TRABAJO FIN DE MÁSTER

"Funciones"

Autora: Leyre Burgui Ederra

Tutora: Pilar Bolea Catalán

Máster de profesorado de Secundaria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas. Especialidad de Matemáticas.

ÍNDICE

Páginas

1. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar……………………………2

2. Sobre los conocimientos previos del alumno……………………………………3

3. Sobre las razones de ser del objeto matemático…………………………………9

4. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma………………………………....12

4.1 Sesión 1……………………………………………………………………….14

4.2 Sesión 2……………………………………………………………………..…14

4.3 Sesión 3……………………………………………………………………….17

4.4 Sesión 4……………………………………………………………………….19

4.5 Sesión 5……………………………………………………………………..…20

4.6 Sesión 6……………………………………………………………………..…23

4.7 Sesión 7……………………………………………………………………..…24

4.8 Sesión 8……………………………………………………………………….26

4.9 Sesión 9……………………………………………………………………….27

4.10 Sesión 10…………………………………………………………...…..27

5. Sobre la evaluación……………………………………………………………….27

6. Reflexión personal……………………………………………………………..37

7. Sobre la bibliografía y páginas web…………………………………………....38

8. Anexos……………………………………………………………………………40

1.- Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

El objeto matemático elegido para este trabajo fin de máster son las **funciones** en su aspecto más formal. Dicho objeto se estudia a lo largo de toda la Educación Secundaria Obligatoria, (ESO) e incluso en el Bachillerato. Pero en esta memoria nos centraremos en el curso de **tercero de la ESO**. En la materia de matemáticas, en este curso, se cuentan con tres horas semanales y el contenido de la misma está dividido en seis bloques según el Currículo Oficial Aragonés (ORDEN de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón):

- Bloque 1: “Contenidos comunes”.
- Bloque 2: “Números”.
- Bloque 3: “Álgebra”.
- Bloque 4: “Geometría”.
- Bloque 5: “Funciones y gráficas”.
- Bloque 6: “Estadística y probabilidad”.

Como es obvio, el objeto de las funciones está en el bloque número cinco titulado “funciones y gráficas”. Dentro de este bloque se pueden distinguir dos apartados, el primero de ellos dedicado a las características de las funciones, es decir, las funciones en su aspecto más formal y la segunda parte destinada a funciones lineales y cuadráticas. En este trabajo, se desarrollará el primer apartado del bloque con los siguientes contenidos:

- Definición de función, imagen y antiimagen.
- Cálculo de la imagen y antiimagen tanto gráficamente como algebraicamente.
- Formas de expresar una función.
- Dominio y recorrido de una función.
- Continuidad y discontinuidad.
- Monotonía.
- Máximos y mínimos relativos y absolutos.
- Puntos de corte de una función con los ejes cartesianos.
- Estudio algebraico de los puntos de corte de una función con los ejes coordenados.
- Tasa de variación: definición y cálculo algebraicamente.

- Simetrías respecto del origen y respecto del eje de ordenadas. Definición y cálculo algebraicamente.

- Periodicidad. Definición y cálculo.

- Estudio a través del gráfico de las siguientes características: dominio, recorrido, continuidad, discontinuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, puntos de cortes con los ejes cartesianos, tasa de variación, simetría y periodicidad.

- Interpretación de una gráfica.

Para atender a los diferentes contenidos, se plantearán varios campos de problemas que versarán sobre las características de las funciones tanto locales como globales. En la mayor parte posible, los problemas harán referencia a situaciones que nos podemos encontrar en la vida cotidiana.

Debido a que un simple gráfico puede ofrecer numerosa información de un simple vistazo y que puede ser usado para comunicar una gran cantidad de información e incluso a veces ahorrar muchas palabras de explicación, es importante, transmitir a los alumnos esa idea, para que vean la importancia que tienen los gráficos de funciones y lo útil que es conocer las características de un gráfico para poder analizarlo. Es por ello que se pretende que los alumnos adquieran las distintas técnicas para hallar las diferentes características, tanto locales como globales, de las funciones.

A causa de que los conocimientos relacionados con este tema, como por ejemplo la derivación, son desconocidos para los alumnos, casi la totalidad de las características se enseñarán de forma visual y ostensiva.

Las técnicas que se explicarán las podrán poner en práctica los alumnos a través de los ejercicios que se plantearán a lo largo de las sesiones.

Las tecnologías que van a ser utilizadas para la justificación de las técnicas van a ser razonamientos de tipo inductivo o constructivo que se darán cuando se presente a los alumnos situaciones problemáticas de las que extraerán el conocimiento y establecerán una premisa a partir de ellos. Por otra parte, el profesor utilizará razonamientos deductivos para enunciar las técnicas y justificarlas a todo el grupo de la clase.

2.- Sobre los conocimientos previos del alumno

Para poder seguir, aprovechar y afrontar el aprendizaje del objeto matemático de las funciones dentro de los objetivos marcados, es necesario que el alumno tenga conocimientos previos acerca de:

- Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

- Resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

- Notación y terminología cartesiana.

- Notación de intervalos, los distintos tipos de intervalos y su significado.
- Noción intuitiva de infinito.
- Conjuntos numéricos y operaciones.
- Fórmulas de geometría métrica elemental.

Los conocimientos previos acerca de la resolución de ecuaciones y sistemas se corresponden con el bloque tres de álgebra que han estudiado previamente y en cursos anteriores.

Es claro que tienen que recordar la notación y terminología cartesiana, como eje de abscisas y de ordenadas, puesto que lo necesitarán para localizar puntos y entender las características que se van a estudiar sobre funciones. Estos conceptos sobre notación han sido estudiados a lo largo de los dos cursos anteriores en el bloque de "funciones y gráficas". Relacionado con este bloque, también deben de recordar la idea de infinito. Al afrontar el aprendizaje del objeto matemático de las funciones recordarán que ya han visto algunos de los conceptos que se imparten; pero tal vez de otra forma, puesto que el tema de gráficas aparece latente en primero y segundo curso de ESO, ya que el currículo sigue un diseño de propuesta en espiral aportado por Brunel (1972).

Además, es necesario que traigan a la memoria los conjuntos numéricos junto con sus operaciones; este objeto ha sido visto en el curso de tercero en el segundo bloque titulado "números" y también a lo largo de los dos cursos anteriores.

Por último, como veremos más adelante, construiremos funciones a través de la geometría métrica, para lo cual también se necesitarán conocimientos previos de ese bloque que se ha estudiado con anterioridad en este curso y en los dos cursos anteriores; como por ejemplo, fórmulas de áreas, perímetros…

Como puede verse al revisar el currículo aragonés, si se ha realizado un aprovechamiento de la enseñanza recibida en cursos previos, se puede decir que la enseñanza anterior ha propiciado que los alumnos adquieran esos conocimientos previos necesarios para afrontar el aprendizaje de las funciones.

Además, como ya hemos citado, en este caso, el objeto matemático de las funciones no es nuevo, sino que el bloque de "funciones y gráficas" se imparte desde primero de ESO, por tanto, se necesitarán esos conocimientos básicos adquiridos sobre las funciones en cursos anteriores.

Como consecuencia, los centros que hayan seguido el currículo deberán haber conseguido que el alumno adquiera los conocimientos previos y las competencias necesarias para afrontar el aprendizaje de las funciones con más profundidad en este tema.

Como se puede observar, en el currículo aragonés, antes del bloque que nos afecta en este trabajo se trabajan otros cuatro bloques que en mayor o menor medida nos servirán como conocimientos previos para afrontar el aprendizaje del objeto matemático de las funciones.

Para comprobar si los alumnos poseen estos conocimientos previos, al comienzo de la unidad didáctica se realizará una evaluación inicial para determinar el nivel de competencia curricular de cada alumno sobre el tema de funciones. Esta evaluación inicial se realizará durante la primera sesión y constará de distintos problemas tratando los conceptos que hemos citado previamente. Una posible evaluación inicial sería:

Ejercicio 1: Resolución de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

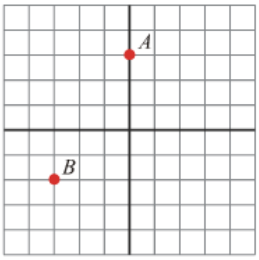
a) $x^2-5x+6=0$ b) $-x^2+7x-10=0$ c) $x^2-5x=0$ d) $x^2+1=0$

Ejercicio 2: Resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

a) $\begin{cases} -\dfrac{x}{4}+\dfrac{2y}{3}=2 \\ -\dfrac{x}{2}+\dfrac{5y}{6}=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -x=-\dfrac{3}{2}y+3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y-\dfrac{3}{2}x=1 \\ \dfrac{3}{2}x-y=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 5x+2y=-1 \end{cases}$

Ejercicio 3: Representación de puntos en los ejes cartesianos.

Escribe las coordenadas de los puntos A y B y sitúa en el plano los puntos $C=(-2,5)$, $D=(1,3)$.



Ejercicio 4: Conjuntos numéricos.

a) Dados los intervalos, $A=[-3,3]$, $B=(-4,1)$, $C=[-1,4)$. Representar sobre la recta real y escribir con notación de intervalo el resultado de las siguientes operaciones: a) $A\cup B$ b) $A\cup C$ c) $A\cup B\cup C$.

b) Escribe los números reales entre 2 y 7, ambos inclusive.

c) Escribe los números entre reales entre -2 y 0, pero sin que ellos estén incluidos.

d) Escribe los números reales entre 5 y 9, incluyendo únicamente al 5.

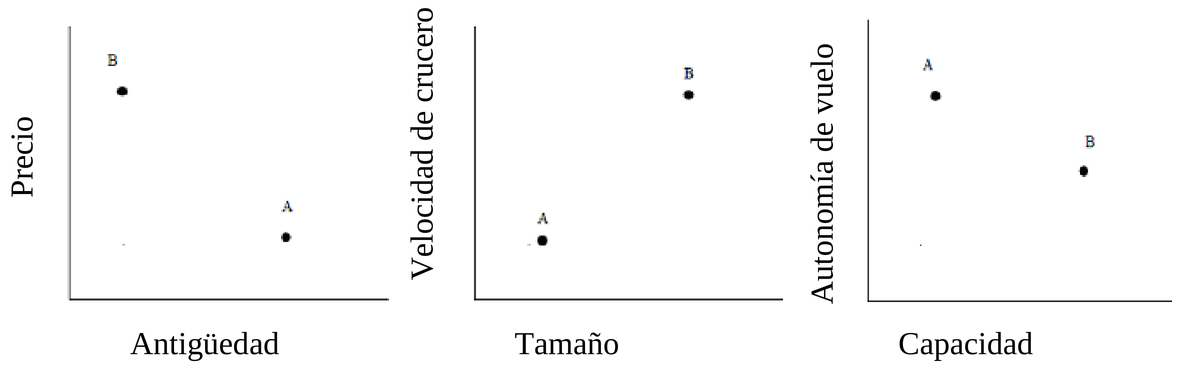
Problema 5: Cuestión de expresión verbal correcta.

Imagínate que estás hablando con un compañero de tu clase por teléfono y quieres que dibuje algunas gráficas. Escribe una secuencia de instrucciones, de forma que tu compañero pueda dibujarlas.

Con este problema les haremos ver que es necesario tener un lenguaje preciso y claro para poder entendernos con los demás y que a su vez ellos entiendan exactamente y sepan lo que queremos expresar.

<u>Problema 6</u>: Interpretación de datos.

Las siguientes gráficas describen a dos aviones ligeros A y B. La primera gráfica muestra que el avión B es más caro que el A. ¿Qué otras informaciones podemos sacar?



Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o no justificando tu respuesta en cada caso:

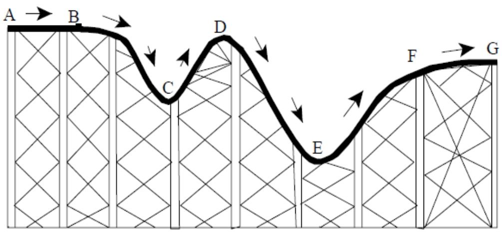
- El avión más viejo es más barato.
- El avión más rápido es más pequeño.
- El avión más grande es más viejo.
- El avión más barato transporta menos pasajeros.
- El avión que transporta menos pasajeros debe repostar con más frecuencia.
- El avión más rápido transporta menos pasajeros.

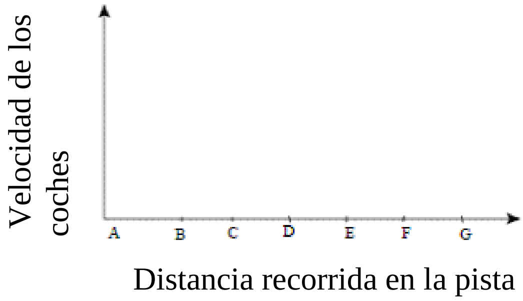
Dibujar en el cuaderno dos sistemas de coordenadas cartesianas. En el primero de ellos, representa en el eje de ordenadas la antigüedad y en el eje de abscisas la velocidad. En el segundo, representa en el eje de ordenadas el tamaño y en el eje de abscisas la autonomía de vuelo. Representa en cada uno de ellos los dos puntos correspondientes a los aviones A y B.

Con este problema les haremos recordar la interpretación de los puntos en una gráfica y repasarán la notación y terminología de los ejes cartesianos.

<u>Problema 7</u>: Representación gráfica.

El siguiente dibujo muestra la pista de una montaña rusa en la que los coches se desplazan de A a B a una velocidad lenta y constante. Describe, por escrito y mediante una gráfica, como variará la velocidad de estos coches en su desplazamiento desde A hasta G.





Las siguientes preguntas te ayudaran a ver cómo puedes realizar la gráfica.

- ¿En qué partes de la pista viaja más rápido el coche? ¿Y más despacio?
- ¿Dónde va más rápido el coche, en B o en D? ¿En D o en F? ¿En C o en E?
- ¿Dónde acelerará? ¿Dónde decelera?

Una vez realizada la gráfica contesta a las siguientes preguntas:

- ¿Se podría reconstruir el perfil de una montaña rusa a partir de la gráfica anterior?
- ¿Observas alguna relación entre la forma de una pista de la montaña rusa y la forma de su grafica? Si es así, escribe una explicación. ¿Hay alguna excepción?

A través de este problema trataremos de que recuerden como se representa una gráfica si nos están dando una descripción del suceso a través de un dibujo.

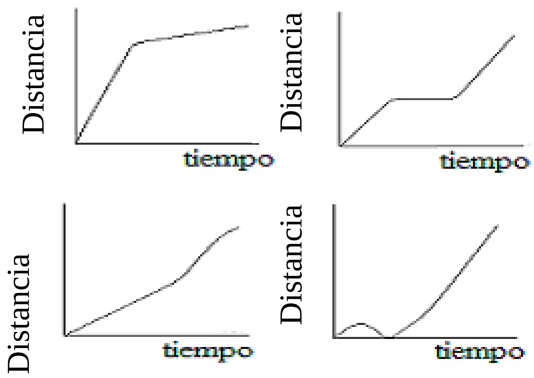
<u>Problema 8</u>: Reconocimiento de gráficas a través de una descripción verbal.

Muchos niños suelen ir al colegio en bicicleta. La primera clase empieza a las ocho, lo que significa que la mayor parte de los alumnos deben salir de casa a las siete y media, porque llegar tarde... La distancia al colegio es de 10 kilómetros. Las cuatro gráficas que vienen a continuación muestran cómo las cosas son distintas para Carmen, Fernando, Maruja y Yolanda cuando van al colegio.

Yolanda: Yo salgo con calma y en el camino empiezo a pedalear más deprisa.

Fernando: Esta mañana iba con la moto rápido. Pero cuando casi había llegado, me he quedado sin gasolina. Así que he tenido que ir el resto andando.

Carmen: Acababa de salir de casa, cuando me he dado cuenta de que me había olvidado el chándal y he vuelto a casa para buscarlo. Después pedaleé muy deprisa para llegar

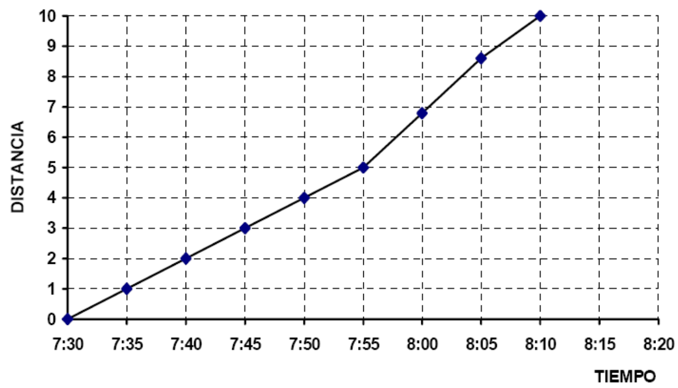


Ahora responde a las siguientes preguntas:

1. ¿A quién corresponde cada gráfica?

2. ¿Qué texto ha podido decir Maruja? Escríbelo.

Aquí tienes otra vez la gráfica de Yolanda, pero esta vez, con mayor precisión. Úsala para contestar a las siguientes preguntas:



a) ¿Cuántos Km. había recorrido Yolanda a las 7:45? ¿Cuántos minutos tardó Yolanda en los 5 primeros Km.? ¿Cuántos Km. pedaleó entre las ocho menos cuarto y las ocho?

b) ¿Cómo se puede saber que Yolanda ha ido a la misma velocidad en los primeros 25 minutos (de 7:30 a 7:55)?

c) Si Yolanda hubiera seguido con la misma velocidad, ¿habría llegado a tiempo al colegio? ¿Cuántos minutos de adelanto o atraso? ¿Cómo has encontrado la respuesta?

d) ¿Entre qué horas, aproximadamente, fue mayor la velocidad de Yolanda? ¿Cómo lo puedes saber? Intenta calcular a qué velocidad pedaleaba en esos momentos.

Con este problema, recordarán como reconocer una gráfica si se les da una descripción verbal e interpretarán también una gráfica.

Mediante todos estos problemas, también se ha puesto de manifiesto el concepto que se estudiará en sesiones posteriores sobre las distintas formas posibles de expresar una función.

La metodología a seguir en esta primera sesión dedicada a repasar los conocimientos necesarios para afrontar el aprendizaje del nuevo objeto matemático de las funciones será la siguiente: los alumnos realizarán individualmente las cuatro primeras actividades, posteriormente los alumnos se dividirán en grupos de tres personas aproximadamente y a cada grupo se les repartirá un problema. Preferiblemente, más de un grupo tendrá el mismo problema. Los alumnos trabajarán sobre ese problema respondiendo a una serie de preguntas y, por último, se realizará una puesta en común, es decir, se realizará la institucionalización, de manera que todos los alumnos puedan comentar, comprender y recordar todos aquellos conceptos básicos que han aparecido.

Notar que como la propuesta de los problemas es variada y de diferente temporalización, se intentará que la dedicación temporal de los grupos sea equilibrada.

Para ello, en el momento que un grupo haya terminado con el problema propuesto, se les entregará otro.

El profesor, mientras los alumnos están trabajando, tiene más bien que animar al debate y provocar "conflictos" para que los alumnos pongan en cuestión sus creencias espontáneas, mediante un análisis reflexivo que obligue a los alumnos a rechazar las propuestas incoherentes o inconsistentes antes de dar la respuesta correcta.

3.- Sobre las razones de ser del objeto matemático

Una vez que los alumnos recuerden los conocimientos previos pasaremos a conocer las razones de ser que se van a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático. Para ello, se realizará un estudio del concepto de función con el objetivo de ver la evolución del concepto en los distintos momentos históricos. A los alumnos se les mostrará una síntesis de lo que ha sido la evolución histórica.

Como se puede imaginar, el concepto de función, con el significado que le damos actualmente, es el producto de un largo proceso de elaboración como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 200 años.

El interés de este estudio para el profesor y la didáctica es claro, ya que aportará conocimiento relevante para comprender los factores determinantes de los procesos de enseñanza-aprendizaje de esta noción a lo largo de los distintos niveles de enseñanza y los fenómenos de transposición didáctica correspondientes.

Las primeras manifestaciones se consideran en la civilización babilónica. Los matemáticos babilónicos llevaban a cabo estudios sobre diversos casos de dependencias entre cantidades de diferentes magnitudes. Estos cálculos estaban dispuestos en columnas, de forma análoga a las tablas de valores que acostumbran a construir los alumnos para cualquier función. Los babilónicos, no se limitaban sólo a tabular, sino que usaban interpolaciones y extrapolaciones.

Según cita Wussing (1998), los babilónicos poseían un instinto de funcionalidad, ya que una función no sólo es una fórmula sino una relación más general que asocia elementos de dos conjuntos.

La primera gráfica funcional conocida se conserva en la Biblioteca Real de Munich y representa los cambios de latitud de los planetas (división vertical) respecto de la longitud (eje horizontal).

En la época de la matemática griega, existía una idea primitiva de función contenida en las nociones de cambio y relación entre magnitudes variables.

La concepción de la "variabilidad" como característica exclusiva de las magnitudes físicas puede considerarse como un claro obstáculo para el desarrollo de la noción de función.

Actualmente asociamos de forma natural a cualquier cantidad de una magnitud, una cierta medida numérica, pero en el pensamiento griego, magnitudes y números eran cosas bien distintas. Esta separación entre números y magnitudes queda patentemente establecida en los Elementos de Euclides.

Otro obstáculo para el desarrollo de la noción de función era la costumbre de expresar todas las relaciones entre las cosas bajo forma de proporciones.

Durante la Edad Media, se desarrollaron dos métodos principales para expresar las relaciones funcionales. El primero de ellos fue el “álgebra de palabras”, en el que se conseguía la generalización empleando letras del alfabeto. El segundo fue a través de un método geométrico por medio de gráficas.

Una sugerencia primitiva del actual concepto de representación gráfica de funciones la tuvo Nicolás Oresme. Su objetivo era representar por una figura las intensidades de una cualidad de una magnitud continua que depende de otra magnitud análoga.

Las escuelas de Oxford y París han desempeñado un papel importante en el desarrollo de la noción general de función, ya que apareció en ellas la primera idea de función aunque imprecisa. Pero, fue en el siglo XVII cuando apareció un nuevo impulso en el desarrollo de esta noción.

El crecimiento de los cálculos matemáticos, el desarrollo del álgebra simbólica y la extensión del concepto de número (naturales y complejos) han constituido los preliminares del concepto de función como relación entre conjuntos numéricos mas que como cantidades.

El poderoso instrumento algebraico permitió a Fermat (1601-1655) y a Descartes (1586-1650) el descubrimiento del mundo de la “representación analítica”. Comenzó a formarse la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando el método de coordenadas.

La importancia de este método proviene del hecho de permitir traducir cualquier problema de geometría plana en un problema algebraico diferente. “Este fue el primer puente entre dos áreas diferentes de las matemáticas” (Wussing, 1998).

El obstáculo de la diferenciación entre números y magnitudes fue superado por el desarrollo de la notación simbólica, pero el Álgebra trajo otro obstáculo, ya que se llegó a pensar que las únicas relaciones dignas de estudio eran las que se podían describir mediante expresiones algebraicas y ecuaciones.

La palabra función aparece por primera vez en un escrito de Leibniz titulado *Methodus tangentium inversa, seu de fonctionibus*. Pero Leibniz no la utiliza en el sentido actual sino en el sentido corriente que describe la función de un órgano en un organismo. Pero la falta de un término general para representar cantidades arbitrarias conducirá al uso de la palabra función en el sentido de una expresión analítica.

Jean Bernoulli usó por primera vez, en 1698, la palabra función con un significado próximo al que le damos actualmente. En el siglo XVIII apareció la primera consideración de una función como expresión analítica en un artículo de Bernouilli publicado en las memorias de la Academia Real de Ciencias de París en 1718. En este mismo artículo propone la letra φ para designar la característica de una función, escribiendo todavía el argumento sin paréntesis: φx. Según Bernouilli, autor citado por Wussing, definía el concepto de función como: “Se llama función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera de esta magnitud variable y de constantes".

El desarrollo posterior del concepto de función se considera obra exclusiva de Euler, quien analiza el concepto de función proponiendo como definición la de su maestro Bernouilli, pero reemplazando el término de cantidad por el de expresión analítica. Además, define las nociones lineales y realiza una clasificación de las funciones definiendo criterios para su determinación. Sin embargo, consideraba como función sólo a las expresiones analíticas, por tanto, todas las funciones las consideraba representadas por una serie de potencias.

Fue a través de la resolución de problemas prácticos cuando Euler tuvo necesidad de considerar funciones más generales. Así construye una noción más abstracta y universal.

Nos encontramos ante la presencia de dos nociones de función: la concepción formal de expresión analítica y la concepción más general de correspondencia arbitraria; el problema de la relación entre las dos estaba propuesto y su solución llego a finales del s. XIX.

En lo que se refiere a la notación del concepto de función, Euler fue el primero en utilizar $f(x)$.

En el siglo XIX, Cauchy, Lobachevsky, Dirichlet y Riemann propusieron distintas definiciones sobre el concepto de función. El desarrollo de la teoría de funciones de Weierstrass y la teoría de conjuntos de Cantor se produjo en los últimos años del siglo.

A partir de los trabajos de Dedekind y Cantor la noción de función ya no se limita al campo numérico, sino que se extiende a conjuntos cualesquiera.

La teoría de conjuntos sirvió de base a la actual teoría de funciones de variable real, a la topología, al álgebra, al análisis funcional…

En el siglo XX, Las definiciones actuales del concepto de función se basan en la noción general introducida por Dirichlet.

Es evidente que la noción primitiva de función era mucho más intuitiva, la actual tiene un alto grado de formalización que la hace mucho más abstracta.

Según escribe Wussing (1998): "El concepto más importante de las Matemáticas es, sin dudarlo, el de función. En casi todas las ramas de la Matemática actual la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con una gran generalidad"

Resumiendo, la irrupción del concepto real de función pudo acontecer sólo tras el paso de una matemática de magnitudes consideradas de forma estática a una matemática de las variables, es decir, sólo después de que, en el tránsito del siglo XVI al siglo XVII, Vieta, Fermat y Descartes distinguieran de manera consciente entre magnitudes constantes y variables. Al principio se consideraba la función como relación entre cantidades de magnitudes variables: identificación de regularidades en fenómenos sujetos al cambio. Después como razón o proporción, ya que trataban de buscar la proporcionalidad como relación privilegiada entre magnitudes variables. A continuación, como gráfica puesto que se consideraban como modelos geométricos de las relaciones. Luego como expresión analítica debido al nacimiento del Álgebra que permitió expresar la dependencia entre variables por medio de expresiones analíticas. Y por ultimo, como aplicación al considerar la función como una correspondencia de tipo general.

La evolución conceptual sobre la noción de función ha sido primero tratada como objeto protomatemático pues se utiliza el concepto de función en la antigüedad de forma implícita a través de tablas numéricas. Segundo, como objeto paramatemático por el deseo de relacionar las causas con los efectos y por tanto, considerar la noción de función como un instrumento utilizado. Y en tercer lugar, como objeto matemático; prueba de ello es que se crea una nueva rama, denominada teoría de Funciones.

Visto el desarrollo del concepto de función algunas de estas razones de ser de las funciones se han tenido en cuenta en la matemática escolar, puesto que iniciamos un estudio de búsqueda de relaciones entre datos concretos (mundo babilónico) hasta cristalizar en el ámbito numérico y formalizar relaciones entre variables con ausencia de magnitudes.

La razón de ser, a este nivel de tercero de la ESO, coincide con las razones de ser históricas que dieron origen al concepto de función. La razón de ser que se utiliza es como instrumento que modeliza relaciones de dependencia y nos permite el avance en el estudio de situaciones en las que dicha dependencia se produce y la toma de decisiones argumentadas.

Los problemas que he diseñado que constituyen la razón de ser van a ser descritos en el siguiente punto en la segunda sesión.

4.- Sobre la secuencia didáctica y su cronograma.

Se va a realizar una propuesta conjunta en la cual a lo largo de las sesiones se presentarán el campo de problemas y ejercicios a utilizar en el aula; las técnicas o modificaciones de ella que sean necesarias para la realización de los ejercicios y las tecnologías que justificarán dichas técnicas; así como la metodología a seguir en cada una de las sesiones.

A continuación presento un cronograma con las actividades a realizar en sesiones, indicando en cada una de ellas las actividades a realizar, la metodología a emplear y la temporalización de cada una de ellas. Posteriormente, desarrollo de manera más concreta cada una de las sesiones.

SESIÓN	Actividad	Tiempo	Recurso	Agrupación
Previos	Evaluación inicial.	44 min.	Ficha	
	Video.	6 min.	Portátil	Grupal

Razón de ser	Problema 1: compañía telefónica.	15 min.	Ficha	Individual
	Problema 2: comparación de salarios.	15 min.	Ficha	Individual
	Conceptos: función, imagen, antiimagen.	15 min.	Pizarra	Grupal
	Ejercicios.	5 min.	Cuaderno	Individual
Reconocimiento de características generales y locales	Corrección tarea y dudas.	5 min.	Pizarra	Grupal
	Problema 3.	15 min.	Cuaderno	Grupos
	Conceptos: dominio, recorrido, continuidad de una función.	15 min.	Pizarra	Grupal
	Ejercicios.	15 min.	Cuaderno	Individual
Reconocimiento de características generales y locales	Corrección tarea y dificultades de los alumnos.	10 min.	Pizarra	Grupal
	Conceptos: monotonía, tasa de variación y presentación distintos lenguajes.	25 min.	Pizarra	Grupal
	Ejercicios.	15 min.	Cuaderno	Individual
Reconocimiento de características generales y locales	Corrección de la tarea y resolución dudas.	5 min.	Pizarra	Grupal
	Problema: máximo beneficio.	10 min.	Cuaderno	Individual
	Problema: noria.	5 min.	Pizarra	Grupal
	Conceptos: puntos de corte con los ejes cartesianos, extremos y periodicidad.	20 min.	Pizarra	Grupal
	Ejemplos y ejercicios.	10 min.	Cuaderno	Individual
Simetría	Corrección tarea.	5 min.	Pizarra	Grupal
	Problema.	25 min.	Ficha	Grupos
	Concepto de simetría.	5 min.	Pizarra	Grupal
	Ejemplos y ejercicios.	15 min.	Cuaderno	Individual

Actividades	Corrección tarea.	10 min.	Pizarra	Grupal
	Actividades de refuerzo, consolidación y ampliación.	40 min.	Cuaderno, ficha	
Actividades	Corrección tarea.	10 min.	Pizarra	Grupal
	Resolución de problemas, actividades de consolidación, refuerzo y ampliación.	50 min.	Cuaderno, ficha	
Prueba de conocimientos	Realización de la prueba.	60 min.		Individual
Corrección de la prueba	Corrección de la prueba.	50 min.	Pizarra, cuaderno	Grupal

Como se va a observar a lo largo de las sesiones, las técnicas utilizadas en el reconocimiento de propiedades de las funciones, se limitan a la comprobación del cumplimiento de la definición. Unas veces de forma ostensiva y otras mediante el cálculo o la manipulación algebraica.

SESIÓN 1: Previos

En el punto dos anterior titulado sobre los conocimientos previos de los alumnos se han propuesto los problemas que se van a realizar en esta sesión y se ha comentado también la metodología a llevar a cabo. La temporalización de estos problemas será aproximadamente de 44 minutos y a continuación se les propondrá ver un video de la serie "Más por menos", el capítulo 11 dedicado a gráficas y funciones. (http://ntic.educacion.es/w3/recursos/secundaria/matematicas/mas_menos/11_m_m/actividades_parte_1.html)

De esta manera, les introduciremos al tema de forma amena y muchas veces para ellos atractiva.

SESIÓN 2: Razón de ser

La segunda sesión está dedicada a la razón de ser de las funciones. Esta sesión comenzará presentándoles a los alumnos los siguientes dos problemas, la resolución de éstos se realizará por grupos de aproximadamente cuatro personas. Para cada problema les daremos 15 minutos para que contesten a las preguntas planteadas y pasados los 30 minutos se realizará la puesta en común. Durante la puesta en común, aflorarán conceptos como función, imagen y antiimagen. Durante los últimos cinco minutos se realizarán ejercicios donde pongan en práctica el conocimiento adquirido durante la sesión. Para casa se mandarán ejercicios similares.

Problema 1: Compañía telefónica.

En el mercado existen varias compañías telefónicas donde podemos contratar el servicio de teléfono móvil. Veamos como tarifican tres de estas compañías y contestemos a las preguntas planteadas.

- La compañía A nos cobra 0,15 € el establecimiento de llamada y 0,08 € por cada minuto de llamada. Al final de cada llamada la compañía nos aplica el IVA que es del 16,00%.

- La compañía B nos cobra 0,17 € el establecimiento de llamada y 0,1 € por cada minuto de llamada.

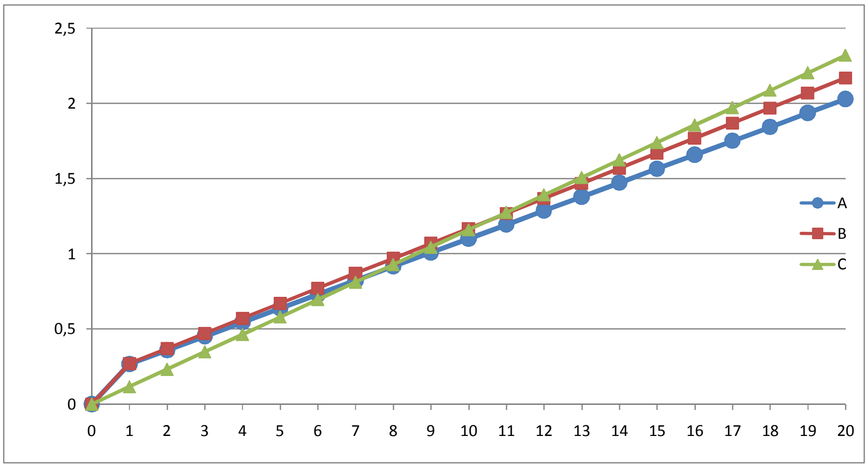
- La compañía C no cobra el establecimiento de llamada y cada minuto de llamada cuesta 0,09 €. Al finalizar cada llamada, la compañía nos aplica el IVA que es del 16,00%.

A continuación, presento las preguntas resueltas para facilitar la lectura y la reflexión, obviamente, cuando se lo presente a los alumnos este problema lo entregaré únicamente con el enunciado y las preguntas planteadas.

a) Tras completar la siguiente tabla con dos cifras decimales y con los redondeos habituales, ¿Qué compañía te resulta más barata? Explica tu respuesta.

Minutos de la llamada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Precio (€) en A	0,27	0,36	0,45	0,55	0,64	0,73	0,82	0,92	1,01	1,1	1,19
Precio (€) en B	0,27	0,37	0,47	0,57	0,67	0,77	0,87	0,97	1,07	1,17	1,27
Precio (€) en C	0,12	0,23	0,35	0,46	0,58	0,70	0,81	0,93	1,04	1,16	1,28

b) Representa la tabla en unos ejes cartesianos.



c) ¿Cuánto tiene que durar una llamada para que el coste de la compañía A y B sea el mismo?

d) Una persona que hable 10 minutos por llamada, ¿qué compañía debería escoger?

e) ¿Cuánto me costará en la compañía B hablar 2 horas?

Con este problema de las compañías telefónicas trataremos de que los alumnos construyan el modelo, que averigüen la dependencia entre dos magnitudes que son gasto y minutos.

Luego podemos decir que este tipo de problemas constituyen la razón de ser de las funciones que coincide con la que se ha señalado en la reconstrucción histórica de la noción de función en el apartado tres anterior. La razón de ser en este caso es la modelización de relaciones de dependencia.

Problema 2: Comparación de salarios.

Dos restaurantes pagan de distinta forma a sus empleados. El restaurante A paga 10 euros fijos al día más 9 euros por hora trabajada. El restaurante B paga 12 euros por hora de trabajo.

a) Escribe dos funciones que expresen el sueldo de un empleado en cada uno de los dos restaurantes y represéntalas sobre los mismos ejes cartesianos y sobre ejes cartesianos distintos.

b) Si uno trabaja 5 horas y 25 minutos, ¿cuánto cobra en cada restaurante?

c) ¿Cuántas horas se debería de trabajar en el restaurante A para cobrar 50 €? ¿Y en el B?

d) ¿En cuál de los dos restaurantes le merece más la pena trabajar a un empleado?

Mediante este segundo problema se institucionalizarán los conceptos de función, imagen y antiimagen.

Tras ambos problemas los alumnos junto con la ayuda del profesor tratarán de averiguar los conceptos de función, imagen y antiimagen; tras ese proceso, el profesor dará las siguientes definiciones:

Dados dos conjuntos A y B numéricos, llamaremos función f a la aplicación que a cada elemento del primer conjunto A se le asigna un **único** elemento del segundo conjunto B.

La notación habitual es: $f : A \to B$

$$x \to f(x) = y$$

A y se le llama imagen de x por la función. Y x es la antiimagen de y por f, $f^{-1}(y) = x$.

Otra nomenclatura para el mismo concepto es la siguiente: llamaremos *x* a la variable independiente e *y* será la variable dependiente.

La técnica que se les va a explicar, que previamente ellos la han aplicado para contestar a las preguntas de los problemas anteriores es que para calcular la imagen de un número por la función tienen que sustituir la *x* que aparece en la función por el número dado y el resultado de operar eso es la imagen. Para calcular la antiimagen de un número dado tienen que igualar la función al número dado y obtener el o los valores de *x*.

Los ejercicios que se van a plantear para practicar la técnica tanto en clase como en casa son los siguientes:

El ejercicio que se va a plantear en los últimos cinco minutos de la clase va a ser: dada la expresión algebraica de una función, calcular las imágenes y antiimagenes de algunos valores. Se trabajará a través de una hoja de cálculo mental (véase anexo 1). Esta hoja consiste en que se da una coordenada y una dirección y los alumnos deben de realizar todas las casillas que puedan en el tiempo de 1 o 2 minutos empezando por la coordenada que se les ha dicho y siguiendo la dirección mencionada. Claro está que previamente hay que acordar que dirección hay que tomar si se nos acaba la fila o la columna para poder seguir. Una vez que ha finalizado el minuto, el profesor corrige y los alumnos se anotan sus aciertos, si se juega varias veces se puede ir haciendo un gráfico para ver la evolución del alumno. Notar que hay una gran amplitud de ejercicios debido a los diferentes ritmos de aprendizaje que nos podamos encontrar.

Con esta hoja de cálculo mental se trabajan tanto los conceptos de imagen y antiimagen, pero se trabaja también la competencia para el cálculo mental.

Los ejercicios que se plantearán para casa serán de los siguientes tipos:

- Dadas unas gráficas, razonar si son o no gráficas de funciones.
- Dada la gráfica de una función, calcular la imagen y antiimagen de algunos valores.

SESIÓN 3: Reconocimiento de características generales y locales.

La sesión comenzará con la corrección y dudas de los ejercicios planteados para casa. A continuación, por grupos de aproximadamente tres personas se realizará el siguiente problema.

<u>Problema 3:</u> Representación de situaciones

Representa cada una de las situaciones en unos ejes cartesianos e intenta responder a las preguntas:

- ¿Qué diferencia encuentras entre las cinco situaciones?
- ¿Puedes dibujar todas las gráficas de un solo trazo?

- ¿Las funciones tienen algún salto?

Situación A: Una compañía de teléfonos cobra 0,15 por el establecimiento de llamada y 0,09 € por minuto.

Situación B: La que hace corresponder a cada número real su doble menos 2.

Situación C: La que asocia a cada número real su anterior entero, es decir, la parte entera del número.

Situación D: La entrada a un museo cuesta 4 €, pero es gratuita para menores de 6 años y los jubilados mayores de 65 años solo pagan 1 €. Supongamos que la media de edad es de 87 años.

Situación E: El precio de cada fotocopia es de 0,04 € si realizo menos de 100 fotocopias y de 0,02 € si realizo una cantidad mayor o igual que 100 fotocopias.

Tras la realización de este problema, se comentarán los resultados obtenidos institucionalizando así los conceptos de dominio y recorrido y la idea intuitiva de continuidad de una función. El profesor las introducirá de la siguiente manera:

- Dominio: son los valores x del conjunto A que tienen imagen, $f(x)$. El dominio de una función f se denota Dom f.
- Recorrido: son los elementos $y \in B$ tal que existe una x del dominio de forma que $f(x) = y$. El recorrido de una función f se denota Rec f.
- Una función es continua en un intervalo *(a,b)* si podemos dibujar la gráfica sin levantar el lápiz del papel. (Idea intuitiva y ostensiva).

A continuación les enseñaremos las técnicas para calcular el dominio y el recorrido de las funciones gráficamente y para obtener los intervalos de continuidad.

Para calcular el dominio de una función dada su gráfica, proyectaremos la gráfica de la función sobre el eje OX y escribimos los puntos x de izquierda a derecha que hemos obtenido

Para calcular el recorrido de una función dada su gráfica, proyectaremos la gráfica de la función sobre el eje OY y escribimos los puntos de abajo a arriba y que hemos obtenido.

Para calcular los intervalos de continuidad tenemos que comenzar por el extremo izquierdo de la función viendo que valores toma x, en cuanto levantemos el lápiz del papel anotaremos los valores x obtenidos y continuaremos con el proceso, lo obtenido se unirá con $\cup$ y ya lo habremos calculado.

Una modificación a esta técnica mencionada serán los distintos tipos de intervalos que nos vayan apareciendo.

Por último, se harán ejercicios del siguiente tipo para consolidar los conceptos:

- Dada la gráfica de una función, calcular el dominio, recorrido y expresar continuidad o discontinuidad de la función.

Para casa se mandarán ejercicios del mismo tipo.

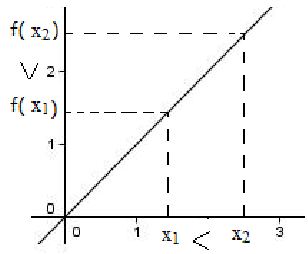
SESIÓN 4: Reconocimiento de características generales y locales

Esta sesión cuarta comenzará corrigiendo los ejercicios mandados para casa en la sesión anterior y resolviendo las dudas que surjan.

A continuación, se introducirán los conceptos de monotonía y las distintas formas de expresar una función.

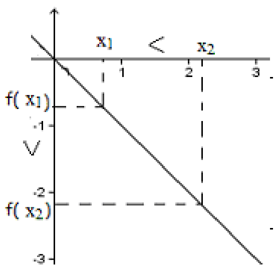
El profesor introducirá primero el concepto de función creciente y lo justificará mediante el diagrama que se observa en la parte derecha.

- Una función es creciente en un intervalo (a,b) si para dos valores cualesquiera del mismo, con x1 < x2 se cumple que f(x1) < f(x2).

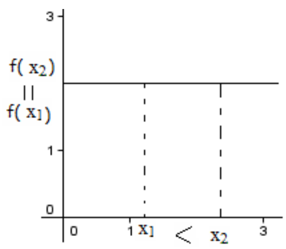


Después, serán los alumnos quienes deduzcan la definición de función decreciente y constante, junto con su justificación.

- Una función es decreciente en un intervalo (a,b) si para dos valores cualesquiera del mismo, con x1 < x2 se cumple que f(x1) > f(x2).



- Una función es constante en un intervalo (a,b) si para dos valores cualesquiera del mismo, con x1 < x2 se cumple que f(x1) = f(x2).



Tras institucionalizar los conceptos se realizarán ejercicios para determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función gráficamente.

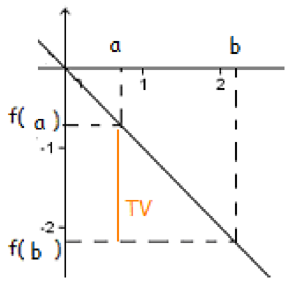
A continuación para introducirles las distintas formas de expresar una función, se les propondrá este ejemplo $f(x) = x + 1$ y entre todos los alumnos deducirán todas las formas en las que se puede expresar una función, que son: a través de una ecuación, mediante una tabla de valores, gráficamente, verbalmente o como pares ordenados.

Por último, se institucionalizará el concepto de tasa de variación.

- La tasa de variación de una función en un intervalo [a,b] es el aumento o disminución que experimenta la función al pasar la variable x del valor “a” al “b”.

La técnica es hallar la imagen del punto del extremo del intervalo y la imagen del punto del inicio del intervalo y restarlo, es decir, TV[a,b]= f(b)-f(a).

La justificación que se dará será la siguiente:



Los ejercicios para ejercitar esta técnica serán calcular la tasa de variación de una función tanto si la función se da a través de una gráfica o a través de su expresión algebraica.

Se propondrán ejercicios para casa para trabajar los conceptos introducidos en la sesión.

SESIÓN 5: Reconocimiento de características generales y locales.

La sesión comenzará corrigiendo los ejercicios mandados en la sesión anterior y preguntando si tienen alguna duda de lo explicado hasta el momento.

A continuación el profesor junto con los alumnos institucionalizará los conceptos de puntos de corte con los ejes cartesianos, extremos relativos y periodicidad de una función.

Los alumnos ya conocen el concepto de puntos de corte con los ejes cartesianos y saben calcularlo sobre la gráfica de una función; así que además de calcularlos sobre la gráfica de una función, se les va a enseñar a calcular los puntos de corte con los ejes cartesianos si tiene la función dada mediante expresión algebraica.

Para ello, se les enseñará la siguiente técnica:

Para calcular los puntos de corte de una función con el eje OX hay que resolver el sistema $\begin{cases} y = 0 \\ f(x) = y \end{cases}$

Para hallar los puntos de corte de una función con el eje OY hay que resolver el sistema $\begin{cases} x = 0 \\ f(x) = y \end{cases}$.

Para justificar dicha técnica, se comenzará primero escribiendo unos ejes cartesianos en la pizarra y preguntando a los alumnos que característica tienen en común todos los puntos que están sobre el eje y, se preguntará lo mismo pero sobre el eje x. Después averiguarán las ecuaciones de los ejes cartesianos y por último tras poner en la pizarra la gráfica de una función y hallados sus puntos de corte establecerán lo que hay que hacer para obtenerlos cuando te dan la ecuación.

Para introducir el concepto de extremos, se propondrá la resolución individualmente del siguiente problema:

Esta mañana, Alba salió de su casa a comprar el periódico, tardando 10 minutos en llegar al quiosco, que está a 400 m de su casa. Allí estuvo durante 5 minutos y se encontró con su amiga Elvira, a la que acompañó a su casa (la casa de Elvira está a 200 m del quiosco y tardaron 10 minutos en llegar). Estuvieron durante 15 minutos en la casa de Elvira y después Alba regresó a su casa sin detenerse, tardando 10 minutos en llegar (la casa de Elvira está a 600 m de la de Alba).

Construye la gráfica y di cual es la mayor distancia que recorrió.

(http://www.amolasmates.es/pdf/ejercicios/3_ESO/Ejercicios%20de%20graficas%20y%20propiedades.pdf)

Tras la resolución, el profesor institucionalizará los siguientes conceptos:

- Una función $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $M_r(a, f(a))$ si la función en él pasa de ser creciente a decreciente.
- Una función $f(x)$ tiene un máximo absoluto en el punto $M_a(a, f(a))$ si $f(x) < f(a)$ para todo $x \neq a$.
- Una función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $m_r(a, f(a))$ si la función en él pasa de ser decreciente a creciente.
- Una función $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en el punto $m_a(a, f(a))$ si $f(x) > f(a)$ para todo $x \neq a$.

Por último, para introducir el concepto de periodicidad, como en este curso sólo se va a trabajar la periodicidad sobre gráficas de funciones, se plantearán las siguientes situaciones de la vida cotidiana y serán los alumnos quienes intenten hallar la técnica y justificarla.

Situación A: Nos subimos un viaje en una noria que lleva una velocidad angular constante, si el viaje dura cinco vueltas y la altura de la noria es de 50 m. Realiza una gráfica de esta situación.

Situación B: Representa la variación de la velocidad del péndulo de un reloj con el paso del tiempo. (http://ficus.pntic.mec.es/~jgam0105/temas_3eso/materiales_3eso/act_refuerzo_Anaya/ar_ss_tema7.pdf).

Situación C: Realiza una gráfica que represente el porcentaje visible de la luna, sabiendo que el porcentaje de la luna varía en función del día, desde el 0 % (luna nueva) hasta el 100 % (luna llena). El porcentaje visible se repite cada 28 días.

(http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena9/3eso_quincena9.pdf)

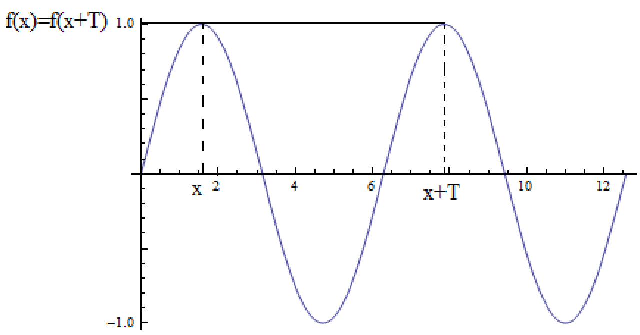
Situación D: Representa el suceso natural de la marea sabiendo que la máxima profundidad alcanzada son 8 m a las 9 de la mañana y de la tarde y que el mínimo alcanzado es a las 3 y 15 horas con una profundidad de 2 m.

(http://es.scribd.com/doc/72479788/Funciones-Periodicas).

Posteriormente, se institucionalizará el concepto de la siguiente forma:

- Una función $f(x)$ es periódica de periodo T si para todo x del dominio de la función se cumple que $f(x+T)=f(x)$.

La técnica será meramente ostensiva, es decir, visual y la justificación será:



Para afianzar estos conceptos, se propondrán ejercicios de los siguientes tipos:

- Dada la gráfica de una función, estudiar la periodicidad, extremos relativos y sus puntos de corte con los ejes cartesianos.

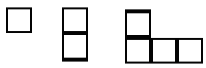
- Dada una función expresada mediante una ecuación, calcular los puntos de corte con los ejes cartesianos.

Para casa, se les propondrán ejercicios similares.

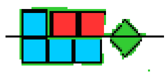
SESIÓN 6: Simetría.

La sesión comenzará corrigiendo los ejercicios mandados para casa en la sesión anterior y resolviendo las dudas que tengan los alumnos.

A continuación para introducir el concepto de simetría de una función se realizará la siguiente actividad sobre ejes de simetría en figuras simétricas:

Dadas las siguientes tres piezas, 

¿de cuántas formas se pueden juntar con al menos un punto de contacto de modo que se obtenga una figura? Si la figura hallada es simétrica, dibuja también el eje de simetría.

Como por ejemplo, 

Después les preguntaré que porqué son esas figuras simétricas y trataré de que me respondan que si las doblan por el eje de simetría las partes coinciden. Entonces les diré que ocurre lo mismo con las funciones, pero que aunque existen simetrías respecto a distintos ejes, en funciones las simetrías más importantes son los que vamos a estudiar, simetría respecto del eje OY y simetría respecto del origen de coordenadas.

Tras ello, les pondremos los ejemplos típicos de una función simétrica respecto del eje OY $y = x^2$ y una función simétrica respecto del origen de coordenadas $y = x^3$. Comentaré que para hallar si tiene o no simetría una función sería pesado y a veces complicado hallar la gráfica de una función entonces preguntaré ¿cómo ver si una función es o no simétrica sin necesidad de dibujar la gráfica? Con esta pregunta trataré de que me den como respuesta la siguiente técnica:

Una función es simétrica respecto del eje OY si al sustituir en $f(x)$ x por $-x$ se obtiene $f(-x) = f(x)$.

Una función es simétrica respecto del origen de coordenadas si al sustituir en $f(x)$ x por $-x$ se verifica la igualdad: $f(-x) = -f(x)$.

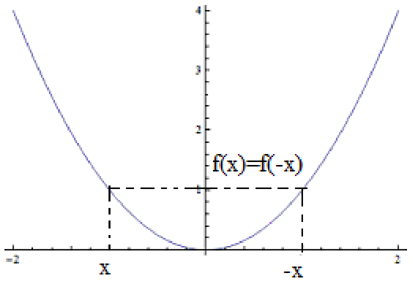
A continuación se institucionalizarán los conceptos.

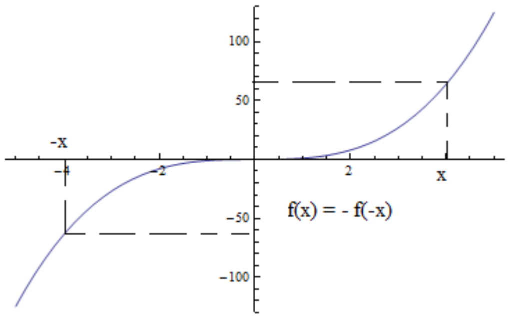
- Una función es simétrica respecto del eje OY si para todo x del dominio de la función se cumple que $f(-x) = f(x)$. Estas funciones son llamadas también funciones pares. Observación: $(-1)^{par} = +1$

- Una función es simétrica respecto del origen si para todo x del dominio de la función se cumple que $f(-x) = -f(x)$. Estas funciones se conocen como funciones impares. Observación: $(-1)^{impar} = -1$

Tras haber visto estos conceptos les preguntaré si saben decir porqué se les llama funciones pares e impares.

La justificación de esta técnica será:





Los ejercicios que se realizarán en clase como en casa serán del tipo hallar la simetría de funciones expresadas tanto gráficamente como en ecuación.

SESIÓN 7: Actividades.

Esta sesión comenzará con la corrección y dudas de los ejercicios mandados en la sesión anterior. A continuación, se prepararán distintas actividades de consolidación, de refuerzo o de ampliación para que realicen los alumnos. Estas actividades durarán la mitad de la hora aproximadamente, se realizarán individualmente y serán de los siguientes tipos:

- Actividades de consolidación de conceptos:

1. Representa la gráfica de una función continua con un máximo absoluto en (-3,4), un máximo relativo en (0,3), un mínimo absoluto en (2,0) y un mínimo relativo en (-2,2).

2. Dada la gráfica de una función, obtén todas las características.

3. Dada la expresión de una función, determina su simetría, puntos de corte, y la imagen y antiimagen de números dados.

4. Dada una gráfica, interpretarla para contestar a algunas preguntas.

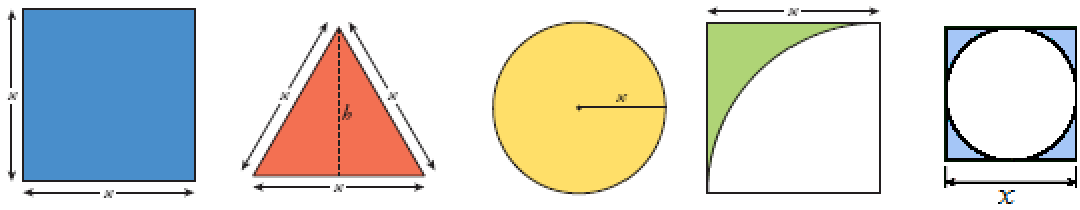
- Actividades de ampliación:

5. ¿Puede existir un mínimo relativo con ordenada mayor que la ordenada en el máximo? ¿y un máximo relativo con ordenada menor que la ordenada en un mínimo?

6. Calcula el valor de los lados del rectángulo de mayor área de entre todos los rectángulos cuyo perímetro sea 50 cm.

7. Escribe la expresión analítica del área coloreada de cada figura en función de la longitud del segmento *x*.

a) b) c) d) e)



(http://ficus.pntic.mec.es/~jgam0105/temas_3eso/materiales_3eso/act_refuerzo_Anaya/ar_ss_tema7.pdf)

- Actividades de refuerzo:

8. Resuelve el crucigrama con las palabras que faltan en las siguientes frases.

Horizontales:

2. Una función tiene en un punto un ___cuando a la izquierda de ese punto la función crece y a la derecha decrece.

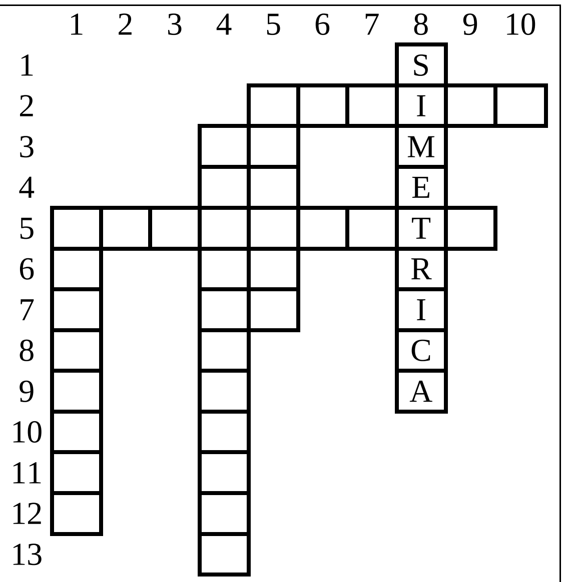
5. Si para dos valores de un intervalo, con $x_1 < x_2$ se cumple $f(x_1) < f(x_2)$, la función es ___.

Verticales:

1. Cuando una gráfica no presenta ni *saltos* ni *agujeros* decimos que es ____.

4. Si para dos valores de un intervalo, con $x_1 < x_2$ se cumple $f(x_1) > f(x_2)$, la función es ___.

5. Una función tiene en un punto un ___ cuando a la izquierda de ese punto la función decrece y a la derecha crece.



La otra media hora estará dedicada a la realización de un juego llamado la liga de funciones. A continuación, se explica como jugar y las reglas del mismo.

Se harán grupos compuestos por cuatro alumnos cada uno de ellos. Se traerán a clase periódicos o cualquier otra forma de prensa escrita. Cada equipo localizará una gráfica y preparará una ficha con 10 preguntas sobre ella, con sus correspondientes respuestas (el profesor conservará las fichas con las respuestas y hará de árbitro en caso de que haya algún tipo de duda o conflicto). A continuación, las preguntas, sin respuestas, serán lanzadas al equipo rival para su resolución. Cuando hayan acabado todos los enfrentamientos, el equipo con más preguntas acertadas será el ganador y se procederá a la entrega de premios de carácter académico.

Notar que cada enfrentamiento ganado será contabilizado con 2 puntos, 1 punto por empate y 0 por derrota. Y que en caso de empate entre los grupos, el grupo campeón se decidirá en un enfrentamiento entre los equipos con igual número de puntos.

(http://www.smconectados.com/archivosCMS/3/3/33/usuarios/229816/13/20100806163306M_8c51f76c-42f9-4536-adea-daef2c1c3a53.pdf)

SESIÓN 8: Actividades.

Los primeros minutos de esta sesión estarán dedicados a la corrección de ejercicios y a la resolución de dudas. Después, se propondrán una serie de problemas y ejercicios que serán realizados y corregidos en clase, ya que en la próxima sesión se realizará la prueba. Se presentan a continuación algunos ejercicios y problemas tipo.

Los alumnos podrán trabajar si lo desean en parejas, por si tienen alguna duda para consultarse entre ellos o para comprobar si les sale lo mismo que al compañero, pero teniendo siempre en cuenta que en la próxima sesión tienen la prueba y la deben de realizar individualmente.

Problema 1: Un tren realiza el trayecto entre dos ciudades A y B. Sale de A a las 7 horas y se dirige a B a velocidad constante, llegando en 40 minutos. Después, para durante 20 minutos y parte de B hacia A llegando en 50 minutos. Se detiene 10 minutos y a la hora en punto, vuelve a salir hacia B.

- Representa la función tiempo, distancia a A.

- Realiza un estudio completo de la función.

(Libro de texto de matemáticas de 3º ESO, Anaya)

Problema 2: Encuentra la ecuación de la función que relaciona el área de un rectángulo con uno de sus lados, sabiendo que su perímetro es 13 cm. Representa la función. ¿Dónde es creciente?

Problema 3: A un comercial le ofrecen la posibilidad de elegir entre dos tipos de contratos. En el primero, tendría unos ingresos mensuales fijos de 1100 € y en el segundo tendría 600 € de ingresos fijos más 40 € por cada producto que acepte un cliente. Haz un estudio de ambos contratos para saber a partir de que cantidad de productos le interesa un tipo de contrato u otro.

Ejercicio 1: Dada la gráfica de una función, extraer todas sus características.

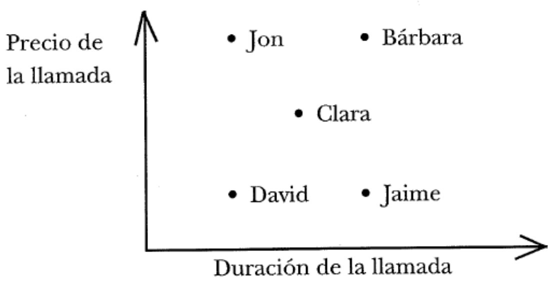
Ejercicio 2: Dada una función, mediante su expresión algebraica, estudiar sus puntos de corte y su simetría.

Ejercicio 3: Dada una función mediante su expresión algebraica, expresarla de todas las formas posibles.

Para aquellos alumnos que comprendan todos los conceptos y no deseen hacer más ejercicios de repaso se les propondrán dos problemas, el primero un problema-debate; donde según lo que entienda cada uno obtendrán una respuesta u otra a las distintas preguntas, de esta manera tendrán que ser capaces de explicar al resto del grupo sus argumentos para llegar a esa respuesta y el segundo un problema contextualizado.

Problema 1: Interpretación de datos

Un fin de semana cinco personas hicieron llamadas a varias partes del país con la misma compañía. Anotaron el precio de sus llamadas y el tiempo que estuvieron en el teléfono en la siguiente gráfica.



- ¿Quién puso la llamada a larga distancia? Explica tu razonamiento.
- ¿Quién realizo una llamada local? Explícalo.
- ¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente? Explícalo.
- Copia la gráfica y marca otros puntos que representen a personas que hicieron llamadas locales de diversa duración.
- Si hicieras una gráfica similar mostrando todas las llamadas telefónicas realizadas desde Zaragoza en un fin de semana, ¿cómo sería? Dibuja un esquema e indica que suposiciones haces.

Problema 2: El Batallador

A.- Desde el mirador del Batallador vemos a dos ciclistas que salen al mismo tiempo del principio del paseo de San Sebastián, para hacer el circuito del parque (el que hace el tren) uno en un sentido y otro en el contrario. El primero va a una velocidad de 15 km/h el otro también va a velocidad constante pero a 30 km/h. ¿A qué distancia se encuentran los ciclistas uno de otro un minuto antes de que se crucen? Realiza una gráfica de la situación.

B.- Dos amigos que están en el mirador del Batallador deciden, haciendo una trayectoria circular, bajar corriendo por las escaleras, cada uno por un lado, y volver a subirlas por el otro camino para encontrarse de nuevo arriba. Si la velocidad de ambos es tal que por cada tres peldaños que recorre uno el otro recorre dos, cuando el más rápido haya vuelto arriba, ¿cuántos peldaños le quedarán por subir al otro? Realiza una gráfica de la situación.

(http://catedu.es/matematicas_mundo/RUTAS/rutas24.htm)

SESIÓN 9: Prueba de conocimientos.

En esta sesión se realizará la prueba de conocimientos de forma individual, se dispondrá de 1 hora para realizarla. La prueba puede verse en el siguiente apartado dedicado a evaluación.

SESIÓN 10: Corrección de la prueba.

La metodología a seguir en esta última sesión dedicada a la corrección de los ejercicios propuestos en la prueba de contenidos será la siguiente:

Primeramente, el profesor en la pizarra realizará los ejercicios completamente incluyendo explicaciones, los realizará con detalle, tal y como esperaba que lo hicieran los alumnos. A la vez, los alumnos anotarán en sus cuadernos el enunciado de los ejercicios y la resolución de los mismos.

Aproximadamente los últimos minutos de clase los dejará para que los alumnos pregunten las dudas que tengan sobre la corrección realizada y sobre la puntuación obtenida. Finalmente, el profesor recogerá las pruebas.

5.- Sobre la evaluación.

A continuación se presenta una prueba escrita de duración aproximada de 55 minutos para evaluar el aprendizaje logrado por los alumnos. La prueba constará de 9 preguntas. Una de las preguntas es de carácter teórico sobre conceptos explicados y las demás son resolución de problemas y aplicación de técnicas para solucionar los ejercicios propuestos. Con todas las preguntas se ha pretendido evaluar todos los contenidos explicados en las distintas sesiones. Tras cada pregunta señalaré la valoración y la corrección de los ejercicios propuestos. La prueba está evaluada sobre 100 puntos para que la puntuación sea más cómoda y poder así diferenciar los distintos errores cometidos.

La dificultad de las preguntas no es elevada, puesto que se han hecho durante las sesiones ejercicios similares a los puestos en la prueba; algunas de las preguntas son bastante fáciles para motivar.

Una prueba posible es la siguiente:

1. **Define función, imagen, antiimagen, dominio y recorrido.** (20 puntos)

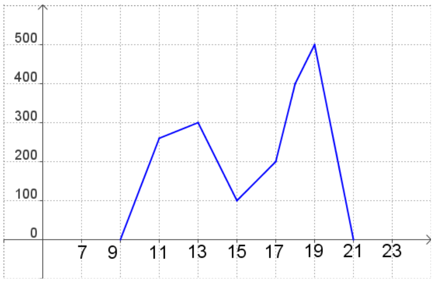
Con esta pregunta, se evaluará la capacidad de memorizar una definición rigurosa matemática, con el lenguaje propio matemático. Se trata de evitar la mecanización de los objetos intentando así el entendimiento de los mismos. La pregunta estará valorada sobre 20 puntos y como se preguntan cinco conceptos, los puntos serán repartidos equitativamente a cada concepto. De esta forma se definen los siguientes criterios de calificación:

- Si las definiciones son contestadas correctamente: 4 puntos por cada una.

- Si la definición no contiene la notación matemática: 3 puntos por cada una.

- Si la definición no está completa o está a la mitad: 2 puntos por cada una.

2. **La gráfica representa la afluencia de público (eje y) en unos almacenes a lo largo de un día (eje x).**



Responde a las siguientes preguntas:

a) **¿Cuántos clientes había a las 5 de la tarde?**

b) **¿Cuál es el horario de apertura? ¿Y el de cierre?**

c) **¿A qué hora la afluencia de clientes fue máxima? ¿Cuántos clientes había a esa hora?**

d) **Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

(http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena9/3quincena9_tutor_1a.htm)

A través de esta actividad, se evaluará la capacidad de interpretar una gráfica y obtener las características, en este caso este conocimiento ya se ha abordado en cursos anteriores.

Solución:

a) A las cinco de la tarde había 200 clientes.

b) El horario de apertura es a las 9 de la mañana y el de cierre a las 9 de la noche.

c) La afluencia de clientes fue máxima a las 7 de la tarde, a esa hora había 500 clientes.

d) La función decrece: $(13,15) \cup (19, 21)$.

   La función crece: $(9,13) \cup (15,19)$.

Esta pregunta se valorará sobre 10 puntos y los criterios de calificación que se van a utilizar en ella son los siguientes:

- Si las preguntas son contestadas de la forma anterior, los apartados a y b valdrán 2 puntos uno y los apartados c y d contarán 3 puntos cada uno.

- Si la solución no está dada en forma de frase sino simplemente con un número: -0.5 puntos en cada una de las preguntas que no se conteste correctamente.

- Si la solución del último apartado viene dada como (9,11) ∪ (11,13) ∪ (15, 19): -2 puntos.

- Si alguno de los intervalos contiene un extremo erróneo: quitaríamos todos los puntos que vale ese apartado.

3. **Un grupo de amigos va al cine y compran bolsas de palomitas. Una bolsa vale 1,50 €, dos bolsas valen 3 € y cinco bolsas valdrán 7,50 €. Expresar este problema en todas las formas distintas de expresar una función.**

(http://www.iesprofesorjuanbautista.es/IMG/pdf_11-Funciones.pdf)

Con este problema, a parte de comprobar que se ha hecho un estudio de la unidad, se tratará de ver si los alumnos adquieren las destrezas para dar una función de todas formas posibles que les será útil en el siguiente tema. Además se comprobará si manejan la notación cartesiana.

Solución:

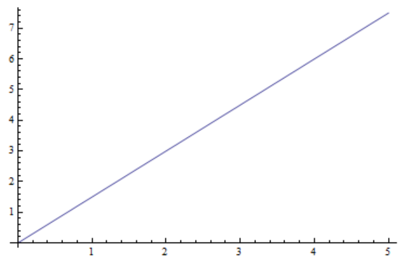
Tabla de valores:

x (número de bolsas)	1	2	3	4	5
y (precio en euros)	1´5	3	4´5	6	7´5

Ecuación: $y = 1{\acute{}}5x$

Pares de puntos: (1, 1´5), (2,3), (3, 4´5), (4,6), (5,7´5).

Gráfica:



Esta tercera pregunta estará evaluada sobre 10 puntos; como hay cuatro formas de escribir una función a parte de la dada, que son como tabla de valores, como ecuación, mediante pares de puntos y gráficamente cada forma escrita correctamente se valorará con 2.5 puntos. Si el alumno se ha confundido al hacer la primera forma y las demás las ha deducido de ella y están correctamente, tendiendo en cuenta su primera forma, se le valorará con 6 puntos.

4. **Calcula los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^2 - (2x+3)$ **b)** $f(x) = 5$ **c)** $f(x) = x^2 - 5x$

En esta pregunta, se pondrá en práctica el conocimiento de los puntos de corte, para ello necesitarán y pondrán en práctica el conocimiento sobre resolución de ecuaciones y sistemas. Además este ejercicio les servirá para acostumbrarse con el lenguaje algebraico. También tendrán que ser capaces de interpretar sus soluciones con respecto a lo que se les pide en el enunciado.

Solución:

a) Puntos de corte con el eje OY $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x^2 - (2x+3) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -3$$

Luego el punto de corte con el eje OY es (0,-3)

Puntos de corte con el eje OX $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x^2 - (2x+3) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = x^2 - 2x - 3$$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$ .Luego, $\begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

Por tanto los puntos de cortes con el eje OX son (3,0) y (-1,0).

b) Puntos de corte con el eje OY $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

Punto de corte con el eje OY: (0,5).

Puntos de corte con el eje OX $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 5 = 0$. Como 5≠0 entonces el sistema no tiene solución, por tanto la función $f(x) = 5$ no corta al eje OX.

c) Puntos de corte con el eje OY $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0.$$

Punto de corte con el eje OY: (0,0).

Puntos de corte con el eje OX $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$

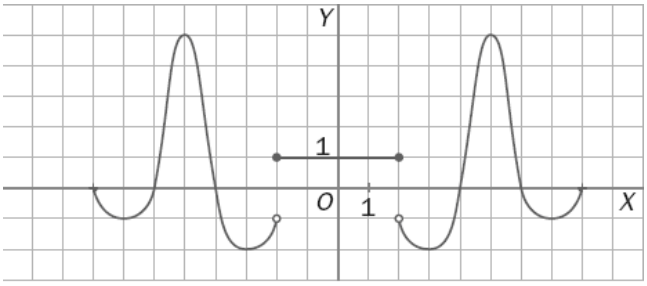
$$\begin{cases} y = x^2 - 5x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = x^2 - 5x \Rightarrow 0 = x(x-5) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}.$$

Los puntos de corte con el eje OX son (0,0), (5,0).

Este ejercicio será valorado con 10 puntos y los criterios de calificación que se aplicarán en esta pregunta serán los siguientes:

- Si el ejercicio es contestado de la forma anterior: 3 puntos en cada apartado.
- Si el ejercicio está hecho de forma clara 1 punto.
- Si en el ejercicio no aparece el sistema a resolver de forma genérica: -0.75 puntos por cada apartado donde no aparezca.
- Si en el ejercicio no aparecen las fórmulas que hay que utilizar para resolver como puede ser la formula de resolución de una ecuación de segundo grado: -0.5 por cada apartado que no aparezca.
- Si el sistema está bien planteado, pero ha habido un error en la resolución: 0 puntos si el error ha sido de cálculo y si ha sido un error de copiar mal -0,25.
- Si el ejercicio no contiene una frase indicando la solución:- 0.5 puntos en cada apartado que no aparezca.
- Si el proceso está todo bien, pero el resultado está mal: 2 puntos por apartado.

5. **Dada la siguiente función estudia su: a) dominio b) recorrido, c) crecimiento, decrecimiento y constante, d) máximos y mínimos relativos y absolutos, e) puntos de corte con los ejes cartesianos, f)** $f(2), f^{-1}(1)$ **, g) imagen de -5, antiimagen de -1, h) tasa de variación en [2,4] i) estudiar la continuidad de la función, j) estudiar su periodicidad y su simetría.**



(http://platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf)

Con esta quinta pregunta, se trata de comprobar si los objetos matemáticos que se han transmitido se han aprendido y asimilado. Además se comprobará el dominio que tienen los alumnos para leer las características de una función gráficamente y si dominan la notación cartesiana y el orden de los números reales al ponerlos en forma de intervalos.

Solución:

a) Dom f = [-8,8].

b) Rec f = [-2,5].

c) Crecimiento: (-7,-5) ∪ (-3,-2) ∪ (3,5) ∪ (7,8).

Decrecimiento: (-8,-7) ∪ (-5,-3) ∪ (2,3) ∪ (5,7).

Constante: (-2,2).

d) Máximos relativos y absolutos: (-5,5), (5,5).

Mínimos relativos: (-7,-1), (-3,-2), (3, -2), (7,-1).

Mínimos absolutos: (-3,-2), (3,-2).

e) Puntos de corte: (-8,0), (-6,0), (-4,0), (4,0), (6,0), (8,0), (0,1).

f) $f(2)=1,\ f^{-1}(1)=[-2,2]$

g) Imagen de -5 = 5, antiimagen de -1 = $\pm 3´8$.

h) $TV[a,b]=f(b)-f(a)$. Sustituyendo, $TV[2,4]=f(4)-f(2)=0-1=-1$.

i) Continua: (-8,8) $\setminus$ {-1,1}.

j) No es periódica

k) Es simétrica respecto del eje OY, es decir, es una función par, ya que $f(-x)=f(x)$.

Este ejercicio será calificado con 20 puntos y se utilizarán los siguientes criterios de calificación:

- Si el ejercicio es contestado de la forma anterior: 2 puntos en cada apartado.

- Si el ejercicio no contiene cierto orden ni claridad: -5 puntos.

- Si en la resolución no aparecen las fórmulas o las condiciones que se han de verificar: - 0.5 puntos.

- Si el planteamiento es el correcto y se ha confundido en la resolución: -0.5 puntos.

- Si los intervalos están bien, pero lo único que se falla es en los extremos de si es abierto o cerrado: -1 punto por cada uno fallado. Si esto ocurre en el dominio y en el recorrido se le calificará ese apartado con 0 puntos.

6. Estudia si son o no simétricas las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x \ \ -4x$ **b)** $g(x) = \dfrac{8}{x-5}$

Con este ejercicio, se trata de comprobar si han aprendido la técnica para determinar si una función es simétrica y para desarrollar sus destrezas con el uso de variables y con el lenguaje algebraico.

Solución:

a) $f(-x) = 3(-x) - 4(-x) = -3x + 4x \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$. La función no es par.

$f(-x) = 3(-x) - 4(-x) = -3x + 4x \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$
$-f(x) = -(3x - 4x) = -3x + 4x \Rightarrow -f(x) = f(-x)$. La función es impar.

b) $f(-x) = \dfrac{8}{(-x)-5} = \dfrac{8}{-x-5} \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$. La función no es par.

$f(-x) = -\dfrac{8}{x-5} = \dfrac{8}{-x+5} \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$. La función no es impar. Por tanto, la función no es simétrica.

Esta actividad será valorada con 10 puntos y los criterios de calificación empleados serán:

- Si el ejercicio es contestado de la forma anterior: 5 puntos en cada apartado.

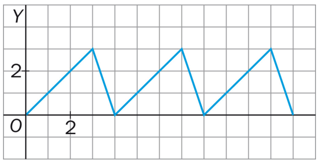
- Si no aparece la condición a verificar: -1 punto por las veces que no aparezca.

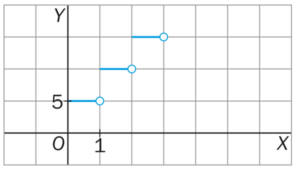
- Si el planteamiento es correcto, pero se ha equivocado en el procedimiento: -4 puntos.

- Si se ha equivocado al copiar la función, pero todo lo restante está correcto: -0.5 puntos.

- Si se estudia la simetría o no de las funciones a través del dibujo de la función y es correcto: 2.5 puntos por cada apartado

7. Determina si estas funciones son o no periódicas, en caso afirmativo escribe su periodo.

a) 

b) 

(http://www.smconectados.com/archivosCMS/3/3/33/usuarios/229816/13/20100806164350M_cbf799ac-7fc7-49e8-8aef-35ffd3c4f61e.doc)

Con la séptima pregunta, se conocerá si han asimilado correctamente el concepto de función periódica y será valorada sobre 10 puntos.

Solución:

a) Para que una función sea periódica se tiene que verificar: $f(x) = f(x+T)$. Es periódica de periodo T=4.

b) Para que una función sea periódica se tiene que verificar: $f(x) = f(x+T)$. Es periódica de periodo T=1.

Los criterios de calificación en esta pregunta son:

- Si el ejercicio es contestado de la forma anterior: 5 puntos en cada apartado.

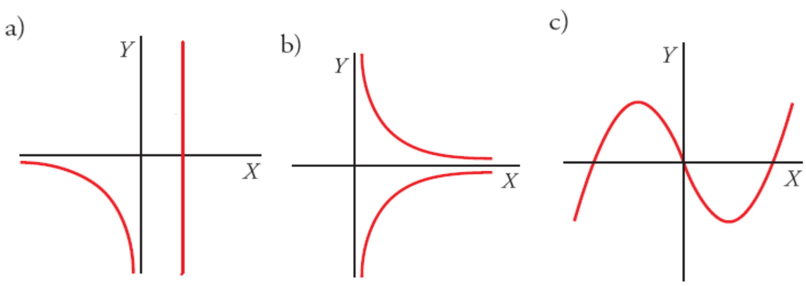
- Si olvidan decir el periodo: -2,5 puntos.

- Si el periodo es incorrecto: -4 puntos.

- Si no aparece la condición a verificar: -1 punto por las veces que no aparezca.

- Si se ha equivocado al copiar la función, pero todo lo restante está correcto: -0.5 puntos.

8. Determina si las siguientes aplicaciones son o no funciones y explica porqué.



Con este ejercicio, se quiere ver la capacidad que los alumnos tienen a interpretar la definición sobre función pedida en el primer ejercicio y que si no han realizado el primer ejercicio porque no se acuerdan o no saben como expresarlo, tratar con este que lo intenten deducir.

Además, quedará de manifiesto en esta pregunta, si se ha entendido correctamente la teoría, puesto que hay alumnos que tienen más dificultad en la memorización, pero sin embargo comprenden la teoría y la saben aplicar. De esta manera comprando para cada alumno el ejercicio número 1 y el 8 podremos intuir que es lo que sabe y lo que no y hasta que punto razona correctamente.

Solución:

a) No es función, ya que hay una línea vertical y por tanto la x por donde pasa la vertical le corresponden infinitos valores de y, y para que sea función sólo le ha de corresponder un único valor de y.

b) No es función, puesto que hay varios valores de x a los cuales les corresponden dos valores de y, y para que sea función sólo le ha de corresponder un único valor de y.

c) Si que es función, porque a cada valor de x se le asocia un único valor de y.

Este ejercicio se calificará sobre cinco puntos y los criterios de calificación a aplicar serán:

- Si el ejercicio es contestado de la manera anterior: 1,5 puntos en cada apartado.
- Si está bien explicado y ordenado: 0,5 puntos.
- Si únicamente la respuesta es si o no sin razonamiento: -1 punto en cada apartado no razonado.
- Si hay razonamiento, pero no es el adecuado: -1 punto.

9. Dadas la función $f(x) = 4x^2 - 5$ calcula la antiimagen de 0 y la imagen de -2 y la tasa de variación de [-3,3] (5 puntos).

Con la última pregunta, se conocerá si saben averiguar los conceptos que se les piden sobre la ecuación de la función.

Solución:

Antiimagen de 0: $0 = 4x^2 - 5 \Rightarrow 5 = 4x^2 \Rightarrow \frac{5}{4} = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Imagen de -2: $f(-2) = 4(-2)^2 - 5 = 16 - 5 = 11$.

$TV[a,b] = f(b) - f(a)$.

Sustituyendo, $f(3)=4(3)^2-5=31$, $f(-3)=4(-3)^2-5=31$. Luego, $TV[-3{,}3]=f(3)-f(-3)=31-31=0$.

Esta pregunta será valorada con 5 puntos y se aplicarán los siguientes criterios de calificación:

- Si el ejercicio es contestado de la forma anterior: 2,5 puntos en cada apartado.

- Si no está explicado el procedimiento: - 1 punto.

- Si no aparecen las fórmulas:-1 punto.

Comentar que si se ha llevado un seguimiento aprovechado de las sesiones en el aula, los alumnos no tendrán problema en resolver la prueba planteada. Las respuestas a los ejercicios variarán en función de cómo tengan cada uno asimilados los conocimientos previos y por supuesto los de esta unidad didáctica de funciones. Las calificaciones a las pruebas serán establecidas mediante los criterios de evaluación, que dependerán de cada pregunta como ha quedado reflejado. En todas las preguntas se valorará positivamente las explicaciones en cada ejercicio, la claridad y el orden. Asimismo, las faltas de ortografía podrán suponer una reducción en la nota final del examen.

En un principio, se establecerán los siguientes criterios con la puntuación indicada. Si al corregir la prueba aparecieran errores no contemplados en los criterios se ponderarían y se apuntarían como criterio para que el resto de compañeros fuera valorado con el mismo baremo.

Una vez calificada la prueba de evaluación nos servirá como docentes para ver si lo que se ha explicado se ha entendido o si es necesario que para posteriores unidades o para la próxima vez que se imparta esta unidad se realicen algunos cambios.

6.- Reflexión personal

En este máster he descubierto y aprendido que hay varias formas de que los alumnos aprendan. Antes de realizarlo creía que la forma más conveniente para enseñar a mis alumnos era la que a mí se me había aplicado y que muchas veces se sigue, la clase magistral, pero ahora sé que la clase magistral no es siempre la mejor forma de que los alumnos adquieran los conocimientos que se les imparten. En varias asignaturas hemos tenido que realizar una serie de trabajos como parte de la evaluación en los que teníamos que elaborar una secuenciación didáctica sobre un objeto matemático de cualquiera de los cursos de secundaria o bachillerato donde se pusiera de manifiesto la razón de ser del objeto matemático de una forma innovadora. Quiero hacer notar que al principio esta forma de trabajar nos resultó difícil de aplicar aunque tras varias reuniones de seguimiento conseguimos dicho objetivo.

Por último, hemos aplicado en la medida de lo posible estas indicaciones durante la estancia de nueve semanas en centros educativos. En mi opinión, ha sido una experiencia gratificante tanto a nivel formativo, de cara a adquirir las habilidades necesarias para la docencia, como personal.

Sin duda la parte teórica del máster es necesaria para adquirir y saber cómo aplicar los conocimientos necesarios para la docencia.

A modo de resumen y en cuanto a la utilidad formativa del practicum puedo destacar que esta experiencia ha contribuido a:

- Iniciarme en el ejercicio de mi futura profesión.
- Familiarizarme con el entorno en el que se desarrollará mi futura actividad profesional.
- Anticiparme situaciones que se me pueden plantear en el futuro en el ejercicio de la docencia.
- Ponerme en contacto directo y presencial con la aplicación en el centro escolar del Sistema Educativo Español.
- Aplicar y comprender de manera inmediata los conocimientos teóricos adquiridos durante la parte teórica del máster.
- Conocer la heterogeneidad del alumnado y facilitar la posibilidad de aplicar una intervención personalizada según los casos.
- Iniciarme en el conocimiento y en la elaboración de programaciones para los distintos niveles educativos.
- Tomar contacto con la estructuración y funcionamiento del Centro Escolar.
- Conocer como se trabaja en equipo a nivel profesional.

Para finalizar, el máster me ha parecido una herramienta indispensable para mi labor como futuro docente.

7.- Sobre la bibliografía y páginas web

Colera, J., García, R., Gaztelu, I.; Oliveira, Mª. J. *Libro de texto de Matemáticas 3º ESO.* Anaya.

Lacasta, E. Pascual, J.R. *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Editorial Síntesis.

ORDEN de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Ruiz Higueras, L. (1994). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico. Tesis doctoral. Universidad de Jaén.

Vizmanos, J.R., Anzola, M, Bellón, M, y Hervás, J.C. *Libro de texto de matemáticas de 3º ESO* .SM, Colección Esfera.

Wussing, H. (1998).*Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI de España Editores S.A.

El lenguaje de funciones y gráficas. Ministerio de Educación y Ciencia. Traducción y adaptación de Alayo, F. " The language of functions and graphs". Universidad País Vasco.

http://es.scribd.com/doc/30949187/Actividades-Ampliacion-Funciones

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena9/3quincena9_tutor_1a.htm

http://www.iesprofesorjuanbautista.es/IMG/pdf_11-Funciones.pdf

http://platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf

http://www.smconectados.com/archivosCMS/3/3/33/usuarios/229816/13/20100806164350M_cbf799ac-7fc7-49e8-8aef-35ffd3c4f61e.doc

http://ntic.educacion.es/w3/recursos/secundaria/matematicas/mas_menos/11_m_m/actividades_parte_1.html

http://docentes.educacion.navarra.es/jjimenei/0000009bbf0a2fd27/index.html

http://www.smconectados.com/archivosCMS/3/3/33/usuarios/229816/13/20100806163306M_8c51f76c-42f9-4536-adea-daef2c1c3a53.pdf

http://catedu.es/matematicas_mundo/RUTAS/rutas24.htm

http://ficus.pntic.mec.es/~jgam0105/temas_3eso/materiales_3eso/act_refuerzo_Anaya/ar_ss_tema7.pdf

http://es.scribd.com/doc/72479788/Funciones-Periodicas

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena9/3eso_quincena9.pdf

http://www.amolasmates.es/pdf/ejercicios/3_ESO/Ejercicios%20de%20graficas%20y%20propiedades.pdf

8.- ANEXOS

Anexo 1: Hoja de cálculo mental

Calcula la imagen de un valor en una función. HOJA Nº: _____

	A		B		C		D		E		F	
1	$y = 3x-1$	-3	$y = 4x^2-2x$	3	$y = x^3-2$	3	$y = 4x^2+3$	-2	$y = 2x + 1$	-5	$y = 12$	4
2	$y = x^3+2$	2	$y = 4x-3$	2	$y = \sqrt{x+2}$	-1	$y = -6$	0	$y = 2x^2-5$	4	$y = \sqrt{x+4}$	5
3	$y = 5$	4	$y = \sqrt{x+7}$	-3	$y = 3x^2-5$	3	$y = -x+2$	5	$y = \sqrt{x+8}$	8	$y = 2x + 5$	-4
4	$y = -x^2 + x$	3	$y = 3x^2+1$	2	$y = 2x-4$	-4	$y = 2x - 3$	-2	$y = -x+4$	-3	$y = x^3+2$	1
5	$y = 2x + 3$	-1	$y = x^3+1$	-1	$y = 5x^2-2x$	2	$y = x^3-5$	2	$y = \frac{6}{x+1}$	0	$y = 5x^2+2x$	2
6	$y = 3x^2+2x$	2	$y = -x+3$	-2	$y = \frac{2}{x+2}$	-4	$y = \sqrt{x+1}$	3	$y = -x^3+2$	3	$y = -x+6$	-1
7	$y = \sqrt{x+5}$	4	$y = 7$	3	$y = 2x -4$	3	$y = 5x-3$	0	$y = 5$	-1	$y = \frac{2}{x}$	-2
8	$y = 2x^2+3$	-2	$y = \frac{-5}{x-3}$	4	$y = -x^2 + x$	2	$y = \frac{8}{x-4}$	6	$y = 4x-2$	-2	$y = 4x^2+1$	-3
9	$y = -x+5$	6	$y = -x^3+1$	3	$y = -x+7$	4	$y = -x^3+5$	2	$y = -x^2 + x$	4	$y = -x^3+1$	2
10	$y = \frac{5}{x}$	0	$y = 2x^2$	6	$y = \sqrt{x-4}$	8	$y = 2x^2$	-3	$y = 4x-1$	3	$y = 4x^2$	-2
11	$y = -x^3+4$	2	$y = 2x +6$	-2	$y = 5$	-1	$y = 2x-9$	3	$y = -x^2 + 1$	-2	$y = -5$	3
12	$y = 5x^2$	-3	$y = -x^2 + x$	5	$y = -x^3-1$	1	$y = 2x^2+3x$	-2	$y = \sqrt{x+11}$	5	$y = -x^2 + x$	2
13	$y = -3$	6	$y = \sqrt{x-2}$	1	$y = 4x^2$	-5	$y = \frac{10}{x+3}$	-1	$y = 7x^2$	3	$y = 2x-5$	-1
14	$y = -x^2 + 5$	3	$y = -2x^2$	3	$y = 4x-12$	2	$y = 4$	5	$y = x^3-4$	-2	$y = \sqrt{x-6}$	2
15	$y = 4x-5$	5	$y = \frac{6}{x+1}$	2	$y = x^2 - x$	4	$y = -2x^2$	-2	$y = 6$	-2	$y = \frac{12}{x-1}$	-1
16	$y = \sqrt{x-3}$	7	$y = 5x+3$	-4	$y = \frac{2}{x-1}$	1	$y = 2x+3$	4	$y = \frac{15}{x-4}$	-1	$y = 3x-5$	-2
17	$y = \frac{5}{x+1}$	-2	$y = x^2 - x$	3	$y = -x^2 + 1$	-3	$y = -x^2 + x$	1	$y = -3x^2$	3	$y = -x^2 + 3$	2
18	$y = -4x^2$	2	$y = 5x-2$	-2	$y = -6$	0	$y = \sqrt{x+3}$	-7	$y = 3x+3$	-2	$y = 5x+1$	-3

SOLUCIONES a la tabla de cálculo anterior

SOL	A	B	C	D	E	F
1	-10	30	25	19	-9	12
2	10	5	1	-6	27	3
3	5	2	22	-3	4	-3
4	-6	13	-12	-7	7	3
5	1	0	16	3	6	24
6	16	5	-1	2	-25	7
7	3	7	2	-3	5	-1
8	11	-5	-2	4	-10	37
9	-1	-26	3	-3	-12	-7
10	∄	72	2	18	11	16
11	-4	2	5	-3	-3	-5
12	45	-20	-2	2	4	-2
13	-3	∄	100	5	63	-7
14	-4	-18	-4	4	-12	∄
15	15	2	12	-8	6	-6
16	2	-17	-5	11	-3	-11
17	-5	6	-8	0	-27	-1
18	-16	-12	-6	∄	-3	-14
19	3	-19	-45	20	21	-100

PUNTUACIÓN APROX.

PUNTOS	4	5	6	8	10	13	16	19	21	23
NOTA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

RESULTADOS

GRUPO: _________

	PUNTOS
Media de la Clase	
Máxima de la Clase	

(http://docentes.educacion.navarra.es/jjimenei/0000009bbf0a2fd27/index.html)