Facultad de Educación de Zaragoza

Universidad de Zaragoza

PROBABILIDAD

Alumna: María Francisca Lancina Oliván
Especialidad: Matemáticas

ÍNDICE

1. DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO

El objeto matemático que se va a presentar en este trabajo es la Probabilidad. Se va a desarrollar en el tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria, dentro de la materia de Matemáticas.

He escogido la Probabilidad para el Trabajo Fin de Máster ya que se trata de un tema importante y necesario en nuestra sociedad, por lo que todo ciudadano debería tener cierto conocimiento sobre él. Aunque en la Enseñanza Obligatoria los temas de Azar y Probabilidad están prácticamente ausentes, basta tener en cuenta la ordenación educativa vigente y los libros de texto para observar este hecho. Sin embargo el Azar está presente en el entorno de cualquier ciudadano, y esta es la principal razón por la que siempre se debería incluir en la Enseñanza Obligatorio el estudio matemático de la Probabilidad.

La razón de ser de este objeto matemático la vamos a encontrar en el análisis de juegos de azar. Pero actualmente la Probabilidad se trata de un instrumento muy potente:

- Que ayuda en la toma de decisiones.
- Sirve para medir fiabilidad.
- Sirve para medir la garantía de un producto.
- Sirve de medida que se utiliza en los test médicos, pudiéndose saber si una persona posee una enfermedad ó no, etc.

Es importante que los alumnos sean conocedores de las numerosas aplicaciones de la Probabilidad en la vida cotidiana, para que conozcan la gran importancia de entender el tema que se les está explicando.

Otra razón del estudio de este objeto matemático, es que mediante la Probabilidad trabajamos todas las competencias básicas. Principalmente la competencia matemática. La competencia en comunicación lingüística, social y ciudadana y de autonomía e iniciativa personal se trabajan cuando los alumnos comparten, debaten y exponen las diferentes formas de resolución de los problemas. Es un tema presente en la vida real como hemos comentado, así que lograremos trabajar la competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico y la competencia cultural y artística. Y por último la competencia para aprender a aprender se trabaja mediante la resolución de problemas.

Por todo lo expuesto anteriormente, considero que el estudio de la Probabilidad dentro de la Educación Secundaria Obligatoria es importante, necesario y de gran utilidad para nuestros alumnos.

¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Campo de ejercicios y problemas:

El campo de ejercicios y problemas está centrado en que los alumnos averigüen cuáles van a ser sus mejores apuestas en un juego de azar.

La clasificación de los ejercicios y problemas que se van a desarrollar con los alumnos, según sus diferentes funciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje es la siguiente:

Ejercicios de iniciación: Son los ejercicios que vamos a utilizar en la sesión 1, dedicada a sondear los conocimientos previos de los alumnos y que nos van a permitir asegurar que en efecto los tienen. Dos de ellos se recogerán en una prueba inicial de duración aproximada de 20 minutos y el tercero se realizará al final de la sesión.

Actividades de descubrimiento guiado: Aquí se sitúa el problema que constituye la razón de ser del objeto matemático en cuestión. Este problema está desarrollado en la sesión 2 y 3.

Ejercicios de consolidación de técnicas: Aquí podemos recoger los ejercicios que se van a llevar a cabo en la sesión 3, 4, 5 y 7 sobre espacios muestrales, cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace…

Actividades para inducir los diferentes tipos de sucesos: Estos problemas se realizarán en la sesión 5 y 6. Con ellos se intentará institucionalizar el suceso contrario y los sucesos compatibles e incompatibles, a la vez que los alumnos las van induciendo.

Problemas: Estos problemas son las actividades que requieren de más ingenio para su resolución. Donde es importante en todo momento la estrategia de resolución escogida, ya que puede ser determinante a la hora de la búsqueda de la solución. Se van a llevar a cabo, principalmente, con los alumnos en las sesiones 6 (mitad de esta),7 y 8.

Campo de técnicas:

Las técnicas que se pretenden alcanzar son:

- Construcción del espacio muestral.
- Experimentación de juegos de azar y cálculo de frecuencias.
- Calcular probabilidades de sucesos a partir de sus frecuencias relativas y valorar el grado de validez de la asignación en función del número de experiencias realizadas.
- Aplicar la regla de Laplace al cálculo de probabilidades de sucesos sencillos relacionados con juegos de azar.

- Formular y comprobar conjeturas en el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.

Campo de tecnologías:

Las tecnologías que se van a desarrollar son:

- Desarrollo del concepto de la probabilidad y frecuencia relativa.
- Desarrollo del concepto de espacio muestral.
- Justificación de la técnica de la probabilidad empírica.
- Justificación de la técnica de la Regla de Laplace.

2. CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

Los conocimientos previos que necesitan los alumnos para afrontar el aprendizaje del objeto matemático en cuestión son:

- Números fraccionarios, decimales y sus operaciones.
- Porcentajes.
- Elaboración e interpretación de tablas de valores.
- Elaboración e interpretación de tablas de frecuencia y de diagramas de barras correspondientes.
- Realización de diagramas de sectores a partir de tablas de frecuencias absolutas, relativas y acumulativas.

En el BOA se incluyen todos estos contenidos en los cursos de 1º y 2º de ESO, así que los alumnos deberían poseer todos estos conocimientos y haberlos trabajado con anterioridad. Por lo tanto estarán preparados para afrontar el aprendizaje del objeto matemático con el que estamos tratando. No obstante en la primera sesión, realizaremos una evaluación inicial, con la cual pretendemos medir el nivel de concreción curricular de los alumnos, conocer si recuerdan y manejan los conocimientos previos y detectar quiénes son los que tienen más dificultades. Además realizaremos un problema, el cual sirve también para repasar los conocimientos que el alumno necesita para el desarrollo de la Unidad Didáctica de la Probabilidad.

Dicha evaluación inicial y el problema están detallados en la sesión 1 de la secuenciación didáctica.

3. RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

La razón de ser en la que nos vamos a basar para la introducción escolar de la Probabilidad, es que se trata de un objeto matemático que nos permite comprender y estudiar los juegos de azar. Esta razón coincide con la razón histórica, ya que es una ciencia que comenzó con consideraciones sobre juegos de azar. La idea de Probabilidad está íntimamente ligada a la idea de azar y nos ayuda a comprender nuestras posibilidades de ganar un juego de azar. Comprender y estudiar el azar es indispensable, porque la probabilidad es un soporte necesario para tomar decisiones en cualquier ámbito.

Los primeros acercamientos serios, a los que más tarde se llamaría la Probabilidad, son debidos a grandes científicos y matemáticos italianos como: N. Tartaglia, G.F.Peverone, Galileo y G. Cardano.

Con la aparición de la imprenta comienzan a emerger tratados poco precisos sobre los diferentes juegos de moda. Se le asigna a G. Cardano el primer tratado relacionado con el mundo del azar, su título: Liber de Ludo Alae, es un estudio medianamente organizado, cuyo objetivo es calcular las diferentes posibilidades del lanzamiento de varios dados. Este libro lo escribió Cardano alrededor de 1564 pero no fue impreso hasta 1663, no es hasta dicha fecha que comienza a elaborarse una teoría aceptable sobre los juegos.

Como hemos dicho anteriormente fueron los científicos italianos los primeros en preocuparse por el estudio de la teoría de la probabilidad, pero el impulso fundamental en el desarrollo de esta teoría no se da en Italia, sino en Francia.

Conviene recordar que en la sociedad francesa del siglo XVII, el juego era uno de los entretenimientos más frecuentes. Los juegos cada vez más complicados y las apuestas muy elevadas hicieron sentir la necesidad de calcular las probabilidades de los juegos de manera racional.

La mayoría de los historiadores coinciden en atribuir a los trabajos de Blas Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665), las bases sobre las que posteriormente se asienta la moderna teoría de la probabilidad.

Por esa misma época, en el año 1655, el joven holandés Christian Huygens (1629-1695) entró en contacto con el círculo intelectual de Pascal y Fermat. El poder compartir de primera mano las inquietudes científicas de esos grandes pensadores fue crucial para su devenir intelectual, tanto es así que a su vuelta a Holanda comenzó a trabajar intensamente en problemas relativos al cálculo de probabilidades. En 1656, C. Huygens envió un manuscrito a París con la esperanza de que Fermat o incluso Pascal pudieran llegar a estudiarlo y aprobar sus planteamientos. La respuesta tardó cuatro meses en llegar, pero la confirmación de su trabajo fue muy satisfactoria para Huygens. Más aún, Pascal le envió otro problema sobre el azar y Fermat le envió dos cuestiones, que junto con otros dos problemas diseñados por él mismo, fueron añadidos al final de un libro y durante unos sesenta años constituyeron las pruebas estándar mediante las cuales se medía la habilidad del lector en la doctrina del azar; cabe citar que A. de

Moivre, Jacques Bernoulli, Spinoza y Leibniz, entre otros, publicaron soluciones de algunos de estos problemas.

Pascal, Fermat y Huygens, sentaron las bases modernas de la teoría de la probabilidad, las cuales fueron desarrolladas a lo largo del siglo XVIII.

Debido a las figuras de Pascal, Fermat y Huygens podemos señalar que los juegos de azar dejaron de ser meros pasatiempos para convertirse en auténticos retos intelectuales en los que participaron las mejores mentes científicas del momento. Uno de estos genios fue Jacques Bernouilli (1654-1705) quien propuso a los matemáticos y filósofos de su época diversos problemas relacionados con el campo de la probabilidad, cuyas soluciones ofreció después.

Desde los orígenes la principal dificultad para poder considerar la probabilidad como una rama de la matemática fue la elaboración de una teoría suficientemente precisa como para que fuese aceptada como una forma de matemática. A principios del siglo XX el matemático ruso Andrei Kolmogorov la definió de forma axiomática y estableció las bases para la moderna teoría de la probabilidad que en la actualidad es parte de una teoría más amplia como es la teoría de la medida.

El problema que va a justificar la introducción de la probabilidad a los alumnos se detalla en la sesión 2 de la secuenciación didáctica.

4. SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

Introducción

Para desarrollar este tema se van a utilizar nueve sesiones, ya que en tercer curso se disponen de 3 horas a la semana y aproximadamente se usan 3 semanas por unidad.

Finalmente destacar que la secuenciación didáctica que se va a presentar a continuación podría variar según el grupo de alumnos, su nivel de concreción curricular y los conocimientos previos de los que dispongan para desarrollar este tema.

Secuenciación:

SESIÓN 1: Evaluación Inicial

En esta primera sesión se va a realizar una evaluación inicial con la cual determinaremos el nivel de concreción curricular de los alumnos, respecto a los siguientes conceptos matemáticos: Números fraccionarios y porcentajes, elaboración de tablas de frecuencias y diagramas de barras, frecuencias absolutas, relativas y acumulativas.

Se trata de una prueba con duración aproximada de 20 minutos, la cual no será considerada para nota, sino que sólo será de carácter informativo.

La prueba que realizaremos para medir el nivel de concreción curricular de los alumnos será la siguiente:

MATEMÁTICAS 3º ESO, EVALUACIÓN INICAL

Nombre y Apellidos:

Fecha:

1. El abuelo de Pedro, Juan y Ana quiere repartir 24.300 euros entre sus nietos. De forma que ha Pedro le toque el 30% de los 24.300 euros. Del resto reparte un tercio a Juan y lo que queda es para Ana.

a) Calcula cuánto dinero entrega a cada nieto.

b) ¿Qué porcentaje le da a cada uno?

2. El número de coches que poseen las familias de los alumnos de una clase es el siguiente:

2 1 1 2 3 1 1 1 2 2 3 4 1

2 3 1 1 2 3 2 1 0 1 1 0 2

a) Cuenta cuántas familias tienen 0 coches, 1 coche, 2 coches, 3 coches y 4 coches.

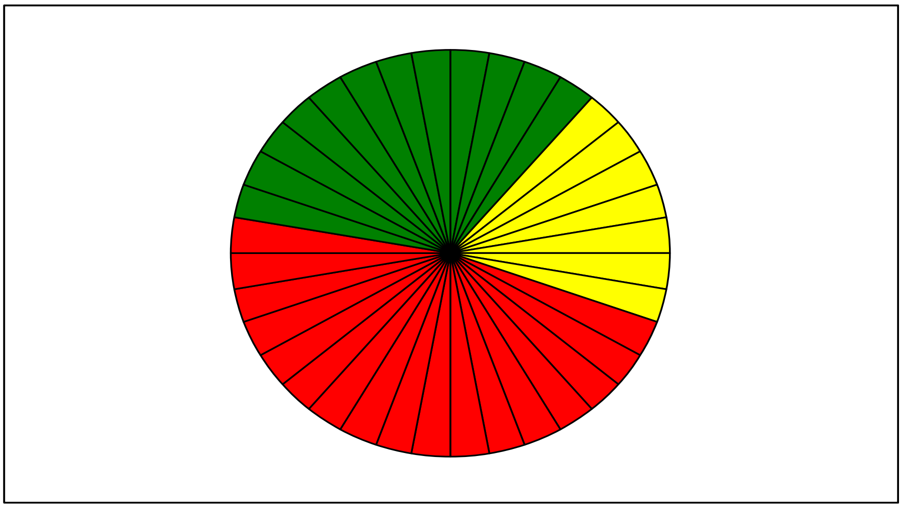
b) Elabora una tabla de frecuencias en las que se incluyan: frecuencia absoluta, acumulada y relativa.

c) Dibuja un diagrama de barras con frecuencias absolutas acumuladas.

d) ¿Qué porcentaje de familias poseen menos de 2 coches?

Una vez realizada la prueba se va a plantear a los alumnos el siguiente **problema** de iniciación:

Si tenemos una ruleta dividida en 36 partes iguales, de la forma:



a) ¿Qué porcentaje de la ruleta representa al color rojo?, ¿Y al color verde?

b) Tira la ruleta 15 veces. Después en una tabla apunta los resultados posibles que se pueden obtener y sus frecuencias absolutas y relativas.

c) Dibuja un diagrama de sectores con los resultados obtenidos.

Objetivo del problema: Con este problema inicial lo que se busca es consolidar las técnicas básicas de recuento, cálculo de frecuencias relativas, porcentajes y diagramas de barras o sectores. Además nos va a permitir empezar la siguiente sesión obteniendo mejores resultados, ya que los alumnos con esta actividad recuerdan conceptos que son necesarios.

Metodología en el aula para la primera sesión: Al comienzo se realizará la prueba inicial de forma individual. Pasados los 20 minutos disponibles para su desarrollo el profesor la recogerá. A partir de aquí se van a formar grupos heterogéneos de 4 personas para llevar a cabo el problema de iniciación.

SESIÓN 2: Problema de la Razón de Ser

En esta sesión se va a realizar el problema que constituye la razón de ser del objeto matemático en cuestión. La idea es dedicar completamente la clase para llevar a cabo dicho problema.

A continuación describimos el problema que constituye la razón de ser del objeto matemático a enseñar, el cual dividiremos en cinco etapas:

<u>Etapa I</u>: Dividiremos a los alumnos en parejas y cada una lanzará dos dados (de diferente color) 50 veces y sumará sus puntuaciones. Anotando en la siguiente tabla las veces que han obtenido cada resultado, para a continuación dibujar un diagrama de barras.

	RECUENTO DEL EXPERIMENTO	TOTAL
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
	TOTAL	50

Etapa II: Dividiremos la clase en grupos formados por tres parejas de la etapa anterior. Cada grupo juntará en una sola tabla los resultados que han obtenido en la etapa anterior y dibujarán el diagrama de barras correspondiente.

A continuación compararán el diagrama conjunto que han obtenido los 6 miembros del grupo, compuesto por 150 observaciones, con el que tenia cada pareja. Para seguidamente debatir si tienen semejanzas o no.

Etapa III: Agruparemos los grupos formados anteriormente de manera que la clase quede dividida en dos. Cada grupo juntará en una sola tabla los resultados que han obtenido en la etapa anterior y dibujarán el diagrama de barras correspondiente.

A continuación compararán el diagrama conjunto que han obtenido, compuesto por 300 observaciones aproximadamente, con el que tenían cada grupo anterior. Para seguidamente debatir si tienen semejanzas o no.

Etapa IV: Juntamos los resultados obtenidos por todas las parejas de alumnos de la clase, frecuencia absoluta, en la siguiente tabla y apuntaremos también la frecuencia relativa.

	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
	600	1

A continuación, el profesor dibujaría en la pizarra digital el diagrama de barras ilustrando los resultados obtenidos.

Por último, comparando los cuatro diagramas de barras, el que se ha obtenido con la pareja en la etapa I, el de la etapa II, el de la III y el de la IV, los alumnos responderán a las siguientes preguntas: ¿Qué es lo que se observa?, ¿Hay tendencia en los diagramas de barras?, ¿A qué crees que es debido? Se les dejará un tiempo para que lo piensen y después se debatirá entre todos para conseguir llegar a la conclusión que nos permitirá alcanzar el objetivo del problema.

Objetivo del problema: Analizar que hay tendencia entre los cuatro gráficos que tienen que comparar.

Metodología en el aula: La metodología ha sido detallada en el desarrollo del problema.

Etapa V: Jugaremos al juego de las carreras de caballos. Para ello necesitaremos un tablero como el que se muestra a continuación, dos dados de dos colores y una ficha de color para cada alumno que juegue. Las reglas del juego son las siguientes: los alumnos eligen un número, que corresponderá a la calle en la cual correrá su caballo y posicionará su ficha, el número de calle será seleccionado tirando previamente cada jugador un dado y eligiendo por orden de puntuación. El profesor tirará los dos dados y sumará la puntuación, el alumno que tenga su ficha posicionada en la casilla que coincida con la suma de la puntuación de los dados, avanzará un lugar. El objetivo es llegar a la meta.

NOMBRE 

	0								
	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
	6								
	7								**M**
	8								**E**
	9								**T**
	10								**A**
	11								
	12								
	13								
	14								

Para finalizar el problema de la razón de ser, después de haber jugado unas cuantas partidas a las carreras de caballos, debatiremos entre todos cual es la mejor calle para posicionar el caballo, y haremos notar a los alumnos que los caballos que ocupan las calles 0, 1, 13 y 14 nunca se mueven, ya que la suma de los dados nunca puede dar estos valores.

Objetivo del problema: Con este problema pretendemos que los alumnos comprendan que en los juegos de azar hay decisiones que pueden cambiar la suerte. Y estas decisiones dependen de saber con qué frecuencias salen los posibles resultados del juego.

Metodología en el aula: Para llevar a cabo el juego se formarán grupos de 6 ó 7 alumnos.

SESIÓN 3: Regla de Laplace I

El objetivo de esta sesión es pasar de la probabilidad empírica a la probabilidad teórica obtenida por medio de la Regla de Laplace. Para ello, los alumnos deberán analizar la tabla de la etapa IV de la sesión anterior y rellenar la siguiente tabla:

Suma de los dados:	Frecuencias relativas	Posibles formas de obtener cada resultado

A continuación explicaré a los alumnos que a la frecuencia relativa, en términos de probabilidades, se le llama probabilidad empírica.

Institucionalizaré el concepto de probabilidad empírica de la siguiente manera:

Probabilidad empírica: La probabilidad de un suceso, A, es el valor en torno al cual tiende a estabilizarse su frecuencia relativa a medida que aumenta el número de veces que se realiza el experimento. Es un valor fijo y se representa por P(A).

Justificación de la probabilidad empírica: La justificación de esta técnica la vamos a hacer utilizando el problema que constituye la razón de ser del objeto matemático. La justificación en este caso se hace entre los alumnos y el profesor.

Tras la realización de la tabla, explicaré a los alumnos que todos los elementos que aparecen en ésta se llaman sucesos, siendo los elementos 0, 1, 13 y 14 sucesos imposibles ya que nunca se dan. Además los elementos de la columna de la derecha forman el espacio muestral del experimento. A continuación les institucionalizaré la definición propiamente dicha:

Espacio muestral: Conjunto de sucesos que recoge todos los resultados posibles del experimento, definido de manera que dos sucesos distintos nunca pueden suceder a la vez. El espacio muestral se denota con la letra E.

Ejercicio:

Indica cuales de los siguientes conjuntos son espacio muestral asociado al experimento indicado y cuales no. Razonando tu respuesta.

a) Lanzamiento de un dado cúbico, E={múltiplo de 2, múltiplo de 3}.

b) Sacamos una carta de una baraja española, E={copas, espadas, bastos, oros}.

c) Sacamos una carta de una baraja española, E={Figura, As, numerada del 2 al 7, Rey}.

d) Lanzamiento de un dodecaedro, E={par, impar}.

e) Lanzamiento de una moneda, E={Cara, Cruz}.

Objetivo: Detectar cuando un conjunto es espacio muestral o no, para que a la hora de construir uno, tengan claro las propiedades que debe cumplir.

Metodología: El ejercicio será realizado de forma individual y corregido en forma de debate.

El siguiente paso será empujar a los alumnos a que obtengan una fórmula general para obtener la probabilidad de forma más cómoda.

Dejaremos tiempo para que lo piensen. Se abrirá debate y se intentará que de manera conjunta se obtenga la idea de Regla de Laplace. Es aquí cuando el profesor institucionalizará la Regla de Laplace de manera concreta. La definición que se va a dar a los alumnos es:

Regla de Laplace: Los distintos resultados que se pueden obtener al realizar el experimento son los llamados casos posibles, mientras que los resultados que hacen que se verifique o que ocurra un suceso se denominan casos favorables.

Laplace definió probabilidad de un suceso A como el siguiente cociente:

P(A)=Nº. de casos favorables/Nº. de casos posibles.

A continuación calcularemos mediante la fórmula de Laplace las siguientes probabilidades: P(la suma de los dados sea 2), P(la suma de los dados sea 3), P(la suma de los dados sea 4), P(la suma de los dados sea 5), P(la suma de los dados sea 6), P(la suma de los dados sea 7), P(la suma de los dados sea 8), P(la suma de los dados sea 9), P(la suma de los dados sea 10), P(la suma de los dados sea 11) y P(la suma de los dados sea 12).

Para finalizar les pediremos a los alumnos que comparen los resultados que acaban de obtener con las frecuencias relativas (probabilidad empírica) que han calculado anteriormente. Preguntándoles: ¿Qué relación existe entre la fórmula de Laplace y la probabilidad empírica?

Hemos realizado una *modificación de la técni*ca: Pasamos a calcular probabilidades en vez de utilizando la Probabilidad empírica utilizando la Regla de Laplace.

*Justificación de la técnica (Regla de Laplac*e*)*: Comenzaremos la justificación diciendo a los alumnos: Acabamos de ver experimentalmente el concepto de probabilidad utilizando frecuencias relativas. Sin embargo, ¿Cuál es el mínimo número de veces que hemos de repetir cada experimento para obtener conclusiones? ¿Es siempre posible el realizar el experimento? Mediante estas preguntas quedará justificada la Regla de Laplace.

SESIÓN 4: Regla de Laplace II

Esta sesión la dedicaremos a que los alumnos descubran que no en todos los experimentos puede aplicarse la Regla de Laplace, ya que solo podemos aplicarla cuando los sucesos elementales son equiprobables. Para llevar a cabo este objetivo realizaremos dos experimentos:

- En el primero agruparemos a los alumnos en parejas y les repartiremos una chincheta y un cubilete. Deberán lanzar la chincheta con el cubilete 50 veces e ir contando cuantas veces la chincheta cae con la punta hacia arriba y cuantas con la punta ladeada. Uniendo los resultados de toda la clase se podrá estimar, aproximadamente, la probabilidad de estos dos sucesos.

- En el segundo repartiremos a las parejas de alumnos una moneda. Deberán lanzar la moneda 50 veces e ir contando las veces que sale cara y las veces que sale cruz. Uniendo los resultados de la clase se podrá estimar, aproximadamente, la probabilidad de estos dos sucesos.

Tras realizar los experimentos pediremos a los alumnos que apliquen la Regla de Laplace en ambos casos, para seguidamente preguntarles: ¿Por qué en el segundo experimento se cumple la Regla de Laplace y en el primero no? Intentaré que los alumnos lleguen a la conclusión ellos mismos y les haré hincapié en que la Regla de Laplace solo puede ser usada en casos en que los sucesos elementales son equiprobables, es decir que los posibles resultados del experimento tengan la misma probabilidad.

Para finalizar la clase realizaremos el siguiente **ejercicio**:

Di en cuales de los siguientes experimentos podemos aplicar la Regla de Laplace para calcular la probabilidad:

a) Número que obtienes al lanzar un dado no cargado.

b) Lanzamiento de una moneda cargada.

c) Extracción de una carta en una baraja.

d) Probabilidad de que en tu clase un alumno lleve gafas.

Objetivo del ejercicio: Que los alumnos sean capaces de detectar en las situaciones que se puede utilizar la regla de Laplace y en la que no.

Metodología: El ejercicio se realizará de forma individual y se corregirá formando debate. Los alumnos deberán decir si se puede aplicar Laplace y por qué.

SESIÓN 5: Suceso contrario.

Para comenzar esta sesión realizaremos una serie de ejercicios:

Ejercicio 1: Una bolsa contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. La experiencia consiste en extraer una bola. ¿Cuál es el espacio muestral?

Ejercicio 2: Lanzamos tres veces una moneda. Di cual es el espacio muestral y cuál es la probabilidad de obtener tres caras.

Ejercicio 3: Se plantea el siguiente experimento, extraer una carta de una baraja española.

a) Indica el espacio muestral asociado al experimento de observar si la carta obtenida es un oro, copa, espada o basto.

b) Calcula mediante la Regla de Laplace, si es posible, la probabilidad de obtener un rey, y por otro lado la de obtener un basto.

Ejercicio 4: Una bolsa contiene una bola roja, una bola azul y una bola verde. Se extraen dos bolas. Calcular:

a) Espacio muestral.

b) La probabilidad de extraer una bola roja y la otra de cualquier color.

Objetivo de los ejercicios: Que los alumnos se familiaricen con el concepto de espacio muestral y el cálculo de probabilidades en diferentes experiencias y se familiaricen con el cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace.

Metodología: Los ejercicios se realizarán de forma individual y serán corregidos en la pizarra por los alumnos.

A continuación introduciremos mediante dos ejercicios la definición de suceso contrario.

Ejercicio 1: Se realiza el experimento de tirar un dado cúbico numerado del 1 al 6.

a) Indica el espacio muestral asociado a observar el número que se obtiene.

b) Calcula la probabilidad de obtener un número par.

c) Calcula la probabilidad de obtener un número impar.

d) Compara el valor que se obtiene en el apartado b) y c). ¿Tienen alguna relación?

Ejercicio 2: Se realiza el experimento lanzar una moneda al aire dos veces.

a) Indica el espacio muestral.

b) Calcula la probabilidad de obtener {CC, CX, XC}.

c) Calcula la probabilidad de {XX}.

d) Compara el valor que se obtiene en el apartado b) y c). ¿Tienen alguna relación?

Objetivo de los ejercicios: Que los alumnos induzcan el concepto de suceso contrario.

Metodología: Los ejercicios se realizarán individualmente por los alumnos y se corregirán en la pizarra.

Para finalizar la sesión, les explicaremos que los sucesos A y B, de ambos ejercicios, son contrarios, ya que entre sus probabilidades existe una característica muy importante y es que suman 1, además no pueden suceder a la vez. A continuación institucionalizaré el concepto de suceso contrario de la siguiente manera:

Suceso contrario: El suceso contrario de A sucede cuando no sucede A, y se denota por A'. La suma de las probabilidades del suceso A y de su contrario es 1. Por tanto, P (A')= 1- P(A).

SESIÓN 6: Sucesos compatibles e incompatibles

Propondremos a los alumnos el siguiente **ejercicio**:

Se realiza el siguiente experimento: extraer una bola de una urna con ocho bolas numeradas del 1 al 8.

a) El suceso A={Extraer un número par} y el suceso B={Extraer un múltiplo de 3}, ¿Tienen elementos en común?; ¿Pueden suceder a la vez?

b) El suceso C={Extraer un número impar} y el suceso D={2 ,4}, ¿Tienen elementos en común? ; ¿Pueden suceder a la vez?

Objetivo del ejercicio: Que los alumnos induzcan los conceptos de suceso compatible e incompatible.

Metodología: El ejercicio se realizará entre toda la clase dando cada alumno su respuesta a las preguntas.

A continuación institucionalizaré los conceptos de sucesos compatibles e incompatibles de la siguiente manera:

- Sucesos compatibles: Dos sucesos, A y B, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.

- Sucesos incompatibles: Dos sucesos, A y B, son incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común.

Para finalizar esta sesión y en las dos posteriores vamos a realizar diversos problemas donde los alumnos tengan que aplicar lo que hemos visto en esta unidad didáctica. Con estos problemas se va a intentar que se motiven y encuentren mayor utilidad a la Probabilidad.

Los **problemas** que vamos a proponer a los alumnos son:

Problema 1: Se ha fabricado con un molde varios miles de dados. Sospechamos que son incorrectos. ¿Cómo procedemos para averiguar si son o no incorrectos? En caso de que no lo sean ¿cómo evaluaremos la probabilidad de cada cara?

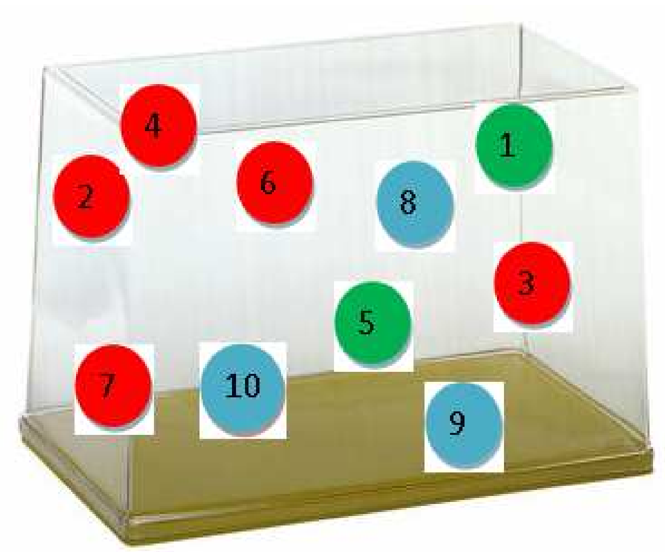
Problema 2: Un juego de cartas solo distingue estas posibilidades; Figura (sota, caballo y rey), As, menor que 6 (2, 3, 4, 5) y mayor que 5 (6, 7).

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Di la probabilidad en cada caso.

c) ¿Cuál es la probabilidad de "no figura"?

Problema 3: La siguiente urna contiene 10 bolas de colores, las cuales están numeradas del 1 al 10. La bola 1 y 5 son verdes, la 2, 3, 4, 6 y 7 rojas y la 8, 9 y 10 azules. Se extrae una bola al azar.



Contesta a las siguientes preguntas:

a) Describe el espacio muestral, ¿Cuántos casos tiene?

b) Describe los siguientes sucesos en función del espacio muestral:

- Bola roja.
- Bola verde.
- Bola azul.
- Bola roja con número impar.
- Bola con número par.

c) Calcula sus probabilidades.

Objetivo de estos problemas: Que los alumnos se familiaricen con el cálculo de probabilidades en diferentes experiencias y que practiquen el cálculo de la probabilidad mediante la Regla de Laplace.

Metodología: Los problemas se realizarán de forma individual, si les surgen dudas el profesor intentará guiar a los alumnos. Dispondrán del tiempo necesario para la resolución y a continuación serán ellos los que salgan a la pizarra a corregirlos.

SESIÓN 7: Resolución de problemas

En primer lugar corregiremos los problemas que no haya dado tiempo el día anterior.

Los ejercicios y problemas que realizaremos en esta sesión son:

Ejercicios:

Ejercicio 1: La ruleta es un conocido juego de los casinos. Consiste en una rueda equilibrada, dividida en 37 casillas numeradas del 0 al 36. El 0 es de color verde y si sale gana la banca.

Hay diferentes tipos de apuestas, a un número sólo, a “par” o a “impar”, a “rojo” o a “negro, a “pase” (nº>18) o a “falte” (nº<18), a una columna,…

Calcula las siguientes probabilidades:

a) P (17)

b) P (impar)

c) P (2ª columna)

d) P (par y rojo)

e) P (impar y falte)

f) P (rojo)

Ejercicio 2: Lanzamos 3 monedas. Calcula:

a) P [3 caras]

b) P [ninguna cara]

c) P [alguna cara]

Problemas:

Problema 1: Se lanzan dos monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas y seis en el dado? ¿Cuál, la de obtener cruz en las monedas y par en el dado?

Problema 2: Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?

Objetivo de estos ejercicios y problemas: Que los alumnos los conceptos que han sido enseñados durante la Unidad Didáctica.

Metodología: Los problemas se realizarán de forma individual, si les surgen dudas el profesor intentará guiar a los alumnos. Dispondrán del tiempo necesario para la resolución y a continuación serán ellos los que salgan a la pizarra a corregirlos. Si no da tiempo de realizar todos los problemas, se les enviarán de deberes para casa.

SESIÓN 8: Resolución de problemas

Vamos a dedicar toda la sesión a realizar problemas donde los alumnos deban aplicar todo lo aprendido.

Problema de Monty Hall: Imagínate que estás en un concurso. Tienes ante ti tres puertas. Tras una de ellas se esconde el premio del concurso: un coche. Tras las otras dos puertas hay dos cabras, una en cada una de ellas. Debes elegir una puerta y te llevarás lo que haya detrás. El presentador te dirá: “Elige una de las tres puertas”. Automáticamente abrirá una de las que tiene una cabra detrás. En este momento el presentador te da la opción de cambiar o de quedarte con la puerta inicial. ¿Qué harías? ¿Por qué?

Objetivo: Que los alumnos se den cuenta que la probabilidad puede resultar en muchas ocasiones un tanto engañosa y poco intuitiva.

Respuestas esperadas: Suponemos que los alumnos decidan no cambiar la puerta. Ya que la deducción que esperamos que hagan es: “Hay las mismas posibilidades, 50% de acertar y 50% de fallar, no importa si cambio o no, por lo que no voy a cambiar por si he elegido la buena.” Más tarde se darán cuenta de que la mejor opción es cambiar.

Metodología: El ejercicio se va a plantear por parejas. Para empezar el profesor va a proponer a los alumnos que experimenten con el juego y que de esa manera estudien cuál es la mejor opción. Dispondrán de bastante tiempo para ello, para que realicen el experimento un número significativo de veces. A continuación será el profesor el que a través de la siguiente simulación jugará con ellos http://www.math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html e intentará que los alumnos a través de la experimentación se queden con la idea de que la mejor opción es cambiar. He decido convencer a los alumnos a través de la experimentación de que esta es la mejor opción, ya que se trata de una idea poco intuitiva. Finalmente el profesor, con el objetivo de que los alumnos entiendan porque deberán cambiar de puerta, dará la siguiente explicación:

En la primera elección las probabilidades de elegir el coche o una de las cabras son las siguientes:

- 1/3 elegir coche.
- 2/3 elegir cabra.

Por tanto si no cambias la puerta la probabilidad de que haya un coche tras ella es de 1/3.

Por otro lado si cambias la puerta, pueden ocurrir dos cosas:

- Si has elegido el coche (1/3 de posibilidades), seguro que te llevarás una cabra.
- Si has elegido la cabra (2/3), seguro que ganas el coche, ya que el presentador abrirá la puerta que contiene la otra cabra.

Mostremos un cuadro explicativo:

NO CAMBIO LA PUERTA	**CAMBIO LA PUERTA**
COCHE ⇨ 33% CABRA ⇨ 66%	COCHE ⇨ 66% CABRA ⇨ 33%

Por tanto siempre debes cambiar la puerta, ya que la probabilidad de ganar el coche es el doble.

Problema 2: José y María le dicen a Pedro, su hermano menor, "Te daremos 20 € si ganas dos partidos de ajedrez sobre tres jugados. Jugarás alternativamente contra nosotros". José suele ganarle a Pedro en un 95 % de los casos, mientras que María le gana en un 50% de las partidas. ¿Contra quién debe jugar primero Pedro, contra María o contra José?

Objetivo: Que los alumnos tengan en cuenta el problema con el que hemos trabajado en clase y recuerden que la probabilidad puede resultar en muchas ocasiones un tanto engañosa y poco intuitiva.

Respuestas esperadas: Que los alumnos elijan la opción de enfrentarse dos veces contra María.

Metodología: El ejercicio se va a plantear por parejas.

SESIÓN 9: Evaluación

En esta sesión se va a realizar la prueba de evaluación. En ella se va a intentar que se recojan los objetivos más importantes que se pretenden conseguir desde el principio. Va a tener una duración aproximada de una hora. Dicha prueba esta especificada en el apartado de evaluación.

Duración temporal aproximada

	ACTIVIDADES	DURACIÓN
SESIÓN 1	Evaluación inicial	20 minutos
	Problema de la ruleta	40 minutos
SESIÓN 2	Problema que constituye la razón de ser	60 minutos
SESIÓN 3	Institucionalización de probabilidad empírica y espacio muestral	25 minutos
	Regla de Laplace	35 minutos
SESIÓN 4	Experimentación con situaciones irregulares	40 minutos
	Ejercicios	20 minutos
SESIÓN 5	Ejercicios	30 minutos
	Suceso contrario	30 minutos
SESIÓN 6	Sucesos compatible e incompatible	30 minutos
	Ejercicios	30 minutos
SESIÓN 7	Resolución de problemas	60 minutos
SESIÓN 8	Resolución de problemas	60 minutos
SESIÓN 9	Evaluación final	60 minutos

5. Evaluación

Prueba escrita:

MATEMÁTICAS 3º DE ESO, PROBABILIDAD

Nombre y Apellidos:

Fechas:

Curso:

1. Una urna tiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extrae una bola al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
    a) A={Sea roja}
    b) B={Sea verde}
    c) C={Sea amarilla}
    d) D={No sea roja}
    e) E={Sea verde o roja}
2. Se extrae una carta de una baraja española (40 cartas). Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
    a) A={Figura}
    b) B={As}
    c) C={Espadas}
    d) Los sucesos A, B y C, ¿son compatibles o incompatibles? Compáralos dos a dos.
3. Se lanzan dos dados cúbicos y se observan los números que se obtienen. Contesta a las siguientes preguntas:
    a) Construye el espacio muestral asociado al experimento.
    b) Calcula la probabilidad de que en al menos uno de los dados salga un número par.
    c) Calcula la probabilidad que en los dos dados se obtengan el mismo valor.
4. Hallar la probabilidad de que al levantar las fichas de un dominó se obtenga una ficha con un número de puntos mayor que 9.

Recordar: Un domino está compuesto por 28 fichas: (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6).

5. (Pregunta extra) Un dado esta trucado, de forma que las probabilidades de obtener las distintas caras son proporcionales a los números de estas. Hallar:

   a) La probabilidad de obtener el 6 en un lanzamiento.

   b) La probabilidad de conseguir un número impar en un lanzamiento.

Nota: Las preguntas de la 1 a la 4 tienen un valor de 2.5 puntos. La pregunta 5 servirá para aumentar la calificación de los alumnos hasta un máximo de un punto.

Aspectos de conocimiento que se pretenden evaluar con cada una de las preguntas:

- Pregunta 1: Se pretende evaluar además de la práctica que los alumnos tienen con la Regla de Laplace, el concepto de suceso contrario y la propiedad que cumplen las probabilidades de un suceso y su contrario.

- Pregunta 2: Con esta pregunta se pretende evaluar si los alumnos han estudiado el concepto de suceso compatible e incompatible y además la aplicación de la Regla de Laplace.

- Pregunta 3: Con esta pregunta evaluamos si los alumnos saben construir el espacio muestral, además de la aplicación de la regla de Laplace.

- Pregunta 4: Con esta pregunta evaluaremos si los alumnos saben aplicar la Regla de Laplace en un contexto distinto a los propuestos en clase.

- Pregunta 5: Se evalúa que los alumnos trabajen con probabilidades de experiencias irregulares. Con este problema se pretende que los alumnos razonen más allá.

Respuestas esperadas en las preguntas de la prueba escrita en función del conocimiento de los alumnos:

- Pregunta 1: Se espera que los alumnos calculen la probabilidad de obtener bola verde, bola roja y bola amarilla, sin ningún tipo de dificultad. La probabilidad del suceso D puede calcularse de dos maneras distintas, mediante Regla de Laplace o aplicando la propiedad de las probabilidades de sucesos contrarios, ya que A y D son contrarios, así pues no se espera que tengan problemas en la resolución del apartado d). No estoy tan segura que detecten que el suceso E sea el contrario de C, ni tampoco que lo resuelvan mediante la Regla de Laplace, ya que la unión les va a despistar.

- Pregunta 2: Se espera que los alumnos no tengan ningún problema con la resolución de los apartados a), b) y c). En el apartado d) tampoco tendrán dificultad si les ha quedado claro y han estudiado el concepto de sucesos compatibles e incompatibles.

- Pregunta 3: Suponemos que el apartado a) será desarrollado por los alumnos sin ninguna dificultad, ya que el espacio muestral de este experimento se construyó en la sesión 2 en el problema que constituye la razón de ser. El apartado b) y c) mediante Laplace no supondrá ningún problema.

- Pregunta 4: Se espera que los alumnos resuelvan el problema sin dificultad, ya que aunque no hayamos resuelto en clase ningún problema con fichas de dominó, les estoy dando el espacio muestral del experimento.

- Pregunta 5: Este problema tiene un grado más de dificultad que los anteriores y por la tanto se espera que el número de alumnos que resuelvan esta pregunta sea inferior al de las anteriores.

Es la pregunta más complicada para los alumnos, de ahí que para obtener la máxima calificación no sea necesaria su realización.

Criterios de evaluación:

Cada una de las preguntas del examen tendrá una puntuación de 2.5. Permitiré que los alumnos resuelvan las preguntas del examen utilizando ideas intuitivas que les lleven a un resultado correcto, ya que se trata de un tema totalmente nuevo para ellos. Además tendrán la posibilidad de subir la nota mediante el problema extra.

El examen no será la totalidad de la nota, la prueba escrita tendrá un peso del 80% de la nota final, un 5% corresponderá al comportamiento, mientras que el 15% restante lo contabilizaremos con el trabajo realizado en clase.

6. BLIBIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA

Colera J., García R., Gaztelu I, Oliveira M.J. 2010. *Matemáticas*. Madrid: Anaya.

http://www.ugr.es/~batanero/estudios%20sobre%20didactica%20de%20la%20probabilidad.htmhttp://revistasuma.es/IMG/pdf/55/007-020.pdf

http://www.monografias.com/trabajos-pdf2/juegos-matematicos/juegos-matematicos.pdf

http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Monty_Hall

http://www.math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html

http://www.vitutor.com/pro/2/a_g.html