

MÁSTER EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA,  
BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS,  
ARTÍSTICAS Y DEPORTIVAS

PROYECTO FIN DE MÁSTER

**POBLACIÓN Y MUESTRA,**  
**VARIABLES ESTADÍSTICAS,**  
**TABLAS DE FRECUENCIAS,**  
**DIAGRAMAS Y MEDIDAS DE**  
**CENTRALIZACIÓN EN 3º DE ESO**

Especialidad de Matemáticas

Alumno: Fernando Simón Vadillo

Director: José María Muñoz Escolano

Curso 2011-2012



**Universidad**  
Zaragoza



*Como siempre y para siempre,*

*A mis padres*



## **AGRADECIMIENTOS**

Antes de comenzar, es imprescindible que escriba unas líneas para agradecer muchas cosas a mucha gente.

Comenzar por mis padres, Teo y Fernando. Siempre están ahí apoyándome y ayudándome. Gracias. También a mi familia, la de verdad, la que en momentos difíciles echa una mano y, a veces, las dos. Rosamary y familia, Narciso y Mamen y familia, os quiero mucho.

Me gustaría agradecer también a los amigos, que son mi familia también. Últimamente, entre el trabajo y el máster, os he quitado mucho tiempo, pero os lo compensaré. Jorge, Miri, Juan, Xavi, Maite, Noe, Zurdo, Isra, Juanjo, Asier, Laura, Ricardo, Ruth, a todos los telecos... y otros que no pongo por no ser demasiado pesado, os quiero. Me gustaría nombrar a los amigos y compañeros del máster en Profesorado, con los que he trabajado hombro con hombro y ha resultado ser algo muy gratificante. En especial, a Silvia, Susy y Pilar. Chicas, ¡qué equipo! Gracias de corazón.

Para terminar, agradecer a todos los docentes que he tenido el placer de conocer a lo largo de mi vida, que han hecho crecer mi vocación, año tras año: la docencia. Maestros de primaria, profesores de secundaria y de bachillerato, profesores de la carrera de Ingeniería de Telecomunicación, del máster de Ingeniería Biomédica y del máster en Profesorado: ¡Mil gracias! Quiero resaltar entre todos al director de este trabajo, José María: gracias por tu ayuda, revisión, consejo y comprensión.

Y creo que ya no tengo nada más que decir aquí. Bueno, dar las gracias por leer esta página de agradecimientos, esperando que el resto sea del agrado del lector.

Fernando Simón Vadillo

*El hombre es hombre, y el mundo es mundo.*

*En la medida en que ambos se encuentran en una relación permanente,  
el hombre transformando al mundo sufre los efectos de su propia transformación*

*Paulo Freire*

#### ACLARACIÓN SOBRE LA UTILIZACIÓN DEL GÉNERO GRAMATICAL

Queremos terminar esta primera parte de agradecimientos con una pequeña aclaración en lo referente a la utilización del género gramatical: en lo posible, se han intentado emplear sustantivos como “profesorado”, “alumnado”, estudiantes”... pero a lo largo de este trabajo, la utilización del género gramatical masculino (por ejemplo, profesores, alumnos) no responde a otras intenciones que las de facilitar una lectura libre de redundancias, evitando las oposiciones fonológicas alternativas (/ -o/, / -a/), los archifonemas que pretenden neutralizar (@), la presencia de dos sustantivos con marca de género y otras opciones. El género es sólo un accidente gramatical que no comporta, necesariamente, valores de contenido asociados al sexo.

## Contenido

|  |     |
|--|-----|
| Introducción.....  | 1   |
| A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar.....                          | 1   |
| B. Sobre los conocimientos previos del alumno.....                                   | 6   |
| C. Sobre las razones de ser del objeto matemático.....                               | 9   |
| D. Sobre el campo de problemas .....   | 13  |
| E. Sobre las técnicas .....  | 19  |
| F. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas).....                        | 32  |
| G. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma.....                                 | 35  |
| H. Sobre la evaluación.....  | 37  |
| I. Sobre la bibliografía y páginas web .....   | 41  |
| ANEXOS.....  | 43  |
| ANEXO 1: Tablas facilitadas al alumnado .....  | 45  |
| ANEXO 2: Tablas completadas por el alumnado.....                                     | 49  |
| ANEXO 3: Libro de texto de referencia.....   | 57  |
| ANEXO 4: Tecnologías, Técnicas, Ejercicios, Ejemplos y Problemas de Estadística..... | 77  |
| ANEXO 5: Problema de Martin Gardner (1981).....                                      | 117 |
| ANEXO 6: Prueba escrita: planteamiento y solución.....                               | 119 |



## Introducción

Existen muchas definiciones de Estadística. Nosotros, hemos escogido la siguiente, ya que refleja de forma global nuestro pensamiento sobre la misma, nuestra concepción sobre esta rama de las Matemáticas: “*La estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final*” [2].

La Estadística tiene una gran importancia en la vida cotidiana. Dentro de las Matemáticas, es una de las ramas más usada en la vida de los ciudadanos, por ejemplo, vía los medios de comunicación (prensa, radio, televisión, internet...).

Es importante resaltar su carácter funcional para explicar la realidad que nos rodea y, teniendo adquirida una correcta Competencia Matemática, poder tomar decisiones, detectar errores e, incluso, localizar intentos de manipulaciones.

Además, la Estadística se encuentra muy ligada al empleo de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TICs), por lo que, un buen conocimiento de ambas, puede suponer un avance en la comprensión de la realidad.

Debemos reseñar que, inicialmente, la tarea de concretar el objeto matemático no fue nada fácil. Tras una reunión con el director de este TFM, pudimos definir mejor el objeto matemático a enseñar.

## A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

### 1. Nombra el objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático a enseñar es:

- Población y muestra. Selección de una muestra.
- Tipos de variables estadísticas: cualitativas y cuantitativas (discretas y continuas).
- Distribuciones discretas. Tablas de frecuencias y Diagramas.
- Medidas de Centralización.

Realizamos a continuación unos pequeños comentarios sobre cada una de las partes que conforman este objeto matemático seleccionado:

- Población y muestra. Selección de una muestra.
  - o Según [10], se define **Población** como el conjunto de elementos, individuos o entes sujetos a estudio y, de los cuales, queremos obtener un resultado. Por otra parte, y según la misma fuente, se define **Muestra** como un reducido grupo representativo de elementos de la población. Es decir, se trata de una parte de la población que debemos estudiar. Esta idea es muy importante porque todo nuestro conocimiento y juicios sobre el mundo o las personas están basados en el muestreo. El conocimiento científico se adquiere a partir de las experiencias empíricas, y éstas, son siempre limitadas. Además, la idea de muestra tiene en sí dos características contradictorias: representatividad y variabilidad. La primera nos indica que la muestra se parece, en cierto modo a la población y debe ser una característica importante, ya que un prejuicio es sólo un juicio basado en una

muestra no representativa. Por otro lado, la segunda indica que una muestra puede ser diferente de otra, por lo que al enjuiciar, pensar e inferir, sólo es posible a base de muestras.

- **Tipos de variables estadísticas.** En función del tipo de variable estadística que el alumnado esté trabajando, podrán emplearse unas medidas de centralización o no, como veremos más adelante, a la vez que, será más adecuado o imprescindible usar uno u otro diagrama de representación. Solamente enumeramos aquí los tipos de variables estadísticas, ya que se tratarán en profundidad a lo largo de este trabajo:
  - o **Variables cualitativas:** los valores de la variable no son números, sino cualidades, por ejemplo, colores, tipos de locomoción, prendas de vestir...
  - o **Variables cuantitativas:** los valores de la variable son números
    - **Variables cuantitativas discretas:** la variable solamente toma determinado número de valores (naturales, enteros...)
    - **Variables cuantitativas continuas:** la variable puede tomar cualquier valor numérico, por pequeño que sea el tramo.
- Distribuciones discretas. Tablas de frecuencias y Diagramas.
  - o Las **Tablas de frecuencias** deben facilitar al alumnado la comprensión de los distintos tipos de frecuencias que existen, pudiendo cumplimentarlas a partir de una serie de datos facilitados y obtener las frecuencias (absolutas o relativas, acumuladas o no) que se le soliciten. Según [6], la **frecuencia absoluta** es el número de veces que aparece cada modalidad, la **frecuencia relativa** se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el total de casos en la muestra, la **frecuencia absoluta acumulada** es el número de elementos con un valor de la variable menor o igual que el dado, que se obtiene sumando a la frecuencia de un valor todas las anteriores y la **frecuencia relativa acumulada** se obtienen dividiendo las frecuencias absolutas acumuladas por el número de datos, o sumando a la frecuencia relativa todas las anteriores.
  - o En cuanto a los **diagramas de representación**, y según [5], podemos encontrar el **diagrama de barras**, en el que colocamos en el eje de abscisas los distintos valores discretos de la variable y en el eje de ordenadas las frecuencias absolutas o relativas, acumuladas o no. Si los valores los agrupamos en intervalos y los colocamos en el eje de abscisas, ubicando sus frecuencias correspondientes en el eje de ordenadas, obtenemos el **histograma**. Para terminar, tenemos el **diagrama de sectores**, en el que, a cada valor de la variable se le asigna un sector circular cuyo ángulo, es proporcional a su frecuencia absoluta. Para completar lo anterior, debemos comentar que tanto en el diagrama de barras como en el histograma se podrán realizar los polígonos de frecuencias si y solo si la variable a estudiar es cuantitativa (no pudiéndose si es cualitativa).
- Medidas de Centralización.
  - o **Media Aritmética:** según [6], la media aritmética es la principal medida de tendencia central. Se define como el número que se obtiene sumando todos los valores de la variable estadística ( $x_i$ ) y dividiendo por el número de valores ( $N$ ). Si un valor aparece varias veces debe ponderarse por su frecuencia ( $f_i$ ).

Simbólicamente se representa como  $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N}$ . La media es la mejor estimación de una cantidad desconocida, cuando hemos hecho varias medidas de la misma.

- **La moda:** según [6], la moda es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia. En una distribución puede haber más de una moda. Si existe una sola moda se llama unimodal, si existen dos bimodal, si hay más de dos se llama multimodal. En general, es una medida de tendencia central poco eficaz ya que, si las frecuencias se concentran fuertemente en algunos valores, al tomar uno de ellos como representante, los restantes pueden no quedar bien representados, pues no se tienen en cuenta todos los datos en el cálculo de la moda. Sin embargo, es el único estadístico de valor central que podemos tomar para las variables cualitativas. Además, su cálculo es sencillo.
- **La mediana:** según [6], si suponemos ordenados de menor a mayor todos los valores de una variable estadística, se llama mediana al número tal que existen tantos valores de la variable superiores o iguales como inferiores o iguales a él. La mediana presenta ciertas ventajas como medida de tendencia central frente a la media en algunas distribuciones, ya que no se ve afectada por los valores extremos de las observaciones; por ello, su uso es particularmente indicado en las distribuciones asimétricas.

**2.** Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

El mencionado objeto matemático se encuentra en 3º de Educación Secundaria Obligatoria, en la materia de Matemáticas. Según el Currículo Aragonés, dentro del bloque de Estadística y Probabilidad de la citada materia. Presentamos la parte del currículo aragonés que lo refleja:

- Tercer Curso de ESO:
  - Estadística y Probabilidad:
    - Objetivos, elementos y fases de un estudio estadístico. Estadística unidimensional.
    - Análisis de las características de una población a partir de tablas y gráficos estadísticos.
    - Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales. Atributos y variables discretas y continuas.
    - Recogida de información estadística usando distintas fuentes y procedimientos. Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias. Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.
    - Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Estimación de la media y la desviación típica a partir de gráficos estadísticos.
    - Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Utilización de la media y desviación típica para interpretar las características de la población.
    - Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística.
    - Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas.

**3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?**

En este apartado, deseamos realizar un breve resumen de lo que posteriormente se va a tratar, para que pueda tenerse una visión general de lo que este trabajo quiere presentar sobre el objeto matemático. Es por ello que vamos a nombrar los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías de forma esquemática:

- Campo de problemas: tras consultar la literatura asociada [de 1 a 11, en especial 1, 4 y 6], hemos establecido unos campos de problemas respecto a las medidas de centralización. Además, hemos realizado una selección de los que, a nuestro juicio, creíamos más pertinentes al nivel educativo al que nos dirigimos. Los enumeramos a continuación y posteriormente los trataremos:
  - Campo de problemas asociados a la media (CM)
    - CM1: Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores.
    - CM2: Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme.
    - CM3: Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados cuya distribución es aproximadamente simétrica.
    - CM4: Conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica.
  - Campo de problemas asociados a la mediana (CME)
    - CME1: Encontrar un resumen estadístico de posición central, en situaciones en las que la media no es suficientemente representativa.
    - CME2: Encontrar un resumen estadístico de posición central para variables ordinales.
  - Campo de problemas asociados a la moda (CMO)
    - CMO1: Obtener como valor representativo de una colección de datos, el más frecuente de ellos, en situaciones en las que lo que interesa fundamentalmente es el valor dominante del conjunto.
    - CMO2: Encontrar el valor representativo en datos cualitativos.

Del resto del objeto matemático que tratamos en este trabajo, no hemos podido definir unos campos de problemas asociados a dichos objetos. Entendemos que es en técnicas y tecnologías donde éstos tienen sentido y se podrían trabajar.

- Técnicas: de nuevo, las técnicas asociadas a nuestro objeto matemático, tras consultar la bibliografía, serían las siguientes (que posteriormente comentaremos):
  - T1: Diferenciación entre población y muestra.
  - T2: Identificación de tipos de variables.
  - T3: Cálculo de frecuencias:
    - T3.1: Frecuencia absoluta.
    - T3.2: Frecuencia relativa.
    - T3.3: Frecuencia absoluta acumulada.
    - T3.4: Frecuencia relativa acumulada.
  - T4: Diseño de tablas de frecuencias

T5: Diseño de diagramas

T5.1: Diagrama de barras

T5.2: Histograma

T5.3: Diagrama de sectores

T6: Medidas de centralización

T6.1: Media aritmética

T6.1.1: Cálculo de la media en variable discreta con datos aislados.

T6.1.2: Cálculo de la media en variable discreta con los datos presentados en una tabla de frecuencias.

T6.1.3: Cálculo de la media en variable continua o discreta con datos agrupados en clases.

T6.1.4: Cálculo de la media mediante ordenador.

T6.1.5: Inversión del algoritmo de cálculo de la media.

T6.1.6: Construcción de una distribución para una media dada.

T6.2: Mediana

T6.2.1: Cálculo de la mediana en datos no agrupados en clases, con número de datos impar.

T6.2.2: Cálculo de la mediana en datos no agrupados en clases, con número de valores par.

T6.2.3: Cálculo de la mediana en datos agrupados en clases.

T6.3: Moda

T6.3.1: Cálculo de la moda en variable discreta con datos aislados.

T6.3.2: Cálculo de la moda en variable discreta con datos aislados, presentados en una tabla de frecuencias.

T6.3.3: Cálculo de la moda en variable discreta con datos agrupados en clases o variable continua.

T6.3.4: Cálculo de la moda a partir de un diagrama de barras o histograma.

Queremos señalar que, muchas de estas técnicas (cálculo de tablas de frecuencias, diseño de diagramas, cálculo de medidas de centralización...) se diferenciarán en función del instrumento que emplee el alumnado (bolígrafo, papel cuadriculado o milimetrado, regla, escuadra, transportador de ángulos, fórmula para obtener el estadístico, herramientas de la hoja de cálculo...).

- Tecnologías: enumeramos las tecnologías asociadas a las técnicas que se encontrarían dentro de nuestro objeto matemático (que analizaremos seguidamente):

TEC1: Definiciones de población, muestra e individuo. Cómo saber si una muestra puede ser representativa de una población.

TEC2: Tipos de variables estadísticas. Cómo diferenciar entre ellos.

TEC3: Normas en la creación de tablas de frecuencia.

TEC4: Criterios de creación y uso de los distintos diagramas.

TEC5: Medidas de centralización.

## B. Sobre los conocimientos previos del alumno

Antes de comenzar a responder las preguntas de este apartado, creemos importante realizar una breve contextualización del aula en la que podría enmarcarse el desarrollo de este objeto matemático, que nos servirá para todo este trabajo.

Nos encontramos en una clase de 3º de ESO en un instituto de una ciudad grande, en un barrio céntrico. El centro dispone de gimnasio, sala de ordenadores, de tecnología, de plástica y dibujo técnico y de música. Las familias del alumnado son de clase media y muestran gran colaboración con el profesorado.

La clase de 3º de ESO está formada por 24 estudiantes, 9 varones y 15 hembras (ver anexo de este trabajo). Entre ellos existe buen ambiente, se conocen de anteriores años, y no tienen graves problemas. Existe respeto entre el alumnado y al profesorado.

Tres alumnos (dos chicos y una chica) presentan problemas en Matemáticas, y acuden a la clase de apoyo que existe en el instituto, Taller de Matemáticas. Tendremos que tener en cuenta esta situación, para apoyar en la medida de lo posible a este alumnado, con material de apoyo, colaboración de sus compañeros...

Terminamos ya esta contextualización, que no aparecía en ningún apartado en el guión propuesto, pero que creímos interesante realizar.

### 1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Según el Currículo Aragonés, no es la primera vez que el alumnado va a incorporar conocimientos relacionados con la Estadística, y en particular, con el objeto matemático. Lo vemos a continuación, con lo reflejado en el documento oficial, relacionado con la Estadística, para los dos primeros cursos de ESO:

- Primer Curso de ESO:
  - Estadística y Probabilidad:
    - Utilización de tablas de valores para obtener información sobre fenómenos naturales y cotidianos. Construcción de tablas de valores, tanto a partir de una descripción verbal como de una gráfica.
    - Población y muestra. Características cualitativas y cuantitativas de una población. Distribuciones discretas. Tablas de frecuencias absolutas y relativas. Diagramas de barras.
    - Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Utilización de fuentes diversas para la obtención de datos estadísticos.
    - Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar y describir situaciones inciertas.
- Segundo Curso de ESO:
  - Estadística y Probabilidad:
    - Diferentes formas de recogida de información. Organización de los datos en tablas. Frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumuladas.
    - Diagramas estadísticos. Lectura e interpretación de la información contenida en tablas y gráficos estadísticos.

- Elaboración e interpretación de tablas de frecuencia y de diagramas de barras correspondientes. Realización de diagramas de sectores a partir de tablas de frecuencias absolutas y relativas.
- Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo. Utilización de la media, la mediana y la moda para realizar comparaciones y valoraciones. Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas.
- Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.

Puede observarse que nos encontramos dentro de una planificación de aprendizaje en espiral. No obstante, además de los mencionados conocimientos previos dentro del bloque de Estadística y Probabilidad que el alumnado necesitará para poder tratar correctamente el objeto matemático en cuestión, serán necesarias otras técnicas, tecnologías... para poder llevar a cabo un aprendizaje correcto del objeto matemático. Alguno de estos son los siguientes:

- Sumar, restar, multiplicar y dividir números enteros, decimales y fracciones.
- Realizar operaciones con potencias.
- Realizar correctamente raíces cuadradas.
- Operar correctamente con la calculadora y la hoja de cálculo.
- Conocer la notación utilizada al expresar intervalos (empleo de “[” y de “(” ).
- Correcto dominio de los porcentajes.

## 2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Por todo lo comentado anteriormente, debemos suponer que el alumnado sí que ha disfrutado de una enseñanza que le ha permitido adquirir los conocimientos previos que son necesarios, ya que, muchos de los conceptos que se tratarán han sido presentados con anterioridad (base del mencionado aprendizaje en espiral).

Como puede darse lo contrario a lo que se menciona en el párrafo anterior, se realizaría un chequeo de los conocimientos que el alumnado posee al inicio de las sesiones, verificando los conocimientos previos que poseen.

Si se observaran deficiencias que consideramos “importantes” (el resto se tratarán en el siguiente apartado), se emplearían:

- Hojas de ejercicios que incluyesen operaciones básicas (sumar, restar, multiplicar, dividir) entre números naturales, enteros, decimales, racionales...
- Hojas de ejercicios con operaciones de potencias y raíces cuadradas, recordando las propiedades existentes.
- Empleo de 5 a 10 minutos de las sesiones lectivas a la operación con la calculadora y, si fuese posible, con hojas de cálculo en la sala de ordenadores del centro, o en el mismo aula con la pizarra digital.
- Creación de un blog (o una sección dentro de uno ya existente) de consulta de soluciones, cuestiones... tanto en el cálculo de operaciones como en el empleo de la calculadora y la hoja de cálculo.

**3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?**

Asumimos que el alumnado no tenga claros algunos conceptos estadísticos, como por ejemplo la media, la moda, la mediana, la frecuencia absoluta, la población, la muestra... o que tenga dudas sobre éstos.

Si se diese esta situación, realizaríamos un repaso inicial con una actividad para presentarles los conceptos básicos que deben conocer, partiendo del recuento de datos, ordenación de los mismos, agrupación en clases iguales, obtención de frecuencias absolutas, frecuencias relativas... y, posteriormente, se presentarían las medidas de centralización que se tratarían en las sesiones.

También podría darse la situación de que, algunos estudiantes tengan asimilado un conocimiento obstáculo dentro de los objetos matemáticos que trataremos y no sea consciente de este hecho. Tendremos que ser capaces de que, el alumno, sea consciente de este obstáculo, que lo rechace y que adquiera un nuevo conocimiento más amplio.

Tras la primera sesión (en la que se realizarán una actividad que posteriormente se presentarán, y se constituirá en razón de ser, además de realizar una toma de datos) se realizará una actividad en la que, el alumnado con alguna carencia que hemos definido como asumible, podrá aclarar sus dudas o superar un conocimiento obstáculo que tenga adquirido (actividad “*¿Cómo son los alumnos de la clase?*” [1]).

## C. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático.

Para introducir el objeto matemático al alumnado, emplearemos la siguiente razón de ser, que encontramos interesante y adecuada ([9]):

“¡Dios salve a la Reina!

Sidney Herbert, que ocupaba el cargo de Secretario de Estado para la Guerra, había tomado la decisión más arriesgada de su carrera política al encargar a su amiga Florence Hightingale la organización del cuerpo de enfermeras de campaña con objeto de mejorar los hospitales en la guerra de Crimea. Era el año 1854 y su futuro político estaba en manos de aquella dama.

Cuando se preparaba para ir a la zona de conflicto, el país entero se estremeció por la aniquilación de la Brigada Ligera, tras una carga suicida contra las baterías rusas. Esta acción fue difundida, no como un desastre, sino como prueba del valor y el honor de los ingleses.

Hightingale comenzó a aplicar medidas higiénicas, y fue recopilando datos y organizándolos mediante gráficos para facilitar su lectura.

El informe, que fue enviado al Secretario de la Guerra, y solicitaba ayuda para eliminar las trabas que estaba encontrando entre los mandos del ejército, concluía con una nota manuscrita que rezaba:

*En enero, de las 3168 bajas, 2761 se debieron a enfermedades contagiosas, 83 fueron por heridas de guerra y 324 por otras causas...*

*Nuestros hospitales causan más muertos que los cañones del enemigo.*

*Señor, no permitáis que el honor de Inglaterra sea enterrado en una sala de hospital. ¡Dios salve a la Reina!*

Pues bien, tras leer el texto, se os pide que, os pongáis en pequeños grupos y representéis los datos de la nota con un gráfico adecuado. Pensadlo un poco y si tenéis dudas, me vais llamando y pasaré por vuestras mesas”.

Tras la realización de esta actividad, constituida como razón de ser, que consideramos que no llevaría más de la mitad de la primera sesión, comenzaríamos con otra actividad ya mencionada ([1]), que se podría también constituir en razón de ser del objeto matemático.

Se trata de elaborar un perfil del alumnado, identificando el alumno típico y analizando si hay diferencias entre el chico y la chica típicos, así como localizar posibles relaciones entre las variables analizadas. Lo que se persigue con esta actividad, que se podrá emplear a lo largo de las sesiones que traten sobre el objeto matemático, es que el alumnado, además de conseguir los conocimientos que se le presentan, se conciencie de la importancia de la fiabilidad de los datos, la necesidad y dificultad de la categorización, de la importancia de la claridad en las preguntas y de la serie de pasos que van desde la idea inicial de la investigación hasta la obtención de las conclusiones.

Así que, en esta primera sesión, el alumnado tomará datos que, posteriormente, recogeremos para incluirlos en un documento que pasaremos a los alumnos en posteriores sesiones (ver anexos de este trabajo). Algunos de ellos podrán ser:

- Variables obtenidas por simple observación: género, color de pelo, color de ojos, uso o no de gafas o lentillas...
- Variables obtenidas por medición: el peso, la talla, la longitud de los brazos extendidos, la longitud del codo a la muñeca...
- Variables que requieren preguntas (a través de una pequeña encuesta): número de hermanos, cómo acude al instituto, cuánto deporte practica, qué talla de calzado usa, cuántos libros de lectura lee al mes...

En función del tipo de variables, el alumnado tendrá que ponerse de acuerdo en cómo codificar los datos (por ejemplo, chico/chica, varón/mujer, V/M...), delimitar el número de campos (lees 0 libros al mes, 1 libro, 2 libros, 3 o más), los intervalos a emplear (tu altura está en [1'40, 1'50] metros, o se encuentra en [1'50, 1'60] metros, o en el intervalo [1'60, 1'70] metros...).

Tras lo anterior, y la puesta en común de la información, se podrán emplear los datos para obtener los valores medios, moda y mediana, realizar diagramas representando los resultados... trabajando los objetos matemáticos que nos interesan.

## 2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Las razones de ser históricas que dieron origen al objeto no coinciden, pero sí el propósito. Se trata de organizar datos para obtener información de una realidad concreta y determinar las conclusiones obtenidas y las posibles futuras acciones a tomar.

Históricamente, la Estadística comenzó a emplearse en los registros y los censos realizados por las civilizaciones antiguas, con el mencionado fin de obtener información y conocer mejor la realidad.

Los orígenes de la Estadística son difusos, por su propia antigüedad. Se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes, ejércitos, producciones... en la civilización china, sumeria, egipcia... Según [8], la historia demuestra que Tácito, historiador latino, cuenta que Augusto ordenó una amplia encuesta sobre las riquezas del imperio, enumeró los soldados, los navíos, los recursos de todas clases y las rentas públicas.

La Estadística, como todas las ciencias, no surgió de improviso, sino mediante un proceso largo de desarrollo y evolución, desde hechos de simple recolección de datos, hasta la diversidad y rigurosa interpretación de los datos que se dan hoy en día. Así pues, el origen de la Estadística se remonta a los comienzos de la historia y esto se sabe tanto a través de crónicas, datos escritos, como de restos arqueológicos, y esto es explicable por cuanto en ese tiempo se estaba formando la sociedad y es algo inherente la necesidad de saber cosas elementales como cuántos habitantes tiene la tribu o población, con cuántos bienes cuenta, cuántas armas tiene para defenderse o atacar...

Según [7], Los comienzos de la Estadística pueden encontrarse en el antiguo Egipto, cuyos faraones lograron recopilar, hacia el año 3050 a.C., prolíficos datos relativos a la población y la riqueza del país. Según el historiador griego Heródoto, dicho registro de riqueza y población se hizo con el objetivo de preparar la construcción de las pirámides. En el mismo Egipto, Ramsés II hizo un censo de las tierras con el objeto de verificar un nuevo reparto.

En el antiguo Israel, la Biblia da referencias, en el libro de los Números, de los datos estadísticos obtenidos en dos recuentos de la población hebrea. El rey David, por otra parte, ordenó a Joab, general del ejército, hacer un censo de Israel con la finalidad de conocer el número de la población.

También los chinos efectuaron censos hace más de cuarenta siglos. Los griegos efectuaron censos periódicamente con fines tributarios, sociales (división de tierras) y militares (cálculo de recursos y hombres disponibles). La investigación histórica revela que se realizaron 69 censos para calcular los impuestos, determinar los derechos de voto y ponderar la potencia guerrera.

Pero fueron los romanos, maestros de la organización política, quienes mejor supieron emplear los recursos de la estadística. Cada cinco años realizaban un censo de la población y sus funcionarios públicos tenían la obligación de anotar nacimientos, defunciones y matrimonios, sin olvidar los recuentos periódicos del ganado y de las riquezas contenidas en las tierras conquistadas. Recordar que, según la biblia, para el nacimiento de Cristo, se estaba produciendo uno de estos empadronamientos de la población bajo la autoridad del imperio.

En definitiva, que la Estadística, como tal, tiene una antigüedad tan elevada como la existencia de anotaciones, en papiro, en roca... y que las diversas civilizaciones la emplearon para diversos fines, observando su gran utilidad de mostrar la realidad a través de ella.

**3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.**

Como hemos mencionado en el punto 1 de este apartado, usaremos como razón de ser en el aula el texto “¡Dios Salve a la Reina!” ([9]) y la actividad “*¿Cómo son los alumnos de la clase?*” ([1]).

La primera de ellas servirá como un acercamiento del alumnado a la lectura de textos y la posterior realización de gráficas que representen los datos que en ellos aparecen, pudiendo mostrar de forma más visual los resultados.

La segunda actividad, pretende recoger gran cantidad de datos, pero con los que el alumnado se sienta involucrado. Gran cantidad de ejercicios y problemas proponen el recuento del número de calzado de un grupo de alumnos, de su altura, de su peso, de su color de ojos... De esta forma, estas actividades se podrán realizar de la misma manera, pero utilizando los datos recogidos por el grupo clase, con lo que la motivación por la obtención de resultados, gráficas y conclusiones, sea mayor.

**4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.**

La metodología que se seguirá en el aula por parte del docente, en lo que se refiere a las actividades que se constituirán en razón de ser para el alumnado del objeto matemático, se puede resumir en los siguientes puntos:

- Formación de pequeños grupos en el aula para trabajar el texto “¡Dios salve a la Reina!”. El docente repartirá fotocopias del texto y los grupos deberán leer y comprender, tanto el texto, como lo que se les pide. El trabajo cooperativo, la participación del alumnado y el aprendizaje por descubrimiento, se encuentran envueltos e integrados dentro de esta actividad.
- El docente, pasará por las mesas de los grupos que soliciten su ayuda, y solucionará las dudas que surjan, intentando no dar la respuesta a las cuestiones, sino que, con pequeñas pistas, sea el propio alumnado el que alcance la respuesta a su cuestión. Debe prestar mucha atención a las dificultades que surjan para intentar, posteriormente, solucionarlas y que puedan superarse.

- Tras finalizar la actividad, el docente recogerá las hojas de los grupos (en la parte anterior se encontrará el texto y en la posterior, la gráfica que hayan realizado). De esta forma, la actividad que se ha convertido en razón de ser, servirá como una evaluación inicial o primera toma de contacto para el docente de los conocimientos de los estudiantes sobre el objeto a tratar.
- Seguidamente, se facilitará a la clase unas hojas realizadas por el docente (ver anexos de este trabajo). Además, se deberá llevar al aula varias cintas métricas y un peso. El docente, seleccionará a algunos alumnos del aula, y organizará grupos. En uno de ellos, se tomará la altura del alumnado que forma el grupo-clase. En otro, el género, el color de pelo y el color de ojos. En otro, la longitud del codo a la muñeca. En otro, se recogerán las respuestas del número de hermanos que tiene el estudiante en cuestión, cómo acude al centro y cuántos libros lee al mes. En otro grupo... y así, hasta completar los datos de las variables que se deseen y se crean convenientes. El docente, tomará el peso de todos los estudiantes (la razón de que esto sea así se debe a que, alguna parte del alumnado, puede sentirse mal o no estar a gusto en una situación en la que, otro compañero, conozca su peso).
- El empleo de cintas métricas por parte del alumnado, así como la recogida de datos, debe mostrar a los estudiantes la importancia de la precisión de la medida y del tratamiento de los datos.
- La implicación en la actividad, la cooperación entre los integrantes del grupo-clase, la solución de cuestiones que surjan entre el alumnado... permitirán que esta actividad, que se constituirá en razón de ser, genere un aprendizaje constructivista.
- Tras la recogida de los datos de las diferentes variables, el docente pedirá las hojas facilitadas y las empleará (o tal y como se encuentran, o agrupando información) en posteriores actividades. Si es necesario, realizará copias para el alumnado, que entregará en la siguiente sesión, para que ellos tengan la información necesaria a la hora de realizar ejercicios y problemas que se propongan.

## D. Sobre el campo de problemas

### 1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Según se recoge en [4], los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en el seno de instituciones o colectivos específicos implicados en el estudio de ciertas clases de problemas. En algunos casos, estas instituciones pueden ser extra matemáticas, e incluso un problema particular surge inicialmente en una institución extra matemática, aunque posteriormente la comunidad matemática se interesa por su solución y la aplica a otros problemas o contextos. En consecuencia, los objetos matemáticos son entidades culturales socialmente compartidas.

Dentro del objeto matemático que estamos tratando en este trabajo (población, muestra, tipos de variables estadísticas, tablas de frecuencias, diagramas, medidas de centralización), existen campos de problemas diferentes para cada uno de ellos.

El campo de problemas del que emergen los objetos matemáticos designados como medidas de centralización, media, moda y mediana, y posteriormente otras medidas de posición central, puede resumirse en las situaciones que describimos a continuación, según [4].

#### → Campo de problemas asociados a la media (CM)

CM1: Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores.

Ejemplos de este tipo de problemas serían los siguientes:

- “Un objeto se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso del objeto?”
- “En una fábrica se empaqueta arroz. Se producen paquetes de 1 kg. Para ver lo exactas que son las máquinas, se realizan una serie de medidas. Los resultados, en kilogramos, son: 1,010; 0,990; 0,995; 1,005; 1,002; 0,993; 0,997; 0,996; 1,002. ¿Cuál sería el valor medio de las medidas?”
- “Utiliza la tabla de alturas de nuestra clase (ver anexo de este trabajo) y obtén la altura media”.

En estas situaciones, se toma la media como solución por sus propiedades como estimador, tales como ser no sesgado o tener mínima varianza.

CM2: Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme.

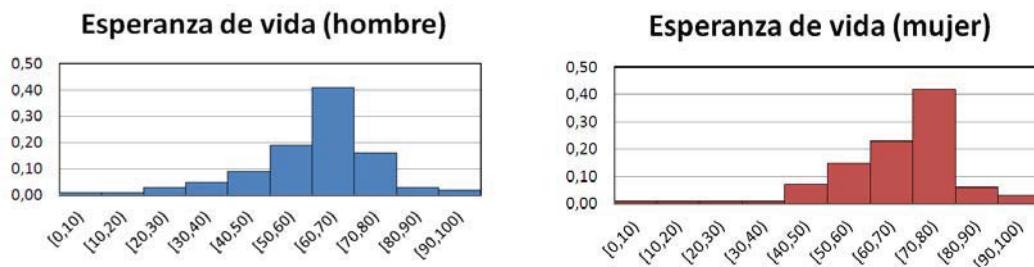
Ejemplos de este tipo de problemas serían los siguientes:

- “Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?”
- “Juan tiene 12€, Silvia 8€, Esteban 4€, David 1€ y Patricia no tiene dinero. ¿Cuánto tendrán cada uno si repartimos a partes iguales?”

En esta situación, el alumnado puede darse cuenta que la media, sirve para repartir de forma equitativa, realizando una división del total de objetos y generando partes iguales entre todos los integrantes del grupo.

CM3: Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados cuya distribución es aproximadamente simétrica.

Generalmente, la idea es comparar dos distribuciones, como se muestra en el ejemplo siguiente, en que se comparan dos histogramas correspondientes a una distribución aproximadamente simétrica. En esta situación, la media es una buena solución, porque los datos se concentran aproximadamente alrededor de la misma:



En las figuras representamos los datos sobre esperanza de vida en hombres y mujeres. Escribir un informe de media página razonando en base a esos gráficos si es verdad que las mujeres tienen una esperanza de vida mayor que los hombres.

CM4: Conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica.

Ejemplos de este tipo de problemas serían las siguientes:

- “La altura media de los alumnos de un colegio es 1,40. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1,38; 1,42; 1,60; 1,40. ¿Cuál sería la altura más probable del quinto estudiante?”
- “Utiliza la tabla de longitud codo-muñeca (ver anexo de este trabajo). Emplea las seis primeras medidas que aparecen en la tabla. ¿Cuál sería la longitud más probable de una séptima medida?”.

Creemos que estos tipos de problemas son fácilmente solucionables por el alumnado. La única duda que nos surge es si, los estudiantes serían capaces de comprender el concepto de “más probable”. El docente debería trabajar este hecho para poder trasmítirselo al grupo clase.

#### → Campo de problemas asociados a la mediana (CME)

CME1: Encontrar un resumen estadístico de posición central, en situaciones en las que la media no es suficientemente representativa.

Cuando la variable es muy asimétrica, tiene valores atípicos o presenta varias modas, el valor medio de una colección de datos no aporta información suficiente, por lo que interesa dividir el conjunto en dos, con el mismo número de efectivos, buscando un valor central. Ejemplos típicos presentados en los textos analizados de este tipo de variables son la renta per cápita, salario y otras variables económicas.

Según [11], en una distribución asimétrica, la media está muy alejada del centro y se sitúa en la cola de la distribución. Por ejemplo, la distribución de precios de las viviendas está muy sesgada hacia la derecha... Los informes sobre los precios de las viviendas, salarios y otras distribuciones fuertemente sesgadas dan la mediana como valor típico en lugar de la media.

Un ejemplo de este tipo de problemas sería el siguiente:

- “*Unos amigos se reúnen y comentan sus sueldos mensuales. Uno de ellos gana 800€. Otro percibe 825€. El siguiente comenta que gana 850€. Otro dice que su salario es 875€. Otro gana 900€. El penúltimo comenta que gana 3400€ y el último tiene un sueldo de 3900€. ¿Cuál es el salario medio? ¿Cuál es el salario mediano? ¿Qué medida crees que es más representativa?*”.
- “*En una clase de primaria hay 12 estudiantes. Sus alturas, en metros, son: 0,95; 1,10; 1,08; 0,98; 1,12; 1,13; 0,99; 1,13; 1,04; 1,06; 1,11; 1,01. El profesor mide 1,98 metros. Calculad la media y la mediana de las trece alturas. ¿Cuál crees que es el estadístico más representativo?*”

CME2: Encontrar un resumen estadístico de posición central para variables ordinales.

Cuando se estudian variables cualitativas ordinales, las diferencias del valor numérico de la variable no corresponden a diferencias de la magnitud medida y la mediana puede representar los datos más coherentemente que la media. Por ejemplo, al considerar el orden de llegada a la meta en una competición.

Este es un caso particular de un tipo de situación más general y abstracta (el campo de problemas de reducción de datos ordinales), común en muchas aplicaciones de la Estadística, y en particular, cuando queremos realizar comparaciones entre dos conjuntos de datos ordinales. Cuando la variable que queremos resumir viene medida en una escala ordinal, incluso aunque codifiquemos los datos como valores numéricos, los cálculos con los mismos, por ejemplo, para representar los datos por la media aritmética, serían inapropiados.

La solución pasa por ordenar los datos y tomar como representante del conjunto de datos el valor de la variable que ocupa la posición central, porque hay tantos valores inferiores como superiores a éste. Aunque podría haberse utilizado también la moda como representante de este conjunto de datos, la moda sólo tiene en cuenta la frecuencia de aparición de un valor de la variable, pero no su ordenación. La mediana proporciona, por tanto una información más completa que la moda cuando es posible calcularla.

Un ejemplo de este tipo de problemas sería el siguiente:

- “*Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I = Insuficiente, A = Aprobado, N = Notable, S = Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:*

|         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grupo 1 | I | A | A | N | N | S | S | I | I | I | A | A | A | N | S | S | I | A | A | S | S | S |
| Grupo 2 | S | S | I | I | A | N | A | N | I | I | S | N | A | S | I | N | N |   |   |   |   |   |

¿Qué grupo ha obtenido mejores notas? ¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?”.

→ Campo de problemas asociados a la moda (CMO)

CMO1: Obtener como valor representativo de una colección de datos, el más frecuente de ellos, en situaciones en las que lo que interesa fundamentalmente es el valor dominante del conjunto.

Como se indica en [3], la moda es una característica de tendencia central que es fácil de calcular, puesto que sólo necesita la clasificación de las observaciones y posee un significado concreto como valor dominante.

La moda depende de todas las observaciones, sólo por su frecuencia relativa y no por su valor. Su mayor inconveniente es que si la variable es continua no está bien definida, ya que la clase modal dependerá de la amplitud de los intervalos de clase. Además, algunas distribuciones pueden presentar varias modas. Pero, en algunos casos, se utiliza por su fácil cálculo, si no se requiere una gran precisión.

Ejemplos de este tipo de problemas serían los siguientes:

- *Los precios del alquiler mensual de la vivienda se recogen en la siguiente tabla:*

| Precio (€) | Número de Viviendas $f_i$ | $F_i$ |
|------------|---------------------------|-------|
| 240        | 13                        | 13    |
| 270        | 33                        | 46    |
| 300        | 40                        | 86    |
| 330        | 35                        | 121   |
| 360        | 30                        | 151   |
| 390        | 16                        | 167   |
| 420        | 20                        | 187   |
| TOTAL      | 187                       |       |

*¿Cuál es el precio más común? ¿Qué medida de centralización has hallado?*

- El siguiente ejemplo es una versión actualizada de un problema de Martin Gardner, de 1981 (ver anexo de este trabajo):

*“Productos Artilugio (PRODILUGIO, S.A.) tiene una pequeña fábrica de superartilugios. La dirección de la empresa está a cargo del señor Artilugio, su hermano y seis parientes. La fuerza laboral consiste en cinco encargados y diez operarios. Los negocios van bien, y la fábrica precisa un operario más. El señor Artilugio está entrevistando a Félix, candidato al puesto. El señor Artilugio dice a Félix que en la empresa se paga bien, que el salario medio es de 600€ semanales, que durante el periodo de formación sólo cobrará 150€, pero que pronto le subirán el sueldo. Al cabo de unos cuantos días, Félix quiso ver al jefe. Éste le dijo que le había engañado, que había hablado con otros operarios y ninguno ganaba más de 200€ a la semana, que cómo podía ser el salario medio 600€. El señor Artilugio tranquiliza a Félix y le dice que le va a mostrar que el salario medio es de 600€. Le comenta que, semanalmente, él gana 4800€, su hermano 2000€, sus seis parientes 500€, los cinco encargados 400€ y los diez operarios 200€. El señor Artilugio le dice que, calcule el valor medio de los sueldos, y que*

*comprobará que es de 600€. Es más, que si coloca los valores ordenados, uno detrás de otro, de menor a mayor, el salario central sería de 400€. El señor Artilugio le pide que lo haga, para que encuentre el valor mediano. Félix, le dice que qué pintan en todo los 200€ de salario. En ese momento, el señor Artilugio le dice que ese valor es la moda, el salario ganado por el mayor número de personas, y que debe diferenciar entre media, mediana y moda. Tras este enunciado, se pide que calcules el valor medio, el mediano y la moda, para corroborar que el señor Artilugio no miente, observando la diferencia entre ellas”.*

CMO2: Encontrar el valor representativo en datos cualitativos.

En los datos cualitativos, esta es la única medida de posición central que es posible calcular. Este es el caso del siguiente ejemplo:

- *Los siguientes datos muestran las dificultades encontradas para llevar a cabo un tipo de programas de salud en Florida. ¿Cuál consideráis la “barrera típica” y por qué?*

| Barrera                       | Número | Porcentaje |
|-------------------------------|--------|------------|
| Falta de apoyo administrativo | 10     | 43,5       |
| Tiempo                        | 5      | 21,7       |
| Dinero                        | 4      | 17,4       |
| Apatía                        | 3      | 13,1       |
| Falta de Compensación         | 1      | 4,3        |
| Total                         | 23     | 100        |

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas? Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La técnica inicial de resolución de problemas, que se ha presentado en el apartado de razón de ser de este trabajo, se basaba en el descubrimiento del alumnado, trabajando en pequeños grupos en el aula.

La resolución de los diferentes problemas que se han presentado, también pueden realizarse siguiendo la misma pauta. Eso sí, cuando el alumnado necesite algún tipo de apoyo porque no sepa continuar, el docente tiene que estar a su lado para indicarle, de forma sutil, cuál es el camino a seguir, siendo capaz de resolver el problema que está tratando.

Algunos aspectos que pueden modificar la técnica de resolución de problemas serían los siguientes:

- El paso de problemas con variables cuantitativas a cualitativas, y viceversa.
- El número de datos del problema.
- La forma de presentación de los datos a estudiar.

Cada uno de los diferentes tipos de problemas del campo de problemas se planteará en el aula para ser resuelto de forma cooperativa por parte del alumnado. Los

estudiantes formarán pequeños grupos y, mediante el descubrimiento y el uso de las técnicas necesarias, serán capaces de resolver las cuestiones que se les planteen.

Con los datos que el alumnado ha recogido en la primera sesión de clase, se podrán plantear problemas (dentro de los diferentes tipos que se han mostrado) y conseguir, de esta forma, una alta motivación de los estudiantes.

Además, el libro de texto se empleará como apoyo. De esta forma, se podrán enviar deberes para realizar en casa, a la vez que se puede convertir en una herramienta que facilite la ayuda de los familiares de los estudiantes u otro apoyo que necesiten.

Para terminar, en determinados problemas, será necesario el uso de la calculadora o de las hojas de cálculo. Es por ello que, el docente, dedicará algunos minutos de las sesiones para indicar cómo debe emplearse cualquiera de las dos herramientas de cálculo mencionadas.

## E. Sobre las técnicas

El resto de las partes que forman nuestro objeto matemático, la población, la muestra, los tipos de variables, las tablas de frecuencias y los diagramas, pueden aparecer asociados a algunos de los campos de problemas anteriormente mencionados, asociados a media, moda y mediana, pero consideramos que no constituyen un campo de problema propio. En sí, se tratan de técnicas:

T1: Diferenciación entre población y muestra: además de ser tecnologías, como se verá posteriormente, se debe presentar al alumnado una técnica para diferenciar entre población y muestra, tras definirlas. A la vez, debe indicarse a los estudiantes cómo debe seleccionarse una muestra para que sea representativa de una población, presentando varios ejemplos en los que una muestra lo sea, y en los que no.

T2: Identificación de tipos de variables: antes de comentar la identificación de variables, debemos presentar los diferentes tipos de variables estadísticas, que el alumnado debe conocer y saber identificar. En la siguiente tabla, se muestran los tipos de variables que los estudiantes deberán diferenciar:

| Tipos                | Propiedades   |   | Ejemplos   |
|----------------------|---|---|--|
| <b>Cualitativas</b>  | Los valores de la variable no son números, sino cualidades. |   | - Sexo: mujer, varón<br>- Color de pelo: moreno, rubio...                        |
| <b>Cuantitativas</b> | Los valores que toma la variable son números                |   | - Peso<br>- Número de hermanos   |
|                      | <b>Discretas</b>  | En cada tramo, la variable sólo puede tomar un número finito de valores             | - Número de amigos: entre 2 y 5 solo puedo tener 3 ó 4 amigos, pero no 3,5 ó 3,6 |
|                      | <b>Continuas</b>  | La variable puede tomar tantos valores como queramos, por pequeño que sea el tramo. | - Altura: entre 1,70 y 1,80 m de altura tenemos 1,71 m; 1,715 m; 1,767 m...      |

Tras presentarles al grupo clase esta clasificación de las variables, se les facilitarán actividades (que presentaremos posteriormente) en las que puedan identificar entre variables cualitativas y cuantitativas, y dentro de estas últimas, entre discretas y continuas.

T3: Cálculo de frecuencias: el alumnado debe conocer las técnicas de cálculo de los diferentes tipos de frecuencias que puede encontrar:

T3.1: La frecuencia absoluta: calcular las frecuencias absolutas empleando la técnica necesaria para poder completar la tabla de frecuencias. Se trata de ver cuántas veces aparece un mismo dato o datos que se encuentran en un intervalo concreto. Para ello, se trabajará el recuento de datos y la agrupación de los mismos. La frecuencia absoluta se denota por  $f_i$ , con  $i$  desde 1 hasta el número de diferentes valores que tome la variable o intervalos existan. Además, se debe indicar al alumnado que la suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, que representaremos como  $N$ .

T3.2: La frecuencia relativa: calcular las frecuencias relativas empleando la fórmula necesaria para poder completar la tabla de frecuencias. Se trata de ver cuántas veces aparece un mismo dato o datos que se encuentran en un intervalo concreto, dividiendo el resultado por  $N$ . Se representa por  $h_i$ , y por la definición, vemos que  $h_i = \frac{f_i}{N}$ , con  $i$  desde 1 hasta el número de diferentes valores que tome la variable o intervalos existan. La suma de las  $h_i$  es 1.

T3.3: La frecuencia absoluta acumulada: calcular las frecuencias absolutas acumuladas para completar la tabla de frecuencias. Se define la frecuencia absoluta acumulada de un dato como la suma de las frecuencias absolutas de los valores que son menores o iguales a él. Se representa por  $F_i$  y por la anterior definición, se calcula como  $F_i = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i$ , con  $i$  desde 1 hasta el número de diferentes valores que tome la variable o intervalos existan.

T3.4: La frecuencia relativa acumulada: calcular las frecuencias relativas acumuladas para completar la tabla de frecuencias. Se define la frecuencia relativa acumulada de un dato como la suma de las frecuencias relativas de los valores que son menores o iguales a él. Se representa por  $H_i$ , con  $i$  desde 1 hasta el número de diferentes valores que tome la variable o intervalos existan, y por la anterior definición, se calcula como  $H_i = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_i$ , que es

lo mismo que  $H_i = \frac{f_1}{N} + \frac{f_2}{N} + \frac{f_3}{N} + \dots + \frac{f_i}{N}$  o lo mismo que  $H_i = \frac{F_i}{N}$ .

T4: Diseño de tablas de frecuencias: se trata de recoger los diferentes tipos de frecuencias que en un ejercicio o problema se dan, siguiendo unos pasos dados, o de completar una tabla de frecuencias en la que se facilitan algunos datos. Para ello, se necesitará conocer cómo se calculan las frecuencias estadísticas (T3).

T5: Diseño de diagramas: se trata de representar los datos de forma gráfica, pudiéndose emplear diferentes tipos. Entre ellos, encontraríamos:

T5.1: el diagrama de barras, pudiéndose trazar el polígono de frecuencias cuando la variable es cuantitativa.

T5.2: el histograma, empleado cuando los datos se encuentran agrupados en intervalos, trazándose el polígono de frecuencias.

T5.3: el diagrama de sectores, pudiéndose usar para toda variable estadística.

T6: Medidas de centralización: además de constituir tipos de problemas, también se deberán dar a conocer las técnicas del cálculo de la media, la mediana y la moda.

T6.1: Media aritmética. Se denota por  $\bar{x}$ , y se calcula como el cociente de la suma de todos los valores multiplicados por su frecuencia absoluta, entre la suma de todas las frecuencias:  $\bar{x} = \frac{\sum_i f_i \cdot x_i}{N} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \dots + f_n \cdot x_n}{N}$ ,

con  $i$  desde 1 hasta el número de diferentes valores que tome la variable o intervalos existan. Sólo puede calcularse en variables cuantitativas. Si ésta es continua y se encuentra agrupada en intervalos,  $x_i$  es la marca de clase del intervalo. Según [4], en función de la presentación de los datos y de los tipos de variables que se manejen, discretas o continuas, se pueden detallar diferentes técnicas para el cálculo de la media. En este trabajo, simplemente las enumeramos y comentamos brevemente, seleccionando aquellas que son convenientes para el curso en el que nos encontramos:

T6.1.1: Cálculo de la media en variable discreta con datos aislados: la media se calcula sumando todos los datos y dividiendo por el número total de ellos.

T6.1.2: Cálculo de la media en variable discreta con los datos presentados en una tabla de frecuencias: para calcular la media se multiplica cada valor de la variable por su frecuencia absoluta, se suman los productos obtenidos y se divide el resultado por el total de datos.

T6.1.3: Cálculo de la media en variable continua o discreta con datos agrupados en clases: en este caso, se emplean las marcas de clase y sus frecuencias para el cálculo de la media.

T6.1.4: Cálculo de la media mediante ordenador: en función de la hoja de cálculo, se seguirán los pasos facilitados por el docente.

T6.1.5: Inversión del algoritmo de cálculo de la media: en determinadas ocasiones, se dispone de un conjunto de valores del que falta conocer un dato y, en cambio, conocemos su media.

T6.1.6: Construcción de una distribución para una media dada: en este caso se conoce el valor de la media y se debe buscar una distribución cuya media sea ese valor facilitado.

T6.2: Mediana. Se denota por  $Me$ , y es el valor que ocupa la posición central de los datos después de ordenarlos de menor a mayor, si el número de datos es impar. Si por el contrario, el número de datos es par, la mediana se calcula como la media de los dos valores centrales tras ordenar los datos. Sólo se puede calcular la mediana en variables cuantitativas. De nuevo, según [4], la técnica de cálculo de la mediana puede variar en función del tipo de datos, de la forma de presentación de los mismos, e incluso del número de ellos. Seleccionando los convenientes para 3º ESO encontramos:

T6.2.1: Cálculo de la mediana en datos no agrupados en clases, con número de datos impar: la mediana es el valor de la variable que ocupa el centro de la lista de valores, tras ordenarlos de menor a mayor. Si los valores se presentan en una tabla de frecuencias, es útil calcular las frecuencias absolutas acumuladas para obtener la mediana.

T6.2.2: Cálculo de la mediana en datos no agrupados en clases, con número de valores par: la mediana es la media aritmética de los dos valores que se encuentran en el centro de la lista ordenada de menor a mayor. Si los valores se presentan en una tabla de frecuencias, es útil calcular las frecuencias absolutas acumuladas para obtener la mediana.

T6.2.3: Cálculo de la mediana en datos agrupados en clases: la agrupación de datos implica el trabajo con valores aproximados. Se calculan las frecuencias absolutas acumuladas de las clases, obteniendo la clase mediana.

T6.3: Moda. Se denota por  $Mo$ , y es el valor de la variable, o la marca de clase para datos en intervalos (clase modal), que tiene mayor frecuencia absoluta, es decir, el que más se repite. Puede calcularse para todos los tipos de variables estadísticas. Si existen dos valores o intervalos con el mayor número de frecuencia absoluta, ambos serán la moda y estaremos ante una variable bimodal. Lo mismo ocurre si coinciden tres o más clases, teniendo una variable multimodal. Según [4], la técnica de obtención de la moda puede variar en función de los datos y del tipo de variable:

T6.3.1: Cálculo de la moda en variable discreta con datos aislados: se determina qué valor o valores son los que se repiten con mayor frecuencia.

T6.3.2: Cálculo de la moda en variable discreta con datos aislados, presentados en una tabla de frecuencias: la moda será aquél valor o valores que presenten una frecuencia absoluta máxima.

T6.3.3: Cálculo de la moda en variable discreta con datos agrupados en clases o variable continua: el procedimiento del cálculo de la moda es el mismo que en el caso anterior, salvo que la tabla de frecuencias estará formada por clases. Si todas las clases tienen el mismo tamaño (situación que sí que se tendría en 3º de ESO), se buscará cuál o cuáles de ellas presentan una frecuencia mayor, determinando la clase modal o las clases modales. Después, se determina la moda mediante la siguiente fórmula:

$$Mo = L_{i-1} + c \cdot \frac{f_i - f_{i-1}}{2 \cdot f_i - f_{i+1} - f_{i-1}}, \text{ siendo}$$

$L_{i-1}$ : Límite inferior de la clase modal

$c$ : Amplitud de la clase modal

$f_i$ : Frecuencia absoluta de la clase modal

$f_{i-1}$ : Frecuencia absoluta de la clase anterior a la clase modal

$f_{i+1}$ : Frecuencia absoluta de la clase siguiente a la clase modal

T6.3.4: Cálculo de la moda a partir de un diagrama de barras o histograma: se determina la barra de mayor altura, es decir, de mayor frecuencia absoluta, y esta será la moda o intervalo modal. Si nos encontramos en un histograma (datos agrupados), aplicaríamos la técnica del apartado anterior para obtener la moda.

Tras estos comentarios sobre las técnicas que creímos imprescindibles, pasamos a mostrar los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula para trabajar las técnicas presentadas.

#### 1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

Después de presentar las técnicas que nuestro objeto matemático engloba, mostramos los distintos tipos de ejercicios que se presentarán en el aula para trabajarlos, siguiendo el mismo orden anterior:

T1: Diferenciación entre población y muestra:

- “Queremos realizar un estudio estadístico de la talla de calzado que usan los alumnos de 3º ESO de un instituto.
  - a) ¿Cuál sería la población?
  - b) Elige una muestra. ¿Qué tamaño tiene?”

En este ejercicio, el alumnado debe darse cuenta que la población de estudio estaría formada por todos los alumnos de 3º ESO del instituto, tal y como dice el enunciado. Además, al elegir una muestra, en función de su tamaño y los individuos, el docente debe informarles si el tamaño es apropiado y si los integrantes de la muestra son representativos de la población. Posibles soluciones, en un instituto con 100 estudiantes de 3º ESO, serían elegir 30 alumnos (entre todas las clases, chicos y chicas).

- “Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra:
  - a) Longitud de los tornillos que, ininterrumpidamente, produce una máquina.
  - b) Estatura de todos los turistas que visitan España en un año.
  - c) El peso de un grupo de cinco amigos.”.

En este ejercicio, el alumnado debe darse cuenta que es materialmente imposible estudiar todos los tornillos que genera la máquina, por lo que es necesario extraer una muestra de la población. También debe percibir que no es posible medir a todos los turistas que visitan España durante un año, por lo que, la actuación lógica, indica que debe seleccionarse una muestra. Y para terminar, al pesar a cinco amigos, deben caer en la cuenta que la población es bastante reducida, por lo que no se selecciona una muestra: se pesa a toda la población.

- “El titular de un periódico es: EL PESO MEDIO DE LOS ESPAÑOLES ES 69KG. Responde a las siguientes preguntas:
  - a) ¿Cómo crees que se llega a esta conclusión? ¿Se habrá estudiado a toda la población, es decir, a todos los españoles?
  - b) ¿Qué características debe tener una muestra que seleccionemos de la población? ¿Podrían ser todos los individuos de la muestra de la misma edad? Si todos son mujeres, ¿sería representativa la muestra?”

En este ejercicio, el alumnado debe darse cuenta que, para llegar a la conclusión del titular, no se ha pesado a todos los españoles. Lo que se ha realizado es una selección entre la población, obteniendo una muestra. Y suponemos que, la muestra, es representativa de toda la población. Sobre las características que debe tener la muestra, debemos trasmisir al alumnado que debe estar formada por hombres y mujeres, de diferentes edades, para que pueda ser representativa de toda la población española (niños, jóvenes, adolescentes, adultos y ancianos, de ambos sexos). Es por eso que todos los miembros de la muestra no podrían ser de la misma edad ni todos mujeres para que la muestra sea representativa de la sociedad española.

## T2: Identificación de tipos de variables:

- “Determina si las variables estadísticas son cualitativas o cuantitativas:
  - a) Año de nacimiento.
  - b) Color del pelo.
  - c) Profesión de una persona.
  - d) Perímetro torácico.
  - e) Estado civil.
  - f) Perímetro de la cintura.
  - g) Número de veces que se ha viajado en avión.”

En este ejercicio, se pretende que el alumnado sea capaz de diferenciar entre los distintos tipos de variables estadísticas que conocen. Deberán darse cuenta de que el año de nacimiento es una variable cuantitativa discreta, que el color de pelo es cualitativa, que la profesión de una persona es cualitativa, que el perímetro torácico es cuantitativa continua (con una herramienta precisa de medición, pueden tomarse, idealmente, infinitos decimales), que el estado civil es cualitativa, que el perímetro de la cintura es cuantitativa continua (como ocurre con el perímetro torácico) y que el número de veces que se ha viajado en avión es cuantitativa discreta.

- “Clasifica estas variables en cualitativas o cuantitativas, y en este último caso, di si son discretas o continuas:
  - a) Provincia de residencia.
  - b) Número de vecinos de un edificio.
  - c) Profesión del padre.
  - d) Consumo de gasolina por cada 100 km.”.

En este ejercicio se pretende algo similar al anterior. El alumnado tiene que ser capaz de ver que, la provincia de residencia es una variable cualitativa, que el número de vecinos de un edificio es una variable cuantitativa discreta, que la profesión del padre es una variable cualitativa y que el consumo de gasolina por cada 100 km es una variable cuantitativa continua.

- “Si una variable estadística cuantitativa puede tomar infinitos valores, ¿es discreta? ¿Es continua? ¿Puede ser de los dos tipos? Justifica tu respuesta.”.

Con este ejercicio se pretende que el alumnado ponga ejemplos de la situación planteada y que se dé cuenta que, si una variable estadística cuantitativa puede tomar infinitos valores, la variable puede ser discreta o continua. Dos ejemplos:

- Número de átomos en cada uno de los astros de la Vía Láctea: variable cuantitativa discreta (“infinitos” valores pero enteros)
- Distancia de la Tierra a otros astros del Universo: variable cuantitativa continua (“infinitos” valores continuos)

#### T3 y T4: Cálculo de frecuencias y Diseño de tablas de frecuencias:

- Con este primer ejercicio, queremos dar el primer paso en el recuento de datos, su agrupación en intervalos y la determinación de la marca de clases: “Las estaturas (en cm) de 28 jóvenes son las que se muestran en la siguiente tabla. Forma una tabla con intervalos, efectúa el recuento de datos y obtén las marcas de clase de cada intervalo”.

|     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 155 | 178 | 170 | 165 | 173 | 168 | 160 |
| 166 | 176 | 169 | 158 | 170 | 179 | 161 |
| 164 | 156 | 170 | 171 | 167 | 151 | 163 |
| 158 | 164 | 174 | 176 | 164 | 154 | 157 |

Además de lo anterior, pretendemos que el alumnado detecte cuáles son los valores mínimo y máximo, sepa determinar cuál tiene que ser el tamaño de los intervalos, sepa calcular la marca de clase y, al realizar el recuento, vea que este valor es la frecuencia absoluta.

Una posible solución a este ejercicio sería la que sigue:

| Intervalo  | Marca de Clase | Recuento ( $f_i$ ) |
|------------|----------------|--------------------|
| [150, 154) | 152            | 2                  |
| [155, 159) | 157            | 5                  |
| [160, 164) | 162            | 6                  |
| [165, 169) | 167            | 5                  |
| [170, 174) | 172            | 6                  |
| [175, 179) | 177            | 4                  |

- “El color de pelo (M = moreno, R = rubio, P = pelirrojo) de 30 personas es:

M R P M M M M R R P      P M M M M M M P R R      R P M M M M R M M M

Obtén la frecuencia absoluta de cada valor de la variable con el recuento.”.

Con este ejercicio se pretende que el alumnado, al realizar el recuento, sea capaz de obtener la frecuencia absoluta, asociando ambos conceptos. El resultado correcto del ejercicio sería:

| Color de Pelo | Recuento ( $f_i$ ) |
|---------------|--------------------|
| Moreno (M)    | 18                 |
| Rubio (R)     | 7                  |
| Pelirrojo (P) | 5                  |

- “El número de horas diarias que trabajan con el ordenador 30 personas es:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 0 | 5 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 0 | 2 |
| 2 | 5 | 3 | 2 | 0 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 0 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 4 | 3 |

- a) ¿De qué tipo es la variable estadística?
- b) Construye la tabla de frecuencias obteniendo  $f_i$  y  $h_i$ .

En el primer apartado de esta actividad se pretende que el alumnado reafirme sus conocimientos sobre los tipos de variables estadísticas, respondiendo que la variable en cuestión es cuantitativa discreta (se trata de números enteros, no se contemplan las fracciones de horas). El segundo apartado pretende ejercitarse la técnica de diseño de tabla de frecuencias, teniendo también que calcular las frecuencias, empleando las fórmulas facilitadas. La solución sería la siguiente:

| Valores $x_i$ | Frecuencias Absolutas $f_i$ | Frecuencias relativas $h_i = \frac{f_i}{N}$ |
|---------------|-----------------------------|---|
| 0             | 4                           | 0,13  |
| 1             | 6                           | 0,2   |
| 2             | 8                           | 0,26  |
| 3             | 5                           | 0,16  |
| 4             | 3                           | 0,1   |
| 5             | 4                           | 0,13  |
| Suma          | 30 (= N)                    | 1   |

- “¿Qué pasa si la suma de frecuencias absolutas no es igual al número total de datos cuando realizamos una tabla de frecuencias?”.

En este ejercicio deseamos que el alumnado reafirme sus conocimientos teóricos sobre la frecuencia absoluta, y que recuerde que su suma siempre es igual al número total de datos. Por lo que, los estudiantes deben responder que se habrán debido dejar algún dato en el recuento, ya que la suma de frecuencias absolutas debe ser igual al número total de datos ( $N$ ).

- “Utiliza la tabla de peso de nuestra clase (ver anexo de este trabajo):
- a) Agrípalos en intervalos de amplitud 10 y obtén la tabla de frecuencias, calculando  $f_i$ ,  $F_i$ ,  $h_i$  y  $H_i$ .
- b) ¿Cuántas personas pesan menos de 60kg?
- c) Calcula el tanto por ciento sobre el total que representa el intervalo de mayor frecuencia absoluta.”.

Con este ejercicio se pretende que el alumnado trabaje la creación de tablas de frecuencias, agrupando datos, calculando los diferentes tipos de frecuencias e interpretando lo que se pide en cada uno de los apartados.

La respuesta del primer apartado sería la siguiente:

| Intervalo | Marca | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$  | $H_i$  |
|-----------|-------|-------|-------|--------|--------|
| [40, 50)  | 45    | 2     | 2     | 0,083  | 0,083  |
| [50, 60)  | 55    | 5     | 7     | 0,2083 | 0,2916 |
| [60, 70)  | 65    | 7     | 14    | 0,2916 | 0,583  |
| [70, 80)  | 75    | 8     | 22    | 0,3    | 0,916  |
| [80, 90)  | 85    | 2     | 24    | 0,083  | 1      |
|           |       | 24    |       | 1      |        |

Para responder la segunda pregunta, el alumnado debe seleccionar el valor de  $F_2$ , con lo que existen 7 personas que pesan menos de 60 kg. Y, finalmente, para responder la última pregunta, debe saber localizar el intervalo con mayor frecuencia absoluta, que es [70,80). Despues, seleccionar  $h_3$ , y multiplicar su valor por 100, obteniendo un 33,3%.

T5: Diseño de diagramas:

- “En un edificio de 16 vecinos, el número de televisores por vivienda es:

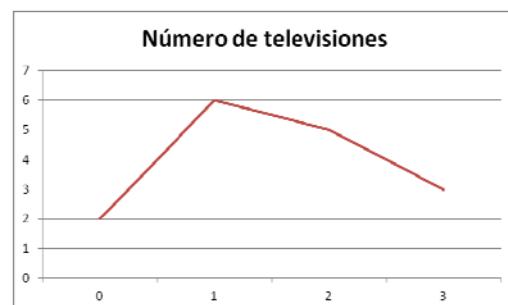
0 1 1 2      1 3 2 1      1 1 2 2      3 0 3 2

- Construye la tabla de frecuencias absolutas. ¿Qué tipo de variable es?
- Realiza el diagrama de barras y el polígono de frecuencias de los datos.
- Haz lo mismo con las frecuencias acumuladas.”.

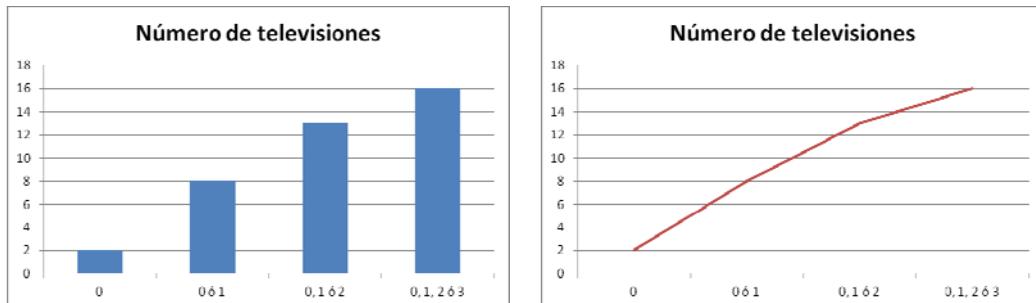
En este ejercicio se pretende que el alumnado, realice el recuento de datos, haga la tabla de frecuencias absoluta y acumulada correctamente, y cree el diagrama de barras y el polígono de frecuencias (si es posible). Esta actividad se podría realizar tanto en clase como en la sala de ordenadores. La solución de este ejercicio sería la siguiente:

| $x_i$ | $f_i$ |
|-------|-------|
| 0     | 2     |
| 1     | 6     |
| 2     | 5     |
| 3     | 3     |
| TOTAL | 16    |

La variable es cuantitativa discreta, ya que tenemos valores enteros, por lo que podremos realizar el polígono de frecuencias.



| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|-------|-------|-------|
| 0     | 2     | 2     |
| 1     | 6     | 8     |
| 2     | 5     | 13    |
| 3     | 3     | 16    |
| TOTAL | 16    |       |

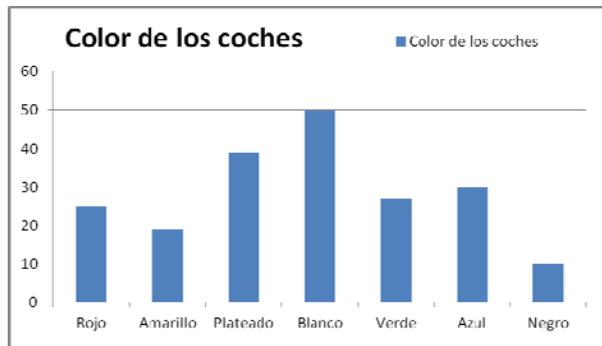


- “En un aparcamiento público hay 25 coches rojos, 19 amarillos, 39 plateados, 50 blancos, 27 verdes, 30 azules y 10 negros.
  - Construye la tabla de frecuencias.
  - ¿Puedes hallar las frecuencias acumuladas?
  - Realiza el diagrama de barras.”.

En este ejercicio se pretende que el alumnado trabaje con una variable cualitativa, de forma similar al ejercicio anterior, para que se dé cuenta que no es posible calcular las frecuencias acumuladas ni el polígono de frecuencias. La solución de este problema sería la siguiente:

| Colores  | $f_i$ |
|----------|-------|
| Rojo     | 25    |
| Amarillo | 19    |
| Plateado | 39    |
| Blanco   | 50    |
| Verde    | 27    |
| Azul     | 30    |
| Negro    | 10    |
| TOTAL    | 200   |

No podemos hallar las frecuencias acumuladas. Sólo podemos calcularlas en variables cuantitativas, ya que es necesario que los datos puedan ordenarse de menor a mayor.

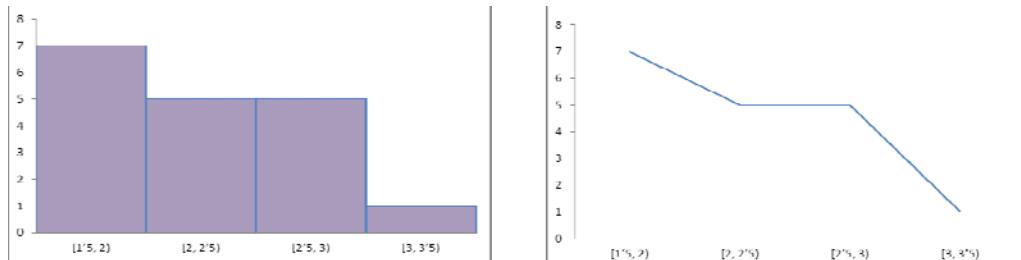


- “La longitud (en cm) de 18 grillos es:

|     |     |   |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1,8 | 1,9 | 2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 1,7 | 1,9 | 2,3 |
| 1,6 | 2,1 | 3 | 2,3 | 2,7 | 2,9 | 1,5 | 1,8 | 2,6 |

- a) Construye la tabla de frecuencias (absoluta y relativa) tomando intervalos.  
 b) Representa los datos mediante un histograma y un polígono de frecuencias.”  
 Con este ejercicio se quiere que el alumnado construya un histograma a partir de unos datos, debiendo agruparlos en intervalos de forma adecuada, además de calcular las frecuencias. La solución a este ejercicio podría ser la siguiente:

| Intervalos | $f_i$ | $h_i$ |
|------------|-------|-------|
| [1'5, 2)   | 7     | 7     |
| [2, 2'5)   | 5     | 12    |
| [2'5, 3)   | 5     | 17    |
| [3, 3'5)   | 1     | 18    |
| TOTAL      | 18    |       |

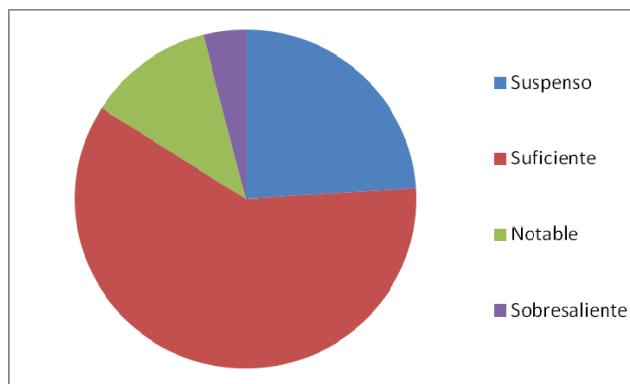


- “Representa estos datos en un diagrama de sectores: en una clase de 50 alumnos, 12 de ellos han suspendido, 30 han sacado Suficiente, un 12% Notable y el resto Sobresaliente.”.

| Calificaciones | $f_i$ | Grados |
|----------------|-------|--------|
| Suspendo       | 12    | 86,4º  |
| Suficiente     | 30    | 216º   |
| Notable        | 6     | 43,2º  |
| Sobresaliente  | 2     | 14,4º  |
| TOTAL          | 50    |        |

$$\leftarrow 12\% \text{ de } 50 = 6$$

$$\leftarrow \text{Resto: } 50 - 12 - 30 - 6 = 2$$



#### T6: Medidas de centralización: Media, Mediana y Moda

- “Las estaturas (en cm) de 24 alumnos de 3º ESO son:

158 160 168 156 166 158 160 168 168 168 158 156 164  
 162 166 164 168 162 158 156 166 160 168 160 160 160

- a) Agrúpalas en intervalos de 10 cm, obteniendo  $f_i$  y la marca de clase.  
 b) Calcula la media, mediana y moda.”.

Con este ejercicio se pretende que el alumnado siga trabajando el recuento de los datos, su agrupación en intervalos, la obtención de la frecuencia absoluta y la marca de clase y que calcule las medidas de centralización. Una posible solución a este ejercicio sería la siguiente:

| Intervalos | $f_i$ | Marca de Clase |
|------------|-------|----------------|
| [155, 160) | 7     | 157,5          |
| [160, 165) | 9     | 162,5          |
| [165, 170) | 8     | 167,5          |
| TOTAL      | 24    |                |

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3}{N} = \frac{7 \cdot 157,5 + 9 \cdot 162,5 + 8 \cdot 167,5}{24} = \frac{3905}{24} = 162,708\bar{3}$$

Mediana: ordenamos los datos primero y buscamos el valor central o la media de los dos valores centrales si hay un número par de datos:  $(160 + 162)/2 = 161$  cm

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  |
| 156 | 156 | 156 | 158 | 158 | 158 | 158 | 160 | 160 | 160 | 160 | 160 | 162 | 162 | 164 | 164 | 166 | 166 | 166 | 168 | 168 | 168 | 168 | 168 |

Moda: la marca de clase que más se repite es 162,5 cm

- “Interpreta las medidas de centralización del número de suspensos de 15 alumnos que pueden verse a continuación:”

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 4 | 1 | 2 | 3 | 0 | 2 | 4 | 0 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Con este ejercicio se quiere trabajar las técnicas de cálculo de las tres medidas de centralización, además de que el alumnado las interprete. La solución a esta actividad sería la siguiente:

| $x_i$ | $f_i$ |
|-------|-------|
| 0     | 3     |
| 1     | 4     |
| 2     | 2     |
| 3     | 2     |
| 4     | 4     |
| TOTAL | 15    |

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

Mediana: ordenamos los datos de menor a mayor. Vemos que la mediana es 2.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Moda: los valores que más se repiten son el 1 y el 4 (cuatro veces cada uno).

- “Obtén las medidas de centralización de esta serie de datos:”

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 4 | 9 | 8 | 7 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 | 8 | 6 | 1 | 5 |
| 1 | 0 | 2 | 4 | 1 | 2 | 5 | 6 | 5 | 4 | 7 | 1 | 3 | 0 | 5 |
| 8 | 6 | 3 | 4 | 0 | 9 | 2 | 5 | 7 | 4 | 0 | 2 | 1 | 5 | 6 |

Con este ejercicio se quiere trabajar las técnicas de cálculo de las tres medidas de centralización. La solución a esta actividad sería la siguiente:

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|-------|-------|-------|
| 0     | 4     | 4     |
| 1     | 6     | 10    |
| 2     | 6     | 16    |
| 3     | 4     | 20    |
| 4     | 6     | 26    |
| 5     | 7     | 33    |
| 6     | 4     | 37    |
| 7     | 3     | 40    |
| 8     | 3     | 43    |
| 9     | 2     | 45    |
| TOTAL | 45    |       |

$$\text{Media aritmética: } \bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \dots + f_n \cdot x_n}{N}$$

Moda,  $Mo$ : es el valor que tiene mayor frecuencia

Mediana,  $Me$ : valor que ocupa la posición central de los datos después de ordenarlos

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9}{45} = \frac{176}{45} = 3,9\bar{1}$$

Moda: el valor más frecuente es el 5

Mediana: el valor mediano es el 4 (es la posición 23, el valor central)

## 2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

En cuanto a las técnicas que se ejercitan con los ejercicios planteados, se han comentado al inicio de este apartado y a lo largo de la presentación de las actividades. Comentaremos a continuación las modificaciones de las técnicas.

En función del tipo de variable con la que el alumnado deba trabajar, el ejercicio puede permitir o no obtener determinados valores. Por ejemplo, con variables cualitativas, no puede obtenerse un valor medio o mediano de los datos.

Lo anterior, inicialmente, puede suponer una situación extraña para el alumnado, e implicar que, determinadas técnicas, no son realizables con un tipo de variables.

Además de lo anterior, en función de la cantidad de datos del ejercicio, la técnica de cálculo de la media puede variar. En un ejercicio en el que solamente se tengan datos con frecuencias iguales a la unidad, aunque la fórmula es la misma, el alumnado puede interpretar que, solamente sumando los datos y dividiendo por el número total de estos, puede obtenerse el valor medio:

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \dots + f_n \cdot x_n}{N} \rightarrow f_i = 1 \forall i \rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N}$$

Existen ejercicios que se plantearán para realizar en hojas de cálculo, en la sala de ordenadores del centro. Esto, producirá una modificación en las técnicas presentadas. La verdad, que en muchas de ellas. Para obtener la media, la mediana o la moda, con una simple selección de los datos introducidos, el alumnado podría obtener los resultados, sin necesidad de realizar las técnicas presentadas anteriormente. Además, la realización de diagramas, tanto de barras, histogramas o de sectores, puede realizarse de forma muy sencilla, tras seleccionar los datos a tratar. La obtención de los diferentes

tipos de frecuencias presentadas en este trabajo, también sufrirían una modificación en la técnica de cálculo: por ejemplo, para calcular la frecuencia relativa en una tabla de frecuencias, solamente debería calcularse uno de ellos, y después, con la herramienta de arrastre, desplazar la fórmula empleada por el resto de casillas.

También, si empleáramos la calculadora como herramienta de obtención de estadísticos en problemas con gran cantidad de datos, se producirían modificaciones en determinadas técnicas presentadas. Por la gran potencialidad de las hojas de cálculo frente a la calculadora, creemos más útil el empleo de la primera frente a la segunda, por lo que no presentaremos al alumnado modificaciones de las técnicas relacionadas con el uso de la calculadora. Lo anterior no impide que se emplee este recurso para realizar operaciones aritméticas conducentes a la obtención de los estadísticos.

**3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?**

Sí que creemos que las técnicas que se han presentado están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático.

En el apartado donde se presentaban los diferentes tipos de problemas para la media, la mediana y la moda, pueden incluirse, sin aumentar la complejidad de las actividades, la necesidad de realizar determinadas técnicas, además de las propias del cálculo de las medidas de centralización. Por ejemplo, antes de calcular la media de unos datos, puede pedirse que se realice una tabla completa de frecuencias, o representar los resultados en un diagrama de sectores.

También las posibles modificaciones de las técnicas (por número de datos de la actividad, por su realización en una hoja de cálculo...) son perfectamente adecuadas a los campos de problemas que se han presentado en este trabajo.

**4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.**

En la metodología seguida en el campo de problemas, se proponía un trabajo cooperativo por parte del alumnado fomentando, en la medida de lo posible, el aprendizaje por descubrimiento.

Sobre las técnicas, creemos que es demasiado osado pretender que, en todas, sea el alumnado el que las descubra por sí mismo. Es por ello que, se alternará la presentación de las técnicas por parte del docente mediante ejemplos en la pizarra tradicional o la pizarra digital interactiva y el descubrimiento por parte del alumnado.

El libro de texto se empleará también en la presentación de algunas técnicas mencionadas. De esta forma, el alumnado y sus familias, podrán tener como herramienta de apoyo el libro de texto.

El empleo de la sala de ordenadores también es resaltable en cuanto a la metodología a seguir en el aula. La sala de ordenadores dispone de 12 equipos, por lo que se deberá agrupar a los estudiantes en parejas y que vayan solucionando los problemas propuestos en las hojas de cálculo.

El docente, tras presentar una técnica, o que ésta sea descubierta por parte del alumnado, propondrá un ejercicio de similar resolución, con el empleo de la mencionada técnica. Permitirá el trabajo individual y en grupo, y pasará por las mesas que soliciten su ayuda para sacar a los estudiantes de posibles problemas al llevar la técnica a cabo.

## F. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

Antes de comenzar a responder las preguntas que se nos plantean, mencionamos las tecnologías que se encuentran asociadas a nuestro objeto matemático:

TEC1: Definiciones de población, muestra e individuo. Cómo saber si una muestra puede ser representativa de una población.

TEC2: Tipos de variables estadísticas. Cómo diferenciar entre ellos.

TEC3: Normas en la creación de tablas de frecuencia.

TEC4: Criterios de creación y uso de los distintos diagramas.

TEC5: Medidas de centralización.

### 1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

TEC1: Definiciones de población, muestra e individuo. Cómo saber si una muestra puede ser representativa de una población.

Para trasmisir correctamente los conceptos de población, muestra e individuo, el docente debe comentar en clase sus definiciones y, seguidamente, realizar una actividad para justificar lo presentado. Un posible ejercicio sería el siguiente: “*Queremos realizar un estudio estadístico de la talla de calzado de alumnos de 3º ESO de un instituto. ¿Cuál es la población? Si el instituto tiene 300 estudiantes en este curso, ¿sería correcto seleccionar una muestra de 4 alumnos? ¿Qué muestra propondrías para que fuese representativa de la población?*”.

TEC2: Tipos de variables estadísticas. Cómo diferenciar entre ellos.

La tecnología asociada a los tipos de variables estadísticas puede ser explicada a la vez que, el docente, presenta las distintas clases de variables. Así, el alumnado, puede comprender mejor que, una variable cualitativa es la que toma como valores cualidades, y no números, una variable cuantitativa discreta toma valores numéricos determinados (por ejemplo, enteros) y una variable cuantitativa continua puede tomar valores numéricos cualesquiera, por pequeño que sea el tramo de estudio. Asentando este conocimiento, tanto con la tecnología como con la técnica de diferenciación, al alumnado le será más fácil poder saber si, en futuras situaciones, pueden calcularse todas las medidas de centralización o qué tipo de diagrama es más adecuado.

TEC3: Normas en la creación de tablas de frecuencia.

No creemos necesario facilitar la tecnología asociada a la creación de tablas de frecuencias por cuanto ya es conocida por parte del alumnado de cursos anteriores. El alumnado puede seguir la técnica de generación de la tabla observando que, es lógico asociar a un valor de la variable una determinada frecuencia absoluta, una frecuencia absoluta acumulada, una frecuencia relativa... Además, tras la realización de ejercicios, también puede asimilar que la suma de las frecuencias absolutas de los distintos valores de la variable debe coincidir con el número total de individuos de la muestra y que la suma de las frecuencias relativas debe ser 1.

TEC4: Criterios de creación y uso de los distintos diagramas.

Sobre las tecnologías de creación y uso de los distintos diagramas creemos que, si el alumnado tiene clara las diferencias entre los distintos tipos de variables, no debe profundizarse en la tecnología asociada. Sí que creemos necesario que el alumnado tenga claro en qué tipo de situaciones es más adecuado emplear cada uno de los distintos tipos de diagramas.

### TEC5: Medidas de centralización.

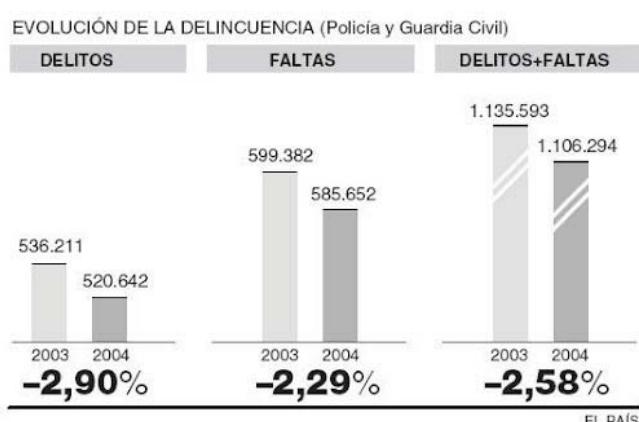
Sobre la media, la mediana y la moda, y bajo nuestro punto de vista, creemos que es importante que el alumnado sepa poder obtenerlas de una serie de datos, conozca cuándo pueden obtenerse en función del tipo de variable que estén estudiando y que interpreten correctamente lo que nos “están diciendo” cada una de ellas, que comprendan sus significados. Esta interpretación sería la tecnología asociada, y será el docente el que la transmita al alumnado.

Además de lo anterior, también sería importante transmitir al alumnado, por ejemplo, por qué se divide por el número total de datos al realizar una media, por qué se usan las frecuencias absolutas, por qué si el número de datos es par se necesita hacer la media para calcular la mediana... Esta tecnología es también muy importante para el alumnado, ya que así, comprenderán las técnicas, y no sólo las memorizarán.

Por la importancia que tienen los gráficos estadísticos en los medios de comunicación, creemos necesario incluir un apartado que hemos denominado estudio de “gráficos engañosos”, aparte de los que hemos denominado como “TEC”. Se tratan de noticias en las que el alumnado deberá realizar un análisis crítico, explicar las contradicciones que surgen, las conclusiones que se extraen e, incluso, los intentos de engaño. Incluimos esta sección en este apartado de tecnologías ya que el docente dará razones y justificará qué es lo que ocurre en estas situaciones. A modo de ejemplo, mostramos a continuación algunas de estas situaciones:



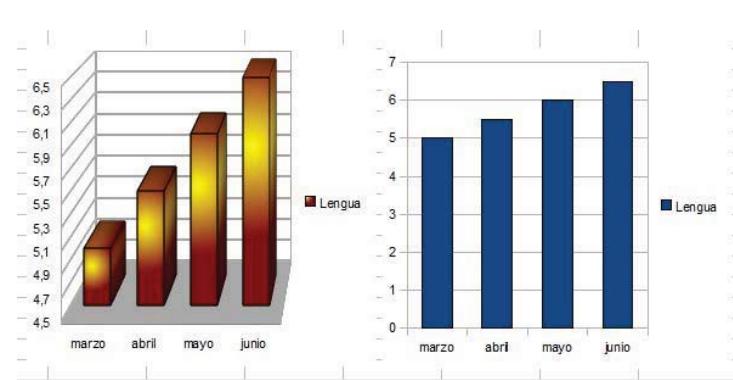
Fuente: [http://www.tnews.com.pe/fotos/ac76\\_f2.jpg](http://www.tnews.com.pe/fotos/ac76_f2.jpg)



Fuente: [http://lh3.ggpht.com/\\_3fQL5WQzAU0/SzdOZ\\_dAD9IAAAAAAAuA/wo8jO1XCjbU/delitos.jpg](http://lh3.ggpht.com/_3fQL5WQzAU0/SzdOZ_dAD9IAAAAAAAuA/wo8jO1XCjbU/delitos.jpg)



Fuente: [http://www.abc.es/Media/201101/04/abc\\_telecinco\\_a3-644x362.JPG](http://www.abc.es/Media/201101/04/abc_telecinco_a3-644x362.JPG)



Fuente: <http://irisfernandez.com.ar/betaweblog/wp-content/uploads/2011/03/graficos.jpg>

**2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?**

Como ya hemos mencionado anteriormente, será el profesor el que asuma la responsabilidad de justificar las técnicas de definiciones de población, muestra e individuo, cómo saber si una muestra puede ser representativa de una población, tipos de variables estadísticas y medidas de centralización. Creemos que es muy importante para la buena comprensión del objeto matemático a tratar, que estas técnicas, con sus tecnologías, sean correctamente presentadas al alumnado. Es por eso que dejamos la responsabilidad al docente de su justificación, incluido el tratamiento de los que hemos denominado “gráficos engañosos”.

**3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.**

Tras hacer ejercicios y problemas en pequeños grupos, se realizará una puesta en común en el aula, en ocasiones por parte del alumnado y en ocasiones por parte del docente. De esta forma, se presentará el proceso de resolución de la actividad, y cómo se ha llegado a la solución final, mostrándose, en determinadas situaciones, varias vías posibles de tratar la cuestión planteada.

En algunos casos, el docente explicará la técnica a seguir para resolver un problema o responder a una pregunta. Por ejemplo, en el caso de varios datos facilitados en un problema, primero se debe realizar un recuento de los mismos, obteniendo las frecuencias absolutas, pudiendo comenzar a llenar la tabla de frecuencias.

Siempre se realizará este proceso tras la realización de las actividades por parte de los estudiantes: de esta forma, permitimos que se enfrenten (solos o en pequeños grupos) a los ejercicios y problemas, intenten técnicas de resolución, consigan llegar al objetivo, vean otras opciones de compañeros... y después, realizar la puesta en común y corroborar sus ideas o comprender que las que se les proponen son más adecuadas.

**4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.**

Para aquellas tecnologías que se presentarán en el aula, la metodología a seguir se basaría en que, a la vez que se presentan los conceptos de población, muestra e individuo, cómo saber si una muestra es representativa de una población, o los diferentes tipos de variables y las técnicas para diferenciar entre ellos, y las medidas de centralización, se justifique por parte del docente, aportando la tecnología.

Se trataría pues de, una justificación verbal, realizada en la pizarra tradicional o en la pizarra digital interactiva, y apoyada en ejemplos con los que el alumnado pueda asentar lo que está asimilando. Como ya mencionábamos anteriormente, referente al proceso de institucionalización, éste se realizaría después de que el alumnado realice las actividades.

## G. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores. Establece una duración temporal aproximada.

Usando terminología pedagógica estudiada en asignaturas del Máster de Profesorado durante el primer cuatrimestre del mismo, encontraremos diferentes actividades a lo largo de las sesiones:

- Actividades de exploración de ideas: se trata de ejercicios y problemas con los que pretendemos, además de explorar los conocimientos previos que el alumnado posee sobre el objeto matemático, presentarles una razón de ser del mismo. El docente podrá adoptar medidas para compensar las situaciones que lo requieran y plantear situaciones que motiven al alumnado para trabajar a lo largo de las sesiones.
- Actividades de iniciación: se presentarán situaciones en las que se presenten conceptos y/o procedimientos que serán necesarios para, posteriormente, poder mostrar otros que requieran a los primeros.
- Actividades de desarrollo: se trata de contenidos, conceptuales y procedimentales, para reforzar los conocimientos principales que forman el objeto matemático. Forman las actividades principales y se llevarán la mayor parte de las sesiones.
- Actividades de asentamiento: se trata de realizar ejercicios y problemas que permitan que los conceptos y procedimientos vistos durante las anteriores fases, sean asimilados por el alumnado. Además, se incluirá una sesión de actividades con las que los estudiantes, gracias a los conocimientos adquiridos, puedan tener un espíritu crítico con determinadas noticias de los medios de comunicación, relacionadas con el objeto matemático.
- Fase de evaluación: se trata de una prueba escrita, en la que se pretende que el alumnado muestre los conocimientos que ha adquirido, a lo largo de las sesiones, sobre el objeto matemático. Esta prueba se añadirá a otras actividades evaluadas por parte del docente.

Pues bien, de forma esquemática, todas estas actividades estarán secuenciadas de la siguiente forma y seguirán la cronología que se presenta a continuación:

- Sesión 1: Presentación del texto “¡Dios salve a la Reina!” (razón de ser) y toma de datos de diferentes variables entre el alumnado para usar en posteriores actividades.
- Sesión 2: Población, muestra e individuo. Presentación en el aula de los conceptos. Ejercicios en pequeños grupos para interiorizar las diferencias. Muestras representativas y no representativas de una población. Por tanto, presentaremos la tecnología TEC1 y usaremos ejercicios en los que se aplique la técnica T1.
- Sesión 3: Variables estadísticas. Tipos. Uso de los datos tomados por el alumnado y otras actividades para trabajar con las variables. El docente presentará la tecnología TEC2 y propondrá actividades para introducir la técnica T2.

- Sesiones 4, 5 y 6: Frecuencias, Tablas de frecuencias y Diagramas estadísticos. Descubrimiento por parte del alumnado y presentación por parte del docente de conceptos y técnicas relacionadas con los tipos de frecuencias, la creación de tablas y el diseño de gráficos. Comprender cuándo es posible calcular determinadas frecuencias y crear gráficos concretos en función del tipo de variable estadística que se estudia. Por lo que, el alumnado empleará sus conocimientos de la tecnología TEC3 y TEC4, y recordará o se le presentarán las técnicas T3.1, T3.2, T3.3, T3.4, T.4, T5.1, T5.2 y T5.3 en ejercicios propuestos por el docente.
- Sesión 7, 8, 9 y 10: Medidas de centralización. Media (aritmética), mediana y moda. Comprensión del significado de cada una de las medidas y aprendizaje de las técnicas de cálculo de las mismas. Apoyo con cálculo de frecuencias, creación de tablas y diseño de diagramas para asentar conocimientos anteriores. Comprender cuándo es posible calcular algunas medidas de centralización en función del tipo de variable estadística que se estudia. Una de las sesiones se realizará en la sala de ordenadores, en la que el alumnado podrá desarrollar las modificaciones de las técnicas que se han comentado anteriormente. Así que, en estas cuatro sesiones se presentará la tecnología TEC5, empleando las técnicas T6.1, T6.2 y T6.3 (con las variaciones que se han explicado en el apartado correspondiente), en los campos de problemas CM, CME y CMO (y sus diferentes tipos). En función del desarrollo de las sesiones y la evolución de la clase, podrá profundizarse más en cada una de los diferentes tipos de problemas y las variaciones de las técnicas.
- Sesión 11: Presentación de gráficos engañosos que se emplean en medios de comunicación. Importancia de ser críticos con los datos representados y las conclusiones a las que se pueden llegar. Repaso de las dudas que el alumnado tenga sobre las tecnologías, las técnicas o los tipos de problemas que se han trabajado antes de la evaluación.
- Sesión 12: Prueba escrita. El alumnado podrá mostrar los conocimientos que ha adquirido durante las sesiones. Esta prueba completará la evaluación tras el seguimiento durante las sesiones (actitud, actividades para entregar al docente, posible revisión de cuadernos...).

Creemos que es importante realizar la siguiente aclaración: en muchos de los libros de texto que hemos consultado para el curso de 3º de ESO (por ejemplo, [9]), el objeto matemático que estamos tratando en este trabajo se completa en una unidad didáctica con las medidas de posición (los cuartiles y percentiles) y con las medidas de dispersión (rango o recorrido, desviación media, varianza, desviación típica y el coeficiente de variación). Es por ello que, en el desarrollo real en el aula, la secuencia didáctica y su cronología se completaría con los conocimientos que hemos mencionado.

## H. Sobre la evaluación

Gracias a las prácticas en el instituto Miguel de Molinos de Zaragoza y, especialmente, durante los prácticum II y III, pudimos tener la experiencia de desarrollar dos pruebas escritas para evaluar los conocimientos que se habían impartido en clase. Obviamente, es la experiencia de dos veces, por lo que su realización necesitó asesoramiento del tutor del instituto, en especial, sobre la dificultad y la duración.

Para solucionar la dificultad del examen, se nos recomendó que realizáramos un análisis de lo presentado en el aula, las tecnologías, las técnicas y los campos de problemas, y que propusiésemos actividades de una dificultad similar.

Para solucionar la duración del examen, se nos recomendó realizar el examen propuesto inicialmente, sin prisa, haciendo todos los pasos, las tablas, los cálculos, los diagramas... y multiplicar por 2 ese tiempo. Comentando esta estrategia en clase tras los prácticum, se nos aconsejó que deberíamos multiplicar por 3 el tiempo obtenido.

La prueba escrita debe contener conocimientos referidos a las técnicas y tecnologías aprendidas por el alumnado y parte de resolución de problemas de los distintos campos que se han presentado. Además, se debe informar al alumnado de la valoración de cada pregunta y, si es posible, de cada apartado de la prueba.

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

Con las anteriores recomendaciones, se ha diseñado la siguiente prueba escrita, para una duración de una hora, que evalúe el aprendizaje realizado por el alumnado:

E1. Responde a las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué tres medidas de centralización conoces? ¿Con qué tipos de variables se pueden calcular cada una? ¿Cómo calcularías cada una de ellas con estos datos: 5, 7, 12, 4, 12? (0,75p)
- b) ¿Cómo se define la frecuencia relativa? ¿Con qué letra se representa? ¿Cuánto suman las frecuencias relativas de los valores de una variable estadística? (0,75p)

E2. Una asociación contra la bulimia y la anorexia, informa que las pautas culturales han determinado que, la delgadez, sea sinónimo de éxito social. Muchos jóvenes luchan para conseguir el “físico ideal”, motivados por modelos, artistas o por la publicidad.

En el mes de marzo de 2006, en el colegio “Alcántara” de la ciudad de Talca, después de las vacaciones de verano, se observó con precaución a 25 estudiantes con síntomas de anorexia, registrándose los siguientes signos visibles (DS: Dieta Severa; RH: Usar Ropa Holgada; ME: Miedo a Engordar; H: Hiperactividad; UL: Usar Laxantes):

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| DS | H  | DS | DS | RH |
| RH | UL | DS | H  | DS |
| ME | UL | RH | H  | RH |
| DS | RH | DS | H  | ME |
| DS | ME | UL | UL | RH |

- a) Crea la tabla de frecuencias de la anterior variable, calculando todas las frecuencias que puedas. Si no puedes calcular alguna, explica el motivo. (1p)
- b) Si es posible, haz un diagrama de barras y dibuja el polígono de frecuencias. Si no puedes, explica el motivo. (1p)

- c) Si es posible, calcula las tres medidas de centralización que conoces. Si no puedes, explica el motivo. (1p)

E3. En una empresa los operarios constituyen el 70% del personal, los técnicos el 25% y los directivos el 5%. Se sabe que los operarios ganan 1200 euros mensuales cada uno, los técnicos 1800 euros y los directivos 2500 euros. Se decide realizar una subida de 60 euros al sueldo de los operarios, de 90 euros a los técnicos y de 120 euros a los directivos. Sabiendo que en la empresa hay 300 trabajadores en total, calcula las tres medidas de centralización que conoces tras la subida de sueldos. Si no puedes calcular alguna, explica el motivo. (3p)

E4. En un centro hospitalario de la provincia de Sevilla se ha tratado a 5000 pacientes durante 5 días con un nuevo medicamento llamado QUITA-MIGRAÑAS. Todos ellos padecen jaqueca crónica, es decir, tienen fuertes dolores de cabeza. Se realiza un estudio sobre el número de días que un paciente sufre mejoría con el medicamento, obteniendo la siguiente tabla en grados sexagesimales:

| Días de mejoría | Grados sexagesimales |
|-----------------|----------------------|
| 0               | 18                   |
| 1               | 54                   |
| 2               | 72                   |
| 3               | 36                   |
| 4               | 72                   |
| 5               | 108                  |

- a) Dibuja el diagrama de sectores. (0,5p)
- b) ¿Qué porcentaje de pacientes obtuvieron mejoría durante justamente 3 días? ¿Qué porcentaje de pacientes obtuvieron mejoría más de 3 días? (0,5p)
- c) Si es posible, dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencias. Si no puedes, explica el motivo. (0,5p)
- d) Calcula la media, mediana y moda. Si no puedes, explica el motivo (1p).

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendo evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

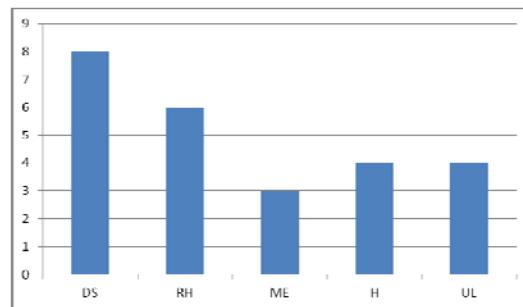
Con la anterior prueba escrita se pretende evaluar gran parte de lo tratado en el aula referente al objeto matemático:

- E1: conocer las medidas de centralización (TEC5), tipos de variables estadísticas (TEC2 y T2), y técnicas de cálculo de los estadísticos (T6.1.1, T6.2.1 y T6.3.1). También conocer los conocimientos sobre las frecuencias (TEC3 y T3.2).
- E2: tratar una variable cualitativa (TEC2 y T2), creando la tabla de frecuencias (TEC3, T3.1, T3.2, T4), el diagrama de barras (T5.1) y calculando las medidas de centralización (T6.3.4).
- E3: operar correctamente con porcentajes para encontrar las diferentes frecuencias de una variable estadística (T3.1 y T3.2), creando la tabla de frecuencias si el alumnado lo necesita (T4) y calcular correctamente las medidas de centralización (T6.1.1 ó T6.1.2, T6.2.2 y T6.3.1 ó T6.3.2).
- E4: dibujar correctamente el diagrama de sectores (TEC4 y T5.3), comprender el significado de las frecuencias (TEC3, T3.1, T3.2 y T4), dibujar el diagrama de barras (T5.1) y calcular las medidas de centralización (T6.1.2, T6.2.2 y T6.3.2).

**3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?**

- E1: La media, la mediana y la moda. La media y la mediana se pueden calcular en variables cuantitativas (continuas y discretas) y la moda con variables cuantitativas y cualitativas.  $\bar{x} = 8$ ,  $Me = 7$  y  $Mo = 12$ . Definir la frecuencia relativa, que se representa con  $h_i$  y que la suma de las frecuencias relativas de una variable es 1.
- E2: no pueden calcularse las frecuencias acumuladas (absoluta y relativa) ya que la variable es cualitativa. Puede realizarse el diagrama de barras pero no el polígono de frecuencias. Y puede calcularse la moda ( $Mo = DS$ ), pero no la media ni la mediana, por la misma razón que antes: la variable es cualitativa.

|    | $f_i$ | $h_i$         |
|----|-------|---------------|
| DS | 8     | $8/25 = 0,32$ |
| RH | 6     | $6/25 = 0,24$ |
| ME | 3     | $3/25 = 0,12$ |
| H  | 4     | $4/25 = 0,16$ |
| UL | 4     | $4/25 = 0,16$ |
|    | 25    | 1             |



- E3: se debe calcular cuántos trabajadores hay en cada clase, cuál es el nuevo sueldo y obtener los tres estadísticos (en euros), ya que la variable es cualitativa:
  - o 70% operarios  $\rightarrow 210 \rightarrow 1200 + 60 = 1260\text{€}$
  - o 25% técnicos  $\rightarrow 75 \rightarrow 1800 + 90 = 1890\text{€}$
  - o 5% directivos  $\rightarrow 15 \rightarrow 2500 + 120 = 2620\text{€}$

$$\bar{x} = \frac{210 \cdot 1260 + 75 \cdot 1890 + 15 \cdot 2620}{300} = 1485,50 \quad Me = 1260 \quad Mo = 1260$$

- E4: se debe diseñar el diagrama de sectores y el de barras, y en este último, el polígono de frecuencias (cuantitativa discreta). Responder que hay 500 pacientes que mejoraron justamente el tercer día y que fueron 2500 los que mejoraron tras más de tres días. También se piden los estadísticos (en días):  $\bar{x} = 3,15$   $Me = 3,5$   $Mo = 5$



**4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?**

Señalar que, además de los criterios de calificación de la prueba escrita, se tendrá en cuenta la participación en el aula, actividades solicitadas al alumnado (en la sala de ordenadores, trabajos de investigación, recogida de problemas...), revisión de cuadernos... en función de lo establecido por el departamento de Matemáticas del centro.

Centrándonos en los criterios de calificación de la prueba escrita:

- E1:
  - o Nombrar las tres medidas: 0,25p.
  - o Decir con qué variable se usan: 0,25p.
  - o Calcular los tres estadísticos con los datos facilitados: 0,25p.
  - o Definir la frecuencia relativa: 0,25p.
  - o Decir cómo se representa: 0,25p.
  - o Decir cuánto suma: 0,25p.
- E2:
  - o Crear la tabla de frecuencias (sin frecuencias acumuladas): 1p.
  - o Diseñar el diagrama de barras (sin polígono de frecuencias): 1p.
  - o Calcular las medidas de centralización (sólo la moda): 1p.
- E3:
  - o Calcular cuántos trabajadores hay en cada grupo: 0,5p.
  - o Calcular los nuevos salarios: 0,5p.
  - o Obtener las medidas de centralización (necesitando o no la creación de una tabla de frecuencias): 2p.
- E4:
  - o Dibujar el diagrama de sectores: 0,5p.
  - o Contestar cuántos pacientes obtuvieron mejoría en, justamente, 3 días: 0,25p.
  - o Contestar cuántos pacientes obtuvieron mejoría más de 3 días: 0,25p.
  - o Diseñar el diagrama de barras: 0,5p.
  - o Calcular los estadísticos de centralización: 1p.

## I. Sobre la bibliografía y páginas web

1. Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.

- [1]. Batanero, C. (2001). *¿Cómo son los alumnos de la clase?* Didáctica de la Estadística. Granada. Grupo de Educación Estadística.
- [2]. Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia.
- [3]. Calot, G. (1974). *Curso de Estadística Descriptiva*. Madrid: Paraninfo.
- [4]. Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria*. Granada
- [5]. Ferrerira, Charo. Grado en Ciencia y Tecnología de los Alimentos. Estadística. Matemática Aplicada. Universidad de Zaragoza. [http://ocw.unizar.es/ciencias-experimentales/matematicas-primer-curso-grado-ciencia-tecnologia-alimentos/bloques/bloque6/ejercicios/tema1\\_resumen\\_descriptiva.pdf](http://ocw.unizar.es/ciencias-experimentales/matematicas-primer-curso-grado-ciencia-tecnologia-alimentos/bloques/bloque6/ejercicios/tema1_resumen_descriptiva.pdf) (última fecha de consulta: 11/6/2012).
- [6]. Godino, J.D. (2012). *Matemáticas para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/local/jgodino/fprofesores.htm/> (última fecha de consulta: 11/6/2012).
- [7]. <http://www.eumed.net/cursecon/libreria/drm/1a.htm> (última fecha de consulta: 11/6/2012)
- [8]. <http://www.gestiopolis.com/recursos/experto/catsexp/pagans/eco/21/estadistica.htm> (última fecha de consulta: 11/6/2012)
- [9]. *Matemáticas de 3º ESO*. Editorial Santillana. ISBN 978-84-0949-9
- [10]. Mateu, J. Universitat Jaume I. *Apuntes del curso de Estadística. Tema 1* [www3.uji.es/~mateu/Tema1-D37.doc](http://www3.uji.es/~mateu/Tema1-D37.doc) (última fecha de consulta: 11/6/2012).
- [11]. Moore, D.S. (1995). *The basic practice of statistics*. New York: Freeman.

