

Anexos

Anexos A

Elipse de polarización

En primer lugar se introducen las representaciones complejas del campo eléctrico, que como se explicará más adelante, se utilizarán para calcular las matrices de Mueller de los diferentes elementos polarizadores. La definición compleja de E_x y E_y es:

$$E_x(t) = E_{ox}e^{i(\omega t + \delta_x)} = E_x e^{i\omega t} \quad (\text{A.1})$$

$$E_y(t) = E_{oy}e^{i(\omega t + \delta_y)} = E_y e^{i\omega t} \quad (\text{A.2})$$

donde las amplitudes E_x y E_y se definen como:

$$E_x = E_{ox}e^{i\delta_x} \quad (\text{A.3})$$

$$E_y = E_{oy}e^{i\delta_y} \quad (\text{A.4})$$

En este anexo se va a tratar las distintas relaciones que existen en la elipse de polarización. En primer lugar se incluye la demostración de que las ecuaciones que definen el campo eléctrico definen una elipse.

Si se toma E_y , haciendo uso de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \pm \beta &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\omega t) &= \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)} \end{aligned}$$

Haciendo uso de las definiciones de las componentes de la amplitud en la ecuación 2.1

$$\frac{E_x}{E_{ox}} = \cos(\omega t) \quad (\text{A.5})$$

$$E_y = E_{oy} \left(\frac{E_x}{E_{ox}} \cos \delta - \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{ox}} \right)^2} \sin \delta \right) \quad (\text{A.6})$$

Si ahora se ordenan los términos y se elimina la raíz cuadrada elevando al cuadrado queda la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_x}{E_{ox}} \cos \delta \right)^2 = \left(1 - \frac{E_x^2}{E_{ox}^2} \right) \sin^2 \delta \quad (\text{A.7})$$

Esta ecuación se puede transformar despejando el $\sin^2 \delta$ dando lugar a la ecuación que represente la elipse de polarización 2.4:

$$\frac{E_x^2}{E_{ox}^2} + \frac{E_y^2}{E_{oy}^2} - \frac{2E_x E_y}{E_{ox} E_{oy}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (\text{A.8})$$

Se puede demostrar que esta ecuación es la de una elipse, para ello se rota esta ecuación a un nuevo sistema de coordenadas (x', y') giradas un ángulo Ψ respecto al sistema de coordenadas (x, y) . Si para la ecuación A.8 tenemos que $\delta = \pi + n\frac{\pi}{2}$, siendo n un número natural, o el ángulo $\Psi = 0$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{E_x^2}{E_{ox}^2} + \frac{E_y^2}{E_{oy}^2} = 1 \quad (\text{A.9})$$

Donde si además se da que $E_{ox}^2 = E_{oy}^2 = E_o^2$

$$E_x^2 + E_y^2 = E_o^2 \quad (\text{A.10})$$

Esta ultima ecuación es la ecuación de una circunferencia, que se da para unos valores concretos de δ . De esta forma, podemos categorizar las distintas polarizaciones posibles en función del valor de δ

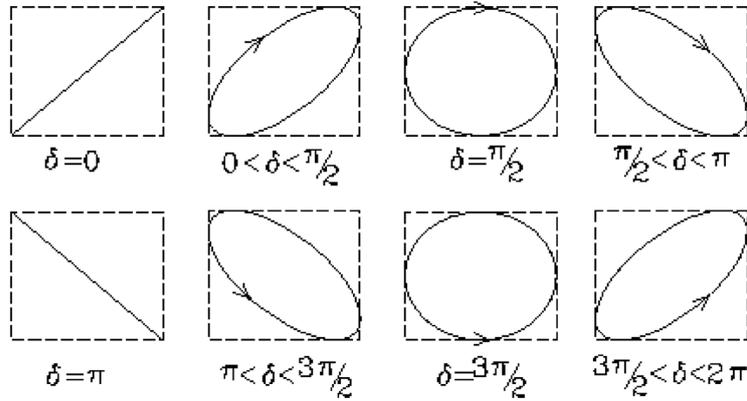


Figura A.1: Elipse de polarización en función de δ

Además de δ , existen otros ángulos importantes en la definición de la elipse. Uno de ellos es el ya comentado anteriormente Ψ , que se define como lo rotada que esta la elipse respecto al sistema de referencia (x, y) . Este ángulo se conoce con el nombre de acimut, y se puede definir como:

$$\tan(2\Psi) = 2 \frac{E_{ox} E_{oy}}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} \cos \delta, \quad 0 \leq \Psi \leq \pi \quad (\text{A.11})$$

Otros dos son el ángulo de elipticidad χ y el ángulo auxiliar α :

$$\sin(2\chi) = 2 \frac{E_{ox} E_{oy}}{E_{ox}^2 + E_{oy}^2} \sin \delta, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \quad (\text{A.12})$$

$$\tan \alpha = \frac{E_{oy}}{E_{ox}}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.13})$$

Si utilizamos las tres ecuaciones anteriores podemos obtener las relaciones entre el acimut, la elipticidad, el ángulo α y la diferencia de fase:

$$\tan(2\Psi) = \tan(2\alpha) \cos \delta \quad (\text{A.14})$$

$$\sin(2\chi) = \sin(2\alpha) \sin \delta \quad (\text{A.15})$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(2\chi) \cos \Psi \quad (\text{A.16})$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan 2\chi}{\sin 2\Psi} \quad (\text{A.17})$$

Anexos B

Elementos polarizadores

En este anexo se extienden las propiedades de los elementos polarizadores mencionados en la sección sobre matrices de Mueller 2.4 contenida en el capítulo 2.3. Para ello se introduce la representación compleja de las componentes de Stokes, que utilizan la definición compleja de las amplitudes (A.1 y A.2). Si definimos E_x^* y E_y^* como los conjugados complejos de E_x y E_y respectivamente, la definición de los parámetros de Stokes queda de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x E_x^* + E_y E_y^* \\ E_x E_x^* - E_y E_y^* \\ E_x E_y^* + E_y E_x^* \\ i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

B.1. Polarizador lineal

Si se recuerdan las ecuaciones que describen el comportamiento de la amplitud al pasar por un polarizador lineal, dados dos coeficientes de atenuación p_x y p_y :

$$E'_x = p_x E_x, \quad E'_y = p_y E_y \quad (\text{B.2})$$

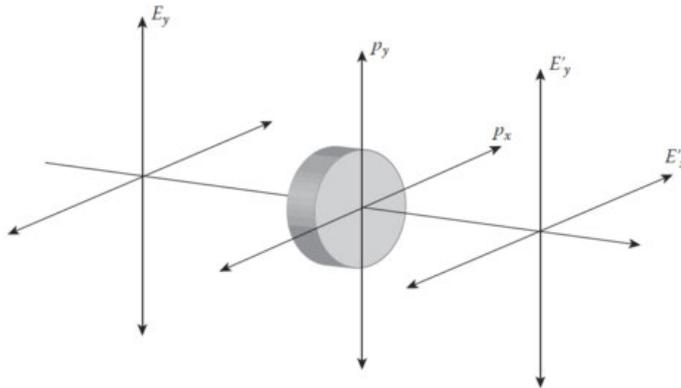


Figura B.1: Polarizador lineal

Si en una componente no va a haber atenuación, ese coeficiente valdrá 1, mientras que para la atenuación completa valdrá 0. Utilizando la definición compleja de los parámetros de Stokes (B.1), sea S el vector del rallo incidente y S' el del haz emergente tenemos que:

$$S = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x E_x^* + E_y E_y^* \\ E_x E_x^* - E_y E_y^* \\ E_x E_y^* + E_y E_x^* \\ i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \end{pmatrix} \quad (B.3)$$

$$S' = \begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_x E'_x{}^* + E'_y E'_y{}^* \\ E'_x E'_x{}^* - E'_y E'_y{}^* \\ E'_x E'_y{}^* + E'_y E'_x{}^* \\ i(E'_x E'_y{}^* - E'_y E'_x{}^*) \end{pmatrix}$$

Si se sustituye B.2 en la definición de S' y se utiliza la definición de S, obtenemos que:

$$S' = \begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad (B.4)$$

Con lo que la matriz de Mueller para un polarizador lineal con coeficientes de atenuación p_x y p_y :

$$M(p_x, p_y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{pmatrix} \quad (B.5)$$

Utilizando esta matriz, podemos obtener los polarizadores lineales ideales para la polarización horizontal (polarizador lineal a 0°) ($p_x=1$ y $p_y=0$) y para la vertical (polarizador lineal a 90°) ($p_x=0$ y $p_y=1$):

$$M_{PLH} = M(1, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (B.6)$$

$$M_{PLV} = M(0, 1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (B.7)$$

Se puede observar, que en el caso de que ambos coeficientes tengan el mismo valor, la matriz resultante sera equivalente a la siguiente:

$$M(p, p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p^2 \end{pmatrix} = \frac{p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (B.8)$$

Estos filtros se conocen como filtros de densidad neutra, que tienen la función de reducir la luminosidad del haz entrante, ya que el resultado de aplicar esa matriz a un vector de Stokes dado será el atenuar todos los parámetros en función de p^2 .

Esta misma matriz se puede describir en términos de funciones trigonométricas definiendo α de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p^2 &= p_x^2 + p_y^2 \\ p_x &= p \cos \alpha \\ p_y &= p \sin \alpha \\ 0^\circ &\leq \alpha \leq 90^\circ \end{aligned}$$

Esta nueva representación da lugar a esta nueva matriz, ahora dependiente de un ángulo en lugar de dos coeficientes:

$$M(\alpha) = \frac{p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\alpha & 0 & 0 \\ \cos 2\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 2\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

B.2. Retardador

El retardador, también llamado cambiador de fase, es un elemento polarizador cuya función es introducir un cambio de fase φ entre las componentes ortogonales del haz de luz entrante.

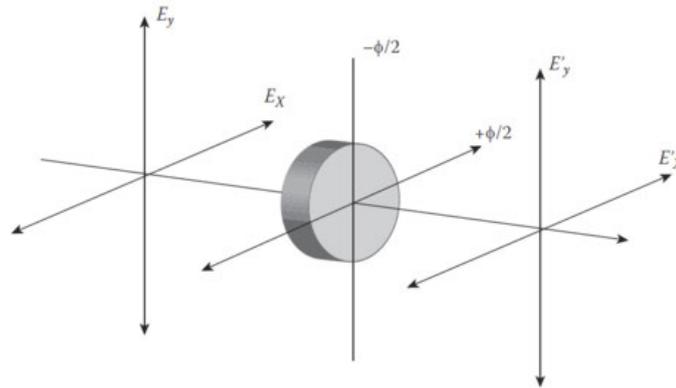


Figura B.2: Retardador

Como se observa en la imagen, el eje X aumentará de fase $+\varphi/2$, por lo que recibe el nombre de eje rápido, mientras que el eje Y (eje lento), recibirá un cambio de fase de $-\varphi/2$, por lo que el cambio total entre los ejes X e Y será de φ .

Al igual que se realizó para el polarizador lineal, se utiliza la representación compleja de los parámetros de Stokes (B.1) para obtener la matriz. De nuevo definiremos E'_x y E'_y

tal que:

$$E'_x = e^{i\frac{\varphi}{2}} E_x, \quad E'_y = e^{-i\frac{\varphi}{2}} E_y \quad (\text{B.10})$$

Utilizando de nuevo B.3 y sustituyendo en S' con B.10 se obtiene:

$$S' = \begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

La matriz de Mueller para un retardador ideal es la siguiente:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Los retardadores más usados son el retardador de un cuarto de onda (QWP por sus siglas en inglés) y el de media onda (HWP), cuyas matrices son las siguientes, siendo X el eje rápido:

$$M_{QWP,X}(90^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$M_{HWP,X}(180^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Si el eje rápido fuera Y, $M_{QWP,Y} = M_{QWP,X}^{-1}$.

Es especialmente interesante el filtro QWP ya que una de sus propiedades resulta muy útil para la construcción de los vectores de Stokes. El QWP tiene la propiedad de transformar una polarización lineal a 45° en una polarización circular a izquierdas. De la misma forma, se puede utilizar para transformar una polarización lineal a 135° en una polarización circular a derechas, con lo que el QWP resulta especialmente útil para calcular el parámetro $S_3(V)$. Esto se puede demostrar multiplicando un vector de Stokes de luz polarizada a 45° por el filtro QWP:

$$S' = M_{QWP,X} S_{45^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

De la misma forma, podemos pasar de una polarización circular a izquierdas a un filtro lineal a 45° multiplicando por la inversa de esa matriz, que es $M_{QWP,Y}$.

El filtro HWP tiene una propiedad también interesante, ya que sirve para invertir la elipticidad y el acimut:

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\chi) \cos(2\Psi) \\ -\cos(2\chi) \sin(2\Psi) \\ -\sin(2\chi) \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{S_2}{S_1} \right), \quad \Psi = \frac{\pi}{2} - \Psi$$

$$\chi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{S_3}{S_0} \right), \quad \chi = \chi - \frac{\pi}{2}$$

B.3. Retardador y combinación de elementos

En la sección 2.4.4 se ha combinado un polarizador lineal con un rotador para generar la matriz de cualquier polarizador lineal a θ grados. De la misma forma se puede obtener la matriz general de un retardador lineal (combinación de un filtro lineal a θ grados y un retardador).

$$M_{WP}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \varphi \sin^2 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta - \cos 2\theta \sin 2\theta \cos \varphi & \sin 2\theta \sin \varphi \\ 0 & \cos 2\theta \sin 2\theta - \cos 2\theta \sin 2\theta \cos \varphi & \sin^2 2\theta + \cos \varphi \cos^2 2\theta & -\cos 2\theta \sin \varphi \\ 0 & -\sin 2\theta \sin \varphi & \cos 2\theta \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Anexos C

Derivaciones

En este anexo se recoge el proceso de derivación que no se incluyo en su respectivo apartado en la sección 3.4.1, tanto de la función del contraste como de la saturación. Estas funciones están definidas en 3.18 y 3.20:

C.1. Contraste

La función del contraste sobre un pixel p con una ventana de pixeles W se define en la sección 3.4.1 y es la siguiente:

$$C(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} \left(L(i, \alpha) - \overline{L(W, \alpha)} \right)^2} \quad (\text{C.1})$$

La derivada de C, C' es:

$$C'(\alpha) = \frac{\frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} 2 \left(L(i, \alpha) - \overline{L(W, \alpha)} \right) \left(L'(i, \alpha) - \overline{L'(W, \alpha)} \right)}{2 \sqrt{\frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} \left(L(i, \alpha) - \overline{L(W, \alpha)} \right)^2}} \quad (\text{C.2})$$

Para obtener los puntos críticos, hay que calcular los valores de α que cumplan $C'(\alpha) = 0$. Para ello, hay que encontrar aquellos valores que cumplan que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} 2 \left(L(i, \alpha) - \overline{L(W, \alpha)} \right) \left(L'(i, \alpha) - \overline{L'(W, \alpha)} \right) &= 0 \\ Y \text{ cumplan : } 2 \sqrt{\frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} \left(L(i, \alpha) - \overline{L(W, \alpha)} \right)^2} & \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

A continuación, se van a definir las siguientes variables y funciones:

$$\begin{aligned}
I(i) &= I_R + I_G + I_B & Q(i) &= Q_R + Q_G + Q_B & U(i) &= U_R + U_G + U_B \\
I(W) &= \frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} I(i) & Q(W) &= \frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} Q(i) & U(W) &= \frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} U(i) \\
L(i, \alpha) &= I(i) + Q(i) * \cos(2\alpha) + U(i) * \sin(2\alpha), & L(W, \alpha) &= \frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} L(i, \alpha) \\
L'(i, \alpha) &= U(i) * \cos(2\alpha) - Q(i) * \sin(2\alpha), & L'(W, \alpha) &= \frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} L'(i, \alpha) \\
Is(i, W) &= I(i) - I(W) \\
Qs(i, W) &= Q(i) - Q(W) \\
Us(i, W) &= U(i) - U(W) \\
a &= \frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} Is(i, W)Us(i, W) \\
b &= \frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} Is(i, W)Qs(i, W) \\
c &= \frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} Us(i, W)^2 - Qs(i, W)^2 \\
d &= \frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} Qs(i, W)Us(i, W)
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Si se sustituye, con las variables comentadas anteriormente y se simplifica, se obtiene la siguiente ecuación:

$$a \cos(2\alpha) - b \sin(2\alpha) + c \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) + d(\cos(2\alpha)^2 - \sin(2\alpha)^2) = 0 \tag{C.5}$$

Sustituyendo $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ se obtiene:

$$C(\alpha) = (4d^2 + c^2) \cos^4 2\alpha + (2ad + 2cb) \cos^3 2\alpha + (a^2 - 4d^2 + b^2 - c^2) \cos^2 2\alpha - (2ad + 2cb) \cos 2\alpha + d^2 - b^2 \tag{C.6}$$

Realizando un cambio de variable, $x = \cos 2\alpha$, queda una ecuación de grado 4. Resolviendo esta se obtienen las raíces. Para resolver estas ecuaciones se ha utilizado la librería [9].

C.2. Saturación

Al igual que anteriormente, es necesario calcular la derivada $S'(p)$, y posteriormente calcular las raíces de esta función. Si se define $f(p) = \frac{(R-\mu)^2 + (G-\mu)^2 + (B-\mu)^2}{3}$, queda claro que $S'(p) = \frac{f'(p)}{2\sqrt{f(p)}}$. Para calcular las raíces de $S'(p)$, se calculan las raíces de $f'(p)$, que cumplan la restricción de que $2\sqrt{f(p)}$ no sea igual a cero. Se sustituye cada canal por el resultado de aplicar un filtro lineal de α grados sobre él. Por otro lado, $\mu = L/3$, y ya se conocen tanto L , como L' .

$$f'(p) = \frac{2}{3}((R - L)(R' - L') + (G - L)(G' - L') + (B - L)(B' - L')) \tag{C.7}$$

Para cada canal,

$$\begin{aligned} R &= I_R + Q_R \cos \alpha + U_R \sin \alpha \\ R' &= U_R \cos \alpha - Q_R \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Y de forma equivalente para los canales G y B. Si se opera en $f'(c)$,

$$I = \frac{I_R + I_G + I_B}{3}, \quad Q = \frac{Q_R + Q_G + Q_B}{3}, \quad U = \frac{U_R + U_G + U_B}{3} \quad (\text{C.9})$$

$$I_{sR} = I_R - I, \quad Q_{sR} = Q_R - Q, \quad U_{sR} = U_R - U \quad (\text{C.10})$$

Y se definen $I_{sG}, Q_{sG}, U_{sG}, I_{sB}, Q_{sB}$ y U_{sB} para el resto de canales de forma equivalente a las definiciones de R. Con estas definiciones, $f'(c)$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f'(p) &= \frac{2}{3}((I_{sR}U_{sR} + I_{sG}U_{sG} + I_{sB}U_{sB}) \cos \alpha - (I_{sR}Q_{sR} + I_{sG}Q_{sG} + I_{sB}Q_{sB}) \sin \alpha \\ &\quad + ((U_{sR}^2 + U_{sG}^2 + U_{sB}^2) - (Q_{sR}^2 + Q_{sG}^2 + Q_{sB}^2)) \cos \alpha \sin \alpha \\ &\quad (Q_{sR}U_{sR} + Q_{sG}U_{sG} + Q_{sB}U_{sB})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Para despejar alpha, se definen los siguientes términos:

$$\begin{aligned} a &= (I_{sR}U_{sR} + I_{sG}U_{sG} + I_{sB}U_{sB}), \quad b = (I_{sR}Q_{sR} + I_{sG}Q_{sG} + I_{sB}Q_{sB}) \\ c &= (U_{sR}^2 + U_{sG}^2 + U_{sB}^2) - (Q_{sR}^2 + Q_{sG}^2 + Q_{sB}^2) \\ d &= (Q_{sR}U_{sR} + Q_{sG}U_{sG} + Q_{sB}U_{sB}) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Se sustituye $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, y se obtiene:

$$f'(p) = (4d^2 + c^2) \cos^4 \alpha + (2ad + 2cb) \cos^3 \alpha + (a^2 - 4d^2 + b^2 - c^2) \cos^2 \alpha - (2ad + 2cb) \cos \alpha + d^2 - b^2 \quad (\text{C.13})$$

Realizando un cambio de variable, $x = \cos \alpha$, queda una ecuación de grado 4. Resolviendo esta se obtienen las raíces. Para resolver estas ecuaciones se ha utilizado la librería [9].