UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

FACULTAD DE EDUCACIÓN ZARAGOZA

TRABAJO FIN DE MASTER

GEOMETRÍA ANALÍTICA

ECUACIONES DE LA RECTA Y POSICIONES RELATIVAS

4º E.S.O, OPCIÓN A

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas

ESPECIALIDAD MATEMÁTICAS

Autora: Silvia Carrera Sanjuan

Tutora: Pilar Bolea Catalán

ÍNDICE

OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

Dentro de la Educación Secundaria Obligatoria, en adelante ESO, los alumnos del último curso tienen la posibilidad de elegir, en la materia de matemáticas, una de las dos opciones que se ofertan, las matemáticas propedéuticas o de continuación, opción B, o las matemáticas de finalización u opción A. El trabajo fin de master que nos ocupa, va a estar centrado en la opción A de matemáticas de 4º curso de ESO.

Según el Currículo Oficial Aragonés (ORDEN de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.) los bloques de contenidos que en este curso se trabajan son:

- Bloque 1. Contenidos comunes.
- Bloque 2. Números.
- Bloque 3. Álgebra.
- Bloque 4. Geometría.
- Bloque 5. Funciones y gráficas.
- Bloque 6. Estadística y probabilidad.

En el que este trabajo se va a centrar, es en el de geometría y dentro del mismo, en el campo de la Geometría Analítica.

El objeto matemático que en definitiva se pretenden enseñar desde este documento, es las diferentes ecuaciones de la recta y las posiciones relativas de las mismas.

Los problemas, técnicas y tecnologías que están asociados al objeto matemático que se pretende enseñar, serán tales que les permitan trabajar con soltura las distintas formas de la ecuación de una recta:

- Ecuaciones paramétricas de la recta.
- Ecuación continua de la recta.
- Ecuación general de la recta.
- Ecuación punto pendiente de la recta.
- Ecuación explícita de la recta.

Y que les capaciten para el trabajo con la expresión adecuada y si es necesario, el paso de unas a otras, así como a resolver con ellas problemas de intersección y paralelismo.

CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

Lo que en esta etapa se espera que el alumno sepa y sea competente, para enfrentarse con posibilidad de éxito al nuevo objeto matemático es:

- Los conceptos de punto, recta y segmento que ya aprendió en los cursos de 1º, 2º y 3º de la ESO, tanto en el plano como en el espacio, desde un punto de vista sintético, es decir, un reconocimiento de formas.
- El concepto de paralelismo en el plano y en el espacio, que igualmente quedó definido en primero, segundo y tercero de la ESO.
- Saber representar en los ejes cartesianos puntos, segmentos y rectas.
- Saber resolver sistemas de ecuaciones lineales que ya ha visto en 3º y en temas anteriores del mismo 4º curso de ESO.
- Y que tenga una competencia en manipulaciones algebraicas, pendientes y ángulos.

Todo esto son conocimientos previos que tiene que tener adquiridos e interiorizados dado su nivel en el sistema educativo, pero más concretamente pensando en este tema, es fundamental que haya hecho suyos conceptos tales como:

- Concepto de vector y vector libre y las operaciones básicas del mismo: suma de vectores, diferencia de vectores y producto de un número por un vector.
- Coordenadas de puntos y componentes de vectores en el plano cartesiano.
- Calcular el punto medio de un segmento.
- Cálculo de la distancia entre dos puntos.

Con todo esto, si se ha conseguido que el alumno maneje con soltura los objetos previos, estará preparado para afrontar y comprender el nuevo objeto matemático.

En este caso, es fácil asegurarse de si los alumnos poseen los conocimientos previos o no. Según marca el Currículo Aragonés, el tema previo que se ha tenido que explicar a los alumnos de 4º de la ESO, para pasar a enfrentarnos con los tipos de ecuaciones de la recta, ha tenido que ser el de puntos y vectores. Sería suficiente pues, con saber que esto ha sido así, para ello se puede hacer un recordatorio con los conceptos más significativos.

Sería interesante que ese recordatorio incluyera conceptos tales como:

- Representar los ejes cartesianos.
- Dibujar la recta que pase por los puntos A (0,1) y B (4.2).
- Dibujar el vector AB.
- Identificar el punto medio del segmento AB.
- Reconocer un vector fijo y un vector libre.

RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

La razón de ser que se va a tener en cuenta con los alumnos para la introducción del nuevo objeto matemático, va a ser una breve explicación del porqué de la geometría analítica. Se tratará de hacer ver que la conjunción entre la geometría y el álgebra dio lugar al nacimiento de la geometría analítica, rama de las matemáticas que estudia las figuras y los cuerpos del espacio descritos mediante sus ecuaciones, es decir, utilizando recursos algebraicos.

Lo que se pretende hacer ver a los alumnos, es que con esta nueva herramienta van a poder resolver algebraicamente, lo que hasta ahora hacían visualmente y con ello, van a contar un rigor y una precisión diferentes a la hora de dar la respuesta, van a poder empezar a resolver problemas que con regla y compás no se puede.

Para ilustrar esto, se mostrará en el programa informático Geogebra, la relación existente entre rectas que se irán dibujando, y las ecuaciones que son mostradas automáticamente.

La forma que vamos a tener de introducir el nuevo objeto matemático, va a coincidir totalmente con la razón de ser histórica, ya que lo que en su origen dio lugar a la geometría analítica, fue precisamente lo que estamos queriendo hacer ver al alumnado, la necesidad de un mayor rigor a la hora de dar solución a ciertos problemas, que con la geometría sintética no se podía.

Para aporta también algo de historia al nuevo objeto matemático, se muestra una breve reseña que podría ser presentada en un folio a color, que lo haga un poco atractivo, para que los alumnos interesados se puedan hacer con una copia. (Anexo 1)

Reseña Histórica:

"*A comienzos del s. XVII se fraguan las primeras ideas sobre un nuevo método para enfocar los problemas geométricos que, dos siglos después, recibirá el nombre de geometría analítica. Sus principales artífices, René Descartes y Pierre Fermat, no fueron precisamente matemáticos profesionales: el primero fue un filósofo de amplios conocimientos científicos y el segundo un abogado y parlamentario de Toulouse que dedicó sus ratos libres a leer y comentar los tratados de los matemáticos griegos. Expusieron estas ideas en sendas obras, La Geometría y Ad locos planos et solidos isagoge, que marcan el comienzo de una gran transformación. Sin embargo, según Collete (1985; II, 27), "ni Descartes ni Fermat inventaron el uso de las coordenadas o de los métodos analíticos, y ni uno ni otro fueron los primeros en aplicar el álgebra a la geometría o en representar gráficamente variables. La contribución independiente de cada uno reposa esencialmente en el reconocimiento de que una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana, con respecto a un sistema de coordenadas. Además, si se añaden a esto los métodos algorítmicos desarrollados por cada uno para unir estrechamente la ecuación y la curva correspondiente, todo ello bastará para atribuirles el mérito de ser los fundadores de la geometría analítica"" (Del Rio Sánchez, J. (1994): Lugares Geométricos. Cónicas. Ed Síntesis S.A)*

Para introducir nuestro objeto matemático en el aula, se diseña una actividad, relacionada únicamente, con el manejo de las rectas, segmentos y el concepto de paralelismo. El único objetivo de la misma, es ver la utilidad de las rectas y los segmentos y posteriormente, comparar los métodos manuales con los actuales métodos de diseño gráfico, y a lo largo del tema, con el álgebra.

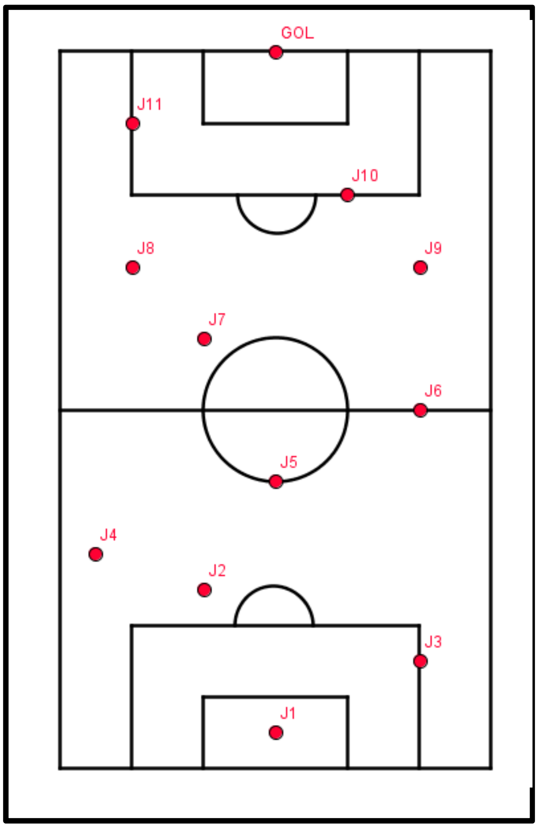
Actividad introductoria: Entrenamiento de Futbol

(Se muestra a continuación)

ENTRENAMIENTO DE FUTBOL

Apartado A)

A continuación se muestra un campo de Futbol con los jugadores de un equipo colocados en ciertos puntos del campo.



El entrenador les ha marcado unas condiciones para ensayar unas jugadas que siempre terminan en tiro a puerta, es decir en el punto marcado como GOL.

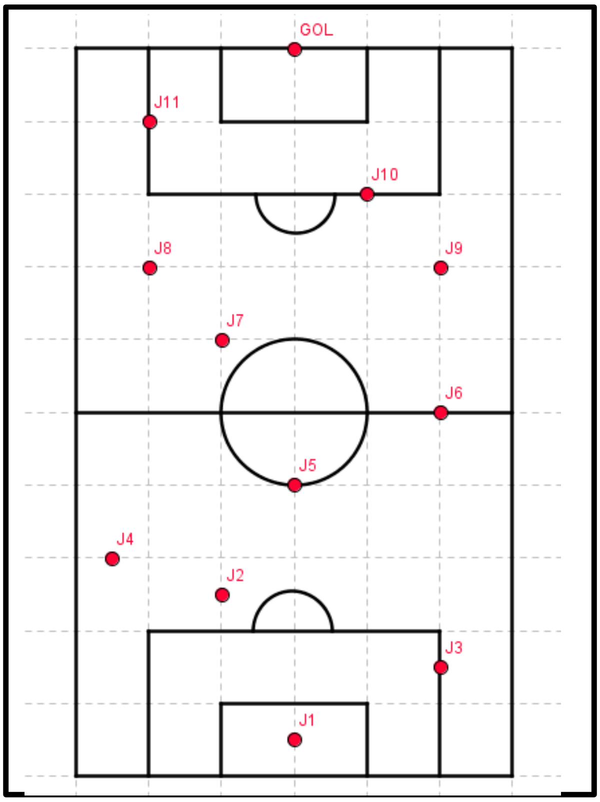
Las condiciones son:

- No se permiten los pases entre dorsales pares con impares salvo el portero que puede sacar a dorsal par o impar.
- El portero sólo puede sacar pasando al dorsal 2 o al 3.
- Los únicos que pueden tirar a puerta son los dorsales 10 y 11.
- No se permite que la diferencia entre el dorsal del jugador que pasa y el del que recibe sea mayor de 4.
- No se pueden hacer pases hacia atrás.

Con las condiciones dadas, el entrenador te pide que le ayudes a dibujar las posibles jugadas y que halles en cuál el balón hace el recorrido más corto y en cuál el más largo. Para ello, dibuja todos los pases posibles y busca la opción más corta y la más larga. Ayúdate de la regla que se te ha entregado.

Apartado B)

Ahora se presenta el mismo campo de futbol con los jugadores en las mismas posiciones, y se pide analizar una de las jugadas que has dibujado, pero desde un punto de vista algebraico.



Para ello:

- Dibuja unos ejes de coordenadas cuyo origen esté en el centro del campo.
- Indica las coordenadas de cada jugador, con respecto a los ejes que has dibujado.
- Dibuja el recorrido de balón que en el apartado anterior, has elegido como más largo.
- ¿Conoces la diferencia entre una recta y un segmento?
- Dibuja, las rectas que contienen a cada uno de los segmentos que has dibujado y dales un nombre.
- De todas tus rectas, ¿hay alguna paralela a otra?

Cuando finalices cada uno de los apartados, los comentaremos en voz alta con el resto de los compañeros.

Desde el postulado en el que la construcción del conocimiento, es la mejor forma de dar significado al concepto a enseñar/aprender, consideramos que la forma más apropiada para llevar a cabo la actividad en la clase es la siguiente. Se colocará a los alumnos por parejas para que puedan comentar sus avances en el problema y contrastar los resultados. Se repartirá a cada uno de ellos una tira de cartón a modo de regla pero sin numerar y varias plantillas con la primera parte de la actividad, para que puedan probar diferentes opciones. Posteriormente, sin dar ninguna explicación más, se dejará que los alumnos sean autónomos y trabajen como estimen oportuno. Ante las dudas que vayan planteando, el profesor actuará de dinamizador para dirigirles y tratar de que sean ellos mismos los que se contesten, es decir, no se pondrán demasiadas limitaciones a la actividad, y se dejará que ellos vayan investigando.

Con esta metodología, lo que se está buscando es que los alumnos se familiaricen con las rectas, que busquen diferentes opciones, y que se planteen variantes comentando entre ellos, cuales pueden ser mejores o peores. También es interesante que recuerden la idea de que para dibujar una recta o un segmento, basta con conocer dos puntos.

Cuando todos vayan teniendo los caminos más largos y más cortos del balón, se comenzará una puesta en común, para entre todos, ver cuales son las soluciones correctas y por qué. Se dejará que los alumnos aporten ideas y razonamientos para quedar de acuerdo en una única solución para cada trazado pedido en el enunciado.

A continuación, se les repartirá la 2ª parte de la actividad. En este momento, también se les dejará autonomía para que piensen que es lo que les pide el ejercicio y actúen como ellos estimen oportuno.

Al final de esta segunda parte, se comentará en voz alta con la participación de los alumnos, como han trabajado y que se esperaba de ellos. Iremos analizando una por una las preguntas a las que tenían que contestar y lo iremos resolviendo a la vez con el uso del programa informático Geogebra. Con esta herramienta, se podrá ir viendo, tal y como comentábamos al principio, lo que es la geometría analítica, y como las diferentes rectas que dibujamos, van siendo identificadas con una ecuación, que se considera la expresión analítica de la recta. En particular la ecuación general de la recta.

En el anexo 2, se muestra la solución de la actividad.

Tras el desarrollo de la actividad, se dará comienzo al tema eligiendo una de las rectas que hemos definido en la anterior metodología. Siguiendo la nomenclatura que se ha utilizado en la solución dada en el anexo 2, la recta que se escogerá será la recta t, que está definida por los puntos J10 (1, 3) y GOL (0, 5). A partir de esta recta, se ayudará a los alumnos para que, mediante diferentes técnicas, vayan descubriendo las tecnologías necesarias para enfrentarse al campo de problemas del tema.

CAMPO DE PROBLEMAS, TÉCNICAS Y TECNOLOGÍAS

A continuación se presenta el campo de problemas con el que el alumno va a tener que enfrentarse en este tema. La presentación va a ser de una manera tal, que se vea cómo, a partir de cada tipo de problemas, los alumnos van a llegar a construir la teoría. Es decir, se presentan los campos de problemas y las técnicas y tecnologías asociadas a cada uno de ellos.

En los casos que se van a presentar, se partirá del problema tipo, que a su vez estará sacado de la actividad que nos ha introducido el tema, la del entrenamiento de futbol, y veremos cómo se les va a presentar a los alumnos para que vayan descubriendo las técnicas y la tecnología del campo de problemas.

Antes de mostrar ningún tipo de problema, es importante dejar claro a los alumnos, que significa "la ecuación de una recta". Es necesario asegurarse de que tienen claro que una ecuación son las condiciones que tienen que cumplir la abscisa y la ordenada de un punto para pertenecer a una recta.

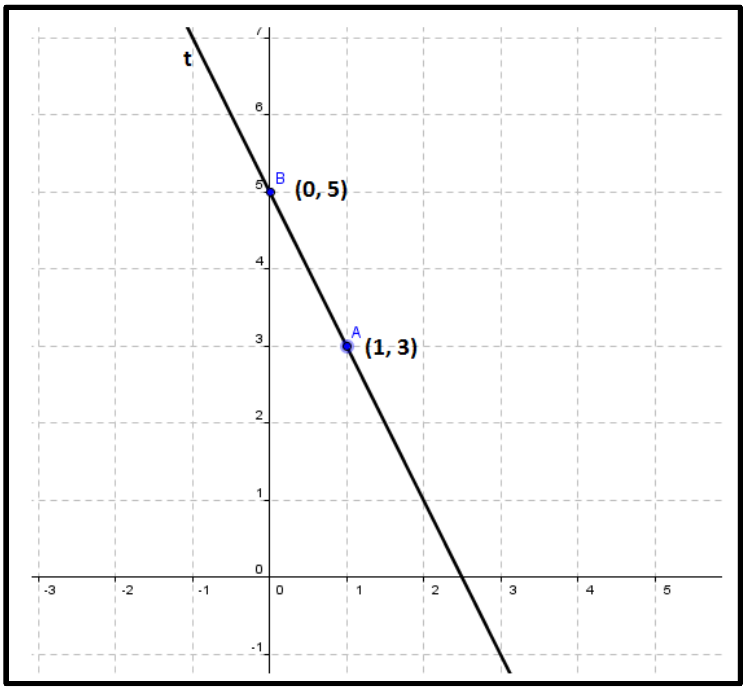
Los tipos de problemas con los que el alumno se va a encontrar son:

- **Tipo 1: Escribir la ecuación de una recta en sus diferentes formas, a partir de unos datos dados gráficamente o analíticamente. Ecuaciones paramétricas, continua y general.**

En ellos se buscará que el alumno sea capaz de que a partir de unos valores dados, obtenga la expresión de la recta que se le pide, y sepa pasar a otras formas de expresión de la misma recta, exactamente desde la paramétrica, a la continua y a la general.

Ejemplo:

A partir de los resultados obtenidos en la actividad del entrenamiento de futbol, halla las ecuaciones paramétrica, continua y general de la recta t:



Las técnicas que se pueden trabajar desde este problema, serian dos, una vectorial, y otra por semejanza de triángulos. Como el tema anterior que los alumnos ven en este curso, es precisamente el de vectores, resulta más interesante, a mi parecer, abordar el que nos ocupa, desde la técnica vectorial, y es por tanto la que se presenta.

Lo que se va a detallar, son las técnicas por las que iremos guiando a los alumnos, para que sólo con una ayuda del profesor, sean capaces de ir deduciendo, a través de un ejemplo, la tecnología general que usaremos para resolver problemas como este.

Técnica vectorial:

Con los dos puntos A (1, 3) y B (0, 5), que definen la recta t, el alumno puede obtener un vector libre con la siguiente técnica ya aprendida en temas anteriores:

Técnica para obtener un vector a partir de dos puntos dados.

1. Identificar cuales son las coordenadas de los dos puntos dados para formar el vector.
2. Identificar uno de los puntos como inicial y otro como final, dependiendo del vector que se quiera conseguir.
3. La componente *x* del vector, será la resta de la componente *x* del punto final menos la componente *x* del punto inicial.
4. La componente *y* del vector, será la resta de la componente *y* del punto final menos la componente *y* del punto inicial.
5. Escribir entre paréntesis las componentes del vector buscado.

El vector que con todo esto obtiene es el siguiente:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (0-1, 5-3) = (-1, 2)$$

Si ahora les pedimos que definan un punto cualquiera P (*x*, *y*) de la recta, y lo unan con el punto A, tienen que ver que el vector $\overrightarrow{AP}$ tiene que tener la misma dirección que $\vec{u}$, es decir, tienen que ser vectores colineales y por tanto $\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u}$ siendo k un cierto número, que haría nuestro vector más grande o más pequeño dependiendo de donde coloquen P.

Aplicando esta relación obtendrán que:

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u};$$

$$(x-1, y-3) = k \cdot (-1, 2)$$

y como saben que para que dos vectores sean iguales, sus componentes tiene que ser iguales, obtienen:

$$x - 1 = k \cdot (-1) \Rightarrow \boldsymbol{x = 1 - 1k}$$

$$y - 3 = k \cdot 2 \Rightarrow \boldsymbol{y = 3 + 2k}$$

En este momento se les explicará que esto que han obtenido, recibe el nombre de **ecuaciones paramétricas de la recta**, debido al parámetro *k* que están utilizando. Lo que en este momento se les puede animar a comprobar, es que dando valores a *k*, de manera manual, consiguen distintos puntos, todos ellos pertenecientes a la recta.

Ahora que los alumnos ya han encontrado una ecuación que define a la recta, se les puede pedir que manipulen algebraicamente las ecuaciones, que despejen *k* y lo igualen, a ver a que llegan, el proceso sería el siguiente:

$$x = 1 - k \Rightarrow k = \frac{x-1}{1}$$

$$y = 3 + 2k \Rightarrow k = \frac{y-3}{2}$$

por igualación

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2}}$$

Y es ahora cuando se les puede contar que esta ecuación, recibe el nombre de **ecuación continua de la recta.**

Llegados a este punto, el alumno casi seguro que tiene interés por seguir investigando que pasa si sigue operando, por tanto, hay que animarle a ello, y la siguiente propuesta será, que dejen una expresión igualada a 0, que pasen todos los términos a uno de los lados de la igualdad.

$$x - 1 = \frac{y-3}{2};$$

$$2\,(x - 1) = (y - 3); \quad 2x - 2 = y - 3;$$

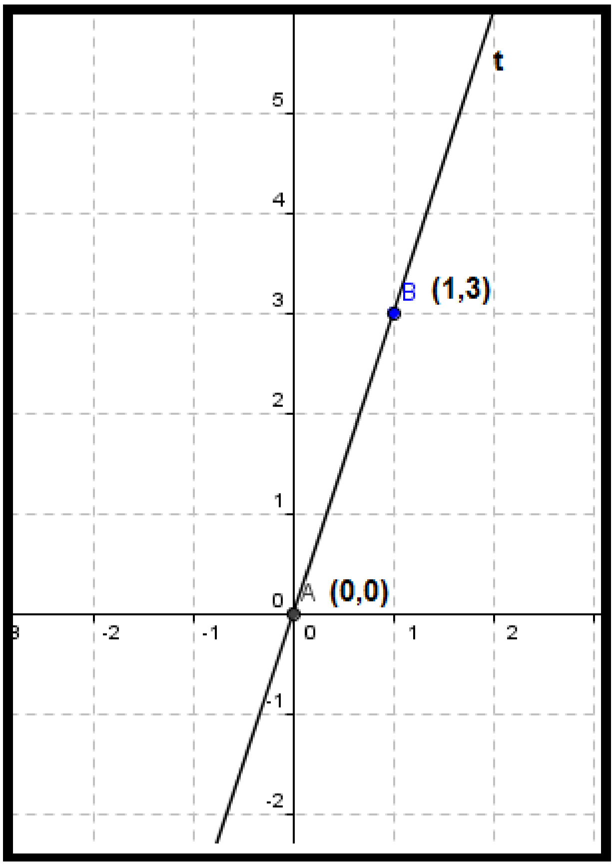
$$2x - y + 3 - 2 = 0; \quad \mathbf{2x - y + 1 = 0}$$

Nuevamente les comentaremos que la nueva ecuación, es la **ecuación general de la recta.**

Antes de pasar a la institucionalización de los conceptos, se les presentará en este momento, dos modificaciones de la técnica que a mi parecer, resultan interesantes. Una de ellas, cuando uno de los puntos, se encuentra en el origen de coordenadas, y la otra cuando las rectas que están buscando, son paralelas a los ejes. Con estas modificaciones, se pretende que los alumnos sean capaces de darse cuanta de que existen diversas situaciones, en las que debido a la disposición de los puntos, pueden simplificarse mucho las técnicas.

Para mostrar estas modificaciones, nos saldremos del ejemplo de la actividad introductoria del entrenamiento de futbol, y cogeremos dos rectas cualesquiera.

1ª Modificación de la técnica: Uno de los puntos en el origen de coordenadas.



Ahora se les pedirá que procedan como en el caso anterior. Lo primero de todo buscarán el vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (1-0, 3-0) = (1,3)$$

Se les ayudará en este momento a que se den cuenta de que el vector hallado, tiene las mismas componentes, que las coordenadas del punto que no está en el origen.

Cuando a partir de aquí, comiencen a trabajar de igual modo que en el caso genérico anterior, para llegar a las **ecuaciones paramétrica**s, utilizando un punto cualquiera P de la recta, los pasos serán los siguientes:

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u};$$

$$(x - 0, y - 0) = k \cdot (1, 3)$$

$$x - 0 = k \cdot (1) \Rightarrow \boldsymbol{x = 1k}$$

$$y - 0 = k \cdot 3 \Rightarrow \boldsymbol{y = 3k}$$

Verán con esto, que las **ecuaciones paramétricas**, quedan claramente simplificadas, siendo sólo necesario igualar *x* e *y*, a las componentes del punto que está fuera del origen, multiplicadas por el parámetro *k*.

Como ya habrán hecho en el problema anterior, seguirán trabajando hasta la **ecuación continua de la recta**.

$$x = k \Rightarrow k = \frac{x}{1}$$

$$y = 3k \Rightarrow k = \frac{y}{3}$$

y por igualación:

$$\boldsymbol{\frac{x}{1} = \frac{y}{3}}$$

Volverá a darse cuenta el alumno, de la simplificación que de las ecuaciones se hace, cuando uno de los puntos que forman la recta, se encuentra situados en el origen de coordenadas. Y lo seguirá comprobando en un paso más, llegando por tanto a la **ecuación general**.

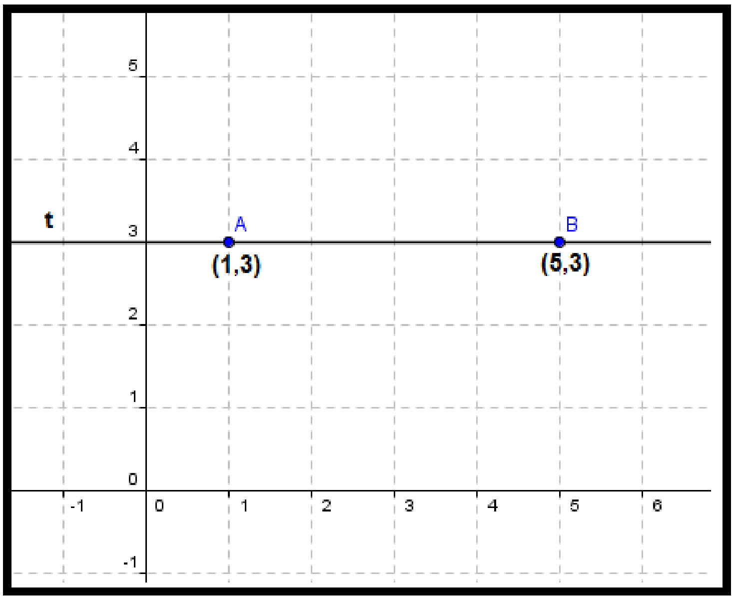
$$\boldsymbol{\frac{x}{1} = \frac{y}{3}}$$

$$3 \cdot x = 1 \cdot y; \quad 3x = 1\,y;$$

$$\mathbf{3x - y = 0};$$

En este último paso, los alumnos, con la ayuda que sea necesaria por parte del profesor, llegarán a la conclusión de que para expresar la ecuación general de la recta, cuando uno de los puntos que la componen, está en el origen, queda definida con el producto de *x* por la componente *y* del punto que está fuera del origen, menos, la componente *y* multiplicada por la componente *x* de ese mismo punto, y esta suma igualada a cero.

2ª Modificación de la técnica: La recta es paralela a uno de los ejes de coordenadas.



En esta nueva modificación de la técnica, se persigue el mismo objetivo que en la anterior, hacer que los alumnos se den cuenta de que en determinadas situaciones concretas, es más fácil encontrar las ecuaciones de la recta buscadas, debido a la disposición de los puntos que las definen.

Para ello, comenzaremos nuevamente buscando el vector $\overrightarrow{AB}$, y posteriormente el vector $\overrightarrow{AP}$, siendo P un punto cualquiera de la recta, para llegar a la **ecuaciones paramétricas** de la misma.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (5-1, 3-3) = (4, 0)$$

Ya pueden ver en este momento, que la característica especial de este tipo de situaciones, es que, en el vector $\overrightarrow{AB}$, la componente que coincide, con el eje perpendicular a la recta, se hace 0. Sería interesante plantearles en este momento a los alumnos un breve ejemplo con la recta perpendicular al eje *x*, para que vean que entonces, la componente que toma el valor 0 en el vector $\overrightarrow{AB}$, es precisamente, esa, la *x*.

Continuando con el ejercicio:

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u};$$

$$(x-1, y-3) = k \cdot (4, 0)$$

$$x - 1 = k \cdot 4 \Rightarrow \mathbf{x = 1 + 4k}$$

$$y - 3 = k \cdot 0 \Rightarrow \mathbf{y = 3}$$

Al llegar a esta expresión de la recta, el alumnado, con la ayuda que sea oportuna por parte del profesor, se dará cuenta de que, si procede como en el primer problema, dando valores al parámetro *k*, obtiene diferentes puntos de la recta, pero en este caso concreto, todos los puntos, tienen valor 3 en la coordenada *y*, lo cual, cobra total sentido, al ver que la recta es paralela al eje *x* a la altura de *y*=3.

Cuando a partir de ahora, tengan que trabajar para llegar a la **ecuación continua** de la recta, el alumno se encontrará con el problema de que no tiene, en las dos ecuaciones paramétricas el parámetro *k* para poder despejarlo e igualarlo. Para ayudarles a salir de este obstáculo, el profesor les recomendará que en vez de trabajar con las ecuaciones halladas anteriormente, trabajen con las expresiones justamente anteriores, sin quitar el valor 0. Es decir:

$$x - 1 = k \cdot 4 \Rightarrow x = 1 + 4k$$

$$y - 3 = k \cdot 0 \Rightarrow y = 3 + k \cdot 0$$

$$x = 1 + 4k \Rightarrow k = \frac{x-1}{4}$$

$$y = 3 + k \cdot 0 \Rightarrow k = \frac{y-3}{0}$$

y por igualación:

$$\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{4}} = \frac{\boldsymbol{y-3}}{\boldsymbol{0}}$$

Aquí cabría una pequeña aclaración de que estamos trabajando con denominador de valor 0, que aunque eso no está correctamente expresado, nosotros podemos ayudarnos de ello para definir la **ecuación continua** de la recta, y desde esta, llegar a la **ecuación general** como a continuación se muestra:

$$0 \cdot (x - 1) = 4(y - 3);$$

$$\mathbf{y - 3 = 0};$$

Se considera apropiado que cuando se llega a este punto de la técnica, el profesor haga especial hincapié en aclarar que esta es la expresión que habitualmente se utiliza para representar una recta paralela a un eje de coordenadas (en este caso concreto, al *x*) y que el hecho de que en la expresión no aparezca la x, significa que para cualquier valor de la misma, la *y* siempre toma valor 3. Además, es fácilmente comprobable con un vistazo a la representación de la recta en el enunciado del ejercicio.

La siguiente inquietud que tenemos que tratar de despertar en ellos, es el querer encontrar una fórmula, algo genérico, que les ayude a resolver este tipo de problemas sin tener que pasar por todo el proceso que acaban de descubrir, es decir, vamos a empujarles a que plasmen las tecnologías, que generalizan las técnicas vistas. Para esto, les proponemos que los puntos con los que ahora vamos a trabajar, tienen unas coordenadas genéricas, por ejemplo, A (x_0, y_0) y B (x_1, y_1).

A lo que van a llegar es a lo siguiente:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (u_x, u_y)$$

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u};$$

$$(x - x_0 \ , y - y_0) = k \cdot (u_x, u_y)$$

$$x - x_0 = k \cdot u_x$$

$$y - y_0 = k \cdot u_y$$

Y es así como obtienen que las **ecuaciones paramétricas** de cualquier recta quedan definidas como:

$$\mathbf{x - x_0 = k \cdot u_x}$$

$$\mathbf{y - y_0 = k \cdot u_y}$$

Si tal y como han hecho anteriormente, despejan el parámetro *k* de cada una de las ecuaciones y las igualan, llegarán a comprobar que:

$$x = x_0 + k \cdot u_x \Rightarrow k = \frac{x - x_0}{u_x}$$

$$y = y_0 + k \cdot u_y \Rightarrow k = \frac{y - y_0}{u_y}$$

$$\boldsymbol{\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y}}$$

Y ha quedado definida la **ecuación continua** de la recta.

Por último, ya saben que operando algebraicamente pueden obtener una nueva forma de ecuación de la recta:

$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y}$$

$$u_y \cdot (x - x_0) = u_x \cdot (y - y_0); \quad u_y \cdot x - u_y \cdot x_0 = u_x \cdot y - u_x \cdot y_0;$$

$$u_y \cdot x - u_x \cdot y - u_y \cdot x_0 + u_x \cdot y_0 = 0$$

En este punto, les ayudaremos a expresar lo que acaban de deducir de una manera más simple haciendo las siguientes igualaciones, simplemente por notación:

$$u_y = A$$

$$u_x = -B$$

$$-u_y \cdot x_0 + u_x \cdot y_0 = C$$

Por tanto queda la **ecuación general** de la recta como: **Ax + By + C = 0**

Para ayudarles a encontrar las tecnologías respectivas a las modificaciones de las técnicas que anteriormente han trabajado, les propondremos nuevamente que utilicen puntos genéricos pero con las peculiaridades que hemos tratado:

Cuando un punto de la recta está en el origen, trabajarán con A (0, 0) y B (x_1, y_1).

La expresión a la que se llegará es:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (x_1 - 0, y_1 - 0) = (x_1, y_1)$$

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u};$$

$$(x - 0, y - 0) = k \cdot (x_1, y_1)$$

$$x = k \cdot x_1$$

$$y = k \cdot y_1$$

Y es así como se obtiene que las **ecuaciones paramétricas** de cualquier recta que pase por el origen de coordenadas, quedan definidas como:

$$\mathbf{x = k \cdot x_1}$$

$$\mathbf{y = k \cdot y_1}$$

Si como en el caso genérico, se despeja el parámetro *k* de cada ecuación, y se igualan los resultados, se llega a la siguiente expresión:

$$x = k \cdot x_1 \Rightarrow k = \frac{x}{x_1}$$

$$y = k \cdot y_1 \Rightarrow k = \frac{y}{y_1}$$

$$\boldsymbol{\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}}$$

Y con esto se puede ver, como de reducida queda la **expresión continua** de la recta.

Nuevamente, operando algebraicamente la simple expresión que se ha obtenido, se llega a la **expresión general** de la recta:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$$

$$x \cdot y_1 = y \cdot x_1;$$

$$\boldsymbol{y_1 \cdot x - x_1 \cdot y = 0}$$

Así como antes, en el caso general, ha sido necesario renombrar cada uno de los términos para llegar a una expresión más simplificada, en este caso, la **ecuación general** queda así perfectamente definida.

Por último, antes de pasar al siguiente tipo de problemas, quedaría encontrar la tecnología que nos justifica la segunda modificación de la técnica que hemos trabajado, es decir, cuando se trata de rectas paralelas a uno de los ejes de coordenadas.

Nuevamente se definirá el vector $\overrightarrow{AB}$, siendo A (x_0, y_0) y B (x_1, y_0).

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (x_1 - x_0, y_1 - y_1) = (u_x, 0)$$

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u};$$

$$(x - x_0 , y - y_0) = k \cdot (u_x, 0)$$

$$x - x_0 = k \cdot u_x$$

$$y - y_0 = k \cdot 0$$

Y llegando a las **ecuaciones paramétricas** de cualquier recta paralela al eje *x*:

$$\mathbf{x} - \boldsymbol{x_0} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u_x}$$

$$\mathbf{y} - \boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{0}$$

Despejando el parámetro k de cada una de las ecuaciones e igualándolas, se llega a comprobar que:

$$x - x_0 = k \cdot u_x \Rightarrow k = \frac{x-x_0}{u_x}$$

$$y - y_0 = k \cdot 0 \Rightarrow k = \frac{y-y_0}{0}$$

$$\boldsymbol{\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{0}}$$

Quedando con esto definida la **ecuación continua** de las rectas paralelas al eje *x*.

Ya sólo faltaría operar para obtener una nueva forma de ecuación de la recta:

$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{0}$$

$$0 \cdot (x - x_0) = u_x \cdot (y - y_0); \quad 0 = u_x \cdot y - u_x \cdot y_0;$$

$$\boldsymbol{u_x \cdot y - u_x \cdot y_0 = 0}$$

Como en el caso anterior, no es necesario renombrar los términos que nos han salido para encontrar una expresión simplificada, ya que, debido a las peculiaridades del caso que nos ocupa, es fácil ver como queda definida la **ecuación general** de la recta.

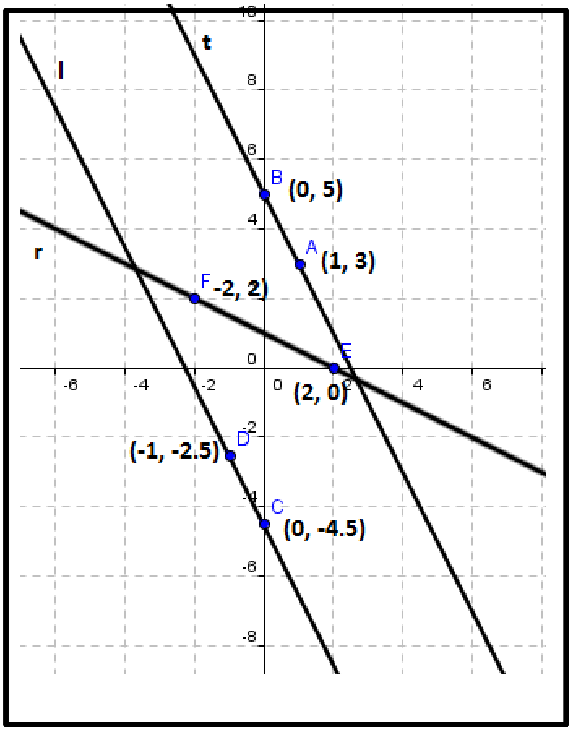
Se presenta como sugerencia interesante, mandar a los alumnos en algún momento de las sesiones, o en los ejercicios para casa, hacer esta misma demostración pero para rectas paralelas al eje y de coordenadas.

- **Tipo 2: Problemas con pendientes y rectas paralelas y nuevas formas de expresión de ecuaciones de la recta, punto – pendiente y explícita.**

Con este tipo de problemas, lo que se pretende es que el alumno aprenda a calcular la pendiente de una recta, y a partir de ello descubra cuando dos rectas son paralelas, con una técnica más precisa que la simple observación, y encuentre nuevas expresiones para definir una recta.

Ejemplo:

A partir de la actividad del entrenamiento de futbol, deduce si las rectas **l** y **t** son o no paralelas. A continuación, escribe nuevas expresiones de la recta **t**. ¿Son paralelas las rectas **t** y **r**? ¿Por qué?



Continuando con la técnica vectorial, para resolver este problema, es fácil que los alumnos primeramente, utilicen una técnica visual para responder que estás rectas son paralelas, pero claro, hemos de hacerles ver la necesidad de dar una solución más exacta que la mera observación. Para esto les pediremos que analicen que tienen en común estas dos rectas.

Un primer cálculo les llevará a comprobar los vectores direccionales, al hacer esto;

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (0-1, 5-3) = (-1, 2)$$

$$\overrightarrow{CD} = \vec{v} = (-1-0, -2.5-(-4.5)) = (-1, 2)$$

Rápidamente concluirán que dos rectas son paralelas cuando tienen vectores direccionales idénticos. Pero tendremos que hacerles ver, que si hubieran cogido otro punto para hacer el vector direccional de cualquiera de las dos rectas, no serian iguales, si no que serian proporcionales, para comprobar esto, les daremos un nuevo punto de la recta **t** el **G (2.5, 0)**, y volverán a comprobar como son los vectores.

Nuevo vector direccional de t:

$$\overrightarrow{GA} = \vec{u} = (2.5 - 1, 0 - 3) = (1.5, -3)$$

Ahora comprobarán que los vectores ya no son idénticos pero si guardan la misma proporción entre componentes, es decir:

$$\frac{1.5}{-1} = \frac{-3}{2} = -1.5$$

Es decir, dos rectas serán paralelas cuando se cumpla la relación anterior.

Será interesante parar en este punto del tema, para comprobar con los alumnos, con la aplicación Geogebra, que para que dos rectas sean paralelas, no basta con que los vectores sean iguales, hay que asegurarse de que no pasan por los mismos puntos, es decir, que las rectas no son coincidentes.

También les avanzaremos, que la pendiente de una recta se define como la inversa de los cocientes que acaban de deducir y se identifica como **m**

$$\frac{-3}{1.5} = \frac{2}{-1} = -2 = m$$

Y por tanto 2, es la pendiente de nuestras rectas.

Una vez que tenemos esto, les haremos volver a la ecuación continua de la recta **t**, a ver si con los nuevos avances, pueden encontrar, alguna otra forma de expresión de la recta.

$$x - 1 = \frac{y - 3}{2}$$

$2 \cdot (x - 1) = (y - 3) \Rightarrow$ **(y – 3) = 2 · (x – 1)**

Fijándose un poco, verán que tienen la nueva expresión de la recta buscada, en una forma en la que aparece la pendiente. Se les explicará entonces, que a esta expresión se le llama **ecuación punto-pendiente de la recta**. Al darles el nombre, les pedimos que analicen alguna curiosidad entre el nombre y la expresión hallada.

Es fácil que se den cuenta de que en la expresión que han encontrado, aparece el número 2, que es la pendiente de la recta, y los números 1 y 3, que coinciden con las coordenadas de un punto de la recta. Podemos concluir explicándoles que es precisamente por eso, por lo que se le da ese nombre a la expresión, por que figuran la pendiente y un punto perteneciente a la recta.

Si como en casos anteriores, les pedimos que despejen *y* de la expresión encontrada:

$(y - 3) = 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 3 \Rightarrow$ **y = 2x + 1**

Acaban deduciendo la **ecuación explícita** de la recta.

Una vez llegado a este punto, les será muy sencillo contestar a la última pregunta del problema, ¿son paralelas las rectas **t** y **r**? ¿Por qué?

Es fácil que los alumnos, en este momento y con las técnicas que conocen, vayan a buscar el vector direccional o la pendiente de la recta r para compararlo con el de la recta **t**

$$\overrightarrow{EF} = \vec{w} = (-2-2, 2-0) = (-4, 2)$$

Si comparan con los vectores que ya tienen de la recta **t**

$$\frac{2}{-1} \neq \frac{2}{-4}$$

En este punto les explicaremos que efectivamente, dos rectas si no tienen la misma pendiente, es decir, si los cocientes de las componentes de sus vectores direccionales, no son proporcionales, son rectas secantes, se cortan en un punto y la manera de hallar ese punto es resolviendo el sistema de ecuaciones dado por las dos rectas.

Con este segundo ejercicio finalizado, volvemos a pedirles que generalicen todo lo que han deducido para dar con las tecnologías de las que proviene todo lo que están descubriendo.

Momento de Institucionalización o generalizando:

La pendiente de una recta quedará definida como:

$$\frac{u_y}{u_x} = m$$

Y dos rectas serán paralelas cuando se cumpla que sus pendientes son idénticas y que no pasan por los mismos puntos, es decir, dadas dos rectas de la forma Ax+ By + C = 0 y A’x + B’y + C’ = 0, se cumplirá que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Por otro lado, la **ecuación punto – pendiente** de una recta, podemos deducirla partiendo de la ecuación continua y sabiendo como queda definida su pendiente, por tanto:

$$\frac{x-x_0}{u_x} = \frac{y-y_0}{u_y}$$

$$u_y \cdot (x - x_0) = u_x \cdot (y - y_0);$$

$$(y - y_0) = \frac{u_y}{u_x} \cdot (x - x_0)$$

$$\mathbf{(y - y_0) = m \cdot (x - x_0)}$$

Si a partir de aquí despejamos y:

$$(y - y_0) = \mathrm{m} \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = mx - m \cdot x_0 + y_0$$

$$\mathbf{y = mx + n}$$

$$\text{donde } n = y_0 - m \cdot x_0$$

siendo esta la **ecuación explícita** de la recta.

- **Tipo 3: Problemas en los que los datos son presentados como incógnita de problemas más sencillos.**

Con estos lo que se persigue es que el alumno, sepa interpretar la situación que se le da de partida, como algo de donde puede obtener los datos necesarios para los diferentes tipos de expresiones. Se pretende que lleguen al modelo algebraico que se les pide, pero de una manera indirecta.

Ejemplo:

Determina las ecuaciones paramétricas, continua, general y explícita de la recta que corta al eje de abscisas en el punto A (4,0) y al eje de ordenadas en el punto B (0,-3)

Las tecnologías en las que los alumnos tienen que apoyarse para resolver este tipo de problemas, son las que ya hemos visto hasta el momento, sin embargo, se les mostrará una técnica para aprender a enfrentarse a ellos de una manera ordenada.

Técnica para resolver problemas

1. Representar los datos que se dan en una gráfica indicando claramente lo que es dato y lo que es incógnita, no hay que dejarse ningún detalle.
2. Anotar lo que piden y pensar y escribir que necesito para dar con la respuesta buscada, puntos, vectores, pendientes…
3. Ir obteniendo cada uno de los datos para dar la solución final, ordenadamente e irlos anotando.
4. Cuando tenga todo, juntarlo según requiera la expresión, para dar la respuesta que se pide.

- **Tipo 4: Problemas con parámetros a determinar**

Con este último tipo lo que se pretende es que el alumno le de la vuelta a los conocimientos adquiridos, es decir, que en vez de darle los datos para que ellos formulen la ecuación, está vendrá dada para con algún parámetro sin definir, y lo que se pedirá es cuál tiene que ser ese parámetro para que se cumplan una serie de condiciones.

El objetivo general es que afiancen los conocimientos adquiridos y lo demuestren mediante lo que podríamos denominar como un problema inverso.

Ejemplo:

Calcula k para que la recta de la ecuación:

R: $2kx + (k-1)\cdot y = 0$

a. Pase por el punto A(-2,1)
b. Sea paralela a la recta $y = x + 1$
c. Forme 30º con el semieje positivo de abscisas.
d. Sea una recta paralela al eje de ordenadas

Lo que cualquiera de estos tipos de problemas va a exigir a la hora de la resolución, con respecto a la técnica inicial, es que el alumno no se va a encontrar con los datos de forma explícita para llegar a la solución de lo que en el ejercicio se le pida, sino que tendrá que analizar las gráficas o situaciones que se le presenten. Va a tener que ver, que para poder aplicar el algoritmo que ha interiorizado, antes tienen que usar su destreza para digamos, situarse en ese punto primero desde el cual ya sabe resolver el problema. Se va a encontrar con que sabe lo que le piden, y sabe llegar al resultado, pero le falta el principio, el entender lo que le están dando y como con eso, que no es lo habitual, puede llegar a lo que necesita para comenzar su técnica.

Nuevamente no vamos a basarnos en ninguna nueva tecnología para la resolución de estos problemas, pero si que les vamos a dar a los alumnos una técnica para afrontarlos.

Técnica para resolver problemas en los que hay un parámetro a determinar.

1. Rescribir la ecuación de la recta dada, de manera que se pueda identificar con alguna de las ecuaciones de la recta conocidas. Muchas veces será necesario operar y otras, ya nos vendrá dado como queremos.
2. Escribir la forma genérica de la ecuación de la recta que he elegido para expresar la recta dada.
3. Identificar término a término que es lo que aparece como dato conocido y a que se refiere el parámetro que tengo que buscar.
4. Con la condición que me dan para hallar el parámetro, buscar cuanto tiene que valer el mismo.

En clase, todos los problemas se afrontarán siempre de manera tal que se les de tiempo a los alumnos para intentarlo por ellos mismos, bien sea de manera individual o por pequeño grupo, dependiendo de la actividad. Si solos no consiguen hacerlo, se establecerá un "brainstorming" en la clase para que hagan sus preguntas en voz alta, que otros compañeros les contesten, que se equivoquen y se corrijan entre ellos, etc., evitando en la medida de lo posible la intervención del profesor, siempre y cuando esta no sea únicamente para reconducir sus dudas y llevarles a plantearse cuestiones que les hagan acercarse a la solución.

Tras este trabajo, la forma de dar la solución, será siempre con un compañero en la pizarra que bien, sepa solucionarlo y lo muestre a los compañeros, o que con la ayuda de todos, incluida la del profesor si fuera necesario, los alumnos lleguen a entender la forma de resolverlo. En cualquiera de los dos casos, el profesor intervendrá al principio y al final de la resolución. Al principio para mostrarles una forma ordenada de enfrentarse siempre ante un problema, datos, ideas, dibujo, intuición…pasos iniciales que es bueno que se acostumbren a dar siempre, y por último, para concluir el problema y dar la solución correcta si fuera necesario, o bien para resumir lo que se haya hecho en la pizarra.

Siempre que se propongan problemas a la clase se hará una atención especial a la diversidad. Si en el aula contamos con alumnos con necesidades específicas de apoyo educativo o con altas capacidades, por supuesto se preparará para ellos unas colecciones de problemas y ejercicios adaptadas a sus necesidades, y serán las que vayan realizando mientras la clase está con los ejercicios ordinarios. Para prestar atención a estos alumnos, se contará con que en recreos u horas libres tendrán la oportunidad de resolver dudas con el profesor.

Si los casos de diversidad en el aula no son tan claros, y solamente estamos hablando de diferentes ritmos de aprendizajes, nos basaremos en el aprendizaje colaborativo. Cuando formemos grupos o parejas de trabajo, será de tal forma que alumnos mas aventajados en la materia, se mezclen con alumnos con un ritmo más lento de aprendizaje. Con esto fomentaremos la ayuda entre iguales y haremos que sea un trabajador enriquecedor tanto para el alumno que está ayudando como para el que recibe el apoyo del compañero.

Antes de que los alumnos tengan que enfrentarse a problemas, se les presentarán, para cada una de las técnicas que se han definido anteriormente, actividades que les sirvan de entrenamiento de las mismas. Estás actividades serán siempre tales que el alumno, sólo tenga que aplicar lo visto directamente en la clase, si tener que pararse a buscar formas más elaboradas de resolución, como puede pasar en los problemas.

Algunos ejemplos de estas actividades serian:

- **Act.1** Escribe las ecuaciones paramétricas de una recta que:
  a) Pasa por el punto P(2,-3) y tiene como vector director v(-3,5)
  b) Pasa por los puntos A(1,-1) y B (-2,1)

Con esta actividad y otras semejantes, el alumno ejercitará la técnica de encontrar una ecuación concreta de una recta, a partir de unos datos dados, casi siempre, dos puntos, o un punto y un vector.

- **Act.2** Dada la recta

  $y + 1 = 3(x + 1)$

  Halla un punto y un vector de la misma

Con la actividad 2, lo que se busca es que el alumno, una vez asimiladas las técnicas para obtener una expresión de una recta, haga el proceso inverso, es decir, le servirá para afianzar los conocimientos adquiridos.

- **Act.3** Determina las ecuaciones paramétricas, continua y explícita de las rectas que forman un triángulo cuyos vértices son A (-1.-2), B (3,-4), C (1,6)

Nuevamente este tipo de actividades les servirán para afianzamiento de sus conocimientos, ya que añaden una pequeña complejidad, como es el darles los datos, con pequeñas modificaciones de lo que cabría esperar.

- **Act.4** Determina las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas y determina los puntos de corte de las rectas que sean secantes.

  r_1: $3x + y - 1 = 0$ y s_1: $-x + 3y = 0$

  r_2: $x / (-2/3) = (y-3)/(1/2)$ y s_2: $(x+3)/4 = y/-3$

  r_3: $y = -(2/3)x + 1$ y s_3: $2x + 3y + 5 = 0$

En este caso, la actividad es para fortalecer la técnica de encontrar pendientes de las rectas, y de resolución de sistemas.

Una manera interesante que se considera de trabajar estas actividades es haciendo uso de Geogebra y para ello se contemplan dos opciones interesantes. La una es que mientras que se van resolviendo las actividades en la pizarra, una persona, bien sea el profesor o un alumno, irá dibujando los datos y las soluciones en Geogebra para comprobar que las soluciones obtenidas son o no correctas y por qué, y a la vez, hacer fuerte la idea de la necesidad de la geometría analítica. La otra opción de trabajo, es una vez que los alumnos han hecho la actividades, ir al aula de informática, donde cada uno comprobará con su propio ordenador y Geogebra, si las soluciones a las que ha llegado con correctas o no y por qué. Por supuesto, después de esta sesión en el aula de informática, habría que hacer un resumen con todo lo hecho en ese día para asentar lo aprendido.

LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

Una vez que hemos dejado claro que técnicas, tecnologías y problemas queremos trabajar en nuestro aula, se propone una secuencia didáctica, es decir, una organización de como vamos a distribuir lo que se quiere enseñar a los alumnos, en unas horas lectivas del curso.

1ª SESIÓN

Recordatorio oral inicial donde veremos los conocimientos previos de los alumnos. 10’

Presentación de la razón de ser del nuevo objeto matemático. 10’

Actividad introductoria. 30’

2ª SESIÓN

Continuación actividad introductoria. 50’

3ª SESIÓN

Se comenzará trabajando con la técnica vectorial para ver las ecuaciones paramétrica, continua y general de la recta. 40’

Actividades en la pizarra con tiempo para que las intenten en el sitio. 10’

Deberes para casa de afianzamiento de técnicas.

4ª SESIÓN

Continuación de las ecuaciones paramétrica, continua y general pero desde las modificaciones de la técnica. 40’

Actividades de refuerzo sobre lo visto en clase. 10’

Deberes para casa de lo visto en las sesiones. 3ª y 4ª

5ª SESIÓN

Corrección de las actividades del día anterior 10’. Se atienden dudas y se analizan errores.

Se construirán la tecnología de pendiente de una recta. 15’

Tiempo para actividades relacionadas con esta tecnología y sus técnicas. 10’

Comenzaremos con la resolución de problemas de ecuaciones paramétricas continua y general de la recta, es decir, de lo visto el día anterior. 15'

Deberes para casa para hacer suyas las nuevas técnicas.

6ª SESIÓN

Corrección de los ejercicios del día anterior 10'. Se atienden dudas y se analizan errores.

Trabajaremos sobre las tecnologías de ecuación punto – pendiente y explícita de la recta. 15'

Actividades y problemas para comprensión de los nuevos conceptos. 25'

Deberes para casa, esta vez ya con trabajo de técnicas y resolución de problemas.

7ª SESIÓN

Corrección de los ejercicios del día anterior prestando especial anterior a la resolución de problemas 20'. Se atienden dudas y se analizan errores.

Presentación de técnicas y tecnologías para las posiciones relativas de dos rectas. 15'

Actividades y problemas para trabajar los nuevos conceptos. 15'

Deberes para casa ahora ya sólo con problemas para que trabajen las técnicas pero dentro de la resolución de los mismos.

8ª SESIÓN

Corrección de los deberes del día anterior resolviendo dudas y analizando otras posibles soluciones que los alumnos hayan podido encontrar. 20'

Trabajo de problemas en la pizarra de manera dinámica con todos los alumnos aportando ideas en la pizarra, no de trabajo individual. 30'

9ª SESIÓN

Repaso de todo lo visto en el tema para afianzarse de cara al examen. Se les plantean varios ejercicios y problemas para que resuelvan en pequeños grupos. El profesor resolverá las dudas particulares de cada grupo dentro del mismo y a nivel individual si con algún alumno fuera necesario. 50'

10ª SESIÓN

Examen. 50'

11ª SESIÓN

Se les devuelven los exámenes corregidos, y se repasan en la pizarra. El profesor hace un pequeño resumen con lo que se ha fallado más y se les orienta en que deben trabajar más para afianzar los conceptos. Se les entrega una hoja con ejercicios para los que hayan fallado, puedan repasar.

LA EVALUACIÓN

Con lo visto del nuevo objeto matemático en los días correspondientes del curso, se pretende que los alumnos sean capaces de manejar con soltura e interpretar los conceptos que a continuación se enuncian:

- Que conozcan todos los tipos de ecuaciones que existen para representar algebraicamente una recta. (Ejercicio 2)
- Que encuentren la utilidad de poder elegir entre unas expresiones u otras para representar nuevas rectas, dependiendo de los datos de partida o de las soluciones pedidas. (Ejercicio 1)
- Que sepan hallar rectas paralelas y secantes a otras. (Ejercicios 3 y 4))
- Saber hallas las diferentes expresiones de las rectas con unas condiciones dadas. (Ejercicios 1, 4 y 6)
- Saber interpretar gráficas. (Ejercicio 6)
- Que sepan enfrentarse a problemas aparentemente complejos. (Ejercicio 5)

Para comprobar que estos conocimientos han sido adquiridos, se presenta la prueba escrita que al final del tema se les propondrá a los alumnos.

Prueba escrita

Ejercicio 1: Dado el vector $\vec{u}$ (3,2) y el punto A (1,1) escribe la ecuación de la recta de la forma que consideres apropiada, para luego poder hacer un listado con 15 puntos que pertenezcan a esa recta.

Ejercicio 2: Dada la recta r: $3x + 2y = 1$ escríbela con todas las formas de ecuación de la recta que sepas y dime un punto de la misma y su vector director.

Ejercicio 3: Empareja las rectas que sean paralelas entre todas estas:

a. $2x - y + 4 = 0$ b. $y = x - 3$ c. $y = 2x - 1$

d. $x - y + 1 = 0$ e. $y = x/3 - 1$ f. $x - 3y + 4 = 0$

Ejercicio 4: Encuentra la ecuación de la recta que pasa por A (1,3) y es paralela a la recta $2x + y - 1 = 0$.

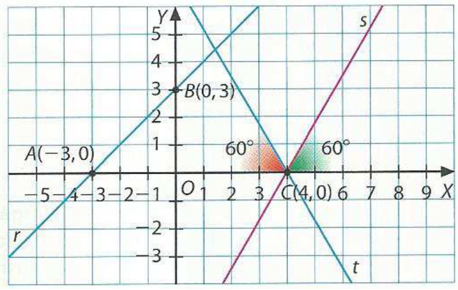
Ejercicio 5: Calcula el valor que debe tener “k” para que las siguientes rectas se corten en el mismo punto.

r_1: $x + y - 2 = 0$

r_2: $2x - 3y + 1 = 0$

r_3: $(k - 4)\cdot x + 2y - 5 = 0$

Ejercicio 6: A la vista de la gráfica, escribe las ecuaciones continua y explícita de la recta r.



Objetivos de la prueba

La relación entre los conceptos que queremos que los alumnos hayan adquirido y la prueba que para ello se ha preparado se muestra a continuación, junto con las respuestas que se espera que los alumnos puedan dar:

Ejercicio 1: Dado el vector $\vec{u}$ (3,2) y el punto A (1,1) escribe la ecuación de la recta de la forma que consideres apropiada, para luego poder hacer un listado con 15 puntos que pertenezcan a esa recta.

Es en este ejercicio en el que se quiere comprobar que los alumnos saben elegir entre las diferentes ecuaciones de la recta para llegar de la manera más cómoda posible a la solución que se les pide.

En este punto, se espera que los alumnos vean que para dar un listado de puntos pertenecientes a una recta, la forma más rápida de hacerlo es a través de las ecuaciones paramétricas de la recta. Los alumnos que tengan claro esto, no tardarán en llegar a la solución mientras que los que no lo hayan comprendido, es de esperar que también den con la solución correcta, pero empleando mucho mas tiempo.

Ejercicio 2: Dada la recta r: 3x + 2y =1 escríbela con todas las formas de ecuación de la recta que sepas y dime un punto de la misma y su vector director

El ejercicio 2, es el que se espera que todos los alumnos hagan bien porque no es nada más que un repaso superficial a todo el tema, es una comprobación de que las ideas básicas están claras. El único problema con el que los alumnos se pueden encontrar es que se les olvide algún tipo de ecuación de la recta, pero no tiene demasiada importancia.

Ejercicio 3: Empareja las rectas que sean paralelas entre todas estas:

a. $2x - y + 4 = 0$	*b.* $y = x - 3$	*c.* $y = 2x - 1$
d. $x - y + 1 = 0$	*e.* $y = x/3 - 1$	*f.* $x - 3y + 4 = 0$

Para comprobar que la definición de pendiente de una recta ha quedado clara, se propone este ejercicio de baja dificultad, donde si se tiene claro como se obtiene la pendiente en una recta dada de forma general, la dificultad estará en los signos a la hora de escribir la ecuación de forma general y a la hora de despejar el parámetro “B” que corresponde a $-v_1$.

Ejercicio 4: Encuentra la ecuación de la recta que pasa por A (1,3) y es paralela a la recta $2x + y - 1 = 0$

Nuevamente tenemos un ejercicio de baja complejidad ya que es una aplicación directa de las técnicas. Se espera que la mayoría de los alumnos lo resuelvan sin dificultad.

Ejercicio 5: Calcula el valor que debe tener “k” para que las siguientes rectas se corten en el mismo punto.

$r_1: x + y - 2 = 0$

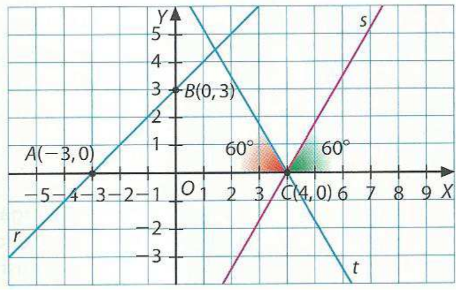
$r_2: 2x - 3y + 1 = 0$

$r_3: (k - 4)\cdot x + 2y - 5 = 0$

En este problema se quiere evaluar la capacidad de razonamiento de los alumnos. Será necesario para resolverlo que se paren a pensar antes de hacer ningún cálculo. Tiene la complejidad de que pese a tener el parámetro “k”, la manera de resolver el problema es ver que basta con resolver el sistema de ecuaciones de las dos primeras rectas y luego pensar que ese punto tiene que satisfacer la ecuación de la recta tercera y será con esa condición con la que obtendremos el parámetro.

Es de esperar que algunos alumnos se queden en la primera parte del problema, es decir, hallen el punto de intersección de las dos primeras, pero que no sepan sustituirlo en la segunda para encontrar “k” Para evitar esto, en clase se trabajará de manera persistente la idea de que un punto pertenece a una recta cuando satisface su ecuación.

Ejercicio 6: A la vista de la gráfica, escribe las ecuaciones continua y explícita de la recta r.



Lo que en esta parte de la prueba se está evaluando es saber reconocer los datos dados mediante gráficas y pasar de un tipo de ecuación a otra.

La mayoría de los alumnos resolverán el ejercicio sin dificultad, tanto el hecho de extraer los datos de la representación gráfica como el de llegar a unas expresiones de la recta pasando de otras. La única dificultad que quizá pueda surgir es al ver en la gráfica más rectas de las que se les piden.

Puntuación de la prueba

Para finalizar, la puntuación que vamos a aplicar a cada uno de los ejercicios será proporcional a su dificultad y de manera tal que sea consecuente con las pretensiones de la misma, es decir, la puntuación estará repartida para que los alumnos que no lleguen a los mínimos conocimientos no superen el 5, los que tienen clara una base pero no la superan por mucho, se muevan entre el 5 y el 6, los alumnos brillantes ronden el 9 y el 10 y el resto que estén entre los unos y los otros, pues también puntuaciones intermedias.

Con todo esto, la puntuación de la prueba se repartirá de la manera siguiente:

Ejercicio 1: 2 puntos

- Plantear bien la ecuación de la recta y que además sea la paramétrica - 1 punto.
- Plantear bien la ecuación pero que no sea la paramétrica – 0.8 puntos.
- Por cada 3 puntos a los que se llegue correctamente, es decir, sin errores de cálculo, se otorgarán 0.2 puntos.

Ejercicio 2: 2 puntos

- Obtener bien el vector direccional de la recta – 0.5 puntos
- Obtener bien un punto que pertenezca a la recta – 0.5 puntos
- Se esperan 5 tipos de ecuación de la recta además de la dada, por tanto, se conseguirán 0.2 puntos por cada expresión correcta.

Ejercicio 3: 1 punto

- Por cada pareja correcta son 0.33 puntos.

Ejercicio 4: 2 punto

- Plantear bien la idea principal de como resolver el problema – 1 punto
- Obtener la pendiente o el vector direccional correctos para la recta buscada – 0.5 puntos
- Obtener la recta correctamente – 0.5 puntos

Ejercicio 5: 2 puntos

- Plantear correctamente las condiciones para obtener la solución – 1 punto
- Obtener correctamente el punto en el que se tienen que cortar las rectas – 0.5 puntos
- Obtener el valor exacto del parámetro k – 0.5 puntos.

Ejercicio 6: 1 punto

- Tener claro el planteamiento para resolver el problema aunque existan errores de cálculo – 0.5 puntos
- Obtener bien la ecuación de la recta – 0.5 puntos.

CONCLUSIONES

Con el desarrollo de este trabajo fin de master, se ha podido profundizar en la manera de enfrentarse a la presentación de un nuevo objeto matemático ante los alumnos. Con el mismo se ha podido comprobar la dificultad de preparar un temario, ya que, pese a lo que se pueda pensar, no basta con abrir un libro de texto y leerlo ante los alumnos para dar un tema en clase. Hay que analizar que es lo que realmente queremos que los chicos y chicas aprendan, cuales son los conceptos más importantes con los que se tienen que quedar y por tanto, cual es la mejor manera de explicarlo para conseguirlo. Muchas veces lo que el libro de texto muestra, no coincide con lo que el profesor considera la manera más apropiada, y es por esto por lo que hay que pararse a reflexionar sobre cuales son los conocimientos que hasta ahora tienen el alumnado, hasta donde queremos que lleguen, cual será la manera que les genere mayor motivación para interesarse por el nuevo tema, como ven desde su mentalidad y su desarrollo intelectual lo que les estamos explicando… todo diferentes puntos de vista que serán los que, bien interpretados, harán que consigamos preparar unas clases adecuadas a los alumnos y que por tanto nos acerquemos a nuestro principal objetivo que es, hacer que los alumnos conviertan en conocimientos los nuevos saberes.

BIBLIOGRAFÍA

Alsina Catalá, C., Fortuny Aymemí, J.M., Pérez Gómez, R. (1997) ¿Por qué Geometría? Propuestas Didácticas para la ESO. Ed. Síntesis.

Del Rio Sánchez, J. (1994): Lugares Geométricos. Cónicas. Ed Síntesis S.A.

Sánchez González, J.L., Vera López, J. (2003) Matemáticas 4º de ESO. Oxford Educación.

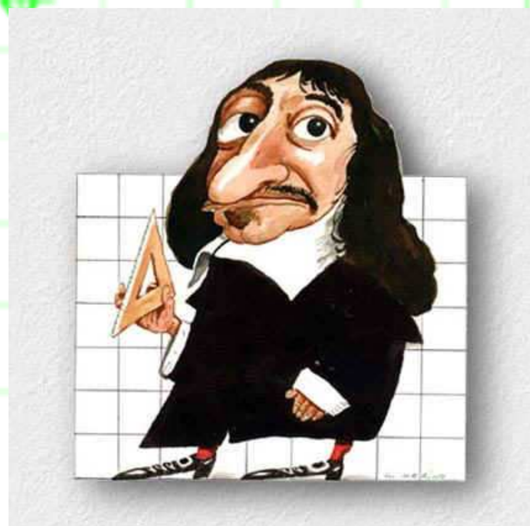
Departamento de matemáticas de Santillana (2003) Matemáticas Opción A. Santillana Educación S.L.

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I. Martínez Alonso, M., Oliveira González, J.M. (2008) Matemáticas 4 Opción A. grupo Anaya S.A.

ANEXO 1

LOS COMIENZOS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

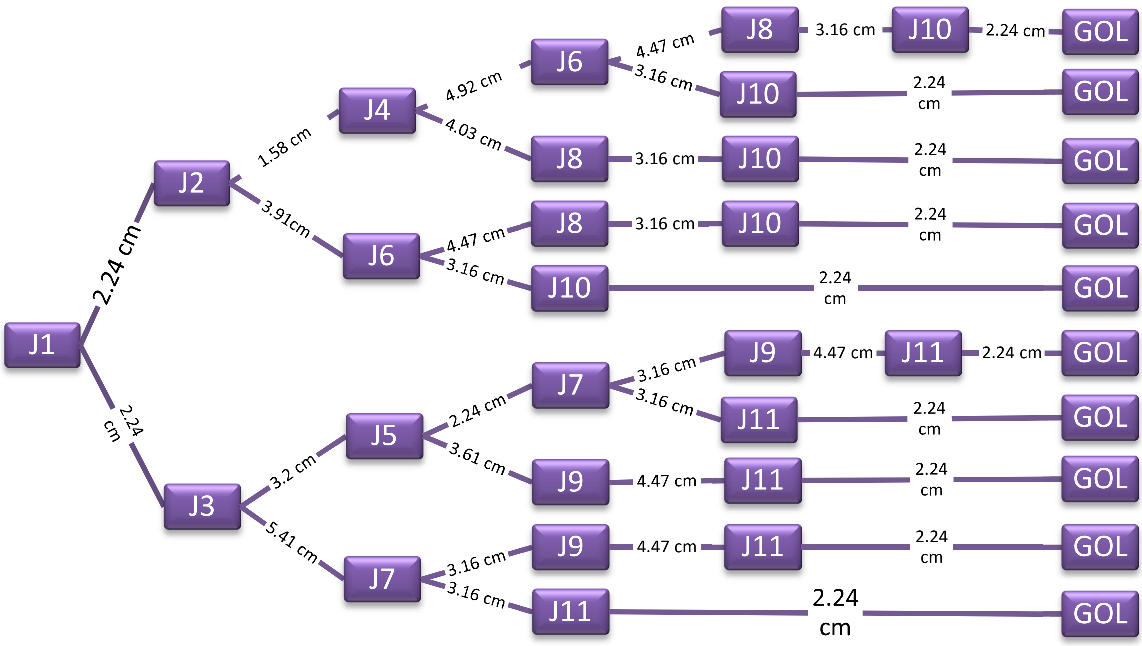
"A comienzos del s. XVII se fraguan las primeras ideas sobre un nuevo método para enfocar los problemas geométricos que, dos siglos después, recibirá el nombre de geometría analítica. Sus principales artífices, René Descartes y Pierre Fermat, no fueron precisamente matemáticos profesionales: el primero fue un filósofo de amplios conocimientos científicos y el segundo un abogado y parlamentario de Toulousse que dedicó sus ratos libres a leer y comentar los tratados de los matemáticos griegos. Expusieron estas ideas en sendas obras, La Geometría y Ad locos planos et solidos isagoge, que marcan el comienzo de una gran transformación. Sin embargo, según Collete (1985;II,27), "ni Descartes ni Fermat inventaron el uso de las coordenadas o de los métodos analíticos, y ni uno ni otro fueron los primeros en aplicar el álgebra a la geometría o en representar gráficamente variables. La contribución independiente de cada uno reposa esencialmente en el reconocimiento de que una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana, con respecto a un sistema de coordenadas. Además, si se añaden a esto los métodos algorítmicos desarrollados por cada uno para unir estrechamente la ecuación y la curva correspondiente, todo ello bastará para atribuirles el mérito de ser los fundadores de la geometría analítica"" (Del Rio Sánchez, J. (1994): Lugares Geométricos. Cónicas. Ed Síntesis S.A)



ANEXO 2

SOLUCION A LA ACTIVIDAD DEL ENTRENAMIENTO DE FUTBOL

Ante la primera parte de la actividad, los alumnos han podido plantear hasta 10 opciones distintas de recorridos, de las cuales hay que obtener la más larga y la más corta. Las diferentes posibilidades vienen representadas por el siguiente esquema:

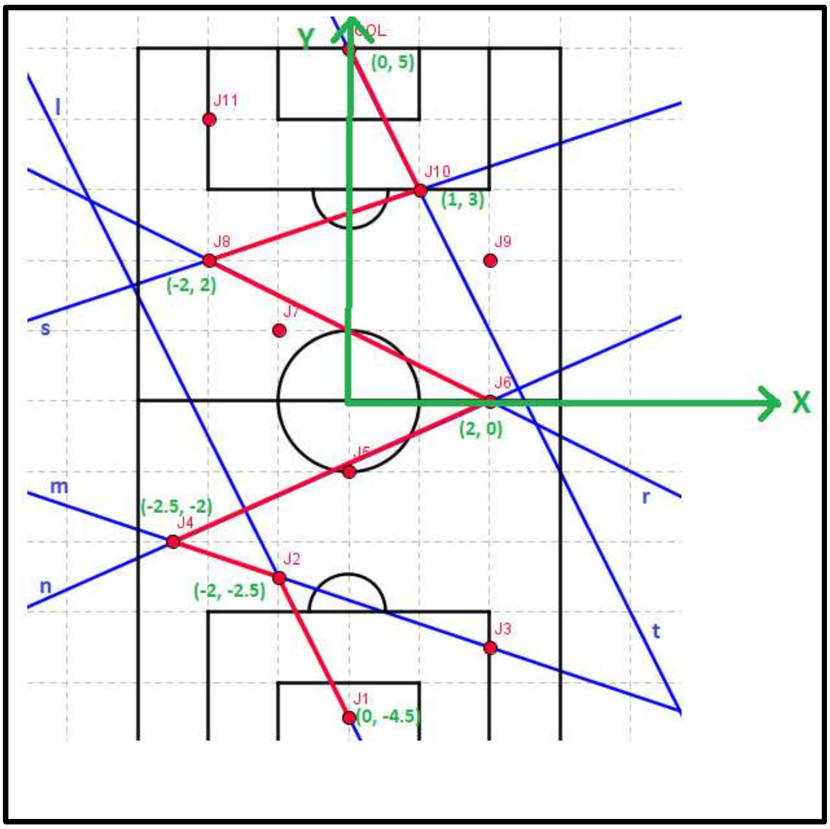


Si sumamos las medidas que hemos obtenido con Geogebra en cada opción, llegamos a la solución de que el recorrido que sigue la secuencia J1 - J2 – J4 – J6 – J8- J10 – GOL es el más largo, y el que sigue el orden J1 – J2 – J6 - J10 – GOL, es el recorrido de balón más corto.

Los alumnos, en vez de obtener las medidas de una forma tan exacta, lo harán con las tiras que les hemos dado a modo de regla sin numerar, cada uno con la forma más útil que se le haya ocurrido.

Tras este análisis, ya estamos en condiciones de pasar a la segunda parte de la actividad.

Como se nos indicaba en el enunciado del ejercicio, tendríamos que dibujar el recorrido más largo sobre la plantilla que tiene la cuadrícula y después de esto, seguir los apartados que se nos plantean.



Como apreciamos en la imagen anterior, lo primero de todo hemos dibujado los ejes cartesianos que se nos pedían en el centro del campo, y les hemos dado unas coordenadas a cada jugador, que a partir de ahora, serán puntos del plano.

Luego, hemos indicado el camino que anteriormente hemos definido como el más largo que podemos hacer con el balón, según las condiciones dadas. A continuación, se han dibujado las rectas que contienen a cada uno de los segmentos que indican los pases de balón entre los jugadores, y les hemos dado nombres. Será interesante en este momento, aclarar las diferencias entre recta y segmento.

Por último, hemos comprobado, sólo mediante una inspección visual, que aparentemente, la recta que hemos llamado l, es paralela a la denominada recta t.