Productos infinitos

Abel Martínez Bravo

Trabajo de fin de grado en Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Curso 2017/2018

Director del trabajo: Julio José Bernués Pardo

Prólogo

Este trabajo tiene el objetivo de dar una pequeña introducción a los productos infinitos. Los productos infinitos son expresiones de la forma $u_1 u_2 \ldots$, con $\{u_n\}$ números complejos. Suponen una herramienta fundamental en diversas áreas, que van desde la obtenciónde aproximaciones de π hasta teoría de variable compleja con el teorema de factorización de Weierstrass. El presente trabajo se divide en 3 capítulos, los cuales procedemos a detallar a continuación:

(i) El primer capítulo tiene un carácter introductorio, donde definimos con precisión qué se entiende por convergencia de un producto infinito y procedemos a dar resultados que nos permitan determinar la convergencia de un producto en términos de convergencias de series. A continuación, pasamos de productos de números complejos a productos de funciones complejas, donde vuelve a surgir la idea de convergencia. Aquí procedemos a introducir el concepto de convergencia uniforme, la cual juega un papel fundamental en el estudio de productos de funciones complejas. Por último, veremos dos productos numéricos famosos, que a su vez son las primeras fórmulas exactas conocidas para π, los productos de Wallis y de Viéte.

(ii) El segundo capítulo trata la factorización de funciones enteras. El objetivo fundamental es poder expresar una función entera como producto de sus ceros. Si el conjunto de ceros de la función es finito, la función admitirá un factorización como producto de sus ceros y de una función entera y no nula. Si el conjunto de ceros es infinito, la función entera no podrá tener puntos de acumulación en su conjunto ceros, consecuencia del **Principio de prolongación analítica**, ya que dicha función sería idénticamente nula. Por tanto, el conjunto de ceros será una sucesión a_n tendiendo a infinito y ordenada de manera que $|a_1| \leq |a_2| \ldots$. En este caso, el **Teorema de factorización de Weierstrass** nos muestra que siempre podemos determinar una función entera con la factorización descrita anteriormente. Por último, daremos una relación entre dos funciones enteras con los mismos ceros, que junto con el teorema de derivación logarítmica y una aplicación del teorema de los residuos a la extensión de funciones meromorfas, nos permitirá demostrar dos de los productos infinitos más importantes, los de las funciones seno y gamma.

(iii) El último capítulo, es de aplicación de productos infinitos en teoría de números. Veremos como una serie de una función multiplicativa puede ser expresada como un producto infinito absolutamente convergente. Este producto se llama **producto de Euler**. El más famoso de todos ellos, recibe el nombre de **función zeta de Riemann**. Por último, trataremos el tema de particiones, que son maneras de representar $n \in \mathbb{N}$ como suma de números primos, triangulares, cuadrados,etc. En particular trabajeremos las particiones sin restricciones, donde n se expresa como suma de números positivos, $\leq n$, se pueden repetir, no hay límite de sumandos y el orden de estos no se tiene en cuenta. La función que cuenta estas particiones se denota por $p(n)$. Veremos que la función generatriz de $p(n)$ se puede expresar como un producto infinito absolutamente convergente. Por último, tomaremos el inverso de este producto infinito y determinaremos su función generatriz, resultado que recibe el nombre de **Teorema del número pentagonal de Euler**.

Summary

The purpose of this work is to give a small inclusion to the called **infinite products**. Infinite products are expressions of the form $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \ldots u_{n-1} \cdot u_n \cdot u_{n+1} \ldots$ with $\{u_n\}_{n\geq 1}$ complex numbers and wich we denote with $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$. As the case of series, we wonder ourselves for the convergence of these expressions. Taking into account the way we define the convergence of series, we could be tempted to think that infinite products are convergent when $\text{lím}_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} u_k)$ exists and it's finite. Nevertheless, if at least one term of the sequence $\{u_n\}$ is zero, our way to define the convergence would be risky, because we would have an infinite product with null terms always convergent, regardless the rest of the terms. Next definiton is the accurate:

(a) If infinite terms u_n are zero, the product is said that **diverges to zero**.

(b) If there is not any term being zero and $\text{lím}_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} u_k)$ exists and is not zero, the product is said that **converges**, with value $L = \text{lím}_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} u_k)$. If limit is zero, the product is said that **diverges to zero**.

(c) If there exists a value N such that $u_k \neq 0$ for all $k \geq N$ and $\text{lím}_{n\to\infty}(\prod_{k=N}^{n} u_k)$ exists and is not zero, the product is said that **converges** and it's value is $a_1 \ldots a_{N-1}\, \text{lím}_{n\to\infty}(\prod_{k=N}^{n} u_k)$.

(d) The product is said that diverges if is not convergent as in the cases (b) or (c).

A convergent product without null terms, must obey $u_n \to 1$. However, this condition is not enough to assure the convergence of an infinite product. We will see some conditions enough to assure the convergence in terms of convergence of series.

Next, we wish to pass from infinite products of complex numbers to infinite product of complex functions. Once again, we want to know whether such products converge to some function in a certain region of $\mathbb{C}$. To this aim, we introduce the concept of uniform convergence, which plays a fundamental role in the study of products of complex functions. Finally, we will see two of the most important numerical products, Wallis's product and Viéte's product, which are the first exact formulas known for π.

Next chapter, is about factoring of entire functions. We begin with entire functions with no zeros in $\mathbb{C}$. Such functions can be expressed as the exponential of an entire function. Next, we consider a finite set $0, a_1, \ldots, a_n$ of complex numbers. In this case, we always can construct an entire function with zeros in that set and multiplicities $m, m_1, \ldots, m_n$. Indeed, the polynomial:

$$p(z) = z^m \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{z}{a_k})^{m_k}$$

is such function. Even more, if f is an entire function with such zeros and multiplicities, we can express:

$$f(z) = e^{g(z)} p(z) = z^m \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{z}{a_k})^{m_k} \tag{1}$$

as the product of a polynomial and an entire function with no zeros.

Issues arise when we consider an infinite set of complex numbers. For example, if we wish to construct an entire function whose zeros are in $\frac{1}{n}$ with $n \in \mathbb{N}$, **Principle of analytical prolongation** tells us that such function must be identically *zero*. More generally, a non constant entire function can't have limit

points in the set of zeros, except ∞. We will show that an entire function with no finite limit points can be expressed as (1). Such result is known as **Weierstrass factorization theorem**.
We will have to consider an infinite set $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ with $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$. We will see that series series related to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ must be convergent for our purpose. We will also see how two entire functions with same zeros are related. Finally, a useful technique as logarithmic derivative and an application of Residue theorem to extend meromorphic function, will make us be able to demonstrate two of the most important infinite products, **sine function** and **gamma function**.
The last chaper, try to give some applications of infinite products in number theory. We introduce the concept of multiplicative function, and we will see how such functions can be expressed as an absolutely convergent infinite product. Such products are called **Euler products**. One of the most famous is the **Riemann zeta function**, strongly related with prime numbers distribution.
Eventually, we will see **partitions**, which are the ways to express $n \in \mathbb{N}$ as sum of numbers like primes,triangular,etc. We will particularly see partitions without restrictions, which $n \in \mathbb{N}$ is expressed as sum of positive numbers, $\leq n$, can be repeated, without limit of addends and the order of them is not taken into account. We denote the number of such partitions with $p(n)$. We will see how we can express the generating function of $p(n)$ as an absolutely convergent infinite product. Finally, we will take the inverse of such in finite product, and we will see what is the generating function. This last result is known as **Euler's pentagonal number theorem**.

Índice general

Prólogo III

Summary V

1. Productos Infinitos. Introducción y primeras propiedades 1

1.1. Criterios de convergencia 2

1.2. Convergencia uniforme 4

1.3. Algunos productos clásicos: Wallis y Viète 6

1.3.1. Producto de Wallis 6

1.3.2. Producto de Viète 7

2. Teorema de factorización de Weierstrass 9

2.1. Función seno como producto infinito 15

2.2. Función Gamma como producto infinito 17

3. Teoría analítica de números 19

3.1. Productos de Euler 19

3.2. Particiones 21

3.2.1. Función generadora de particiones 22

Bibliografía 27

Capítulo 1

Productos Infinitos. Introducción y primeras propiedades

Un producto infinito es una expresión de la forma $u_1 u_2 u_3 \dots$ (denotado por $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$), siendo u_n números complejos. Análogamente a las series, podríamos decir que un producto infinito converge si $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} u_k)$ existe y es finito. Sin embargo, esa definición sería incompleta, ya que el hecho de que un término se anule haría al producto convergente independientemente del resto de términos. La siguiente definición es la correcta.

Definición. Dado un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$:

(a) Si infinitos factores u_n son nulos, diremos que el producto **diverge a cero**.

(b) Si ningún factor u_n es nulo, el producto **converge** si $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} u_k)$ existe y es no nulo. Llamaremos **valor del producto** al valor de dicho límite. Si dicho límite es nulo, diremos que el producto **diverge a cero**.

(c) Si existe un N tal que $u_k \neq 0$ para todo $k \geq N$ y $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=N}^{n} u_k)$ existe y es no nulo, el producto es **convergente** y su **valor** es $a_1 \cdot a_2 \dots a_{N-1} \cdot \prod_{k=N}^{\infty} u_k$.

(d) El producto se dice que es **divergente** si no converge de ninguna manera descrita en (b) y (c).

Tomamos $P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$, siendo $u_k \neq 0$ para todo $k \geq 1$. P_n es el producto parcial n-ésimo. Si $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente, entonces la sucesión P_n converge a un valor no nulo P. De aquí se deduce el siguiente resultado:

Teorema 1.1. ***(Condición necesaria de convergencia)*** *Si $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \neq 0$) converge, entonces $u_n \to 1$.*

Demostración.

$$u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1$$

□

Por razones que se irán viendo, es conveniente expresar el producto en la forma $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, y la condición necesaria equivale a que $a_n \to 0$.
Análogamente a lo que sucede con series, esta condición necesaria no es suficiente para garantizar la convergencia de un producto infinito. Para ello, veamos un contraejemplo con el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$.
Tenemos que:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\dots\frac{n+1}{n} = n+1 \to \infty$$

lo cual muestra que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$ diverge a pesar de que $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.

1.1. Criterios de convergencia

Vamos a estudiar condiciones necesarias y suficientes para establecer la convergencia de un producto infinito. Para sucesiones se términos positivos, se tiene lo siguiente:

Teorema 1.2. *Si $a_n \geq 0$, el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Demostración. Sea $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ y sea $P_n = (1+a_1)\ldots(1+a_n)$
Notemos que:

$$S_n \leq P_n$$

al ser todos los términos no negativos. Además, $e^x \geq 1+x$ para todo x no negativo.
Por tanto:

$$S_n \leq P_n \leq e^{S_n}$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a un número real S, entonces P_n es una sucesión monótona creciente y acotada por e^S, luego es convergente. Recíprocamente, si P_n converge a P, la doble desigualdad anterior muestra que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a un valor no más grande que P. □

Para sucesiones de términos negativos se tiene un resultado muy similar:

Teorema 1.3. *Si $a_n \geq 0$, $a_n \neq 1$, el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Demostración. Supongamos que $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ convergente. Entonces, por el criterio de Cauchy, existe un N tal que:

$$S_n - S_{N-1} = a_N + \cdots + a_n \leq \frac{1}{2}$$

y $0 \leq a_n < 1$ para todo $n \geq N$. Se tiene que:

$$(1-a_N)(1-a_{N+1}) = 1 - a_N - a_{N+1} + a_N a_{N+1} \geq 1 - a_N - a_{N+1} > \frac{1}{2}$$

Se muestra por inducción que para todo $n \geq N$:

$$\prod_{k=N}^{n}(1-a_k) \geq 1 - \sum_{k=N}^{n} a_k \geq \frac{1}{2}$$

Escribimos:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1-a_k) = P_{N-1}\prod_{k=N}^{n}(1-a_k).$$

Entonces, $\frac{P_n}{P_{N-1}}$ es una sucesión decreciente (ya que $0 < 1-a_n \leq 1$ para todo $n \geq N$) y está acotada inferiormente. De 1.2 deducimos que $\frac{P_n}{P_{N-1}}$ tiende a un valor P, $\frac{1}{2} \leq P \leq 1$. Por tanto, $P_n \to P_{N-1}P \neq 0$ y $\prod_{k=1}^{\infty}(1-a_k)$ converge.
Para la otra implicación, suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Si $a_n \not\to 0$, entonces $1-a_n \not\to 1$ y el producto diverge. Entonces, se puede asumir sin perdida de generalidad que $a_n \to 0$. Por tanto, $0 \leq a_n < 1$ para $n \geq N$. De la igualdad:

$$e^{-x} = 1 - x + (\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}) + (\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}) + \ldots$$

se deduce que $1-x \leq e^{-x}$ para $0 \leq x < 1$, al ser todos los términos entre paréntesis no negativos. Luego, para todo $n \geq N$:

$$\prod_{k=N}^{n}(1-a_k) \leq \prod_{k=N}^{n}(exp(-a_k)) = exp(-\sum_{n=N}^{n} a_k)$$

Haciendo $n \to \infty$, la divergencia de $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ muestra que $\prod_{k=N}^{\infty}(1-a_k) = 0$. Así, $\prod_{k=1}^{\infty}(1-a_k)$ diverge y queda completada la demostración. □

Teorema 1.4. *Si $a_n \subseteq \mathbb{C}$, $a_n \neq -1$, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} Log(1+a_n)$ converge, donde Log denota al logaritmo principal.*

Demostración. El principal inconveniente que tenemos es que la igualdad $Log\prod(1+a_n) = \sum Log(1+a_n)$ no es cierta en general. Sin embargo, sí es cierto que, para todo N:

$$Arg(\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)) = \sum_{n=1}^{N} Arg(1+a_n) + 2k_N\pi \qquad con \quad k_N \in \mathbb{Z}$$

y también:

$$Log\prod_{n=1}^{N}(1+a_n) = \sum_{n=1}^{N} Log(1+a_n) + 2k_N\pi i$$

Luego:

$$P_N = \prod_{n=1}^{N}(1+a_n) = exp(Log\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)) = exp(\sum_{n=1}^{N} Log(1+a_n) + 2k_N\pi i) = exp(\sum_{n=1}^{N} Log(1+a_n))$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} Log(1+a_n)$ converge, se sigue que $P_N \to exp(\sum_{n=1}^{\infty} Log(1+a_n)))$, por continuidad de la función exponencial. Por tanto, P_N es convergente a un valor no nulo.
Recíprocamente, suponer que $P = \lim_{N\to\infty} P_N$ existe y es no nulo. Asumimos inicialmente que $P \notin (-\infty, 0)$. Entonces, Log es continuo en P y se tiene que $Log(P) = Log(\lim_{N\to\infty} P_N) = \lim_{N\to\infty} Log(P_N)$ existe. Como antes, para todo N:

$$c_N := Log(P_N) = \sum_{n=1}^{N} Log(1+a_n) + 2k_N\pi i$$

para algún entero k_N. Al ser c_N convergente se tiene que:

$$c_N - c_{N-1} = Log(1+a_N) + 2\pi i(k_N - k_{N-1}) \to 0 \qquad cuando \quad N \to \infty$$

Sabemos que $a_N \to 0$, luego $Log(1+a_N) \to 0$, lo cual implica que $2\pi i(k_N - k_{N-1}) \to 0$. Por tanto, la sucesión k_N ha de ser constante para N suficientemente grande. A partir de dicho N, se tiene que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\sum_{n=1}^{N} Log(1+a_n) = Log(P_N) - 2k\pi i$$

La parte de la derecha converge a $Log(P) - 2k\pi i$, luego $\sum_{n=1}^{N} Log(1+a_n)$ converge a ese mismo valor.
Cuando $P \in (-\infty, 0)$, el resultado también se cumple. Si todos los $(1+a_n)$ fuesen reales y positivos, P también lo sería, luego algún término (digamos $(1+a_r)$) ha de estar fuera del eje real positivo.En este caso, $P' = \prod_{n\neq r}(1+a_n)$ converge a un valor no nulo fuera del eje real negativo.
Por el caso anterior, $\sum_{n\neq r} Log(1+a_n)$ converge, luego $\sum_{n=1}^{\infty} Log(1+a_n)$ converge también. □

Definición. Un producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente si el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ converge.

Lema 1.5. *Si $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$, $a_n \neq -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} Log(1+a_n)$ converge absolutamente. Esto sucede si y sólo si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ converge.*

Demostración. Si cualquiera de las dos series converge, se tiene que $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ para $n \geq N$ con N suficientemente grande. El desarrollo de Mclaurin:

$$Log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots = z(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n+1})$$

es válido para $|z| \leq 1$. Particularmente, para $|z| \leq \frac{1}{2}$:

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n+1}\Big| \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

lo cual muestra que:

$$\frac{1}{2}|z| \leq |Log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|$$

para $|z| \leq \frac{1}{2}$. Tomando $z = a_n$, se tiene que para $n \geq N$:

$$\frac{1}{2}|a_n| \leq |Log(1+a_n)| \leq \frac{3}{2}|a_n|$$

Luego, o bien ambas series son absolutamente convergentes o bien ninguna lo es. □

Teorema 1.6. *Si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge. El recíproco no es cierto.*

Demostración. Suponer que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ converge. Por 1.2, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge. Por 1.5, $\sum_{n=1}^{\infty}|Log(1+a_n)|$ converge. Dado que una serie absolutamente convergente es convergente, el resultado se sigue de 1.4. □

Ejemplo. Para probar la falsedad del recíproco, tomamos el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n})$. El producto es convergente y su valor es 1 (no hay más que separar términos pares e impares). Sin embargo:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|\right) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}) = \infty$$

lo cual muestra que el producto no es absolutamente convergente.

Nota. Los productos absolutamente convergentes tienen la propiedad de que se pueden reordenar sus términos como se desee sin alterar el valor del producto. El resultado se deduce de emplear 1.5 y el resultado análogo que se tiene para series.

1.2. Convergencia uniforme

Al igual que pasamos de series de números complejos a series de funciones complejas, pretendemos pasar de productos de números complejos a productos de funciones complejas. Análogamente al caso de series de funciones complejas, el concepto de convergencia uniforme juega un papel fundamental en el estudio del producto de funciones complejas.
Se define la convergencia uniforme como sigue:

Definición. Sea $\{f_n(z)\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Entonces, el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ se dice que converge uniformemente en Ω si y sólo si:

(i) Existe un N tal que $f_n(z) \neq -1$ para todo $n > N$ y todo $z \in \Omega$.

(ii) La sucesión $\prod_{k=N+1}^{n}(1+f_k(z))$ converge uniformemente en Ω a algún $P(z)$, siendo $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.

El resultado más util para probar la convergencia uniforme de un producto, es análogo al criterio-M de Weierstrass empleado para la convergencia uniforme de series:

Teorema 1.7. *Sea $\{f_n(z)\}$ una sucesión de funciones tales que $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo z en una región Ω. Si $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ converge, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ converge uniformemente en Ω. Además, si $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ y cada $f_n(z)$ es analítica en Ω, entonces $f(z)$ es analítica en Ω. También, $f(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in \Omega$ si y sólo si $f_n(z_0) = -1$ para algún n. El orden del cero de f en z_0 es la suma de los órdenes de los ceros de $1+f_n(z)$ en z_0.*

Demostración. Por las condiciones del enunciado:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|f_n(z)|) \leq \prod_{n=1}^{\infty}(1+M_n)$$

Y como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, por 1.2 se deduce que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ es absolutamente convergente, luego es convergente para todo punto de Ω. Basta con probar que la sucesión $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(z))$ es uniformemente de Cauchy en Ω. Para todo $0 < m < n$ enteros positivos tenemos:

$$P_n(z) - P_m(z) = \sum_{k=m}^{n-1}(P_{k+1}(z) - P_k(z)) = \sum_{k=m}^{n-1} P_k(z) f_{k+1}(z)$$

Para todo k se tiene:

$$|P_k(z)| \leq \prod_{n=1}^{\infty}(1+|f_n(z)|) \leq exp\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)| \leq exp\sum_{n=1}^{\infty} M_n := e^M$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ converge uniformemente en Ω. Así, eligiendo m suficientemente grande en 1.5 para que $\sum_{k=m}^{n-1}|f_{k+1}(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \Omega$ y para todo n, tenemos:

$$|P_n(z) - P_m(z)| \leq \sum_{k=m}^{n-1}|P_k(z)||f_{k+1}(z)| \leq e^M \sum_{k=m}^{n-1}|f_{k+1}(z)| < \varepsilon e^M$$

Como ε es arbitrario, se sigue que la sucesión $\{P_n(z)\}$ es uniformemente de Cauchy en Ω y queda probada la primera parte.
Ahora supongamos que $f(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in \Omega$. Entonces, por la definición de convergencia productos infinitos, existe un N tal que:

$$F_N(z) = \prod_{k=N+1}^{\infty}(1+f_k(z))$$

no se anula en z_0. Siguiendo el razonamiento anterior, $F_N(z)$ es el límite de una sucesión de funciones análiticas que converge uniformemente. Luego $F_N(z)$ es analítica en Ω. La continuidad de $F_N(z)$ en z_0 muestra que $F_N(z)$ no se anula en un entorno $D(z;\delta)$ de z_0. Ahora:

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+f_k(z)) = \prod_{k=1}^{N}(1+f_k(z))(\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N+1}^{n}(1+f_k(z)))$$

Notar que el segundo factor es analítico y no nulo en $D(z_0;\delta)$. Entonces, el cero de $f(z)$ y su orden provienen de los ceros del factor $\prod_{k=1}^{N}(1+f_k(z))$. $\square$

Ejemplo. Consideremos el producto $\prod_{k=0}^{\infty}(1+z^{2^k})$. Al ser la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$ absolutamente convergente para $|z| < 1$, el producto es absolutamente convergente para $|z| < 1$. Definiendo $P_n(z) = \prod_{k=0}^{n}(1+z^{2^k})$. Observamos que :

$$(1-z)P_0(z) = 1 - z^2$$

$$(1-z)P_1(z) = (1-z^2)(1+z^2) = 1 - z^{2^2}$$

Y en general:

$$(1-z)P_n(z) = (1-z^{2^n})(1+z^{2^n}) = 1 - z^{2^{n+1}}$$

Para $|z| < 1$ tenemos:

$$(1-z)\lim_{n\to\infty} P_n(z) = \lim_{n\to\infty}(1 - z^{2^{n+1}}) = 1$$

Es decir:

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+z^{2^k}) = \frac{1}{1-z}$$

para $|z| < 1$.

1.3. Algunos productos clásicos: Wallis y Viète

Vamos a ver dos de los productos numéricos más famosos, que además suponen las primeras fórmulas exactas conocidas para π.

1.3.1. Producto de Wallis

Teorema 1.8. ***(John Wallis, 1655)***

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}$$

Demostración. Partimos de la siguiente identidad:

$$\int sen^n(x)\mathrm{d}x=\int sen^{n-2}(x)\mathrm{d}x-\int sen^{n-2}(x)cos^2(x)\mathrm{d}x \quad (1-sen^2(x)=cos^2(x))$$

Una integración por partes en la segunda integral nos lleva a la siguiente fórmula de reducción:

$$\int sen^n(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}sen^{n-1}(x)cos(x)+\frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}(x)\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

Definimos $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n(x)\mathrm{d}x$
Aplicando (1.1) a I_n se obtiene:

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2} \tag{1.2}$$

Es inmediato que $I_0=\frac{\pi}{2}$ y que $I_1=1$.
Calculamos I_n para los casos par e impar:

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot I_{2n-2}=\cdots=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot I_{2n-1}=\cdots=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$$

Sabemos que $0\leq sen(x)\leq 1$ para todo $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$. Por tanto:

$$0\leq sen^{2n+2}(x)\leq sen^{2n+1}(x)\leq sen^{2n}(x)$$

De donde se deduce inmediatamente que $0<I_{2n+2}\leq I_{2n+1}\leq I_{2n}$. De (1.2) se deduce que:

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}=\frac{2n+1}{2n+2}$$

Por tanto:

$$\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}\leq\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\leq 1$$

De la regla del Sandwich se deduce que $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\to 1$, que equivale a $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\to 1$. Por otro lado tenemos que:

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2}{\pi}$$

Equivalentemente:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \tag{1.3}$$

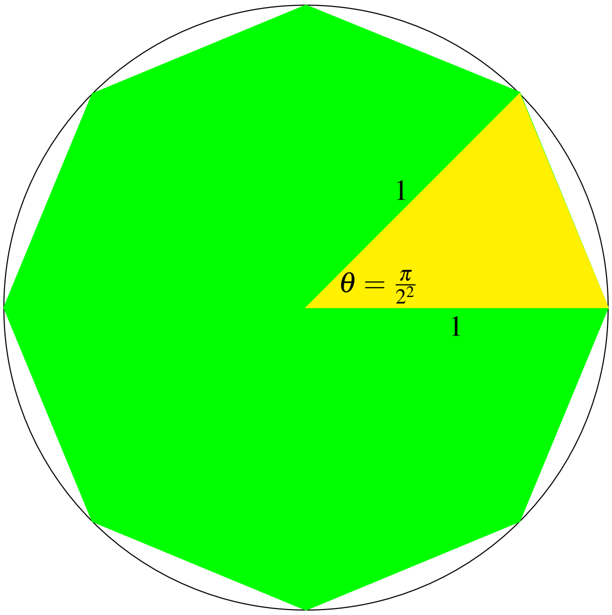
Estudiemos la existencia de $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1})$, es decir, la convergencia del producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1})$. El producto se puede escribir como $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{4n^2-1})$, y al ser $a_n=\frac{1}{4n^2-1}$ de términos positivos, el teorema 1.2 nos dice que el producto converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ converge. Esta serie es convergente sin más que comparar con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, por lo que el producto es convergente. Ahora ya podemos hacer $n\to\infty$ en (1.3) y se sigue el resultado. □

1.3.2. Producto de Viète

Teorema 1.9. ***(François Viète, 1593)***

$$\prod_{n=2}^{\infty} cos(\frac{\pi}{2^n}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots = \frac{2}{\pi}$$

Demostración. Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 2}$, donde a_n es el área de un polígono regular de 2^n lados inscrito en un círculo de radio 1.



Obervando la figura, tenemos que el área del triángulo sombreado es $\frac{1}{2}\cdot sen(\frac{\pi}{2^2})$. Por tanto el área del octógono será $a_3 = 2^3\cdot\frac{1}{2}\cdot sen(\frac{\pi}{2^2})$. Siguiendo el mismo razonamiento se tiene que:

$$a_n = 2^n\cdot\frac{1}{2}\cdot sen(\frac{\pi}{2^{n-1}}) = 2^{n-1}\cdot sen(\frac{\pi}{2^{n-1}})$$

Se tiene que $a_n \to \pi$, ya que las áreas de los polígonos se van a aproximando a la del círculo, que es π. Empleando la fórmula del seno del ángulo doble se llega a lo siguiente:

$$a_2 = a_3\cdot cos(\frac{\pi}{2^2}) = a_4\cdot cos(\frac{\pi}{2^2})\cdot cos(\frac{\pi}{2^3}) = \cdots = a_n\cdot cos(\frac{\pi}{2^2})\ldots cos(\frac{\pi}{2^{n-1}}) \tag{1.4}$$

Por otra parte, a_2 es el área de un cuadrado inscrito en una circunferenca de radio 1, que es 2.
Estudiemos la convergencia del producto $\prod_{n=2}^{\infty} cos(\frac{\pi}{2^n})$. Como $x_n = cos(\frac{\pi}{2^n}) - 1$ es de términos negativos, podemos aplicar 1.3 y el producto converge si la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(1-cos(\frac{\pi}{2^n}))$ converge. Esta serie tiene el mismo carácter que $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{\pi}{2^n})^2\frac{1}{2}$, que es convergente por ser una geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$. Por tanto, el producto es convergente y haciendo $n \to \infty$ en (1.4) se sigue el resultado. □

Capítulo 2

Teorema de factorización de Weierstrass

En este capítulo, trataremos la factorización de funciones enteras. El siguiente argumento será de utilidad en el capítulo. Primero, consideramos una función $f(z)$ entera y que no se anule en $\mathbb{C}$. En este caso, podemos expresar $f(z)$ como:

$$f(z) = e^{g(z)}$$

siendo $g(z)$ una función entera. Al ser $\frac{f'(z)}{f(z)}$ analítica en $\mathbb{C}$, posee antiderivada $g(z)$ verificando:

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

con $g(z)$ función entera. Esto nos muestra que:

$$(f(z)e^{-g(z)})' = 0 \Rightarrow f(z) = ce^{g(z)}$$

para alguna constante c. De aquí se obtiene la representación que buscamos.
Dado un conjunto finito de números complejos $\{0, a_1, \dots, a_n\}$ con $a_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$, siempre existe una función entera (por ejemplo, polinómica) con ceros en dicho conjunto y de multiplicidades $m, m_1, \dots, m_n$. Una función entera verificando estas propiedades es el polinomio:

$$p(z) = z^m \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{z}{a_k})^{m_k}$$

Más todavía, si f es una función entera con los ceros y multiplicidades citados anteriormente, se tiene que la función:

$$h(z) = \frac{f(z)}{p(z)}$$

posee singularidades evitables en dichos ceros. Por tanto, $h(z)$ define una función entera y sin ceros en $\mathbb{C}$. Entonces:

$$f(z) = e^{g(z)} p(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{z}{a_k})^{m_k}$$

y $f(z)$ puede expresarse como producto de un polinomio y una función entera y no nula.
Nos preguntamos si dada una sucesión arbitraria de puntos, podemos siempre encontrar una función entera con ceros en dichos puntos. La respuesta en general es negativa, como puede verse en el ejemplo de una función entera con ceros en $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), la cual por el **Principio de prolongación analítica** ha de ser idénticamente nula. En general, una función entera no constante no puede poseer puntos límite en su conjunto de ceros, siendo ∞ el único punto límite que puede poseer. En este capítulo, vamos a mostrar que una función entera sin punto límite finito en su conjunto de ceros admite tal factorización.
Tomamos una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ que tiende a infinito y ordenada de manera que $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$. Una posible función entera con dichos ceros sería:

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_k})$$

Sin embargo, dicho producto puede ser divergente.
Ejemplo. Tomamos el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$, el cual se anula en todos los enteros menos 0. Fijamos $R>0$ y consideramos el disco $|z|\leq R$. Elegimos N suficientemente grande para que:

$$\left|\frac{z}{n}\right| \leq \frac{R}{n} < 1$$

para $n\geq N$ (ya que $\frac{R}{n}$ tiende a 0). Por tanto, tenemos que $1-\frac{z^2}{n^2}\neq 0$ en el disco para todo $n\geq N$, luego podemos escribir:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}) = P_{N-1}(z)\prod_{n=N}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}) = P_{N-1}(z)F_N(z)$$

siendo $P_{N-1}(z)$ una función entera con ceros en los enteros y $F_N(z)$ un producto infinito sin ceros en el disco. Además:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^2}{n^2}\right| = |z|^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq R^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

luego por el teorema 1.7 el producto es uniformemente convergente en el disco que hemos fijado. Al ser R arbitrario, se tiene convergencia uniforme en todo el plano $\mathbb{C}$, y concluimos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$ es una función entera con ceros en los enteros.
Vamos a determinar las restricciones en $\{a_n\}$ para que $f(z)$ sea entera. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}$ es convergente. Fijado $R>0$, si $|z|\leq R$ se tiene que $|\frac{z}{a_n}|\leq\frac{R}{|a_n|}$ y por lo tanto $P_n(z)$ converge uniformemente en $\mathbb{C}$ a $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_n})$ para $|z|\leq R$, y al ser R arbitrario hay convergencia uniforme sobre compactos de $\mathbb{C}$. Además, dicha función ha de ser entera.
Si $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}$ es divergente, la situación se complica. Por ejemplo, $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{n})$ no representa una función entera (no es muy difícil comprobar que diverge para $z=-1$). En este tipo de situaciones, necesitamos un "factor de convergencia".

Ejemplo. Si $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}$ diverge, pero $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^2}$ converge, podemos modificar nuestra construcción y mostrar que:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_n})e^{\frac{z}{a_n}}$$

define una función entera que preserva los mismos ceros. Tomamos $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}}$. Vamos a ver que define una función entera y el método puede adaptarse a casos más generales. Ponemos:

$$1+f_n(z) = (1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}}$$

Para aplicar el teorema de convergencia uniforme, hemos de encontrar una cota superior para $|f_n(z)|$. Escribimos:

$$1+f_n(z) = e^{Log(1-\frac{z}{n})+\frac{z}{n}}$$

Fijamos $R>0$. Si $|z|\leq R$, tomamos N suficientemente grande para que $N\geq 2R$. Entonces se sigue que $|\frac{z}{n}|\leq\frac{R}{n}<1$ para todo $n\geq N$ y la identidad:

$$Log(1-\frac{z}{n}) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(\frac{z}{n})^k$$

vale para $|z|\leq R$. Tenemos que:

$$\left|Log(1-\frac{z}{n})+\frac{z}{n}\right| = \left|-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{k}(\frac{z}{n})^k\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{R}{n})^k$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{R^2}{n^2}}{1-\frac{R}{n}} \leq \frac{R^2}{n^2}$$

por ser $R < 2R \leq N \leq n$. Por lo tanto:

$$|f_n(z)| = |e^{Log(1-\frac{z}{n})+\frac{z}{n}} - 1| \leq e^{|Log(1-\frac{z}{n})+\frac{z}{n}|} - 1 \leq e^{\frac{R^2}{n^2}} - 1$$

$$\leq \frac{R^2}{n^2} e^{\frac{R^2}{n^2}} \leq e\frac{R^2}{n^2} = M_n$$

Por tanto:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |f_n(z)| \leq eR^2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Luego tenemos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ converge uniformemente para $|z| \leq R$.
Así:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}} = \prod_{n=1}^{N-1}(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}} \prod_{n=N}^{\infty}(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}}$$

define una función entera con ceros en los enteros positivos.

Análogamente, se prueba que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$ define una función entera con ceros en los enteros negativos. Por tanto, podemos construir una función entera con ceros en cada entero como sigue:

$$z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}} \prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}} = z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$$

donde la reordenación de los factores queda justificada por la convergencia absoluta de los productos. Siguiendo el mismo razonamiento, podemos enunciar el siguiente lema:

Lema 2.1. *Si $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ converge para algún p entero positivo, entonces:*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_n})E_p(\frac{z}{a_n}) \tag{2.1}$$

define una función entera con ceros en a_n. La expresión:

$$E_p(z) = e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{p}z^p}$$

*recibe el nombre de **factor de convergencia**.*

Demostración. El argumento en el ejemplo del caso anterior demuestra inmediatamente el caso $p = 1$ cambiando n por a_n. El argumento en el caso general sigue la misma idea, cancelando los p primeros términos en el desarrollo del logaritmo, tan solo se tiene una notación un poco más compleja. □

Desafortunadamente, esta lema no resuelve completamente nuestro problema, ya que dicho p puede no existir. En efecto, si tratamos de construir una función entera con ceros en $\{log(n)\}_{n\geq 2}$, el lema anterior no funciona, ya que $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(log(n))^p}$ diverge para todo valor de p. Vemos que los factores de convergencia involucran una sucesión de polinomios, todos de grado p. En el caso general, no vamos a imponer un grado fijo a estos polinomios:

Teorema 2.2. ***(Teorema de factorización de Weierstrass)*** *Dada cualquier sucesión compleja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ sin punto de acumulación en $\mathbb{C}$, existe una función entera con ceros en esos y sólo esos puntos.*

Demostración. Suponemos que la función entera $f(z)$ que vamos a construir tiene sus ceros en $\{a_n\}$ y reordenados de manera que $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \ldots$. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que ningún a_n es 0, ya que si k de ellos fueran 0, bastaría sustituir $f(z)$ por $z^k f(z)$. Para cada n, tomamos:

$$P_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_n})^2 + \cdots + \frac{1}{n}(\frac{z}{a_n})^n$$

de forma que $exp(P_n(z)) = E_n(\frac{z}{a_n})$, siendo $E_n(z)$ el factor de convergencia definido anteriormente. Probaremos que la función:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{a_n})E_n(\frac{z}{a_n})$$

verifica las condiciones del teorema. Para ello, es suficiente con probar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[Log(1 - \frac{z}{a_n}) + P_n(z)]$$

converge uniformemente en un disco arbitrario $|z| \leq R$ del plano.
Tomo $|a_n|$ suficientemente grande que verifique $|a_n| \geq 2R \geq 2|z|$. Entonces se tiene que:

$$|Log(1 - \frac{z}{a_n}) + P_n(z)| = \Big| - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}(\frac{z}{a_n})^k \Big|$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big|\frac{z}{a_n}\Big|^k \leq \frac{1}{n+1}\Big|\frac{z}{a_n}\Big|^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \Big|\frac{z}{a_n}\Big|^n \leq \frac{1}{2^n}$$

Tomando $1 + f_n(z) = exp(Log(1 - \frac{z}{a_n}) + P_n(z))$, tenemos:

$$|f_n(z)| \leq exp(\frac{1}{2^n}) - 1 \leq (\frac{1}{2^n})e$$

Por 1.7, $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ converge uniformemente a $f(z)$ para $|z| \leq R$. Al ser R arbitrario, el producto infinito define una función entera con ceros en a_n. La condición en el teorema sobre los ceros de $f(z)$ se sigue de la definición. □

Nota. Se trata de un teorema de existencia, pero no de unicidad. Por ejemplo, hemos visto que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}}$ define una función entera con ceros en los enteros positivos, pero el teorema de factorización también nos dice que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{n})e^{\frac{z}{n} + \frac{1}{2}(\frac{z}{n})^2 + \cdots + \frac{1}{n}(\frac{z}{n})^n}$ define una función de las mismas características. Aplicando (2.1) también vemos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{n})e^{\frac{z}{n} + \frac{1}{2}(\frac{z}{n})^2}$ o $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{n})e^{\frac{z}{n} + \frac{1}{2}(\frac{z}{n})^2 + \frac{1}{3}(\frac{z}{n})^3}$ cumplen las mismas características, lo cual muestra que hay infinitas elecciones en cuanto a funciones enteras con ceros en los enteros positivos.

Veamos ahora cómo se relacionan dos funciones enteras que tienen los mismos ceros y con las mismas multiplicidades:

Teorema 2.3. *Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones enteras con los mismos ceros y multiplicidades, entonces existe una función entera $\phi(z)$ tal que $f(z) = e^{\phi(z)}g(z)$.*

Demostración. Una vez cancelados los factores comunes, la función $\frac{f(z)}{g(z)}$ es una función entera y sin ceros. Por tanto, posee logaritmo holomorfo y se sigue el resultado. (Ver también introducción del capítulo) □

Podemos expresar el teorema de la siguiente manera:

Teorema 2.4. *Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos no nulos y $f(z)$ una función entera con ceros en a_n, según su multiplicidad.Suponer que f tiene un cero de orden $k \geq 0$ en el cero. Entonces, existe una función entera $g(z)$ tal que:*

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{a_n})E_n(\frac{z}{a_n})$$

Más todavía, el producto puede ser reemplazado por:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{a_n})E_{p_n}(\frac{z}{a_n})$$

siendo $\{p_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{N}$ verificando para todo $R > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty$$

Demostración. Ver Teorema de factorización. □

A continuación, presentamos el teorema de derivación logarítmica, el cual será de utilidad al final del capítulo.

Teorema 2.5. ***(Teorema de derivación logarítmica)*** *Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones analíticas definidas en una región Ω, de manera que $\sum |f_n|$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. Sea $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ para todo $z \in \Omega$ tal que $f(z) \neq 0$. Entonces:*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$$

Demostración. **Obs.** $\{z \in \Omega : f(z) \neq 0\}$ es abierto en Ω y $f(z)$ es analítica en Ω por 1.7.
Al ser $f(z) \neq 0$, ningún factor $1 + f_n(z)$ se anula.
La regla de derivación del producto nos permite derivar el producto parcial $f_n(z)$:

$$f_n'(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n'(z)\prod_{k\neq n}^{N}(1+f_k(z))$$

Por tanto:

$$\frac{f_N'(z)}{f_N(z)} = \sum_{n=1}^{N} f_n'(z)\frac{\prod_{k\neq n}^{N}(1+f_k(z))}{\prod_{k=1}^{N}(1+f_k(z))} = \sum_{n=1}^{N}\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$$

Tenemos que $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos de Ω, por tanto (al ser las funciones analíticas), $f_n' \to f'$ uniformemente sobre compactos de Ω. Por tanto, al ser $f(z) \neq 0$:

$$\frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \to \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Lo que finalmente se traduce en que:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$$

□

También presentamos un resultado de mucha utilidad para extender funciones meromorfas y que necesitaremos más adelante.

Teorema 2.6. *Sea f una función analítica excepto en polos simples $a_1, a_2, \ldots$ y ordenados de manera que:*

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq \ldots$$

Denotamos $b_n = Res[f(z); a_n]$ y sea $\{C_n\}$ una sucesión de ciclos cerrados con orientación positiva tales que cada C_n contiene solamente a los polos $a_1, \ldots, a_n$. Suponer que:

$$R_n = dist(0, C_n) \to \infty$$

$$L_n = longitud(C_n) = O(R_n),$$

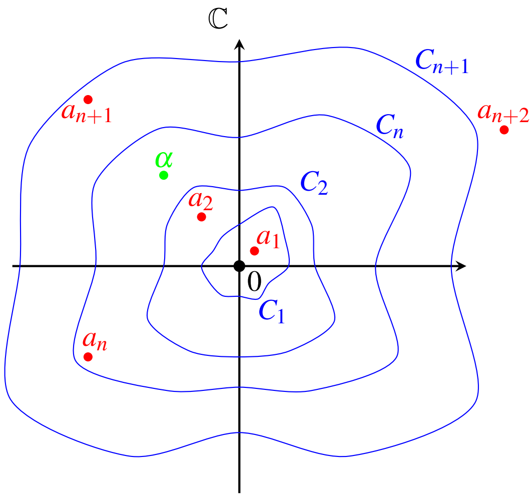
$$|f(z)| = o(R_n)$$

(la última condición se satisface si f(z) es acotada en C_n) Entonces:

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right)$$

para todo $z \neq a_1, \ldots a_n \ldots$

Demostración.



Definimos para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} g(z)\,dz$$

$$g(z) = \frac{f(z)}{z(z-\alpha)}$$

donde α se encuentra en el interior de C_n. Si α no es un polo de f, entonces $g(z)$ tiene polos simples en cada $a_k, 0, \alpha$ con :

$$Res[g(z);a_k] = \lim_{z\to a_k}(z-a_k)\frac{f(z)}{z(z-\alpha)} = \frac{b_k}{a_k(a_k-\alpha)}$$

$$Res[g(z);0] = \lim_{z\to 0} z\frac{f(z)}{z(z-\alpha)} = -\frac{f(0)}{\alpha}$$

$$Res[g(z);\alpha] = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{f(z)}{z(z-\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

Por el teorema de los Residuos:

$$F_n(\alpha) = \sum [Res[g(z);C_n] = \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k(a_k-\alpha)} - \frac{f(0)}{\alpha} + \frac{f(\alpha)}{\alpha} \tag{2.2}$$

Para $z \in C_n$:

$$|z| \geq R_n = dist(0;C_n)$$

$$|z-\alpha| \geq |z| - |\alpha| \geq R_n - |\alpha| > 0$$

Por tanto:

$$|F_n(\alpha)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_n} g(z)\,dz\right| \leq \frac{L_n}{2\pi}\max_{z\in C_n}|g(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{L_n}{R_n(R_n-|\alpha|)}\max_{z\in C_n}|f(z)| \to 0$$

y se tiene que $\{F_n(\alpha)\}$ converge uniformemente a 0 en el compacto C_n. Haciendo $n \to \infty$ en (2.2) se sigue el resultado. □

2.1. Función seno como producto infinito

En este apartado, vamos a probar la expresión de la función seno como producto infinito de sus ceros. Para ello, recordemos que $sen(\pi z)$ tiene ceros simples en todos los enteros. Hemos visto anteriormente que:

$$z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$$

es una función entera con un cero simple en cada entero. Por tanto, el teorema 2.3 nos dice que:

$$sen(\pi z)=e^{g(z)}z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}) \tag{2.3}$$

para alguna función $g(z)$ entera. Si $g(z)$ fuera constante, tendríamos:

$$sen(\pi z)=cz\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$$

Como $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{sen(\pi z)}{z}=\pi=\lim\limits_{z\to 0}c\prod_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{z^2}{n^2})=c$, se tendría que :

$$sen(\pi z)=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}) \tag{2.4}$$

Por tanto, el resto de la prueba va a consistir en probar que $g(z)$ es, efectivamente, constante. Para dicho objetivo, suponer que $z\notin\mathbb{Z}$. Tomando logaritmos y derivando en (2.3):

$$\pi cot(\pi z)=g'(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2z}{n^2(1-\frac{z^2}{n^2})}=g'(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} \tag{2.5}$$

donde la derivación término a término está justificiada por ser $\sum_{n=1}^{\infty}Log(1-\frac{z^2}{n^2})$ convergente uniformemente sobre cada subconjunto compacto del conjunto abierto que excluye a los enteros.Será suficiente con demostrar que $g'(z)\equiv 0$. Para ello, vamos a emplear el teorema 2.6. Consideramos la función:

$$f(z)=\begin{cases}\pi cot(\pi z)-\frac{1}{z} & si \quad z\neq 0\\ 0 & si \quad z=0\end{cases}$$

y C_n el cuadrado con vértices en $z=(n+\frac{1}{2})(\pm 1\pm i)$, $n\in\mathbb{N}$. Tenemos que $f(z)$ es analítica en el origen y con polos simples en n, $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$, y C_n no pasa por ningún polo de $f(z)$. Es claro que $\frac{1}{z}$ está acotada en los cuadrados y para todo $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$:

$$Res[f(z);n]=\lim_{z\to n}(z-n)[\pi cot(\pi z)-\frac{1}{z}]=\frac{cos(n\pi)}{cos(n\pi)}=1$$

Ahora acotamos $|cot(\pi z)|$ para todo $z\in C_n$.
Si $z=n+\frac{1}{2}+iy$:

$$|cot(\pi z)|=|tan(\pi iy)|=\left|\frac{e^{-\pi y}-e^{\pi y}}{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}\right|\leq 1$$

Para $z=x+i(n+\frac{1}{2})$:

$$|cot(\pi z)|=\left|\frac{e^{2\pi iz}+1}{e^{2\pi iz}-1}\right|\leq\frac{1+e^{-(2n+1)\pi}}{1-e^{-(2n+1)\pi}}\leq\frac{1+e^{-3\pi}}{1-e^{-3\pi}}$$

Al ser la función cotangente impar, las mismas acotaciones son válidas para los otros dos lados del cuadrado. Por tanto, $cot(\pi z)$ está acotada en cada C_n. En virtud del teorema 2.6 se tiene:

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k, n\neq 0}^{k} (\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$$

Deducimos que la identidad:

$$\pi cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$$

es válida para todo z no entero. Sustituyendo esta identidad en (2.5) se tiene que $g'(z) \equiv 0$, tal y como queríamos.

Nota. Comparemos este producto que hemos obtenido con el desarrollo en serie de la función seno. Se tiene:

$$sen(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} - \dots$$

El término de z^3 en el producto infinito es:

$$\pi z(-z^2) \cdot (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots) = -\pi z^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

El término de z^3 en la serie es: $-\frac{\pi^3}{3!} z^3$.
Igualando términos se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Nota. Ahora vamos a obtener el producto infinito de la función coseno. Para ello, usamos la identidad $cos(z) = \frac{sen(2z)}{2sen(z)}$. Entonces:

$$cos(z) = \frac{sen(2z)}{2sen(z)} = \frac{2z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - (\frac{2z}{n\pi})^2)}{2z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - (\frac{z}{n\pi})^2)}$$

$$= \frac{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - (\frac{2z}{(2n-1)\pi})^2)(1 - (\frac{2z}{2n\pi})^2)}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - (\frac{z}{n\pi})^2)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - (\frac{2z}{(2n-1)\pi})^2)$$

Nota. Obervemos que haciendo $z = \frac{1}{2}$ en (2.4) obtenemos el producto de Wallis demostrado en el capítulo anterior.

Nota. Usando las igualdades $senh(z) = -isen(zi)$ y $cosh(z) = cos(zi)$ se tiene:

$$senh(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 + (\frac{z}{n\pi})^2) \qquad cosh(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + (\frac{2z}{(2n-1)\pi})^2)$$

2.2. Función Gamma como producto infinito

Procedemos de manera análoga al apartado anterior con la función seno. Hemos visto anteriormente que:

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$$

es una función entera con ceros simples en los enteros negativos y en ningún otro sitio más. Es inmediato comprobar que $f(z-1)$ posee los mismos ceros que $f(z)$ más uno en el origen, luego $f(z-1)$ y $zf(z)$ posee los mismos ceros y el teorema 2.3 nos asegura que:

$$f(z-1)=zf(z)e^{g(z)} \tag{2.6}$$

para alguna función $g(z)$ entera. Vamos a probar que $g(z)$ es constante. Tomamos logaritmos y derivamos:

$$\frac{f'(z-1)}{f(z-1)}=g'(z)+\frac{1}{z}+\frac{f'(z)}{f(z)}$$

Aplicando 2.5 obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+z-1}-\frac{1}{n})=g'(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n})$$

La parte izquierda de la última igualdad se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+z-1}-\frac{1}{n}) &= (\frac{1}{z}-1)+\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n+z-1}-\frac{1}{n})\\ &= \frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]\\ &= \frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n})+1\\ &= \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n})\end{aligned}$$

De aquí se deduce inmediatamente que $g'(z)\equiv 0$, luego $g(z)=\gamma$ con γ constante. Tomando $z=1$ en (2.6):

$$1=f(0)=e^{\gamma}f(1)=e^{\gamma}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})e^{-\frac{1}{n}}$$

Que equivale a :

$$e^{-\gamma}=\lim_{n\to\infty}[(1+1)(1+\frac{1}{2})\dots(1+\frac{1}{n})e^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}]$$

Tomando logaritmos naturales:

$$\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-Ln(1+\frac{1}{n})]=\lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n}-Ln(n+1)]$$

γ recibe el nombre de **constante de Euler-Mascheroni**, y su valor numérico es $0{,}577215\dots$. La función:

$$\Gamma(z):=\frac{1}{e^{\gamma z}zf(z)}=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})^{-1}e^{\frac{z}{n}}$$

recibe el nombre de **Función Gamma**. Se trata de una función analítica con polos simples en 0 y en los enteros negativos.
Con $g(z)=\gamma$, (2.6) se convierte en:

$$f(z)=e^{\gamma}(z+1)f(z+1) \tag{2.7}$$

Veamos algunas de las propiedades de la función Gamma, que se deducen de su representación como producto infinito:

(i) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(ii) $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen(\pi z)}$ **(Fórmula de reflexión de Euler)**

Demostración. (i): Usando (2.7) se tiene:

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{e^{\gamma(z+1)}(z+1)f(z+1)} = \frac{1}{e^{\gamma z}f(z)} = z\Gamma(z)$$

(ii): Tomando $z = n$ entero positivo en (i):

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\dots 2\Gamma(1)$$

Con $\Gamma(1) = \frac{1}{e^{\gamma}f(1)} = \frac{1}{e^{\gamma}e^{-\gamma}} = 1$.
(iii): Es inmediato comprobar que $sen(\pi z) = \pi z f(z) f(-z)$. Por tanto:

$$sen(\pi z) = \frac{\pi}{e^{\gamma z}\Gamma(z)(-z)e^{-\gamma z}\Gamma(-z)} = \frac{\pi}{-z\Gamma(-z)\Gamma(z)}$$

Por (i), $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ y se tiene:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen(\pi z)}$$

$\square$

De la fórmula de reflexión para $z = \frac{1}{2}$ se deduce que $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$, y al ser Γ una función positiva en $(0,\infty)$ se tiene que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Capítulo 3

Teoría analítica de números

En este capítulo vamos a ver algunas aplicaciones de los productos infinitos en teoría de números.

3.1. Productos de Euler

Primero de todo, definamos el concepto de función multiplicativa:

Definición. Una función $f : \mathbb{N} \to \Omega \subseteq \mathbb{C}$ se dice **multiplicativa** si $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$ primos entre sí. Si la igualdad se da para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se dice que la función es **completamente multiplicativa**.

El siguiente teorema, debido a Euler, es a veces llamado la versión analítica del Teorema fundamental de la aritmética.

Teorema 3.1. *Sea f una función multiplicativa tal que la serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ *converge absolutamente. Entonces, la serie se puede expresar como un producto infinito absolutamente convergente:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \prod_{p primo} (1 + f(p) + f(p^2) + \dots) \tag{3.1}$$

Si f es además completamente multiplicativa, la fórmula se simplifica:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \prod_{p primo} \frac{1}{1 - f(p)}$$

Nota. El producto recibe el nombre **producto de Euler** de la serie.

Demostración. Tomamos el siguiente producto finito:

$$P(N) = \prod_{p \le N} (1 + f(p) + f(p^2) + \dots)$$

extendido a todos los primos menores o iguales que N. Al tratarse del producto de un número finito de series absolutamente convergentes, estas se pueden multiplicar y reordenar los términos sin verse alterado el valor de la suma. El teorema fundamental de la aritmética nos permite escribir:

$$P(N) = \sum_{n\in A} f(n)$$

siendo A el conjunto de los n con todos sus factores primos $\le N$. Por tanto:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) - P(N) = \sum_{n\in B} f(n)$$

siendo B el conjunto de los n con al menos un factor primo $> N$. Entonces:

$$\Big|\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) - P(N)\Big| \leq \sum_{n\in B} |f(n)| \leq \sum_{n>N} |f(n)|$$

Si hacemos $N \to \infty$, la suma del final $\to 0$ por ser $\sum |f(n)|$ convergente. Deducimos, por tanto, que $P(N) \to \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ cuando $N \to \infty$.

Por otro lado, sabemos que un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ es absolutamente convergente cuando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, luego hay que probar que $\sum_p |f(p)+f(p^2)+\dots|$ es convergente. Tenemos:

$$\sum_{p\leq N} |f(p)+f(p^2)+\dots| \leq \sum_{p\leq N} (|f(p)|+|f(p^2)|+\dots) \leq \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)| = C \in \mathbb{R}$$

Las sumas parciales están acotadas, luego $\sum_p |f(p)+f(p^2)+\dots|$ es convergente y el producto de (3.1) converge absolutamente.

Si f es completamente multiplicativa, se cumple $f(p^n) = f(p)^n$ para todo $p \in \mathbb{N}$, en particular para p primo. Luego $1+f(p)+f(p^2)\dots$ es una serie geométrica de razón $f(p)$ cuya suma es $\frac{1}{1-f(p)}$. □

Nota. La serie geométrica del final converge por ser $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ convergente, ya que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(n) < \infty \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(p)^n < \infty\ \forall p$ primo.

Definición. Se llama **serie de Dirichlet** a toda serie de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

donde a_n y s son números complejos.

Se tiene que:

$$\Big|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\Big| < \infty \Rightarrow \Big|\frac{f(n)}{n^s}\Big| < \infty \quad \Re(s) \geq \Re(s_0)$$

Los recintos de convergencia absoluta de estas series son semiplanos. En efecto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big|\frac{f(n)}{n^s}\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} \Big|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\Big| \Big|\frac{1}{n^{s-s_0}}\Big|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\Big| \frac{1}{n^{\Re(s)-\Re(s_0)}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\Big| < \infty$$

Aplicando el teorema anterior a una serie de Dirichlet absolutamente convergente se obtiene inmediatamente el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ absolutamente convergente para $\Re(s) > \sigma$. Si f es multiplicativa se tiene:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p (1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\dots)$$

para $\Re(s) > \sigma$. Si además f es completamente multiplicativa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-f(p)p^{-s}}$$

para $\Re(s) > \sigma$.

Tomando $f(n) = 1$ en el último teorema se obtiene:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

para $\Re(s) > 1$. $\zeta(s)$ se llama **Función zeta de Riemann** y está estrechamente relacionada con la distribución de los números primos.
Tomando $s = 2$ obtenemos la curiosa identidad:

$$\prod_p \frac{p^2}{p^2-1} = \frac{\pi^2}{6}$$

Definamos una nueva función:

Definición. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define la **función de Möbius** $\mu(n)$ como sigue:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados y con un número par de factores primos distintos} \\ -1 & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados y con un número impar de factores primos distintos} \\ 0 & \text{si } n \text{ no es libre de cuadrados} \end{cases}$$

Nota. $n \in \mathbb{N}$ se dice **libre de cuadrados** si no es divisible por el cuadrado de ningún primo, es decir, en su descomposición en producto de primos todos aparecen con multiplicidad 1.

Tomando ahora $f(n) = \mu(n)$, se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p (1 + \frac{\mu(p)}{p^s} + \frac{\mu(p^2)}{p^{2s}} + \dots) = \prod_p (1-p^{-s})$$

ya que $\mu(p) = -1$ y $\mu(p^n) = 0, \forall n \geq 2$. Pero justo ese producto es $\frac{1}{\zeta(s)}$, así que finalmente se tiene:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p (1-p^{-s})$$

para $\Re(s) > 1$.

3.2. Particiones

En esta parte trataremos un problema básico en teoría aditiva de números, que consiste en expresar $n \in \mathbb{N}$ como suma de elementos de $A = \{a_1, a_2, ..\}$, donde los a_i son números primos, cuadrados, triangulares,etc. Cada representación de n como suma de elementos de A recibe el nombre de **partición** de n. En particular, nos interesa la función $A(n)$, que cuenta el número de particiones de n en sumandos tomados de A. Nos centraremos en las particiones sin restricciones:

Definición. Se definen las **particiones sin restricciones** de $n \in \mathbb{N}$ como las soluciones de :

$$n = x_1 + \cdots + x_n$$

donde los x_i son positivos y $\leq n$, se pueden repetir, el número de sumandos no está restringido y el orden de los mismos no es tenido en cuenta.

La función que cuenta este número de particiones se denota por $p(n)$.

3.2.1. Función generadora de particiones

Una función de la forma $F(x) = \sum f(n)x^n$ recibe el nombre de **función generatriz de los coeficientes f(n)**, la cual vemos que viene representada por una serie de potencias. Nuestro objetivo ahora es determinar la función generatriz para $p(n)$. El siguiente teorema nos da la solución:

Teorema 3.3. *Si* $|x| < 1$*, se tiene:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m}$$

siendo $p(0) = 1$.

Antes de dar una demostración rigurosa del teorema, veamos una manera formal de obtener la identidad, ignorando cuestiones de convergencia. Primero de todo, expandimos en serie de potencias cada factor del producto (se trata de series geométricas) para tener:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6\dots)\dots$$

Desarrollando el producto del final, como si fuera un producto ordinario de polinomios, se tiene una serie de potencias:

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} a(k)x^k$$

Queremos ver $a(k) = p(k)$. El término x^k de la serie de potencias se obtiene tomando un término x^{k_1} de $(1+x+x^2+\dots)$, un término x^{2k_2} de $(1+x^2+x^4+\dots)$ y así hasta un término x^{mk_m} de $(1+x^m+x^{2m}+\dots)$, donde se verifica:

$$k = k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m$$

es decir, tenemos k_1 unos, k_2 doses y así sucesivamente. Luego se trata de una partición de k en sumandos positivos. Así, cada partición de k produce un término x^k y, recíprocamente, cada x^k proviene de una partición de k. Luego $a(k)$ es igual a $p(k)$, el número de particiones de k.
Visto esto, procedemos a dar la demostración:

Demostración. Tomamos $0 \le x < 1$ y definimos:

$$F_m(x) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-x^k}$$

$$F(x) = \lim_{m\to\infty} F_m(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

Notemos que el producto que define $F(x)$ es absolutamente convergente para $0 \le x < 1$, ya que su inverso $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ lo es (por ser $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ absolutamente convergente). Por otro lado, la sucesion $\{F_m(x)\}$ es creciente para cada x fijo, ya que:

$$F_{m+1}(x) = \frac{1}{1-x^{m+1}} F_m(x) \ge F_m(x)$$

Luego $F_m(x) \le F(x)$ para cada x fijo y para todo m. $F_m(x)$ es un producto finito de series absolutamente convergentes, luego se puede reordenar los términos y expresar:

$$F_m(x) = 1+\sum_{k=1}^{\infty} p_m(k)x^k$$

siendo $p_m(k)$ el número de soluciones de:

$$k = k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m$$

es decir, las particiones de k en a lo sumo m partes. Es obvio que:

$$p_m(k) \leq p(k)$$

dándose la igualdad para $m \geq k$. Entonces:

$$\lim_{m\to\infty} p_m(k) = p(k)$$

Divido $F_m(x)$ en dos partes:

$$F_m(x) = \sum_{k=0}^{m} p_m(k)x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{m} p(k)x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k)x^k$$

Al ser $x \geq 0$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{m} p(k)x^k \leq F_m(x) \leq F(x)$$

de donde se deduce que $\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$ es convergente.
Más todavía, al ser $p_m(k) \leq p(k)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k \leq F(x)$$

lo que muestra que para cada x fijo, $\sum p_m(k)x^k$ converge uniformemente en m. Haciendo $m \to \infty$:

$$F(x) = \lim_{m\to\infty} F_m(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$$

Basta extender analíticamente al disco $|x| < 1$ para completar la demostración. $\square$

Siguiendo un razonamiento similar, se sigue el siguiente resultado:

Proposición 3.4. *Las funciones:*

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}} \qquad \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m}}$$

son las funciones generatrices para el número de particiones de n en un número impar y par de sumandos respectivamente.

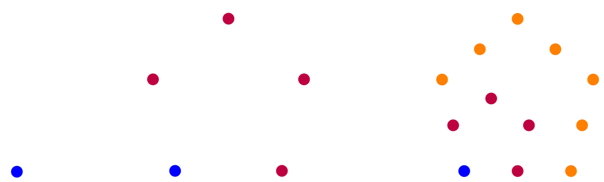
Ahora tomamos el producto $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$, inverso de la función generatriz de $p(n)$. Expresamos:

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n$$

Queremos expresar $a(n)$ como una función de partición. Para ello, notamos que toda partición de n en sumandos desiguales produce un término x^n en la serie con coeficiente $+1$ o -1. Es $+1$ si x^n es el producto de un número par de términos y -1 en otro caso. Así:

$$a(n) = p_e(n) - p_o(n)$$

siendo $p_e(n)$ el número de particiones de n en número par de sumandos desiguales y $p_o(n)$ el número de particiones de n en número impar de sumandos desiguales. Euler demostró que $p_e(n) = p_o(n)$ para todo n excepto aquellos n que pertencen al grupo de los llamados **números pentagonales**.



1 $\qquad$ $1+4=5$ $\qquad$ $1+4+7=12$

Observamos que estos números son las sumas parciales de la progresión aritmética $1,4,7,\ldots,3n+1,\ldots$. Sea $\omega(n)$ la suma de los n primeros términos de la progresión. Entonces:

$$\omega(n)=\sum_{k=0}^{n-1}(3k+1)=\frac{3n^2-n}{2}$$

Haciendo $n\leftrightarrow -n$ se tiene:

$$\omega(-n)=\frac{3n^2+n}{2}$$

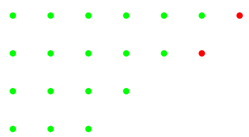
Dando los valores $n=1,2,3\ldots$, los primeros de valores de $\omega(n)$ son $1,5,12,22\ldots$ y los primeros de $\omega(-n)$ son $2,7,15,26\ldots$. Tomamos $\omega(0)=0$.
Los valores de $\omega(n)$ y $\omega(-n)$ se llaman **números pentagonales**.

Teorema 3.5. ***(Teorema del número pentagonal de Euler)*** *Para* $|x|<1$ *se tiene:*

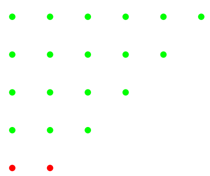
$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\omega(n)}$$

Antes de proceder a la demostración, hemos visto antes que $a(n)=p_e(n)-p_o(n)$. Por ejemplo, el coeficiente de x^7 es 1 porque sólo hay 3 maneras de descomponer 7 en número par de sumandos distintos ($1+6$, $2+5$ y $3+4$) y sólo dos en número impar de sumandos distintos ($1+2+4$ y el propio 7).

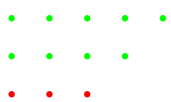
Demostración. Vamos a dar un demostración mediante argumentos combinatorios.
Consideramos una partición de n en distintas partes. Tomamos, por ejemplo, para una mejor visualización, $n=20$ con la partición $20=7+6+4+3$. Gráficamente:



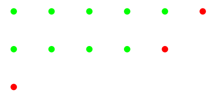
Sea k el número de elementos de la menor fila del gráfico. Sea s el número de elementos situado más a la derecha que forman diagonal (coloreados en rojo). En nuestro gráfico es $k=3$ y $s=2$.
Si $k>s$ (como en nuestro gráfico), podemos tomar los elementos de la diagonal (en roja) y colocarlos en una nueva fila. En nuestro ejemplo queda así:



Si este no es el caso (como en el nuevo gráfico, donde $k=2$,$s=5$), se revierte el proceso moviendo la fila inferior a una nueva diagonal. En nuestro ejemplo, esto nos devuelve al gráfico original.
Se puede ver que este proceso aplicado dos veces siempre nos lleva al gráfico original y siempre cambia la paridad del número de filas. Por tanto, este proceso (cuando puede realizarse), permite aparear los gráficos, obteniendo 1 o -1 en la suma original. De esta manera, todo se anula salvo en los casos en el que el proceso no puede realizarse. Estos casos son dos:
a) $k=s$ y la diagonal más a la derecha y la fila inferior se encuentran, como en este caso:



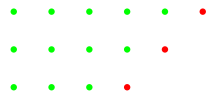
Realizando la operación se tiene:



En este caso falla el cambio de la paridad en el número de filas y el proceso no es reversible, ya que realizando otra vez la operación no se vuelve al gráfico original. Si hay k elementos en la última fila del gráfico original:

$$n = k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (2k-1) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

b) $k = s+1$ y la diagonal más a la derecha y la fila de abajo se encuentran, como en este caso:



Aquí la operación requiere mover la diagonal (puntos en rojo) a la fila de abajo, pero en ese caso se tendrían 2 filas de 3 elementos, lo cual entra en contradicción con el hecho de que estamos contando particiones de distintos sumandos. Éste caso es igual al previo, pero con una fila menos. Por tanto:

$$n = k + (k+1) + \cdots + (2k-2) = \frac{(k-1)(3k-2)}{2} = \frac{m(3m-1)}{2}$$

con $m = 1-k < 0$. □

Hemos probado que las particiones de número par de distintos sumandos y de un número impar distintos sumandos se cancelan mutuamente excepto en el caso de los números pentagonales. Por tanto, desarrollando el producto y aplicando el método expuesto para cada x^n:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots$$

Bibliografía

[1] S.PONNUSAMY, HERB SILVERMAN, *Complex Variables with Applications*, http://math.bonabu.ac.ir/uploads/35/CMS/user/file/107/ponnusamy.pdf

[2] TOM M. APOSTOL, *Introduction to Analytic Number Theory*, http://plouffe.fr/simon/math/IntrodAnalyticNTApostol.pdf

[3] WIKIPEDIA, *Fórmula de Viète*, https://es.wikipedia.org/wiki/Fórmula_de_Viète

[4] PROOF WIKI, *Wallis's Product*, https://proofwiki.org/wiki/Wallis's_Product