(v_1)\alpha_2(v_2).$$

1.2. Espacios vectoriales complejos

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n. Con este espacio vectorial tenemos varias operaciones interesantes. La primera es que si olvidamos la multiplicación por i, tenemos un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $2n$, que denotaremos como $V_\mathbb{R}$. Denotaremos $\overline{V}$ el mismo conjunto, con la misma estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial pero con un nuevo $\mathbb{C}$-producto $\bar{\cdot}$, por el que si $v \in \overline{V}(= V)$, y $z \in \mathbb{C}$, entonces $z \bar{\cdot} v = \bar{z} \cdot v$ (donde $\cdot$ es el producto original de V).

Si $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ es una base ordenada de V, entonces, también es una base ordenada de $\overline{V}$, mientras que $\mathbf{v}_\mathbb{R} = (v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$ es una base (ordenada) de $V_\mathbb{R}$. Si $v \in V$ tenemos las siguientes igualdades:

$$v = \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} = \mathbf{v} \bar{\cdot} \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 \\ \vdots \\ a_n - ib_n \end{pmatrix} = \mathbf{v}_\mathbb{R} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Hay un espacio vectorial que nos va a interesar de manera particular. Es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V; \mathbb{C})$ de las aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales de V en $\mathbb{C}$; la posibilidad de tener estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial viene de la presencia de $\mathbb{C}$ como espacio de llegada. Notar que V y $\mathbb{C}$ son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, y ambos, pueden verse como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

Observemos que $dim_\mathbb{R} V_\mathbb{R} = 2n$ y $dim_\mathbb{R} \mathbb{C}_\mathbb{R} = 2$. Entonces $\dim_\mathbb{R} \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V; \mathbb{C}) = 4n$ por lo que $\dim_\mathbb{C} \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V; \mathbb{C}) = 2n$.

Es inmediato que $V^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V; \mathbb{C})$ es un subespacio vectorial (complejo) de $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V; \mathbb{C})$. Si $\alpha \in V^*$, podemos definir $\overline{\alpha} : V \to \mathbb{C}$ como $\overline{\alpha}(v) := \overline{\alpha(v)}, \forall v \in V$. Observemos que $\overline{V^*} := \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in V^*\}$ también es subespacio de $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V; \mathbb{C})$. Es más $\overline{V^*} = \overline{V}^*$.

Proposición 1.5. *El espacio vectorial* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V;\mathbb{C})$ *es suma directa* $V^* \oplus \overline{V}^*$*.*

Demostración. Como los dos sumandos son espacios de dimensión compleja n, basta probar que $V^* \cap \overline{V}^* = \{0\}$. Sea $\alpha \in V^* \cap \overline{V}^*$, y $v \in V$:

$$i\alpha(v) = \alpha(i \cdot v) = \alpha(-\overline{i \cdot} v) = -i\alpha(v) \Longrightarrow \alpha(v) = 0.$$

Por tanto, $\alpha = 0$. □

Sea $(v_1, \ldots, v_n)$ una $\mathbb{C}$-base de V, y sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ su base dual en V^*. Observemos que $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n$ es su base dual en $\overline{V}^*$.

Los elementos de V^* son las formas $\mathbb{C}$-lineales de V, mientras que los elementos de $\overline{V}^*$ son las formas $\mathbb{C}$-lineales de $\overline{V}$, o expresado en términos de V, las formas semilineales. Es decir, aquellas que cumplen:

$$\alpha(t \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v}) = \bar{t} \cdot \mathbf{u} + \bar{s} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall t, s \in \mathbb{C}.$$

Es decir, toda aplicación $\mathbb{R}$-lineal de V en $\mathbb{C}$ se descompone de forma única como suma de una forma $\mathbb{C}$-lineal y de una forma $\mathbb{C}$-semilineal.

Proposición 1.6. *La conjugación compleja define un automorfismo* $\mathbb{R}$*-lineal de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V;\mathbb{C})$ *que intercambia* V^* *y* $\overline{V}^*$*.*

Esto va a jugar un papel importante para caracterizar las formas hermitianas. Con las dos secciones introducidas, ya podemos definir el concepto de formas hermtianas con una notación tensorial, como elementos en $V^* \otimes \overline{V}^*$.

1.3. Formas sesquilineales y hermitianas

Ya hemos visto que el producto tensorial nos permite expresar las formas bilineales. Vamos a ver cómo, para espacios vectoriales complejos, podemos expresar también las formas sesquilineales.

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n. Recordemos que una forma sesquilineal es una aplicación $h : V \times V \to \mathbb{C}$ que es $\mathbb{R}$-bilineal y tal que

$$h(t \cdot \mathbf{u}, s \cdot \mathbf{v}) = t \cdot \bar{s} \cdot h(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall t, s \in \mathbb{C}.$$

Dicho de otro modo, es una forma $\mathbb{C}$-bilineal en $V \times \overline{V}$, o equivalentemente, se puede identificar con un elemento en $V^* \otimes \overline{V}^*$.

Ejemplo 1.7. En $V = \mathbb{C}^n$ definimos la forma

$$h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad h((z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n)) := \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot \bar{w}_j.$$

Es fácil ver que es sesquilineal. Si $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ denota la base dual en $(\mathbb{C}^n)^*$ de la base canónica, recordemos que $(\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_n)$ es una base de las formas semilineales. Entonces $h = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \otimes \overline{\omega}_j$. Veamos que esta forma tiene una propiedad suplementaria:

$$h((w_1, \ldots, w_n), (z_1, \ldots, z_n)) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \bar{z}_j = \overline{\sum_{j=1}^{n} z_j \cdot \bar{w}_j} = \overline{h((z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n))}.$$

Definición 1.8. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Una *forma hermitiana* sobre V es una forma sesquilineal h tal que

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \overline{h(\mathbf{u}, \mathbf{v})}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Si h es una forma hermitiana sobre V, entonces si $\mathbf{v} \in V$, como $h(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \overline{h(\mathbf{v},\mathbf{v})}$, tenemos que $h(\mathbf{v},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$.

Definición 1.9. Una *forma hermitiana* sobre V es un producto escalar hermitiano si $h(\mathbf{v},\mathbf{v}) > 0$, $\forall \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$.

Estas formas son las que van a jugar el papel de las formas simétricas en el caso de los espacios vectoriales complejos. Así, identificando las formas sesquilineales con $V^* \otimes \overline{V}^*$, si consideramos los $\mathbb{R}$-isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes \overline{V}^* & \xrightarrow{\sigma} & \overline{V}^* \otimes V^* \\ \alpha \otimes \beta & \longmapsto & \beta \otimes \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V^* \otimes \overline{V}^* & \xrightarrow{\text{conj}} & \overline{V}^* \otimes V^* \\ \alpha \otimes \beta & \longmapsto & \overline{\alpha} \otimes \overline{\beta} \end{array}$$

entonces, h es hermitiana si $\sigma(h) = \text{conj}(h)$.

Proposición 1.10. *Sea h una forma hermitiana sobre un $\mathbb{C}$-espacio vectorial V. Entonces* $\operatorname{Re} h$ *es un $\mathbb{R}$-forma bilineal simétrica e $\Im h$ es una $\mathbb{R}$-forma bilineal antisimétrica. Si h es un producto escalar hermitiano, entonces* $\operatorname{Re} h$ *es un producto escalar.*

Ejemplo 1.11. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $\omega_1, \ldots, \omega_n$ una base de V^*. Denotaremos $\alpha_j := \operatorname{Re} \omega_j$ y $\beta_j := \Im \omega_j$, formas lineales reales. Una forma hermitiana h se escribe como

$$h = \sum_{j=1}^{n} a_j \omega_j \otimes \overline{\omega}_j + \sum_{1 \le j < k \le n} (b_{jk} \omega_j \otimes \overline{\omega}_k + \bar{b}_{jk} \omega_k \otimes \overline{\omega}_j), \quad a_j \in \mathbb{R}, b_{jk} \in \mathbb{C}.$$

Si denotamos $b_{jk} = u_{jk} + i v_{jk}$:

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} h = \sum_{j=1}^{n} a_j (\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j) + \\ \sum_{1 \le j < k \le n} u_{jk} (\alpha_j \otimes \alpha_k + \alpha_k \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_k + \beta_k \otimes \beta_j) + \\ \sum_{1 \le j < k \le n} v_{jk} (\alpha_j \otimes \beta_k + \beta_k \otimes \alpha_j - \beta_j \otimes \alpha_k - \alpha_k \otimes \beta_j), \end{gathered}$$

$$\Im h = \sum_{j=1}^{n} a_j \beta_j \wedge \alpha_j + \sum_{1 \le j < k \le n} u_{jk} (\beta_j \wedge \alpha_k + \beta_k \wedge \alpha_j) + \sum_{1 \le j < k \le n} v_{jk} (\alpha_j \wedge \alpha_k + \beta_j \wedge \beta_k).$$

Proposición 1.12. *Sea h una forma hermitiana sobre V y sean α y β sus partes real e imaginaria.*

1. *Las formas bilineales α y β se determinan mutuamente, es decir, si $\boldsymbol{v}, \mathbf{w} \in V$, entonces:*

$$\alpha(\boldsymbol{v}, i\mathbf{w}) = -\alpha(i\boldsymbol{v}, \mathbf{w}) = \beta(\boldsymbol{v}, \mathbf{w}), \quad \beta(i\boldsymbol{v}, \mathbf{w}) = -\beta(\boldsymbol{v}, i\mathbf{w}) = \alpha(\boldsymbol{v}, \mathbf{w}).$$

2. *Las formas bilineales α y β son ortogonales para la multiplicación por i, es decir, si $\boldsymbol{v}, \mathbf{w} \in V$, entonces:*

$$\alpha(i\boldsymbol{v}, i\mathbf{w}) = \alpha(\boldsymbol{v}, \mathbf{w}), \quad \beta(i\boldsymbol{v}, i\mathbf{w}) = \beta(\boldsymbol{v}, \mathbf{w}).$$

Nos van a interesar de manera particular las formas bilineales alternadas de $V_{\mathbb{R}}$, que son elementos de $\bigwedge^2 V_{\mathbb{R}}^*$, y también las $\mathbb{R}$-aplicaciones bilineales alternadas de V con valores en $\mathbb{C}$ que denotaremos

$$\textstyle\bigwedge_{\mathbb{C}}^2 V^* := \bigwedge^2 V_{\mathbb{R}}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Para ellas también utilizaremos la notación $\wedge$. Todos los espacios tratados son subespacios de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V;\mathbb{C})^{\otimes 2}$.

Ejemplo 1.13. Sea $\omega \in V^*$; tenemos que $\omega \otimes \overline{\omega}$ es claramente una forma hermitiana. Su parte real

$$\frac{\omega \otimes \overline{\omega} + \overline{\omega} \otimes \omega}{2}$$

es una forma simétrica real y su parte imaginaria

$$\frac{\omega \otimes \overline{\omega} - \overline{\omega} \otimes \omega}{2i} = \frac{\omega \wedge \overline{\omega}}{2i}$$

es una forma alternada real. Con esta expresión es fácil recuperar la forma hermitiana original. Si $\omega_1, \omega_2 \in V^*$, entonces

$$h := \omega_1 \otimes \overline{\omega}_2 + \omega_2 \otimes \overline{\omega}_1$$

es una forma hermitiana. Observemos que

$$h = (\omega_1 + \omega_2) \otimes (\overline{\omega_1 + \omega_2}) - \omega_1 \otimes \overline{\omega}_1 - \omega_2 \otimes \overline{\omega}_2,$$

es decir, toda forma hermitiana se escribe como combinación lineal de productos alternados de una forma $\mathbb{C}$-lineal y su conjugada. En este caso la parte imaginaria de h es:

$$\Im h = \frac{\omega_1 \otimes \overline{\omega}_2 + \omega_2 \otimes \overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_1 \otimes \omega_2 - \overline{\omega}_2 \otimes \omega_1}{2i} = \frac{\omega_1 \wedge \overline{\omega}_2 + \omega_2 \wedge \overline{\omega}_1}{2i}.$$

Una vez visto estos ejemplos, ya tenemos totalmente introducidas las formas hermitianas, paso necesario antes de definir el concepto de producto hermitiano en una variedad que haremos a lo largo del siguiente capítulo.

Capítulo 2

Conceptos necesarios de geometría diferencial y plano proyectivo complejo

Antes de pasar al estudio de cónicas, vamos a estudiar el espacio proyectivo complejo y ciertos conceptos necesarios para saber inducir una métrica sobre este, algo fundamental para poder trabajar con las cónicas como una variedad riemanniana. El objetivo de este capítulo es introducir todos los conceptos necesarios de geometría diferencial para poder definir una métrica en una variedad analítica para posteriormente estudiar $\mathbb{P}^2$ y darle estructura de variedad analítica, así podremos ver en el último capítulo qué métrica hermitiana tenemos en dicha variedad.

2.1. Derivaciones, campos y derivaciones en $\mathbb{C}^n$

Sea M una variedad diferenciable. El primer objeto importante de dicha variedad es el fibrado tangente TM, que es una variedad diferenciable con una proyección $\pi : TM \to M$ en la que $\forall \mathbf{p} \in M$, $\pi^{-1}(\mathbf{p}) = T_{\mathbf{p}}M$ el espacio tangente a $\mathbf{p}$ en M que está formado por las derivaciones de los gérmenes de funciones diferenciables en un entorno de $\mathbf{p}$.

Definamos el concepto de germen. En el espacio

$$\mathcal{C}^{\infty}_{\mathbf{p},\mathbb{R}}(M) := \{f : V \to \mathbb{R} \mid \mathbf{p} \in V \text{ entorno abierto de } \mathbf{p},\ f\ \mathcal{C}^{\infty}\}$$

definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$f : V \to \mathbb{R} \sim g : W \to \mathbb{R} \iff \{q \in V \cap W \mid f(\mathbf{q}) = g(\mathbf{q})\} \text{ es entorno de } \mathbf{p}.$$

Los gérmenes de funciones diferenciables son las clases de equivalencia por esta relación. Por abuso de notación en ocasiones identificaremos una función y su germen en un punto. El conjunto de gérmenes se denota $\mathcal{C}^{\infty}_{M,\mathbf{p},\mathbb{R}}$ y es una $\mathbb{R}$-álgebra.

Definición 2.1. Una *derivación* de la variedad M en $\mathbf{p}$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $D : \mathcal{C}^{\infty}_{M,\mathbf{p},\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ tal que $D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$.

Proposición 2.2. *Sea M una variedad n-dimensional, $\forall \mathbf{p} \in M$ se tiene que $T_{\mathbf{p}}M$ es un espacio vectorial real de dimensión n, tal que las n derivaciones naturales en cada punto $\mathbf{p} \in M$, las n derivadas parciales evaluadas en el punto $\mathbf{p}$: $\frac{\partial}{\partial x_i}_{|\mathbf{p}}$, $1 \leq i \leq n$ son una base de este.*

Omitimos la demostración de este resultado, pero vamos a ver cómo se obtienen las derivaciones. Antes de seguir es conveniente pasar a expresiones coordenadas. Sea $\mathbf{x} : U \to M$ una carta, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto conexo. Denotemos $V := \mathbf{x}(U)$. Dado $\mathbf{p} \in V$, $T_{\mathbf{p}}V$ admite como base $(\frac{\partial}{\partial x_i}_{|\mathbf{p}})_{i=1}^n$. Recordemos la definición de estos elementos viendo cómo actúan por derivación sobre el germen f de una función en $\mathbf{p}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}_{|\mathbf{p}}(f) := \frac{\partial (f \circ \mathbf{x})}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})).$$

Corolario 2.3. *Sea M una variedad n-dimensional, $\forall \mathbf{p} \in M$ se tiene que $T^*_{\mathbf{p}}M$ es un espacio vectorial real de dimensión n, tal que tiene como base $(dx_{i\mathbf{p}})_{i=1}^n$.*

Observación 2.4. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable, $\mathbf{p} \in M$, entonces $df_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \to \mathbb{R}$ es la forma lineal definida por $df_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) := \mathbf{v}(f)$, $\forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$.

Notemos que, siguiendo con expresiones coordenadas, efectivamente dx_i es la diferencial de la función $x_i : V \to \mathbb{R}$, obtenida al componer $\mathbf{x}^{-1}$ con la i-ésima proyección:

$$dx_{i\mathbf{p}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}_{|\mathbf{p}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}_{|\mathbf{p}}(x_i) = \frac{\partial (x_i \circ \mathbf{x})}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})) = \frac{\partial \pi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})) = \delta_{ij}.$$

Proposición 2.5. *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$, y sea $\tilde{f} := f \circ \mathbf{x}$. Entonces, si $\mathbf{p} \in V = \mathbf{x}(U)$:*

$$df_{\mathbf{p}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}))dx_{i\mathbf{p}}.$$

Demostración. Basta calcular la acción de $df_{\mathbf{p}}$ sobre los vectores de la base. $\square$

Los campos diferenciables (definidos global o localmente) son las secciones de este *fibrado*, es decir las aplicaciones diferenciables $X : U \to TM$, $U \subset M$ abierto, tal que $X(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}M$, $\forall \mathbf{p} \in U$. Tradicionalmente la imagen se denota por $X_{\mathbf{p}}$.

Si X es un campo sobre U y $f : U \to \mathbb{R}$ es una función $\mathcal{C}^\infty$, entonces $X(f) : U \to \mathbb{R}$ es otra función $\mathcal{C}^\infty$ obtenida al derivar f en cada punto $\mathbf{p}$ según el vector (derivación) $X_{\mathbf{p}}$.

Denotamos por $\mathcal{C}^\infty(M)$ el espacio de funciones diferenciables (con valores en $\mathbb{R}$) y por $\mathfrak{X}(M)$ el espacio de campos tangentes; haremos lo mismo para abiertos $U \subset M$. El espacio $\mathcal{C}^\infty(M)$ es una $\mathbb{R}$-álgebra, mientras que $\mathfrak{X}(M)$ es un $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo. La acción anterior es $\mathbb{R}$-lineal y cumple la regla de Leibniz:

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot (g), \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

En realidad, es lo mismo un campo que una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ que cumple la regla de Leibniz.

Proposición 2.6. *Si ω es una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ sobre M y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces la función $\omega(X) : M \to \mathbb{R}$ dada por $\omega(X)(\mathbf{p}) := \omega_{\mathbf{p}}(X_{\mathbf{p}})$ es $\mathcal{C}^\infty$. Es más sea $\tilde{\omega} : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ una aplicación $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal. Entonces $\exists! \omega$ 1-forma diferenciable tal que $\tilde{\omega}(X) = \omega(X)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$. De hecho, identificaremos habitualmente ω con $\tilde{\omega}$.*

Dejamos la Proposición sin demostrar ya que no hemos dado los detalles de las definiciones de TM, T^*M, y de hecho, la dejaremos como definición de 1-formas. El espacio de 1-formas se denota como $\mathcal{E}^1(M)$ y es una $\mathcal{C}^\infty(M)$-álgebra.

Proposición 2.7. *Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. La* diferencial *de f es la 1-forma df tal que $df(X) := X(f)$.*

Como hemos hecho con las 1-formas vamos a definir las 2-formas (alternadas).

Definición 2.8. Una 2-forma alternada de M es una aplicación $\mathcal{C}^\infty$-bilineal alternada $\omega : \mathfrak{X}(M)^2 \to \mathcal{C}^\infty(M)$. El espacio de las 2-formas alternadas se denota $\mathcal{E}^2(M)$ y es una $\mathcal{C}^\infty(M)$-álgebra.

Observación 2.9. Como definición alternativa y equivalente una 2-forma alternada de M consiste en la asignación para cada $\mathbf{p} \in M$ de una 2-forma alternada $\omega_{\mathbf{p}} : (T_{\mathbf{p}}M)^2 \to \mathbb{R}$ tal que si $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ entonces la función $\omega(X_1, X_2)$ es $\mathcal{C}^\infty$.

Observación 2.10. Las 2-formas definen en cada punto un elemento de $\bigwedge^2 T^*_{\mathbf{p}}M$, que tiene como base, $\mathbf{p} \in V$

$$dx_{i_1 \mathbf{p}} \wedge dx_{i_2 \mathbf{p}}, \qquad 1 \leq i_1 < i_r \leq n.$$

Estos elementos determinan una 2-forma $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}$ sobre V. Una 2-forma ω sobre V se puede escribir como

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} f_{i_1, i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}, \qquad f_{i_1, i_2} \in \mathcal{C}^\infty(V).$$

2.2. Variedades analíticas

Pero a nosotros nos van a interesar las variedades analíticas complejas, las cuales vamos a introducir ahora y, del mismo modo, definir su espacio tangente.

La definición formal de estas variedades es la misma que la definición de las variedades diferenciables, reemplazando *abiertos de* $\mathbb{R}^n$ por *abiertos de* $\mathbb{C}^n$ y difeomorfismos $\mathcal{C}^\infty$ por aplicaciones biholomorfas. Aunque estos cambios son aparentemente formales la *rigidez* de las aplicaciones analíticas crea alguna diferencia importante.

Una variedad analítica M de dimensión n también se puede ver como una variedad diferenciable $M_{\mathbb{R}}$ orientada de dimensión $2n$, ya que las aplicaciones biholomorfas son difeomorfismos $\mathcal{C}^\infty$ si identificamos $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$.

Definición 2.11. Sea M variedad analítica, y sea $V \subset M$ un abierto. El *espacio de funciones holomorfas* en V se denota $\mathrm{Hol}(V)$ y $\mathcal{C}^\infty(V; \mathbb{C})$ es el espacio de funciones $\mathcal{C}^\infty$ con valores en $\mathbb{C}$.

Observación 2.12. El espacio $\mathrm{Hol}(V)$ es una $\mathbb{C}$-álgebra y el espacio $\mathcal{C}^\infty(V; \mathbb{C})$ es una $\mathrm{Hol}(V)$-álgebra (que contiene $\mathrm{Hol}(V)$). Observemos que $\overline{\mathrm{Hol}}(V)$ también está en $\mathcal{C}^\infty(V; \mathbb{C})$; es el espacio de las funciones *antiholomorfas.*

También podemos definir los espacios de gérmenes de funciones holomorfas, de funciones antiholomorfas o de funciones diferenciables (con valores en $\mathbb{C}$) en un punto $\mathbf{p}$. De esta manera tenemos varios espacios de derivaciones.

Denotaremos $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbf{p},\mathbb{R}}$, $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbf{p},\mathbb{C}}$ los espacio de gérmenes de funciones diferenciables con valores reales y complejos. También denotaremos $\mathrm{Hol}_{\mathbf{p},M}$ el espacio de gérmenes de funciones holomorfas y $\overline{\mathrm{Hol}}_{\mathbf{p},M}$ el espacio de gérmenes de las funciones antiholomorfas.

Definición 2.13. El *espacio tangente* (complejo) $T_{\mathbf{p}}M$ de M en el $\mathbf{p}$ es el espacio de $\mathbb{C}$-derivaciones de $\mathrm{Hol}_{\mathbf{p},M}$.

Observación 2.14. Sea M una variedad analítica y $M_{\mathbb{R}}$ la misma como variedad diferenciable. Tenemos $T_{\mathbf{p}}M$ y $T_{\mathbf{p}}M_{\mathbb{R}}$ el espacio de derivaciones de funciones $\mathcal{C}^\infty$. Ahora, tomamos $0 \in \mathbb{D}_\epsilon \subset \mathbb{C}$ un disco centrado en el origen de radio ϵ y sea $\gamma : \mathbb{D}_\epsilon \to M$ función holomorfa tal que $\gamma(0) = \mathbf{p}$. Tenemos que $\dot\gamma(0) \in T_{\mathbf{p}}M$ ya que $\dot\gamma(0)(f) = (f \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{C}$ con $f : M \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces si cogemos la restricción $\widehat{\gamma} = \gamma_{|(-\epsilon,\epsilon)} : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ lo podemos ver como una derivación real $\dot{\widehat{\gamma}}(0) \in T_{\mathbf{p}}M_{\mathbb{R}}$. Esto nos va a dar una identificación entre $(T_{\mathbf{p}}M)_{\mathbb{R}}$ y $T_{\mathbf{p}}M_{\mathbb{R}}$ que es simplemente olvidarnos del producto por i. Además la acción de los números complejos es $\dot\gamma_{|(-i\epsilon,i\epsilon)}(0) = i\gamma_{|(-\epsilon,\epsilon)}$.

El siguiente paso es estudiar los duales de estos espacios vectoriales. El que más nos va a interesar es $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbf{p}}M_{\mathbb{R}}, \mathbb{C}) \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_{\mathbf{p}}M_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \mathbb{C})$, que es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial en el que tenemos dos bases importantes, si fijamos una carta $\mathbf{z} : U \to M$, $\mathbf{p} \in \mathbf{z}(U)$, $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto. Por una parte, tenemos las aplicaciones $dz_{j|\mathbf{p}} : T_\mathbf{p}M_\mathbb{R} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; dado $D \in T_\mathbf{p}M_\mathbb{R} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$, tenemos que $dz_{j|\mathbf{p}}(D) := D(z_j)$, donde $z_j : V \to \mathbb{C}$ es la composición de $\mathbf{z}^{-1}$ con la j-ésima projección.

Análogamente se definen $d\bar{z}_{j|\mathbf{p}}$, $dx_{j|\mathbf{p}}$, $dy_{j|\mathbf{p}}$; estos dos últimos se interpretarán simultáneamente como el elementos en $\operatorname{Hom}_\mathbb{C}(T_\mathbf{p}M_\mathbb{R} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}, \mathbb{C})$ y en $T^*_\mathbf{p}M_\mathbb{R}$; y como $z_j = x_j + iy_j$, tenemos

$$dz_{j|\mathbf{p}} = dx_{j|\mathbf{p}} + idy_{j|\mathbf{p}}, \quad d\bar{z}_{j|\mathbf{p}} = dx_{j|\mathbf{p}} - idy_{j|\mathbf{p}}.$$

Esto nos va a permitir hablar de $T^*_\mathbf{p}M \otimes \bar{T}^*_\mathbf{p}M$ ya que $(dz_{j|\mathbf{p}})_{j=1,\dots,n}$ es una base de $T^*_\mathbf{p}M$ y $(d\bar{z}_{j|\mathbf{p}})_{j=1,\dots,n}$ es una base de $\bar{T}^*_\mathbf{p}M$.

Definición 2.15. Un *producto hermitiano* h sobre una variedad analítica M consiste en asignar a cada $\mathbf{p} \in M$ un producto hermitiano $h_\mathbf{p}$ en el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $T_\mathbf{p}M$, de manera que si $V \subset M$ es un abierto y X, Y son campos diferenciables sobre V entonces, $h(X, Y) : V \to \mathbb{C}$ es una función $\mathcal{C}^\infty$.

Observación 2.16. Podemos interpretar $h_\mathbf{p}$ como un elemento de $T^*_\mathbf{p}M \otimes \bar{T}^*_\mathbf{p}M$ con las siguientes propiedades. Dada una carta $\mathbf{z}$,

$$h = \sum_{j=1}^{n} f_j \, dz_j \otimes d\bar{z}_j + \sum_{1\le j<k\le n} (g_{jk} \, dz_j \otimes d\bar{z}_k + \bar{g}_{jk} \, dz_k \otimes d\bar{z}_j),$$

$f_j : V \to \mathbb{R}$, $g_{jk} : V \to \mathbb{C}$ diferenciables, tal que la matriz

$$\begin{pmatrix} f_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & g_{jk} & \dots \\ \dots & \bar{g}_{jk} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & f_n \end{pmatrix}$$

es definida positiva. Dicho de otra manera, $\operatorname{Re} h$ es una métrica Riemanniana e $\Im h$ es una 2-forma alternada.

Definición 2.17. Una 2-forma alternada compleja ω sobre una variedad analítica M consiste en asignar a cada $\mathbf{p} \in M$ un producto hermitiano $\omega_\mathbf{p}$ en el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $T_\mathbf{p}M$, de manera que si $V \subset M$ es un abierto y X_1, X_2 son campos diferenciables sobre V entonces, $\omega(X_1, X_2) : V \to \mathbb{C}$ es una función $\mathcal{C}^\infty$. Notemos que $\omega_\mathbf{p} \in \bigwedge^2 T^*_\mathbf{p}M_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$.

Sabiendo esto, vamos a introducir nuestra variedad analítica donde vamos a trabajar y en el siguiente capítulo usaremos estos conceptos para ver que métrica podemos darle al espacio proyectivo complejo, y en particular, a la recta y plano proyectivo complejos.

2.3. El espacio proyectivo complejo

Vamos a introducir propiedades topológicas y analíticas del espacio proyectivo complejo, normalmente sin demostración. Hay diversas formas de ver el espacio proyectivo complejo. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión $n + 1$. Entonces,

$$\mathbb{P}(V) = \{H \subset V \mid H \ \mathbb{C}\text{-subespacio vectorial}, \ \dim_\mathbb{C} H = 1\}.$$

Consideremos la acción $\Psi : \mathbb{C}^* \times V \setminus \{\mathbf{0}\} \to V \setminus \{\mathbf{0}\}$ definida por la multiplicación. El espacio $\mathbb{P}(V)$ se identifica con el cociente $V \setminus \{\mathbf{0}\}/\mathbb{C}^*$. Esta última identificación es útil, ya que tomando la topología usual en V, podemos tomar en $\mathbb{P}(V)$ la topología cociente. Los elementos de $\mathbb{P}(V)$ se denotarán como el nombre del subespacio o como clases de equivalencia $[\mathbf{v}]$, con $\mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$, de manera que $[\mathbf{v}] = [z\mathbf{v}]$, $z \in \mathbb{C}^*$.

Ejemplo 2.18. Todos los espacios proyectivos de espacios vectoriales de la misma dimensión son isomorfos. En particular, denotaremos $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$. Los elementos de $\mathbb{P}^n$ se denotan mediante las coordenadas homogéneas:

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \text{ con } (x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq \mathbf{0},$$

y $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] = [tx_0 : tx_1 : \cdots : tx_n]$, $t \in \mathbb{C}^*$.

Lema 2.19. *Sea $\pi : V \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}(V)$ la proyección cociente. La aplicación π es abierta.*

Fijemos una métrica hermitiana h en V. Denotaremos como habitualmente $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{h(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$. El espacio

$$\mathbb{S}_h^{2n+1} := \{\mathbf{v} \in V \mid \|\mathbf{v}\| = 1\} \subset V \setminus \{0\}$$

es homeomorfo a $\mathbb{S}^{2n+1}$.

Proposición 2.20. *El espacio proyectivo es conexo por caminos, compacto, localmente conexo por caminos, localmente compacto y segundo numerable.*

Fijemos un subespacio vectorial $S \subset V$; $\mathbb{P}(S)$ se dice que es un subespacio proyectivo de $\mathbb{P}(V)$. Observemos que $\pi^{-1}(\mathbb{P}(S)) = S \setminus \{\mathbf{0}\}$; como este es un cerrado de $V \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces, $\mathbb{P}(S)$ es un cerrado de $\mathbb{P}(V)$. En particular $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(S)$ es un abierto.

Tomemos ahora S un hiperplano de V (subespacio vectorial de codimensión 1). Tomemos una base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ de S. Sea $\mathbf{v}_0 \in V \setminus S$. En particular, la familia $\mathbb{v} := (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ es una base de V y la aplicación

$$\Phi_{\mathbb{v}} : \mathbb{C}^{n+1} \to V, \quad \Phi_{\mathbb{v}}(\underline{z}) := \mathbb{v}\underline{z}$$

es un homeomorfismo, donde identificamos $\mathbb{v}$ con una matriz fila y $\underline{z}$ con una matriz columna.

Proposición 2.21. *Con las notaciones anteriores, la aplicación $\Psi_{\mathbb{v}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}(V)$ dada por*

$$\underline{z} :={}^t(z_1, \ldots, z_n) \mapsto \mathbb{v}\begin{bmatrix} 1 \\ \underline{z} \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{v}_0 + \sum_{j=1}^{n} z_j \boldsymbol{v}_j\right],$$

es un homeomorfismo sobre la imagen, que es el abierto $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(S)$.

Demostración. Sea $\tilde{\Psi}_{\mathbb{v}} : \mathbb{C}^n \to V \setminus \{\mathbf{0}\}$, la aplicación dada por $\tilde{\Psi}_{\mathbb{v}}(z_1, \ldots, z_n) = \mathbf{v}_0 + \sum_{j=1}^n z_j \mathbf{v}_j$. Es claramente continua y como $\Psi_{\mathbb{v}} = \pi \circ \tilde{\Psi}_{\mathbb{v}}$, entonces $\Psi_{\mathbb{v}}$ es continua.

Como $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(S)$ es abierto, y $\pi^{-1}(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(S)) = V \setminus S$, entonces la restricción $\pi_| : V \setminus S \to \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(S)$ también es una aplicación cociente. Por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\Phi_{\mathbb{v}}^{-1}"] & \mathbb{C}^{n+1} & \\
V \setminus S \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Phi_{\mathbb{v}}^{-1}|"] \arrow[d, "\pi_|"] \arrow[dr, "\psi"] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z_0 = 0\} \arrow[u, hook] \arrow[d] & (z_0, z_1, \ldots, z_n) \arrow[d, mapsto] \\
\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(S) \arrow[r, "\Psi_{\mathbb{v}}^{-1}"] & \mathbb{C}^n & \left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right)
\end{tikzcd}$$

la aplicación ψ es claramente continua y como la restricción de π es cociente, deducimos que $\Psi_{\mathbb{v}}^{-1}$ es continua. □

Corolario 2.22. *El espacio proyectivo es Hausdorff.*

Basta tomar, dados dos puntos distintos $P = [\mathbf{v}], Q = [\mathbf{w}]$, una base $\mathbb{v}$ de V tal que $P, Q \in \Psi_{\mathbb{v}}(\mathbb{C}^n)$ y aplicar que $\mathbb{C}^n$ es Hausdorff. El resultado siguiente es consecuencia de ser $\pi_{\mathbb{S}}$ una aplicación sobreyectiva entre un compacto y un Hausdorff.

Corolario 2.23. *Sea $\pi_{\mathbb{S}} : \mathbb{S}_h^{2n+1} \to \mathbb{P}(V)$ la restricción de π. Entonces, $\pi_{\mathbb{S}}$ es cerrada y, en particular, cociente.*

Tomemos dos bases $\mathbb{v} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ y $\mathbb{w} = (\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ de V. Queremos *comparar* $\Psi_{\mathbb{v}}$ y $\Psi_{\mathbb{w}}$. Consideremos el cambio de base:

$$\mathbb{v} = \mathbb{w}A, \qquad A = \left(\begin{array}{c|c} t & {}^t\mathbf{a} \\ \hline \mathbf{b} & B \end{array}\right) \in \mathrm{GL}(n+1;\mathbb{C}), \qquad t \in \mathbb{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n, B \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}).$$

Supongamos que $\Psi_{\mathbb{v}}(\underline{z}) \in \Psi_{\mathbb{w}}(\mathbb{C}^n)$:

$$\underline{z} \xmapsto{\Psi_{\mathbb{v}}} \mathbb{v} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline \underline{z} \end{array}\right] = \mathbb{w}A \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline \underline{z} \end{array}\right] = \mathbb{w} \left[\begin{array}{c} t + {}^t\mathbf{a}\underline{z} \\ \hline \mathbf{b} + B\underline{z} \end{array}\right] \xmapsto{\Psi_{\mathbb{w}}^{-1}} \frac{\mathbf{b} + B\underline{z}}{t + {}^t\mathbf{a}\underline{z}}.$$

Así, la composición $\Psi_{\mathbb{w}}^{-1} \circ \Psi_{\mathbb{v}}$ está definida $\mathbb{C}^n \setminus \{t + {}^t\mathbf{a}\underline{z} = 0\}$. Se trata de un abierto no vacío de $\mathbb{C}^n$, ya que como A es inversible t y $\mathbf{a}$ no se pueden anular simultáneamente. Si

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} s & {}^t\mathbf{c} \\ \hline \mathbf{d} & C \end{array}\right)$$

podemos enunciar lo siguiente.

Proposición 2.24. *Con las notaciones anteriores, sea $U_{\mathbb{v},\mathbb{w}} = \Psi_{\mathbb{v}}(\mathbb{C}^n) \cap \Psi_{\mathbb{w}}(\mathbb{C}^n)$, abierto de $\mathbb{P}(V)$. Entonces*

$$\Psi_{\mathbb{v}}^{-1}(U_{\mathbb{v},\mathbb{w}}) = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^n \mid t + {}^t\mathbf{a}\underline{z} \neq 0\}, \qquad \Psi_{\mathbb{w}}^{-1}(U_{\mathbb{v},\mathbb{w}}) = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^n \mid s + {}^t\mathbf{c}\underline{z} \neq 0\}.$$

La aplicación $\Psi_{\mathbb{w}}^{-1} \circ \Psi_{\mathbb{v}} : \Psi_{\mathbb{v}}^{-1}(U_{\mathbb{v},\mathbb{w}}) \to \Psi_{\mathbb{w}}^{-1}(U_{\mathbb{v},\mathbb{w}})$ es biholomorfa. En particular, $\mathbb{P}(V)$ es una variedad analítica.

Ejemplo 2.25. Nos quedamos con el caso $n = 2$, ya que es el plano proyectivo el que nos va a interesar.

Consideremos $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$, con la base canónica $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Con distintas reordenaciones de esta base obtenemos las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\Psi_0} & \mathbb{P}^2 \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & [1 : z_1 : z_2] \\ \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) & \longleftarrow\!\shortmid & [z_0 : z_1 : z_2] \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\Psi_1} & \mathbb{P}^2 \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & [z_0 : 1 : z_2] \\ \left(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}\right) & \longleftarrow\!\shortmid & [z_0 : z_1 : z_2] \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\Psi_2} & \mathbb{P}^2 \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & [z_0 : z_1 : 1] \\ \left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) & \longleftarrow\!\shortmid & [z_0 : z_1 : z_2] \end{array}$$

Las imágenes de estas aplicaciones forman un cubrimiento abierto de $\mathbb{P}^2$ y las aplicaciones son cartas de la variedad analítica.

Ejemplo 2.26. Como Ψ_0 es un homeomorfismo sobre la imagen es habitual identificar su imagen con $\mathbb{C}^2$. Observemos que

$$\mathbb{P}^2 \setminus \Psi_0(\mathbb{C}^2) = \{[0 : z_1 : z_2] \mid [z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^1\} =: \mathbb{P}^1_\infty.$$

Es decir, podemos identificar $\mathbb{P}^2 \equiv \mathbb{C}^2 \coprod \mathbb{P}^1$. Cambiando de carta, cualquier hiperplano proyectivo sirve como hiperplano del infinito, y su complemento es $\mathbb{C}^2$.

Ejemplo 2.27. La recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ se configura según hemos visto como $\mathbb{C} \coprod \mathbb{P}^0$, donde $\mathbb{P}^0$ es un punto que se suele denotar como ∞. Así $\mathbb{P}^1$ es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, es decir es homeomorfo a una esfera.

Capítulo 3

Rectas y cónicas en el espacio proyectivo

En este capítulo vamos a tratar de resolver el centro de nuestro estudio. Para comenzar veremos qué métrica ponemos al plano proyectivo y ver cual induce en las rectas y cónicas dentro de este espacio, sacaremos características de las cónicas por conocerlas más como objeto matemático dentro de $\mathbb{P}^2$, para finalmente buscar como caracterizar estos conjuntos.

3.1. Métrica hermitiana sobre la recta y el plano proyectivo complejo

Consideremos la variedad analítica $\mathbb{C}^{n+1}$ con el producto hermitiano usual, es decir $h : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ tal que $h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := {}^t\mathbf{v}\overline{\mathbf{w}}$ (los vectores se identifican con matrices columna).

Recordemos que $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$, podemos identificar $T_{\mathbf{p}}\mathbb{C}^{n+1}$ con $\mathbb{C}^{n+1}$, considerando un vector $\mathbf{v}$ como el vector tangente a la curva $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ en $t = 0$. Con esta identificación, podemos dar una métrica hermitiana $\mathbf{h}$ para la que $\mathbf{h}_{\mathbf{p}} = h$. Es decir,

$$\mathbf{h} = \sum_{j=0}^{n} dz_j \otimes d\bar{z}_j.$$

Observación 3.1. Sean $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $[\mathbf{p}_1] = [\mathbf{p}_2]$ en $\mathbb{P}^n$, es decir, existe $t \in \mathbb{C}^*$ tal que $\mathbf{p}_2 = t\mathbf{p}_1$. Consideremos la aplicación $\lambda_t : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Es una aplicación holomorfa tal que $\lambda_t(\mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_2$. En particular, tenemos su diferencial $d\lambda_{t|\mathbf{p}_1} : T_{\mathbf{v}_1}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) \equiv \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1} \equiv T_{\mathbf{p}_2}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})$. Tenemos:

$$d\lambda_{t|\mathbf{p}_1}(\mathbf{v}) = (\tau \mapsto \lambda_t(\mathbf{p}_1 + \tau\mathbf{v}))'_{\tau=0} = (\tau \mapsto \mathbf{p}_2 + t\tau\mathbf{v}))'_{\tau=0} = t\mathbf{v}.$$

Veamos cómo se comporta la métrica hermitiana:

$$\mathbf{h}_{\mathbf{p}_2}(d\lambda_{t|\mathbf{p}_1}(\mathbf{v}_1), d\lambda_{t|\mathbf{p}_1}(\mathbf{v}_2)) = h(t\mathbf{v}_1, t\mathbf{v}_2) = |t|^2\, h(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = |t|^2\, \mathbf{h}_{\mathbf{p}_1}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

En particular, λ_t es una isometría si y solo si $|t| = 1$.

Consideremos ahora la métrica hermitiana $\widetilde{\mathbf{h}}$ de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{p}} := \frac{h}{\|\mathbf{p}\|^2}$ (por esta división solo lo definimos en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$). Tenemos

$$\widetilde{\mathbf{h}} = \frac{1}{\|\mathbf{z}\|^2} \sum_{j=0}^{n} dz_j \otimes d\bar{z}_j.$$

Con las notaciones anteriores:

$$\widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{p}_2}(d\lambda_{t|\mathbf{p}_1}(\mathbf{v}_1), d\lambda_{t|\mathbf{p}_1}(\mathbf{v}_2)) = \frac{h(t\mathbf{v}_1, t\mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{p}_2\|^2} = \frac{|t|^2\, h(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{|t|^2\, \|\mathbf{p}_1\|^2} = \widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{p}_1}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Es decir, λ_t es una isometría de $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}, \widetilde{\mathbf{h}})$, $\forall t \in \mathbb{C}^*$.

Fijemos ahora $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Sabemos que $T_{[\mathbf{p}]}\mathbb{P}^n$ es un espacio vectorial de dimensión n. Consideremos la aplicación

$$d\pi_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) \equiv \mathbb{C}^{n+1} \to T_{[\mathbf{p}]}\mathbb{P}^n$$

No es difícil ver que esta diferencial es sobreyectiva, usando por ejemplo una carta que contenga $[\mathbf{p}]$ en su imagen. Además, $d\pi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ ya que la curva $\tau \mapsto [\mathbf{p} + \tau\mathbf{p}] = [\mathbf{p}]$ es constante ($|\tau|$ es *pequeño*). Por dimensiones, $\ker d\pi_{\mathbf{p}} = \mathbb{C}\langle\mathbf{p}\rangle$. Sea $H_{[\mathbf{p}]} := \mathbb{C}\langle\mathbf{p}\rangle^{\perp}$ (observemos que este espacio no depende del representante $\mathbf{p}$ de $[\mathbf{p}]$); es un espacio vectorial de dimensión n para el que la restricción $d\pi_{\mathbf{p}|} : H_{[\mathbf{p}]} \to T_{[\mathbf{p}]}\mathbb{P}^n$ es un isomorfismo. Podemos tener la tentación de identificar ambos espacios pero tenemos que tener cuidado, ya que si $t \in \mathbb{C}^*$, el siguiente diagrama nos dice cómo cambia con otro representante:

$$\begin{tikzcd}
H_{[\mathbf{p}]} \arrow[dr, "d\pi_{\mathbf{p}}"] \arrow[dd, "d\lambda_{t|\mathbf{p}}"', "=\cdot t"] & \\
& T_{[\mathbf{p}]}\mathbb{P}^n \\
H_{[\mathbf{p}]} \arrow[ur, "d\pi_{t\mathbf{p}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Esta propiedad nos va a permitir definir una métrica hermitiana $\widehat{\mathbf{h}}$ en $\mathbb{P}^n$ a partir de la métrica $\widetilde{\mathbf{h}}$, ya que la flecha vertical anterior es una isometría para esa métrica y la definición no depende del representante escogido.

Vamos a estudiar esta métrica en cartas. Fijemos la carta $\Psi_0 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^n$; dado $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$, tenemos la base $\frac{\partial}{\partial z_j}_{|[1:\underline{z}]}$, $1 \leq j \leq n$. Vamos a denotar $w_0, w_1, \ldots, w_n$ las coordenadas en $\mathbb{C}^{n+1}$ para diferenciarla. Los campos anteriores provienen mediante $d\pi$ de los campos $\frac{\partial}{\partial w_j}_{|(1,\underline{z})}$. La proyección de este vector para estar en $H_{\mathbf{p}}$ es

$$\partial_{j,(1,\underline{z})} := \frac{\partial}{\partial w_j}_{|(1,\underline{z})} - \frac{\bar{z}_j}{1 + \|\underline{z}\|^2}\left(\frac{\partial}{\partial w_0}_{|(1,\underline{z})} + \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial w_j}_{|(1,\underline{z})}\right).$$

Con estos datos,

$$h_{jk}(\underline{z}) := \widehat{\mathbf{h}}_{|[1:\underline{z}]}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}_{|[1:\underline{z}]}, \frac{\partial}{\partial z_k}_{|[1:\underline{z}]}\right) = \widetilde{\mathbf{h}}_{|(1,\underline{z})}\left(\partial_{j,(1,\underline{z})}, \partial_{k,(1,\underline{z})}\right) = \frac{h\left(\partial_{j,(1,\underline{z})}, \partial_{k,(1,\underline{z})}\right)}{1 + \|\underline{z}\|^2}.$$

Así,

$$h_{jj}(\underline{z}) = \frac{1}{1 + \|\underline{z}\|^2}\left(1 - \frac{|z_j|^2}{1 + \|\underline{z}\|^2}\right) = \frac{1 + \|\underline{z}\|^2 - |z_j|^2}{\left(1 + \|\underline{z}\|^2\right)^2},$$

y si $j \neq k$

$$h_{jk}(\underline{z}) = \frac{-\bar{z}_j z_k}{\left(1 + \|\underline{z}\|^2\right)^2}.$$

Es decir, podemos escribir

$$\widehat{\mathbf{h}}_{|[1:\underline{z}]} = \frac{1}{\left(1+\|\underline{z}\|^2\right)^2}\left(\sum_{j=1}^{n}(1+\|\underline{z}\|^2-|z_j|^2)dz_j\otimes d\bar{z}_j - \sum_{1\leq j<k\leq n}(\bar{z}_j z_k dz_j\otimes d\bar{z}_k+\bar{z}_k z_j dz_k\otimes d\bar{z}_j)\right).$$

La métrica $\widehat{\mathbf{h}}$ se conoce como métrica de Fubini-Study.

Ejemplo 3.2. Si $n = 1$, caso de la recta proyectiva, tenemos

$$\widehat{\mathbf{h}}_{|[1:z]} = \frac{dz\otimes d\bar{z}}{\left(1+|z|^2\right)^2}.$$

Si pasamos a coordenadas reales nos queda

$$\widehat{\mathbf{h}}_{|[1:z]} = \frac{dx\otimes dx + dy\otimes dy}{\left(1+|z|^2\right)^2} - i\frac{dx\wedge dy}{\left(1+|z|^2\right)^2}.$$

La parte real es una métrica riemanniana que corresponde a la esfera de radio $\frac{1}{2}$. Para ver la métrica en $\mathbb{S}^2$ es tan sencillo como tomar la carta de la proyección estereográfica y nos sale esta métrica multiplicada por un factor 4. Esto tiene sentido, ya que como hemos visto la recta proyectiva compleja es homeomorfa a la esfera, y cabe esperar que estemos tomando una métrica que funcione bien.

Una métrica hermitiana induce una métrica riemanniana y esta a su vez una estructura de espacio métrico. Vamos a estudiar la estructura inducida primero en $\mathbb{P}^1$ y luego la generalizaremos a $\mathbb{P}^2$ (extendible hasta $\mathbb{P}^n$). Esto más un par de resulados interesantes van a quedar recogidos en la siguiente proposición.

Proposición 3.3. *El plano proyectivo tiene un diámetro de $\frac{\pi}{2}$ y además $\forall P\in\mathbb{P}^2$, el conjunto de puntos donde se alcanza el máximo para la distancia a P es una recta proyectiva.*

Demostración. Acabamos de ver una métrica en $\mathbb{P}^1$ para la carta

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{\Psi_0} \mathbb{P} \\ t &\longmapsto [1:t] \end{aligned}$$

Esto nos permite integrar y medir distancias en esta. Sea $[1:t]\in\mathbb{P}^1$ con $t\in\mathbb{C}$. Sin pérdida de generalidad vamos a ver la distancia al origen $[1:0]$ desde este punto.

Como hemos visto que tenemos la misma métrica que en una esfera tomando la carta de la proyección estereográfica, vamos a denotarla como p por comodidad. Tenemos entonces que $p(0)$ es el polo sur, y si tomamos los círculos máximos que pasan por el polo sur (geodésicas) y hacemos la antiimagen por la carta p, corresponden exactamente a las rectas que pasan por el origen.

De aquí, simplemente con integrar la métrica riemanniana que teníamos, se sigue

$$D = d(0,t) = \arctan|t|$$

por tanto, $\operatorname{tg} D = |t|$

Ahora, llamamos $\mathbf{u} = \binom{1}{0}$ y $\mathbf{v} = \binom{1}{t}$, y sea $C := \frac{|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\in\mathbb{C}$ (este valor es independiente del representante escogido).

Tenemos que

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+|t|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\operatorname{tg} D)^2}} = |\cos D|$$

Por tanto, $D = |\arc\cos C| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Este resultado nos dice que tomando dos puntos en la recta proyectiva no es necesario calcular la geodésica que los une para calcular la distancia. Basta tomar dos representantes de estos puntos y calcular el arcocoseno del ángulo que forman. Notar además, que el diámetro de $\mathbb{P}^1$ es $\frac{\pi}{2}$, ya que tiene la misma métrica que una esfera de radio $\frac{1}{2}$.

Vamos a extender el resultado a $\mathbb{P}^2$. Tomamos $P \in \mathbb{P}^2$ y un vector direccional $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{P}^2$. Sea $L \subset \mathbb{P}^2$ la recta proyectiva que pasa por P tal que $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}L$, por cambios de coordenadas podemos suponer

$$L = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 | z = 0\}$$

Ahora definimos sobre L la siguiente isometría

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 &\xrightarrow{\quad\Phi\quad} \mathbb{P}^2 \\ [x : y : z] &\longmapsto [x : y : -z] \end{aligned}$$

la cual deja todos los puntos de la recta fijos, es decir, $\Phi(L) = L$ más el punto $[0 : 0 : 1]$. Como deja todos puntos de L fijos, al aplicar la diferencial sobre los vectores tangentes a los puntos de L estos también se quedan fijos.

Entonces, ahora tomamos la geodésica asociada a P y $\mathbf{v}$. Como por está isometría P y $\mathbf{v}$ se quedan fijos, por la unicidad de las geodésicas esa geodésica se queda fija, y es más se queda fija en el lugar de puntos fijos. Se sigue que la geodésica está en L por conectividad. Por tanto, todas las geodésicas están en rectas proyectivas, cuya métrica ya hemos estudiado.

Acabamos de ver que en el plano proyectivo podemos calcular la distancia entre dos puntos del mismo modo que habíamos mostrado anteriormente. Se sigue que dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{P}^2$, estos cumplen que $d(P, Q) \leq \frac{\pi}{2}$ ya que la geodésica que los une esta contenida L, y $d(P, Q) = \frac{\pi}{2}$ si y solo si $P \perp Q$, porque significaría que su coseno toma valor 0. Si ahora tomamos un punto $P \in \mathbb{P}^2$, y a su vez, tomamos el siguiente conjunto

$$H = \left\{ Q \in \mathbb{P}^2 | d(P, Q) = \frac{\pi}{2} \right\}$$

es decir, los puntos más lejanos a P. Resulta que si veo $P = \mathbb{C}\langle \mathbf{u} \rangle$, es decir una recta vectorial engendrada por un vector $\mathbf{u}$, $H = P^{\perp}$ y si esto en vez de $\mathbb{P}^2$ lo vemos en $\mathbb{C}^3$, lo que tenemos es un espacio vectorial de dimensión compleja 1 y su ortogonal otro espacio vectorial de dimensión compleja 2. Esto tiene unas consecuencias métricas, y son que $\mathbb{P}^2$ tiene diámetro $\frac{\pi}{2}$ y el conjunto de puntos donde se alcanza el máximo de este diámetro es una recta proyectiva, que además es $P^{\perp}$ para algún $P \in \mathbb{P}^2$. Además, si $P = [\mathbf{u}], Q = [\mathbf{w}]$, la fórmula $\cos d(P, Q) = \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$ sigue siendo válida. $\square$

Esto tendrá más consecuencias que veremos una vez que hayamos introducido las cónicas en la última sección del capítulo. Antes de ello, vamos a ver que métrica tenemos en $\mathbb{P}^2$ y veremos una breve sección de curvas algebraicas.

Ejemplo 3.4. Si $n = 2$, caso del espacio proyectivo complejo, tenemos

$$\widehat{\mathbf{h}}_{|[1:z]} = \frac{(1 + \|z\|^2 - |z_1|) dz_1 \otimes d\bar{z}_1 + (1 + \|z\|^2 - |z_2|) dz_2 \otimes d\bar{z}_2 - z_1 \bar{z}_2 dz_1 \otimes dz_2 + z_2 \bar{z}_1 dz_2 \otimes dz_1}{\left(1 + \|z\|^2\right)^2}.$$

Esta expresión es nuestra métrica en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^2$, la cuál usaremos más adelante, restringiéndola a las cónicas y así, poder caracterizarlas. Pero para ello vamos a introducir a estas primero, ver que expresión toman en $\mathbb{P}^2$ y computaremos con `Sagemath` dicha métrica en alguna carta que las parametrice.

3.2. Curvas algebraicas

En esta sección no nos vamos a parar a estudiar con detalle los objetos que introducimos, pero son necesarios para nuestro estudio. Podríamos hacerlo en general pero vamos a introducir todo directamente sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

Definiciones 3.5. Un polinomio $F \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ se dice que es homogéneo de grado d si todos sus monomios tienen grado d.

Proposición 3.6. *Un polinomio $F \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ es homogéneo de grado de d si y sólo si para cada $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$F(\lambda X_0, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_0, \ldots, X_n)$$

Definiciones 3.7. Se llama hipersuperficie de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ a un conjunto

$$V(F) = \{a \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} | F(a) = 0\}$$

donde $F \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ es homogéneo de grado positivo.

Observación 3.8. Si $n = 2$ diremos que $V(F)$ es una curva algebraica projectiva plana. Si además el polinomio es de grado 2 diremos que es una cónica.

Tiene sentido hablar de los puntos donde se anula un polinomio homogéneo en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ya que como vemos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \mathbb{P}^n & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

tenemos que $\pi^{-1}(V(F)) = F^{-1}(0)$. Usando las propiedades de la topología cociente, obtenemos que son cerradas. Ya solo nos queda ver que es una curva algebraica lisa.

Proposición 3.9 (Fórmula de Euler). *Si $F \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ es homogéneo de grado d entonces*

$$F_1 X_1 + \cdots + F_n X_n = dF$$

donde $F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$.

Definición. Una curva algebraica C se dice *lisa* si $\forall [x_0 : x_1 : x_2] \in C$ los valores $F_i(x_0, x_1, x_2)$ no se anulan simultáneamente. La recta tangente a C en $[x_0 : x_1 : x_2]$ es la recta de ecuación

$$F_0(x_0, x_1, x_2)X_0 + F_1(x_0, x_1, x_2)X_1 + F_2(x_0, x_1, x_2)X_2 = 0.$$

3.3. Caracterización de las cónicas en $\mathbb{P}^2$

Sea $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ polinomio homogéneo de grado 2, es decir, cumple que $F(\lambda X) = \lambda^2 F(x)$. Entonces,

$$C = \{[x] \in \mathbb{P}^2 | F(x) = 0\}$$

siendo C una cónica, bien definida como hemos visto en la sección anterior. En realidad cualquier cónica se puede expresar mediante la ecuación

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \qquad A \text{ matriz simétrica no degenerada.}$$

Ahora, vamos a mostrar un lema y una proposición que nos va a permitir encontrar una expresión general para la nuestro polinomio homogéneo F que nos caracteriza el conjunto el conjunto de cónicas.

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n+1$. Sean $h : V \times V \to \mathbb{C}$ un producto escalar hermitiano, y $Q : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma bilineal simétrica no degenerada ($Q(v,w) = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow v = 0$). Ahora sea $\mathbb{v} = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in V$ una base ortonormal (es decir, $h(v_i, v_j) = \delta_{ij}$). Entonces, sean $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tal que $\mathbf{v} = \mathbb{v}X$ y $\mathbf{w} = \mathbb{v}Y$ y tenemos así las siguientes expresiones para h y Q,

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = X^t \bar{Y} \qquad Q(v,w) = X^t A Y$$

con $A = (Q(v_i, v_j))$ matriz simétrica con $\det A \neq 0$. Ahora, recordemos el conjunto

$$\mathbb{S}_h^{2n+1} := \{\mathbf{v} \in V \mid \|\mathbf{v}\| = \sqrt{h(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = 1\} \subset V \setminus \{0\}$$

que es una variedad compacta homeomorfa a la esfera de dimensión $2n+1$.

Lema 3.10. *En las condiciones anteriores, sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{S}_h^{2n+1}$ tal que F alcanza un máximo en $\boldsymbol{v}$ con $F : \mathbb{S}_h^{2n+1} \to \mathbb{R}$ tal que $F(\boldsymbol{v}) = Q(v,v)\overline{Q(v,v)}$. Entonces $(\mathbb{C}\langle \boldsymbol{v} \rangle)^{\perp h} = (\mathbb{C}\langle \boldsymbol{v} \rangle)^{\perp Q}$.*

Demostración. Ambos espacios son de la misma dimensión, así que bastará con demostrar un contenido.

$\subseteq$) Sea $\mathbf{w} \in \overline{(\mathbb{C}\langle \mathbf{v} \rangle)}^{\perp h}$ con $\|\mathbf{w}\| = 1$, por tanto sabemos que $h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$. Tenemos que $F(\mathbf{v}) = (X^t A X)\overline{(X^t A X)}$. Ahora, definimos $g(t) = F(\gamma(t))$ con $\gamma(t) = \cos t \mathbf{v} + \operatorname{sen} t \mathbf{w}$, y se sigue que

$$0 = g'(0) = (Y^t A X)\overline{(X^t A X)} + (X^t A X)\overline{(Y^t A X)} = 2 \operatorname{Re}\left((Y^t A X)(X^t A X)\right)$$

Como $i\mathbf{w}$ también está en el ortogonal para h, se sigue que la parte imaginaria también es igual a 0, por tanto,

$$0 = (Y^t A X)(X^t A X)$$

con el segundo término distinto de 0 ya lo tenemos, $\mathbf{w} \in (\mathbb{C}\langle \mathbf{v} \rangle)^{\perp Q}$ □

Con este lema, se llega a la siguiente proposición por inducción.

Proposición 3.11. *Sea $Q : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma bilineal simétrica, entonces $\exists \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, base unitaria de V tal que la matriz de Q en esta base es diagonal, es más, $\exists r_0 \geq r_1 \geq \cdots \geq r_n > 0$ tal que*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

Como podemos multiplicar por un escalar no nulo y la cónica no cambia, podemos suponer $r_0 = 1$.

Un polinomio homogéneo de grado 2 es una forma cuadrática, y puede ser representado como una matriz simétrica, en este caso, nos interesa la de esta última proposición, en el caso $n = 2$.

Cualquier cónica C se puede transformar con un cambio de coordenadas que preserva el producto riemanniano en

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_0^2 + r_1^2 x_1^2 + r_2^2 x_2^2$$

Es decir, denotando $r_1 = r$ y $r_2 = s$, tenemos que

$$C_{r,s} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 | x_0^2 + r^2 x_1^2 + s^2 x_2^2 = 0\}$$

con $0 < s \leq r \leq 1$.

Antes de estudiar $C_{r,s}$ como una variedad hermitiana o riemanniana, vamos a ver su comportamiento con respecto a la distancia de $\mathbb{P}^2$.

Sea C una cónica lisa definida mediante una matriz simétrica A. Sea $P = [x_0 : y_0 : z_0] \in C$, entonces $P^\perp$ viene dado por la recta:

$$P^\perp = \{\bar{x}_0 X + \bar{y}_0 Y + \bar{z}_0 Z = 0\}$$

Esta recta viene determinada por las coordenadas homogéneas $[\bar{x}_0 : \bar{y}_0 : \bar{z}_0]$. Por otra parte, es fácil calcular que la recta tangente a C en P viene determinada por las coordenadas homogéneas asociadas a

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix} A.$$

Como consecuencia

$$0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow 0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} A^{-1} A A^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

En particular deducimos que un punto $P \in C$, C determinada por A, cumple que su ortogonal es tangente a la misma cónica, si y solo si $\overline{P}$ pertenece a la cónica determinada por A^{-1}. Como todas las cónicas se pueden expresar como $C_{r,s}$, podemos resumir el comportamiento con respecto a la distancia como sigue.

Teorema 3.12. *Sea una cónica lisa* $C_{r,s} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 | x_0^2 + r^2 x_1^2 + s^2 x_2^2 = 0\}$ *con* $0 < s \leq r \leq 1$. *Entonces:*

- *Si* $s = r = 1$, *todos puntos* $P \in C_{r,s}$ *cumplen que* $P^\perp$ *es tangente a la cónica.*
- *Si* $s = r < 1$, *solo los puntos* $P = [0 : \pm i : 1] \in C_{r,s}$ *cumplen que* $P^\perp$ *es tangente a la cónica.*
- *Si* $s < r = 1$, *solo los puntos* $P = [\pm i : 1 : 0] \in C_{r,s}$ *cumplen que* $P^\perp$ *es tangente a la cónica.*
- *Si* $s < r < 1$, *solo los puntos* $P = [\pm\sqrt{r^4 - s^4} : \pm r\sqrt{s^4 - 1} : s\sqrt{1 - r^4}] \in C_{r,s}$ *cumplen que* $P^\perp$ *es tangente a la cónica.*

Una vez hemos visto esta característica, vamos a seguir estudiar las propiedades métricas de las cónicas de $\mathbb{P}^2$. Con la expresión que le estamos dando a las cónicas $C_{r,s}$ vamos a tratar de parametrizarlas con alguna carta Φ. Es decir, buscamos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\quad\quad\Phi\quad\quad} & \mathbb{P}^2 \\ [t_1 : t_2] & \longmapsto & [f_2(t_0, t_1) : g_2(t_0, t_1) : h_2(t_0, t_1)] \end{array}$$

tal que $\Phi(\mathbb{P}^1) = C_{r,s}$. Para ello, tomamos un punto en $C_{r,s}$, por ejemplo, el punto $[r : i : 0]$ y todas las rectas que pasan por este que vienen dadas por la la ecuación $r(t) := (x_0 + irx_1) + tx_2, t \in \mathbb{C}$. Si hacemos la intersección de todas estas rectas con $C_{r,s}$ obtenemos así una parametrización de $C_{r,s}$. Despejando una variable de $r(t) = 0$ y sustituyéndola en el polinomio homogéneo de $C_{r,s}$ obtenemos

$$r \cap C_{r,s}(t) = \left[\frac{s^2 - t^2}{2t} : i\frac{s^2 + t^2}{2rt} : 1 \right],$$

y por tanto, la siguiente carta para todas las cónicas de $\mathbb{P}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}^1 &\xrightarrow{\qquad\phi\qquad} \mathbb{P}^2 \\ t &\longmapsto \big[r(s^2-t^2) : i(s^2+t^2) : 2rt\big] \end{aligned}$$

Aunque la imagen no está contenida en una carta estándar del plano proyectivo (para las que tenemos expresiones del producto hermitiano), podemos calcular el producto hermitiano en $t \neq 0$ y luego extender por continuidad. Ahora tenemos que ver que métrica tenemos en estas, para ello llamamos

$$u = \frac{s^2-t^2}{2t} \qquad v = i\frac{s^2+t^2}{2rt}$$

y calculamos $du, dv, d\bar{u}, d\bar{v}$

$$du = \frac{-(t^2+s^2)}{2t^2}dt \qquad d\bar{u} = \frac{-(\bar{t}^2+s^2)}{2\bar{t}^2}d\bar{t} \qquad dv = \frac{t^2-s^2}{2rt^2}dt \qquad d\bar{v} = \frac{\bar{t}^2-s^2}{2r\bar{t}^2}d\bar{t}$$

Ahora usando la fórmula del Ejemplo 3.4. de la métrica hermitiana en $\mathbb{P}^2$, calculamos la expresión analítica de $\widehat{h}$, la cual denotaremos $h_{C_{r,s}}$ que viene dada de la siguiente forma

$$h_{C_{r,s}} = \frac{4\left(r^2s^4 + r^2s^2t^2 + 4\,s^4t\bar{t} + r^2s^2\bar{t}^2 + r^2t^2\bar{t}^2 + s^4 - s^2t^2 - s^2\bar{t}^2 + t^2\bar{t}^2\right)r^2}{\left(r^2s^4 - r^2s^2t^2 - r^2s^2\bar{t}^2 + r^2t^2\bar{t}^2 + s^4 + s^2t^2 + 4\,r^2t\bar{t} + s^2\bar{t}^2 + t^2\bar{t}^2\right)^2}$$

Por provenir de una métrica hermitiana, la métrica riemanniana es isoterma en esta carta, es decir es de la forma $h_{r,s}(x,y)(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$, donde $z = x + iy$. Si definimos

$$K_1 = \left(r^2+1\right)s^4 + 4\left(x^2+y^2\right)s^4 + 2\left(r^2-1\right)\left(x^2-y^2\right)s^2 + \left(r^2+1\right)\left(x^2+y^2\right)^2$$

$$K_2 = \left(r^2+1\right)s^4 - 2\left(r^2-1\right)\left(x^2-y^2\right)s^2 + \left(r^2+1\right)\left(x^2+y^2\right)^2 + 4\left(x^2+y^2\right)r^2$$

la expresión en coordenadas reales ahora queda muy sencilla

$$h_{r,s} = 4r^2\frac{K_1}{K_2^2}$$

Y con esta expresión de la métrica vamos a poder calcular las curvaturas máxima y mínima de las cónicas. Como nuestra métrica es una aplicación conforme, y la carta escogida para parametrizar las cónicas isoterma, vamos a poder obtener la expresión de la curvatura de Gauss sin necesidad de calcular los símbolos de Christoffel, sino que viene dada por la siguiente expresión

$$K_{r,s} = -e^{-2\tilde{h}_{r,s}}((\tilde{h}_{r,s})_{xx} + (\tilde{h}_{r,s})_{yy})$$

con $h_{r,s} = e^{2\tilde{h}_{r,s}}$. Calculamos $K_{r,s}$ con `Sagemath` (Anexo A) y la expresamos en términos de las funciones anteriores:

$$K_{r,s} = 4 - \frac{2s^4K_2^3}{r^2K_1^3}.$$

Y una vez que tenemos la expresión de la curvatura, llegamos a la caracterización de las cónicas que vamos a enunciarla a modo de teorema.

Teorema 3.13. *Sea una cónica lisa* $C_{r,s} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 | x_0^2 + r^2x_1^2 + s^2x_2^2 = 0\}$ *con* $0 < s \leq r \leq 1$*. Entonces podemos conocer las curvaturas máxima y mínima, distinguiendo entre los siguientes casos:*

- *Si* $s = r = 1$*, tenemos curvatura constante* $K = 2$*.*

- *Si* $s = r < 1$*, tenemos* $K_{\text{máx}} = -2s^2 + 4$ *en* $[-i(s^2 + y^2) : s^2 - y^2 : 2sy]$ *y* $K_{\text{mín}} = \frac{2(2s^4-1)}{s^4}$ *en los puntos* $[0 : \pm i : 1]$.
- *Caso* $s < r = 1$*, tenemos* $K_{\text{máx}} = -2s^4 + 4$ *en los puntos* $[\pm i : 0 : 1]$ *y* $K_{\text{mín}} = \frac{2(2s^2-1)}{s^2}$ *en* $[s^2 - x^2 : i(s^2 + x^2) : 2x]$.
- *Caso* $s < r < 1$*, tenemos* $K_{\text{máx}} = -\frac{2\left(s^4-2\,r^2\right)}{r^2}$ *en el punto* $[r : i : 0]$ *y* $K_{\text{mín}} = \frac{2\left(2\,r^2s^2-1\right)}{r^2s^2}$ *en el punto* $[0 : \frac{-is}{r} : 1]$*. Además en este caso, tenemos dos puntos sillas en* $[\pm is : 0 : 1]$ *donde* $K = -\frac{2\left(r^4-2\,s^2\right)}{s^2}$.

Todo este teorema queda reducido a calcular máximos y mínimos de K, que es equivalente a estudiarlos en la función $\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^3$. Todas las cuentas quedan recogidas en el Anexo A donde hemos incluido el código de trabajo de `Sagemath`.

De este Teorema vemos que una vez que tenemos las curvatura de una cónica $C_{r,s}$ queda totalmente determinada ya que podemos recuperar tanto r como s a partir de las curvaturas máxima y mínima. Si nos fijamos en el primer caso, podemos sacar una conclusión bastante interesante, al obtener curvatura constante $K = 2$ sabemos que se corresponde a la curvatura de una esfera de radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$, y antes hemos visto que la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ está dotada de la misma métrica que una esfera de radio $\frac{1}{2}$ y además, es homeomorfa a una esfera, con lo que llegamos a que existe una *homotecia* entre la recta proyectiva y la cónica con $r = s = 1$, es decir, de la forma $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Corolario 3.14. *Dos cónicas son homotéticas solamente si existe una isometría entre ambas.*

Si una métrica riemanniana la multiplicamos por una constante $a > 0$, la curvatura de Gauss de la métrica resultante es $\frac{K}{a^2}$. Las razones entre las curvaturas máxima, mínima, además de los valores en los puntos silla, nos permiten recuperar este resultado. Otra vez la demostración pasa por ver si hay alguna relación (razón de homotecia) entre los cocientes de las curvaturas mínimas (o máximas) en todos los casos de las cónicas. Hemos demostrado con `Sagemath` que no existe tal relación, salvo que evidentemente, si son isométricas. Igual que antes todas cuentas quedan recogidas en el Anexo B.

Con esto hemos concluido con el objetivo del trabajo, que era sacar toda la información en la medida de lo posible de las rectas y cónicas, y finalmente caracterizarlas, por tanto, damos por finalizada la investigación. Este trabajo se podría continuar estudiando lo que ocurre con curvas de grado mayor.

Bibliografía

[1] E. ARTAL, *Álgebra lineal y geometría diferencial*, Universidad de Zaragoza, 2018.

[2] A. RODÉS, *Variedades diferenciables*, Universidad de Zaragoza, 2018.

[3] E. ARTAL, *Geometría diferencial*, Universidad de Zaragoza, 2017.

[4] WIKIPEDIA, *Projective space*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Projective_space`.

[5] BRUNO MARTELLI, *Hyperbolic geometry, surfaces, and 3-manifolds*, Dipartimento Di Matematica "TONELLI", Largo Pontecorvo 5, 2013.

[6] BRUNO BUCHBERGER *Gröbner Bases: A Short Introduction for Systems Theorists*, Research Institute for Symbolic Computation University of Linz, A4232 Schloss Hagenberg, Austria. `http://www.risc.jku.at/publications/download/risc_2211/2001-02-19-A.pdf`

Anexo A

A.1. Curvatura

Hoja de cálculo de la curvatura de las cónicas.

```
var('z1,z2,t,dz1,dz2,dt',domain='complex')
var('s,r',domain='real')
assume(0<s<=r<=1)

z1=(s^2-t^2)/2/t
z2=I*(s^2+t^2)/2/t/r
dz1=(z1.derivative(t)*dt).factor()
dz2=(z2.derivative(t)*dt).factor()
dz1bar=dz1.conjugate()
dz2bar=dz2.conjugate()

den=((1+z1*z1.conjugate()+z2*z2.conjugate())^2).factor()
omega0=((1+z2*z2.conjugate())*dz1*dz1bar+(1+z1*z1.conjugate())*dz2*dz2bar-
z1.conjugate()*z2*dz1*dz2bar-z2.conjugate()*z1*dz2*dz1bar).factor()

h=omega0/den/dt/dt.conjugate()

var('x,y',domain='real')
H=h(t=x+I*y).factor()
h0=1/2*log(H)
num=h0.derivative(x,2)+h0.derivative(y,2)
K=(-num/H).factor()
```

A.2. Curvatura máxima/mínima, caso $s = r = 1$

Partimos de la hoja anterior y evaluamos

```
K(r=1,s=1).factor()
```

Al obtener curvatura constante, ya terminamos.

A.3. Curvatura máxima/mínima, caso $s \neq r = 1$

De nuevo, partimos de la primera hoja.

```
K=K(r=1).factor()

R.<s1,x1,y1>=QQ[]
F=R.fraction_field()
K1=F(K(x=x1,y=y1,s=s1))
K1x=K1.derivative(x1).numerator()
K1y=K1.derivative(y1).numerator()
J=R.ideal(K1x,K1y)

U=K1x.gcd(K1y)
U.factor()

U1=U.factor()[3][0]

K1x1=R(K1x/U)
K1y1=R(K1y/U)

v1=K(x=0,y=0).factor()

a=s^2-x^2
v2=K.subs(y^2==a,y^4==a^2,y^6==a^3,y^8==a^4,y^10==a^5,y^12==a^6).factor()
```

A.4. Curvatura máxima/mínima, caso $s = r$

```
K=K(r=s).factor()

R.<s1,x1,y1>=QQ[]
F=R.fraction_field()
K1=F(K(x=x1,y=y1,s=s1))
K1x=K1.derivative(x1).numerator()
K1y=K1.derivative(y1).numerator()
J=R.ideal(K1x,K1y)

U=K1x.gcd(K1y)
U.factor()

U2=U.factor()[-1][0]
p=s1^2*(x1^2-s1^2)^2

U1=U.factor()[0][0]

K1x1=R(K1x/U)
K1y1=R(K1y/U)

v1=K(x=0,y=0).factor()

v2=K(x=s,y=0).factor()
```

A.5. Curvatura máxima/mínima, caso $s \neq r \neq 1$

Partimos de la primera hoja.

```
A=Matrix(2,[K.derivative(i,j) for i,j in [(x,x),(x,y),(y,x),(y,y)]])

H(x=0,y=0).factor()

(H(x=0,y=0)^-1*A(x=0,y=0)).trace().factor()

(H(x=0,y=0)^-1*A(x=0,y=0)).det().factor()

R.<r1,s1,x1,y1>=QQ[]
F=R.fraction_field()
K1=F(K(x=x1,y=y1,r=r1,s=s1))
K1x=K1.derivative(x1).numerator()
K1y=K1.derivative(y1).numerator()
J=R.ideal(K1x,K1y)
U=K1x.gcd(K1y)
U.factor()

U1=U.factor()[1][0]

p=(y1^2-s1^2)^2+r1^2*(x1^2-s1^2)^2

K1x1=R(K1x/U)
K1y1=R(K1y/U)
K1x2=R(K1x1/x1)/48
K1y2=R(K1y1/y1)/48
K1x2.degree(y1),K1y2.degree(y1)

cfx=K1x2.coefficient({y1:4})

cfy=K1y2.coefficient({y1:4})

(cfx*K1y2-cfy*K1x2).factor()

A1=R((cfx*K1y2-cfy*K1x2)/4/s1^2/(r1^4-1))

dfx=K1x2.coefficient({x1:4})

dfy=K1y2.coefficient({x1:4})

Matrix(2,[cfx,cfy,dfx,dfy]).det().factor()

A2=R((dfx*K1y2-dfy*K1x2)/4/s1^2/(r1^4-1))

(A1-A2).factor()

A2a=(A1-A2).factor()[3][0]
```

```
v1=K(x=0,y=0).factor()

%Punto silla
v2=K(x=0,y=s).factor()

%Punto silla
bool(K(x=0,y=-s).factor()==v2)

v3=K(y=0,x=-s).factor()
```

Anexo B

B.1. Homotecias

Hoja de cálculo de razón de homotecia entre las cónicas.

```
R.<r,r1,s,s1>=PolynomialRing(QQ,order='lex')

v1=-2*(s-2*r)/r
v2=v1(r=s,s=r)
v3=2*(2*r*s-1)/r/s

w1,w2,w3=[_(r=r1,s=s1) for _ in [v1,v2,v3]]

p1=(v2*w3-w2*v3).numerator()
p2=(v3*w1-w3*v1).numerator()
p3=(v1*w2-w1*v2).numerator()

p3.factor()

p1=R(p1/4)
p2=R(p2/4)
p3=R(p3/4)
pt=R(pt/96)

J=R.ideal(p1,p2,p3)
P=J.minimal_associated_primes()
len(P)

P[2]
P[1]
P[0]

A=P[2].groebner_basis()
len(A)
A[1]
for _ in A:
    for vr in R.gens():
        if _.degree(vr)==1:
            print A.index(_),vr
            show(_.coefficient({vr:1}).factor())
            show(_.coefficient({vr:0}).factor())

ra=-A[1].coefficient({r:0})/A[1].coefficient({r:1})
```

```
sa=-A[1].coefficient({s:0})/A[1].coefficient({s:1})
J1=R.ideal([_(r=ra).numerator() for _ in A])
B=J1.groebner_basis()
len(B)

f=B[0]

s2a=-f.coefficient({s:0})/f.coefficient({s:2})
ra.factor()
ra2=(r1 - 2*s1)^2/(2*r1 - s1)^2*s2a
P

ra(r1=s1^2/2)
pt1=pt(r=ra).numerator().factor()[-1][0]

Ja=R.ideal(f,pt1)
Pa=Ja.minimal_associated_primes()
ra==(ra.numerator()/ra.denominator())
def sdiv3(p):
    a=vector(p.coefficients())
    u=p.exponents()
    u1=[r^i*r1^j*s^(k/3)*s1^(l) for i,j,k,l in u]
    return a*vector(u1)

ra3=sdiv3(ra.numerator())/ra.denominator()

J1=R.ideal([_(r=ra).numerator() for _ in A])
B=J1.groebner_basis()
f=sdiv3(B[0])
f.discriminant(s).factor()
print [_[2] for _ in B[0].exponents()]

B[0].discriminant(s).factor()

r1a=-A[4].coefficient({r1:0})/A[4].coefficient({r1:1})
J2=R.ideal([_(r1=r1a).numerator() for _ in A])
L2=J2.minimal_associated_primes()
L2[1]
G=L2[0].groebner_basis()
for _ in G:
    for vr in R.gens():
        if _.degree(vr)==1:
            print G.index(_),vr

print [_[3] for _ in G[0].exponents()]

R(G[0](r=ra).numerator()/s1^3/(s^3-1)^2)-B[0]
B[0]
q=G[0]
print q.exponents()
```

```
dis=q.coefficient({s1:3})^2-4*q.coefficient({s1:6})*q.coefficient({s1:0})
dis.factor()
dis0=dis.factor()[-1][0]
dis0

dis0(s=0)/8
dis0(r=1).factor()
dis(s=r).factor()
```