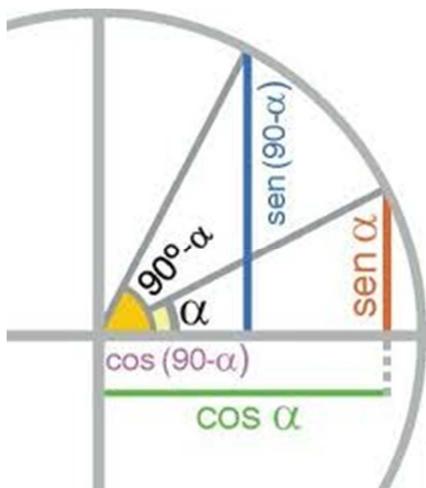




MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESORADO DE
EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO,
FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS,
ARTÍSTICAS Y DEPORTIVAS –
CURSO 2011/2012

Especialidad de Matemáticas

Las Razones



Trigonométricas

ALUMNO: JAVIER MANGADO FERNÁNDEZ

NIP: 505426

TUTORA: PILAR BOLEA

Índice

A. Las Razones Trigonométricas	3
B.- Conocimientos previos del alumno	6
C. Las razones de ser de las Razones Trigonométricas	9
1. <i>Razones de ser</i>	9
2. <i>Descripción de las razones de ser</i>	9
D. Campo de problemas, técnicas y tecnologías	13
1. Introducción.....	13
2. Campo de Problemas, Técnicas y Tecnologías asociadas	13
3. Descripción de las técnicas utilizadas	16
4. Metodología.....	18
5. Institucionalización de las Razones Trigonométricas	19
G. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma	20
1. Presentación Didáctica	20
2. Secuencia didáctica.....	20
Primera Sesión: Repaso Conocimientos Previos.....	20
Segunda Sesión: Introducción a la Trigonometría	20
Tercera Sesión: Razones Trigonométricas	21
Cuarta Sesión: Circunferencia Trigonométrica	21
Quinta Sesión: Práctica con las razones trigonométricas	21
Sexta Sesión: Tipos de Ángulos y sus relaciones.....	22
Séptima Sesión: Aplicación de las Razones Trigonométricas.....	22
Octava Sesión: Uso de la calculadora. Comprobación lógica.....	22
Novena Sesión: Sesión con Geogebra	23
Decima Sesión: Prueba de Evaluación	23
H. Sobre la evaluación.....	24
1. Prueba escrita de evaluación	24
2. Criterios de Evaluación	26
Bibliografía.....	27

I. Las Razones Trigonométricas

Las razones trigonométricas corresponde a la asignatura de Matemáticas de 4º de Educación Secundaria Obligatoria en la Opción B, a través de la Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón.

Las razones trigonométricas se encuentra dentro de la asignatura de Matemáticas de 4º de la ESO que tiene una carga lectiva de 4 horas semanales. De acuerdo con las consideraciones legales, se entiende la enseñanza/aprendizaje como un proceso individual que atendiendo al desarrollo integral del alumno/a, tiene que conseguir el logro de las capacidades correspondientes en el curso 4º ESO. Para ello, se consideran los siguientes apartados como fuente de información relevante. Entre ellos destacan:

1. Participación positiva del alumno/a en clase, que engloba aspectos como la atención, la puntualidad, la realización de tareas propuestas, la presentación de trabajos, etc.
2. Actitud tolerante y respetuosa hacia los compañeros / as de clase, hacia el profesor/a, hacia el aula y los materiales, etc.
3. Hábitos de trabajo adecuados, que incluyen el orden y el aseo en los trabajos y exámenes, el trabajo en silencio, la correcta expresión oral y escrita, la disposición al trabajo en grupo, etc.
4. Disponer de los materiales didácticos, como son el libro, el cuaderno..... Y lo que en cada momento sea necesario para la marcha correcta de la clase.
5. Tener el cuaderno didáctico al día, realizado según las normas que se indiquen por cada profesor.
6. Superar los controles o exámenes propuestos, o al menos alcanzar una cierta solvencia en los mismos.

Todo lo anteriormente indicado estará supeditado a la realidad del aula, a la atención a la diversidad del alumnado y a todo aquello que pueda influir en el proceso de enseñanza-aprendizaje en cada momento.

Los contenidos en este nivel de 4º ESO se distribuyen de la siguiente forma:

BLOQUE 1: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

BLOQUE 2: NÚMEROS.

1.- NÚMEROS IRRACIONALES.

2.- RADICALES.

BLOQUE 3: ÁLGEBRA.

3.- POLINOMIOS. FRACCIONES ALGEBRAICAS.

4.- ECUACIONES Y SISTEMAS.

5.- INECUACIONES.

BLOQUE 4: GEOMETRÍA.

6.- SEMEJANZA. TRIGONOMETRÍA.

- Figuras semejantes. Razón de semejanza.
- Semejanza de triángulos. Teorema de Thales.
- Definición de las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.
- Relaciones entre las razones trigonométricas.
- Resolución de triángulos rectángulos.

7.- GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA.

BLOQUE 5: FUNCIONES Y GRÁFICAS.

8.- FUNCIONES ELEMENTALES.

9.- FUNCIÓN CUADRÁTICA.

10.- FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA.

11.- FUNCIÓN EXPONENCIAL.

12.- TASA DE VARIACIÓN MEDIA.

BLOQUE 6: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD.

13.- ESTADÍSTICA. DISTRIBUCIONES UNIDIMENSIONALES.

14.- FENÓMENOS ALEATORIOS. PROBABILIDAD.

El campo de problemas de las razones trigonométricas va a consistir en :

- Reconocimiento de las diferentes razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, y calcularlas a partir de datos dados en distintos contextos.
- Cálculo de las relaciones entre los posibles valores de las razones trigonométricas de un ángulo situado en cualquiera de los cuatro cuadrantes
- Utilización del Teorema de Thales para obtener y comprobar relaciones métricas entre los elementos de una figura o entre figuras geométricas.
- Cálculo de áreas y perímetros de triángulos rectángulos.
- Cálculo de distancias y alturas en situaciones no accesibles de la vida cotidiana.

Entre las técnicas que se van a utilizar aparecen:

1. Aplicación del Teorema de Pitágoras para calcular los lados de un triángulo rectángulo.

2. Definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, estableciendo proporciones entre los lados.
3. Utilización de los valores exactos de las razones trigonométricas de los ángulos más notables (30° , 45° y 60°).
4. Utilización de la calculadora para obtener valores de las razones trigonométricas y para obtener los ángulos, conocida la razón trigonométrica.
5. Relaciones entre las razones trigonométricas pertenecientes a un mismo ángulo.
6. Relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios, suplementarios u opuestos.

Entre las tecnologías que se van a utilizar destacan:

1. Demostración de las propiedades de las razones trigonométricas.
2. Demostración de las fórmulas fundamentales de la trigonometría y aplicarla a la resolución de situaciones problemáticas.

Los recursos necesarios para trabajar las Razones de la Trigonometría en el aula van a ser los siguientes:

1. Material didáctico específico de geometría: regla, transportador, compás, escuadra, cartabón, etc.
2. Material audiovisual que facilitará la comprensión de conceptos.
3. Calculadora científica.
4. Programas informáticos como “GeoGebra”.

II. Conocimientos previos del alumno

Para el estudio de la Trigonometría es importante tomar en cuenta conocimientos básicos sobre: concepto de triángulo, su clasificación, conceptos de ángulos y su clasificación.

Los conocimientos previos que se requieren para el estudio de las Razones Trigonométricas son:

- Ángulos y medidas. Triángulos y relación entre sus lados y ángulos.
- Teorema de Pitágoras
- Conjuntos numéricos (racionales e irracionales)
- Resolución de ecuaciones de 1º y 2º grado

El estudio de la trigonometría exige conocer los ángulos y como se representan matemáticamente. Constantemente van a aparecer en las distintas actividades y es necesario estar familiarizado con ellos.

No sólo comprender los ángulos es necesario sino también las diferentes medidas de los mismos. Existen la forma centesimal, la sexagesimal y los radianes.

Este tema está incluido en el Bloque I de 2º de Educación Secundaria Obligatoria.

Además, va a ser necesario que los alumnos recuerden el teorema de Pitágoras, para utilizarlo en demostraciones y en la resolución de algunos problemas. El teorema de Pitágoras aparece en el Bloque IV de 2º de Educación Secundaria Obligatoria. Aparece dos cursos antes, por lo tanto será necesario una prueba para refrescar estos conocimientos y comprobar que los alumnos los comprenden. Además, se incluirá, también nociones básicas de la semejanza geométrica y teorema de Thales. Aunque para 4º ESO opción B, existe un tema anterior a la trigonometría dedicado a la semejanza y los alumnos no deberían tener problemas a la hora de enfrentarse a él. No obstante, se incluirá algún ejercicio para cerciorarse de que poseen los conocimientos adecuados.

Las razones trigonométricas pueden tener diferentes valores que no tienen por qué estar dentro de los números racionales. Por ello, es conveniente que los alumnos que se dispongan a descubrir la trigonometría recuerden los conjuntos de números tanto los racionales como los irracionales.

Estos conocimientos aparecen en el primer bloque de 3º de Educación Secundaria Obligatoria. Por lo tanto, los alumnos deberían tener nociones sobre estos conceptos.

Antes de introducir los nuevos conceptos del objeto matemático es necesario asegurarse de que los alumnos posean todos los conocimientos previos que anteriormente se han detallado.

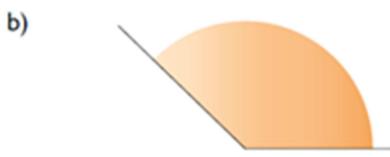
Para ello, se va a realizar una prueba escrita a cada uno de los alumnos, no muy extensa donde se realicen ejercicios básicos de cada uno de los objetos que deben conocer. De esta manera, se puede observar el nivel que poseen los alumnos y, actuar en

consecuencia. La prueba escrita no computará para nota final, sino que es un recurso de diagnóstico del profesor, que hará más eficiente la función didáctica de este objeto matemático.

La prueba constará de ejercicios básicos que englobarán la totalidad de los conocimientos previos destacados anteriormente. Algunos ejemplos podrían ser los siguientes:

(Ejercicios sacados de los libros de texto ...)

Ej.1: Estima la medida de cada uno de los siguientes ángulos:



Ej.2: Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

$$25^\circ 30' + 10^\circ 30'$$

$$90^\circ - 50^\circ 30' \quad 4(25^\circ 30')$$

$$45^\circ : 2$$

Ej.3: Un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide $23^\circ 44' 53''$. ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos?

Para recordar el teorema de Pitágoras, podrían ser:

Ej.1: Averigua si con las medidas de cada apartado se puede construir un triángulo rectángulo. Di, en cada caso de qué tipo de triángulo se trata.

- a) 2,4cm 3cm 1,8cm b) 7cm 4cm 6cm c) 5cm 3cm 8cm

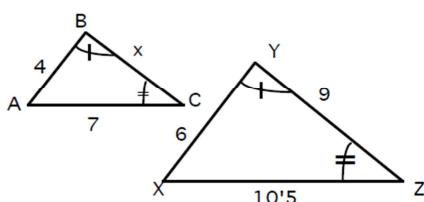
Ej.2: Calcula, en cada apartado, a, b o c siendo a la hipotenusa y b y c los catetos de un triángulo rectángulo

- a) $b = 6,3$ cm $c = 8,4$ cm b) $b = 2$ cm, $a = 8$ cm
 c) $c = 12$ mm, $a = 15$ mm d) $b = 1$ m, $a = 10$ m

Ej.3: Una escalera de 6 m está apoyada a 70 cm de la base de una pared. ¿Es posible que, utilizando la escalera, una persona de 1,65 m de estatura llegue a un punto de la pared situado a 6 metros y medio?

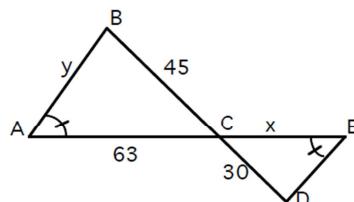
Ej.4: En las siguientes figuras, los ángulos marcados de igual manera son iguales. Calcular los lados que se pide (todas las medidas están en centímetros):

a)



¿Cuál es la medida del lado x?

b)



¿Cuáles son las medidas de los lados x e y?

Para comprobar si conocen el concepto de número irracional, dentro de la prueba diagnóstico podría aparecer los siguientes ejercicios:

Ej.1: Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales:

$$\frac{2}{3}, \pi, -7, \sqrt{3}, \frac{1}{2}, \sqrt[5]{7}$$

Ej.2: ¿Son ciertas estas afirmaciones ?

- i. $\sqrt{8}$ es un numero irracional ii. $3\sqrt{64}$ es un numero racional
iii. $0,255555\dots$ es un numero racional.

III. Las razones de ser de las Razones Trigonométricas

1. Razones de ser

Las razones trigonométricas son instrumentos que permiten resolver problemas de cálculo de distancias entre dos puntos en condiciones donde no se puede utilizar otros métodos de medida.

La trigonometría es una rama de las tantas ramas de matemáticas, se encarga de estudiar y analizar la relación entre los lados y los ángulos de los triángulos. Para esto recurre generalmente a las llamadas razones trigonométricas. El origen de la palabra trigonometría desciende del griego “trigonos” (triángulo) y “metros” (metría).

2. Descripción de las razones de ser

Según la fuente de información de la web <http://matematica.laguia2000.com>.

Hace unos 4000 años en Babilonia (antiguo reino localizado en la región de Mesopotamia) y Egipto se determinó y establecieron aproximaciones de medidas de ángulos y de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos para ampliar y desarrollar medidas tanto en la agricultura como en la construcción de pirámides. Los egipcios fijaron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Además se utilizaba la trigonometría para el estudio de la astronomía. Antiguamente la astronomía se ocupaba de la observación y predicciones de los movimientos de los objetos visibles a simple vista y en el estudio de la predicción de las rutas y posiciones y perspectivas de los cuerpos en el espacio, para luego progresar y perfeccionar la exactitud en la navegación y el cálculo del tiempo así como los calendarios. La astronomía precolombina poseía calendarios muy puntuales y las pirámides de Egipto fueron construidas sobre patrones astronómicos muy exactos y puntuales.

Luego de Egipto y Babilonia, el estudio de la trigonometría se asentó en Grecia, donde podemos nombrar al matemático y astrónomo Griego Hiparco de Nicea, quien fue uno de los principales y más importantes desarrolladores de la Trigonometría. Este matemático construyó una tabla de cuerdas para solucionar triángulos. Comenzando con un ángulo de 71° y aproximándose hasta 180° con ampliaciones de 71° , la tabla facilitaba la longitud de la cuerda limitada por los lados del ángulo central ya que fragmentaba a una circunferencia de radio r . Hasta el momento no se conoce el valor que Hiparco utilizó para r . 300 años mas tarde, el astrónomo griego Tolomeo utilizó $r = 60$, ya que los griegos tomaron el sistema numeral (base 60) que era usado por los babilonios.

Durante varios siglos, la trigonometría de Tolomeo fue la introducción primordial para los astrónomos. El libro de astronomía, Almagesto, escrito por él, igualmente poseía una tabla de cuerdas junto con la explicación de su método para compilarla, presentando también el catálogo estelar más perfecto y completo de la antigüedad. El teorema de Menelao utilizado para resolver triángulos esféricos fue también obra de Tolomeo.

En India y Arabia la trigonometría era utilizada en la Astronomía. El primer uso de la función seno, aparece en el Shulba o Sulba Sutras escrito en India del siglo VIII al VI a. C. Se desarrolló entonces un sistema trigonométrico que estaba basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta función nueva función, era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa. A finales del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones trigonométricas.

En el siglo XII comienzan a aparecer en Europa traducciones de libros de matemáticas y astronomía árabes, hecho que lleva a la familiarización con la trigonometría. El primer trabajo significativo en esta materia en el continente Europeo fue escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller. Se le considera fundador y un importante innovador en esta materia, puesto que detalla y crea varias herramientas de gran utilidad, así como importantes tratados como De triangulis y Epitome in Almagestum en el cual explica, analiza y muestra la obra de Tolomeo.

Durante el siglo XII el astrónomo alemán Georges Joachim, introdujo el concepto moderno de las funciones trigonométricas como proporcionales en vez de longitudes de algunas determinadas líneas. Ya en el siglo XVI el matemático francés François Vieté, incorpora en su tratado “Canon matemáticas” el triángulo polar en la trigonometría esférica. [...] (<http://matematica.laguia2000.com>; Eliatron, una breve historia impresionista de la trigonometría de babilonia a la india, 2010)

Más información sobre este tema lo podemos encontrar en:

(Eliatron, una breve historia impresionista de la trigonometría de babilonia a la india, 2010)

Para utilizar las razones de ser de la Trigonometría vamos a plantear a los alumnos un problema que simule una situación real, en la que los alumnos deben utilizar sus conocimientos actuales para llegar a una solución. Un ejemplo, podría ser el siguiente:

Cálculo de distancias

Para medir la anchura de un río se han medido los ángulos de la figura desde dos puntos de una orilla distantes 160 m. ¿Qué anchura tiene el río?. La anchura del río es la altura del triángulo ACB que no es rectángulo, pero si lo son los triángulos ADC y BDC.

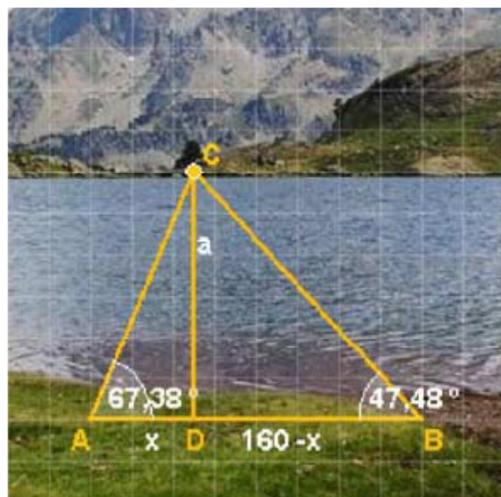


Ilustración 1. Cálculo de distancias

Este problema plantea la necesidad de calcular la anchura de un río, donde se conocen ciertos datos. Se les expone el esquema de manera que los alumnos intuyan que la solución es la aplicación del Teorema de Pitágoras. Se les deja unos 15 minutos, y después se expone entre todos los resultados obtenidos. El profesor debe incentivar el ‘conflicto’ e intentar dividirlos de forma que cada uno de ellos exponga sus razones. El profesor, al final, dará la solución y hará una breve introducción del tema junto con sus objetivos y aplicaciones.

Los alumnos deben darse cuenta de que no pueden resolver el problema y necesitan algún conocimiento nuevo. Estos conocimientos deberán ser presentados por el profesor, institucionalizando las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente.

Se plantearán cuestiones en clase que hagan reflexionar al alumno antes de comenzar la teoría de la trigonometría. Estas cuestiones serán:

¿Por qué se mantiene igual el seno de un ángulo aunque varíe la medida de los lados que lo forman?

¿Qué se mantiene constante en una circunferencia?

Por otro lado, en el aula no vamos a estudiar ni a dedicar tiempo a conocer la historia de las razones trigonométricas. Sin embargo, es necesario que los alumnos conozcan las raíces de estos estudios y su utilidad a lo largo de las diferentes épocas. Por ello se va a proponer una tarea para realizar fuera de las horas lectivas. La tarea consistirá en la elección de unos de los temas de una lista y el consecuente trabajo de investigación. Se realizará en grupos de 4 personas.

Por ejemplo,

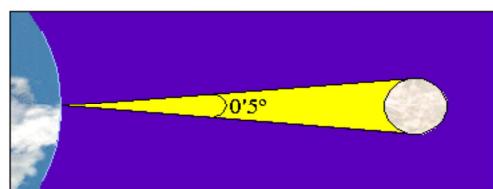
Explicar y valorar el trabajo realizado por Thales de Mileto para determinar la altura de las pirámides de Egipto.

Exponer el trabajo realizado por Eratóstenes para medir el radio de la Tierra y explicar los métodos trigonométricos que pueden utilizarse en la actualidad para realizar esa tarea.

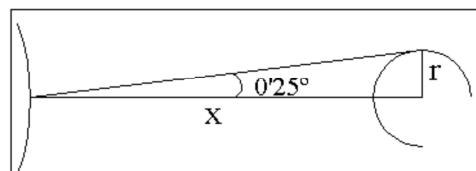
...

Además, se realizarán problemas que tengan en cuenta sus orígenes y sus razones de ser como objeto matemático. Por ejemplo, una actividad puede ser:

Estimación de la distancia Tierra-Luna



(Sin salir de casa podemos tener una idea aproximada de lo lejos que estamos de la Luna. Se ha podido conocer, mediante el envío de rayos láser, que la distancia media hasta la superficie lunar es de 384403 km)



IV. Campo de problemas, técnicas y tecnologías

1. Introducción

Normalmente se presentan a los alumnos un contenido acabado, pulido y formalizado. Se espera que los estudiantes usen ese contenido para encontrar la solución del problema. Además, después que el contenido ha sido impartido, se asume que los estudiantes están en condiciones para resolver diversos problemas. El resultado es que muchos no emprenden ese camino, ya que desde el inicio- experimentan dificultades en el uso del contenido estudiado.

Se va a dedicar tres sesiones completas para el planteamiento y desarrollo de problemas. A estas sesiones las denominaremos talleres. Se plantearán varios problemas al inicio de la clase.

2. Campo de Problemas, Técnicas y Tecnologías asociadas

Todos los problemas planteados exigen por parte del alumnado algo más que la simple aplicación de una técnica.

Todos los distintos tipos de problema que se van a incluir en el aula se encuentran enmarcados en:

- Calcular las razones trigonométricas de ciertos ángulos, que aparecen en distintas formas geométricas o del cual se desconocen el valor del ángulo.
- Comprobar la existencia o no de un ángulo con ciertos valores en razones trigonométricas. Comprobación del intervalo de valores posibles para el seno y el coseno.
- Obtener razones trigonométricas de un ángulo a partir del seno y coseno.
- Calcular longitudes de lados de un triángulo sin utilizar el teorema de Pitágoras.
- Obtención de las razones de un ángulo por comparación con otro complementario o suplementario. Reducción al primer cuadrante.
- Ejercicios relativos a la determinación del seno o coseno de un ángulo por uso de la calculadora.
- Ejercicios relativos a la determinación indirecta de medidas de longitudes y ángulos sobre triángulos rectángulos.

Dentro de esta clasificación encajan problemas como los siguientes:

- Calcular las razones trigonométricas de ciertos ángulos, que aparecen en distintas formas geométricas o del cual se desconocen el valor del ángulo.

Este tipo de problemas exige el conocimiento de las relaciones entre las distintas razones trigonométricas. Se da como inicial un valor correspondiente a una razón trigonométrica y se pide el resto de las razones. No es simplemente, realizar un cálculo sino que deben practicar con las relaciones existentes entre las distintas razones trigonométricas. Por ejemplo, el siguiente problema:

Calcular el seno y la tangente de un ángulo agudo, sabiendo que su coseno vale:

- | | |
|------------|-----------|
| a) 0,5541 | b) 0,1852 |
| c) -0,9457 | d) 0,5 |
| e) 2,3 | e) 1,2 |
| f) 0,0001 | |

La mecánica de esta actividad es sencilla, pero se han añadido valores que no son válidos, así como otros que se aproximan a 0. Además, de utilizar las técnicas, este ejercicio pretende que los alumnos se percaten de la información que contienen esos valores y cuales pueden ser válidos o no serlo.

La técnica asociada a este campo de problemas va a ser la de aplicar la sustitución de los valores seno, coseno y tangente sobre un mismo ángulo en una ecuación de segundo grado, y se hallan los valores posibles. Esta técnica corresponde a la número 1 descrita en el apartado “*3.Descripción de las técnicas utilizadas*”. Habrá situaciones en las que se obtengan más de un resultado o ninguno.

La tecnología asociada supone aplicar las relaciones entre las diferentes razones trigonométricas. En este caso la ecuación,

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Una vez estudiada, la representación gráfica de los ángulos en la circunferencia goniométrica, este problema es muy interesante para que los alumnos se familiaricen con los diferentes cuadrantes y conozcan las razones Trigonométricas más notables.

Otro tipo de problema va a consistir en relacionar las razones trigonométricas de ángulos con las de ángulos del primer cuadrante. Un ejemplo de estos problemas puede ser el siguiente:

Determinar las razones trigonométricas de los siguientes ángulos, relacionándolos con ángulos notables ($0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$), indicando en qué cuadrante se encuentran:

- | | |
|----------------|----------------|
| a) 240° | b) 135° |
| c) 315° | d) 720° |
| e) 750° | |

La técnica asociada a este problema es la técnica 4, que aparece descrita en el apartado “*3.Descripción de las técnicas utilizadas*”, que usa las relaciones que existen entre determinados ángulos de diferentes cuadrantes.

La tecnología utilizada en este problema es la reducción de ángulos al primer cuadrante.

Calcular expresiones que utilizan razones trigonométricas. Si α es un ángulo agudo y $\operatorname{sen} \alpha = 3/5$. Calcula el valor de la expresión:

$$5\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha - 16\operatorname{tg} \alpha$$

La técnica que vamos a utilizar en estos problemas es la sustitución de los valores dados en la ecuación de segundo grado que relaciona las diferentes razones trigonométricas. Además de resolver la ecuación, habrá que seleccionar el valor adecuado al problema. Para ello podemos utilizar la circunferencia trigonométrica.

Las tecnologías utilizadas son las de los dos problemas anteriores.

- Comprobar la existencia o no de un ángulo con ciertos valores en razones trigonométricas.

Este tipo de problemas exige mucha reflexión por parte de alumnado. No se pide únicamente el cálculo de un elemento concreto, sino que se pretende averiguar si es o no posible ciertos casos en la Trigonometría. Las respuestas deben ser justificadas. El alumno debe buscar un camino que le permita llegar a esas conclusiones. Pueden existir varias formas de demostración. Estos problemas tienen un gran potencial didáctico en el aprendizaje.

Responder razonadamente a preguntas sobre razones trigonométricas

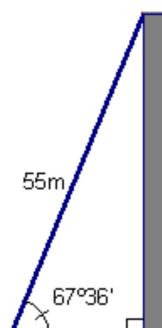
- a) ¿Puede el coseno de un ángulo del segundo cuadrante valer $1/2$?
- b) ¿Puede el seno de un ángulo del segundo cuadrante valer $13/12$?
- c) ¿Puede la tangente de un ángulo del tercer cuadrante valer $13/12$?
- d) ¿Puede la tangente de un ángulo del cuarto cuadrante valer $13/12$?
- e) ¿Puede el seno de un ángulo del segundo cuadrante valer $1/2$?

Este tipo de problemas da mucha libertad al alumno a la hora de buscar soluciones. Pueden usar varias técnicas para resolverlo. La más sencilla es la representación gráfica dentro de la circunferencia goniométrica, pero también pueden utilizar la técnica 1, descrita en el siguiente apartado.

- Calcular longitudes de lados de un triángulo sin utilizar el teorema de Pitágoras.

Al final, la Trigonometría tiene su razón de ser en la medida de longitudes y distancias. Por lo tanto, es necesario que el alumno vea la aplicación final de este objeto matemático, plasmado en el cálculo de alturas, longitudes y distancias. De esta manera, también se introduce al alumno en los posteriores objetos matemáticos como son ‘Resolución de triángulos’.

Para subir al Miquelet de Valencia utilizamos una escalera exterior de 55m, que forma con la horizontal un ángulo de $67^{\circ}36'$. Con estos datos calcula la altura del Miquelet. Notemos que la horizontal, y el Miquelet forman un ángulo recto.



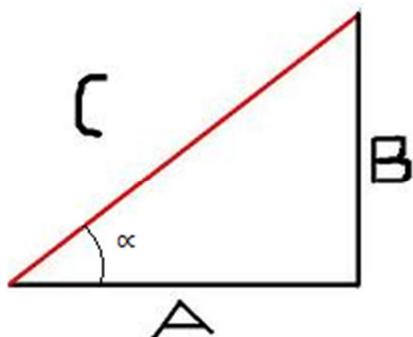
Calcula la altura del Miquelet.

La técnica utilizada en este problema va a ser la ‘Resolución de triángulos rectángulos’ donde simplemente es utilizar las definiciones de las razones trigonométricas sustituyéndolos por los valores adecuados del enunciado del problema.’

3. Descripción de las técnicas utilizadas

Las técnicas que se van a emplear al realizar los distintos tipos de problemas son:

Técnica 1: Uso de las definiciones de las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) representadas en un triángulo rectángulo.



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{B}{C}$$

$$\cos \alpha = \frac{A}{C}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{A}$$

Para practicar esta técnica se propondrán ejercicios cuya solución requiere la aplicación de la misma.

Por ejemplo,

- Ejercicios prácticos relativos a la obtención de razones trigonométricas de un ángulo a partir del seno y coseno en triángulos rectángulos.
- Ejercicios prácticos de comprobación del intervalo de valores posibles para el seno y el coseno.
- Ejercicios relativos a la determinación indirecta de medidas de longitudes y ángulos sobre triángulos rectángulos.

La tecnología asociada a esta técnica es la propia definición del seno, coseno y tangente en la trigonometría.

Técnica 2: Resolución de ecuaciones utilizando la primera y segunda relación fundamental de la trigonometría, sustituyendo los valores dados en el problema.

- Ejercicios prácticos y problemas relativos a la obtención de razones trigonométricas de un ángulo a partir de un valor concreto del seno, coseno y tangente.

Los alumnos pueden comprobar que el seno al cuadrado más el coseno al cuadrado de un ángulo α es igual a 1. Esta tecnología permite comprobar los posibles valores que pueden tener el seno y el coseno de un determinado ángulo. Esta tecnología justifica la utilización de la técnica 2.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\left[\frac{a}{c}\right]^2 + \left[\frac{b}{c}\right]^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

$$\frac{a^2}{a^2} = 1$$

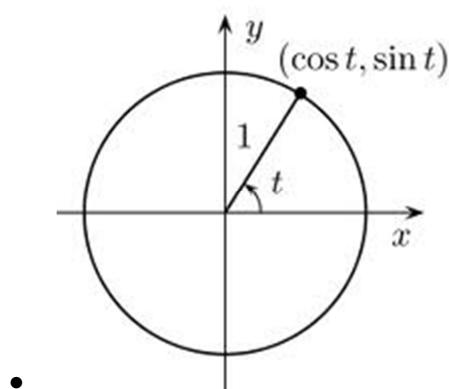
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Técnica 3: Representación gráfica de cualquier ángulo dentro de la circunferencia goniométrica.

- Ejercicios de representación de ángulos sobre la circunferencia goniométrica.

Por otro lado la circunferencia goniométrica es la circunferencia cuyo centro es el eje de coordenadas y su radio es uno. En ello se pueden comprobar gráficamente los valores obtenidos de seno y coseno. Así como ver el rango de valores entre los que puede oscilar el seno y coseno. Habrá que distinguir entre arco y ángulo, para asegurarse de que los alumnos comprenden el paso de arco a ángulo

La circunferencia goniométrica



Técnica 4: Reducción al primer cuadrante, sustituyendo un ángulo β fuera del primer cuadrante, por otro dentro del primer cuadrante.

Si β está en el 2ºcuadrante existe α que se expresa como $180^\circ - \alpha$

$$\sin \beta = \sin \alpha \quad \cos \beta = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$$

Si β está en el 3ºcuadrante existe α que se expresa como $270^\circ - \alpha$

$$\sin \beta = -\sin \alpha \quad \cos \beta = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$$

Si β está en el 4ºcuadrante existe α que se expresa como $360^\circ - \alpha$

$$\sin \beta = -\sin \alpha \quad \cos \beta = \cos \alpha \quad \tan \beta = -\tan \alpha$$

Se realizarán ejercicios que permitan practicar esta técnica, como por ejemplo,

- Ejercicios de obtención de las razones de un ángulo por comparación con otro complementario o suplementario.
- Ejercicios que relacionen los valores de las razones trigonométricas de ángulos con las de ángulos notables del primer cuadrante.

Se va a trabajar de esta forma sistemática, para el alumnado sepa de forma rutinaria el trabajo que se manda cada día para casa. Sabe que todos los días tiene más o menos el mismo trabajo que hacer; de esta forma creamos un hábito de estudio.

Los ejercicios se van a plantear en el aula justo después de cada técnica o conocimiento nuevo que aparezca en el temario. Estos ejercicios tienen como finalidad hacer que el alumno haga uso de los nuevos conocimientos adquiridos. Normalmente se mandarán tareas para realizar en casa, que no requieran mucho tiempo por parte del alumno, pero que exigen cierta dedicación.

Estos ejercicios se corregirán al inicio de la siguiente sesión, resolviendo todas las dudas que puedan aparecer.

La organización habitual de una sesión de clase sería de la siguiente manera:

Comprobamos de forma rápida que han hecho los ejercicios del día anterior en el cuaderno.

Resolvemos dudas sobre la teoría, los ejemplos y ejercicios resueltos de la teoría del día anterior.

Explicamos los nuevos contenidos, conceptos y procedimientos; cada uno con su ejemplo o ejercicio resuelto.

Mandamos para casa, a todos los alumnos, el ejercicio de aplicación de la teoría de la sección actual. Los mejores alumnos, los que quieren tendrán más ejercicios opcionales que les permitirán subir nota. Deben hacerlo en el cuaderno.

Preguntamos dudas de los ejercicios del día anterior y hacemos en la pizarra o con el proyector los que sean necesarios.

4. Metodología

Si bien también la enseñanza debe individualizarse en el sentido de permitir a cada alumno trabajar con independencia y a su propio ritmo, es necesario promover la colaboración y el trabajo grupal, ya que se establecen mejores relaciones con los demás, aprenden más, se sienten más motivados, aumenta su autoestima y aprenden habilidades sociales más efectivas. Por ello, habrá sesiones donde los alumnos formen grupos.

En este tipo de sesiones va a ser importante tener en cuenta estos factores:

- ✓ La MOTIVACION usando recursos dinámicos, situaciones matemáticas recreativas. Relacionado con nuestra realidad, que despierten el interés en los alumnos
- ✓ En el PROCESO de la internalización del conocimiento, utilizando el método inductivo y otros que faciliten llegar a una conclusión, generando en ellos temas que se discutan y debatan

En la SALIDA evaluando durante todo el proceso. Autoevaluación, evaluación etc.

Se va a trabajar de esta forma sistemática, para el alumnado sepa de forma rutinaria el trabajo que se manda cada día para casa. Sabe que todos los días tiene más o menos el mismo trabajo que hacer; de esta forma creamos un hábito de estudio.

Los ejercicios se van a plantear en el aula justo después de cada técnica o conocimiento nuevo que aparezca en el temario. Estos ejercicios tienen como finalidad hacer que el alumno haga uso de los nuevos conocimientos adquiridos. Normalmente se mandarán tareas para realizar en casa, que no requieran mucho tiempo por parte del alumno, pero que exigen cierta dedicación.

Estos ejercicios se corregirán al inicio de la siguiente sesión, resolviendo todas las dudas que puedan aparecer.

La organización habitual de una sesión de clase sería de la siguiente manera:

Comprobamos de forma rápida que han hecho los ejercicios del día anterior en el cuaderno.

Resolvemos dudas sobre la teoría, los ejemplos y ejercicios resueltos de la teoría del día anterior.

Explicamos los nuevos contenidos, conceptos y procedimientos; cada uno con su ejemplo o ejercicio resuelto.

Mandamos para casa, a todos los alumnos, el ejercicio de aplicación de la teoría de la sección actual. Los mejores alumnos, los que quieren tendrán más ejercicios optionales que les permitirán subir nota. Deben hacerlo en el cuaderno.

Preguntamos dudas de los ejercicios del día anterior y hacemos en la pizarra o con el proyector los que sean necesarios.

5. Institucionalización de las Razones Trigonométricas

Lo primero que vamos a institucionalizar va a ser el seno, coseno y la tangente, en relación a los triángulos rectángulos.

Lo siguiente será la circunferencia goniométrica que nos permita representar gráficamente los distintos valores de las razones trigonométricas de cualquier ángulo. Junto a este elemento nombraremos el concepto de cuadrante. Institucionalizaremos también los ángulos complementarios, suplementarios y opuestos..

V. Secuencia didáctica y cronograma

1. Presentación Didáctica

Conocimientos previos

- Estimación de la medida aproximada de los tres ángulos de un triángulo.
- Aplicación del Teorema de Pitágoras para calcular los lados de un triángulo rectángulo y teorema de Thales.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

- Distinción de las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, y calcularlas a partir de datos dados en distintos contextos.
- Uso y representación en la circunferencia goniométrica
- Relaciones fundamentales de la trigonometría. Demostración de las propiedades de las razones trigonométricas de una ángulo agudo de un triángulo rectángulo
- Búsqueda de los valores exactos de las razones trigonométricas de los ángulos $30^\circ, 45^\circ$ y 60° .
- Reducción de ángulos al primer cuadrante
- Ángulos complementario, suplementario y opuesto
- Uso de la calculadora para el cálculo de razones trigonométricas
- Práctica con Geogebra.

2. Secuencia didáctica

RAZONES TRIGONOMETRICAS: 10 Sesiones de 1 Hora

Primera Sesión: Repaso Conocimientos Previos

Prueba diagnóstico de conocimientos previos. (30 min)

Corrección y discusión de la prueba con los alumnos. (20 min)

Aquí se realizará un repaso de la medición de ángulos. Los tres ángulos de un triángulo suman 180° . Aplicación del Teorema de Pitágoras para calcular lados de triángulos rectángulos,...

Segunda Sesión: Introducción a la Trigonometría

Planteamiento de un problema que no se puede solucionar utilizando el Teorema de Pitágoras. (20 min.)

Discusión con los alumnos, mostrando las razones de ser de las Razones Trigonométricas. (20)

Breve explicación introduciendo la Trigonometría. Institucionalización del seno, coseno y tangente. (10 min)

Tercera Sesión: Razones Trigonométricas

Presentación del seno, coseno y tangente sobre triángulos rectángulos y como calcularlas, dando las técnicas.

Aplicación de las técnicas de cálculo de las Razones Trigonométricas sobre triángulos rectángulos.

Presentación de las relaciones fundamentales y su uso como tecnología.

Aplicación de las relaciones fundamentales en actividades.

Utilización de los ángulos notables y comprobación de los valores que tienen sus razones trigonométricas.

Cuarta Sesión: Circunferencia Trigonométrica

Definimos a continuación el seno como la razón de la ordenada al radio y el coseno como la razón de la abscisa al radio.

Ponemos varios ejemplos y pedimos a los alumnos que pongan ejemplos de circunferencia de radio diferente y puntos para definir ángulos en lugares diferentes del arco.

Recordamos a los alumnos el Teorema de Thales para establecer que tanto el seno como el coseno se mantendrían igual si la circunferencia fuera más pequeña o más grande. Se deberá concluir que lo más sencillo es utilizar una circunferencia de radio unidad, a la que convendremos en llamar circunferencia trigonométrica.

Pedimos a los alumnos que decidan sobre el signo del seno y del coseno cuando el ángulo es agudo, y también cuando es mayor que 90° y menor que 180° . Lo mismo para ángulos del tercer y cuarto cuadrante del plano.

Quinta Sesión: Práctica con las razones trigonométricas

Repasso del signo de las razones seno, coseno y tangente. Preguntaremos ¿Por qué el seno y el coseno son menores que la unidad en valor absoluto?. ¿Por qué no la tangente?

Calcularemos las razones de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ y 360° . Obtendremos mediante el teorema de Pitágoras la relación entre el seno y el coseno, sobre una circunferencia trigonométrica.

Dibujaremos una circunferencia y un radio limitando un ángulo de 30° aproximadamente, y otro radio limitando un ángulo de -30° grados. Uniremos los extremos de ambos radios hasta construir un triángulo que evidenciaremos como equilátero por tener los tres ángulos iguales y también dos de los lados. Señalaremos el seno del ángulo de 30° que coincidirá con la mitad exacta de uno de los lados, con lo que resulta ser $\sin 30^\circ = 1/2$. Pediremos a los alumnos el cálculo de las restantes razones de 30° .

Para estudiar las razones de 45° dibujaremos una circunferencia trigonométrica y utilizaremos el teorema de Pitágoras para determinar su seno ($\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$)

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Obtendremos como práctica las restantes razones de 45° .

Sexta Sesión: Tipos de Ángulos y sus relaciones.

Pasaremos a definir ángulos entre si complementarios, suplementarios. Pedimos a los alumnos el descubrir como están relacionados el seno y el coseno de los ángulos entre si complementarios y entre si suplementarios. Obtendremos como trabajo de clase las razones de 60° , de 120° y de 135° .

Dedicaremos esta sesión a determinar los restantes ángulos que se pueden obtener a partir de los de 30° , 45° , 90° por construcción gráfica sobre la circunferencia trigonométrica. Construyendo una tabulación para todas estas razones.

Hablaremos del uso de la calculadora para obtener cualquier razón de cualquier ángulo y analizaremos los resultados obtenidos en la pantalla de la misma, viendo si aparece una magnitud lógica, con la ayuda de una circunferencia trigonométrica dibujada en la pizarra.

Séptima Sesión: Aplicación de las Razones Trigonométricas

Hablaremos de la posibilidad de usar las razones trigonométricas para calcular longitudes. También usaremos la calculadora para obtener el ángulo a partir de una razón. Pediremos opiniones sobre esta posibilidad a los alumnos.

Plantearemos problemas de resolución de alturas y distancias y los resolveremos en clase.

Octava Sesión: Uso de la calculadora. Comprobación lógica.

En esta sesión seguiremos usando la calculadora y analizaremos los resultados obtenidos en la pantalla de la misma, viendo si aparece una magnitud lógica, con la ayuda de una circunferencia trigonométrica dibujada en la pizarra.

Hablaremos de la posibilidad de usar las razones trigonométricas para calcular longitudes. También usaremos la calculadora para obtener el ángulo a partir de una razón. Pediremos opiniones sobre esta posibilidad a los alumnos.

Plantearemos problemas de resolución de alturas y distancias para realizar en casa.

Novena Sesión: Sesión con Geogebra

Mostrar el funcionamiento del programa GeoGebra, principalmente el manejo de fórmulas y funciones trigonométricas, la utilización de las casillas lógicas y cómo exportar las construcciones para ser utilizadas como página web.

Realizar algunas construcciones con GeoGebra para que sirvan de ejemplo al alumnado.

Cada grupo de alumnos y alumnas trabajará una de las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente y sus inversas).

A lo largo de la sesión el alumnado debe comprobar los resultados obtenidos, descubriendo algunas relaciones trigonométricas sencillas.

En esta sesión, cada grupo trabajará con una de las funciones trigonométricas. El alumnado debe representar las funciones seno, coseno y tangente, observando los valores para distintos ángulos.

Se construirá también la circunferencia trigonométrica utilizando las herramientas de GeoGebra.

Decima Sesión: Prueba de Evaluación

Prueba de evaluación

VI. Evaluación

1. Prueba escrita de evaluación

- Cinco ejercicios, para que el alumnado ejerzte el cálculo manual.
- Un problema, para que el alumnado se acostumbre a leer, pensar, plantear, resolver y comprobar. 2 puntos cada uno.

Las pruebas de matemáticas con ordenador están pensadas para que se hagan en 20 minutos y deben ser realizadas de forma individual; no por parejas. De esta forma, en una sesión de clase da tiempo a que todo el alumnado la haga; primero la mitad del alumnado y, luego, la otra mitad, si es que hay más alumnos que ordenadores.

La prueba diseñada sería la siguiente:

Ejercicio 1: Habilidad y proyección de las medidas de ángulos, así como su simulación a través de dibujos de las distintas razones trigonométricas.

EJERCICIO 1: Calcula, razonadamente (apoyándote en un dibujo) (1,50 ptos)

- a) $\sin 150^\circ$
- b) $\cos(\pi \text{ rad})$
- c) $\tan 675^\circ$

Ejercicio 2: Practicar y relacionar sobre los ángulos notables. Obtener resultados de razones trigonométricas de ángulos cualesquiera en función de los ángulos notables. Permite comprobar el grado de familiarización del alumno con estos ángulos.

EJERCICIO 2: Determina las razones trigonométricas de los siguientes ángulos, relacionándolos con algunos ángulos notables ($0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$), indicando en qué cuadrante se encuentran (1,65 ptos):

- a) 240°
- b) 135°
- c) 315°
- d) 720°
- e) 750°

Ejercicio 3: Obtención de un ángulo a partir del valor de una de sus razones trigonométricas y su cuadrante. Evalúa la comprensión del alumno del significado de las distintas razones trigonométricas.

EJERCICIO 3 : Sabiendo que,

$$\sin \alpha = -0,4 \quad \text{y} \quad 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

a) Hallar el resto de razones trigonométricas (0,4ptos)

b) Hallar $\cos(\alpha + \pi/2)$ (0,4 ptos)

c) Hallar $\operatorname{tag}(180^\circ + \alpha)$ (0,4 ptos)

d) Hallar $\sec(270^\circ - \alpha)$ (0,4 ptos)

Ejercicio 4: Demostrar la veracidad de ciertas igualdades. Este tipo de ejercicio son muy completos y evalúan de forma global los conocimientos del alumnado respecto al objeto matemático. El alumno tiene que poner en práctica todas sus herramientas y técnicas para dar una respuesta, ya que a diferencia del resto de ejercicios, se da el resultado y el alumno intenta llegar a él.

EJERCICIO 4: Dí si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y explica por qué:

a) $\sin \alpha = 1,2$ (0,4ptos)

b) $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{seca}}$ (0,4ptos)

c) $\frac{\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}}{2} = -1$ (0,4ptos)

d) Las razones trigonométricas de los ángulos $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 390^\circ$ coinciden. (0,4ptos)

e) La tangente de un ángulo sólo puede ser positiva. (0,4ptos)

Ejercicio 5: Comprobar si la igualdad dada es cierta o falsa. Este ejercicio permite evaluar la habilidad del alumno a la hora de enfrentarse a operaciones donde aparecen razones trigonométricas. Además, este ejercicio exige también conocimientos de las relaciones entre ellas, así como de las fórmulas fundamentales de la trigonometría.

EJERCICIO 5: Demuestra que se cumple la siguiente igualdad 1,25ptos)

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}} = (\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{seca}} - \frac{1}{\operatorname{coseca}} \right)$$

Problema 1: Se evalúa la habilidad y comprensión del alumno de las aplicaciones que tienen las razones trigonométricas, aplicada a la resolución de problemas.

PROBLEMA 1: Dos individuos A y B observan un globo que está situado en un plano vertical que pasa por ellos. La distancia entre los individuos es de 4Km. Los ángulos de elevación del globo desde los observadores son de 46° y 52°, respectivamente. Hallar la altura del globo y su distancia a cada observador. (2 ptos)

2. Criterios de Evaluación

La finalidad de las pruebas es valorar los conocimientos que el alumnado tiene. El alumnado tiene que apreciar que si ha estudiado, obtiene una buena calificación, y si no ha estudiado, obtiene una nota baja. Por tanto, el alumnado se dará cuenta de que hay relación directa entre lo que ha estudiado y la calificación obtenida en la prueba.

La calificación de este temario se obtendrá mediante una media ponderada de dos conceptos:

- C1: Realización de los deberes y trabajo diarios, cuaderno, participación en clase, actitud y comportamiento. (20 %)
- C2: Ejercicios escritos (“exámenes”). (80 %). Esta calificación se obtendrá mediante una media ponderada de las notas de los ejercicios realizados, asignando el peso a cada nota según la cantidad de materia objeto de la prueba.

En cada evaluación se realizará la media ponderada de todos los ejercicios escritos (80 % de nota de evaluación) y todas las calificaciones del concepto C1 (20 % de nota de evaluación). Si la media es igual o superior a 5 puntos se considera que el alumno ha alcanzado los objetivos previstos. Los alumnos que no se encuentren en esta situación deberán presentarse a una prueba de recuperación.

Bibliografía

❖ Libros de texto:

[1] D. S. Figueroa, Matemáticas 4ESO Opcion B, Santillana, 2008.

[2] M. J.R. Vizmanos, Matematicas Algoritmo 2, sm, 1995.

❖ Páginas web:

✓ www.vitutor.es

✓ http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/wikididactica/index.php/Tri%20gonometr%C3%A1%20#Unidad_did.C3.A1ctica

❖ Artículos web:

✓ http://redesformacion.iccm.es/aula_abierta/contenido/5/223/957/propuestas/4_nivel Consolidacion_2/3_aplicacion/07_aplicacion_1.html

❖ http://www.csic.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_19/CATALINA_PONCE_HUERTAS01.pdf

❖ Razones de ser

Eliatron, u. b. (una breve historia impresionista de la trigonometria de babilonia a la india, 2010). <http://amazings.es/2010/07/14/una-breve-historia-impresionista-de-la-trigonometria-de-babilonia-a-la-india/>.

<http://matematica.laguia2000.com>. (s.f.).

<http://matematica.laguia2000.com/general/historia-de-la-trigonometria>.

❖ Ilustraciones:

Ilustración 1. Cálculo de distancias..... 11
(1)