



**Universidad**  
Zaragoza

**Trabajo de Fin de Grado:  
Más allá de Teoría Cuántica de Campos  
Relativista local**

Grado en Física, 2017/2018

Autor:  
David Martínez Crespo

Director:  
Jose Luis Cortés Azcoiti

Codirector:  
José Javier Relancio Martínez





## **Agradecimientos**

Me gustaría agradecer especialmente a Jose Luis Cortés, Javier Relancio y José Manuel Carmona su dedicación a este trabajo durante el curso, sin su entrega no hubiese sido posible. Muchas gracias también a mis abuelos que trabajaron toda su vida para que sus nietos pudieran ir a la universidad.



## Resumen

Se presenta una introducción a la teoría cuántica de campos en espacio-tiempos no conmutativos. Primero se da una justificación a por qué ir más allá de la teoría cuántica de campos relativista, presentando la gravedad como una teoría cuántica de campos y discutiendo el origen de las divergencias ultravioletas. Después se explora el concepto de una teoría no local a través de la no conmutatividad del espacio-tiempo. Se discute el caso de la no conmutatividad canónica mediante el procedimiento de la cuantización de Weyl y se da una descripción fenomenológica de la teoría perturbativa para una teoría escalar mostrando el fenómeno de la mezcla infrarrojo ultravioleta. Se discute la invariancia bajo transformaciones de Poincaré de dicha teoría y se comienza a estudiar el espacio-tiempo  $\kappa$ -Minkowski por analogía al estudio de la invariancia del caso canónico.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teorías mediadas por bosones sin masa</b>	<b>1</b>
2.1. Partículas de spin 1 . . . . .	1
2.2. Partículas de spin 2 . . . . .	4
<b>3. Divergencias ultravioletas en teoría cuántica de campos</b>	<b>6</b>
3.1. Teoría $\phi^4$ . . . . .	7
3.2. Gravedad Cuántica . . . . .	10
3.3. Localidad de las interacciones . . . . .	10
<b>4. Espacio-tiempo no conmutativo canónico</b>	<b>11</b>
4.1. Cuantización de Weyl . . . . .	11
4.2. Producto estrella . . . . .	13
4.3. Teoría perturbativa para la teoría $\phi^n$ . . . . .	14
4.4. Cálculos a un loop para la teoría $\phi^4$ . . . . .	16
4.5. Origen de la mezcla IR-UV . . . . .	17
<b>5. Invariancia bajo transformaciones de Poincaré del espacio-tiempo no conmutativo canónico</b>	<b>18</b>
5.1. Preliminares: ¿por qué álgebras de Hopf? . . . . .	19
5.1.1. Álgebras de Hopf . . . . .	19
5.1.2. Envolvente universal de un álgebra de Lie . . . . .	20
5.2. Álgebra de Poincaré twisteadas . . . . .	20
<b>6. El espacio <math>\kappa</math>-Minkowski</b>	<b>22</b>
6.1. Cuantización de Weyl . . . . .	22
6.2. Invariancia de $\kappa$ -Minkowski . . . . .	23
6.3. $\kappa$ -Poincaré . . . . .	24

<b>7. Conclusiones</b>	<b>25</b>
<b>A. Notación y unidades</b>	<b>26</b>
<b>B. Aparición de <i>ghost</i> con derivadas de orden superior a 2</b>	<b>26</b>
<b>C. Estructuras algebraicas: álgebra de Lie, de Hopf y envolvente universal</b>	<b>29</b>
C.1. Álgebras de Hopf . . . . .	29
C.1.1. Álgebra . . . . .	29
C.1.2. Coálgebra . . . . .	29
C.1.3. Biálgebra . . . . .	29
C.1.4. Álgebra de Hopf . . . . .	30
C.2. Álgebra de Lie . . . . .	31
C.2.1. Envolvente universal de un álgebra de Lie . . . . .	31
<b>D. Unicidad del producto estrella y del <i>twist</i></b>	<b>31</b>
<b>E. Coproductos de los generadores de <math>igl(4)</math> tras el <i>twist</i> abeliano</b>	<b>32</b>
<b>Referencias</b>	<b>34</b>

## 1. Introducción

La teoría de la Relatividad General puede ser tratada como una teoría cuántica de campos. De hecho, el lagrangiano de la teoría puede ser derivado de manera perturbativa como el único compatible con la unitariedad de una teoría mediada por una partícula sin masa de spin 2. La teoría, sin embargo, no es renormalizable, lo que implica que, aun siendo consistente con los principios de la teoría cuántica de campos, no se pueden calcular amplitudes de dispersión con ella y, por tanto, no se pueden realizar predicciones. De este problema surge la pregunta de si es posible formular una teoría cuántica de campos en la que no sea necesaria la renormalización. Para ello, hay que comprender de dónde surgen las divergencias ultravioletas en una teoría cuántica de campos, ya que son la causa de que sea necesario dicho procedimiento. En este trabajo se observa que se puede ver el origen de estas divergencias en la localidad de la teoría; el hecho de poder evaluar los campos en un punto concreto del espacio-tiempo hace que las integrales involucradas en los cálculos de las secciones de dispersión diverjan.

Con esta observación surge la idea de explorar espacio-tiempos en los que se pierda la noción de localidad. Igual que sucede con el espacio de fases en el paso de la mecánica clásica a la cuántica, la no commutatividad es una propiedad que cumple este propósito. En este trabajo se estudian dos tipos de no commutatividades para el espacio-tiempo. La primera es la del espacio-tiempo no commutativo canónico, que presenta el caso más simple, pero en el que se puede llevar a cabo la formulación de la teoría perturbativa de los diagramas de Feynman y una discusión fenomenológica.

La segunda no comutatividad presentada en este trabajo es  $\kappa$ -Minkowski, un nuevo ejemplo de espacio-tiempo que presenta un nuevo desafío. En este espacio la formulación de la teoría se hace más complicada, haciendo más difícil la discusión fenomenológica. Sin embargo, en este marco se estudian aspectos como la invariancia bajo transformaciones de Poincaré y cómo se debe generalizar el concepto de grupo de Poincaré para adaptarlo al marco de una teoría no commutativa, así como las ambigüedades de dicha generalización.

## 2. Teorías mediadas por bosones sin masa

En esta sección vamos a construir los lagrangianos invariantes bajo transformaciones de Lorentz más generales posibles que describan partículas interactuantes de spin entero sin masa, asumiendo la única condición de no permitir estados de norma negativa, que denominamos *ghosts*, ya que la norma de un estado se interpreta como una probabilidad. El objetivo de esta sección es mostrar que el lagrangiano de la Relatividad General puede ser derivado como el único que describe partículas interactuantes sin masa y de spin 2. Sugeriremos en esta sección la referencia [1].

### 2.1. Partículas de spin 1

Para ilustrar el procedimiento, empezamos con el caso de spin 1. Una partícula de spin 1 tiene 3 estados de polarización, luego, para describirla, tomaremos un campo cuadrivectorial visto como una representación  $4 = 3 \oplus 1$  del grupo de Lorentz. Hay que fijar un grado de libertad que corresponde al de la representación de spin 0. Denotaremos  $\mathbf{A}(x)$  a dicho campo vectorial.

El lagrangiano describe las mismas ecuaciones en cualquier sistema de referencia inercial, cuyas transformaciones entre sistemas vienen dadas por el grupo de Poincaré. Esto es equivalente a decir que el lagrangiano es un escalar bajo el grupo de Poincaré. El lagrangiano más general

possible depende de los cuadrvectores ( $A^\mu$ ) y ( $\partial^\mu$ ); en particular, debemos buscar todos los escalares posibles a partir de estos dos cuadrvectores. Antes de continuar, hay que remarcar que un término de orden superior a 2 en  $A^\mu$  se interpretará como una interacción. Añadimos además la condición de que las derivadas no pueden superar el segundo orden, ya que, como mostraremos más adelante, derivadas de orden superior a dos permitirían estados de norma negativa. Con estas restricciones obtenemos el lagrangiano

$$\mathcal{L} = aA_\mu \square A^\mu + bA_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \quad (2.1)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $\frac{1}{2}m^2$  son constantes reales cualesquiera. Sabemos que este lagrangiano describirá en general partículas con 4 estados de polarización.

Para continuar, notemos que cualquier campo vectorial puede descomponerse de la forma

$$A^\mu(x) = A^{T\mu} + \partial^\mu \pi(x), \quad (2.2)$$

con un grado de libertad en la elección de  $\pi(x)$ , ya que transformando

$$\begin{aligned} A^{T\mu} &\rightarrow A^{T\mu} + \partial^\mu \alpha(x), \\ \pi &\rightarrow \pi - \alpha(x), \end{aligned} \quad (2.3)$$

la descomposición (2.2) queda invariante. El campo  $\pi$  es un campo escalar, de spin 0, que como habíamos adelantado, no debe tener significado físico en nuestra discusión sobre partículas de spin 1. En este sentido, elegir un  $\alpha(x)$  concreto es fijar el gauge sobre  $A^{T\mu}$ . De ahora en adelante utilizaremos el gauge de Lorentz  $\partial_\mu A^{T\mu} = 0$ . Para ello, en una descomposición genérica (2.2) basta elegir  $\alpha$  cumpliendo  $\partial_\mu A^{T\mu} = -\square^2 \alpha$ . Llamaremos modo transversal a  $A^{T\mu}$  y modo longitudinal a  $\pi$  en el gauge de Lorentz. Utilizando esta descomposición podemos reescribir el lagrangiano (2.1) como

$$\mathcal{L} = aA^T_\mu \square A^{T\mu} + \frac{1}{2}m^2 A^T_\mu A^{T\mu} - (a+b)\pi \square^2 \pi - \frac{1}{2}m^2 \pi \square \pi. \quad (2.4)$$

El lagrangiano anterior (2.4) es equivalente a (2.1) porque ambos dan lugar a la misma acción.

Estudiaremos ahora la parte de la acción correspondiente al campo escalar  $\pi(x)$ . El propagador de esta función es

$$\Pi_\pi(k) = -\frac{1}{2(a+b)k^4 - m^2 k^2} = \frac{1}{m^2} \left[ \frac{1}{k^2} - \frac{a+b}{(a+b)k^2 - \frac{1}{2}m^2} \right], \quad (2.5)$$

que representa dos partículas, una de las cuales presenta estados de norma negativa o *ghost*, para  $a+b \neq 0$ , como se expone en el [Apéndice B](#). En general, cualquier término de más de dos derivadas da lugar a estados de probabilidad negativa por el mismo argumento aquí expuesto. Este hecho nos fuerza a tomar  $a = -b$ . Vemos que el modo longitudinal solo aparece en el término de masa y es un término cinético proporcional a  $m^2$ .

En particular, si  $a = \frac{1}{2}$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_\mu \square A^\mu - \frac{1}{2}A_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \quad (2.6)$$

con  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ . Este lagrangiano es formalmente igual al de la QED<sup>1</sup> con un término de masa, en ausencia de interacción.

---

<sup>1</sup>Electrodinámica Cuántica.

Para el límite sin masa tomaremos

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

El modo longitudinal no aparece, luego, podemos deducir que la elección de cualquier modo longitudinal dejará invariante el lagrangiano. Así, este es invariante bajo transformaciones del tipo

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu\pi. \quad (2.8)$$

En presencia de interacción podría aparecer un término cinético en el modo longitudinal, como en (2.4). No obstante, esto daría lugar a interacciones infinitamente grandes. Por ejemplo, una interacción podría ser

$$\mathcal{L}_\pi = Z\pi\Box\pi + \lambda\pi^3. \quad (2.9)$$

Podemos tomar cualquier normalización para  $\pi$  sin alterar el término cinético del lagrangiano, de manera que podemos hacer  $\pi_c = \sqrt{Z}\pi$  y reescribir

$$\mathcal{L}_\pi = \pi_c\Box\pi_c + \frac{\lambda}{Z^{\frac{2}{3}}}\pi_c^3. \quad (2.10)$$

Para  $Z \rightarrow 0$ , este término da lugar a interacciones infinitas, luego, para evitar esta patología, debemos garantizar que el término cinético del modo longitudinal  $\pi\Box\pi$  no aparezca en el lagrangiano. Para ello hay que asegurar que bajo transformaciones del tipo (2.8) el lagrangiano total se mantiene invariante. Esto equivale a decir que  $A^\mu$  debe acoplarse a una cuadricorriente conservada  $J^\mu$  con  $\partial_\mu J^\mu = 0$ .

Construyamos ahora las interacciones con un campo escalar  $\phi$ , que viene descrito por el lagrangiano  $\mathcal{L}_\phi$ . La interacción más simple que podemos introducir es  $\mathcal{L}_{\text{int}} = J^\mu A_\mu$ , donde  $J^\mu$  es una cuadricorriente formada a partir  $\phi$ . Así el lagrangiano total queda

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (2.11)$$

La cuadricorriente más simple que podemos construir es  $J_\mu = -i(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*)$ . Esta interacción no debe acoplarse al término longitudinal de ninguna manera, ya que este carece de sentido físico y el lagrangiano libre es invariante bajo una elección arbitraria de  $\pi$ . Esto equivale a decir que la interacción debe ser invariante bajo transformaciones (2.8), que sobre el lagrangiano con interacción que hemos descrito transforma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &\rightarrow -iA^\mu(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*) - i\pi(\phi\Box\phi^* - \phi^*\Box\phi), \\ \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} - i\pi(\phi\Box\phi^* - \phi^*\Box\phi). \end{aligned} \quad (2.12)$$

El término extra que ha surgido debe ser reabsorbido. Esto puede ser llevado a cabo transformando el campo escalar  $\phi$  en función de  $\pi$ . Para hallar esta transformación procedemos perturbativamente. Hemos de tener además en cuenta que al transformar  $\phi$  también cambiará  $\mathcal{L}_\phi$ .

Buscando una transformación lineal en  $\pi$ , hacemos  $\phi \rightarrow \phi - i\pi$ . Teniendo en cuenta el término cinético  $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^*$  de  $\mathcal{L}_\phi$ ,

$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* \rightarrow \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + i\pi(\phi\Box\phi^* - \phi^*\Box\phi) - (\pi\phi^*)\Box(\pi\phi). \quad (2.13)$$

La transformación propuesta no deja términos lineales en  $\pi$  al transformar

$$\mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_\phi|_{\text{cin}} = -iA^\mu(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*) + \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^*. \quad (2.14)$$

Podemos continuar con el segundo orden de la transformación en  $\phi$ . Los términos cuadráticos en  $\pi$  que aparecen pueden cancelarse con la transformación  $\phi \rightarrow \phi - i\pi - \frac{1}{2}\pi^2$ , pero ahora es necesario añadir un término adicional al lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - iA^\mu(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*) + \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + A^\mu A_\mu\phi^*\phi, \quad (2.15)$$

que queda invariante hasta términos cúbicos. No hace falta que calculemos más órdenes si nos damos cuenta de que este lagrangiano es exactamente invariante bajo transformaciones del tipo

$$\begin{cases} A^\mu & \rightarrow & A^\mu + \partial^\mu\pi, \\ \phi & \rightarrow & e^{-i\pi}\phi. \end{cases} \quad (2.16)$$

Este es el lagrangiano que describe la interacción del campo electromagnético con un campo escalar.

## 2.2. Partículas de spin 2

El procedimiento anterior se puede repetir con partículas de spin 2. Estas partículas tienen 5 estados de polarización y se pueden describir con tensores simétricos  $h_{\mu\nu}$  con las correspondientes restricciones. Podemos extender la descomposición (2.2) para un tensor de orden 2 de la siguiente manera

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^T + \partial_\mu\pi_\nu + \partial_\nu\pi_\mu, \quad (2.17)$$

eliendo el gauge  $\partial^\mu h_{\mu\nu}^T = 0$ . El tensor simétrico tiene 10 parámetros libres, luego debemos fijar 5. Podemos representar 3 estados de polarización en  $\pi_\mu$  como en el caso de spin 1. Este campo, a su vez, puede descomponerse en

$$\pi = \pi_\mu^T + \partial_\mu\pi^L, \quad (2.18)$$

con  $\partial^\mu\pi_\mu^T = 0$ . Imponiendo las condiciones

$$\begin{aligned} \partial^\mu h_{\mu\nu}^T &= 0 && \text{que fija 4 parámetros,} \\ \partial^\mu\pi_\mu^T &= 0 && \text{que fija 1 parámetro,} \end{aligned}$$

quedan los 5 estados de polarización deseados. Escribamos ahora el lagrangiano de orden 2 más general posible con  $h_{\mu\nu}$  y  $\partial_\mu$ , como en el caso anterior con términos, como máximo cuadráticos, tanto en  $h$  como en  $\partial$ .

$$\mathcal{L} = \sum_i h_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma h_{\lambda\xi}C_i^{((\mu\nu)|(\rho\sigma)|(\lambda\xi))} + \sum_j B_j^{(\mu\nu)(\lambda\xi)}h_{\mu\nu}h_{\lambda\xi}, \quad (2.19)$$

donde  $C_i^{((\mu\nu)|(\rho\sigma)|(\lambda\xi))}$  y  $B_j^{(\mu\nu)(\lambda\xi)}$  son base de todos los posibles tensores simétricos en los índices indicados.

Podemos reescribir este lagrangino como

$$\mathcal{L} = a h_{\mu\nu}\square h^{\mu\nu} + b h_\mu^\nu\partial^\mu\partial_\alpha h_\nu^\alpha + c h\square h + d h\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2(x h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + y h^2), \quad (2.20)$$

con  $h = h_\mu^\mu$ . Analicemos el término de masa con las descomposiciones (2.17) y (2.18):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_m &= \frac{1}{2}m^2 \left( x \left( h_{\mu\nu}^T h^{\mu\nu T} + 2((\partial_\mu \pi^\mu)^2 - \pi_\mu \square \pi^\mu) \right) + y h^2 \right) \\
&= \frac{1}{2}m^2 \left[ x \left( h_{\mu\nu}^T h^{\mu\nu T} + 2(2\pi^L \square^2 \pi^L - \pi_\mu^T \square \pi^\mu) \right) + y \left( h^{T2} + 4\square \pi^L + 4\pi^L \square^2 \pi^L \right) \right] \\
&= 2m^2(x+y)\pi^L \square^2 \pi^L + \dots
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Para evitar derivadas de orden superior a 2 elegimos  $x = -y$ . Se puede repetir el análisis con el término restante y elegir las constantes apropiadas para que el lagrangiano quede

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}h_{\mu\nu}\square h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_\mu^\nu \partial^\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha + \frac{1}{2}h\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \frac{1}{4}h\square h + \frac{1}{4}m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2). \tag{2.22}$$

En el límite sin masa,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}h_{\mu\nu}\square h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_\mu^\nu \partial^\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha + \frac{1}{2}h\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \frac{1}{4}h\square h. \tag{2.23}$$

Como en el caso de spin 1, el modo  $\pi^\mu$  carece de sentido físico. Debemos evitar, por tanto, la aparición del campo  $\pi^\mu$  en las interacciones al realizar transformaciones

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \pi_\nu + \partial_\nu \pi_\mu. \tag{2.24}$$

Esto se consigue con interacciones del tipo  $\mathcal{L}_{int} = h^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ , donde  $T_{\mu\nu}$  es un tensor simétrico que cumple  $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ . La interacción más simple que podemos introducir con un campo escalar es

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}h\phi, \tag{2.25}$$

que bajo transformaciones (2.24) queda  $\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1 + \partial_\mu \pi^\mu \phi$ . Como en el caso anterior, buscaremos eliminar los términos en  $\pi$  orden a orden, hallando una transformación de  $\pi$  y añadiendo términos al lagrangiano; además en este caso nos veremos forzados a añadir términos a la transformación (2.24).

Podemos eliminar el término cuadrático en dos campos modificando el lagrangiano  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \phi$  y transformando  $\phi \rightarrow \phi + \pi^\mu \partial_\mu \phi$ ; el lagrangiano transforma con  $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}h\pi^\mu \partial_\mu \phi + \pi^\nu \partial_\nu \phi \partial_\mu \pi^\mu$ .

Para eliminar el término  $\frac{1}{2}h\partial_\mu \pi^\mu \phi$  podemos ver  $\pi^\mu$  como un desplazamiento infinitesimal del argumento  $\phi$  y por tanto realizamos un desplazamiento infinitesimal sobre el argumento  $h_{\mu\nu}$ ,  $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \pi_\nu + \partial_\nu \pi_\mu + \pi_\alpha \partial^\alpha h_{\mu\nu}$ .

Continuando la sucesión, si añadimos  $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 + \frac{1}{8}h^2\phi$ , bajo transformaciones (2.8) y la transformación de  $h^{\mu\nu}$  antes descrita

$$\mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3 + (\pi^\nu \partial_\nu \phi)(\partial_\mu \pi^\mu) + (\partial_\nu \pi^\nu)(\partial_\mu \pi^\mu)\phi + O(4), \tag{2.26}$$

donde  $O(4)$  son términos en 4 o más campos, los términos lineales en  $\pi$  han desaparecido para los productos de tres o menos campos. Como estamos realizando una transformación infinitesimal en  $\pi$ , los términos lineales en este factor no deben aparecer en la expansión de  $\mathcal{L}_{int}$ , mientras que los términos cuadráticos o de orden superior son resultado de no considerar la transformación completa en función de  $\pi$ .

Para el caso de spin 1 buscamos transformaciones en el lagrangiano y en el campo  $\phi$  que anulan los términos de orden 1 en  $\pi$ , cosa que conseguimos en el paso (2.14); aquí, sin embargo,

entre los términos en 4 o más campos sigue habiendo términos lineales en  $\pi$  (o sus derivadas) y nos vemos obligados a considerar una transformación

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \pi_\nu + \partial_\nu \pi_\mu + \pi_\alpha \partial^\alpha h_{\mu\nu} + (\partial_\mu \pi^\alpha) h_{\alpha\nu} + (\partial_\nu \pi^\alpha) h_{\mu\alpha}. \quad (2.27)$$

Continuando con la expansión del lagrangiano, comprobamos que podemos anular los términos lineales en  $\pi$  añadiendo infinitos términos de manera que la interacción final se puede expresar como [1]

$$\mathcal{L}_{int} = \sqrt{-\det \left( \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{M} h_{\mu\nu} \right)} \phi, \quad (2.28)$$

siendo  $M$  una constante con dimensiones de masa para hacer que  $h_{\mu\nu}$  tenga dimensiones de masa. No necesitamos continuar con la transformación a segundo orden si notamos que este lagrangiano es invariante a todo orden en  $\pi$  para transformaciones

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi(x^\mu + \pi^\mu), \\ h_{\mu\nu} &\rightarrow (\eta_{\alpha\mu} + \partial_\alpha \pi_\mu)(\eta_{\beta\nu} + \partial_\beta \pi_\nu) \left[ \eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}(x^\xi + \pi^\xi) \right] - \eta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde los cambios de coordenadas en el argumento de  $\phi$  y  $h_{\mu\nu}$  se entienden como la expansión en serie de Taylor. Para  $h_{\mu\nu}$  esta es la ley de transformación de tensores bajo cambios generales de coordenadas.

Como hemos modificado la transformación de  $h_{\mu\nu}$  hemos de modificar el lagrangiano de la partícula libre (2.23) para que sea invariante bajo la transformación (2.29). Así, el término cinético es

$$\mathcal{L}_{cin} = \sqrt{-\det \left( \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{M} h_{\mu\nu} \right)} R \left[ \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{M} h_{\mu\nu} \right], \quad (2.30)$$

donde  $R$  es el escalar de Ricci. Si hacemos  $M = M_{Pl}$  (la escala de Planck) hemos deducido el lagrangiano de la relatividad general, siendo este el único lagrangiano posible que permite una interacción mediada por una partícula sin masa de spin 2 que no dé lugar a *ghosts*.

Una teoría de gravedad cuántica entiende la relatividad general de esta manera: la interacción gravitatoria es una teoría cuántica de campos mediada por una partícula sin masa de spin 2, el gravitón. A pesar de haber obtenido de manera natural este lagrangiano como consecuencia de los principios de la teoría cuántica de campos, existen problemas a la hora de interpretar los resultados de esta teoría. En la sección siguiente mostraremos el origen de estos problemas.

### 3. Divergencias ultravioletas en teoría cuántica de campos

El problema al tratar la gravedad como una teoría cuántica surge al tratar de renormalizar la teoría. En las teorías cuánticas de campos, al calcular las amplitudes de probabilidad de transición entre estados, surgen cantidades infinitas que deben ser reabsorbidas para obtener cantidades finitas y coherentes. En esta sección se busca presentar con un ejemplo sencillo el tratamiento de estos infinitos, conocidos como divergencias ultravioletas, mediante la renormalización. Se expondrá también el por qué de la imposibilidad de aplicar este procedimiento a la teoría de la gravedad cuántica derivada en la sección anterior.

### 3.1. Teoría $\phi^4$

Como ejemplo tomaremos la teoría  $\phi^4$ . Esta teoría describe un campo escalar  $\phi$  cuya acción es

$$S_{(4)}[\phi] = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{m_0^2}{2} \phi(x)^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi(x)^4 \right]. \quad (3.1)$$

Se puede describir entonces por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{m_0^2}{2} \phi(x)^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi(x)^4. \quad (3.2)$$

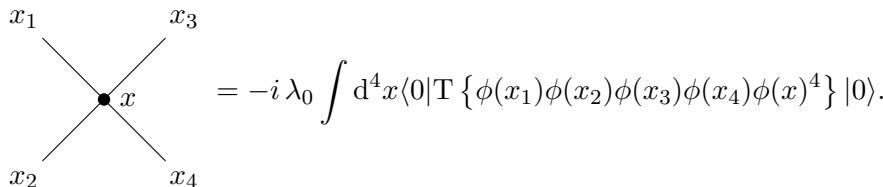
Al tratar esta teoría, los campos  $\phi(x)$  son operadores que crean y destruyen partículas sobre el vacío  $|0\rangle$ . Calculamos los elementos de matriz de  $S$  que representa la amplitud de transición  $\langle p_1, p_2, \dots, p_n, t_f | k_1, k_2, \dots, k_m, t_i \rangle$ , donde los estados están etiquetados por los momentos iniciales y finales. Vamos a tratar el término de interacción como una perturbación

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda_0}{4!} \phi(x)^4 \rightarrow \mathcal{H}_{int} = \frac{\lambda_0}{4!} \phi(x)^4. \quad (3.3)$$

Gracias a la fórmula LSZ (Lehmann-Symanzik-Zimmermann) podemos relacionar estas amplitudes con los valores esperados en el vacío de

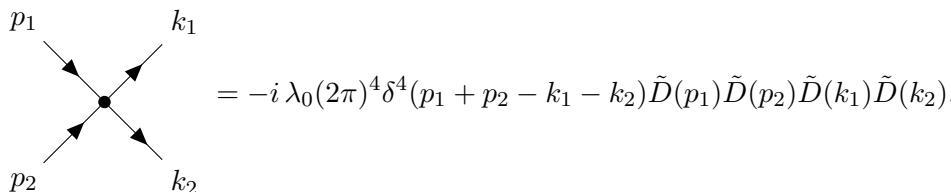
$$\langle 0 | T \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_m) \phi(y_1) \dots \phi(y_n) \exp \left[ -i \int d^4x H_{int}(x) \right] \right\} | 0 \rangle, \quad (3.4)$$

donde  $T$  es el operador de ordenación temporal. Tratar perturbativamente este problema equivale a desarrollar la exponencial término a término. Para cada término podemos asociar un diagrama de Feynman; por ejemplo, un diagrama en un proceso con un solo vértice y cuatro líneas externas equivale a



$$= -i \lambda_0 \int d^4x \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \phi(x)^4 \} | 0 \rangle. \quad (3.5)$$

Cada producto  $\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x) \} | 0 \rangle = D(x_1 - x)$  es un propagador de Feynman que podemos calcular explícitamente. Esta integral es función de las cuatro variables  $x_i$ , luego podemos realizar la transformada de Fourier en cada una de ellas y estudiar el problema en el espacio de momentos, quedando el diagrama



$$= -i \lambda_0 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \tilde{D}(p_1) \tilde{D}(p_2) \tilde{D}(k_1) \tilde{D}(k_2). \quad (3.6)$$

Obtenemos aquí  $\delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$ , que representa la conservación de momento en el vértice. Podemos, sin embargo, considerar un proceso en el que solo está fijado el momento

externo  $p$  de la siguiente manera

$$\begin{array}{c} \text{Diagrama de loop simple} \\ = \\ \langle 0 | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\} | 0 \rangle := D(x_1 - x)D(x_2 - x)D(x - x). \end{array} \quad (3.7)$$

Este proceso corresponde a la emisión y absorción de una partícula de momento indefinido  $q$  y la contribución de un diagrama de este tipo a la amplitud de dispersión viene dada por

$$\begin{array}{c} \text{Diagrama de loop con momentum } q \\ = -i \lambda_0 (2\pi)^4 \tilde{D}(k) \times \frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{D}(q) \times \tilde{D}(k). \end{array} \quad (3.8)$$

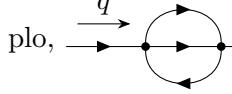
El valor de  $\tilde{D}(q)$  es explícitamente  $\tilde{D}(q) = \frac{i}{q^2 - m_0^2}$ , luego la integral es  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_0^2}$ , que es una integral divergente. Si establecemos un momento máximo al que integrar obtenemos

$$\begin{aligned} -i\Gamma &= \frac{\lambda_0}{2(2\pi)^4} \int_{q^2 < \Lambda^2} \frac{d^4 q}{q^2 + m_0^2} \\ &= \frac{\lambda_0}{16\pi^2} \left( \Lambda^2 - m_0^2 \ln \left( \frac{\Lambda^2 + m_0^2}{m_0^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Así, hemos regularizado la integral con un regulador o *cutoff*  $\Lambda$ . Vemos que la divergencia de la integral se da cuando  $\Lambda \rightarrow \infty$ , es decir, cuando consideramos valores del momento arbitrariamente grandes. Este tipo de divergencia es lo que se denomina divergencia ultravioleta. Considerando todos los diagramas a un *loop*, la autointeracción de  $\phi$  queda

$$\begin{array}{c} \text{Diagrama de loop simple} \\ + \text{Diagrama de loop doble} \\ = \tilde{D}(q) \sum_{n=0}^{\infty} (-i\Gamma \tilde{D}(q))^n = \frac{i}{q^2 - m_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\Gamma}{q^2 - m_0^2}} = \frac{i}{q^2 - m_0^2 - \Gamma}. \end{array} \quad (3.10)$$

De esta manera, las correcciones a un *loop* imponen un desplazamiento en la masa  $m_0^2 \rightarrow m_0^2 + \Gamma$ , pero este desplazamiento es infinito cuando hacemos  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Sin embargo, si redefinimos el parámetro de masa del lagrangiano  $m^2 = m_0^2 + \Gamma$ , no tenemos que considerar los diagramas a un *loop* a la hora de calcular las amplitudes de dispersión. Con una redefinición del parámetro  $m$  hemos eliminado las divergencias ultravioletas debidas a este tipo de diagrama y, aunque esta redefinición pierda sentido al hacer  $\Lambda \rightarrow \infty$ , podemos medir una  $m$  finita como la energía en reposo de la partícula descrita por este campo. Por tanto,  $m_0$  sería un desplazamiento infinito del valor experimental. Este procedimiento se puede generalizar: podemos dejar de considerar ciertos diagramas realizando redefiniciones sobre el lagrangiano. Para ilustrar un ejemplo (aunque con diagramas que no son divergentes más allá del diagrama a un *loop*) vamos a considerar la autointeracción del campo.

Podemos añadir todos los diagramas con dos patas externas a órdenes superiores; por ejemplo,  que depende de  $q^2$ . Sumados como en el caso a un *loop* dan  $\tilde{D}_{M^2}(q) = \frac{i}{q^2 - m_0^2 - M^2(q^2)}$ .

Notar que  $M^2(q^2)$  es una función obtenida como la suma infinita de una serie en  $\lambda_0$  y que como tal se puede calcular término a término en  $\lambda_0$ . Podemos interpretar el polo

$$q^2 - m_0^2 - M^2(q^2)|_{q^2=m^2} = 0 \quad (3.11)$$

como la masa física que podemos medir. Para dejar de considerar los efectos de la autointeracción, y por tanto este tipo de diagramas, vemos que podemos redefinir

$$m^2 = m_0^2 + M^2(m^2), \quad (3.12)$$

y en un entorno de  $m^2$ ,  $q^2 - m_0^2 - M^2(q^2) = (q^2 - m^2) \left( 1 - \frac{dM(p^2)}{dp^2} \right) + \dots$ . Por tanto  $\tilde{D}_{M^2}(q) = \frac{i}{(q^2 - m^2) \left( 1 - \frac{dM(p^2)}{dp^2} \right)} + \text{términos regulares}$ .

Si redefinimos el campo  $\phi = Z_\phi^{\frac{1}{2}} \phi_r$ , con  $Z_\phi = \left( 1 - \frac{dM(p^2)}{dp^2} \right)^{-1}$ , tenemos un propagador para  $\phi_r$ ,  $\tilde{D}_r(q) = \frac{i}{q^2 - m^2} + \text{términos regulares}$ .

Es decir, si calculamos las amplitudes de dispersión usando  $\phi_r$  ya no tenemos que considerar los diagramas de autointeracción. De manera análoga, renormalizar la teoría  $\phi^4$  es, antes de hacer el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$  para cierto regularizador  $\Lambda$ , redefinir

$$\phi = Z_\phi^{\frac{1}{2}} \phi_r, \quad m_0 = Z_m^{\frac{1}{2}} m, \quad \lambda_0 = Z_\lambda \lambda, \quad (3.13)$$

con los parámetros  $m$  y  $\lambda$  finitos. Reescribimos el lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} Z_\phi \partial_\mu \phi_r(x) \partial^\mu \phi_r(x) - Z_1 \frac{m^2}{2} \phi_r(x)^2 - Z_2 \frac{\lambda}{4!} \phi_r(x)^4 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_r(x) \partial^\mu \phi_r(x) - \frac{m^2}{2} \phi_r(x)^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_r(x)^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta Z_\phi \partial_\mu \phi_r(x) \partial^\mu \phi_r(x) - \delta Z_1 \frac{m^2}{2} \phi_r(x)^2 - \delta Z_2 \frac{\lambda}{4!} \phi_r(x)^4 \\ &= \mathcal{L}_r + \delta \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $\delta Z_i$  se conocen como contraterminos. Tras la redefinición, los diagramas divergentes forman parte del lagrangiano de contraterminos  $\delta \mathcal{L}$  y, para calcular amplitudes de dispersión, podemos tomar el lagrangiano  $\mathcal{L}_r$ , que tiene en cuenta solo campos renormalizados, evitando incluir los diagramas que divergen para  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Renormalizar una teoría cualquiera es buscar una redefinición de los campos y parámetros del lagrangiano como en (3.13), de manera que no sea necesario considerar diagramas divergentes para obtener amplitudes de dispersión.

Si las divergencias que aparecen a cualquier orden son debidas a un número finito de subdiagramas, como en el caso de la teoría  $\phi^4$ , con un número finito de redefiniciones del tipo (3.13) podemos absorber todas las divergencias de la teoría, pudiendo calcular todas las amplitudes de dispersión hasta cualquier orden y obteniendo siempre resultados finitos. Bajo estas condiciones se dice que la teoría es renormalizable.

### 3.2. Gravedad Cuántica

Podemos establecer un criterio para saber cuándo un diagrama será divergente. Si  $k$  es el momento de integración, definimos el grado superficial de divergencia como

$$G = (\text{potencias de } k \text{ en el numerador}) - (\text{potencias de } k \text{ en el denominador}). \quad (3.15)$$

En general, si  $G \geq 0$  la integral diverge. Tomemos ahora un lagrangiano de interacción que tiene una constante de acoplamiento  $\lambda$  con unidades de  $[\text{masa}]^m$ . Al desarrollar la exponencial en (3.4), obtendremos términos a todos los órdenes de  $\lambda$ . En concreto, para un diagrama con  $V$  vértices estamos considerando el término a orden  $\lambda^V$  y, para valores de  $k = \Lambda$ , donde  $\Lambda$  representa valores arbitrariamente grandes, el integrando será proporcional a  $\lambda^V \Lambda^G$ , quedando el diagrama de dimensiones  $[\text{masa}]^{Vm+G}$ .

Sea  $\phi$  el campo que estamos tratando. El término cinético del lagrangiano será  $\mathcal{L}_{\text{cin}} = m^2 \phi^2$ . Como la acción es adimensional, podemos deducir que  $[\mathcal{L}] = [\text{masa}]^4$  y por tanto  $[\phi] = [\text{masa}]$ . Supongamos que el diagrama que estamos considerando tiene  $N$  patas externas; dimensionalmente esto es igual a considerar un término de interacción en el lagrangiano  $\eta \phi^N$  donde  $[\eta] = [\text{masa}]^{4-N}$ . Por tanto, la dimensión del diagrama debe ser  $[\text{masa}]^{4-N}$ .

Por análisis dimensional

$$[\text{masa}]^{Vm+G} = [\text{masa}]^{4-N}, \quad (3.16)$$

es decir  $Vm + G = 4 - N$ . Para un acoplamiento con  $m < 0$  podemos hacer  $G$  arbitrariamente grande aumentando  $V$ . Esto significa que para cada orden surgen diagramas con un orden de divergencia superior a los anteriores y, por tanto, no se puede renormalizar la teoría con un número finito de constantes de renormalización. Esto significa que no podemos absorber las divergencias en un número finito de parámetros provenientes de medidas experimentales como habíamos hecho con el parámetro  $m$  para la teoría  $\phi^4$ . Esto limita nuestra capacidad de realizar predicciones con la teoría, ya que no sabemos en general cómo calcular la amplitud de dispersión.

En la teoría de la gravedad cuántica que hemos derivado en la Subsección 2.2, el término cinético es (2.23), mientras el lagrangiano completo es (2.30). Podemos ver que el término del desarrollo es proporcional a

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \propto \frac{1}{M} \square h^3, \quad (3.17)$$

con  $M$  una constante con dimensiones de masa. Por el argumento desarrollado en esta sección, la gravedad vista como una interacción mediada por una partícula de spin 2 sin masa es no renormalizable, en el sentido de que no podemos absorber las integrales divergentes con un número finito de contraterminos.

### 3.3. Localidad de las interacciones

Nos preguntamos ahora si existe la posibilidad de hacer una teoría cuántica de campos en la que no aparezcan nunca las divergencias ultravioletas. En una teoría de este tipo, realizar predicciones en la teoría cuántica de la gravedad no sería un problema, ya que no es necesaria la renormalización para absorber las divergencias. Para continuar en esta dirección, primero observemos de dónde surgen las divergencias. En (3.9) vimos que imponer un *cutoff*  $\Lambda$  al momento máximo sobre el que integrar hace que la divergencia desaparezca. Esto puede sugerir que la teoría no es válida para valores arbitrariamente altos del momento. Si suponemos que para ciertos valores  $k > \Lambda$  la teoría ya no es válida, podríamos establecer un regulador natural que

haga desaparecer las divergencias. Por otra parte, podemos relacionar esta idea con la idea de localidad. El ejemplo de integral divergente que estamos discutiendo puede reescribirse como

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{D}(q). \quad (3.18)$$

Este factor viene de evaluar en  $x = y$  el propagador  $D(x - y) \rightarrow D(0)$ , que reescrito de otra manera es  $D(x - y) = \langle 0 | T\{\phi(x)\phi(y)\} | 0 \rangle$ ; es decir, el producto de dos campos evaluado en un mismo punto del espacio no está definido. Es esta la idea que motiva a ir más allá de la teoría cuántica de campos local. En las siguientes secciones trataremos de explorar la no localidad de una teoría cuántica de campos a través de la no commutatividad del espacio-tiempo.

## 4. Espacio-tiempo no commutativo canónico

En mecánica cuántica podemos cuantizar un sistema clásico cambiando las coordenadas del espacio de fases  $x^i$  y  $p^j$  por operadores hermíticos  $\hat{x}^i$  y  $\hat{p}^j$  que cumplen las relaciones de commutación de Heisenberg  $[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_j^i$ . Tras esta cuantización, el concepto de punto en el espacio de fases se ve sustituido por el de celda de Planck, mientras que en el límite  $\hbar \rightarrow 0$  se recupera el espacio de fases clásico.

Nos preguntamos cuál será la fenomenología al introducir una no commutatividad de este tipo en las coordenadas del espacio-tiempo sobre las que se definen los lagrangianos de la teoría cuántica de campos. Cambiaremos ahora las coordenadas  $x^\mu$  por operadores hermíticos  $\hat{x}^\mu$  que cumplen la relación de commutación

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Para realizar un estudio más general tomaremos  $D$  como dimensión del espacio-tiempo y denotaremos las coordenadas con índices latinos. Así, los operadores son  $x^j$ , donde  $j$  toma  $D$  valores, y  $\Theta^{ij}$  es la matriz considerada. Estudiaremos el caso canónico, el más simple, donde  $\Theta^{ij}$  es una matriz real, constante y antisimétrica de dimensión  $D \times D$  [2]. Estamos sustituyendo de esta manera la estructura de variedad del espacio-tiempo por un espacio de Hilbert de estados de  $\hat{x}^i$ .

### 4.1. Cuantización de Weyl

Nos interesa saber cómo se redefine la acción en ese espacio. En el espacio commutativo es

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\nu \phi(x)), \quad (4.2)$$

donde  $\mathcal{L}$  puede ser visto como una función de  $x^\mu$  que decrece lo suficientemente rápido en el infinito. Para nuestro espacio podemos suponer que los campos considerados pertenecen al espacio de Schwartz definido por

$$\mathcal{A} = \left\{ f | f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{C}, \sup_x (1 + |x|^2)^{k+n_1+\dots+n_D} |\partial_1^{n_1} \cdots \partial_D^{n_D} f(x)|^2 < \infty \ \forall k, n_i \in \mathbb{Z}^+ \right\}, \quad (4.3)$$

con  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .  $\mathcal{A}$  es un espacio de Banach con la norma  $L^\infty$  ( $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ ) y podemos describir dichas funciones por su transformada de Fourier

$$\tilde{f}(k) = \int d^Dx e^{-ik_i x^i} f(x). \quad (4.4)$$

Estableceremos una correspondencia entre las funciones de  $\mathcal{A}$  y las funciones definidas sobre el espacio no commutativo, de manera que al hacer  $\Theta = 0$  la correspondencia coincida con la identidad. Este procedimiento que vamos a seguir se conoce como cuantización de Weyl. Introducimos el símbolo de Weyl de una función a través de su transformada de Fourier

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}^i}. \quad (4.5)$$

Si  $f(x)$  es real,  $\tilde{f}^*(k) = \tilde{f}(-k)$  y  $\hat{\mathcal{W}}[f]$  es hermítico. Como ejemplo,  $\hat{\mathcal{W}}[e^{ik_i x^i}] = e^{ik_i \hat{x}^i}$ . Si introducimos la definición de transformada de Fourier (4.4) en (4.5),

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x f(x) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_i x^i} e^{ik_i \hat{x}^i} = \int d^D x f(x) \hat{\Delta}(x), \quad (4.6)$$

donde se ha introducido el operador  $\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_i x^i} e^{ik_i \hat{x}^i}$ . Se obtiene, así, una correspondencia explícita, a través del operador hermítico  $\hat{\Delta}(x) = \hat{\Delta}(x)^\dagger$ , entre las funciones de  $\mathcal{A}$  y el espacio de funciones sobre operadores, que denotaremos  $\hat{\mathcal{W}}[\mathcal{A}]$ .

En el caso commutativo,  $\hat{\Delta}(x) = \delta(\hat{x} - x)$ , y por tanto  $\hat{\mathcal{W}}[f(x)] = f(\hat{x})$ ; es decir, en el caso commutativo no hemos introducido ningún cambio en la función.

Llegados a este punto, queremos invertir la relación y recuperar  $f(x)$  a través de  $\hat{\mathcal{W}}[f(x)]$ . Para ello, buscamos una caracterización de  $\hat{\Delta}(x)$  que sea independiente de  $x$  y que nos permita normalizar el operador. Para llegar a esta caracterización definiremos la derivada de un operador.  $\hat{\partial}_i$  es un operador antihermítico que actúa sobre el espacio de operadores,  $[\hat{\partial}_i, \hat{x}^j] = \delta_i^j$  y  $[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = 0$ , luego la derivada sobre  $e^{ik_i \hat{x}^i}$  es  $[\hat{\partial}_j, e^{ik_i \hat{x}^i}] = ik_j e^{ik_i \hat{x}^i}$ .

Así, podemos ver cómo actúa la derivada sobre  $\hat{\Delta}(x)$ :

$$[\hat{\partial}_j, \hat{\Delta}(x)] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_i x^i} [\hat{\partial}_j, e^{ik_i \hat{x}^i}] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} ik_j e^{-ik_i x^i} e^{ik_i \hat{x}^i} = -\partial_j \hat{\Delta}(x). \quad (4.7)$$

Introduciendo esta expresión en (4.6) e integrando por partes vemos que

$$[\hat{\partial}_j, \hat{\mathcal{W}}[f]] = \int d^D x \partial_j f(x) \hat{\Delta}(x) = \hat{\mathcal{W}}[\partial_j f]. \quad (4.8)$$

Para un desplazamiento infinitesimal, a primer orden

$$\hat{\Delta}(x + \epsilon) = (1 + \epsilon^i \hat{\partial}_i) \hat{\Delta}(x) = \left( \hat{\Delta}(x) - \epsilon^i [\hat{\partial}_i, \hat{\Delta}(x)] \right) \simeq \left( 1 - \epsilon^i \hat{\partial}_i \right) \hat{\Delta}(x) \left( 1 + \epsilon^i \hat{\partial}_i \right), \quad (4.9)$$

luego  $\hat{\Delta}(x + v) = e^{-v^i \hat{\partial}_i} \hat{\Delta}(x) e^{v^i \hat{\partial}_i}$ . Con esta caracterización, vemos que el desplazamiento está dado por el operador unitario  $e^{v^i \hat{\partial}_i}$  y que cualquier aplicación cíclica tendrá un valor constante sobre  $\hat{\Delta}(x)$ . En particular, tomaremos una aplicación lineal y cíclica que toma valores en  $\mathbb{C}$  y que llamaremos traza y se define como  $\text{Tr} : \hat{\mathcal{W}}[\mathcal{A}] \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $\text{Tr}(\hat{\Delta}(x)) = 1$ :

$$\text{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[f]) = \int d^D x f(x). \quad (4.10)$$

Esto, sin embargo, no nos permite invertir la acción de  $\hat{\mathcal{W}}$ . Pero, usando la fórmula Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), podemos reescribir  $e^{ik_i \hat{x}^i} e^{ik'_i \hat{x}^i} = e^{-\frac{i}{2} \Theta^{ij} k_i k'_j} e^{i(k+k')_i \hat{x}^i}$ , de donde se

deduce

$$\hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) = \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int d^D z e^{i(k+k')_i z^i} \hat{\Delta}(z) e^{-\frac{i}{2} \Theta^{ij} k_i k'_j} e^{-ik_i x^i - ik'_i y^i}. \quad (4.11)$$

Ahora, suponiendo que  $\Theta$  es una matriz constante, invertible y antisimétrica (lo que implica que  $D$  debe ser par) podemos realizar las integrales en  $k$  y  $k'$  y obtener

$$\hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) = \frac{1}{\pi^D |\det \Theta|} \int d^D z \hat{\Delta}(z) e^{-2i(\Theta^{-1})_{ij}(x-z)^i(y-z)^j}. \quad (4.12)$$

Tomando la traza

$$\text{Tr}(\hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y)) = \delta^D(x-y), \quad (4.13)$$

de donde obtenemos que

$$f(x) = \text{Tr}(\hat{\Delta}(x) \hat{\mathcal{W}}[f]). \quad (4.14)$$

En resumen, hemos establecido una correspondencia entre  $\mathcal{A}$  y el espacio de operadores  $\hat{\mathcal{W}}[\mathcal{A}]$  que viene dada por la aplicación  $\hat{\mathcal{W}}$  y es invertible con inversa  $\text{Tr}(\hat{\Delta}(x) \cdot)$ . Es decir, tenemos una correspondencia 1-1 entre ambos espacios.

## 4.2. Producto estrella

Consideremos ahora  $f, g \in \mathcal{A}$  y estudiemos el producto  $\hat{\mathcal{W}}[f] \hat{\mathcal{W}}[g]$ . Usando (4.6) y (4.12) obtenemos

$$\hat{\mathcal{W}}[f] \hat{\mathcal{W}}[g] = \frac{1}{\pi^D |\det \Theta|} \iint d^D t d^D y f(t) g(y) \int d^D z \hat{\Delta}(z) e^{-2i(\Theta^{-1})_{ij}(t-z)^i(y-z)^j}, \quad (4.15)$$

luego, si invertimos la aplicación  $\hat{\mathcal{W}}$  como en (4.14), y hacemos uso de (4.13), resulta natural definir el producto estrella de Groenewold-Moyal como  $(f \star g)(x) = \text{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[f] \hat{\mathcal{W}}[g] \hat{\Delta}(x))$ . Podemos obtener una expresión explícita utilizando (4.11) e identificando la transformada de Fourier de  $f$  y  $g$

$$\hat{\mathcal{W}}[f] \hat{\mathcal{W}}[g] = \int d^D z \hat{\Delta}(z) e^{\frac{i}{2} \Theta^{ij} \partial_i^x \partial_j^y} f(x) g(y) \Big|_{x=y=z} = \hat{\mathcal{W}}[f \star g],$$

donde se ha realizado el cambio de variable  $k'_j \rightarrow k_j + k'_j$ , teniendo en cuenta que  $\Theta^{ij} k_i k_j = 0$  por ser  $\Theta$  antisimétrica.

Por tanto, podemos reescribir el producto estrella de funciones como

$$f(x) \star g(x) = e^{\frac{i}{2} \Theta^{ij} \partial_i^y \partial_j^z} f(y) g(z) \Big|_{y=z=x}. \quad (4.16)$$

Este producto es asociativo pero no commutativo, y en el límite  $\Theta = 0$  se reduce al producto ordinario de funciones. Para  $n$  funciones es fácil ver que el producto (4.16) se extiende a

$$f_1(x) \star \cdots \star f_n(x) = \prod_{a < b} \exp \left( \frac{i}{2} \theta^{ij} \partial_{x_i^a} \partial_{x_j^b} \right) f_1(x^1) \cdots f_n(x^n) \Big|_{x^1 = \cdots = x^n = x}. \quad (4.17)$$

Vamos a trabajar con acciones como (4.2), por lo que nos interesan las cantidades integrales. Debido a (4.10) podemos recabar información sobre el producto estrella bajo símbolo integral.

Gracias a la propiedad cíclica de la traza, la integral del producto estrella de funciones será invariante bajo permutaciones cíclicas, pero no bajo una permutación cualquiera.

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{\mathcal{W}}[f_1] \cdots \hat{\mathcal{W}}[f_n]\right) = \int d^Dx f_1(x) \star \cdots \star f_n(x). \quad (4.18)$$

En particular, para los términos cuadráticos,

$$\int d^Dx f(x) \star g(x) = \int d^Dx f(x) g(x), \quad (4.19)$$

es decir, los términos cuadráticos de un lagrangiano no se verán modificados por la naturaleza no conmutativa del espacio-tiempo.

### 4.3. Teoría perturbativa para la teoría $\phi^n$

Observemos los efectos de describir la teoría escalar euclídea  $\phi^n$  con símbolos de Weyl. Para el caso  $n = 4$ , la acción (3.1), en el espacio euclídeo, será sustituida por

$$S_{(4)}[\phi] = \mathrm{Tr} \left( \frac{1}{2} \left[ \hat{\partial}_i, \hat{\mathcal{W}}[\phi] \right]^2 + \frac{m^2}{2} \hat{\mathcal{W}}[\phi]^2 + \frac{\lambda}{4!} \hat{\mathcal{W}}[\phi]^4 \right). \quad (4.20)$$

Teniendo en cuenta que los términos cuadráticos no varían con respecto al caso conmutativo,

$$S_{(4)}[\phi] = \int d^Dx \left[ \frac{1}{2} \partial_i \phi(x) \partial^i \phi(x) + \frac{m^2}{2} \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \right]. \quad (4.21)$$

El término que varía con respecto a la teoría conmutativa es el término de interacción, es decir,  $\mathrm{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[\phi]^4)$  contiene la información relevante a estudiar. De la ecuación (4.16) y de (4.17) podemos observar que en el espacio de momentos el producto estrella de cuatro funciones puede reescribirse como

$$\mathrm{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[\phi]^4) = \prod_{a=1}^4 \int \frac{d^D k_a}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k_a) (2\pi)^D \delta^D \left( \sum_{a=1}^4 k_a \right) V(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (4.22)$$

donde

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) = \prod_{a < b} e^{-\frac{i}{2} k_{ai} \Theta^{ij} k_{bj}}. \quad (4.23)$$

Es decir, como en la teoría conmutativa, tenemos el término  $\delta^D \left( \sum_{a=1}^4 k_a \right)$ , que implica la conservación de momento en el vértice y, además, se añade un factor oscilante  $V(k_1, k_2, k_3, k_4)$  que esperamos que cancele las divergencias de la teoría. Podemos simplificar la notación introduciendo el producto bilineal antisimétrico  $\times$  que a cada par de cuadivectores  $k_a, k_b$  les asocia

$$k_a \times k_b = k_{ai} \Theta^{ij} k_{bj} = -k_b \times k_a. \quad (4.24)$$

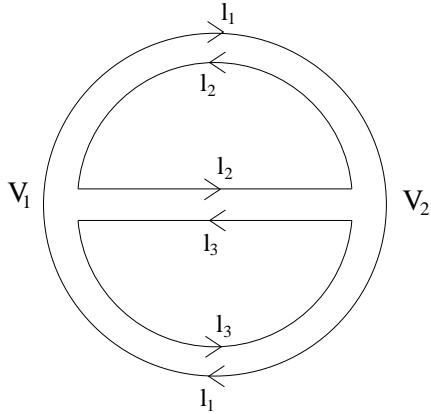


Figura 4.1: Un diagrama planar con tres patas por vértice.

Supongamos que tenemos ahora una interacción de orden  $n$ .  $\text{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[\phi]^n)$  incluirá por lo tanto un factor de la siguiente manera

$$V(k_1, \dots, k_n) = \prod_{a < b} e^{-\frac{i}{2} k_a \times k_b}. \quad (4.25)$$

Lo que necesitamos conocer para calcular  $V$  es el orden cíclico con el que los momentos  $k_i$  atraviesan el vértice. Es importante que la numeración de los  $k_i$  sea tal que  $k_i$  y  $k_{i+1}$  sean contiguos.

Gracias a la conservación del momento en el vértice sabemos que  $\sum_{a=1}^n k_a = 0$ , y podemos realizar el cambio de variable  $k_i = l_i - l_{i+1}$  identificando  $l_{n+1} = l_1$

$$V(l_1, \dots, l_n) = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{i}{2} l_j \times l_{j+1}}. \quad (4.26)$$

Con este resultado podemos calcular el valor de los vértices asociados a distintos diagramas de la teoría. Para ello, sustituiremos cada momento del vértice por dos líneas paralelas con sentidos opuestos representando el cambio de variable  $k_i = l_i - l_{i+1}$ .

### Diagramas planares

Cuando calculamos el factor  $V$  asociado a un diagrama planar como en la Figura 4.1, vemos que la contribución a  $V$  para los momentos internos es igual y opuesta en los dos vértices que le corresponden. Por tanto,  $V$ , que será producto de cada factor  $V_i$ , verá cancelada la contribución de cada línea de momento interno. De esta manera, el factor  $V$  es un factor de fase global que solo depende de los momentos externos y que viene dado por (4.23), con  $k_i$  sólo momentos externos. Obtenemos, así, que no hay ningún cambio en la convergencia de las integrales. La teoría será renormalizable si y solo si la teoría para  $\Theta = 0$  lo es.

### Diagramas no planares

Es destacable notar que lo realmente importante a la hora de computar  $V$  es el orden en el que los momentos entran en el vértice. Si dos líneas se cruzan sin cortarse, cambiarán el orden en el que entrarán en sus respectivos vértices con respecto al caso planar. Para tener en cuenta este efecto, veamos cuál es la fase que induce el cruce de dos líneas como en la Figura 4.2. Si ambas líneas se cortasen, pero el momento de cada línea se viese inalterado, la fórmula (4.23) nos daría que el factor de fase es  $e^{-\frac{i}{2}(k_j \times k_i - k_j \times k_i - k_i \times k_j + k_j \times k_i)} = e^{-ik_j \times k_i}$ . Este es el factor que aparece en el diagrama planar con respecto a la fase; luego, para un diagrama no planar lo calcularemos como si fuese planar y añadiremos un factor  $e^{ik_j \times k_i}$  por cada cruce. En general, podemos contar el número de cruces

con una matriz  $C_{ij}$  que cuenta el número de veces que la línea  $i$  cruza la línea  $j$ . Se cuenta positivo

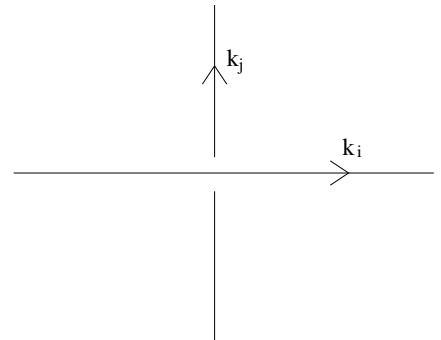


Figura 4.2: Ejemplo de cruce sin cortar en un diagrama no planar.  $C^{ij} = 1$  para este ejemplo.



Figura 4.3: Diagramas a un *loop* planar y no planar. Estos diagramas solo se distinguen en la teoría no conmutativa.

si  $k_j$  se mueve hacia la izquierda con respecto a  $k_i$ . Así, el factor de fase total será

$$V(k_1, \dots, k_n) e^{-\frac{i}{2} C^{ij} k_i \times k_j}. \quad (4.27)$$

#### 4.4. Cálculos a un loop para la teoría $\phi^4$

Para un diagrama del tipo de la Figura 4.3, en la teoría conmutativa no hay distinciones entre el caso planar y el no planar. Sin embargo, al considerar el orden en el cual entran las líneas al vértice debemos distinguir los dos casos que se muestran en la figura. Para cada diagrama tenemos

$$\Gamma_{1\,planar}^{(2)} = \frac{\lambda}{3(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + m^2}, \quad \Gamma_{1\,nonplanar}^{(2)} = \frac{\lambda}{6(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + m^2} e^{ik \times p}. \quad (4.28)$$

Ambos difieren en el factor de fase discutido para los diagramas no planares y en un factor de simetría debido al cambio de  $p$  por  $-p$ . Sabemos que el diagrama planar es cuadráticamente divergente. Podemos ver esto si reescribimos las contribuciones de cada integral en función de parámetros de Swinger, que consiste en sustituir

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(k^2 + m^2)} \quad (4.29)$$

y cambiar el orden de integración. Como son integrales gaussianas, el factor de fase puede introducirse como un desplazamiento en  $k$ . Luego, si denotamos  $p \circ q = -p^\mu \Theta^2_{\mu\nu} q^\nu = |p^\mu \Theta^2_{\mu\nu} q^\nu|$ , tenemos que las integrales a calcular son ahora

$$\Gamma_{1\,planar}^{(2)} = \frac{\lambda}{48\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2}, \quad \Gamma_{1\,nonplanar}^{(2)} = \frac{\lambda}{96\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2 - \frac{p \circ p}{\alpha}}. \quad (4.30)$$

Para regularizar la primera integral, que sabemos que diverge, tenemos que multiplicar por un factor que se anule en cero más rápido que  $\alpha^{-2}$  y que podamos eliminar haciendo tender un cierto regulador  $\Lambda \rightarrow \infty$ . La función  $e^{-\frac{1}{\Lambda^2 \alpha}}$  cumple estas condiciones, luego, multiplicando en el integrando de (4.30) obtenemos

$$\Gamma_{1\,planar}^{(2)} = \frac{\lambda}{48\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2 - \frac{1}{\Lambda^2 \alpha}}, \quad \Gamma_{1\,nonplanar}^{(2)} = \frac{\lambda}{96\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2 - \frac{p \circ p - \frac{1}{\Lambda^2}}{\alpha}}. \quad (4.31)$$

Ambas integrales son formalmente iguales si consideramos en la no planar  $\Lambda_{ef}^{-2} = \frac{1}{1/\Lambda^2 + p \circ p}$ .

El comportamiento asintótico de la integral con  $\Lambda$  viene dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_{1 \text{ planar}}^{(2)} &= \frac{\lambda}{48\pi^2} \left( \Lambda^2 - m^2 \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + O(1) \right), \\ \Gamma_{1 \text{ no planar}}^{(2)} &= \frac{\lambda}{96\pi^2} \left( \Lambda_{eff}^2 - m^2 \ln \left( \frac{\Lambda_{eff}^2}{m^2} \right) + O(1) \right).\end{aligned}\quad (4.32)$$

El diagrama planar diverge al hacer el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , sin embargo;  $\Lambda_{eff} = \frac{1}{1/\Lambda^2 + p \circ p} \rightarrow \frac{1}{p \circ p}$ , que es una cantidad finita excepto en el límite  $\Theta \rightarrow 0$  o  $p \circ p \rightarrow 0$ . Esta segunda condición la podemos ver como un regulador en el infrarrojo; para  $p \circ p \simeq p^2 \theta^2 \ll \frac{1}{\Lambda^2}$  se recupera  $\Lambda_{eff} \simeq \Lambda$  y, por tanto, la divergencia ultravioleta. Introducir un regulador  $\Lambda$  para el ultravioleta en los momentos internos introduce un regulador efectivo para los momentos externos del orden  $\frac{1}{\Lambda \theta}$ .

Así, se muestra que la divergencia ultravioleta que presenta la teoría conmutativa se ha sustituido, para el diagrama no planar, por una divergencia infrarroja en el momento  $p$ . Es importante notar que la divergencia ultravioleta viene de la indefinición del momento interno del *loop*  $k$ , que puede tomar valores arbitrariamente grandes, mientras que la divergencia infrarroja se debe al momento externo  $p$ . Este comportamiento recibe el nombre de mezcla infrarroja ultravioleta o *IR-UV mixing*. Este es el resultado más interesante que encontramos en la teoría no conmutativa en un diagrama no planar.

Este comportamiento ha sido observado en un diagrama a primer orden y se pueden encontrar más ejemplos que muestran esta propiedad. Sin embargo, no es una característica inherente a los diagramas no planares, se pueden encontrar dentro de la teoría  $\phi^4$  ejemplos de diagramas no planares de orden superior que presentan divergencias ultravioletas [3].

#### 4.5. Origen de la mezcla IR-UV

En esta subsección resumimos la discusión de la referencia [3]. Vamos a considerar  $D = 2$  con coordenadas  $x$  e  $y$  sujetas a la relación de conmutación  $[x, y] = i\theta$  y tomemos el producto estrella de dos funciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , que podemos escribir

$$\begin{aligned}(\phi_1 \star \phi_2)(x, y) &= \\ &= \frac{1}{\pi^2 \theta^2} \iint d^2 \mathbf{x}_1 d^2 \mathbf{x}_2 \phi_1(x_1, y_1) \phi_2(x_2, y_2) e^{-\frac{2i}{\theta}[(x-x_2)(y-y_1)-(x-x_1)(y-y_2)]}.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Para calcular el valor del producto estrella vamos a considerar que las funciones tienen soporte compacto, es decir, solo toman valores apreciables en una región de anchuras  $\Delta_{x_i} \times \Delta_{y_i}$  fuera de la cual son nulas. Para la integral sobre  $x_1$ , tenemos que calcular  $\int d_{x_1} \phi_1(x_1, y_1) e^{i \frac{x_1(y_2-y)}{\theta}}$ . Si las oscilaciones son demasiado rápidas la integral se anulará. Esto se traduce en la condición

$$\Delta_{x_1} \frac{|y_2 - y|}{\theta} \gg 1. \quad (4.34)$$

Es decir, para un punto  $y_2$  dado, la integral, como función de  $y$ , tomará valores no nulos dentro de la región de anchura  $\delta y_2 \simeq \frac{\theta}{\Delta_{x_1}}$ . Esto da una correspondencia de la función  $\phi_1$  sobre la función  $\phi_2$  en una región de anchura  $\delta y_2$ , como se muestra en la Figura 4.4. Podemos repetir el argumento para cada variable y obtendremos

$$\delta y_2 \simeq \frac{\theta}{\Delta_{x_1}}, \quad \delta y_1 \simeq \frac{\theta}{\Delta_{x_2}}, \quad \delta x_2 \simeq \frac{\theta}{\Delta_{y_1}}, \quad \delta x_1 \simeq \frac{\theta}{\Delta_{y_2}}. \quad (4.35)$$

Para el caso en el que  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ , el producto estrella es no nulo en una región de anchura

$$\delta x \simeq \max \left( \Delta_x, \frac{\theta}{\Delta_y} \right), \quad \delta y \simeq \max \left( \Delta_y, \frac{\theta}{\Delta_x} \right). \quad (4.36)$$

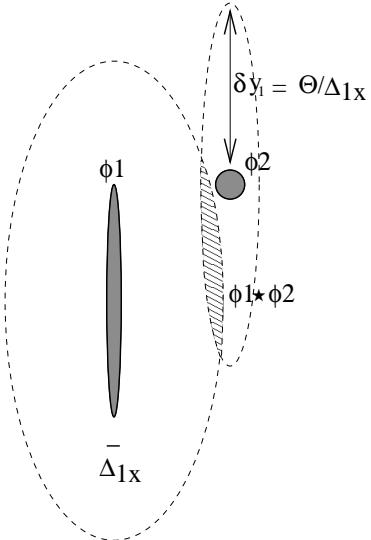


Figura 4.4: Si el valor de  $\phi_1$  y  $\phi_2$  solo es no nulo en las regiones coloreadas, el producto  $\phi_1 \star \phi_2$  es no nulo en la intersección de las zonas extendidas que están marcadas con una línea discontinua.

Es decir, si  $\Delta_x, \Delta_y \ll \sqrt{\theta}$ , el producto estrella será no nulo en una región mucho más grande de dimensiones  $\frac{\theta}{\Delta_y} \times \frac{\theta}{\Delta_x}$ . Podemos tener una teoría, la teoría  $\phi^3$ , que cumple  $(\square - m^2) \phi(x) = \frac{\lambda}{2} (\phi \star \phi)(x)$ , cuya solución podemos dar perturbativamente hasta primer orden en  $\lambda$  como

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \frac{\lambda}{2} \int d^D y G(x-y) (\phi_0 \star \phi_0)(y), \quad (4.37)$$

donde  $G(x)$  es la función de Green de la ecuación diferencial homogénea. Como hemos visto, si  $\phi_0$  toma valores apreciables en una región muy pequeña  $\Delta_{x_i} \ll \sqrt{\theta}$ , con  $\theta$  un valor característico tomado de la matriz  $\Theta$ ,  $\phi_0 \star \phi_0$  toma valores distintos de cero para una región de tamaño  $\delta = \frac{\theta}{\Delta} \gg \Delta$ .

En un diagrama no planar, una partícula virtual de energía  $\omega \gg \frac{1}{\sqrt{\theta}}$  tendrá un tamaño  $\omega^{-1} \ll \sqrt{\theta}$ . Sin embargo, la interacción extenderá sus efectos a un tamaño equivalente a  $\omega\theta$ , produciendo efectos a energías correspondientes a este tamaño (energías de  $\frac{1}{\theta\omega}$ ) que son energías bajas.

Por ello, imponer un regulador ultravioleta  $\Lambda$  para los momentos internos, implica un regulador efectivo en el infrarrojo  $\frac{1}{\theta\Lambda}$  para las partículas con las que se interacciona.

Como conclusión, observamos que es la no localidad del producto estrella la que nos induce un acople entre el comportamiento a altas y bajas energías. La no comutatividad del espacio-tiempo nos induce a interacciones no locales que consiguen absorber las divergencias ultravioletas en ciertos casos. Sin embargo, esto no es suficiente para hacer desaparecer las divergencias de la teoría.

## 5. Invariancia bajo transformaciones de Poincaré del espacio-tiempo no comutativo canónico

La definición de la no comutatividad (4.1) no es invariante bajo transformaciones de Lorentz al ser  $\Theta^{\mu\nu}$  una matriz constante. Sin embargo, podemos preservar la invariancia de esta ecuación si modificamos la estructura de álgebra de Poincaré estándar  $\mathcal{P}$  vista como álgebra de Hopf [4]. Primero presentaremos esta estructura algebraica y luego buscaremos la invariancia mediante una operación llamada *twist*, como veremos a continuación.

Antes, hemos de hacer una consideración sobre el espacio en el que actúan las transformaciones de Poincaré. En la discusión precedente obteníamos un producto estrella como aquél compatible con la identidad  $\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g]$ , que es resultado directo de las relaciones

de conmutación de los operadores  $\hat{x}_\nu$ . En dicho proceso hemos realizado una correspondencia a través de  $\hat{\mathcal{W}}$  con las coordenadas conmutativas  $x_\nu$ . Se deduce de este análisis que el producto de funciones debe ser modificado por el producto estrella  $y$ , por tanto, podemos aplicar este producto a las coordenadas  $x_\nu$ , que dejan de ser conmutativas bajo este producto, y podemos comprobar que las relaciones de conmutación

$$[x_\mu, x_\nu]_\star := x_\mu \star x_\nu - x_\nu \star x_\mu = i\Theta_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

son formalmente iguales a (4.1). El grupo de Poincaré actúa sobre estas coordenadas  $x_\nu$  y es la relación (5.1) la que no se preserva bajo rotaciones y boost.

Por otra parte, para componer dos transformaciones tenemos que tener definido dentro del álgebra de Poincaré la noción de multiplicación, sin embargo, partiendo solo de las relaciones de conmutación es posible encontrar varios productos distintos que las satisfagan.

## 5.1. Preliminares: ¿por qué álgebras de Hopf?

En esta sección se presentará de manera informal el concepto de álgebra de Hopf y de envolvente universal de un álgebra. Se nombrarán conceptos matemáticos sin una presentación rigurosa, ya que se pretende solo mostrar la idea de por qué surgen estas estructuras algebraicas al tratar los generadores de los grupos de simetría de un espacio-tiempo no conmutativo. Para su definición formal consultese el [Apéndice C](#).

### 5.1.1. Álgebras de Hopf

Un álgebra  $H$  es un  $\mathbb{C}$ -Espacio vectorial dotado de una operación interna que viene dada por la aplicación lineal  $m : H \otimes H \rightarrow H$ . Esta operación habitualmente es la multiplicación y se denota  $m(a \otimes b) = ab$ . Sin embargo, se puede considerar el corchete de Lie u otras aplicaciones bilineales. Para nuestros propósitos, consideraremos que  $H$  es unital y asociativa, que significa que existe un elemento unidad  $e := \mathbb{1}$  y que el producto es asociativo.

Buscamos un álgebra asociativa  $H$ , que actuando sobre el espacio de funciones, preserve la relación (5.1) como lo hace  $\mathcal{P}$  en la teoría usual. Tomemos ahora una función  $f = ax^\mu$  del álgebra de funciones  $\mathcal{A}$ . Como la no conmutatividad es un fenómeno que implica solo términos cuadráticos, un elemento de  $H$  que dé cuenta de la no conmutatividad actuando sobre este vector no ve los efectos de la no conmutatividad y actúa como lo haría  $\mathcal{P}$ . Denotaremos  $\widehat{\triangleright}$  a la acción usual del álgebra  $H$  sobre el álgebra  $\mathcal{A}$ . Esta acción usualmente se denota igual que la multiplicación para contextos en los que no se quiere hacer hincapié en la naturaleza de álgebra de Hopf. En un álgebra actuando sobre un espacio de funciones conmutativas, basta con definir  $Y\widehat{\triangleright} x^\mu$  para cada  $Y \in H$ , ya que si ahora consideramos un producto  $f = x^\mu x^\nu = m_{\mathcal{A}}(x^\mu \otimes x^\nu)$  en el caso usual. Por ejemplo si  $k \in \mathcal{P}$  entonces  $k(x^\mu x^\nu) = (kx^\mu)x^\nu + x^\mu(kx^\nu)$ . En términos de la notación anterior esto se expresa para  $Y \in H$

$$\begin{aligned} Y\widehat{\triangleright} f &= m_{\mathcal{A}}((Y\widehat{\triangleright} x^\mu) \otimes (\mathbb{1}\widehat{\triangleright} x^\nu) + (\mathbb{1}\widehat{\triangleright} x^\mu) \otimes (Y\widehat{\triangleright} x^\nu)) := \\ &= m_{\mathcal{A}}((Y \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes Y)\widehat{\triangleright}(x^\mu \otimes x^\nu)). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sin embargo, si buscamos que el producto entre dos coordenadas varíe para respetar la invariancia bajo transformaciones de  $H$ , hay que sustituir el término  $(Y \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes Y) \in H \otimes H$  por otro que cumpla nuestros propósitos. Para ello, tomamos una aplicación, llamada coproducto

$$\Delta : H \rightarrow H \times H, \quad \Delta(Y) = \sum_i Y_{(1)}^i \otimes Y_{(2)}^i. \quad (5.3)$$

La parte derecha es un elemento genérico de  $H \otimes H$  que cumple, para ser consistente con la asociatividad, el axioma de coasociatividad  $(\Delta \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta = (\mathbb{1} \otimes \Delta) \circ \Delta$ . Un álgebra de Hopf es la estructura algebraica que hace compatible el álgebra  $H$  con el coproducto y además está dotada con una coinversa  $S : H \rightarrow H$ , que calcula el generador de la transformación inversa. Para hacer compatibles estas operaciones es necesario añadir la counidad  $\epsilon : H \rightarrow \mathbb{C}$ , que asegura que la identidad no se ve deformada. De esta manera redefinimos la acción  $\triangleright$  de  $H$  sobre  $\mathcal{A}$  como

$$Y \triangleright (fg) := m_{\mathcal{A}}(\Delta(Y) \triangleright (f \otimes g)) = \sum_i (Y_{(1)}^i \triangleright f)(Y_{(2)}^i \triangleright g). \quad (5.4)$$

Gracias al axioma de coasociatividad basta conocer  $Y \triangleright x^\mu$  y  $\Delta(Y)$  para conocer la acción del álgebra sobre cualquier función analítica. En resumen, para tener un álgebra de Hopf completa basta con dar  $(H, m, \Delta, \epsilon, S)$  con las definiciones anteriores. Sin embargo, para ver los efectos de dicho grupo sobre  $\mathcal{A}$  basta con conocer  $\Delta(Y)$  y  $Y \triangleright x^\mu$ . En nuestra discusión, solo consideraremos los coproductos, ya que es el objeto que tiene significado físico sobre los campos.

En el caso (5.2) el coproducto es  $\Delta_0$ . Si  $Y \in \mathcal{H}$  es un generador cualquiera

$$\Delta_0 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, \Delta_0(Y) = Y \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes Y. \quad (5.5)$$

Para definir el álgebra de Hopf completamente, tenemos que definir la counidad  $\epsilon_0(Y) = 0$  y la coinversa  $S_0(Y) = -Y$ .<sup>2</sup>

Si  $H$  es el álgebra de Poincaré  $\mathcal{P}$ , se puede extraer un significado físico simple de este coproducto. El generador  $Y$  actúa sobre el estado  $|p\rangle$ , donde  $p$  es su momento y conocemos la acción de  $Y$  sobre este estado. El estado de dos partículas es  $|k\rangle = |p_1\rangle \otimes |p_2\rangle$ , que es el estado producto tensorial y sobre el estado  $|k\rangle$  actúa el generador  $\Delta(Y)$ . Este último generador actúa en un espacio más grande pero se obtiene de manera simple a partir del generador a un solo estado. La forma particular de (5.5) dice que se actúa sobre cada estado independientemente; por ejemplo, si  $Y$  es el generador de las rotaciones, una rotación en el espacio producto de estados se obtiene rotando independientemente  $|p_1\rangle$  y  $|p_2\rangle$ . Esto se puede denotar también como regla de Leibniz y modificarla equivale a modificar la suma usual de momentos o momentos angulares generalizados.

### 5.1.2. Envolvente universal de un álgebra de Lie

Otra estructura relevante es la envolvente universal de un álgebra de Lie. Los generadores de  $\mathcal{P}$  junto con la identidad forman un álgebra asociativa. Si relajamos las propiedades de  $\mathcal{P}$  de tal manera que las relaciones de conmutación, llamadas corchetes de Lie,  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \in \mathcal{P}$  sean vistos como una operación independiente de  $m^3$ ,  $\mathcal{P}$  está siendo tratada como un álgebra de Lie  $\mathcal{L}$ . Desde  $\mathcal{L}$  podemos definir alguna multiplicación  $m$ , de manera que  $ab - ba := [a, b]$ . El álgebra en la que se define la multiplicación a través del corchete de Lie es la envolvente universal de  $\mathcal{L}$ , que se denota  $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ . La ventaja de utilizar la envolvente universal es que no se dice nada *a priori* sobre la multiplicación  $m$ ; simplemente se pide que sea compatible con el corchete de Lie.

## 5.2. Álgebra de Poincaré twisteadas

Queremos encontrar un álgebra de generadores del grupo de transformaciones que preserve las relaciones (5.1) con este producto estrella. Utilizaremos la envolvente universal del álgebra

---

<sup>2</sup>En un álgebra de Hopf siempre se cumple  $\epsilon_0(\mathbb{1}) = 1$  y  $S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ .

<sup>3</sup>El corchete de Lie es una aplicación bilineal y antisimétrica que cumple la identidad de Jacobi.

de Poincaré  $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ , ya que nos interesa que se sigan cumpliendo las relaciones de conmutación para el álgebra de partida. En esta sección veremos que existe una transformación llamada *twist*, de  $\mathcal{U}(\mathcal{P})$  vista como álgebra de Hopf, que define un producto estrella. Veremos que, para el caso del espacio-tiempo canónico, este procedimiento puede reproducir el producto estrella definido hasta ahora. No obstante, en secciones posteriores veremos que este procedimiento no siempre reproduce el producto estrella definido con los operadores de Weyl  $\hat{\mathcal{W}}$ .

Recordemos los elementos de  $\mathcal{P}$ . Los generadores de las rotaciones y boost de Lorentz son  $M_{\mu\nu}$ , que forman una subálgebra, y  $P_\alpha$  son los generadores de las traslaciones. Las relaciones de conmutación son

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = -i(\eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} + \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha}), \quad (5.6)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\alpha] = -i(\eta_{\mu\alpha}P_\nu - \eta_{\nu\alpha}P_\mu), \quad [P_\mu, P_\nu] = 0. \quad (5.7)$$

Para modificar el coproducto usual (5.5), utilizaremos el *twist*  $\mathcal{F}$ , que se define como un elemento  $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(\mathcal{P}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{P})$  cumpliendo

$$(\mathcal{F} \otimes \mathbb{1})(\Delta_0 \otimes \mathbb{1})\mathcal{F} = (\mathbb{1} \otimes \mathcal{F})(\Delta_0 \otimes \mathbb{1})\mathcal{F}, \quad (5.8)$$

$$(\mathbb{1} \otimes \epsilon)\mathcal{F} = \mathbb{1} = (\epsilon \otimes \mathbb{1})\mathcal{F}. \quad (5.9)$$

Con este elemento realizamos la siguiente transformación con  $u = m((\mathbb{1} \otimes S)(\mathcal{F}))$

$$\{\mathcal{U}(\mathcal{P}), m, \Delta_0, \epsilon_0, S_0\} \rightarrow \{\mathcal{U}_\mathcal{F}(\mathcal{P}), m, \Delta_\mathcal{F} = \mathcal{F} \cdot \Delta_0 \cdot \mathcal{F}^{-1}, \epsilon_0, uS(Y)u^{-1}\}. \quad (5.10)$$

El álgebra de partida  $\mathcal{U}(\mathcal{P})$  actúa sobre el álgebra de funciones del espacio-tiempo conmutativo  $(\mathcal{A}, m_{\mathcal{A}})$ . El álgebra de Hopf deformada actúa, siguiendo la prescripción (5.4), sobre una deformación del álgebra de funciones  $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ , en la que el producto estrella que define esta transformación viene dado por

$$\phi \star \psi = m[\mathcal{F}^{-1} \triangleright (\phi \otimes \psi)]. \quad (5.11)$$

El producto estrella para funciones en el espacio-tiempo canónico discutido en la [Subsección 4.2](#) se puede considerar como candidato si conseguimos reescribir (4.16) en función de los generadores de Poincaré. En este caso es posible y da el *twist*

$$\mathcal{F}_\theta = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}P_\mu \otimes P_\nu\right). \quad (5.12)$$

Este *twist* cumple, además, las ecuaciones (5.8) y (5.9), y es por tanto un *twist* válido que respeta la invariancia de (5.1), como se muestra en [4]. Si tomamos como punto de partida este *twist* definimos otro camino para definir el producto estrella que, en este caso, es equivalente.

Definiremos ahora por completo el álgebra de Poincaré *twisteada*  $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ , cuyos coproductos podemos calcular gracias a las relaciones de conmutación (5.6)-(5.7) y a la relación (5.13)

$$Ad e^B C = e^B C e^{-B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\underbrace{B, [B, \cdots [B, C] \cdots]}_n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ad B)^n}{n!}. \quad (5.13)$$

De esta manera los coproductos son

$$\Delta_\mathcal{F}(P_\mu) = P_\mu \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_\mu, \quad (5.14)$$

$$\Delta_\mathcal{F}(M^\nu{}_\mu) = M^\nu{}_\mu \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes M^\nu{}_\mu + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} [\delta^\mu_\alpha P_\nu \otimes P_\beta + \delta^\mu_\beta P_\alpha \otimes P_\nu]. \quad (5.15)$$

Observamos que el coproducto de  $P_\mu$  es el estándar, lo que es consistente con la discusión de la [Sección 4](#), donde hemos visto que la ley de composición de momentos no se ve modificada. Sin embargo, el coproducto de  $M^\nu_\mu$  se ve modificado, ya que el coproducto usual no respetaba la invariancia de las relaciones de commutación. En este sentido, todas las teorías estudiadas en secciones anteriores son invariantes bajo el álgebra de Poincaré *twisted*.

## 6. El espacio $\kappa$ -Minkowski

En esta sección, exploraremos un nuevo tipo de commutatividad. En las secciones precedentes, los cálculos de la fórmula BCH<sup>4</sup> se simplificaban a un término gracias a la propiedad  $[\hat{x}_i, [\hat{x}_j, \hat{x}_k]] = 0$ . Ahora plantearemos un espacio-tiempo en el que esta propiedad no se cumple. El espacio  $\kappa$ -Minkowski es un álgebra de 4 dimensiones cuyos vectores coordenados forman un álgebra de Lie. Como en el caso precedente, vendrán representados por operadores  $\hat{x}_\mu$  que cumplen

$$[\hat{x}_0, \hat{x}_i] = \frac{i}{\kappa} \hat{x}_i. \quad (6.1)$$

El resto de commutadores se anulan. La constante  $\kappa$  tiene unidades de masa, que habitualmente se interpreta como la escala de Planck.

### 6.1. Cuantización de Weyl

Como en el caso anterior, definimos el operador  $\hat{\mathcal{W}}_\kappa[f] = \int d^4x f(x) \hat{\Delta}_\kappa(x)$ , con  $\hat{\Delta}_\kappa = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik_\mu x^\mu} e^{-ik_i \hat{x}^i} e^{ik_0 \hat{x}^0}$ . La elección de la onda plana  $e^{-ik_i \hat{x}^i} e^{ik_0 \hat{x}^0}$  se debe a la simplicidad de los cálculos con la fórmula BCH y la distinta elección entre las ondas planas tiene consecuencias que se discuten en la [Apéndice D](#).

La fórmula (4.10) sigue siendo válida pero, al no cumplirse la relación (4.14), la obtención del producto estrella es más complicada. Para encontrar una expresión de dicho producto con la fórmula BCH y con las relaciones de commutación (6.1) obtenemos

$$e^{-ik^{(1)}_i \hat{x}^i} e^{ik^{(1)}_0 \hat{x}^0} e^{-ik^{(2)}_i \hat{x}^i} e^{ik^{(2)}_0 \hat{x}^0} = e^{-i \left( k^{(1)}_i + e^{-\frac{k^{(1)}_0}{\kappa} k^{(2)}_i} \right) \hat{x}^i} e^{i(k^{(1)}_0 + k^{(2)}_0) \hat{x}^0}. \quad (6.2)$$

Podemos ahora calcular el producto estrella como se ha definido en la [Sección 4](#)  $\hat{\mathcal{W}}_\kappa[f] \hat{\mathcal{W}}_\kappa[g] = \int \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) e^{-i \left( k_i + e^{-\frac{k_0}{\kappa} q_i} \right) \hat{x}^i} e^{i(k_0 + q_0) \hat{x}^0}$ . Definiendo  $(k \oplus q) = (k_0 + q_0, k_i + e^{-\frac{k_0}{\kappa} q_i})$  podemos definir

$$(f \star_\kappa g)(x) = \int \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} \frac{dq^4}{(2\pi)^4} d^4e^{i(k \oplus q)_\mu x^\mu} \tilde{f}(k) \tilde{g}(q). \quad (6.3)$$

Esta expresión es complicada, luego intentaremos extraer el producto estrella por medio del *twist*. En términos de álgebras de Hopf, podemos definir los operadores  $P_\mu$  que actúan de la siguiente manera

$$P_\mu \triangleright e^{-ik_i \hat{x}^i} e^{ik_0 \hat{x}^0} = k_\mu e^{-ik_i \hat{x}^i} e^{ik_0 \hat{x}^0} \rightarrow P_\mu \triangleright \hat{\mathcal{W}}[f(x)] = \hat{\mathcal{W}}[-i\partial_\mu f(x)]. \quad (6.4)$$

---

<sup>4</sup>Baker-Campbell-Hausdorff.

Por tanto,  $\Delta(P_\mu)|k\rangle|q\rangle = (p \oplus q)_\mu|k\rangle|q\rangle$  con  $|k\rangle = e^{-ik_i\hat{x}^i}e^{ik_0\hat{x}^0}$ , de donde se deduce que la expresión del coproducto es

$$\begin{aligned}\Delta(P_0) &= P_0 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_0, \\ \Delta(P_i) &= P_i \otimes \mathbb{1} + \exp\left(-\frac{P_0}{\kappa}\right) \otimes P_i.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Como la expresión del producto estrella es complicada, la discusión fenomenológica no se puede hacer por analogía al caso canónico.

## 6.2. Invariancia de $\kappa$ -Minkowski

Podemos buscar un *twist*, como en la Subsección 5.2, que preserve la invariancia de (6.1), que nos permitirá identificar un producto estrella de otra manera. En este caso buscamos un  $\mathcal{F}_\kappa \in \mathcal{U}(\mathcal{P})$  que reproduzca el coproducto obtenido en (6.5). Sin embargo, la búsqueda de dicho *twist* se simplifica para un álgebra más grande llamada *igl(4)*<sup>5</sup> [5, 6]. El álgebra está formada por los generadores de las traslaciones  $P_\mu$  y los operadores  $L^\nu_\mu$  definidos como

$$L^\nu_\mu \triangleright \hat{\mathcal{W}}_\kappa[f(x)] = \hat{\mathcal{W}}_\kappa[-ix^\nu \partial_\mu f(x)]. \quad (6.6)$$

Por tanto los generadores del álgebra *igl(4)* cumplen

$$\begin{aligned}[P_\mu, P_\nu] &= 0, & [L^\mu_\nu, P_\sigma] &= i\delta^\mu_\sigma P_\nu, \\ [L^\mu_\nu, L^\lambda_\tau] &= i\left(\delta^\mu_\tau L^\lambda_\nu - \delta^\lambda_\nu L^\mu_\tau\right),\end{aligned}\quad (6.7)$$

y el álgebra de Poincaré es una subálgebra formada por los generadores

$$M_{\mu\nu} = \eta_{\nu\lambda} L^\lambda_\mu - \eta_{\mu\lambda} L^\lambda_\nu. \quad (6.8)$$

Un elemento  $\mathcal{F}_\kappa \in \mathcal{U}(\text{igl}(4))$  que cumple las condiciones (5.8) y (5.9) y reproduce el coproducto (6.5), tomando  $D = L^i{}_i$  el operador dilatación  $D \in \text{igl}(4)$ , es

$$\mathcal{F}_\kappa = \exp\left(i\frac{P_0}{\kappa} \otimes D\right). \quad (6.9)$$

Este *twist* se denomina *twist abeliano*. De esta manera, con la ayuda de la matriz  $h^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \delta^0_\nu \delta^\mu_0$  y con la expresión  $(\Omega^\mu_\nu)^\gamma_\alpha = (h^\gamma_\nu \delta^\mu_\alpha - h^\mu_\alpha \delta^\gamma_\nu)$ , podemos reescribir el coproducto de los  $L^\mu_\nu$  como

$$\Delta(L^\mu_\nu) = L^\mu_\nu \otimes \mathbb{1} + \delta^\mu_0 \frac{P_\nu}{\kappa} \otimes D + e^{-\frac{P_0}{\kappa} \otimes (\Omega^\mu_\nu)^\gamma_\rho} (\mathbb{1} \otimes L^\rho_\gamma). \quad (6.10)$$

Junto con (6.5) obtenemos todos los coproductos que caracterizan al álgebra *twistead*  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}_\kappa}(\text{igl}(4))$ . En el Apéndice E se amplía la expresión de este coproducto y se presenta la expresión de las coinversas que caracterizan por completo el álgebra de Hopf. Al hacer el límite  $\kappa \rightarrow \infty$ , se recupera el coproducto estándar, lo que concuerda con la suposición de que  $\kappa$  es la masa de Planck y los efectos de la no commutatividad no aparecen a bajas energías. Para los generadores de Lorentz (6.8) el coproducto es

$$\Delta_\kappa(M^\mu_\nu) = M^\mu_\nu \otimes \mathbb{1} + \left[\delta^\mu_0 \frac{P_\nu}{\kappa} - \delta^\nu_0 \frac{P_\mu}{\kappa}\right] \otimes D + \left(e^{-\frac{P_0}{\kappa} \otimes (\Omega^\mu_\nu)^\gamma_\rho} - e^{-\frac{P_0}{\kappa} \otimes (\Omega^\nu_\mu)^\gamma_\rho}\right) (\mathbb{1} \otimes M^\rho_\gamma). \quad (6.11)$$

---

<sup>5</sup>Acrónimo de *Inhomogeneous general linear algebra*.

De esta manera obtenemos un coproducto para  $\mathcal{P}$  que depende de  $D$ , que no es un elemento de dicho álgebra. Este *twist* define un producto estrella  $*_\kappa$ , cuya expresión es

$$(f *_\kappa g)(x) := \exp\left(\frac{i}{\kappa} \frac{\partial}{\partial y^0} z^i \frac{\partial}{\partial z^i}\right) f(y)g(z) \Big|_{y=z=x} \quad (6.12)$$

Este producto estrella  $*_\kappa$  y el obtenido en (6.3) no coinciden. En este caso buscar el producto estrella a través del grupo de transformaciones no es equivalente al cálculo directo con  $\hat{\mathcal{W}}$ . Al calcular la transformada de Fourier de este último, vemos que el término  $k \oplus q$  de  $*$  se sustituye por  $(k_0 + q_0, k_i + q_i - \frac{k_0}{\kappa} q_i)$ , que coincide con el primer término del desarrollo en  $\kappa^{-1}$  de  $k \oplus q$ . Concluimos que la condición de invariancia de las relaciones de conmutación es más débil que la exigida para obtener el producto  $*$  desde la cuantización de Weyl.

Actuando con este producto es fácil comprobar que  $[x^0, x^i]_{*_\kappa} = \frac{i}{\kappa} x^i$  y, por construcción, esta relación es invariante bajo las transformaciones de  $\mathcal{P}$  *twisteadas*. Podemos construir teorías invariantes bajo este álgebra deformada que son invariantes y cuyas coordenadas cumplen las relaciones de conmutación de  $\kappa$ -Minkowski. Además, dichas teorías están dotadas de un producto estrella que tiene una forma simple, lo que permitiría un estudio fenomenológico como el realizado en el caso canónico.

Los generadores de Lorentz presentan coproductos que no pertenecen por completo a  $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ , lo cual *a priori* no tiene por qué ser un inconveniente a la hora de presentar una teoría, pero puede marcar una vía para tratar de plantear otras teorías. Existen diversos *twist* construidos sobre  $\mathcal{U}(igl(4))$  que respetan la invariancia de la teoría, siendo este un caso particular [6].

### 6.3. $\kappa$ -Poincaré

En las secciones anteriores hemos considerado la estructura de álgebra de Hopf a raíz de las deformaciones dadas por un *twist*. Al realizar un *twist*, se supone que las relaciones de conmutación del álgebra de partida se deben preservar. Sin embargo, existen álgebras de Hopf obtenidas como deformaciones de álgebras de Lie que no preservan el corchete de Lie. Un caso particular es el llamado álgebra de  $\kappa$ -Poincaré, que surge como una deformación del álgebra  $\mathcal{P}$  [7].

Utilizaremos como generadores del álgebra  $J^k = \frac{1}{2} \epsilon^k_{lm} M^{lm}$  para las rotaciones y  $N^k = M^{0k} = -M^{k0}$  para los boost.  $\kappa$ -Poincaré viene descrito por las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [P_j, J_i] &= i\epsilon_{ijk} P_k, \quad [P_0, J_I] = 0, \quad [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J^k, \quad [J_i, N_j] = i\epsilon_{ijk} N^k, \quad [N_i, N_j] = -i\epsilon_{ijk} N^k, \\ [P_j, N_j] &= i\delta_{ij} \left( \frac{\kappa}{2} \left( 1 - e^{-2P_0/\kappa} \right) + \frac{\vec{P}^2}{2\kappa} \right) - i\frac{1}{\kappa} P_i P_j, \quad [P_0, N_i] = i P_i, \end{aligned} \quad (6.13)$$

que recupera el álgebra de Poncaré para  $\kappa \rightarrow \infty$ . Los coproductos modificados son<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \Delta(P_k) &= P_k \otimes \mathbb{1} + e^{-P_0/\kappa} \otimes P_k, \quad \Delta(P_0) = P_0 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_0, \quad \Delta(J_i) = J_i \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes J_i, \\ \Delta(N_i) &= N_i \otimes \mathbb{1} + e^{-P_0/\kappa} \otimes N_i + \frac{1}{\kappa} \epsilon_i^{jk} P_j \otimes J_k. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Como vemos, el coproducto para los momentos es el esperado en (6.5), y el coproducto de los generadores de boost se escribe en términos de elementos del álgebra. Para ver que las

---

<sup>6</sup> Para una caracterización completa con las coinversas ver [7].

coordenadas  $x_\nu$  cumplen las relaciones de  $\kappa$ -Minkowski y que la relación es invariante, basta recordar que un álgebra modificada como álgebra de Hopf no modifica su acción sobre coordenadas individuales. De esta manera

$$P_\mu \triangleright x^\nu = -i\delta_\mu^\nu, \quad N_i \triangleright x^j = ix^0\delta_i^j, \quad N_i \triangleright x^0 = ix^i. \quad (6.15)$$

Para productos de dos coordenadas  $x^\mu x^\nu = m(x^\mu \otimes x^\nu)$ , hay que utilizar el coproducto de cada generador, como se indica en (5.4), de manera que

$$P_0 \triangleright (x^0 x^j - x^j x^0) = -i(x^i - x^i) = 0, \quad P_l \triangleright (x^0 x^j - x^j x^0) = -i\delta_l^j + \frac{\delta_l^j}{\kappa} + i\delta_l^j = \frac{\delta_l^j}{\kappa}. \quad (6.16)$$

Luego,  $[x^0, x^j] = x^0 x^j - x^j x^0 = \frac{i}{\kappa}x^j$ , que es la definición (6.1). Para comprobar la invariancia, usando además  $J_n \triangleright x^0 = 0$ , hacemos

$$N_l \triangleright (x^0 x^j - x^j x^0) = -\frac{1}{\kappa}x^0\delta_l^j = N_l \triangleright \frac{i}{\kappa}x^i. \quad (6.17)$$

Por tanto,  $\kappa$ -Poincaré es un álgebra que genera un grupo de simetría de  $\kappa$ -Minkowski. El álgebra, en esta forma, no puede provenir de un *twist* del álgebra  $\mathcal{U}(\mathcal{P})$  por no satisfacer el mismo álgebra de Lie. Sin embargo, es posible realizar un cambio de base no lineal tal que el álgebra en los nuevos generadores satisface las relaciones de commutación de Poincaré. La base en la que hemos presentado el álgebra recibe el nombre de base *bicrossproduct*, mientras la base en la que los commutadores se reducen al álgebra de Poincaré es la base clásica, que viene dada por el cambio

$$K_0(P_0, \vec{P}) = \kappa \sinh \frac{P_0}{\kappa} + \frac{\vec{P}^2}{2\kappa}, \quad K_i(P_0, \vec{P}) = P_i e^{\frac{P_0}{\kappa}}. \quad (6.18)$$

Recuperar el álgebra de Poincaré sugiere que los efectos físicos de la deformación se presentarán en los coproductos y no en las relaciones de commutación del álgebra. En esta nueva base, cabe preguntarse si existe un *twist* que lleve de  $\mathcal{U}(\mathcal{P})$  a  $\kappa$ -Poincaré, sin embargo, sabemos que no es posible encontrar dicho *twist* sin los generadores de  $igl(4)$  [8].

## 7. Conclusiones

El caso más simple de no commutatividad dado por el espacio-tiempo no commutativo canónico, si bien no cumple el objetivo de eliminar las divergencias ultravioletas, presenta una fenomenología interesante que no presenta el caso commutativo. La mezcla Infrarojo Ultravioleta que elimina algunos diagramas divergentes, es la más interesante. Dicha fenomenología es consecuencia del producto estrella, que está bien definido para el caso canónico. Hemos visto que dicho producto se puede derivar de manera alternativa buscando el álgebra que preserva la invariancia de la definición de las relaciones de commutación.

Para el caso de  $\kappa$ -Minkowski, el mismo procedimiento lleva a resultados distintos para el producto estrella derivado de ambas maneras. Se hace patente aquí una ambigüedad a la hora de definir el grupo de simetría que preserva la invariancia y que puede llevar a fenomenologías distintas a causa de productos estrella distintos.

Es de esperar que  $\kappa$ -Minkowski presente también algún efecto interesante a la hora de formular una teoría de campos de manera análoga a la que se ha realizado en este trabajo con el caso no commutativo canónico. Por tanto, se abre la posibilidad de estudiar, en futuros trabajos, cuál es la fenomenología de la teoría formulada sobre  $\kappa$ -Minkowski y de qué manera el grupo de simetría considerado tiene efecto sobre la discusión fenomenológica.

## A. Notación y unidades

Se usan las unidades naturales  $\hbar = c = 1$ . De esta manera podemos expresar magnitudes fundamentales en función de unidades de energía o de masa  $[longitud] = [tiempo] = [energía]^{-1} = [masa]^{-1}$ .

La signatura de la métrica de Minkowski es  $(+ - - -)$  y la denotamos  $\eta^{\mu\nu}$ :

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

con índices griegos  $\mu, \nu, \dots$  que toman los valores  $0, 1, 2, 3$  indicando  $t, x, y, z$ , e índices latinos  $i, j, \dots$ , indicando solo  $x, y, z$  que toman los valores  $1, 2, 3$ .

La derivada parcial con respecto a una variable se denota  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$ .

Un cuadrivector se representa por  $(p_0, p_1, p_2, p_3) = (p_0, \vec{p})$ .

Se utiliza el convenio de sumación de Einstein, que sobreentiende los sumatorios para índices repetidos, uno como subíndice y otro como superíndice

$$\phi_\mu \gamma^\mu = \sum_{\mu=0}^3 \phi_\mu \gamma^\mu. \quad (\text{A.2})$$

Para subir o bajar un índice se usa la métrica de Minkowski

$$\phi_\mu = \eta_{\mu\nu} \phi^\nu. \quad (\text{A.3})$$

Para tensores simétricos en los índices  $\alpha, \beta, \gamma$  se indica

$$C^{(\alpha\beta\gamma)\mu\nu} = C^{(\gamma\beta\alpha)\mu\nu} = C^{(\alpha\gamma\beta)\mu\nu}, \quad (\text{A.4})$$

$$B^{(\alpha\beta|\mu\nu|\gamma)} = B^{(\gamma\beta|\mu\nu|\alpha)} = B^{(\alpha\gamma|\mu\nu|\beta)}. \quad (\text{A.5})$$

La contracción de campos se define como

$$\langle 0 | T \{ \overbrace{\phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3)}^{} \phi(x_4) \phi(x_5) \phi(x_6) \} | 0 \rangle = \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_3) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ \phi(x_2) \phi(x_4) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ \phi(x_5) \phi(x_6) \} | 0 \rangle \quad (\text{A.6})$$

Las siglas BCH indican la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff.

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[B,A]]+\dots}. \quad (\text{A.7})$$

## B. Aparición de *ghost* con derivadas de orden superior a 2

Los términos de más de dos derivadas en el lagrangiano dan lugar a estados de norma negativa. Por ejemplo, la ecuación

$$\left( (b+a) \square^2 \pi + \frac{1}{2} m^2 \square \pi \right) = 0, \quad (\text{B.1})$$

da lugar a dichos estados. Para verlo, primero hemos de definir el espacio de Fock, que es el espacio de todos los estados posibles  $|n\rangle$ , siendo  $|0\rangle$  el vacío. En concreto, supondremos que todo el espacio se puede describir como autovector del cuadrimomento  $y$ , por tanto, viene dado por la masa  $y$  el momento de cada partícula  $|\vec{p}, m\rangle$ , siendo  $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  y siendo  $m$  un parámetro discreto.

Utilizaremos una normalización covariante  $\langle \vec{p}, m | \vec{q}, m \rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$  de esta manera:

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbf{1} = \sum_m \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |\vec{p}, m\rangle \frac{1}{2E_p} \langle \vec{p}, m|. \quad (\text{B.2})$$

Por otra parte, podemos expresar como función de  $(x - y)$  la siguiente amplitud de probabilidad

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle &= \\ &\langle 0 | e^{-ia_\mu p^\mu} e^{ia_\mu p^\mu} \phi(x) e^{-ia_\mu p^\mu} e^{ia_\mu p^\mu} \phi(y) e^{-ia_\mu p^\mu} e^{ia_\mu p^\mu} | 0 \rangle = \\ &\langle 0 | \phi(x+a) \phi(y+a) | 0 \rangle = D(x-y). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Podemos calcular un propagador retardado, asumiendo  $y_0 > x_0$

$$D_R(y-x) = \vartheta(y_0 - x_0) \langle 0 | [\phi(y), \phi(x)] | 0 \rangle = \langle 0 | [\phi(y), \phi(x)] | 0 \rangle, \quad (\text{B.4})$$

donde  $\vartheta(x)$  es la función escalón de Heaviside. Para el primer sumando, usando (B.2),

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(y-x) \phi(0) | 0 \rangle &= \\ &\sum_n \langle 0 | \phi(y-x) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle = \\ &\sum_m \int \frac{d^3 p}{2E_p} \langle 0 | \phi(y-x) | \vec{p}, m \rangle \langle \vec{p}, m | \phi(0) | 0 \rangle = \\ &\sum_m \int \frac{d^3 p}{2E_p} \langle 0 | e^{i(y-x)_\mu p^\mu} \phi(0) e^{-i(y-x)_\mu p^\mu} | \vec{p}, m \rangle \langle \vec{p}, m | \phi(0) | 0 \rangle = \\ &\sum_m \int \frac{d^3 p}{2E_p} \langle 0 | \phi(0) | \vec{p}, m \rangle e^{-i(y-x)_0 p^0} e^{-i(y-x)_j p^j} \langle \vec{p}, m | \phi(0) | 0 \rangle = \\ &\sum_m \int \frac{d^3 p}{2E_p} e^{-i(y-x)_0 p^0} e^{-i(y-x)_j p^j} n_m(\vec{p}), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde  $n_m(\vec{p}) = \langle 0 | \phi(0) | \vec{p}, m \rangle \langle \vec{p}, m | \phi(0) | 0 \rangle$ . Análogamente para el segundo:

$$\langle 0 | \phi(0) \phi(y-x) | 0 \rangle = \sum_m \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{i(y-x)_0 p^0} e^{i(y-x)_j p^j} n_m(\vec{p}). \quad (\text{B.6})$$

Así, el propagador retardado es

$$\begin{aligned}
D_R(y - x) &= \\
&\sum_m \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \left( e^{-i(y-x)_\mu p^\mu} - e^{i(y-x)_\mu p^\mu} \right) n_m(\vec{p}) = \\
&\sum_m \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( \frac{e^{-i(y-x)_\mu p^\mu}}{2E_p} n_m(\vec{p}) \Big|_{p_0=-E_p} + \frac{e^{-i(y-x)_\mu p^\mu}}{-2E_p} n_m(-\vec{p}) \Big|_{p_0=-E_p} \right). 
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Y también se puede expresar [9]

$$\begin{aligned}
D_R(y - x) &= \\
&\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_m \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p^0 + i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2} e^{-i(x-y)_\mu p^\mu} = \\
&\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_m \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-i) \Pi(p_0 + \epsilon, \vec{p}) e^{-i(x-y)_\mu p^\mu},
\end{aligned} \tag{B.8}$$

con  $\Pi(k_\mu)$  el propagador de la partícula. Para pasar de una integral en tres variables a una de cuatro tenemos que utilizar el teorema de los residuos; de esta manera, comparando la integral en tres y cuatro variables, un residuo corresponde a uno de los dos sumandos proporcionales a  $n_m(\vec{p})$ . En una teoría unitaria,  $n_m(\vec{p})$  se interpreta como una norma; por tanto, no puede ser negativa. Por lo tanto los residuos encontrados en un propagador deben asegurar esto. Un residuo negativo debe tomar su signo de la energía del denominador y por tanto ha de tener  $k_0$  negativo para que  $n(\vec{k}) = |\langle 0 | \phi(0) | \vec{p}, m \rangle|^2 > 0$ .

Para la ecuación (B.1) el propagador es

$$\Pi_\pi(k) = -\frac{1}{2(a+b)k^4 - m^2 k^2} = \frac{1}{m^2} \left[ \frac{1}{k^2} - \frac{a+b}{(a+b)k^2 - \frac{1}{2}m^2} \right], \tag{B.9}$$

que representa dos partículas cuyos polos en  $k_0$  son  $k_0^2 = \vec{k}^2, k_0^2 = \vec{k}^2 \pm \frac{m^2}{4(a+b)}$ . Si calculamos los residuos

$$Res(k_0 = \pm \|\vec{k}\|) = \pm \frac{1}{2m^2 \|\vec{k}\|}, \tag{B.10}$$

$$Res \left( k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 \pm \frac{m^2}{4(a+b)}} \right) = \mp \frac{1}{2m^2 \sqrt{\vec{k}^2 \pm \frac{m^2}{4(a+b)}}}. \tag{B.11}$$

Luego, para valores de  $a + b \neq 0$  podemos encontrar residuos negativos que corresponden a energías positivas, lo que da lugar a *ghost* o estados de norma negativa. En general esto sucede siempre que el número de derivadas es superior a 2, ya que al factorizar un propagador en la forma final de (B.9) siempre aparecen signos alternos que obligan a encontrar residuos con signos alternados.

## C. Estructuras algebraicas: álgebra de Lie, de Hopf y envolvente universal

### C.1. Álgebras de Hopf

#### C.1.1. Álgebra

Un álgebra  $\mathcal{A}$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial dotado de una operación interna que viene dada por la aplicación lineal  $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , se identifica  $m(a \otimes b) = ab$  cuando sea posible.  $\mathcal{A}$  es unital si existe un único elemento  $e \in \mathcal{A}$  tal que  $\forall a \in \mathcal{A} m(e \otimes a) = m(a \otimes e) = a$ .  $\mathcal{A}$  es asociativa si cumple (C.1). La aplicación unidad  $\eta : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$  cumpliendo (C.2), representa la multiplicación por un escalar del espacio vectorial.

$$m \circ (\mathbf{1} \otimes m) = m \circ (m \otimes \mathbf{1}) \quad \text{Asociatividad ,} \quad (\text{C.1})$$

$$m \circ (\mathbf{1} \otimes \eta) = \mathbf{1} = m \circ (\eta \otimes \mathbf{1}) \quad \text{Unidad .} \quad (\text{C.2})$$

#### C.1.2. Coálgebra

Una coálgebra  $\mathcal{C}$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial dotado de un coproducto, que es una aplicación lineal  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$  cumpliendo (C.3) y una counidad que es una aplicación lineal  $\epsilon : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{K}$  cumpliendo (C.4).

$$(\mathbf{1} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathbf{1}) \circ \Delta \quad \text{Cosociatividad ,} \quad (\text{C.3})$$

$$(\mathbf{1} \otimes \epsilon) \circ \Delta = \mathbf{1} = (\epsilon \otimes \mathbf{1}) \circ \Delta \quad \text{Counidad .} \quad (\text{C.4})$$

Estos axiomas son duales a los del álgebra asociativa, representando ambos en forma de diagrama comutativo, para la asociatividad:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathbf{1} \otimes m} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ m \otimes \mathbf{1} \downarrow & & \downarrow m \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{m} & \mathcal{A} \\ \text{Asociatividad} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\mathbf{1} \otimes \Delta} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\ \Delta \otimes \mathbf{1} \uparrow & & \uparrow \Delta \\ \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\Delta} & \mathcal{C} \\ \text{Coasociatividad} & & \end{array} \quad (\text{C.5})$$

y para la unidad:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathbb{K} \cong \mathbb{K} \times \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathbf{1} \otimes \eta} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \otimes \eta \downarrow & & \downarrow m \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{m} & \mathcal{A} \\ \text{Unidad} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathbb{K} \cong \mathbb{K} \times \mathcal{C} & \xleftarrow{\mathbf{1} \otimes \epsilon} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\ \epsilon \otimes \mathbf{1} \uparrow & & \uparrow \Delta \\ \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\Delta} & \mathcal{C} \\ \text{Cunidad} & & \end{array} \quad (\text{C.6})$$

#### C.1.3. Biálgebra

Una biálgebra  $\mathcal{B}$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial que está dotado de una estructura de álgebra asociativa unital y de coálgebra cumpliendo los axiomas de compatibilidad

$$\begin{aligned}\Delta(ab) &= \Delta(a)\Delta(b), & \epsilon(ab) &= \epsilon(a)\epsilon(b) & \forall a, b \in \mathcal{B}, \\ \Delta(e) &= e \otimes e, & \epsilon(e) &= 1 \in \mathbb{K}.\end{aligned}\tag{C.7}$$

#### C.1.4. Álgebra de Hopf

Un álgebra de Hopf  $\mathcal{H}$  es una biálgebra sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  dotada de una coinversa, que es una aplicación lineal  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  que cumple

$$m \circ (S \otimes \mathbf{1}) \circ \Delta = m \circ (\mathbf{1} \otimes S) \circ \Delta = \mathbf{1}\epsilon.\tag{C.8}$$

En forma de diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{S \otimes \mathbf{1}} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & & \\ \Delta \nearrow & & & & m \searrow \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{K} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{H} \\ \Delta \swarrow & & & & m \swarrow \\ \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{\mathbf{1} \otimes S} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & & \end{array}\tag{C.9}$$

Esta definición junto con (C.7) implica

$$\begin{aligned}S(ab) &= S(a)S(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{H}, \\ S(e) &= e.\end{aligned}\tag{C.10}$$

La acción (por la izquierda) de un álgebra de Hopf  $\mathcal{H}$  sobre un álgebra unital y asociativa se define como una aplicación lineal

$$\triangleright : \mathcal{H} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A},\tag{C.11}$$

y se escribe  $h \triangleright a$  siendo  $h \in \mathcal{H}$  y para  $a \in \mathcal{A}$ . La acción cumple las condiciones de compatibilidad

$$(hg) \triangleright a = h \triangleright (g \triangleright a), \quad h \triangleright e = \epsilon(h)e.\tag{C.12}$$

La acción es covariante si, para el coproducto  $\Delta(h) = \sum_i h_{(1)}^i \otimes h_{(2)}^i$

$$h \triangleright (ab) = \sum_i (Y_{(1)}^i \triangleright a)(Y_{(2)}^i \triangleright b).\tag{C.13}$$

Es decir, preserva su estructura. En este trabajo solo se consideran acciones covariantes.

## C.2. Álgebra de Lie

Un álgebra de lie  $\mathcal{L}$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con un producto, llamado corchete de Lie

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \quad (\text{C.14})$$

que cumple los axiomas

$$[ag + bh, j] = a[g, j] + b[h, j], \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, \quad g, h, j \in \mathcal{L} \quad (\text{Bilinealidad}), \quad (\text{C.15})$$

$$[g, h] = -[h, g] \quad \forall g, h \in \mathcal{L} \quad (\text{Antisimetría}), \quad (\text{C.16})$$

$$[g, [h, j]] + [h, [j, g]] + [j, [g, h]] = 0 \quad \forall g, h, j \in \mathcal{L} \quad (\text{Identidad de Jacobi}). \quad (\text{C.17})$$

Un álgebra finito-dimensional tiene una base de generadores. Un álgebra asociativa  $\mathcal{A}$  con  $[a, b] = ab - ba \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$  es un álgebra de Lie, sin embargo, un álgebra de Lie no tiene por qué ser un álgebra asociativa. Sin embargo, se pueden construir productos compatibles a partir del corchete de Lie.

### C.2.1. Envolvente universal de un álgebra de Lie

Si partimos del corchete de Lie, se pueden definir varios productos que cumplen  $a \cdot b - b \cdot a := [a, b]$ . La envolvente universal de  $\mathcal{L}$ , que se denota  $\mathcal{U}(\mathcal{L})$  es el álgebra que, salvo isomorfismo, contiene a todas las álgebras unitarias así construidas. Sea el álgebra tensorial de  $V$ , con  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial

$$\bigotimes(V) \equiv \bigoplus_{p=0}^{\infty} \otimes^p V, \quad (\text{C.18})$$

con  $\otimes^0 V = \mathbb{K}$ . Para un álgebra de Lie finito-dimensional  $\bigotimes(V)$  es isomorfa al álgebra de polinomios formales sobre los generadores  $X^i$  dados por  $P(X^i) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi^{i_1 \dots i_k} X_{i_1} \dots X_{i_k}$  con  $\Pi^{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{K}$ . Por tanto podemos identificar  $\forall a, b \in \mathcal{L}$ ,  $ab - ba$  con  $a \otimes b - b \otimes a$ .

El álgebra  $\mathcal{U}(\mathcal{L})$  se construye identificando con cero el elemento  $a \otimes b - b \otimes a - [a, b]$  y todos sus múltiplos, es decir

$$\mathcal{U}(\mathcal{L}) \equiv \bigotimes(\mathcal{L}) / \langle a \otimes b - b \otimes a - [a, b] \rangle, \quad (\text{C.19})$$

donde, por definición, el ideal bilateral es

$$\begin{aligned} \langle a \otimes b - b \otimes a - [a, b] \rangle = \\ \left\{ (a \otimes b - b \otimes a - [a, b]) \otimes g, g \otimes (a \otimes b - b \otimes a - [a, b]) \quad \forall g \in \bigotimes(\mathcal{L}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

De esta manera  $\mathcal{U}(\mathcal{L})$  es única salvo isomorfismos. Para mayor discusión consultar [10].

## D. Unicidad del producto estrella y del *twist*

En el contexto del espacio-tiempo no commutativo canónico, se ha considerado la definición de onda plana como  $e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}$ , sin embargo, podemos considerar cualquier otra definición que sea

producto de exponentiales. Nos restringiremos al caso en 4 dimensiones. Por ejemplo, consideramos la onda plana  $e^{ik_0x^0}e^{-ik_j\hat{x}^j}$  y el operador  $\hat{\mathcal{W}}$  se ve sustituido por

$$\hat{\mathcal{W}}_l[f] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{ik_0x^0} e^{-ik_j\hat{x}^j}, \quad \Delta_l(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik_\mu x^\mu} e^{ik_0x^0} e^{-ik_j\hat{x}^j}. \quad (\text{D.1})$$

Operando obtenemos

$$\hat{\Delta}_l(x) \hat{\Delta}_l(y) = \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{i(k+k')_0\hat{x}^0} e^{-i(k+k')_i\hat{x}^i} e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu} e^{-ik_\mu x^\mu - ik'_\nu y^\nu} e^{\frac{i}{2}\Theta^{0\nu}[k_0 k'_\nu + k_\nu k'_0]}, \quad (\text{D.2})$$

que es formalmente igual a (4.11) sustituyendo la matriz  $\Theta^{\mu\nu} \rightarrow \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{0i}[\delta_0^\mu \delta_i^\nu + \delta_i^\mu \delta_0^\nu]$ . Esta matriz no es antisimétrica, por lo que aparecen factores adicionales en (4.16), haciendo que el producto estrella  $\star_l$  cambie a

$$f(x) \star_l g(x) = e^{\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_\mu^y \partial_\nu^z} e^{-\frac{i}{2}\Theta^{0\nu}[\partial_0^y \partial_\nu^z + \partial_\nu^y \partial_0^z - 2\partial_0^y \partial_\nu^y]} f(y)g(z) \Big|_{y=z=x}. \quad (\text{D.3})$$

Es decir una elección de onda plana distinta lleva a un producto estrella distinto luego podemos definir la misma teoría con diversos productos. Deducimos que  $\star$  no es único. Como un *twist* define un producto estrella, podemos deducir que tampoco el *twist* es único. Si encontramos otro producto estrella que en términos de operadores cumpla las condiciones de consistencia, obtendremos otro *twist* que describe la misma teoría.

## E. Coproductos de los generadores de $igl(4)$ tras el *twist* abeliano

El *twist* presentado en la Subsección 6.2 para el álgebra  $igl(4)$  lleva a los coproductos de los generadores  $L^\mu_\nu$  que se expone a continuación. Con las ecuaciones (5.13) y (5.10) vemos que basta calcular  $Ade^{\frac{i}{\kappa}P_0 \otimes D}(L^\mu_\nu \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes L^\mu_\nu)$ . Término a término

$$Ade^{\frac{i}{\kappa}P_0 \otimes D}(L^\mu_\nu \otimes \mathbb{1}) = L^\mu_\nu \otimes \mathbb{1} + \delta^\mu_0 \frac{P_\nu}{\kappa} \otimes D. \quad (\text{E.1})$$

Para  $Ade^{\frac{i}{\kappa}P_0 \otimes D}(\mathbb{1} \otimes L^\mu_\nu)$  reescribiendo, con la ayuda de la matriz  $h^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \delta^0_\nu \delta^\mu_0$ , el comutador

$$[D, L^\mu_\nu] = i(\delta^i_\nu L^\mu_i - \delta^\mu_i L^i_\nu) = i(h^\gamma_\nu \delta^\mu_\alpha - h^\mu_\alpha \delta^\gamma_\nu) L^\alpha_\gamma = i(\Omega^\mu_\nu)^\gamma_\alpha L^\alpha_\gamma. \quad (\text{E.2})$$

Podemos ver  $(\Omega^\mu_\nu)^\gamma_\alpha = (\mathbb{1} \otimes h - h \otimes \mathbb{1})^\mu_\alpha{}^\gamma_\nu = \delta^\mu_0 \delta^0_\alpha \delta^\gamma_\nu - \delta^\gamma_0 \delta^0_\nu \delta^\mu_\alpha$  y por tanto

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{[\frac{i}{\kappa}P_0 \otimes D, [\frac{i}{\kappa}P_0 \otimes D, \dots, [\frac{i}{\kappa}P_0 \otimes D, \mathbb{1} \otimes L^\mu_\nu] \dots]]}_{n} = \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{P_0}{\kappa} \right)^n \otimes (\Omega^n)^\mu_\nu{}^\gamma_\alpha L^\alpha_\gamma = e^{-\frac{P_0}{\kappa} \otimes (\Omega)^\mu_\nu{}^\gamma_\alpha} (\mathbb{1} \otimes L^\alpha_\gamma), \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

donde  $\Omega^n$  se entiende como  $(\mathbb{1} \otimes h - h \otimes \mathbb{1})^n$ . Podemos escribir el coproducto como

$$\Delta(L^\mu{}_\nu) = L^\mu{}_\nu \otimes \mathbb{1} + \delta^\mu{}_0 \frac{P_\nu}{\kappa} \otimes D + e^{-\frac{P_0}{\kappa} \otimes (\Omega^\mu{}_\nu)^\gamma{}_\rho} (\mathbb{1} \otimes L^\rho{}_\gamma). \quad (\text{E.4})$$

Para calcular explícitamente dicha expresión, reescribiendo  $n_\nu^\mu = \delta_0^\mu \delta_\nu^0$  y como  $h^2 = h$  podemos demostrar las relaciones

$$\begin{aligned} (\Omega^2)^{\mu\gamma}{}_{\nu\alpha} &= (\Omega^\mu{}_\nu)^\gamma{}_\alpha (\Omega^\alpha{}_\gamma)^\rho{}_\sigma = [(\mathbb{1} \otimes h - h \otimes \mathbb{1})^2]^{\mu\,\rho}{}_{\sigma\,\nu} = \\ &\quad [\mathbb{1} \otimes h + h \otimes \mathbb{1} - 2h \otimes h]^{\mu\,\rho}{}_{\sigma\,\nu} = [n \otimes h + h \otimes n]^{\mu\,\rho}{}_{\sigma\,\nu} \\ &= \delta^\mu{}_0 \delta^0{}_\sigma \delta^\rho{}_\nu + \delta^\rho{}_0 \delta^0{}_\nu \delta^\mu{}_\sigma - 2\delta^\mu{}_0 \delta^0{}_\sigma \delta^\rho{}_0 \delta^0{}_\nu, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned} (\Omega^3)^{\mu\beta}{}_{\nu\phi} &= (\Omega^\mu{}_\nu)^\gamma{}_\alpha (\Omega^\alpha{}_\gamma)^\rho{}_\sigma (\Omega^\sigma{}_\rho)^\beta{}_\phi = [(\mathbb{1} \otimes h - h \otimes \mathbb{1})^3]^{\mu\,\beta}{}_{\sigma\,\phi} = \\ &\quad (\mathbb{1} \otimes h - h \otimes \mathbb{1})^{\mu\,\beta}{}_{\sigma\,\phi} = (\Omega^\mu{}_\nu)^\beta{}_\phi. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Con lo que

$$e^{-\frac{P_0}{\kappa} \otimes (\Omega^\mu{}_\nu)^\gamma{}_\rho} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - \sinh\left(\frac{P_0}{\kappa}\right) \otimes (\Omega^\mu{}_\nu)^\gamma{}_\rho + \left[\cosh\left(\frac{P_0}{\kappa}\right) - 1\right] \otimes (\Omega^2)^{\mu\gamma}{}_{\nu\rho}. \quad (\text{E.7})$$

De donde se deduce, añadiendo los coproductos de (6.5), que los coproductos obtenidos con este *twist* son:

$$\begin{aligned} \Delta_\kappa(P_0) &= P_0 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_0, & \Delta_\kappa(P_k) &= P_k \otimes \mathbb{1} + e^{-\frac{P_0}{\kappa}} \otimes P_k, \\ \Delta_\kappa(L_k^m) &= L_k^m \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes L_k^m, & \Delta_\kappa(L_0^k) &= L_0^k \otimes \mathbb{1} + e^{\frac{P_0}{\kappa}} \otimes L_0^k, \\ \Delta_\kappa(L_k^0) &= L_k^0 \otimes \mathbb{1} + e^{-\frac{P_0}{\kappa}} \otimes L_k^0 + \frac{P_k}{\kappa} \otimes D, \\ \Delta_\kappa(L_0^0) &= L_0^0 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes L_0^0 + \frac{P_0}{\kappa} \otimes D. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Las coinversas son

$$\begin{aligned} S_\kappa(P_0) &= -P_0, & S_\kappa(P_k) &= -P_k e^{\frac{P_0}{\kappa}}, \\ S_\kappa(L_k^m) &= -L_k^m, & S_\kappa(L_0^k) &= -L_0^k e^{-\frac{P_0}{\kappa}}, & S_\kappa(L_0^0) &= -L_0^0 + D \frac{P_0}{\kappa}, \\ S_\kappa(L_k^0) &= -e^{\frac{P_0}{\kappa}} L_k^0 + \frac{P_k}{\kappa} D e^{\frac{P_0}{\kappa}}. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

## Referencias

- [1] M. D. Schwartz, *Quantum field theory and the standard model* (Cambridge University Press, 2014).
- [2] R. J. Szabo, Quantum field theory on noncommutative spaces, Phys. Rep. **378**, 207 (2003), arXiv:hep-th/0109162.
- [3] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk, y N. Seiberg, Noncommutative perturbative dynamics, JHEP **02**, 020 (2000), arXiv:hep-th/9912072.
- [4] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima, y A. Tureanu, On a Lorentz-invariant interpretation of noncommutative space-time and its implications on noncommutative QFT, Phys. Lett. **B604**, 98 (2004), arXiv:hep-th/0408069.
- [5] J.-G. Bu, H.-C. Kim, Y. Lee, C. H. Vac, y J. H. Yee,  $\kappa$ -deformed Spacetime From Twist, Phys. Lett. **B665**, 95 (2008), arXiv:hep-th/0611175.
- [6] A. Pachol,  *$\kappa$ -Minkowski spacetime: Mathematical formalism and applications in Planck scale physics*, Tesis Doctoral, inédita, Wroclaw U., 2011, arXiv:1112.5366.
- [7] J. Kowalski-Glikman, A short introduction to  $\kappa$ -deformation, Int. J. Mod. Phys. **A32**, 1730026 (2017), arXiv:1711.00665.
- [8] A. Borowiec, J. Lukierski, y A. Pachol, Twisting and  $\kappa$ -Poincaré, J. Phys. **A47**, 405203 (2014), arXiv:1312.7807.
- [9] M. E. Peskin, *An introduction to quantum field theory* (Westview press, 1995).
- [10] X. Bekaert, Universal enveloping algebras and some applications in physics, Lect. Notes Modave Summer School in Mathematical Physics (2005), IHES-P-2005-26.
- [11] T. Jurić, S. Meljanac, y A. Samsarov, Twist deformations leading to  $\kappa$ -Poincaré Hopf algebra and their application to physics, J. Phys. Conf. Ser. **670**, 012027 (2016), arXiv:1511.05592.
- [12] F. Mercati y G. Amelino-Camelia, *Noether analysis for field theory in  $\kappa$ -Minkowski non-commutative spacetime*, Trabajo fin de Máster, inédito, Sapienza Università di Roma, 2007.
- [13] C. J. Isham, Prima facie questions in quantum gravity, Lect. Notes Phys. **434**, 1 (1994), arXiv:gr-qc/9310031.
- [14] P. Aschieri *et al.*, A Gravity theory on noncommutative spaces, Class. Quant. Grav. **22**, 3511 (2005), arXiv:hep-th/0504183.
- [15] M. Maggiore, *A modern introduction to quantum field theory* Vol. 12 (Oxford University Press, 2005).
- [16] A.P. Balachandran, S.G. Jo y G. Marmo, *Group theory and Hopf Algebras: lectures for physicists* (World Scientific, 2010).