Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Grado

Volatilidad implícita y ecuación de Black&Sholes: Vega, Gamma, Delta y Theta.

Autor/es

Pablo Vilas Naval

Director/es

José Luis Sarto Marzal

Facultad de economía y empresa
2018

Autor: Vilas Naval, Pablo.

Director: Sarto Marzal, José Luis.

Volatilidad implícita y ecuación de Black&Sholes: Vega, Gamma, Delta y Theta.

The implied volatility and the Black&Sholes equation: Vega, Gamma, Delta y Theta.

Grado en Finanzas y Contabilidad de la Universidad de Zaragoza.

La fórmula desarrollada por Black&Sholes es una fórmula compleja utilizada para la valoración de opciones europeas. Para operar con este tipo de productos financieros es indispensable poseer una comprensión avanzada de esta fórmula. En este trabajo se ha realizado un estudio de las derivadas parciales de esta fórmula - Vega, Delta, Gamma y Theta- y como estas reaccionan ante variaciones de la volatilidad, del precio del subyacente y del paso del tiempo. Este trabajo ofrecerá al lector herramientas analíticas de utilidad para desarrollar estrategias de gestión activa mediante el uso de opciones. Para desarrollar correctamente una estrategia de inversión es fundamental entender el escenario de sensibilidades en el que se puede operar en un momento dado. El trabajo finalizará con la introducción del concepto de volatilidad implícita. Este concepto enriquecerá lo aprendido hasta el momento, pero dejará en evidencia que hay más aspectos que se deben de tener en cuenta a la hora de invertir con opciones a parte de las implicaciones matemáticas de la fórmula de Black&Sholes. La realidad es extremadamente compleja y este trabajo es una primera aproximación al apasionante y complejo mundo de la "Ingeniería Financiera".

The formula developed by Black & Sholes is used for the valuation of European options. To operate with this type of financial products it is essential to have an advanced knowledge of this formula. This work explains the partial derivatives of this formula - Vega, Delta, Gamma and Theta - and how they react to variations in volatility, the price of the underlying asset and the time to expiration. This work offers useful analytical skills to active management strategies which use options. In order to develop an investment strategy, it is fundamental to understand the scenario of sensitivities where we are. The last part of the essay introduces the implied volatility concept. This concept will be enriching for the lector. There are more components, besides of the mathematical implications of the Black&Sholes equation, which must be considered like the implied volatility. The reality is extremely hard, and this work is a first approach to the exciting and complex world of "Financial Engineering".

1. Introducción:

1.1. Justificación:

El presente trabajo quiere profundizar primordialmente en lo aprendido durante el desarrollo de la asignatura de Ingeniería Financiera del cuarto curso del grado de Finanzas y Contabilidad. Se van a utilizar herramientas de análisis y de resolución de problemas; conocimientos financieros, matemáticos y estadísticos, así como el resto de las competencias adquiridas durante el desarrollo de la carrera en las diferentes disciplinas que componen la misma. En concreto estas herramientas y competencias se van a aplicar al estudio de la fórmula Black and Sholes con la que se valoran las opciones financieras.

1.2. Preámbulo:

Existe una gran variedad de opciones financieras que suelen clasificarse en dos grupos: *opciones vanilla* y *opciones exóticas*. En el presente trabajo, este segundo grupo no será objeto de análisis ya que, en un espacio tan limitado, como son cuarenta páginas, es imposible abarcar el extenso y complejo mundo de las opciones exóticas[1]. Por lo que nos vamos a ocupar en exclusiva de las *opciones vanilla*, concretamente en las Europeas.

Las opciones vainilla, al contrario que las exóticas, se negocian en mercados organizados donde el riesgo de contrapartida es tendente a cero al existir un intermediario entre comprador y vendedor que garantiza el cumplimiento de lo pactado mediante el requerimiento a las partes, cuando corresponda, de garantías dinerarias. Esto implica que las opciones vainilla sean contratos estandarizados donde una parte se obliga a comprar o vender a un determinado precio (**strike**), una determinada cantidad de un activo financiero (**subyacente**), en una fecha determinada (**vencimiento**) a cambio de recibir una contra prestación monetaria (**prima**) por la contraparte adquiriente del derecho.

Las opciones vainilla pueden ser americanas o europeas. En las americanas el comprador puede ejercer su derecho en cualquier momento de la vida del contrato, pero esto no suele suceder. Por regla general este tipo de contratos financieros poseen valor temporal por lo que el poseedor de dicho derecho conseguirá mejores resultados enajenando su privilegio

[1] Opciones barrera, opciones asiáticas, opciones binarias, opciones cesta, opciones look-back, opciones conforma de escalera, opciones bermudas, opciones compuestas o anidadas…

que ejerciéndolo. Las opciones vainilla también pueden ser europeas las cuáles solo pueden ser ejercidas a vencimiento. El valor teórico de estas se puede calcular usando el modelo de Black-Scholes[2]; este modelo puede ser utilizado asimismo para el cálculo de las primas de las opciones americanas, si suponemos que estas tienen un comportamiento similar a las europeas.

1.2.1. Opciones vanilla y el modelo de Black-Sholes:

El modelo Black-Sholes del que vamos a partir en este Trabajo Fin de Grado sirve para valorar dos tipos de contratos de opciones: *call* y *put*. Cuando se negocia el derecho a vender a un determinado precio estamos ante una opción de venta (***put***), en cambio si lo que se negocia es un derecho a comprar a un determinado precio nos encontramos ante una opción de compra (***call***). En cada uno de estos dos contratos nos encontramos con dos posiciones asimétricas entre el adquiriente del derecho y el expendedor de este. Por lo tanto, existen cuatro posiciones básicas: compra de call, venta de call, compra de put, venta de put.

El valor teórico de la prima se calcula en cada caso de diferente forma dependiendo de si nos encontramos ante una put o una call. Este valor teórico se calcula usando la siguiente fórmula (ecuación/modelo de Black-Sholes):

Modelo de Black-Sholes:

Prima Call = $S * \Phi(d_+) - K * e^{-r*T}\,\Phi(d_-)$

Prima Put = $K * e^{-r*T}\,\Phi(-d_-) - S * \Phi(-d_+)$

$$d_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right) * T}{\sigma * \sqrt{T}}$$

Φ= Distribución normal acumulada

S= Subyacente

K=Strike

T = Tiempo en años

σ = Volatilidad

r= tasa de interés doméstica

Cuadro 1.1.

Este modelo de valoración toma tres supuestos simplificadores:

1. Los costos de transacción son iguales a cero.
2. La tasa de interés es constante a lo largo del tiempo.

[2] Robert C. Merton. (1971). *Theory of Rational Option Pricing.* Cambridge: M.I.T.

3. La volatilidad de la acción es constante, lo que implica que el precio futuro del subyacente sigue una distribución logaritmo normal.

La asunción del primer supuesto simplificador no supone ningún inconveniente. El segundo supuesto se puede solventar con mayor o menor soltura según el plazo de vencimiento de la opción mediante la consideración de los tipos *spot* y *forward* para la elección de la tasa de interés. Además, en el panorama actual de las economías desarrolladas donde las tasas de inflación y los tipos de interés son bajos, la influencia de esta variable en el valor teórico de la prima es residual. La admisión del tercer supuesto, volatilidad constante, supone una limitación al modelo, como han demostrado los modelos ARCH, GARCH y EGARCH -entre otros- los cuales modelizan con mayor o menor acierto tres características que se ven en las series financieras:

1. La existencia de lo que se denomina volatilidad por bloques, es decir el agrupamiento de la volatilidad en el tiempo.
2. El efecto palanca: esta característica se manifiesta en una repuesta asimétrica de la volatilidad dependiendo del signo del rendimiento. Dicho de otra forma: el efecto del pánico o de las malas noticias en los mercados financieros no tiene la misma influencia en la volatilidad que la euforia o las buenas noticias.
3. Shocks de la volatilidad: los efectos de un incremento repentino y esporádico de la volatilidad.

Estas limitaciones en las que se incurre al asumir que la volatilidad sea constante son insalvables: no existe, por el momento, forma alguna de predecir la volatilidad futura de un activo financiero – si usted sabe cómo predecirla, puede hacerse rico-.

1.2.2. Objetivos:

En las siguientes páginas nos proponemos profundizar en el modelo desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes. Primero se explicará cómo afecta el reparto de dividendos y las ampliaciones de capital, la cotización del subyacente, la elección del strike, la volatilidad y las tasas de interés al valor de la prima para luego profundizar en las implicaciones matemáticas de la fórmula. Se estudiarán las derivadas parciales de la fórmula y cómo estas sensibilidades varían en función del tiempo, la volatilidad y el subyacente.

Al finalizar la lectura de este trabajo sobre las derivadas parciales de la fórmula de Black-Sholes se comprobará que se han ofrecido herramientas analíticas de una utilidad relevante para comprender las diferentes estrategias de inversión que se pueden llevar a cabo con opciones. Para desarrollar estrategias de gestión activa, así como para elegir qué posición tomar en el mercado es fundamental entender el escenario de sensibilidades en el que se puede operar en un momento dado y comprender hacía qué nuevos entornos variará o puede variar la escenografía de ese momento dado. Por último, se introducirá el concepto de la volatilidad implícita.

2. Influencia de las variables exógenas en la prima teórica:

Como se aprecia en el cuadro 2.1 la prima de una opción depende de cinco variables:
el tiempo a vencimiento, la volatilidad, el tipo de interés, el strike y el precio del subyacente[3]. Aquellas variaciones que provocan un aumento del valor de la prima benefician al poseedor de opción y por lo tanto perjudican al vendedor. Por otro lado, hay movimientos que perjudican al comprador y benefician al vendedor. De estas cinco variables: el strike, el tipo de interés y el subyacente afectan de forma distinta según hablemos de opciones de compra o de venta.
Existen otros elementos, los dividendos y las ampliaciones de capital, que afectan al valor teórico de nuestra prima de forma indirecta al afectar de forma directa al valor del subyacente. Como se explicó en la asignatura de Bolsa y Análisis Bursátil la capitalización bursátil -número de acciones por precio de cotización- de una compañía tras una ampliación o un reparto de beneficios debe ser igual a la capitalización anterior más lo aportado por los socios o menos lo repartido por la empresa mediante dividendos.

Una forma de hacer frente a estas dos variables es detraer al subyacente el valor actual de los dividendos esperados o/y anunciados, y añadir la cantidad esperada que aportarán los socios en las ampliaciones de capital anunciadas. Existen futuros sobre acciones e índices que cotizan en el mercado de futuros español que detraen dicho importe de la capitalización del activo financiero. Por las cualidades expuestas que presentan estos futuros suelen ser idóneos para su utilización como subyacente para el cálculo teórico de las primas de opciones. Según la teoría económica, una vez se produce el reparto de dividendos/ ampliación de capital por parte de una empresa cotizada, el valor bursátil de

[3] Tyler Adrian y Eva Cekoulyte. (2006). *Guía informativa de CNMV. Que debe de saber de opciones y futuros*. CNMV: Artegraft, S.A.

la misma debe descender/aumentar en el importe de la renta repartida/aportada por los socios. El descenso/aumento de la capitalización afecta directamente al valor de la prima.

A mayor…	**Prima Call**	**Prima Put**
Subyacente	↑	↓
Strike	↓	↑
Tiempo a venct.	↑	↑
Volatilidad	↑	↑
Tasa de interés	↑	↓

A menor…	**Prima Call**	**Prima Put**
Subyacente	↓	↑
Strike	↑	↓
Tiempo a venct.	↓	↓
Volatilidad	↓	↓
Tasa de interés	↓	↑

Cuadro 2.1.

En estos cuadros reflejan cómo afectan las variables del modelo Black and Sholes al valor de la prima tanto para la de la opción de venta como para la de compra. Este análisis solo nos dice en qué casos valdrá más la prima y en que casos valdrá menos. Es importante profundizar en la fórmula para saber cómo reacciona la prima ante incrementos de las distintas variables y cómo incrementos de una variable pueden afectar al resto de variables.

3. Análisis de sensibilidades: Las derivadas parciales.

3.1. Introducción al concepto de sensibilidad:

Es muy importante conocer cómo variará el valor de nuestra prima ante incrementos del subyacente, de la volatilidad, de los tipos de interés y del paso del tiempo:

Vega(V): Se denomina vega a la derivada parcial de la prima respecto de la volatilidad ($\frac{dP}{d\sigma}$). Vega nos indica cuánto aumentará la prima de nuestra opción ante un incremento infinitesimal de la volatilidad.

Theta (θ): Se denomina Theta a la derivada parcial de la prima respecto del tiempo $\left(\frac{dP}{dt}\right)$. Theta nos indica cómo variará la prima de nuestra opción ante una variación infinitesimal del tiempo.

Delta (Δ): Se denomina Delta a la derivada parcial de la prima respecto del subyacente$\left(\frac{dP}{dS}\right)$. Delta nos indica cómo variará la prima de nuestra opción ante un incremento del subyacente.

Gamma (γ): Se denomina Gamma a la derivada segunda de la prima respecto del subyacente ($\frac{d^2P}{d^2S}$). Gamma nos indica cómo varia delta ante un incremento infinitesimal del subyacente.

Rho(P): Se denomina Rho a la derivada parcial de la prima respecto del tipo de interés$\left(\frac{dP}{dr}\right)$ Rho nos indica cómo variará la prima de nuestra opción ante un incremento infinitesimal de los tipos de interés.

3.1.1. Derivadas parciales en la opción de compra:

En el siguiente gráfico aparecen representadas las sensibilidades de la prima de una opción de compra en función del strike para unos valores de S, t, r y σ dados.

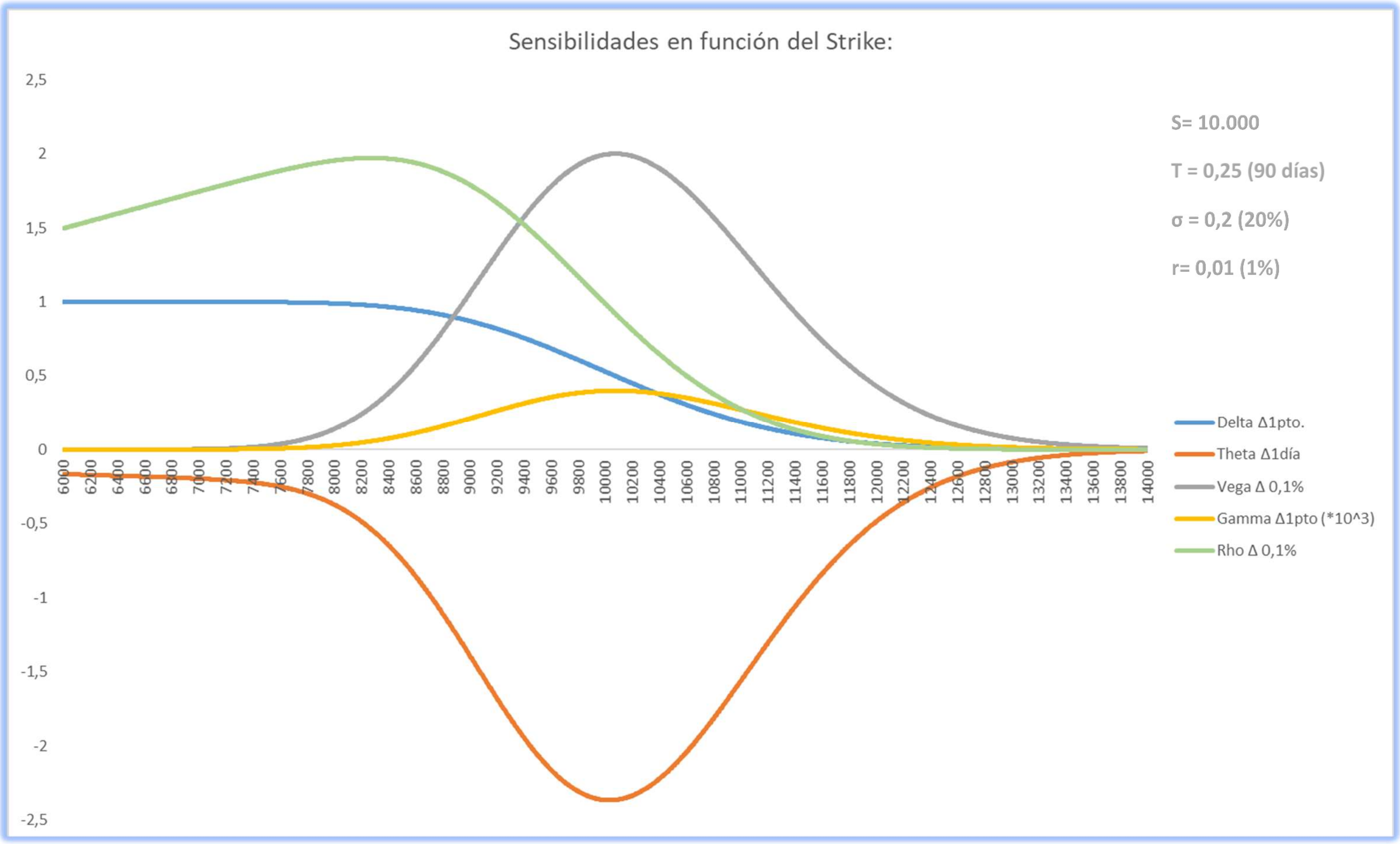

Gráfico 3.1.1.

Lo expuesto en este gráfico es una aproximación muy exacta al valor matemático de las derivadas parciales anteriormente explicadas para una opción de compra. En el caso de delta y gamma es una aproximación exacta ya que el tick es un punto (incremento mínimo de del subyacente, en este caso un futuro sobre el Ibex). El valor de Gamma esta multiplicado por 1.000, en caso de no realizar esta operación no se podría apreciar Gamma en el gráfico. Vega y Rho están expresados ante incrementos del 0,1% de la volatilidad y de los tipos de interés respectivamente. Theta está expresada ante descensos de un día en la duración del contrato.

En el gráfico se aprecia cómo los valores máximos de Vega, Theta y Gamma se encuentran sensiblemente fuera del dinero. Dicho para el lector no especializado: se habla de opciones "in the money" cuando en el hipotético caso de ser ejercida la opción en el momento se obtuviera una suma de dinero; se habla de opciones "at the money" si el strike coincide con el valor del subyacente; se habla de opciones "out the money" cuando en el hipotético caso de ser ejercida en el momento no se percibiera cantidad alguna de efectivo. Lo descrito anteriormente se comporta de forma totalmente asimétrica entre las opciones de compra y las de venta. Un strike que sea "out the money" en una opción de compra será siempre "in the money" en una opción venta y viceversa.

El valor máximo de Delta se encuentra en aquellas opciones más dentro del dinero ("in the money") y el valor mínimo en aquellas opciones más fuera del dinero ("out the money"). Es importante detenerse en el comportamiento de Rho, hay que resaltar el margen izquierdo del gráfico ya que en él se aprecia una relación entre Rho y Theta. En el entorno de los 6000 puntos y al contrario de lo que sucede en extremo contrario la opción de compra sigue teniendo valor y Theta sigue siendo distinta de cero. Esto se explica únicamente por la influencia que ejercen los tipos de interés sobre el valor de la opción.

3.1.1. Derivadas parciales en la opción de venta:

En el siguiente gráfico aparecen representadas las sensibilidades de la prima de una opción de venta en función del strike para unos valores de S, t, r y σ dados.

En el gráfico se aprecia cómo los valores máximos de Vega, Theta y Gamma se encuentran en la misma franja de strikes que en el caso de la opción a compra, estos valores al hablar de una opción de venta se encuentran sensiblemente dentro del dinero.

El valor de Delta es similar, pero con valores negativos (los incrementos del subyacente reducen el valor de la prima). El valor de Rho en la opción de venta es negativo y su comportamiento es distinto al que se apreciaba en la opción de venta, su comportamiento es tal que nos encontramos -obsérvese el extremo derecho del gráfico-, ante posiciones vendidas que pueden tener una theta negativa, es decir, que les perjudique el paso del tiempo. Este fenómeno solo sucede en opciones de venta que estén muy dentro del dinero.

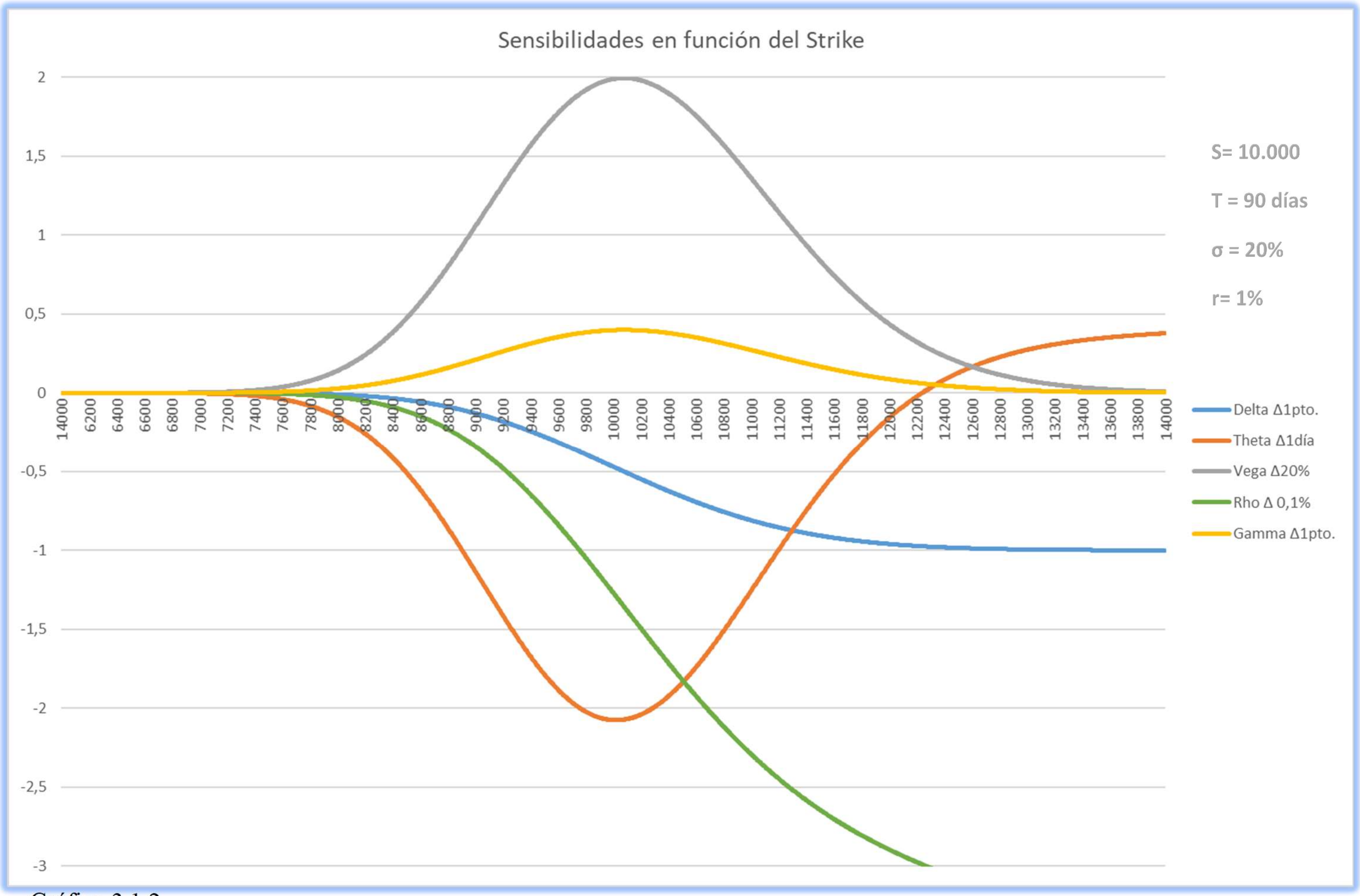

Gráfico 3.1.2.

4. Delta, Gamma, Vega y Theta en función del tiempo, la volatilidad y el subyacente.

En los siguientes apartados analizaremos cómo se comporta los valores de Gamma, Theta, Vega y Delta de una opción de compra, frente a variaciones del subyacente, de la volatilidad y del paso del tiempo dejando constantes en cada uno de los escenarios el resto de variables, salvo el strike. Los gráficos que se exponen a continuación son, en su mayoría, tridimensionales de esta forma se representa cada una de las derivadas parciales en función del strike y; la volatilidad o el subyacente o el paso del tiempo.

4.1. Gamma, Delta, Theta y Vega en función del subyacente:

- **Gamma:** Gamma nos indica el número de acciones/futuros en que debemos variar la cartera réplica cuando el precio del subyacente varia un tick.

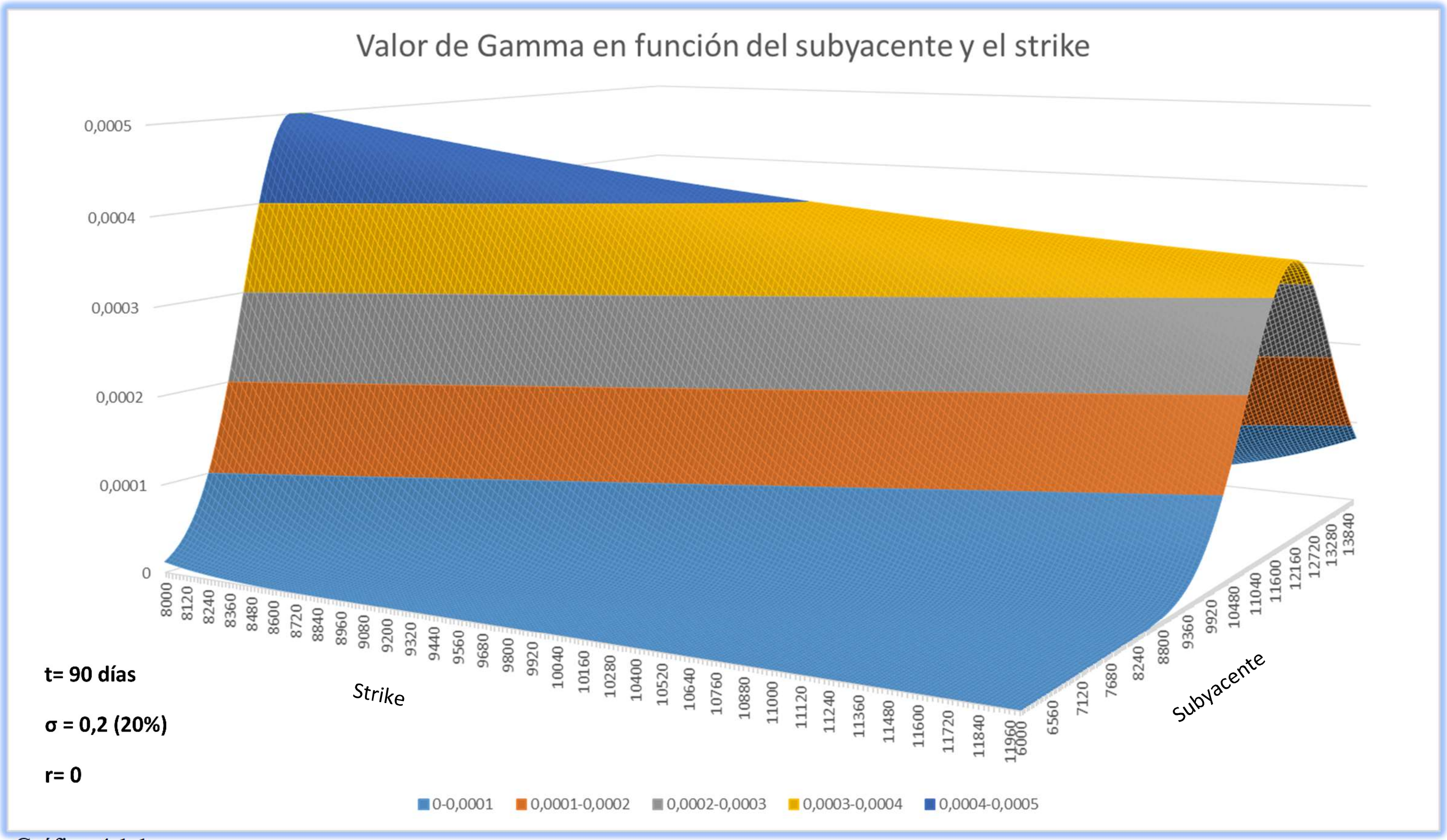

Gráfico 4.1.1.

En esta gráfica aparece representado el valor de Gamma para 200 strikes comprendidos entre 8000 y 12.000 en función del valor del subyacente el cuál va desde 6.000 hasta 14.000. Se observa, como habíamos indicado anteriormente, que el mayor valor de Gamma se da en aquellos strikes cercanos al valor del subyacente. Los más destacable del gráfico es el comportamiento que sufre Gamma conforme aumenta el valor del subyacente, se aprecia cómo el valor de Gamma disminuye conforme aumenta el valor del subyacente. Una implicación directa del suceso que aquí se aprecia lo veremos en Delta, la cuál tendrá un comportamiento más agresivo con subyacentes pequeños y más suave con subyacentes más elevados.

- **Delta:**

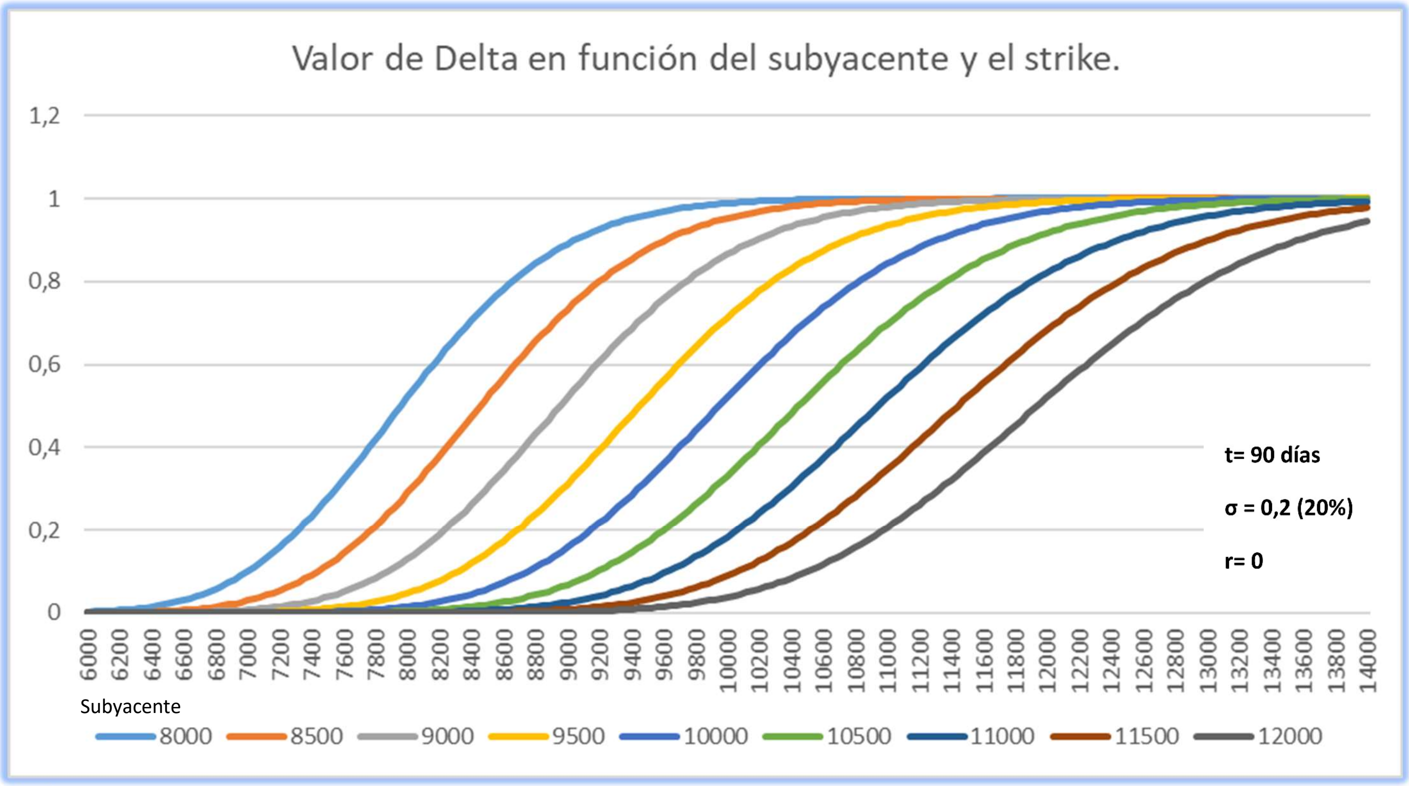

Gráfico 4.1.2.

Si comparamos la evolución de Delta del strike 8.000 con el strike 12.000 se obseva cómo el comportamiento del primero es más agresivo: Delta crece de forma más rápido, lo que se traduce en una pendiente mayor. Esto que se ha expuesto es el reflejo de lo que sucedía en Gamma: Gamma que nos muestra el comportamiento de la pendiente de Delta era mayor cuanto menor era el subyacente. Es lógico, por tanto, que Delta crezca de forma más rápida cuanto menor sea el subyacente.

- **Theta:**

En el siguiente gráfico se aprecia que el mayor valor de Theta se da en aquellos strikes cercanos al valor del subyacente. Hay que resaltar el comportamiento que experimenta Theta conforme varía el subyacente: Theta aumenta conforme aumenta el valor del subyacente. En este gráfico, como en los siguientes, el valor de de Theta ha sido multiplicado por -1 para poder realizar una representación gráfica más comprensible. Al realizar esta operación el valor de Theta es representado desde la óptica del vendedor de opciones.

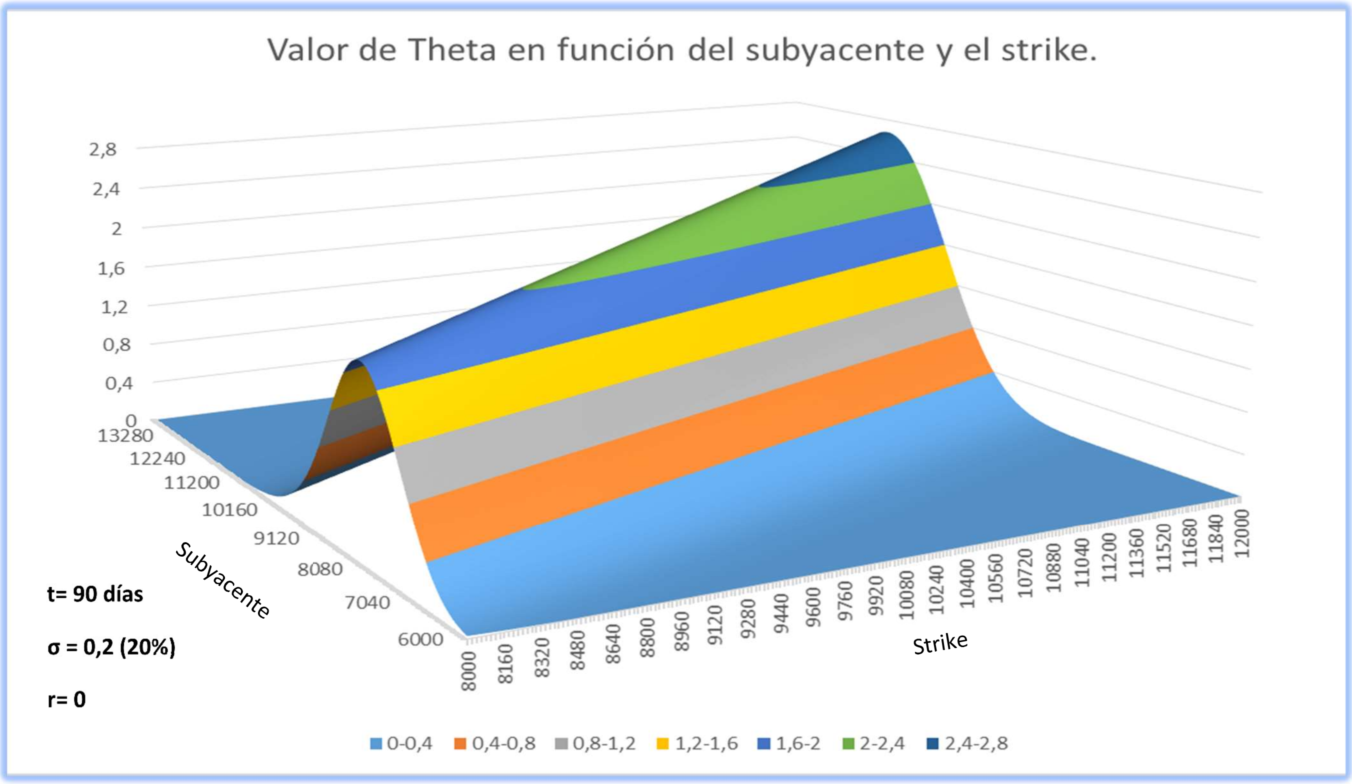

Gráfico 4.1.3.

- **Vega:**

Vega nos indica cómo afectan las variaciones de volatilidad a la prima de una opción. Recordemos que únicamente analizamos las derivadas parciales de una opción de compra.

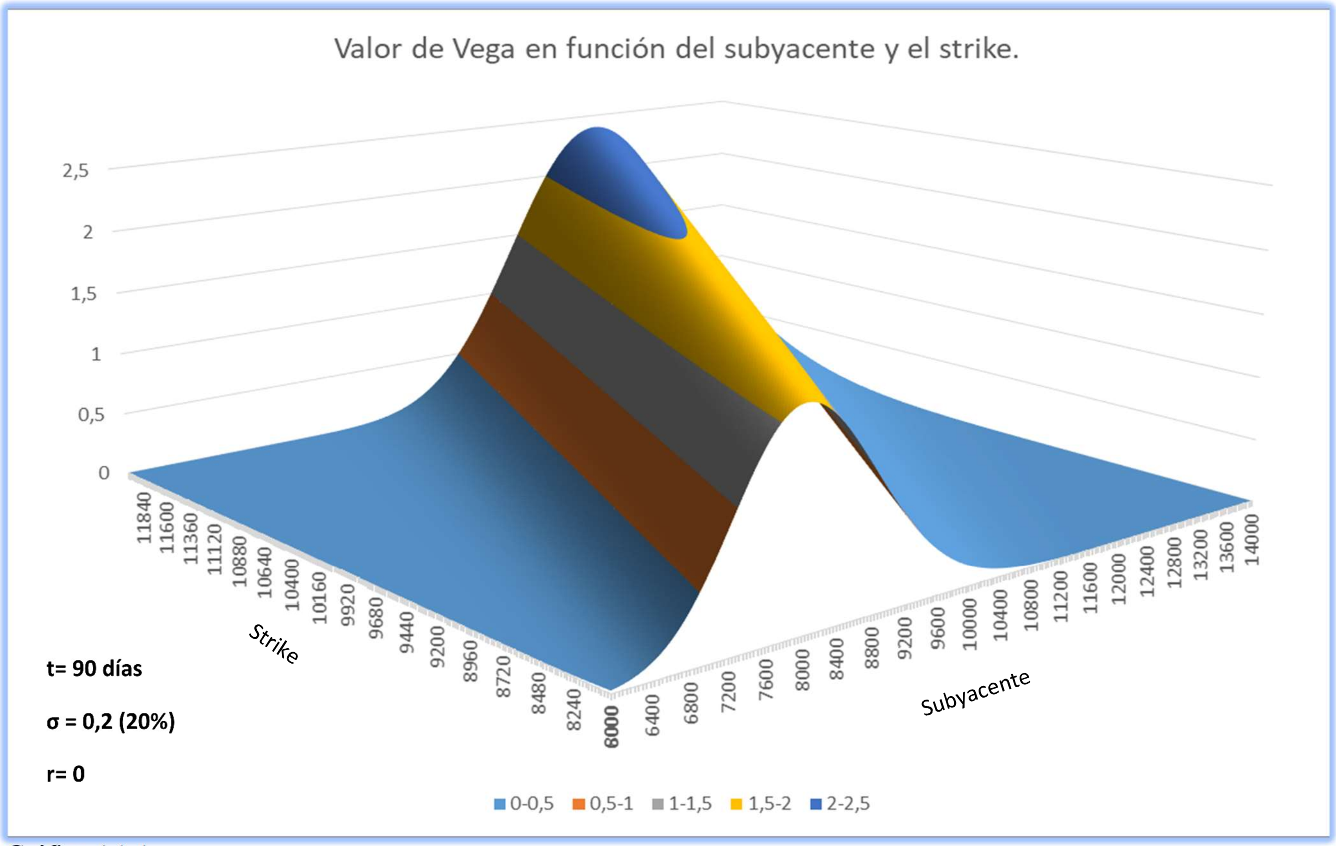

Gráfico 4.1.4

Como se aprecia en el gráfico los máximos valores de Vega en función de cada strike se encuentran en los strikes sensiblemente out the money, también se observa que el valor de Vega aumenta conforme aumenta el subyacente.

- **Recapitulación:**

Los resultados obtenidos nos invitan a pensar, de forma equivocada, que la relación entre el subyacente y las derivadas de la prima no se explican a través de la relación $\frac{Strike}{Subyacente}$.

Para unos mismos valores de T, $\boldsymbol{\sigma}$ y r manteniendo constante la relación $\frac{Strike}{Subyacente}$ obtenemos distintos valores para la prima, Gamma, Theta y Vega:

Strike	Subyacente	Prima Call	Delta Δ1ptos.	Gamma Δ1ptos.	Theta Δ1día	Vega Δ 0,1%
9000 (S*0,9)	10000	1050,820236	0,888050935	0,000211409	-0,95173211	0,956334305
18000 (S*0,9)	20000	2101,640472	0,887998045	0,000105781	-1,90346421	1,91266861
Diferencia absoluta:		1050,820236	-5,28907E-05	-0,000105628	-0,951732107	0,956334305

Cuadro 4.1.5.1.

En el cuadro anterior aparecen dos opciones de compra con idénticos valores de T(0,25), $\boldsymbol{\sigma}(0{,}18)$ y r(0) encontrándose en ambos supuestos el Strike a la misma distancia relativa del subyacente (Strike=0,9*Subyacente), para nuestra sorpresa obtenemos unos valores de Vega, Theta, Gamma, y valor de la prima totalmente distintitos. Tenemos una posición totalmente simétrica en la que obtenemos unos valores desiguales; lo que a priori parece un contrasentido tiene una explicación lógica. Un mismo subyacente con idénticas características, pero, el primero (A) cotiza a 10€ y el segundo (B) cotiza a 20€, un incremento del 1% es idéntico en términos relativos, pero totalmente diferente en términos absolutos. Una variación de un céntimo representa un incremento del 0,1% en el primer subyacente mientras que en el segundo subyacente representa un incremento del 0,05%, esto explicaría la diferencia detectada en el valor de Gamma:

$\frac{0{,}01}{S_1}*\frac{S_1}{S_2}=\frac{0{,}01}{S_2}$ Sustituimos en la expresión → $\gamma_1 * \frac{S_1}{S_2} = \gamma_2$. Según el cuadro anterior $\frac{S_1}{S_2}$ es 0,5.

Ecuación 1

El subyacente B es el doble de caro que el subyacente A por lo que sería lógico que una opción sobre el activo B tuviera una prima y unos valores de Theta y Vega dos veces superior que en el subyacente A. Las diferencias detectadas en la prima, en Vega y en Theta se pueden explicar a través de la siguiente regla.

Si: $T_1=T_2$, $\boldsymbol{\sigma}_1=\boldsymbol{\sigma}_2$, $r_1=r_2$, $\frac{Strike_1(k_1)}{Subyacente_1(S_1)}=\frac{k_2}{S_2}$ siendo Vega/Theta/Prima = X se cumple que:

$X_1*S_1=X_2*S_2$ → $X_1=\frac{S_2}{S_1} * X_2$. En ejemplo del cuadro 4.1.5.1 el valor de $\frac{S_2}{S_1}$ es 2.

Ecuación 2

Siguiendo el ejemplo de la tabla 4.1.5.1 podemos explicar prácticamente el 100% de las diferencias que ahí aparecían, utilizando las ecuaciones 1 y 2.

Strike	Subyacente	Prima Call	Delta Δ1ptos.	Gamma Δ1ptos.	Theta Δ1día	Vega Δ 0,1%
9000	10000	1050,82024	0,888050935	0,000211409	-0,95173211	0,956334305
18000	20000	2101,64047	0,887998045	0,000105781	-1,90346421	1,91266861
Diferencia absoluta:		1050,82024	-5,28907E-05	-0,000105628	-0,951732107	0,956334305
(Fila2/Fila1):		2	0,99994(≈1)	0,50036(≈0,5)	2	2

Cuadro 4.1.5.2.

A través de la ecuación 2 se explica el 100% de la diferencia entre Vega, Theta y el valor de la prima. Mediante la primera ecuación se explica prácticamente el total de la diferencia que nos aparecía en el valor de Gamma, el valor de Delta en cada una de las opciones es prácticamente idéntico.

4.2. Gamma, Delta, Theta y Vega en función del Tiempo:

- **Delta**:

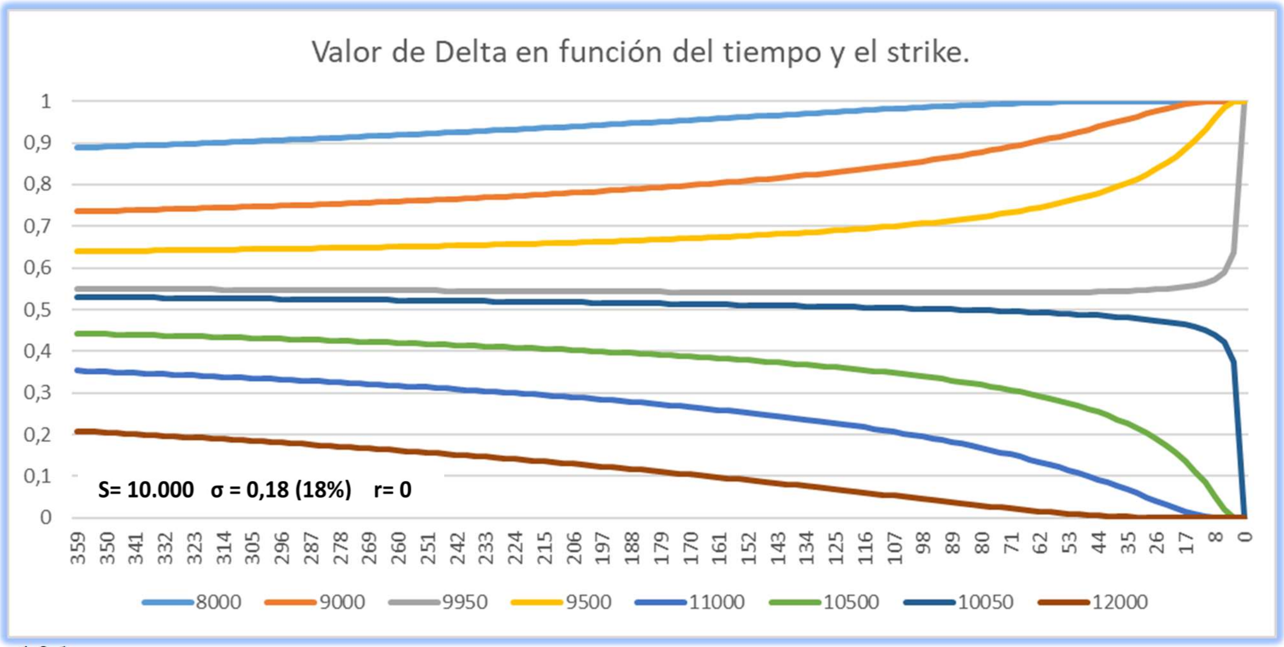

Gráfico 4.2.1.

En este gráfico aparece representado el comportamiento de Delta para diferentes strikes conforme el contrato se acerca a su vencimiento. El valor de Delta tiende a ir hacia los extremos de forma abrupta en las fechas finales a la expiración del contrato, este recorrido se produce con mayor virulencia cuanto más cerca se encuentra el strike del valor del subyacente.

- **Gamma:**

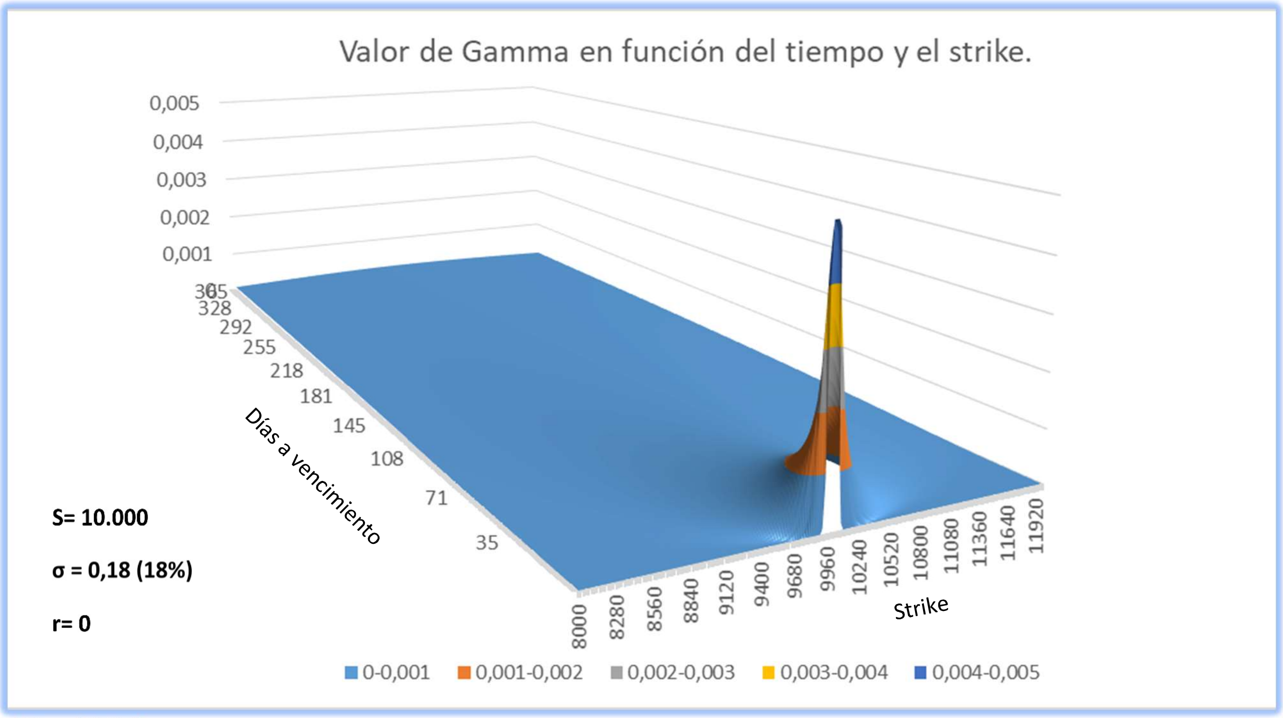

Gráfico 4.2.2.1.

Los valores de Gamma que aparecen en este gráfico deberían de ser superiores (el pico que se aprecia ha sido recortado) se ha optado por no representar aquellos valores por encima de 0,05, para apreciar mejor el efecto que se desea explicar. El valor de Gamma aumenta exponencialmente conforme el contrato se acerca a su vencimiento en aquellos strikes cercanos al valor del subyacente. Este efecto es más inteso cuanto mayor es la proximidad al subyacente. En el gráfico 4.2.2.2. aparece el efecto descrito anteriormente pero únicamente para unos pocos strikes, el comportamiento que expirementa gamma es similar al que expirementa Theta y Vega.

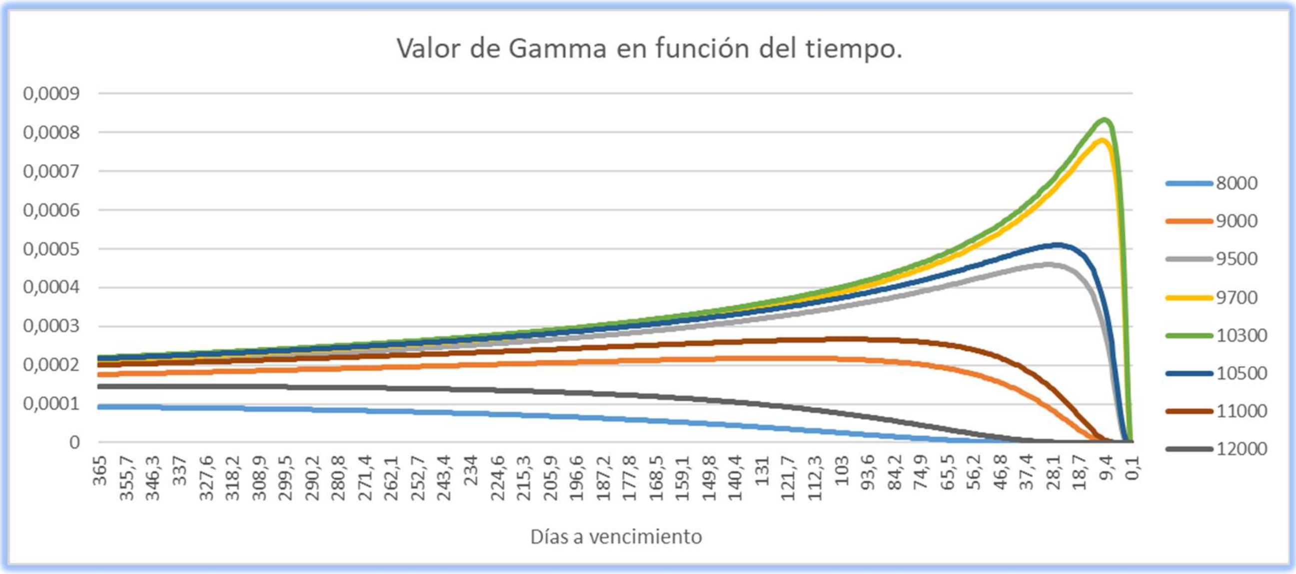

Gráfico 4.2.2.2.

- **Theta**:

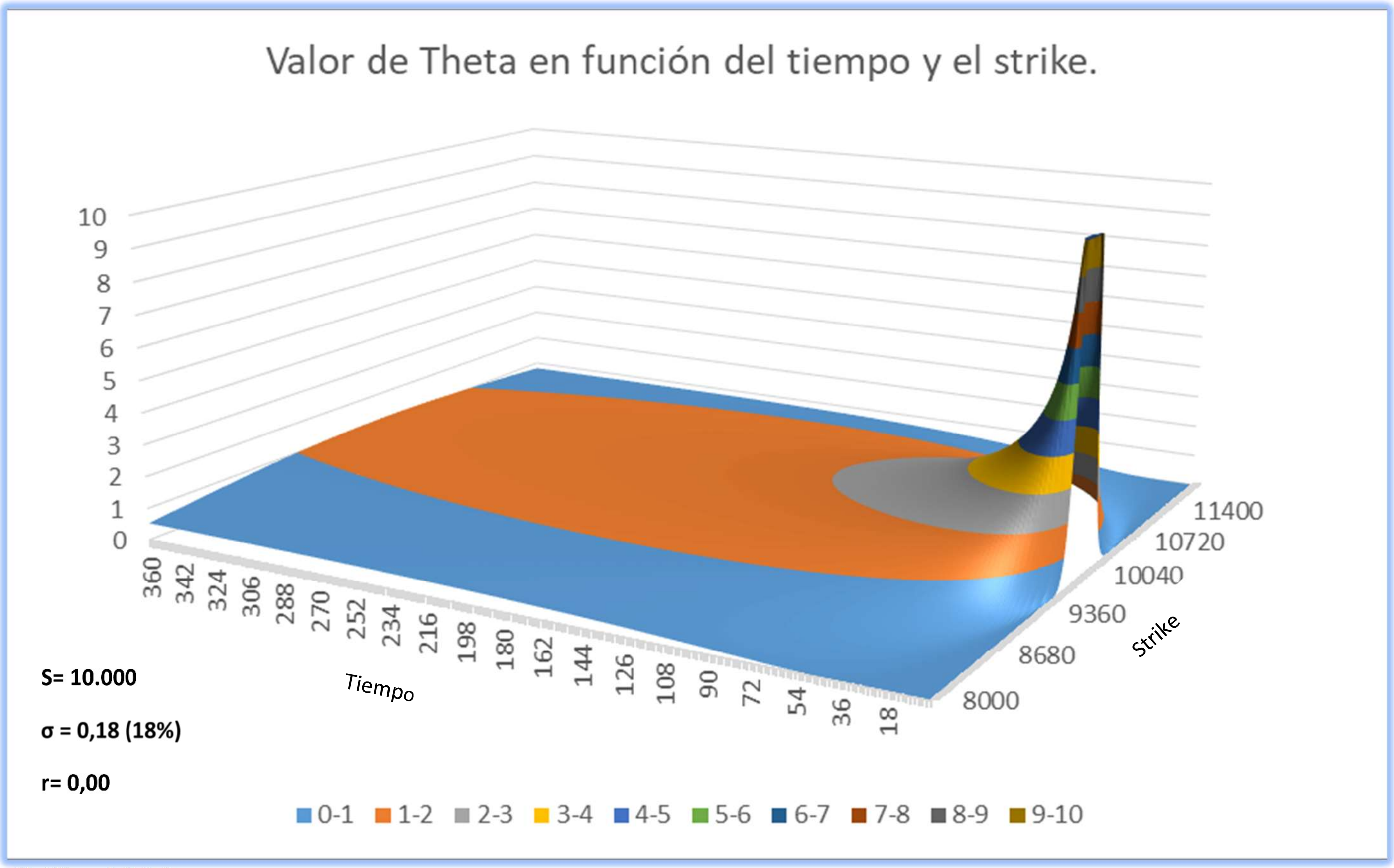

Gráfico 4.2.3.1.

En este gráfico aparece representado el valor de Theta conforme el contrato se acerca a su vencimiento. Conforme más alejado se encuentra el contrato de su conclusión las diferencias en el valor de Theta entre strikes son relativamente pequeñas en cambio, mientras se va acortando la vida del contrato se aprecian dos efectos:

- En los strikes más alejados al valor del subyacente el valor de Theta es decreciente de forma constante hasta llegar a cero, cuando esto ocurre indirectamente implica que el valor de la prima es cero.
- En los strikes más cercanos al subyacente se produce un incremento en el valor de Theta. Este incremento es más fuerte cuanto más cerca se encuentra el strike del subyacente. Cuanto más alejado está el strike del subyacente antes llegará Theta a su máximo, una vez que Theta llega a su máximo empieza a disminuir. Este descenso se produce de forma más agresiva cuanto más cerca se encuentre el strike del subyacente.

En siguiente gráfico se aprecia el efecto descrito:

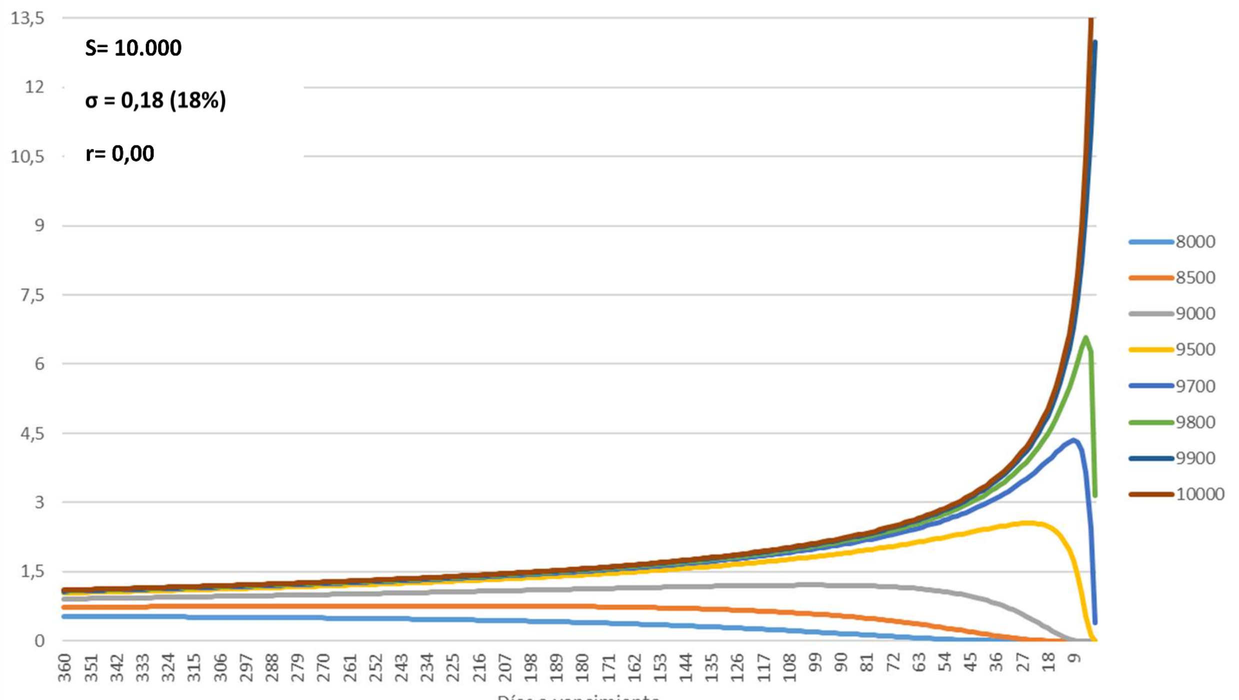

Gráfico 4.2.3.2.

Este gráfico además de explicar el efecto anteriormente descrito es idóneo para explicar la lógica que subyace detrás de las estrategias calendar spreads o spread temporales. En el “mundo” de las opciones se denomina seguir una estrategia Calendar cuando se busca poseer las mismas opciones compradas a largo plazo y vendidas a corto plazo. Los inversores que siguen este tipo de estrategias pretenden beneficiarse del gran deterioro que sufre el valor de las opciones cuando estas se acercan a su vencimiento, venta a corto. Por otro lado, el inversor intenta cubrir parte del riesgo que implica una posición vendida (pérdidas ilimitadas) comprando opciones a vencimiento más lejano cuyo deterioro como consecuencia del paso del tiempo es mucho menor. Este tipo de estrategias son de Vega positiva ya que predomina el vencimiento lejano pero lo que muchos inversores no le perdonan a esta estrategia es que incrementos de la volatilidad se traduzcan en pérdidas y no en beneficios. Esto es lo que se conoce como la trampa de Vega y este fenómeno se explica mediante el comportamiento de la volatilidad implícita. (Ver apartado 5)

Para entender mejor el comportamiento experimentado por Theta conforme se acerca a su vencimiento, donde se aprecia la existencia para los diferentes strikes de un máximo y de un mínimo, vamos a estudiar la derivada de Theta respecto del tiempo que denominaremos Iota (I). Este valor viene dado por la segunda derivada parcial de la prima respecto del tiempo ($\frac{d^2P}{d^2S}$).

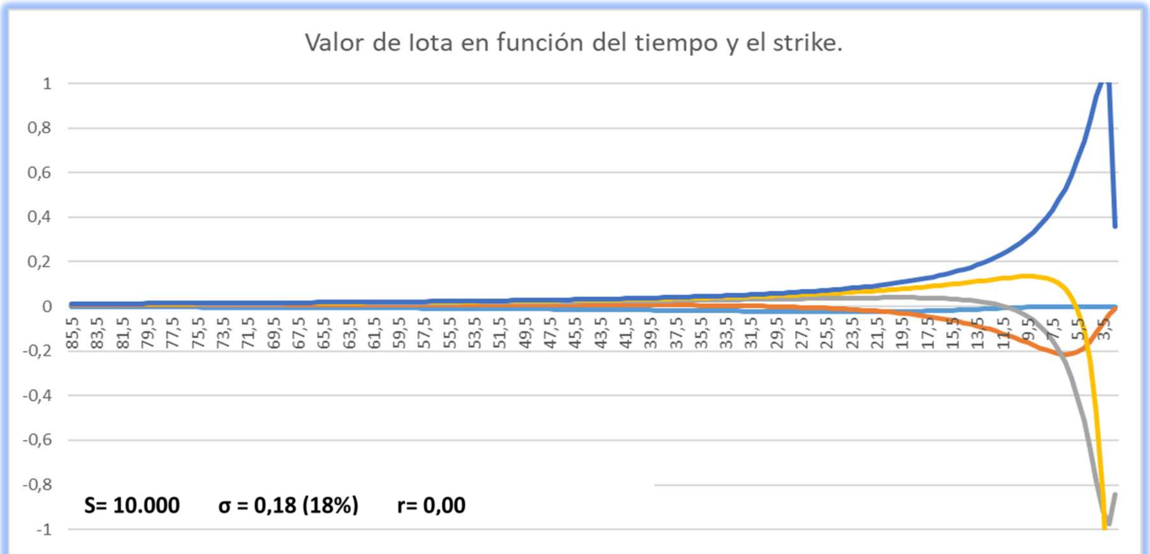

Gráfico 4.2.3.3.

Recordemos que el valor de Theta aparece representado desde la óptica del vendedor, por lo tanto el efecto en el valor de la prima es justamente el inverso al que se aprecia en el gráfico. El valor de Theta alcanza su máximo ahí donde el strike se cruza con el eje temporal. Desde el momento en que Theta alcanza su máximo se precipita de forma abrupta -mas abrupta cuanto mayor es la cercanía entre strike-subyacente y más suave cuanto mayor es lejania strike-subyacente- hasta alcanzar su mínimo que es cero. Este valor de Theta cero surge cuando el valor de Iota se aproxíma asintóticamente a cero, según el strike esto puede suceder por ejemplo a 20 días antes del vencmiento a simplemente unas pocas horas antes de la expirción del contrato; como se aprecia en la tabla.

STRIKE	Subyacente	Tiempo a venc.	***σ***	r	Theta Δ1día
8700	10000	20 días	0,15	0	-0,00117206
9700	10000	26,4 horas	0,15	0	-0,00236246

Cuadro 4.2.3.4.

- **Vega**

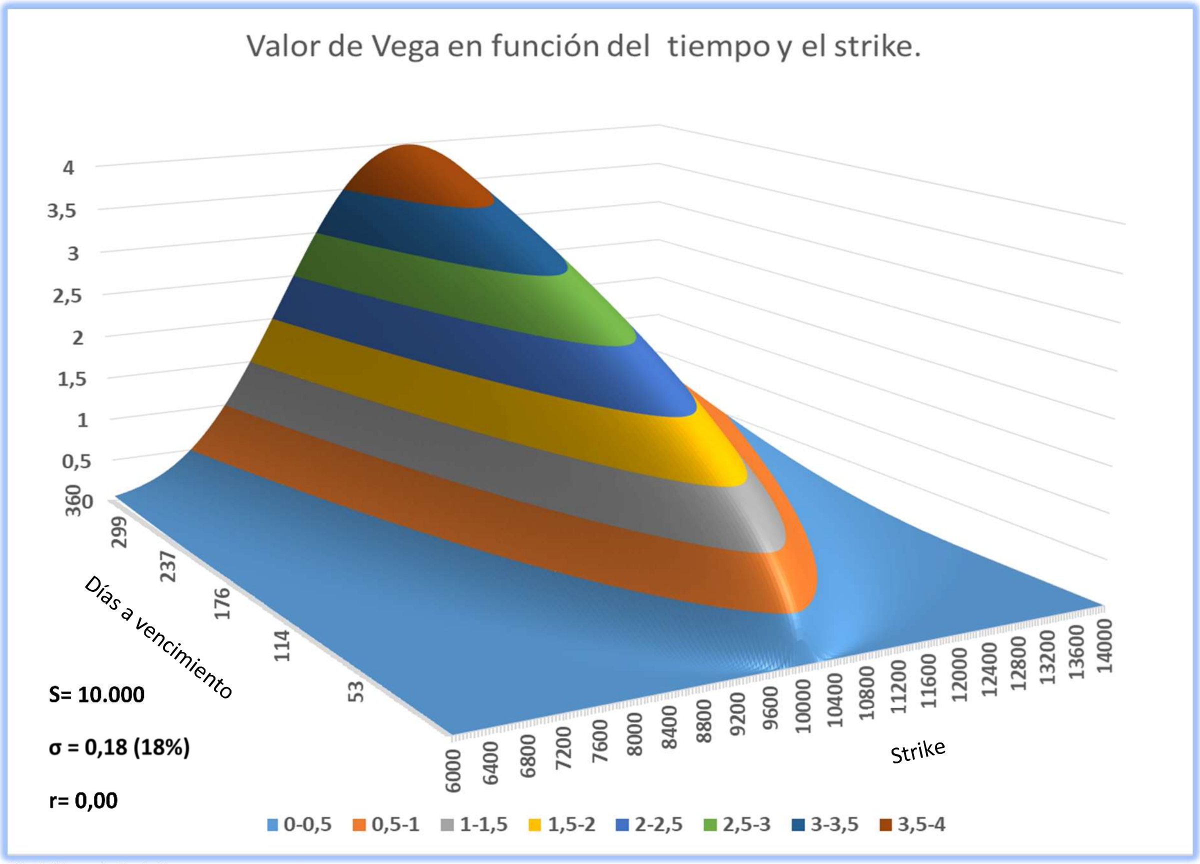

Gráfico 4.2.4.1.

Como se aprecia en el gráfico, el valor de la prima es más sensible a cambios de la volatilidad cuanto más alejados nos encontramos de la expiración del contrato. Conforme nos acercamos a vencimiento la sensibilidad ante cambios en la volatilidad va disminuyendo. Como se ha indicado en apartado anterior, aunque vega sea superior, un incremento de la volatilidad no siempre beneficiará más a las opciones alejadas del vencimiento y menos a las opciones más cercanas del vencimiento.

Tras ver este gráfico uno tiene la sensación de que el valor de Vega disminuye sensiblemente más rápido conforme el contrato se acerca a su expiración. Para poder comprobar si existe dicha aceleración en Vega conforme nos acercamos al vencimiento es necesario estudiar la derivada parcial de la prima respecto de la volatilidad y el tiempo $\frac{d^2P}{d\sigma dt}$. Mediante esta derivada obtendremos el valor que en el gráfico anterior posee la pendiente de Vega.

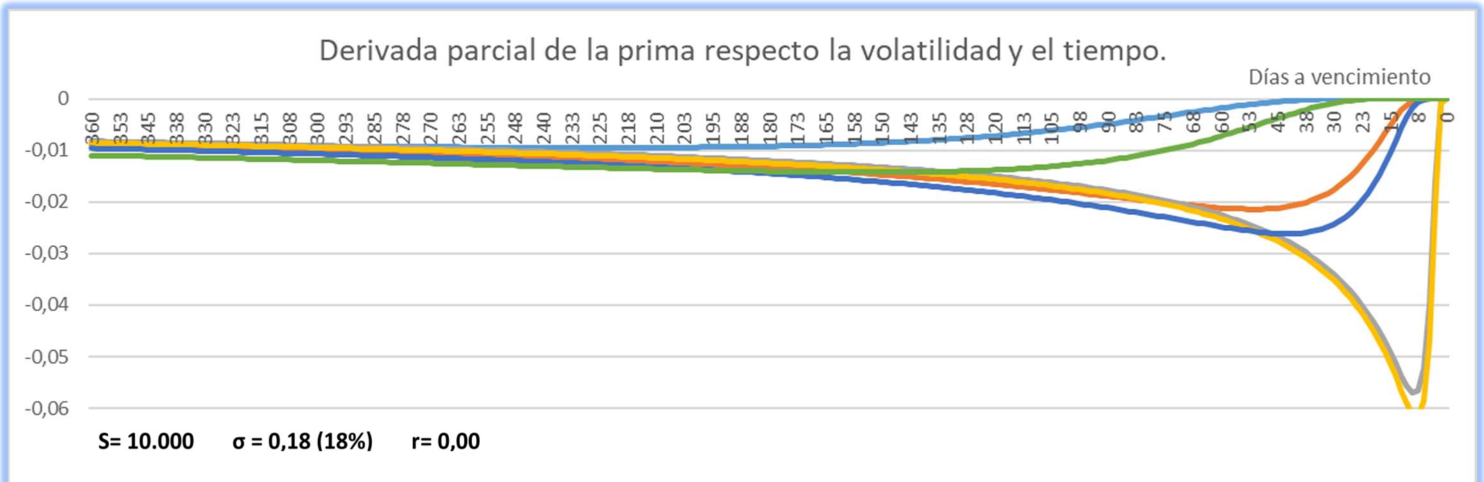

Gráfico 4.2.4.2.

La erosión que va sufriendo el valor Vega mientras se acorta la duración del contrato se acelera conforme nos acercamos a vencimiento. Este azuce es más recio en aquellos strikes más cercanos al valor del subyacente. Sin tener en cuenta que el mercado pueda valorar los diferentes vencimientos de los contratos de opciones con disintos niveles de volatilidad (volatilidad implícita) este deterioro creciente que sufre el valor de Vega es otro motivo por el cuál puede ser interesante vender opciones a corto plazo. Si vendemos una opción y aumenta la volatilidad, esto nos perjudicará pero por cada día que pase el potencial efecto adverso de aumentos de la volatilidad va disminuyendo.

- **Recapitulación:**

Este análisis no puede ser extrapolado a la realidad de los mercados de forma directa. En este análisis se ha presupuesto una volatilidad constante sin hacer distinciones entre vencimientos cercanos y lejanos. Otro supuesto simplificador ha sido presuponer que tanto los strikes más cercanos al valor del subyacente como aquellos strikes más alejados del valor del subyacente son valorados por el mercado con el mismo valor de sigma (volatilidad).

Conforme la opción se acerca a su vencimiento se produce un efecto claramente beneficiosos para el vendedor y otro que podríamos catalogar como ligeramente beneficioso.

- Beneficioso: El valor de Theta aumenta, dichos incrementos no son constantes si no que cada uno es superior al anterior, esto se podía ver tanto en en la gráfica de

Theta como, de manera evidente, en la de Iota. Una vez que Theta alcanza su máximo, esta se precipita hasta alcanzar el valor cero.

- Ligeramente beneficioso: El efecto que tienen en la prima los aumentos de la volatilidad es menor conforme el paso del tiempo. Pero, como hemos visto en el gráfico 4.2.4.2., esta erosión es creciente y se dispara conforme nos acercamos a vencimiento. Una vez alcanzado el máximo valor de erosión -máximo valor de la función $\frac{d^2P}{d\sigma dt}$ para un strike concreto- esta decrece de forma abrupta. El comportamiento que se aprecia es similar al de Theta y por lo tanto inverso a Gamma.

En consecuencia pueden observarse efectos beneficiosos para el comprador:

- Gamma: Gamma incrementa de forma acelerada conforme nos acercamos a vencimiento esto se traduce en un pendiente de Delta mucho más agresiva lo que implica que variaciones en el subyacente se traslaten en mayor proporción al valor de la prima. Una variación de 1 punto en el subyacente a 90 días del vencimiento hace incrementar la prima en un 63,8% del incremento experimentado por el subyacente. Esa misma variación en idétincas condiciones pero a 8 días del vencimiento hará aumentar la prima en un 86,2% del incremento experimentado por el subyacente.

STRIKE	Subyacente	Días a venc.	Delta Δ1pto.
9700	10000	90	0,638
9700	10000	8	0,862

Cuadro 4.2.5. σ=0,2 r=0

4.3. Gamma, Delta, Theta y Vega en función de la Volatilidad:

- **Delta:**

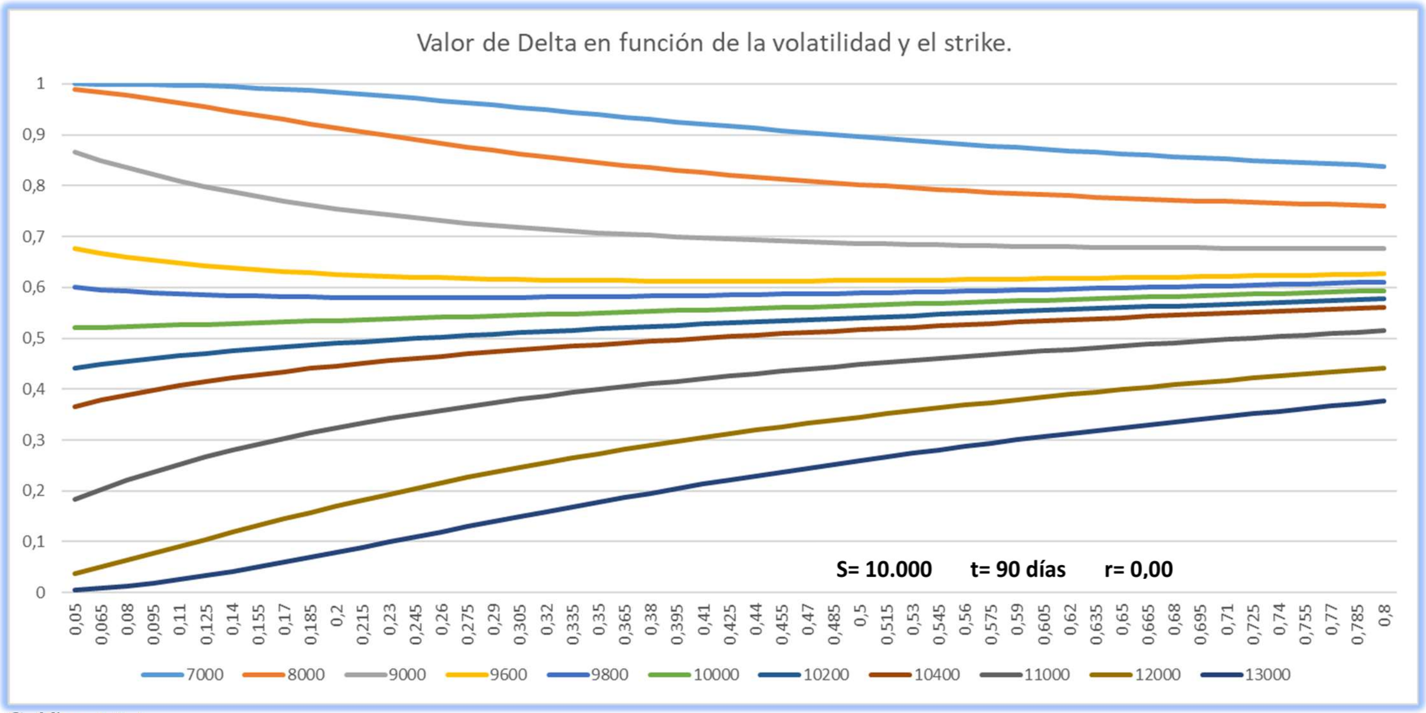

Gráfico 4.3.1.

En este gráfico aparece representado el comportamiento de Delta para diferentes strikes y distintos niveles de volatilidad. El comportamiento que experimenta Delta es similar al que sufría en el apartado anterior respecto al paso del tiempo. Conforme la volatilidad disminuye el valor de Delta se va hacia los extremos.

- **Gamma:**

Como se aprecia, conforme la volatilidad disminuye el valor de Gamma va creciendo en aquellos strikes más cercanos al valor del subyacente (más at the money) y va tendiendo a cero en aquellos strikes más alejados. Conforme la volatilidad aumenta, la diferencia de Gamma entre strikes va disminuyendo. El valor de gamma es extremadamente leptocúrtico en entornos de volatilidad baja y tiende a volverse cada vez más platicúrtico conforme la volatilidad aumenta.

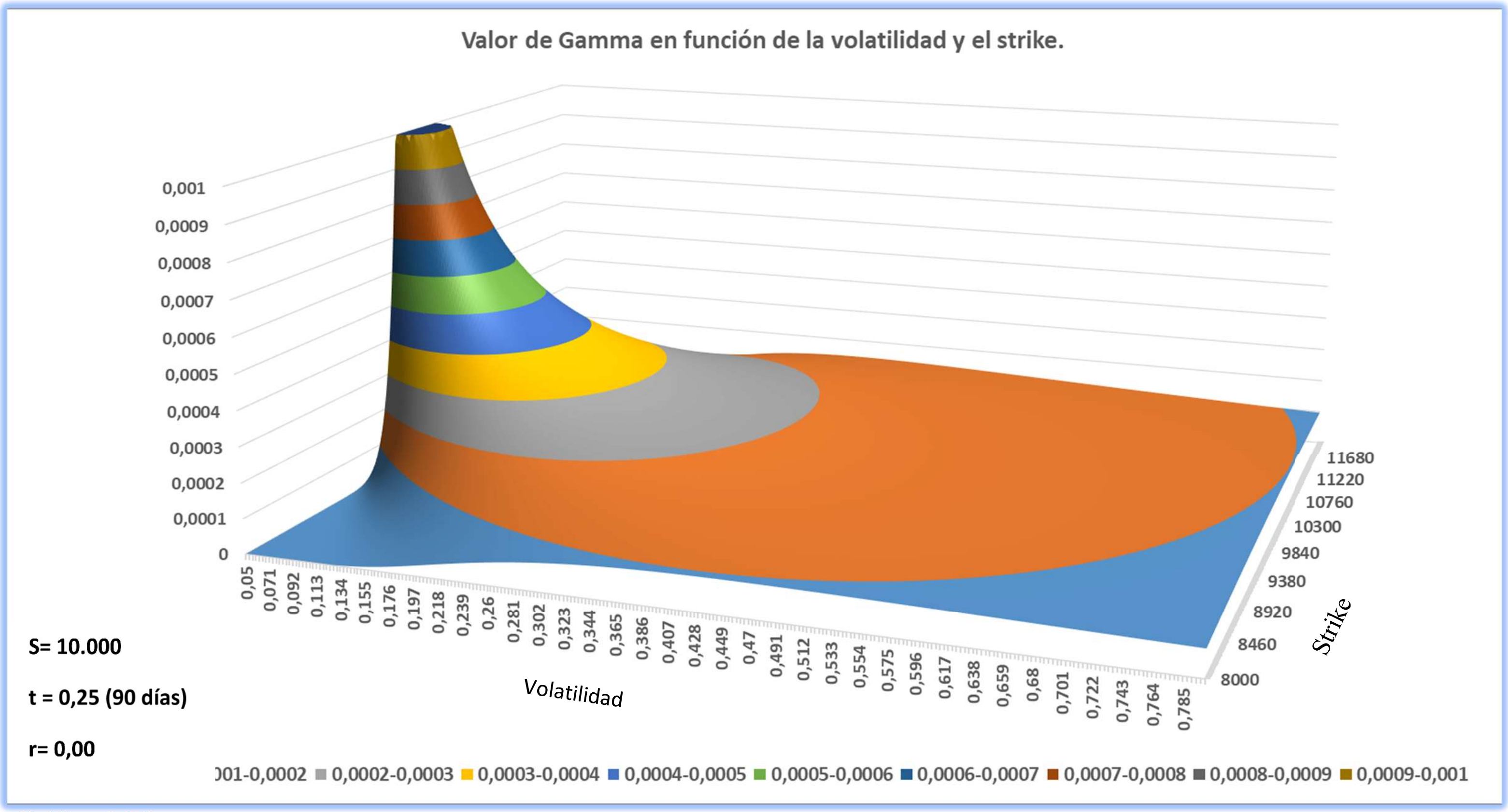

Gráfico 4.3.2.

- **Theta:**

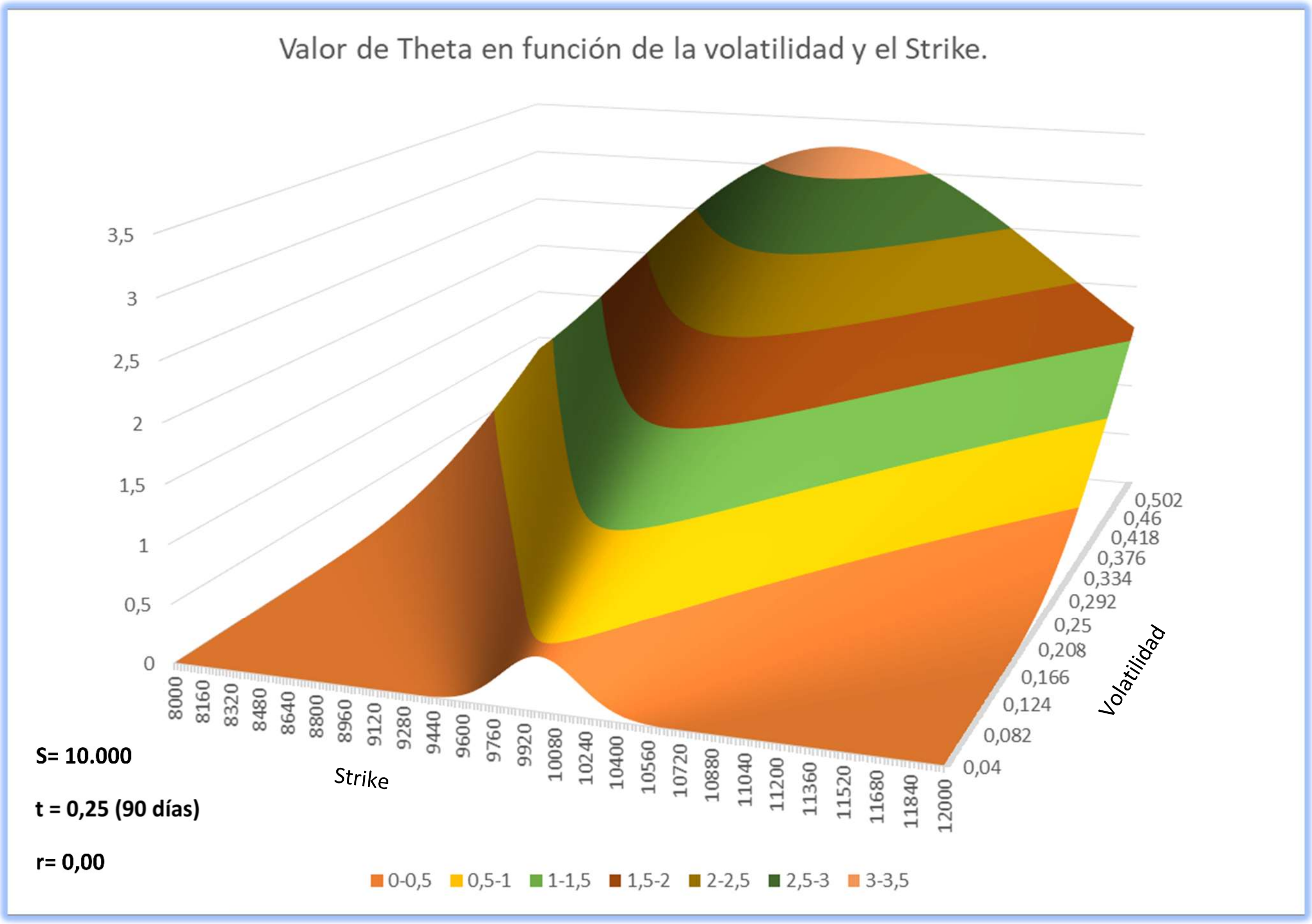

Gráfico 4.3.3.1.

En este gráfico está representado el valor de Theta conforme aumenta la volatilidad para diferentes strikes. Se aprecia que el valor de Theta es mayor cuando los niveles de volatilidad son más elevados. Resulta más provechoso vender opciones en entornos de volatilidad elevada ya que el paso de un día es remunerado de forma más cuantiosa, pero esto tiene un aspecto negativo: cuando la volatilidad es elevada el riesgo que conlleva vender opciones es mayor y de ahí el mayor valor de Theta, que se traduce en una prima más costosa para el comprador. Recordemos que los aumentos en la volatilidad perjudican al vendedor y favorecen al comprador, por lo tanto:

- En entornos en los que la volatilidad es baja no será recomendable vender opciones ya que lo que se espera es que la volatilidad aumente, no que siga disminuyendo.
- En entornos de volatilidad elevada o en shocks de volatilidad repentinos que no se espera que perduren en tiempo resultará interesante vender opciones ya que estas serán, atractivamente, bien remuneradas.

Lo aquí expuesto es muy genérico y se aproxima a la máxima de "Compra barato y vende caro". A través de la segunda derivada de la prima respecto del tiempo y la volatilidad $(\frac{d^2P}{d\sigma dt})$ se pueda afinar una elección más efectiva.

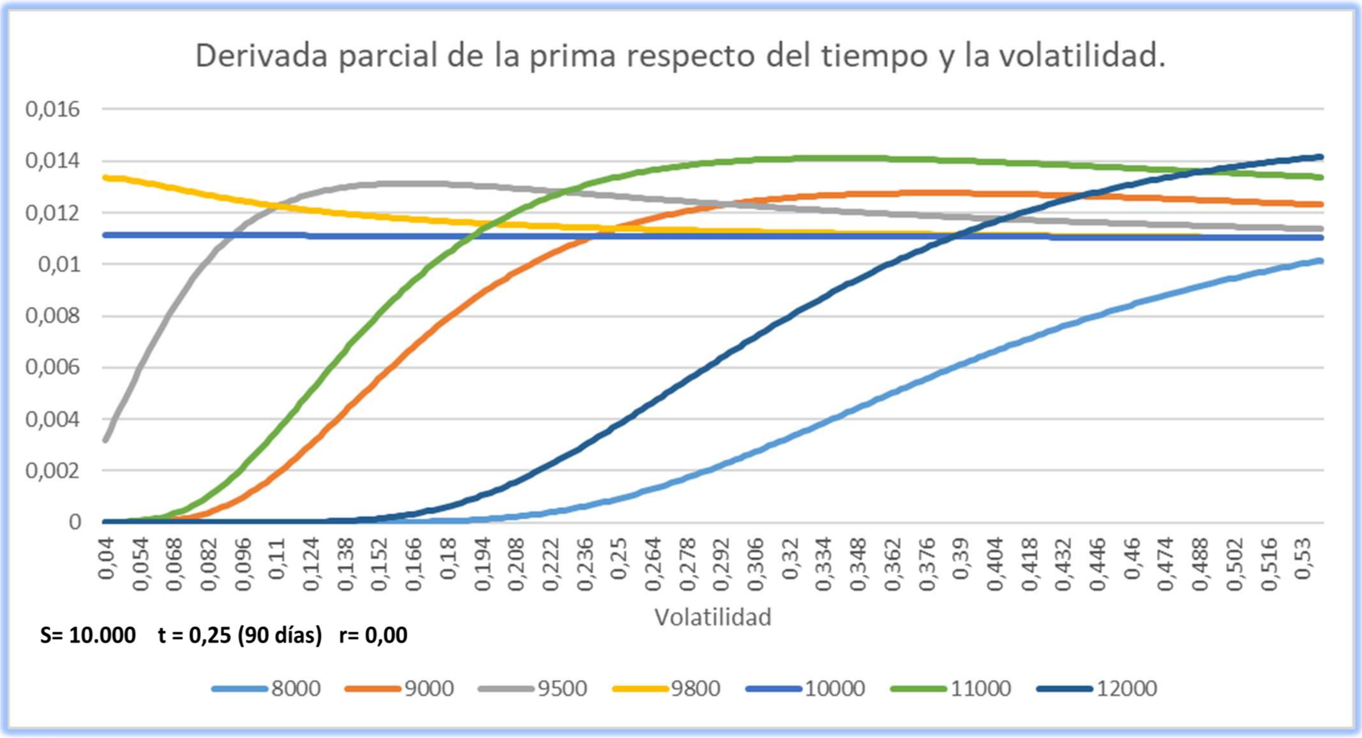

Gráfico 4.3.3.2.

En este gráfico se muestra cómo aumenta Theta ante variaciones de la volatilidad para diferentes strikes. Un vendedor, por regla general, buscará vender en aquel momento que crea que la volatilidad no va a seguir subiendo. A mi juicio el punto inteligente donde realizar la venta será aquel donde un incremento de la volatilidad haga aumentar Theta en igual o menor medida de lo que la hace disminuir una disminución de la volatilidad. Partiendo de que Theta es un indicador del valor temporal que posee la opción, es inteligente pensar que el coste de oportunidad es inferior -en el caso de equivocarse y que la volatilidad siga aumentando- que el coste de no realizar la operación y que la volatilidad disminuya. Theta al igual que Vega siempre va a aumentar conforme aumenta la volatilidad, pero, hay intentar situarse en aquella zona donde los incrementos se comporten de forma mas provechosa para el vendedor que para el comprador. En los siguientes cuadros se expone la idea antes enunciada. Se han elegido dos strikes para observar el diferente efecto que tiene en la prima, en Theta y Vega, un incremento del 10% en la volatilidad.

Cuadro 4.3.3.3.

A	Strike	Volatilidad	Prima Call	P_2/P_1	Theta Δ1día	$Theta_2$-$Theta_1$	Vega Δ0,1%	$Vega_2$-$Vega_1$
1	10400	0,150	145,889		-1,4805		1,7746	
2	10400	0,136	122,037	-16,35%	-1,3078	0,1727	1,7251	-0,0495
2’	10400	0,165	172,815	18,46%	-1,6676	-0,1871	1,8165	0,0419
			Dif. (2+2’)	2,11%		-0,0144		-0,0076

S=10.000 T=90 días r =0

B	Strike	Volatilidad	Prima Call	P_2/P_1	Theta Δ1día	$Theta_2$-$Theta_1$	Vega Δ0,1%	$Vega_2$-$Vega_1$
1	11000	0,150	38,08		-0,7756		0,9374	
2	11000	0,136($0,15*1,1^{-1}$)	26,33	-30,84%	-0,5947	0,1810	0,7927	-0,1447
2’	11000	0,165(0,15*1,1)	53,14	39,56%	-0,9822	-0,2065	1,0768	0,1394
			Dif. (2+2’)	8,72%		-0,0256		-0,0053

En estas dos tablas se expone cómo afecta un incremento y una disminución del 10% en la volatilidad para diferentes strikes. En la situación A un incremento del 10% de la volatilidad reporta un 2,11% más de beneficio al comprador que el beneficio que le reporta al vendedor la disminución. En cambio, en la situación B la misma variación reporta un 8,72% más de rentabilidad al comprador que al vendedor. Luego se ha analizado la diferencia de incrementos experimentada por Theta y Vega ante una disminución e incremento del 10% en la volatilidad, siendo los resultados obtenidos más atractivos para el vendedor en situación A y más atractivos al comprador en la situación B.

La variación en valor relativo ha sido la misma en cambio en valor absoluto la variación ha sido diferente. En la siguiente tabla se comprobará qué sucede con la Prima, Theta y Vega ante una variación idéntica en la volatilidad, pero esta vez la variación será en valor absoluto.

Gráfico 4.3.3.4.

A	Strike	Volatilidad	Prima Call	P_2/P_1	Theta Δ1día	$Theta_2$-$Theta_1$	Vega Δ0,1%	$Vega_2$-$Vega_1$
1	10400	0,15	145,88		-1,4805		1,7746	
2	10400	0,135	119,69	-17,96%	-1,2903	0,1902	1,7194	-0,0552
2’	10400	0,165	172,81	18,46%	-1,6676	-0,1871	1,8165	0,0419
			Dif. (2+2’)	0,50%		0,0031		-0,0133

S=10.000 T=90 días r =0

B	Strike	Volatilidad	Prima Call	P_2/P_1	Theta Δ1día	$Theta_2$-$Theta_1$	Vega Δ0,1%	$Vega_2$-$Vega_1$
1	11000	0,15	38,075		-0,7756		0,9374	
2	11000	0,135	25,27	-33,63%	-0,5771	0,1986	0,7773	-0,1601
2’	11000	0,165	53,13	39,56%	-0,9822	-0,2065	1,0768	0,1394
			Dif. (2+2’)	5,93%		-0,0079		-0,0207

Como se aprecia en la situación A cambios en valor absoluto de la volatilidad afectan más al valor de Theta cuando son decrementos de esta que cuando son aumentos. En la situación B sucede totalmente lo contrario. En la situación A ante una variación del ±0,015 en la volatilidad comprador y vendedor obtienen una rentabilidad similar, por contra en la situación B esto no sucede siendo el comprador aquel que obtiene mayor rentabilidad.

- **Vega:**

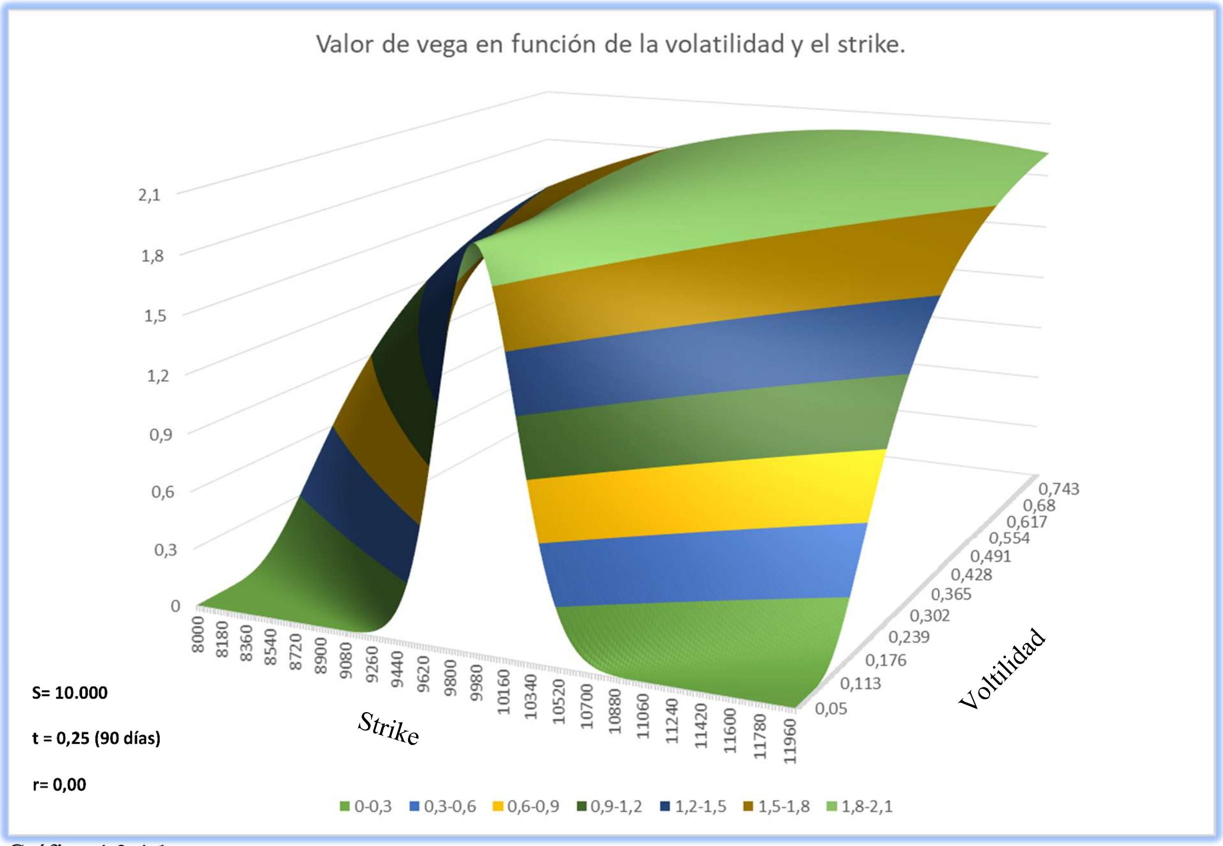

Gráfico 4.3.4.1.

Como se aprecia en el gráfico, ante aumentos de volatilidad el valor de Vega incrementa de forma más fuerte cuanto más alejado se encuentra el Strike del subyacente, en cambio parece que en aquellos strikes cercanos al valor del subyacente el valor de vega tiende a disminuir conforme aumenta la volatilidad. Es interesante el cambio que se produce en el máximo valor de vega conforme aumenta la volatilidad, en volatilidades bajas dicho valor se halla los strikes cercanos al dinero, en cambio conforme la volatilidad aumenta el máximo valor de Vega se va situando en los strikes fuera del dinero.

En el gráfico inferior se ha representado el valor de Vega para diferentes strikes de forma bidimensional y se aprecia cómo el valor de Vega en el strike 10.000 va disminuyendo conforme aumenta la volatilidad. Esto nos indica que la segunda derivada es negativa.

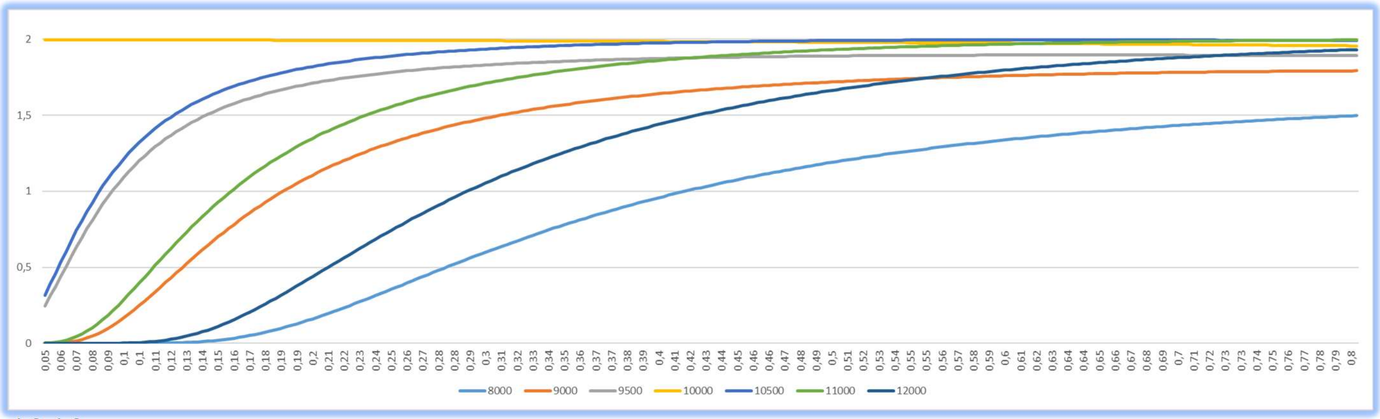

Gráfico 4.3.4.2.

Este fenómeno que se aprecia merece ser estudiado con mayor profundidad. En la literatura de opciones se habla siempre de la derivada de Delta respecto del subyacente - Gamma- como motivo para ser comprador de opciones: gracias a Gamma cada variación en el subyacente que vaya a tu favor se traduce en un valor de la prima mayor que en la variación anterior. En cambio si el subyacente va en tu contra, cada variación adversa a tus intereses te reporta una menor pérdida que la variación anterior. En definitiva, si aciertas cada vez ganas más si te equivocas cada vez pierdes menos. Llegados a este punto es apropiado hablar de la derivada de Vega respecto de la volatilidad $\left(\frac{d^2P}{d^2\sigma}\right)$ para obtener una comprensión más profunda del comportamiento de vega. A esta segunda derivada de la prima respecto a la volatilidad la denominaremos Kappa (κ).

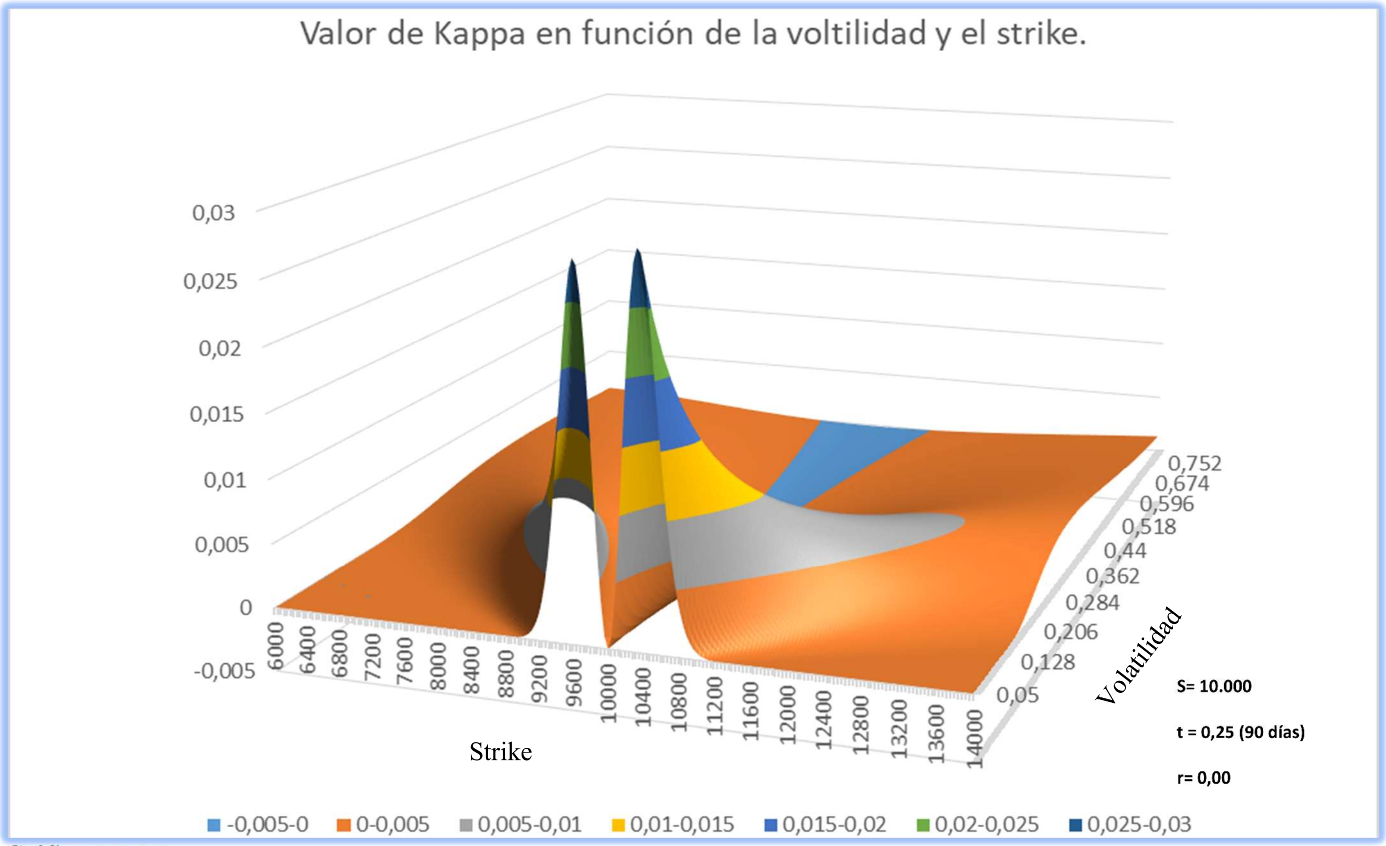

Gráfico 4.3.4.3.

La zona en azul claro nos indica aquellos valores en los que Kappa es negativa, zonas en las que un comprador irá ganando cada vez menos ante incrementos de la volatilidad e irá perdiendo más ante disminuciones de esta. En el caso del vendedor será justamente lo contrario. En el gráfico se aprecian zonas en las que Kappa es creciente para luego empezar a decrecer, en el gráfico de abajo hemos representado el valor de Kappa para diferentes strikes.

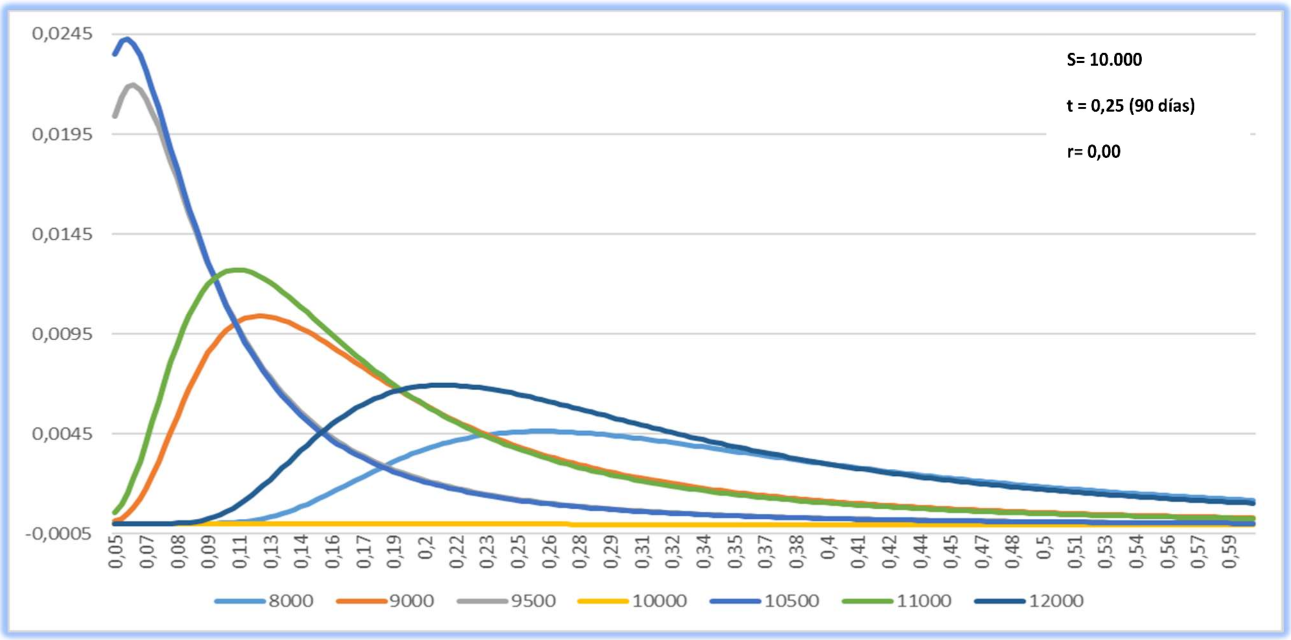

Gráfico 4.3.4.4.

Como se aprecia en la gráfica, para un mismo strike el incremento que experimenta Vega ante un incremento del 0,01% de la volatilidad en valor absoluto es totalmente desigual en función del nivel previo de volatilidad. Este incremento puede incluso llegar a ser negativo, como sucede en el strike 10.000. En el strike 9500 también sucede este fenómeno una vez alcanzados niveles de volatilidad elevados. Kappa nos muestra cómo incrementa Vega ante aumentos de la volatilidad. Por lo tanto, un comprador buscará strikes en los que Kappa sea creciente, o al menos strikes en los que Kappa sea elevado. En los entornos de Kappa creciente, si aumenta la volatilidad, el incremento que experimenta Vega es mayor que el que experimenta si la volatilidad disminuye. Como se aprecia en el gráfico, en entornos de Kappa creciente y duradera se dan en strikes alejados, aunque entornos de Kappa elevada se dan prácticamente en todos los strikes. Si a un comprador le interesa que aumente la volatilidad y que el valor de Vega sea cada vez más grande, a un vendedor le interesa que disminuya la volatilidad y que cada vez el valor de Vega sea más alto o al menos disminuya lo menos posible. Partiendo de que es muy complicado predecir la evolución de la volatilidad, a mi juicio Kappa puede ser un buen indicador para seleccionar el strike que más se adapte a nuestras perspectivas.

La elasticidad de una opción es el cambio porcentual en el valor de la opción cuando el precio de la acción cambia un 1%. Una aproximación a dicha elasticidad sería $\frac{dP}{dS} / \frac{P}{S}$, es decir, Delta dividida por el apalancamiento[4]. Esta aproximación es muy inexacta en entornos de volatilidad extremadamente baja o cuando la opción se encuentra cercana a su vencimiento, o lo que es lo mismo, cuando Gamma es elevada.

Sería interesante encontrar un concepto similar al anterior pero relacionado con la volatilidad en vez de con el subyacente. Por ejemplo, valdría la pena encontrar una relación que explicara la elasticidad de la prima respecto a la volatilidad. Esta elasticidad está muy relacionada con el valor de Kappa. La elasticidad anterior ha sido definida ante un incremento relativo del subyacente, 1%, esta elasticidad también aparece a veces definida como un incremento en valor absoluto. Si se desea buscar un concepto similar para la elasticidad de la prima respecto la volatilidad, primero habría que definir ante qué incremento. El primer problema es que la volatilidad se representa en porcentaje, por lo que un incremento en valor absoluto del 1% puede representar un incremento relativo del 10%, del 8%, del 5% etc. según el nivel previo de volatilidad. Un segundo problema es

[4] Fernández López, Pablo (1997) *Utilización de la fórmula Black y Sholes para valorar opciones.* Universidad de Navarra: IESE.

que Vega experimenta un comportamiento desigual mientras que Delta no lo experimenta. Delta es la derivada parcial de la prima respecto del subyacente -manteniendo el resto de parámetros constantes- lo que marcará su valor es la relación $\frac{Strike}{Subyacente}$ independientemente de que el subyacente sea 100 o 100.000. Esto no sucede con Vega. No existe una relación tan simple que nos marque el valor de Vega para cualquier valor de la volatilidad. De lo anteriormente expuesto se infiere la dificultad buscar una expresión genérica que nos marque la elasticidad de la prima respecto de la volatilidad.

El siguiente cuadro persigue dos objetivos:

- Observar el efecto que tiene Kappa en el valor de Vega y por consiguiente en la prima según el strike en el que nos encontremos.
- Mostrar que se crea un concepto de elasticidad de la prima respecto de volatilidad. Este efecto se crea de manera indirecta al intentar representar el efecto que tiene Kappa sobre la prima.

T= 90 días S= 10.000 r=0

Strike	Prima$_1$(σ=0,12)	Prima$_2$(σ= 0,13)	Elasticidad Δ 1%	Vega$_1$(σ= 0,12)	Vega$_2$(σ= 0,13)	V_2/V_1 -1	Kappa
10.000	239,33	259,27	8,3%	1,99	1,99	0	0
10.500	72,19	87,24	20,9%	1,47	1,54	4,76%	0,07
9.500	563,73	577,60	21,8%	1,35	1,43	5,93%	0,08
11.000	15,02	21,56	43,5%	0,60	0,72	20%	0,12
9.000	1009,07	1013,63	50,4%	0,41	0,51	24,39%	0,1

Cuadro 4.3.4.5.

La volatilidad afecta al valor temporal de la opción, por lo que en aquellos strikes in the money se les ha sido retirado el valor intrínseco (Subyacente - Strike) para el cálculo de la rentabilidad de la prima. Ante el mismo incremento (1% en valor absoluto, 8,33% en valor relativo) el valor temporal de la prima experimenta un incremento/rentabilidad totalmente distinto. Podemos ver cómo esa elasticidad de la prima ante la volatilidad está en relación con el incremento en el valor de Kappa, ya se mida este incremento en valor absoluto o se mida en valor relativo.

En la siguiente tabla se va a comparar el mismo incremento de la volatilidad tanto en valor absoluto (1%) como en valor relativo (8,33%) partiendo de un nivel de volatilidad diferente. En el primer cuadro aparecen representados los diferentes valores para un incremento de 1% en valor absoluto, en el segundo cuadro aparecen los valores obtenidos para un incremento relativo idéntico (8,33%) al del cuadro anterior (Gráfico 4.3.4.6.).

T= 90 días S= 10.000 r=0 Absoluto

Strike	Prima$_1$(σ= 0,22)	Prima$_2$(σ= 0,23)	Elasticidad Δ 1%	Vega$_1$(σ= 0,22)	Vega$_2$(σ= 0,23)	V_2/V_1 -1	Kappa
10.000	438,62	458,53	4,54%	1,99168	1,9914	-0,01%	0,000
10.500	243,04	261,61	7,64%	1,850	1,866	0,82%	0,015
9.500	723,26	740,75	7,84%	1,742	1,758	0,91%	0,016
11.000	123,05	137,64	11,85%	1,438	1,484	3,21%	0,046
9.000	1094,07	1106,25	12,95%	1,197	1,244	3,94%	0,047

Relativo

Strike	Prima$_1$(σ= 0,22)	Prima$_3$(σ=0,2383)	Elasticidad Δ 8, 33%	Vega$_1$(σ= 0,22)	Vega$_3$(σ= 0,2383)	V_3/V_1 -1	Kappa
10.000	438,62	475,11	8,32%	1,99168	1,9912	-0,03%	-0,001
10.500	243,04	277,19	14,05%	1,850	1,877	1,43%	0,026
9.500	723,26	755,44	14,41%	1,742	1,770	1,58%	0,028
11.000	123,05	150,12	22,00%	1,438	1,519	5,64%	0,081
9.000	1094,07	1116,74	24,11%	1,197	1,280	6,94%	0,083

Gráfico 4.3.4.6.

Ante el mismo incremento, ya sea valor absoluto o en valor relativo, la elasticidad de la prima ante aumentos de la volatilidad es bastante inferior a la que se observaba en la situación anterior. Los incrementos experimentados por Vega son claramente inferiores, a los que Vega experimentaba en la situación anterior salvo en el strike 10.000. En este strike donde Kappa es prácticamente constante con ligera tendencia bajista para cualquier nivel de volatilidad, el valor de Vega disminuye. Lo que en esta simulación se ha explicado, llámese **efecto Kappa** es realmente interesante. Al contrario del efecto Gamma el cuál solo beneficia al comprador, este efecto Kappa puede ser beneficioso tanto para comprador como vendedor, únicamente hay que elegir aquel strike que más se ajuste a nuestras perspectivas teniendo en cuenta el nivel de volatilidad.

- **Recapitulación:**

La elección de comprar o vender no solo debe depender de las expectativas que uno tenga acerca de la variación que pueda experimentar el subyacente en el futuro. Es importante tener presente el nivel de volatilidad y cómo este puede afectar al valor de la prima. Hemos concluido que Delta y Gamma tenían un comportamiento similar al que experimentaban con el paso del tiempo -apartado 4.2.-. Posteriormente hemos analizado con especial profundidad el comportamiento que experimentaban Vega y Theta ante incrementos de la volatilidad. Y hemos estudiado las derivadas parciales de estas ante incrementos de la volatilidad $(\frac{d^2P}{d^2\sigma})$;$(\frac{d^2P}{d\sigma dt})$. Tras el análisis de estas derivadas parciales hemos concluido que la pendiente de estas es un factor importante que tener encueta: tanto a la hora de tomar la decisión de compra o de venta, así como en la elección del strike que más se adapte a nuestras expectativas.

Finalmente, a través de Kappa hemos introducido el concepto de elasticidad de la prima ante incrementos de la volatilidad. Hemos comprobado cómo los incrementos de la volatilidad afectan más a los strikes alejados del subyacente y cómo este incremento es más fuerte cuanto menor sea la volatilidad previa. Para el comprador puede ser atractivo la búsqueda de estas elasticidades elevadas.

5. La Volatilidad Implícita:

El modelo de valoración de Black&Sholes necesita para calcular el valor de la prima seis parámetros: precio de ejercicio, precio del activo subyacente, tiempo a vencimiento, tipos de interés, dividendos/ampliaciones de capital y volatilidad. De los seis factores enunciados hay uno que es desconocido: la volatilidad. Según la hipótesis de los mercados eficientes[5], en su sentido fuerte, los mercados incorporan toda la información disponible tanto pública como privada. Siguiendo este razonamiento la prima de las opciones que coticen en mercados organizados incorporarán toda la información disponible. Por lo tanto, a partir del valor de la prima podemos obtener aquel parámetro de la fórmula de Black&Sholes que desconocemos: la volatilidad. La volatilidad obtenida a partir del valor de la prima se denomina volatilidad implícita. La volatilidad implícita de una opción es aquella que iguala el precio de la fórmula de Black&Sholes al precio de mercado. Para cada precio existe un nivel de volatilidad implícita que permite cumplir la afirmación anterior.

El presente trabajo pretendía desengranar la fórmula de Black&Sholes para una mejor comprensión de esta mediante el estudio de sus derivadas parciales. Esta tarea se ha realizado a partir de dos supuestos que simplificadores:

- Tipos de interés para cualquier horizonte del 0%. Este supuesto simplificador no supone ningún problema. Los tipos de interés tienen una influencia residual en el precio de las opciones.
- Volatilidad constante independientemente del vencimiento y del strike. Este supuesto no sucede en la realidad financiera. Para cada vencimiento y para cada strike el mercado valora el precio de las opciones con diferentes niveles de volatilidad.

Dos opciones sobre el mismo strike y el mismo subyacente tendrán diferente volatilidad dependiendo del vencimiento. Se puede crear una estructura temporal de la volatilidad teniendo en cuenta los diferentes vencimientos. Dos opciones con el mismo vencimiento podrán tener diferentes volatilidades en función del strike (simetría). Mediante la simetría y la estructura temporal se puede trazar la superficie de la volatilidad.

[5] Fama, E. (1970). *Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work.* The Journal of Finance.

A partir del portal de información financiera Yahoo Finance se han obtenido los valores de la volatilidad implícita que dicho portal calculaba para diferentes strikes y vencimientos de opciones de compra sobre el S&P 500. Los vencimientos seleccionados han sido: julio, agosto, septiembre, octubre, diciembre enero y marzo. La información con la que se ha elaborado los gráficos que se exponen a continuación aparece recogida en el Anexo 2. En dicho anexo aparece una gran cantidad de información para diferentes strikes, pero para la realización de los gráficos únicamente se han escogido aquellos strikes en los que existía información sobre la volatilidad implícita para los siete vencimientos. Cuando se tabuló esta información el S&P 500 había cerrado en 2.754,88 puntos (23/06/2018).

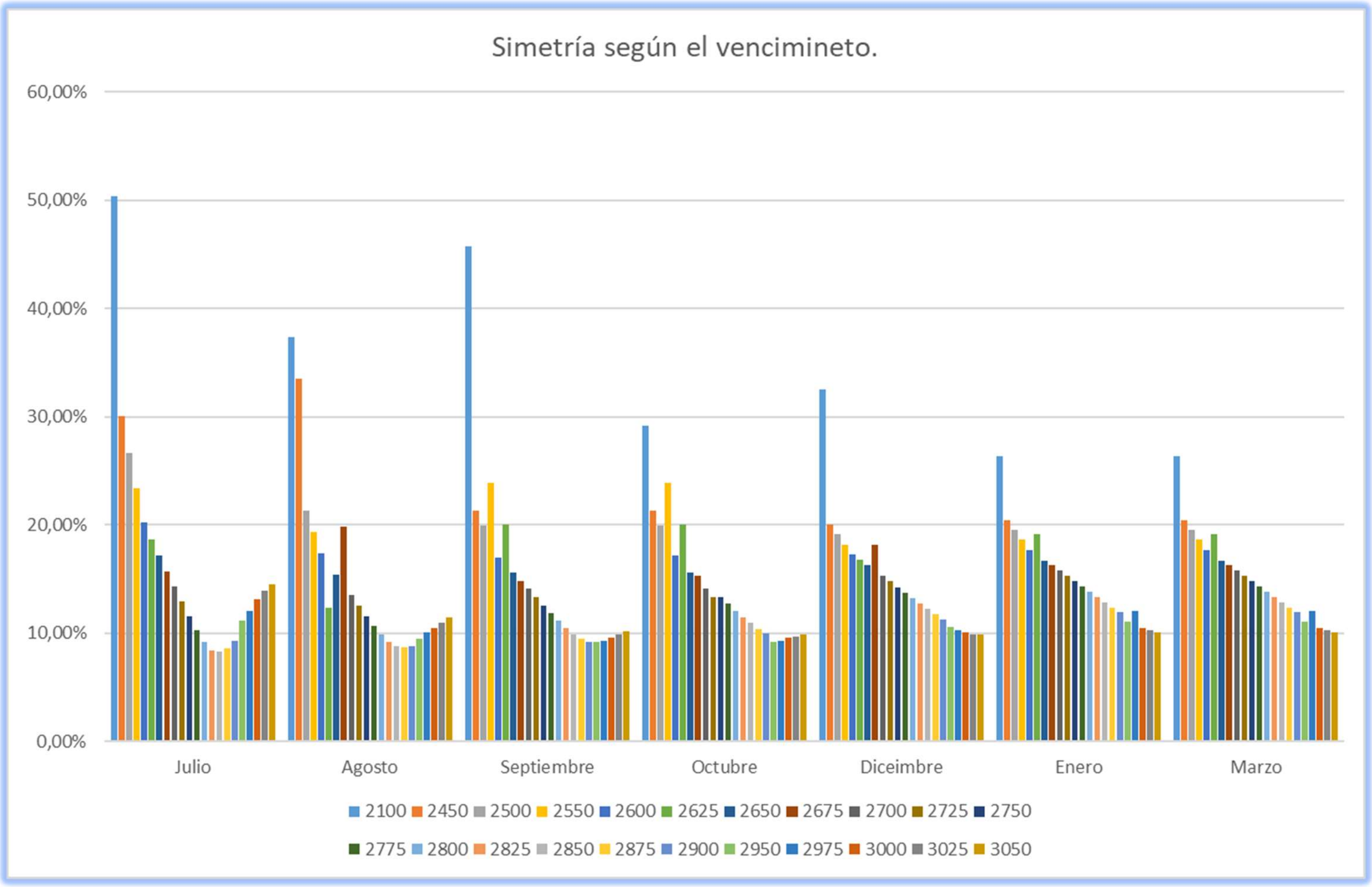

Gráfico 5.1.

Una de las constantes empíricas más duraderas de los mercados financieros es la relación inversa entre volatilidad y precio de las acciones. En estos gráficos se puede apreciar el "efecto apalancamiento" que implica una respuesta diferente de la varianza ante innovaciones positivas o negativas. Así una innovación que suponga rentabilidades negativas eleva la ratio $\frac{Deuda}{Capital}$ de las empresas que componen el índice. Cuando esto sucede, el impacto esperado de las innovaciones futuras sobre el rendimiento de las acciones incrementa y en consecuencia aumenta el riesgo de la inversión[6]. No supondrá el mismo riesgo una variación de diez céntimos cuando el activo Z cotiza a 5 euros que una variación de 10 céntimos si dicho activo cotiza a 2 euros. El mismo impacto esperado de la innovación es muy diferente.

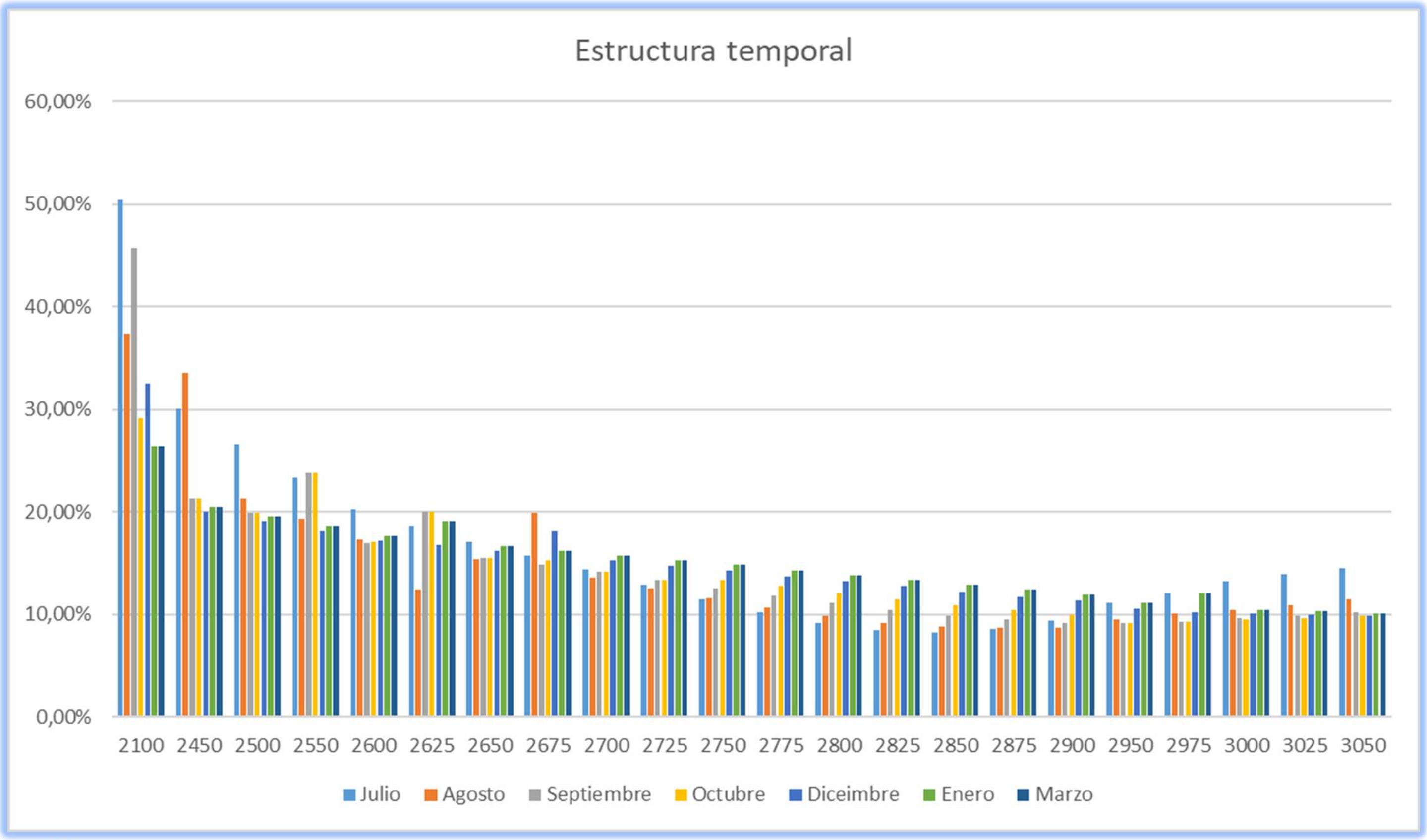

Gráfico 5.2.

El comportamiento temporal de la volatilidad implícita no es uniforme para todos los strikes. Se produce un decremento de la volatilidad en los strikes alejados del valor actual del subyacente. Este comportamiento se puede apreciar en ambos gráficos. En cambio, en aquellos strikes cercanos al valor actual del subyacente (2754,88 puntos) la volatilidad implícita aumenta. Una explicación de este fenómeno podría ser que, con la información actual, para que el valor futuro del índice sea equivalente al valor actual del índice el primero debe ser superior. Esto implica que los strikes que actualmente están sensiblemente fuera del dinero pasarán a estar dentro del dinero. Sin un análisis en profundidad y a lo largo del tiempo es temerario intentar hacer afirmaciones que expliquen los fenómenos que se observa en ambos gráficos.

[6] Black, F. (1976) *"Studies of Stock Price Volatility Changes"*. Proceedings of the Business and Economics Section of the American Statistical Association 177–181.

5.1 Trampa de Vega o la trampa de la volatilidad.

En el apartado 4.2. cuando se analizaba el comportamiento de Theta frente al paso del tiempo se nombró este concepto. La trampa de Vega implica que posiciones con Vega positiva pueden perder dinero ante incrementos de la volatilidad. Lo que a priori puede resultar un contrasentido tiene una explicación lógica. Como hemos comprobado, para el mismo precio de ejercicio existen diferentes niveles de volatilidad en función del vencimiento de la opción. Imaginemos que seguimos una estrategia Calendar y posemos una opción de compra con precio de ejercicio 2500 con vencimiento en diciembre y tenemos la misma opción vendida con vencimiento en julio. Un periodo de convulsión en los mercados financieros provocará un aumento de la volatilidad, pero este aumento no tiene por qué incrementar de forma simétrica la volatilidad implícita de mis dos opciones. Puede suceder que la opción cuyo vencimiento es más cercano sufra un incremento de la volatilidad implícita del 5% mientras que la opción cuyo vencimiento se encuentra más alejado en el tiempo sufra un incremento de apenas 1%.

La posición global tiene Vega positiva, pero el mayor incremento que experimenta la volatilidad implícita en el vencimiento cercano provoca que el precio de la opción vendida incremente más de lo que incrementa la opción comprada. Si esto sucede de forma global, la posición pierde dinero. En la tabla aparece un ejemplo del efecto descrito.

r=0%

Strike	Subyacente	Días a vencimiento	Volatilidad	Prima	Incremento
2500	2750	30	0,23	255,90	
2500	2750	30	0,28	262,40	6,502
2500	2750	180	0,2	305,28	
2500	2750	180	0,21	311,22	5,942

Cuadro 5.3.

7. Conclusiones.

El estudio de la ecuación de Black&Sholes así como del comportamiento de sus derivadas parciales -Vega, Gamma, Delta y Theta- respecto el paso del tiempo, la volatilidad y el valor del subyacente nos han aportado unos conocimientos que antes no teníamos:

<u>En función del subyacente</u>:

Como se ha explicado en el apartado 4.1. el valor del subyacente no tiene un efecto determinante en las derivadas parciales semejante al que puede tener la volatilidad o el tiempo a vencimiento. La relación que explica la variación de las derivadas parciales de la función Black&Sholes conforme varía el subyacente no es nivel del activo subyacente sino la relación ($Subyacente_1$)/($Subyacente_2$). A través de esta relación siempre que los parámetros de la fórmula sean idénticos y la relación $\frac{Strike}{Subyacente}$ sea la misma se podrán explicar los diferentes niveles de Gamma, Vega y Theta cuando varía el subyacente.

<u>En función del tiempo:</u>

Conforme las opciones se acercan a su vencimiento las pendientes tanto de Gamma, Vega y Theta incrementan en valor absoluto. El valor de Theta aumenta, dichos incrementos no son constantes si no que cada uno es superior al anterior, esto se podía ver tanto en la gráfica -4.2.3.2. y 4.2.3.3.-. Una vez que Theta alcanza su máximo, esta se precipita hasta alcanzar el valor cero. El valor de Vega va disminuyendo conforme transcurre la duración del contrato, pero este deterioro se agudiza conforme nos acercamos al vencimiento. Por último, Gamma tenía un comportamiento similar al de Theta pero en valor positivo. Conforme nos acercamos al vencimiento el valor de Gamma va aumentando. En definitiva, independientemente de la estrategia que se siga habrá que tener en cuenta este comportamiento de Vega, Gamma y Theta a la hora de tomar una posición en el mercado, así como la elección del strike. El efecto descrito es más fuerte cuanto más cerca se encuentre el precio de ejercicio de la opción al valor del subyacente.

<u>En función de la volatilidad:</u>

El análisis realizado de las derivadas parciales ante variaciones de la volatilidad ha sido muy fructuoso en lo que respecta a Theta y Vega. El comportamiento que experimentaba Gamma ante variaciones de la volatilidad es similar que aquel que experimentaba cuando nos acercábamos al vencimiento del contrato. Theta es creciente conforme aumenta la volatilidad. Lo relevante ha sido el estudio de este crecimiento el cuál es todo el rato positivo: se apreciaba un patrón de comportamiento donde los incrementos del valor de Theta tienden a alcanzar un máximo para luego disminuir levemente y estabilizarse. Por lo tanto, un comprador preferirá situarse en la zona donde el crecimiento experimenta incrementos crecientes y un vendedor en la zona donde el crecimiento se encuentra estable.

El comportamiento que experimentaban los incrementos de vega conforme aumentaba la volatilidad era para los strikes más “at the money” decrecientes y este fenómeno se iba extendiendo conforme aumentaba la volatilidad. El fuerte incremento que sufría el valor de Vega para algunos strikes conforme aumentaba la volatilidad nos ha llevado a hablar del efecto Kappa ($\frac{d^2P}{d^2\sigma}$). Veíamos que ante un mismo incremento de la volatilidad según el strike se obtenía una rentabilidad muy elevada (elasticidad de la prima ante incrementos de la volatilidad) este fenómeno estaba muy ligado con el valor de Kappa -ver gráfico 4.3.4.5. y 4.3.4.6.-. Tras este análisis concluíamos que un comprador preferirá entornos de Kappa elevada y un vendedor zonas de Kappa estable.

<u>Volatilidad implícita:</u>

En la última parte del trabajo se ha introducido el concepto de volatilidad implícita. Para cada opción existe un nivel de volatilidad implícita que iguala el precio de la fórmula de Black&Sholes al precio de mercado. Se observó a través de las opciones sobre el S&P 500 como para cada precio de ejercicio y vencimiento el mercado estima una volatilidad diferente. Por lo tanto, el principio de volatilidad constante que se ha tenido en cuenta en la realización de este trabajo no se da en la realidad.

Tras la incorporación del concepto de volatilidad implícita este trabajo queda incompleto. Falta una importante fuente de información que no ha sido analizada y es el comportamiento de esta volatilidad implícita. Una línea de investigación que diera continuidad a este trabajo fin de grado sería el análisis de la volatilidad implícita y como esta se comportan en función de:

1. La diferencia strike-subyacente a lo largo del tiempo para los diferentes vencimientos.
2. Como afecta a la volatilidad implícita incrementos de la rentabilidad o disminuciones de esta.
3. Cual es la relación existente entre los índices de volatilidad, como el S&P 500 VIX o el STOXX 50 Volatility, y la volatilidad implícita.

Si se da respuesta a estas tres cuestiones el siguiente paso serie complementar el análisis que se ha realizado en este trabajo con la información obtenida en dicha hipotética investigación.

8. Bibliografía.

1. Black, F. (1976) *Studies of Stock Price Volatility Changes*. Proceedings of the Business
2. and Economics Section of the American Statistical Association 177–181.
3. Black, F., Scholes, M. (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*.
4. Journal of Political Economy 81, 637–659
5. Fama, E. (1970). *Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work.* The Journal of Finance.
6. Robert C. Merton. (1971). *Theory of Rational Option Pricing.* Cambridge: M.I.T.
7. Tyler Adrian, Eva Cekoulyte. (2006). *Guía informativa de CNMV. Que debe de saber de opciones y futuros.* CNMV: Artegraft, S.A.
8. Fernández López, Pablo (1997) *Utilización de la fórmula Black y Sholes para valorar opciones.* Universidad de Navarra: IESE.