

ANEXOS

ANEXO 1: Tablas facilitadas al alumnado

Las siguientes tablas serán rellenas por parte de los grupos de estudiantes que se realizarán en el aula, tal y como se comenta en el presente trabajo.

Tabla de Género (rellénala con “V” para varón o con “H” para hembra).

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

Tabla de altura (rellénala con la altura en centímetros, con un decimal: 145,3; 173,0...).

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

Tabla de color de pelo (rellénala con “Negro”, “Moreno”, “Rubio”, “Pelirrojo”, “Otro”).

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

Tabla de color de ojos (rellénala con “Negro”, “Marrón”, “Azul”, “Verde”, “Otro”).

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

Tabla de longitud codo-muñeca (rellénala en centímetros, con un decimal: 30,7; 25,1...)

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

Tabla de número de hermanos y hermanas (rellénala incluyéndote a ti)

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

Tabla de asistir al instituto (rellénala con “En bus”, “En coche”, “Andando”, “En bici”, “En tranvía”, “Otra forma”).

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

Tabla de lectura: ¿Cuántos libros lees al mes? (rellénala con 0, 1, 2, 3, 4 o más).

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

Tabla de peso (el docente la rellenará en kg, con un decimal: 53,4; 66,9...).

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

Tabla de talla de calzado (Rellénala con “36”, “37”, “38”, “39”, “40”, “41”, “42”, “43”).

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

Tabla de horas frente al ordenador (rellénala con “De 0 a 1 hora”, “De 1 a 2 horas”, “De 2 a 3 horas”, “3 a 4 horas”).

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

Tabla de horas viendo la televisión (rellénala con “De 0 a 1 hora”, “De 1 a 2 horas”, “De 2 a 3 horas”, “De 3 a 4 horas”).

1		7		13		19	
2		8		14		20	
3		9		15		21	
4		10		16		22	
5		11		17		23	
6		12		18		24	

ANEXO 2: Tablas completadas por el alumnado

Las siguientes tablas que se presentan aparecen rellenas, simulando los datos que el alumnado haya ido recogiendo. De esta forma, se podrá usar a lo largo del tratamiento del objeto matemático. A los estudiantes se les facilitaría las tablas y no los gráficos que siguen. Éstos se presentan aquí para completar los datos expuestos:

Tabla de Género (rellénala con “V” para varón o con “H” para hembra).

1	V	7	H	13	V	19	V
2	H	8	H	14	V	20	H
3	H	9	H	15	H	21	H
4	V	10	V	16	H	22	H
5	V	11	V	17	H	23	V
6	H	12	H	18	H	24	H

Resumen de resultados: 9 varones y 15 hembras

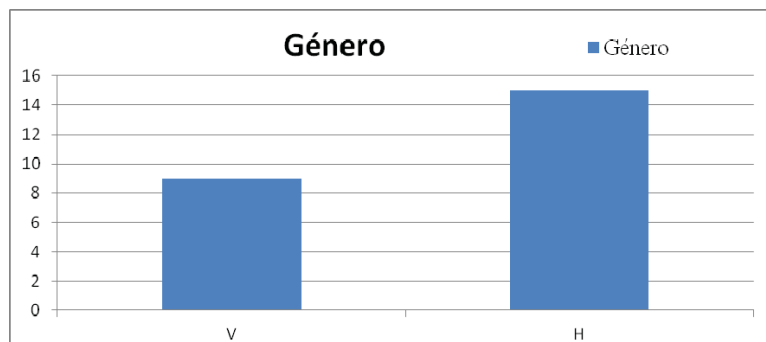
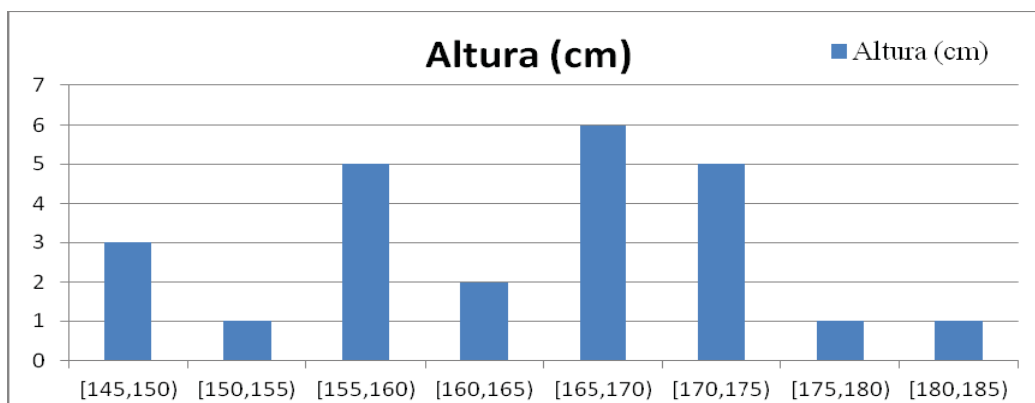


Tabla de altura (rellénala con la altura en centímetros, con un decimal: 145,3; 173,0...).

1	155,4	7	167,2	13	154,2	19	149,3
2	173,2	8	168,4	14	147,9	20	181,7
3	159,2	9	158,3	15	168,5	21	173,0
4	148,7	10	174,3	16	172,4	22	156,3
5	159,8	11	169,2	17	168,1	23	166,4
6	163,5	12	178,4	18	171,0	24	162,9

Resumen de resultados. Agrupando los resultados en intervalos de 5cm:



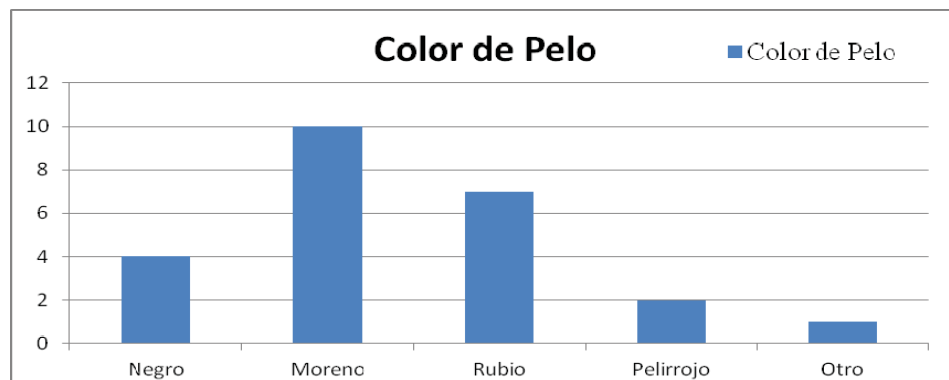
[145,150)	3
[150,155)	1
[155,160)	5
[160,165)	2
[165,170)	6
[170,175)	5
[175,180)	1
[180,185)	1

24

Tabla de color de pelo (rellénala con “Negro”, “Moreno”, “Rubio”, “Pelirrojo”, “Otro”).

1	Negro	7	Pelirrojo	13	Pelirrojo	19	Moreno
2	Moreno	8	Moreno	14	Otro	20	Rubio
3	Moreno	9	Negro	15	Negro	21	Moreno
4	Rubio	10	Rubio	16	Moreno	22	Negro
5	Moreno	11	Moreno	17	Moreno	23	Moreno
6	Rubio	12	Rubio	18	Rubio	24	Rubio

Resumen de resultados:



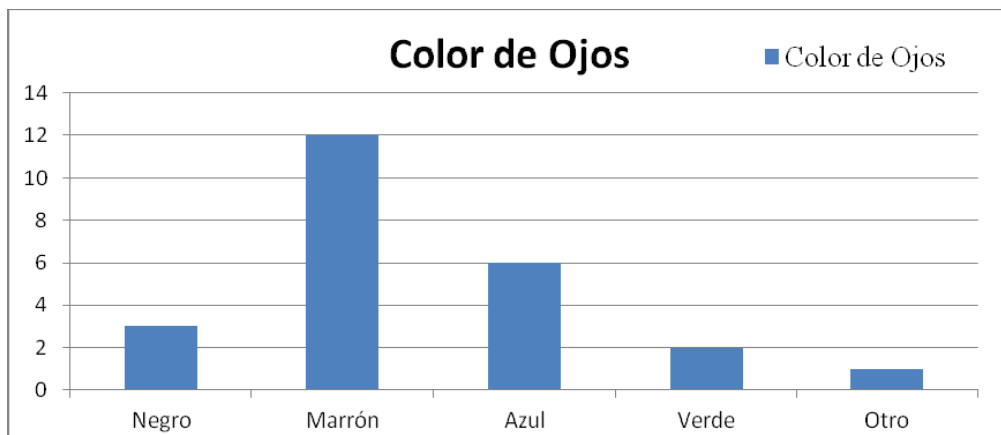
Negro	4
Moreno	10
Rubio	7
Pelirrojo	2
Otro	1

24

Tabla de color de ojos (rellénala con “Negro”, “Marrón”, “Azul”, “Verde”, “Otro”).

1	Negro	7	Verde	13	Verde	19	Azul
2	Marrón	8	Marrón	14	Marrón	20	Azul
3	Azul	9	Marrón	15	Azul	21	Marrón
4	Marrón	10	Negro	16	Marrón	22	Negro
5	Marrón	11	Marrón	17	Otro	23	Marrón
6	Azul	12	Azul	18	Marrón	24	Marrón

Resumen de resultados:



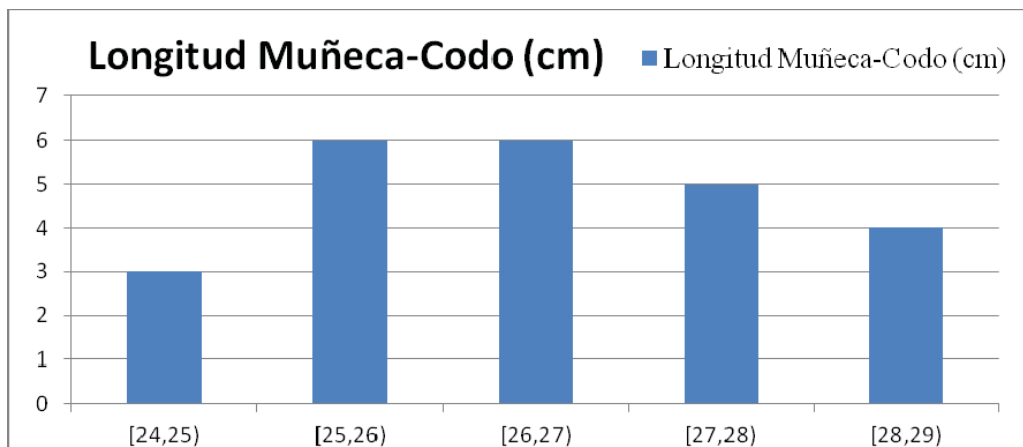
Negro	3
Marrón	12
Azul	6
Verde	2
Otro	1

24

Tabla de longitud codo-muñeca (rellénala en centímetros, con un decimal: 30,7; 25,1...)

1	24,9	7	25,6	13	27,1	19	24,7
2	25,0	8	28,5	14	27,9	20	25,3
3	26,4	9	27,4	15	26,8	21	26,0
4	26,3	10	26,2	16	28,3	22	25,6
5	27,2	11	26,6	17	28,9	23	27,2
6	24,8	12	25,4	18	25,3	24	28,1

Resumen de resultados:



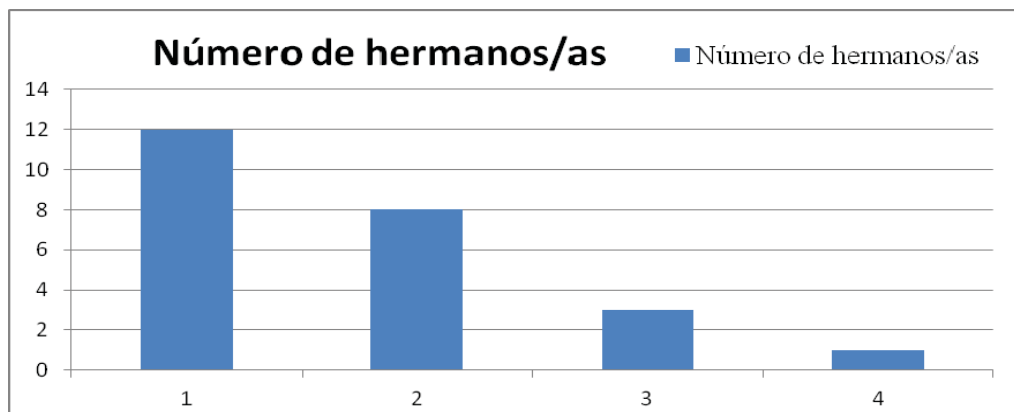
[24,25)	3
[25,26)	6
[26,27)	6
[27,28)	5
[28,29)	4

24

Tabla de número de hermanos y hermanas (rellénala incluyéndote a ti)

1	1	7	1	13	2	19	1
2	3	8	1	14	2	20	2
3	2	9	2	15	1	21	1
4	1	10	1	16	3	22	1
5	2	11	2	17	2	23	4
6	3	12	1	18	1	24	1

Resumen de resultados:



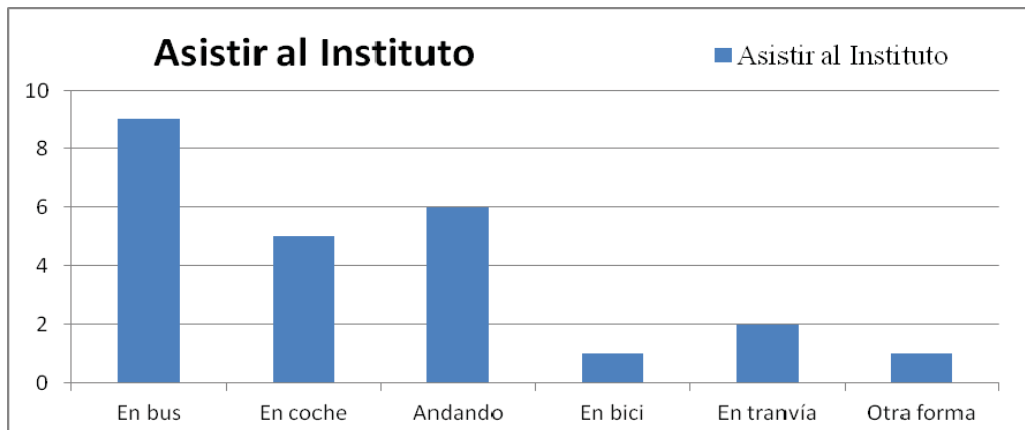
1	12
2	8
3	3
4	1

24

Tabla de asistir al instituto (rellénala con “En bus”, “En coche”, “Andando”, “En bici”, “En tranvía”, “Otra forma”).

1	En bus	7	En tranvía	13	En bus	19	Otra forma
2	En bus	8	En bus	14	En tranvía	20	En bus
3	En coche	9	En bus	15	En coche	21	En coche
4	Andando	10	En coche	16	En bus	22	Andando
5	En bus	11	Andando	17	En coche	23	Andando
6	En bici	12	Andando	18	Andando	24	En bus

Resumen de resultados:



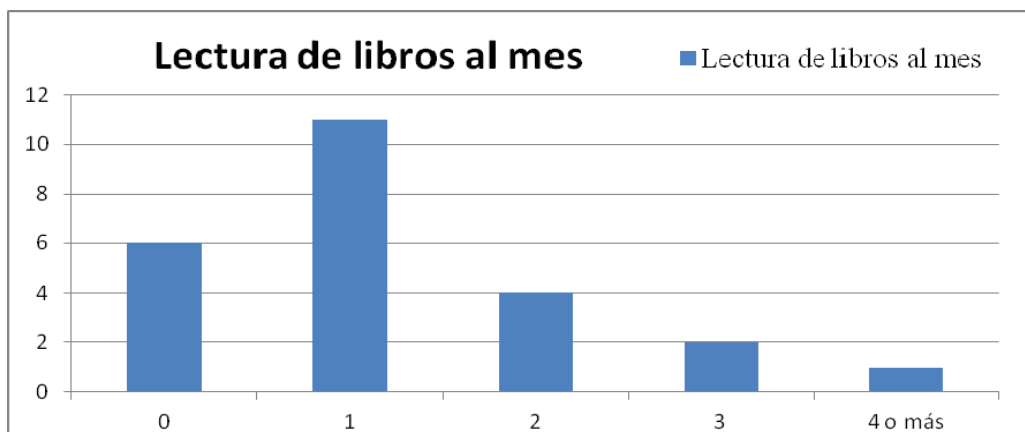
En bus	9
En coche	5
Andando	6
En bici	1
En tranvía	2
Otra forma	1

24

Tabla de lectura: ¿Cuántos libros lees al mes? (rellénala con 0, 1, 2, 3, 4 o más).

1	0	7	0	13	0	19	1
2	1	8	1	14	1	20	1
3	1	9	0	15	2	21	2
4	0	10	1	16	1	22	3
5	1	11	2	17	1	23	0
6	2	12	3	18	4 o más	24	1

Resumen de resultados:



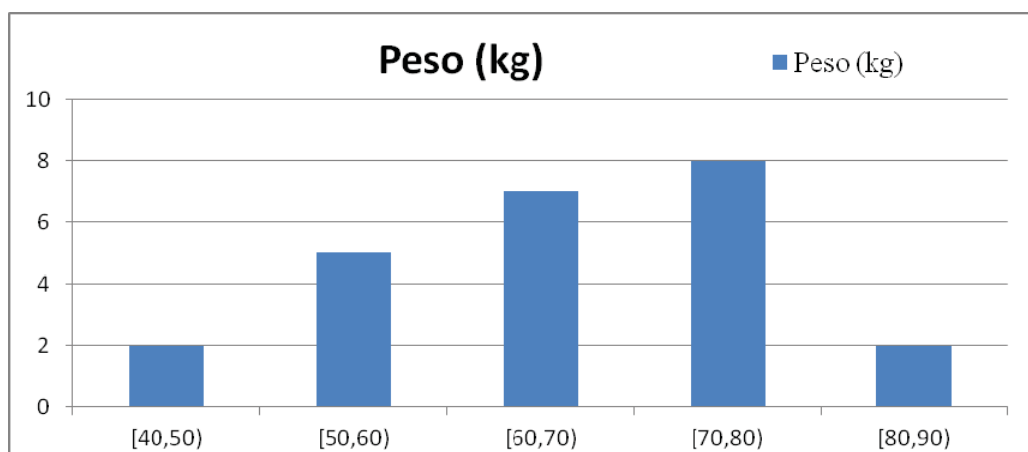
0	6
1	11
2	4
3	2
4 o más	1

24

Tabla de peso (el docente la rellenará en kg, con un decimal: 53,4; 66,9...).

1	49,9	7	48,7	13	52,4	19	54,9
2	57,0	8	69,7	14	81,3	20	68,3
3	59,6	9	74,3	15	63,6	21	74,0
4	66,7	10	72,8	16	77,0	22	79,3
5	64,6	11	61,8	17	69,4	23	77,9
6	72,2	12	79,8	18	83,2	24	53,8

Resumen de resultados:



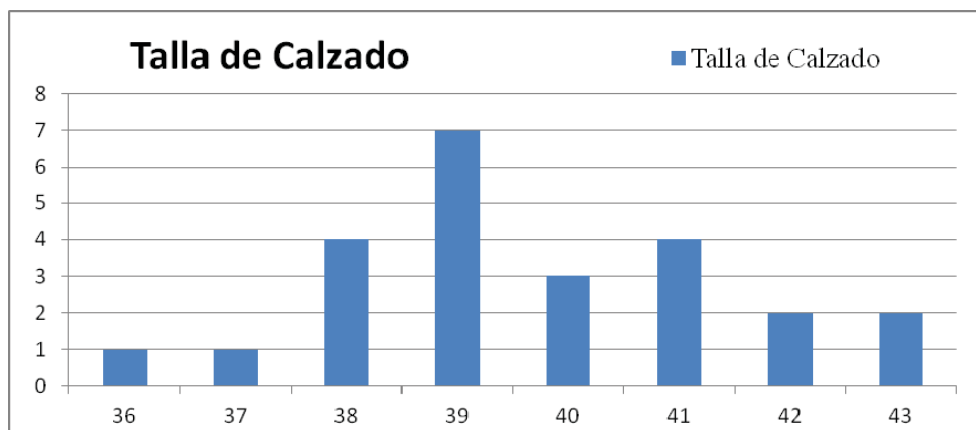
[40,50)	2
[50,60)	5
[60,70)	7
[70,80)	8
[80,90)	2

24

Tabla de talla de calzado (Rellénala con “36”, “37”, “38”, “39”, “40”, “41”, “42”, “43”).

1	39	7	38	13	40	19	43
2	38	8	36	14	39	20	39
3	41	9	37	15	41	21	41
4	43	10	39	16	38	22	38
5	41	11	40	17	42	23	40
6	42	12	39	18	39	24	39

Resumen de resultados:



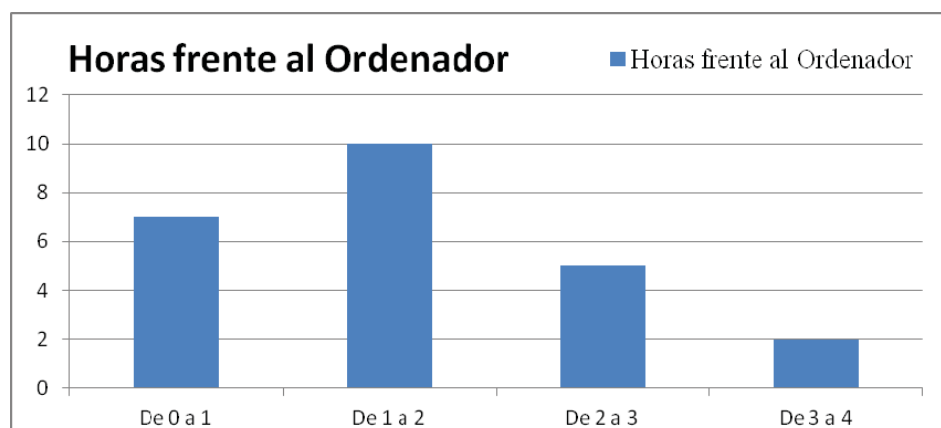
36	1
37	1
38	4
39	7
40	3
41	4
42	2
43	2

24

Tabla de horas frente al ordenador (rellénala con “De 0 a 1 hora”, “De 1 a 2 horas”, “De 2 a 3 horas”, “3 a 4 horas”).

1	De 0 a 1	7	De 1 a 2	13	De 1 a 2	19	De 1 a 2
2	De 2 a 3	8	De 0 a 1	14	De 2 a 3	20	De 0 a 1
3	De 1 a 2	9	De 2 a 3	15	De 0 a 1	21	De 2 a 3
4	De 3 a 4	10	De 1 a 2	16	De 2 a 3	22	De 3 a 4
5	De 0 a 1	11	De 0 a 1	17	De 1 a 2	23	De 1 a 2
6	De 0 a 1	12	De 1 a 2	18	De 1 a 2	24	De 1 a 2

Resumen de resultados:



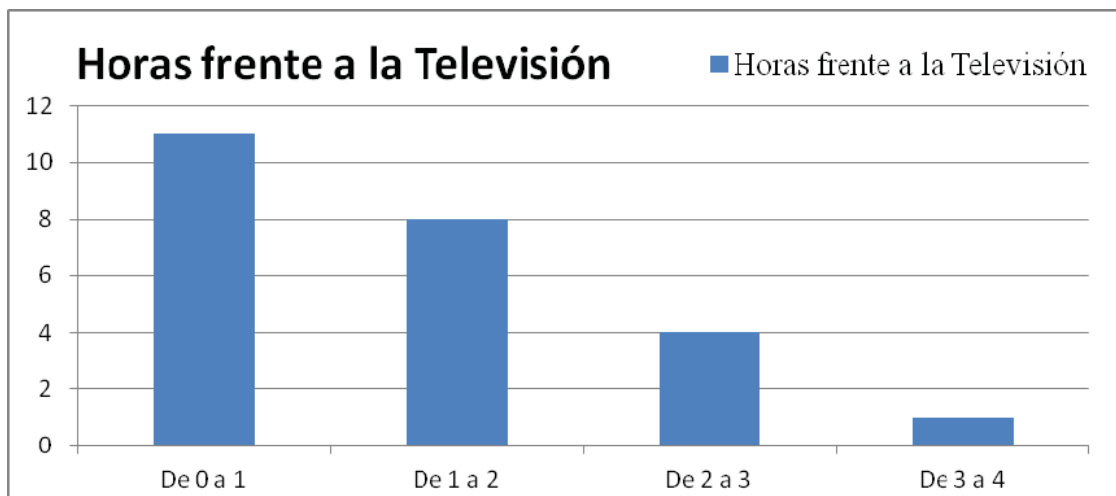
De 0 a 1	7
De 1 a 2	10
De 2 a 3	5
De 3 a 4	2

24

Tabla de horas viendo la televisión (rellénala con “De 0 a 1 hora”, “De 1 a 2 horas”, “De 2 a 3 horas”, “De 3 a 4 horas”).

1	De 0 a 1	7	De 1 a 2	13	De 0 a 1	19	De 0 a 1
2	De 2 a 3	8	De 0 a 1	14	De 2 a 3	20	De 0 a 1
3	De 1 a 2	9	De 2 a 3	15	De 0 a 1	21	De 2 a 3
4	De 3 a 4	10	De 0 a 1	16	De 0 a 1	22	De 1 a 2
5	De 0 a 1	11	De 0 a 1	17	De 1 a 2	23	De 1 a 2
6	De 0 a 1	12	De 1 a 2	18	De 1 a 2	24	De 1 a 2

Resumen de resultados:



De 0 a 1	11
De 1 a 2	8
De 2 a 3	4
De 3 a 4	1

24

ANEXO 3: Libro de texto de referencia

Mostramos en las siguientes páginas el libro de texto que hemos empleado, tanto en el Prácticum del Máster de Profesorado como en este Trabajo Fin de Máster, como una importante referencia para tratar el objeto matemático que hemos estudiado.

13

Estadística

¡Dios salve a la Reina!

Sidney Herbert, que ocupaba el cargo de Secretario de Estado para la Guerra, había tomado la decisión más arriesgada de su carrera política al encargar a su amiga Florence Nightingale la organización del cuerpo de enfermeras de campaña con objeto de mejorar los hospitales en la guerra de Crimea. Era el año 1854 y su futuro político estaba en manos de aquella dama.

Cuando se preparaba para ir a la zona de conflicto, el país entero se estremeció por la aniquilación de la Brigada Ligera, tras una carga suicida contra las baterías rusas. Esta acción fue difundida, no como un desastre, sino como prueba del valor y el honor de los ingleses.

Nightingale comenzó a aplicar medidas higiénicas, y fue recopilando datos y organizándolos mediante gráficos para facilitar su lectura.

El informe, que fue enviado al Secretario de la Guerra, y solicitaba ayuda para eliminar las trabas que estaba encontrando entre los mandos del ejército, concluía con una nota manuscrita que rezaba:

"En Enero, de las 3.168 bajas, 2.761 se debieron a enfermedades contagiosas, 83 fueron por heridas de guerra y 324 por otras causas... Nuestros hospitales causan más muertos que los cañones del enemigo.

Señor, no permitáis que el honor de Inglaterra sea enterrado en una sala de hospital."

¡Dios salve a la Reina!

Representa los datos de la nota con un gráfico adecuado.

PLAN DE TRABAJO

En esta unidad aprenderás a...

- Distinguir los tipos de variables estadísticas.
- Obtener la tabla estadística asociada a un conjunto de datos.
- Representar e interpretar gráficos estadísticos.
- Calcular las medidas de centralización, posición y dispersión de un conjunto de datos.
- Aplicar las técnicas estadísticas a problemas de la vida cotidiana.



1 Conceptos básicos

La **Estadística** es la ciencia que se encarga de recopilar y ordenar datos referidos a diversos fenómenos para su posterior análisis e interpretación.

1.1 Población y muestra

- **Población.** Todos los elementos que son objeto de estudio.
- **Muestra.** Parte de la población que estudiamos.
- **Individuo.** Cada elemento de la población o la muestra.
- **Tamaño.** Número de elementos que tiene la población o la muestra.



Si la muestra no se escoge bien, las conclusiones del estudio pueden ser erróneas.



EJEMPLO

- Se quiere realizar una encuesta entre los alumnos de 3.º ESO de una ciudad, en total, 6.578 alumnos. Como no se puede hacer la encuesta a todos, se elige a los alumnos de 3.º ESO del IES «Cervantes», que son 63 en total.

Población Todos los alumnos de 3.º ESO de la ciudad.

Muestra Los alumnos de 3.º ESO del IES «Cervantes».

Individuo Cada alumno de 3.º ESO de la ciudad es un individuo de la población. Cada alumno de 3.º ESO del instituto es un individuo de la muestra.

Tamaño El tamaño de la población es 6.578 alumnos. El tamaño de la muestra es 63 alumnos.

EJERCICIOS

PRACTICA

- Queremos realizar un estudio estadístico de la talla de calzado que usan los alumnos de 3.º ESO de un instituto.

- ¿Cuál sería la población?
- Elige una muestra. ¿Qué tamaño tiene?

APLICA

- Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra.

- La longitud de los tornillos que, ininterrumpidamente, produce una máquina.
- La estatura de todos los turistas en un año.
- El peso de un grupo de cinco amigos.

- Este es el titular de un periódico.

«EL PESO MEDIO DE LOS ESPAÑOLES ES 69 KG.»

- ¿Cómo crees que se llega a esta conclusión? ¿Se habrá estudiado a toda la población?
- ¿Qué características debe tener la muestra? ¿Podrían ser todos los individuos de la muestra de la misma edad? Si todos son mujeres, ¿sería correcta la muestra?

REFLEXIONA

- Piensa y escribe un ejemplo de población para hacer un estudio estadístico. ¿Qué muestra podríamos tomar? Indica quiénes son los individuos y cuál es el tamaño de la muestra.

1.2 Variables estadísticas

Una **variable estadística** es cada una de las propiedades o características que podemos estudiar de un conjunto de datos.

Las variables estadísticas, dependiendo de los posibles valores que puedan tomar, se clasifican según el siguiente cuadro.

Tipos	Propiedades		Ejemplos
Cualitativas	Los valores de la variable no son números, sino cualidades.		– Sexo { <i>mujer, varón</i> }. – Color de pelo { <i>moreno, castaño...</i> }.
Cuantitativas	Los valores que toma la variable son números.		– Peso. – Número de hermanos.
	Discretas	En cada tramo, la variable solo puede tomar un número finito de valores.	– Número de amigos: <i>entre 2 y 5 solo puedo tener 3 o 4 amigos, pero no 3,5 o 3,6.</i>
	Continuas	La variable puede tomar tantos valores como queramos, por pequeño que sea el tramo.	– Altura: <i>entre 1,70 y 1,80 m de altura tenemos 1,71 m; 1,715 m; 1,767 m...</i>

Los valores de una variable estadística se designan:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

Los subíndices: 1, 2, 3... establecen el orden de recogida de los datos.

EJEMPLO

- 2** Pon varios ejemplos de variables cualitativas y cuantitativas discretas y continuas.

Variables cualitativas: mes de nacimiento, calle en la que se vive...

Variables cuantitativas discretas: número de hijos, número de canastas triples en un partido de baloncesto, talla de pantalón...

Variables cuantitativas continuas: peso, tiempo empleado en realizar un trabajo, volumen...

EJERCICIOS

PRACTICA

- 5** Determina si las variables estadísticas son cualitativas o cuantitativas.

- Año de nacimiento.
- Color del pelo.
- Profesión de una persona.
- Perímetro torácico.
- Estado civil.
- Perímetro de la cintura.
- Número de veces que se ha viajado en avión.

APLICA

- 6** Clasifica estas variables en cualitativas o cuantitativas, y en ese caso, di si son discretas o continuas.

- Provincia de residencia.
- Número de vecinos de un edificio.
- Profesión del padre.
- Consumo de gasolina por cada 100 km.

REFLEXIONA

- 7** Si una variable estadística cuantitativa puede tomar infinitos valores, ¿es discreta o continua?



2 Frecuencias y tablas

2.1 Recuento de datos

Después de recopilar los datos, se procede a su recuento para expresarlos de manera ordenada, generalmente en forma de tablas.

Si la variable es continua, los datos se agrupan en **intervalos** o **clases**, usualmente de la misma amplitud y, como mínimo, 4 intervalos. A todos los datos de un intervalo se les da el mismo valor, que se llama **marca de clase** y es el punto medio del intervalo.

EJEMPLOS

- 3 Construye una tabla de valores con los libros leídos por 24 alumnos durante el último año.

1 3 4 2 2 3
2 2 1 3 3 1
1 2 4 4 2 3
3 2 3 3 3 4

N.º de libros	Recuento
1	4
2	7
3	9
4	4

- 4 Construye la tabla de frecuencias del peso (en kg) de 20 alumnos.

66,5 59,2 60,1 64,2 70 50 41,6 47,9 42,8 55
52,2 50,3 42,2 61,9 52,4 49,2 41,6 38,7 36,5 45

La variable es continua. Como el peso menor es 36,5 kg y el mayor 70 kg: $70 - 36,5 = 33,5$. Podemos tomar 6 intervalos de amplitud 6.

Intervalo	Marca de clase	Recuento
[36, 42)	39	4
[42, 48)	45	4
[48, 54)	51	5
[54, 60)	57	2
[60, 66)	63	3
[66, 72)	69	2

Las **marcas de clase** son los puntos medios de cada intervalo. Para el intervalo [36, 42) kg, la marca de clase es:

$$\frac{36 + 42}{2} = \frac{78}{2} = 39$$



EJERCICIOS

PRACTICA

- 8 Las estaturas (en cm) de 28 jóvenes son:

155 178 170 165 173 168 160
166 176 169 158 170 179 161
164 156 170 171 167 151 163
158 164 174 176 164 154 157

Forma una tabla con intervalos, efectúa el recuento de datos y obtén las marcas de clase de cada intervalo.

APLICA

- 9 El color de pelo (M = moreno, R = rubio, P = pelirrojo) de 30 personas es:

MRPMM MMRRP PMMMM
MMPRR RPMMM MRMMM

Construye su tabla de frecuencias.

REFLEXIONA

- 10 ¿Por qué los intervalos en las tablas son cerrados por un lado y abiertos por el otro?

2.2 Frecuencia absoluta y relativa

La **frecuencia absoluta** de un dato, x_i , es el número de veces que aparece. Se representa por f_i . La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, N .

La **frecuencia relativa** de un dato es el cociente entre su frecuencia absoluta, f_i , y el número total de datos, N . Se representa por h_i .

$$h_i = \frac{f_i}{N} \quad \text{La suma de las frecuencias relativas es igual a la unidad.}$$

EJEMPLO

5 La talla de calzado de los 20 alumnos de una clase es:

43, 42, 41, 39, 41, 37, 40, 43, 44, 40 39, 39, 38, 41, 40, 39, 38, 39, 39, 40

Construye su tabla de frecuencias.

Contamos el número de veces que aparece cada valor, f_i . Dividiéndolo entre $N = 20$, obtenemos h_i . Si multiplicamos la frecuencia relativa por 100, se calcula la columna de **porcentajes (%)**.

Valores x_i	F. absolutas f_i	F. relativas $h_i = \frac{f_i}{N}$	Porcentajes %
37	1	$1/20 = 0,05$	5 %
38	2	$2/20 = 0,10$	10 %
39	6	$6/20 = 0,30$	30 %
40	4	$4/20 = 0,20$	20 %
41	3	$3/20 = 0,15$	15 %
42	1	$1/20 = 0,05$	5 %
43	2	$2/20 = 0,10$	10 %
44	1	$1/20 = 0,05$	5 %
Suma	20	1	100 %

La suma de todas las frecuencias absolutas es igual al número total de datos.

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$$



EJERCICIOS

PRACTICA

11 El número de horas diarias que trabajan con el ordenador 30 personas es:

3 4 0 5 5
3 4 5 0 2
2 5 3 2 0
1 2 2 1 2
0 3 1 2 1
1 2 1 4 3

- ¿De qué tipo es la variable estadística?
- Construye la tabla de frecuencias.

APLICA

12 Los resultados de un test de inteligencia realizado a 20 personas han sido:

100 80 92 101 65 72 121 68 75 93
101 100 102 97 89 73 121 114 113 94

Obtén la tabla de frecuencias, tomando intervalos de amplitud 10.

REFLEXIONA

13 ¿Qué ocurre si la suma de las frecuencias absolutas no es igual al número total de datos?

2.3 Frecuencias acumuladas

La **frecuencia absoluta acumulada** de un dato x_i es la suma de las frecuencias absolutas de los valores que son menores o iguales que él. Se representa por F_i .

$$F_i = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i$$

La **frecuencia relativa acumulada** de un dato x_i es la suma de las frecuencias relativas de los valores menores o iguales que él. Se representa por H_i . Equivale al cociente entre la frecuencia absoluta acumulada del dato y el número total de ellos.

$$H_i = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_i = \frac{f_1}{N} + \frac{f_2}{N} + \frac{f_3}{N} + \dots + \frac{f_i}{N} = \frac{F_i}{N}$$

Solo podemos calcular frecuencias acumuladas en variables cuantitativas, ya que es necesario que los datos puedan ordenarse de menor a mayor.



EJEMPLO

- 6 Obtén la tabla de las frecuencias acumuladas de los pesos (en kg) de 20 alumnos.

36,5 59,2 39,1
46,2 46 38
41,6 47,9 42,8
55 52,2 50,3
42,2 55,9 52,4
49,2 36,6 38,7
36,5 45

Intervalo	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[35, 40)	37,5	6	6	0,3	0,3
[40, 45)	42,5	3	9	0,15	0,45
[45, 50)	47,5	5	14	0,25	0,70
[50, 55)	52,5	3	17	0,15	0,85
[55, 60)	57,5	3	20	0,15	1
		20		1	

La última frecuencia absoluta acumulada coincide con el número total de datos.

La última frecuencia relativa acumulada es siempre 1.

Las frecuencias absoluta y relativa acumuladas del intervalo [45, 50) son 14 y 0,70, respectivamente. Esto significa que 14 alumnos, o el 70% de los alumnos, pesan menos de 50 kg.

EJERCICIOS

PRACTICA

- 14 Los pesos (en kg) de 24 personas son:

68,5 34,2 47,5 39,2 47,3 79,2
46,5 58,3 62,5 58,7 80 63,4
58,6 50,2 60,5 70,8 30,5 42,7
59,4 39,3 48,6 56,8 72 60

- Agrúpalos en intervalos de amplitud 10 y obtén la tabla de frecuencias.
- ¿Cuántas personas pesan menos de 50 kg?
- Calcula el tanto por ciento sobre el total que representa el intervalo de mayor frecuencia absoluta.

APLICA

- 15 El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:

3 4 3 5 5 1 1 1 1 2 3 4 5 0 2
0 3 2 2 1 2 1 3 2 0 1 2 1 4 3

Obtén la tabla de frecuencias. ¿Qué significan las frecuencias acumuladas?

REFLEXIONA

- 16 Explica cómo completarías una tabla de frecuencias en la que conoces solo las frecuencias absolutas acumuladas.

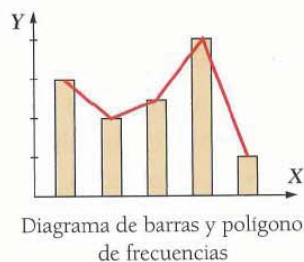
3 Gráficos estadísticos

Los datos estadísticos se suelen expresar de forma gráfica ya que, en un golpe de vista, nos podemos hacer una idea de su distribución. En función del tipo de variable usaremos un tipo de gráfico u otro.

3.1 Diagrama de barras

Se usa para representar variables cualitativas o cuantitativas discretas.

- En el eje de abscisas representamos los datos, y en el eje de ordenadas las frecuencias.
- Sobre cada dato se levantan barras verticales cuya altura es la frecuencia que estamos representando.
- Si trazamos una línea poligonal que una los extremos de las barras obtenemos el **polígono de frecuencias**.



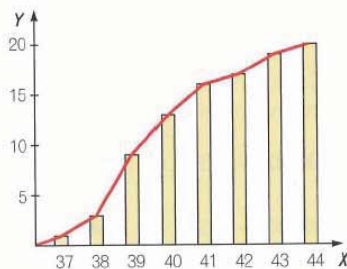
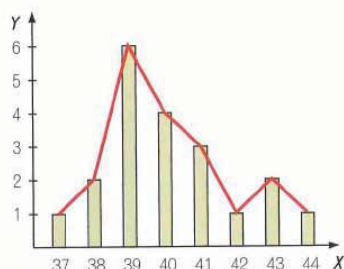
No hay polígono de frecuencias de variables cualitativas.



EJEMPLO

- 7 Representa, en un diagrama de barras, las tallas de calzado de 20 personas que se muestran en esta tabla.

Talla x_i	37	38	39	40	41	42	43	44
f_i	1	2	6	4	3	1	2	1
F_i	1	3	9	13	16	17	19	20



EJERCICIOS

PRACTICA

- 17 En un edificio de 16 vecinos, el número de televisores por vivienda es:

0 1 1 2 1 3 2 1 1 1 2 2 3 0 3 2

- Construye la tabla de frecuencias. ¿Qué tipo de variable es? Razona tu respuesta.
- Realiza el diagrama de barras y el polígono de frecuencias de los datos.
- Haz lo mismo con las frecuencias acumuladas.

APLICA

- 18 En un aparcamiento público hay 25 coches rojos, 19 amarillos, 39 plateados, 50 blancos, 27 verdes, 30 azules y 10 negros.

- Construye la tabla de frecuencias.
- ¿Puedes hallar las frecuencias acumuladas?
- Realiza el diagrama de barras.

REFLEXIONA

- 19 Haz los gráficos del ejercicio anterior con las frecuencias relativas. ¿Qué observas?

3.2 Histograma

Se usa para representar variables cuando los datos se agrupan en intervalos.

- En el eje de abscisas representamos los datos, y en el eje de ordenadas, las frecuencias.
- Se divide el eje de abscisas en intervalos y se levanta un rectángulo, sobre cada uno, de altura igual a su frecuencia.
- El **polígono de frecuencias** se obtiene uniendo los puntos medios de los extremos superiores de los rectángulos, o los vértices superiores de la derecha, en el caso de frecuencias acumuladas.

3.3 Diagrama de sectores

Sirve para representar cualquier tipo de variable.

- Es un círculo dividido en sectores, uno para cada dato o intervalo.
- La amplitud de cada sector circular es proporcional a la frecuencia, y se calcula multiplicando 360° por la frecuencia relativa.

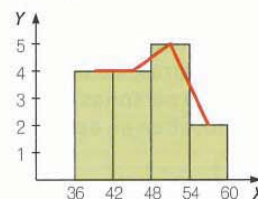
No se puede realizar un diagrama de sectores con frecuencias acumuladas.



EJEMPLO

8 Representa con un histograma y un diagrama de sectores estos datos.

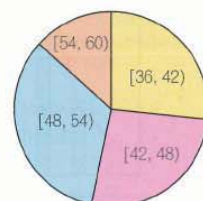
Intervalo	f_i	F_i
[36, 42)	4	4
[42, 48)	4	8
[48, 54)	5	13
[54, 60)	2	15



Calculamos los ángulos correspondientes a cada intervalo del diagrama de sectores.

$$[36, 42) \rightarrow 360^\circ \cdot \frac{4}{15} = 96^\circ \quad [48, 54) \rightarrow 360^\circ \cdot \frac{5}{15} = 120^\circ$$

$$[42, 48) \rightarrow 360^\circ \cdot \frac{4}{15} = 96^\circ \quad [54, 60) \rightarrow 360^\circ \cdot \frac{2}{15} = 48^\circ$$



EJERCICIOS

PRACTICA

20 La longitud (en cm) de 18 grillos es:

1,8 1,9 2 2,4 2,6 2,8
1,7 1,9 2,3 1,6 2,1 3
2,3 2,7 2,9 1,5 1,8 2,6

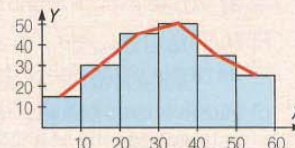
- Construye la tabla de frecuencias tomando intervalos.
- Representa los datos mediante un histograma y un polígono de frecuencias.
- Realiza un diagrama de sectores.
¿Qué gráfico te parece más adecuado?

APLICA

21 Representa estos datos: en una clase de 50 alumnos, 12 de ellos han suspendido, 30 han sacado Suficiente, un 12% ha obtenido Notable y el resto Sobresaliente.

REFLEXIONA

22 Haz la tabla de frecuencias que corresponde a este gráfico.



4 Medidas de centralización

Las medidas de centralización resumen la información de la muestra.

- **Media aritmética, \bar{x} :** es el cociente de la suma de todos los valores multiplicados por su frecuencia, entre la suma de todas las frecuencias.

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \dots + f_n \cdot x_n}{N}$$

Si la variable es continua, x_i es la marca de clase del intervalo.

- **Moda, Mo :** es el valor de la variable, o la marca de clase para datos en intervalos, que tiene mayor frecuencia.
- **Mediana, Me :** es el valor que ocupa la posición central de los datos después de ordenarlos, o la media de los dos valores centrales en el caso de que el número de datos sea par.

Si la variable es continua, en el caso de la moda hablaremos de **intervalo modal**, y en el caso de la mediana, de **intervalo mediano**. En ambos casos tomaremos como valor su marca de clase.

EJEMPLO

- 9 Esta tabla resume los resultados obtenidos en una encuesta realizada entre 10 parejas a las que se les preguntaba sobre el número de hijos que tenían. Calcula sus medidas de centralización e interprétalas.

N.º de hijos	Frecuencia absoluta f_i
0	2
1	4
2	3
3	1
Total	10

Media

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{10} = 1,3 \text{ hijos}$$

Moda $\rightarrow Mo = 1$ hijo

Para calcular la mediana, primero ordenamos los datos:

$$0 \ 0 \ 1 \ 1 \ \boxed{1} \ \boxed{1} \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \rightarrow Me = \frac{1+1}{2} = 1 \text{ hijo}$$

INTERPRETACIÓN

- La media es 1,3. Es decir, por término medio tienen entre 1 y 2 hijos.
- La moda señala que lo más frecuente es tener 1 hijo.
- La mediana indica que hay tantas parejas que tienen 1 o más hijos como parejas que tienen 1 hijo o menos.



EJERCICIOS

PRACTICA

- 23 Las estaturas (en cm) de 24 alumnos de 3.º ESO son:

158 160 168 156 166 158 160 168
168 158 156 164 162 166 164 168
162 158 156 166 160 168 160 160

- a) Agrúpalas en intervalos.
b) Calcula la media, mediana y moda.

APLICA

- 24 Interpreta las medidas de centralización del número de suspensos de 15 alumnos.

4 1 0 4 1 4 1 2 3 0 2 4 0 3 1

REFLEXIONA

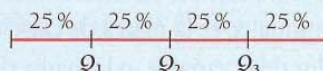
- 25 Añade un valor que no haga variar la mediana.

18 8 7 9 12 15 21 12

5 Medidas de posición

Una **medida de posición** es un valor de la variable que informa del lugar que ocupa un dato dentro del conjunto ordenado de valores.

Los **cuartiles**, Q_1 , Q_2 y Q_3 (primero, segundo y tercer cuartil, respectivamente), son medidas que separan los datos en 4 partes iguales, es decir, en cada tramo está el 25 % de los datos recogidos en el estudio.



EJEMPLO

- 10 Para comprar zapatillas a los miembros de una peña de bolos, se les ha preguntado por la talla de calzado que usan y los resultados se presentan en esta tabla. Calcula los cuartiles.

Talla de calzado	f_i	F_i
35	7	7
36	13	20
37	20	40
38	37	77
39	42	119
40	50	169
41	23	192
42	8	200
Total	$\Sigma f_i = 200$	

Para calcular el primer cuartil, Q_1 , tendremos que calcular el 25 % del número total de datos, 200:

$$200 \cdot 0,25 = 50$$

Luego Q_1 tiene 50 datos por debajo y el resto por encima. En la columna de frecuencias acumuladas, el primer número mayor o igual que 50 es 77, que corresponde al dato 38:

$$Q_1 = 38$$

Es decir, la cuarta parte de los miembros de la peña utilizan una talla de calzado menor o igual que 38.

El segundo cuartil, Q_2 , tiene el 50 % de los datos por encima y el 50 % por debajo.

Es decir, coincide con la mediana. El primer número mayor o igual que 100 en las frecuencias acumuladas es 119, por tanto:

$$Q_2 = Me = 39$$

Como el 75 % de 200 es 150, repitiendo el proceso: $Q_3 = 40$. Esto indica que el 75 % utiliza una talla de calzado menor o igual que 40.

Para calcular los cuartiles trabajamos con las frecuencias acumuladas. Y si la variable es continua, tomamos como valor la marca de clase.



EJERCICIOS

PRACTICA

- 26 Calcula los cuartiles de este conjunto de datos que expresan los días de baja laboral sufridos por 10 trabajadores.

0 2 3 4 2 1 1 0 0 3

APLICA

- 27 Interpreta los cuartiles que has calculado en el ejercicio anterior.

REFLEXIONA

- 28 Se han convocado unas oposiciones en las que hay 50 plazas y se han presentado 200 personas. Estos son los resultados.

Notas	3	4	5	6	7	8	9	10
Opositores f_i	6	25	34	42	50	27	13	3

¿Con qué nota se consigue una plaza?

6 Medidas de dispersión

Las **medidas de dispersión** permiten conocer el grado de agrupamiento de los datos en torno a las medidas de centralización.

Medida		Cálculo	Definición
Rango o recorrido	R	$R = \text{Máx} - \text{Mín}$	Es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable.
Desviación media	DM	$DM = \frac{\sum f_i \cdot x_i - \bar{x} }{N}$	Es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de cada dato.
Varianza	σ^2	$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}$	Es la media de los cuadrados de las desviaciones.
Desviación típica	σ	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}}$	Es la raíz cuadrada positiva de la varianza.
Coeficiente de variación	CV	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$	Es el cociente de la desviación típica y la media.

EJEMPLO

- 11** Las notas de 5 alumnos de 3.º ESO son 1, 1, 5, 9, 9. Calcula las medidas de dispersión del grupo.

x_i	f_i	$ x_i - \bar{x} $	$(x_i - \bar{x})^2$
1	2	4	16
5	1	0	0
9	2	4	16
Total	5		

$$\sigma^2 = \frac{2 \cdot 16 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 16}{5} = 12,8$$

$$\sigma = \sqrt{12,8} = 3,578$$

$$CV = \frac{3,578}{5} = 0,716$$

En este caso, las medidas de dispersión son bastante grandes; esto indica que, aunque la media aritmética sea 5, este valor no es muy representativo de los datos.

Cuanto más pequeñas son las medidas de dispersión, más concentrados están los datos.



EJERCICIOS

PRACTICA

- 29** Las longitudes (en mm) de una muestra de tornillos son las siguientes.

Intervalo	f_i
[13, 14)	8
[14, 15)	7
[15, 16)	2
[16, 17)	3

Calcula sus medidas de dispersión utilizando las marcas de clase.

APLICA

- 30** Las notas obtenidas por un alumno en cinco exámenes han sido: 3, 8, 5, 7 y 4, y las de otro alumno: 2, 9, 4, 5 y 7. ¿En qué alumno es mayor la dispersión?

REFLEXIONA

- 31** Pregunta a 5 compañeros por su edad y su altura. Compara la dispersión de las dos variables.

Lo esencial

COMPRENDE ESTAS PALABRAS

Estadística

Alumnos del IES → Población
 Alumnos de una clase → Muestra
 Color de ojos → Variable cualitativa
 N.º de hermanos → Variable cuantitativa discreta
 Altura → Variable cuantitativa continua

Tabla de frecuencias

Intervalo	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[35, 40)	37,5	6	6	0,3	0,3
[40, 45)	42,5	3	9	0,15	0,45
[45, 50)	47,5	5	14	0,25	0,70
[50, 55)	52,5	3	17	0,15	0,85
[55, 60)	57,5	3	20	0,15	1
		20		1	

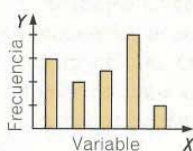
Intervalos o clases

Marca de clase

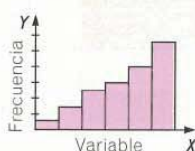
Frecuencias acumuladas

Gráficos estadísticos

Diagrama de barras



Histograma



Polígono de frecuencias

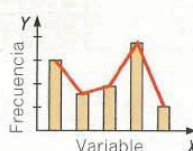


Diagrama de sectores



HAZLO DE ESTA MANERA

1. CONSTRUIR TABLAS DE FRECUENCIAS

Realiza una tabla de frecuencias para los siguientes pesos (en kg) de 20 personas.

80 45 57 66 49 54 58 69 73 81 72 63 43 61 49 57 59 68 49 69

PRIMERO. Ordenamos los datos y efectuamos el recuento. El número de veces que se repiten es su frecuencia absoluta.

Si la variable es cuantitativa los agrupamos en intervalos y calculamos su punto medio (marca de clase).

SEGUNDO. Dividimos cada frecuencia absoluta entre el número total de datos y hallamos las frecuencias relativas, que anotaremos en otra columna.

TERCERO. Si la variable es cuantitativa calculamos las frecuencias acumuladas sumando, para cada intervalo, su frecuencia y las de los intervalos anteriores a él, y anotamos los resultados en dos columnas, una para las frecuencias absolutas acumuladas, y la otra, para las frecuencias relativas acumuladas.

Intervalo	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[40, 50)	45	5	5	0,25	0,25
[50, 60)	55	5	10	0,25	0,5
[60, 70)	65	6	16	0,3	0,8
[70, 80)	75	2	18	0,1	0,9
[80, 90)	85	2	20	0,1	1
		20		1	



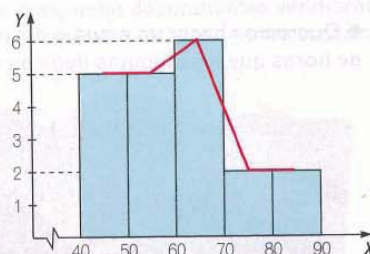
2. DIBUJAR UN HISTOGRAMA Y SU POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Dibuja el histograma y el polígono de frecuencias de esta tabla.

Intervalo	f_i
[40, 50)	5
[50, 60)	5
[60, 70)	6
[70, 80)	2
[80, 90)	2

PRIMERO. Marcamos las frecuencias en el eje vertical, y los intervalos, en el eje horizontal.

SEGUNDO. Dibujamos rectángulos cuya base es la anchura del intervalo, y altura, la frecuencia correspondiente.



TERCERO. Si las frecuencias son absolutas, formamos el polígono de frecuencias uniendo los puntos medios de la parte superior de los rectángulos. Si son acumuladas, unimos los vértices superiores de la derecha de cada rectángulo.

3. CALCULAR LAS MEDIDAS ESTADÍSTICAS

Con los datos de esta tabla, calcula las medidas estadísticas.

Notas	f_i
[0, 5)	5
[5, 10)	10
[10, 15)	25
Total	40

PRIMERO. Operamos con la marca de clase de cada intervalo y completamos la tabla con las columnas que nos facilitan el cálculo de las medidas.

x_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i - \bar{x} $	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
2,5	12,5	37,5	281,25
7,5	75	25	62,5
12,5	312,5	62,5	156,25
400	125	500	

SEGUNDO. Calculamos las medidas estadísticas con los datos que nos proporciona la tabla.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{400}{40} = 10$$

$$Mo = 12,5 \text{ (intervalo [10, 15))}$$

$$Me = 12,5 \text{ (intervalo [10, 15))}$$

$$R = 15 - 0 = 15$$

$$DM = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{125}{40} = 3,125$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{500}{40} = 12,5 \quad \sigma = \sqrt{12,5} = 3,54$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3,54}{10} = 0,354$$

Y AHORA... PRACTICA

Construir tablas de frecuencias

- Si la frecuencia relativa acumulada de un dato es 0,35, esto significa que:
 - Hay 35 datos menores.
 - El 35% de los datos son menores o iguales.
 - Si no conocemos la frecuencia absoluta, no podemos asegurar nada.
 - El dato se repite 35 veces.

Dibujar un histograma

- Si la frecuencia absoluta de $[a, b)$ es c , la altura del rectángulo al representarlo es:
 - a
 - b
 - c
 - $a + b$

Calcular las medidas estadísticas

- Para los datos 1, 2, 1, 1, 3:
 - $\bar{x} = 2$
 - $\sigma = 0$
 - $Me = 1$
 - $R = 8$

Actividades

VARIABLES. TABLAS DE FRECUENCIAS

32. ● Queremos hacer un estudio del número de horas que los alumnos dedican a la lectura.



- Elige una muestra para realizar el estudio.
- ¿Qué tamaño tiene dicha muestra?
- ¿Cuál es la población?

33. ● Indica el tipo de variable estadística que estamos estudiando y di, en cada caso, qué sería mejor, si estudiar una muestra o la población.

- El programa favorito de los miembros de tu familia.
- La talla de calzado de los alumnos de un IES.
- La temperatura media diaria de tu provincia.
- La edad de los habitantes de un país.
- El sexo de los habitantes de un pueblo.
- El dinero gastado a la semana por tus amigos.
- Los efectos de un nuevo medicamento en el ser humano.
- El color del pelo de tus compañeros de clase.

34. ● De las siguientes variables, ¿cuáles son discretas?

- Número de mascotas.
- Talla de calzado.
- Perímetro craneal.
- Ingresos diarios en una frutería.
- Kilogramos de carne consumidos en el comedor de un IES durante una semana.

35. ● Al preguntar a 20 personas sobre el número de veces que habían viajado al extranjero, el resultado fue:

3 5 4 4 2 3 3 3 5 2
6 1 2 3 3 6 5 4 4 3

- Organiza los datos haciendo un recuento.
- Obtén la tabla de frecuencias.

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

36. ● La talla de calzado que utilizan 20 alumnos en una clase de Educación Física es:

37 40 39 37 38
38 38 41 42 37
43 40 38 38 38
40 37 37 38 38



Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias para las frecuencias absolutas y para las frecuencias absolutas acumuladas.

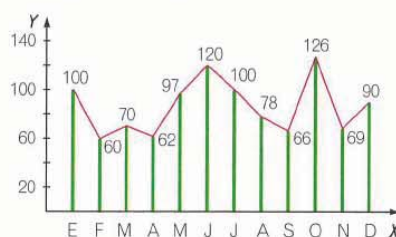
37. ● Estas son las estaturas (en cm) de 27 jóvenes:

155 178 170 165 173 168 160 166 176
169 158 170 179 161 164 156 170 171
167 151 163 158 164 174 176 164 154

- Utiliza intervalos de amplitud 5 para formar una tabla de frecuencias.
- Representa los datos en un histograma, utilizando las frecuencias absolutas y las frecuencias absolutas acumuladas.

38. ● De los 30 asistentes a una cena, el 20 % comió ternera, el 40 % cordero y el resto pescado. Indica la variable estadística y organiza los resultados en una tabla de frecuencias. Después, representa los datos en un gráfico de sectores.

39. ● El número de veces que se alquiló cada mes la pista de tenis de un polideportivo viene representado en este gráfico.



- Obtén las frecuencias relativas y acumuladas.
- ¿En qué porcentaje de meses se alquiló la pista más de 80 veces?
- Representa el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

MEDIDAS ESTADÍSTICAS

40. ● Obtén las medidas de centralización de esta serie de datos.

3	2	4	9	8	7	3	2	4	5	1	8	6	1	5
1	0	2	4	1	2	5	6	5	4	7	1	3	0	5
8	6	3	4	0	9	2	5	7	4	0	2	1	5	6

41. ●● Vuelve a realizar la actividad anterior con intervalos de amplitud 2. ¿Obtienes los mismos resultados? ¿Por qué crees que sucede esto?

42. ● Determina la mediana de estos datos.

a)

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	5	3	4	2	4	6

b)

Var.	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)
f_i	1	3	5	2

43. ●● Obtén la media, mediana, moda y cuartiles de los datos de esta tabla.

x_i	26	28	30	32
f_i	6	7	4	3

- a) Si cada valor de la tabla se multiplica por 3, ¿cuál será la media? ¿Y la mediana? ¿Y la moda?
- b) Si a todos los valores de una variable les restamos o los dividimos entre un mismo número, ¿cuál es la nueva media?
44. ●●● Los siguientes datos: 10, 17, a, 19, 21, b, 25 tienen como media, mediana y moda 19. ¿Cuánto valen a y b?

45. ●●● Considera el conjunto de datos:

23 17 19 x y 16

Sabiendo que la media es 20 y la moda es 23, ¿cuáles son los valores de x e y?

46. ●●● Estos son los datos de una encuesta sobre el número de radios en los hogares españoles.

N.º de radios	0	1	2	3	4
N.º de hogares	432	8.343	6.242	1.002	562

- a) ¿Cuántas radios tiene la cuarta parte de los hogares?
- b) ¿Y el 75 %?
- c) ¿Qué significado tiene la mediana?

47. ● Resuelve con tu calculadora esta actividad.

Durante un mes, ocho dependientes vendieron los siguientes aparatos de aire acondicionado.

8 11 5 14 8 11 16 11



Calcula la media, desviación típica y coeficiente de variación de los datos.

48. ●● Las edades (en años) de los 30 primeros visitantes al Planetario han sido:

20 7 10 13 4 7 8 11 16 14 8 10 16 18 12
3 6 9 9 4 13 5 10 17 10 18 5 7 10 20

Obtén sus medidas estadísticas.

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE COMPARA LA DISPERSIÓN DE DOS VARIABLES ESTADÍSTICAS?

49. El peso medio de una muestra de recién nacidos es $\bar{x} = 2,85$ kg y su desviación típica es $\sigma = 1$ kg. El peso medio de sus madres es $\bar{x} = 62$ kg, con una desviación típica de $\sigma = 15$ kg. ¿En cuál de las distribuciones es mayor la dispersión?

PRIMERO. Se calculan los coeficientes de variación.

$$CV_{\text{bebés}} = \frac{1}{2,85} = 0,35 = 35 \%$$

$$CV_{\text{madres}} = \frac{15}{62} = 0,24 = 24 \%$$

SEGUNDO. Se comparan los coeficientes.

$0,35 > 0,24 \rightarrow$ La dispersión es mayor en los pesos de los bebés que en los de sus madres, aunque pueda parecer lo contrario si observamos sus desviaciones típicas: $1 < 15$.

50. ●● Las notas de Alberto en 5 exámenes son 4, 6, 6, 7 y 5, y las de Ana son 43, 62, 60, 50 y 55. ¿Cuál de ellos es más regular en su rendimiento académico?

51. ●● Halla la media, mediana, moda y desviación típica de los siguientes datos.

Peso (kg)	N.º de alumnos
[41, 47)	5
[47, 53)	6
[53, 59)	1
[59, 65)	4
[65, 71)	4

52. ●● Las notas obtenidas por 40 alumnos en Música han sido:

6 4 1 7 3 6 6 2 5 2 4 9 5 10 8 2 6 10 5 7
5 3 7 8 4 6 0 5 8 7 6 9 7 2 5 6 8 7 3 6



Calcula la media y la desviación típica de los datos, considerando primero la variable como discreta y, después, agrupando los datos en los intervalos $[0, 5)$, $[5, 7)$, $[7, 9)$ y $[9, 10]$. ¿Qué diferencias observas?

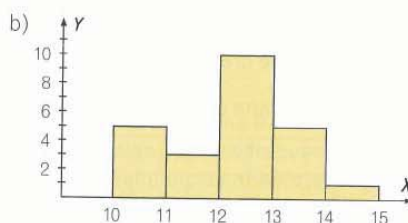
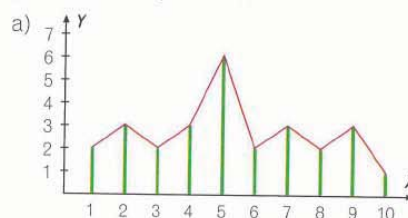
53. ●● Los precios del alquiler mensual de la vivienda se recogen en la siguiente tabla.

Precio (€)	N.º de viviendas
240	13
270	33
300	40
330	35
360	30
390	16
420	20

- a) ¿Cuál es la media de los alquileres?
b) Di cuál es el precio más común.
c) Obtén la mediana. ¿Qué significa?
d) Calcula la varianza y la desviación típica. ¿Para qué sirven estos números?



54. ●● A partir de estos gráficos determina su tabla de frecuencias y halla la media, mediana, moda y desviación típica de los datos.



HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE INTERPRETAN LA MEDIA Y LA DESVIACIÓN TÍPICA CONJUNTAMENTE?

55. Un equipo de baloncesto necesita un alero. Se han seleccionado dos jugadores que, en los últimos cinco partidos, han anotado estos puntos. ¿Cuál de ellos elegirías?

Jugador A	16	14	13	13	14
Jugador B	25	10	8	6	21

PRIMERO. Se calculan la media y la desviación típica.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_A = 14 \\ \sigma_A = 1,09 \end{array} \right\} \text{Jugador A} \quad \left. \begin{array}{l} \bar{x}_B = 14 \\ \sigma_B = 7,56 \end{array} \right\} \text{Jugador B}$$

SEGUNDO. Se analizan los resultados anteriores. Como las medias son iguales, si el entrenador quisiera un jugador regular, escogería al jugador A (desviación típica baja significa datos parecidos); sin embargo, si quisiera un jugador que pudiera actuar de revulsivo, escogería al B, ya que alterna partidos muy buenos con otros peores (desviación típica elevada indica datos muy diferentes).

56. ●●● Compara el rendimiento de dos alumnos que realizan 5 pruebas, obteniendo estos resultados.

Juan	2	6	5	7	5
Ana	0	1	9	8	7

PROBLEMAS DE ESTADÍSTICA

57. ● En la primera evaluación, de los 30 alumnos de una clase, el 10 % aprobó todo, el 20 % suspendió una asignatura, el 50 % suspendió dos asignaturas y el resto suspendió más de dos.

Realiza con estos datos una tabla de frecuencias. ¿Hay algún tipo de frecuencia que responda a la pregunta de cuántos alumnos suspendieron menos de dos asignaturas? Razona tu respuesta.

58. ●● Un corredor entrena, de lunes a viernes, recorriendo las siguientes distancias: 2, 5, 5, 7 y 3 km, respectivamente. Si el sábado también entrena:



- a) ¿Cuántos kilómetros debe recorrer para que la media sea la misma?
b) ¿Y para que la mediana no varíe?
c) ¿Y para que la moda permanezca constante?

59. ●● Aplicada una prueba de Cálculo Mental (CM) y una prueba de Psicomotricidad (P) a los 28 alumnos de una clase, los resultados fueron:

Puntuación	CM	P
[10, 20)	2	1
[20, 30)	8	7
[30, 40)	11	9
[40, 50)	4	5
[50, 60)	2	4
[60, 70)	1	2

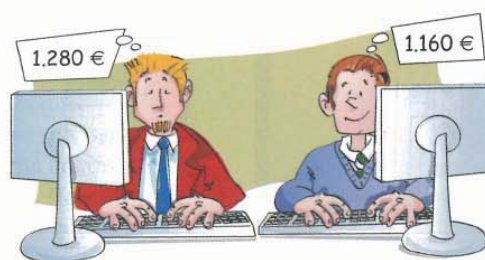
- a) ¿En qué prueba se obtuvieron mejores resultados (mayor media)?
b) ¿Dónde fue mayor la dispersión? (Usa el coeficiente de variación.)
60. ●● De los 50 alumnos que respondieron a una prueba de 12 preguntas, el 10 % contestó correctamente a 3, el 50 % a 7, el 30 % a 10 y el resto al total de la prueba. Calcula la media, mediana y moda de los datos. Halla también su desviación típica.

61. ●●● Los diplomados en Informática de gestión tienen un salario medio, en su primer empleo, de 1.280 €, con una desviación típica de 380 €.

Por otra parte los diplomados en Informática de sistemas tienen un salario medio de 1.160 €, con una desviación típica de 350 €.

Si a un diplomado en Informática de gestión le ofrecen un sueldo de 1.400 €, y a un diplomado en Informática de sistemas, un sueldo de 1.340 €:

- a) ¿Cuál de los dos recibe mejor oferta?
b) Razona por qué es mejor una u otra oferta.



INVESTIGA

62. ●●● Un conjunto de datos, compuesto de números enteros positivos y diferentes entre sí, tiene 47 como media. Si uno de los datos es 97 y la suma de todos los datos es 329, ¿cuál es el mayor número que puede tener?

63. ●●● Dado el conjunto de datos:

$$14 \ 12 \ 26 \ 16 \ x$$

calcula x para que la mediana y la media de los datos sean iguales.

64. ●●● Si en un conjunto de cinco datos, la media es 10 y la mediana es 12, ¿cuál es el menor valor que puede tomar el recorrido?

65. ●●● Cuando escribimos en orden creciente la media, la mediana y la moda del conjunto de datos: 10, 2, 5, 2, 4, 2, x , obtenemos una progresión aritmética. Calcula todos los posibles valores de x .

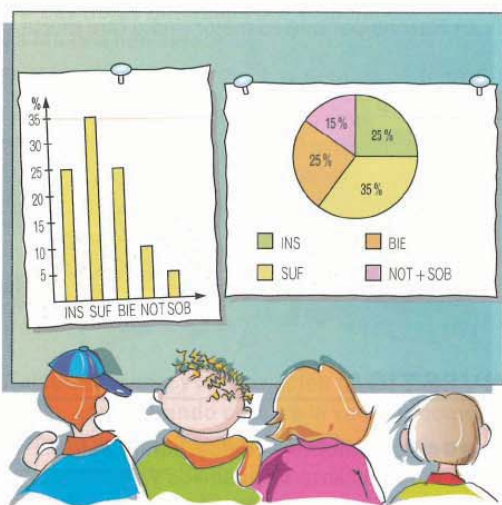
66. ●●● Después de ordenar un conjunto de siete datos, tomamos los cuatro primeros datos, y resulta que su media es 5; pero si tomamos los cuatro últimos, su media es 8.

Si la media de todos los números es $\frac{46}{7}$, ¿cuál será la mediana?

En la vida cotidiana

67. ●●● La Consejería de Educación está valorando el rendimiento de los alumnos en Matemáticas. Por ello, ha elaborado un informe en el que se muestran los resultados de los alumnos de Secundaria en Matemáticas durante el curso pasado.

Un resumen del informe se muestra mediante estas gráficas.



Para realizar el diagrama de sectores han agrupado las notas más altas, NOTABLE y SOBRESALIENTE, y se han incluido los porcentajes de alumnos que han obtenido cada nota.

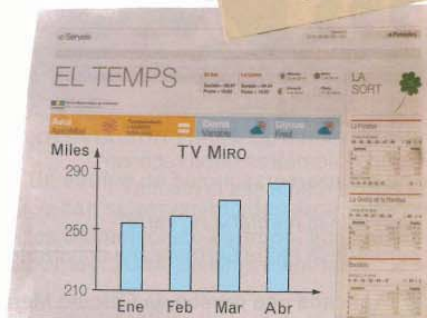
El informe indica que el número de estudiantes que han obtenido SUFICIENTE es de 28.413.

A la vista de estos gráficos y de los porcentajes, calcula el número total de alumnos evaluados y cuántos alumnos han obtenido la calificación de SOBRESALIENTE.



68. ●●● El número de espectadores de una cadena de televisión determina el coste de la publicidad que se emite. Por eso se hacen públicos regularmente sus índices de audiencia.

Las dos cadenas de televisión con mayor índice de audiencia han presentado sus resultados de los cuatro primeros meses del año. Estos son los gráficos que aparecieron en distintos medios de comunicación.



Ambas cadenas han experimentado un gran incremento, pero los responsables de TV MIRO insisten en que su crecimiento ha sido mayor.

Tal y como muestran las gráficas publicadas en los distintos medios de comunicación, hemos experimentado un crecimiento superior al de Canal Free.



¿Cuántos espectadores ganó cada cadena?
¿Qué representación refleja mejor la situación?

ANEXO 4: Tecnologías, Técnicas, Ejercicios, Ejemplos y Problemas de Estadística

En este anexo, se presenta una gran cantidad de ejercicios, ejemplos y problemas, técnicas y tecnología relacionadas con la Estadística y, en concreto, con el objeto matemático tratado en este trabajo.

Nos gustaría resaltar el enorme trabajo que ha supuesto la realización de este anexo. Es cierto que parte pudo ser empleado durante el Prácticum II y III del Máster de Profesorado, pero también es verdad que se han desarrollado y solucionado actividades que nos han servido como ayuda en el presente trabajo, además de servir como referencia en consultas relacionadas con determinadas tecnologías y técnicas.

TEMA 13: ESTADÍSTICA

El tema está dividido en 6 apartados.

1. Conceptos Básicos

La **Estadística** es la ciencia que se encarga de recopilar y ordenar datos referidos a diversos fenómenos para su posterior análisis e interpretación.

1.1 Población y Muestra

Población: Todos los elementos que son objeto de estudio.

Muestra: Parte de la población que estudiamos.

Individuo: Cada elemento de la población o la muestra.

Tamaño: Número de elementos que tiene la población o la muestra.

Importante: Si la muestra no se escoge bien, las conclusiones del estudio pueden ser erróneas.

Ver el ejemplo 1 (página 246). Hacer los ejercicios 1, 2, 3 y 4 de la página 246. Los que no den tiempo, para hacer en casa.

Ejercicio 1: Queremos realizar un estudio estadístico de la talla de calzado que usan los alumnos de 3º ESO de un instituto.

- a) ¿Cuál sería la población? → La población estaría formada por los alumnos de 3º ESO del instituto.
- b) Elige una muestra. ¿Qué tamaño tiene? → Podríamos coger 10 alumnos de cada grupo de 3º ESO. Si tenemos tres grupos de 3º ESO → 30 alumnos.

Ejercicio 2: Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra.

- a) Longitud de los tornillos que, ininterrumpidamente, produce una máquina → Muestra
- b) Estatura de todos los turistas en un año → Muestra
- c) El peso de un grupo de cinco amigos → Población

Ejercicio 3: Este es el titular de un periódico. “EL PESO MEDIO DE LOS ESPAÑOLES ES 69KG.”.

- a) ¿Cómo crees que se llega a esta conclusión? ¿Se habrá estudiado a toda la población? → Se llega a esta conclusión tomando una muestra significativa de españoles. No se ha estudiado a toda la población española.
- b) ¿Qué características debe tener la muestra? ¿Podrían ser todos los individuos de la muestra de la misma edad? Si todos son mujeres, ¿Sería correcta la muestra? → La muestra tiene que ser representativa de la sociedad española y tener diferentes tipos de personas, de diversas edades, de ambos sexos... No podrían ser todos los individuos de la misma edad. Si todos son mujeres la muestra no sería correcta.

Ejercicio 4: Piensa y escribe un ejemplo de población para hacer un estudio estadístico. ¿Qué muestra podríamos tomar? Indica los individuos y el tamaño de la muestra.

Número de personas mayores de 30 años con estudios universitarios en Zaragoza.
Muestra que podríamos tomar: unas 100 personas de cada barrio de Zaragoza. Los individuos serían personas mayores de 30 años residentes en Zaragoza y el tamaño de la muestra entre unas 1000 y 1500 personas.

1.2 Variables Estadísticas

Tipos	Propiedades		Ejemplos
Cualitativas	Los valores de la variable no son números, sino cualidades.		- Sexo (mujer, varón) - Color de pelo (moreno, rubio...)
Cuantitativas	Los valores que toma la variable son números		- Peso - Número de hermanos
	Discretas	En cada tramo, la variable solo puede tomar un número finito de valores	- Número de amigos: entre 2 y 5 solo puedo tener 3 ó 4 amigos, pero no 3,5 ó 3,6
	Continuas	La variable puede tomar tantos valores como queramos, por pequeño que sea el tramo.	- Altura: entre 1,70 y 1,80 m de altura tenemos 1,71 m; 1,715 m; 1,767 m...

Una **variable estadística** es cada una de las propiedades o características que podemos estudiar de un conjunto de datos. Las variables estadísticas, dependiendo de los posibles valores que puedan tomar, se clasifican según el anterior cuadro.

Ver el ejemplo 2 (página 247). Hacer los ejercicios 5, 6 y 7 de la página 247. Los que no den tiempo, para hacer en casa.

Ejercicio 5: Determina si las variables estadísticas son cualitativas o cuantitativas.

- a) Año de nacimiento → Variable Cuantitativa Discreta
- b) Color del pelo → Variable Cualitativa
- c) Profesión de una persona → Variable Cualitativa
- d) Perímetro torácico → Variable Cuantitativa Continua
- e) Estado civil → Variable Cualitativa
- f) Perímetro de la cintura → Variable Cuantitativa Continua
- g) Número de veces que se ha viajado en avión → Variable Cuantitativa Discreta

Ejercicio 6: Clasifica estas variables en cualitativas o cuantitativas, y en ese caso, di si son discretas o continuas.

- a) Provincia de residencia → Variable Cualitativa
- b) Número de vecinos de un edificio → Variable Cuantitativa Discreta
- c) Profesión del padre → Variable Cualitativa
- d) Consumo de gasolina por cada 100 km → Variable Cuantitativa Continua

Ejercicio 7: Si una variable estadística cuantitativa puede tomar infinitos valores, ¿es discreta o es continua?

Si una variable estadística cuantitativa puede tomar infinitos valores, la variable puede ser discreta o continua. Ponemos dos ejemplos:

- Número de átomos en cada uno de los astros de la Vía Láctea: Variable Cuantitativa Discreta (“infinitos” valores pero enteros)
- Distancia de la Tierra a otros astros del Universo: Variable Cuantitativa Continua (“infinitos” valores continuos)

2. Frecuencias y Tablas

2.1 Recuento de Datos

Después de recopilar los datos, se procede a su recuento para expresarlos de manera ordenada, generalmente, en forma de tablas.

Si la variable es continua, los datos se agrupan en **intervalos** o **clases**, usualmente de la misma amplitud y, como mínimo, 4 intervalos. A todos los datos de un intervalo se les da el mismo valor, que se llama **marca de clase** y es el punto medio del intervalo.

Ver los ejemplos 3 y 4 (página 248). Hacer los ejercicios 8, 9 y 10 de la página 248. Los que no den tiempo, para hacer en casa.

Ejercicio 8: Las estaturas (en cm) de 28 jóvenes son las siguientes. Forma una tabla con intervalos, efectúa el recuento de datos y obtén las marcas de clase de cada intervalo.

155	178	170	165	173	168	160
166	176	169	158	170	179	161
164	156	170	171	167	151	163
158	164	174	176	164	154	157

Intervalo	Marca de Clase	Recuento
[150, 154)	152	2
[155, 159)	157	5
[160, 164)	162	6
[165, 169)	167	5
[170, 174)	172	6
[175, 179)	177	4

Ejercicio 9: El color de pelo (M = moreno, R = rubio, P = pelirrojo) de 30 personas es:

M R P M M	M M R R P	P M M M M
M M P R R	R P M M M	M R M M M

Construye su tabla de frecuencias.

Color de Pelo	Recuento
Moreno (M)	18
Rubio (R)	7
Pelirrojo (P)	5

Ejercicio 10: ¿Por qué los intervalos son cerrados por un lado y abiertos por el otro?

Porque el valor del lado abierto no puede pertenecer a los dos intervalos. De esta forma, no pertenece a uno y sí que pertenece al siguiente.

2.2 Frecuencia Absoluta y Relativa

La **frecuencia absoluta** de un dato, x_i , es el número de veces que aparece. Se simboliza con f_i . La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, N .

La **frecuencia relativa** de un dato es el cociente entre su frecuencia absoluta, f_i , y el número total de datos, N . Se representa por h_i . Tenemos que $h_i = \frac{f_i}{N}$ y que la suma de las frecuencias relativas es igual a la unidad.

Ver el ejemplo 5 (página 249). Hacer los ejercicios 11, 12 y 13 de la página 249. Los que no den tiempo, para hacer en casa.

Ejercicio 11: El número de horas diarias que trabajan con el ordenador 30 personas es:

3	4	0	5	5
3	4	5	0	2
2	5	3	2	0
1	2	2	1	2
0	3	1	2	1
1	2	1	4	3

- ¿De qué tipo es la variable estadística? → Variable Cuantitativa Discreta
- Construye la tabla de frecuencias.

Valores x_i	Frecuencias Absolutas f_i	Frecuencias relativas $h_i = \frac{f_i}{N}$	Porcentajes %
0	4	0,13	13,3%
1	6	0,2	20%
2	8	0,26	26,6%
3	5	0,16	16,6%
4	3	0,1	10%
5	4	0,13	13,3%
Suma	30	1	100%

Ejercicio 12: Los resultados de un test de inteligencia realizado a 20 personas han sido:

100	80	92	101	65	72	121	68	75	93
101	100	102	97	89	73	121	114	113	94

Obtén la tabla de frecuencias, tomando intervalos de amplitud 10.

Intervalos	Frecuencias Absolutas f_i	Frecuencias relativas $h_i = \frac{f_i}{N}$	Porcentajes %
[60, 70)	2	0,1	10%
[70, 80)	3	0,15	15%
[80, 90)	2	0,1	10%
[90, 100)	4	0,2	20%
[100, 110)	5	0,25	25%
[110, 120)	2	0,1	10%
[120, 130)	2	0,1	10%
Suma	20	1	100%

Ejercicio 13: Qué pasa si la suma de frecuencias absolutas no es igual al número total de datos.

Nos habremos debido dejar algún dato de contabilizar. La suma de frecuencias absolutas debe ser igual al número total de datos.

2.3 Frecuencias Acumuladas

La **frecuencia absoluta acumulada** de un dato x_i es la suma de las frecuencias absolutas de los valores que son menores o iguales que él. Se representa por F_i .

$$F_i = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i$$

La **frecuencia relativa acumulada** de un dato x_i es la suma de las frecuencias relativas de los valores menores o iguales que él. Se representa por H_i . Equivale al cociente entre la frecuencia absoluta acumulada del dato y el número total de ellos.

$$H_i = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_i = \frac{f_1}{N} + \frac{f_2}{N} + \frac{f_3}{N} + \dots + \frac{f_i}{N} = \frac{F_i}{N}$$

Ver el ejemplo 6 (página 250). Hacer los ejercicios 14, 15 y 16 de la página 250. Los que no den tiempo, para hacer en casa.

Ejercicio 14: Los pesos (en kg) de 24 personas son:

68,5	34,2	47,5	39,2	47,3	79,2
46,5	58,3	62,5	58,7	80	63,4
58,6	50,2	60,5	70,8	30,5	42,7
59,4	39,3	48,6	56,8	72	60

- Agrúpalos en intervalos de amplitud 10 y obtén la tabla de frecuencias.
- ¿Cuántas personas pesan menos de 50kg? $\rightarrow 9$ personas
- Calcula el tanto por ciento sobre el total que representa el intervalo de mayor frecuencia absoluta $\rightarrow [50, 60) \rightarrow 6 \rightarrow 6/24 = 0,25 \rightarrow 25\%$

Intervalo	Marca	f_i	F_i	h_i	H_i
[30, 40)	35	4	4	$0,1\bar{6}$	$0,1\bar{6}$
[40, 50)	45	5	9	$0,208\bar{3}$	$0,375$
[50, 60)	55	6	15	$0,25$	$0,6$
[60, 70)	65	5	20	$0,208\bar{3}$	$0,8\bar{3}$
[70, 80)	75	3	23	$0,125$	$0,958\bar{3}$
[80, 90)	85	1	24	$0,041\bar{6}$	1
	TOTAL	24		1	

Ejercicio 15: El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:

3 4 3 5 5	1 1 1 1 2	3 4 5 0 2
0 3 2 2 1	2 1 3 2 0	1 2 1 4 3

Obtén la tabla de frecuencias. ¿Qué significan las frecuencias acumuladas?

x_i	f_i	F_i
0	3	3
1	8	11
2	7	18
3	6	24
4	3	27
5	3	30
TOTAL	30	

Las frecuencias acumuladas nos dan la información del número de veces que ha salido el valor o menor que él. Es decir, la frecuencia acumulada de 2 es 18, es decir, que hay 18 valores menores o iguales que 2.

Ejercicio 16: Explica cómo completarías una tabla de frecuencias en la que conoces sólo las frecuencias absolutas acumuladas.

Realizaría la diferencia entre las frecuencias absolutas acumuladas para obtener las frecuencias absolutas correspondientes.

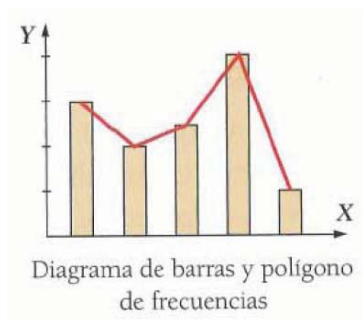
3. Gráficos Estadísticos

Los datos estadísticos se suelen expresar de forma gráfica ya que, en un golpe de vista, nos podemos hacer una idea de su distribución. En función del tipo de variable usaremos un tipo de gráfico u otro.

3.1 Diagrama de Barras

Se usa para representar variables cualitativas o cuantitativas discretas.

- En el eje de abscisas representamos los datos, y en el eje de ordenadas las frecuencias.
- Sobre cada dato se levantan barras verticales cuya altura es la frecuencia que estamos representando.
- Si trazamos una línea poligonal que una los extremos de las barras obtenemos el polígono de frecuencias.



Ver el ejemplo 7 (página 251). Hacer los ejercicios 17, 18 y 19 de la página 251. Los que no den tiempo, para hacer en casa.

Ejercicio 17: En un edificio de 16 vecinos, el número de televisores por vivienda es:

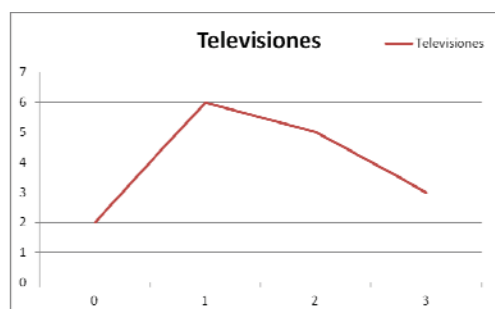
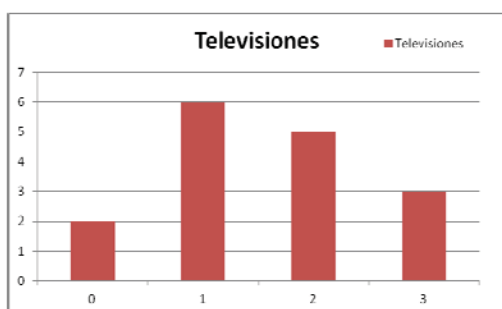
0 1 1 2	1 3 2 1	1 1 2 2	3 0 3 2
---------	---------	---------	---------

- a) Construye la tabla de frecuencias. ¿Qué tipo de variable es? Razona tu respuesta.

x_i	f_i
0	2
1	6
2	5
3	3
TOTAL	16

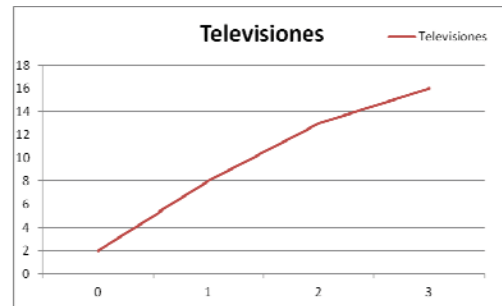
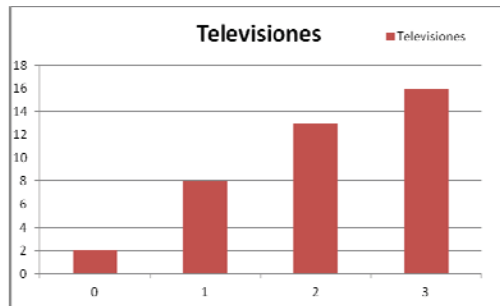
La variable es cuantitativa discreta (son valores enteros).

- b) Realiza el diagrama de barras y el polígono de frecuencias de los datos.



c) Haz lo mismo con las frecuencias acumuladas.

x_i	f_i	F_i
0	2	2
1	6	8
2	5	13
3	3	16
TOTAL	16	



Ejercicio 18: En un aparcamiento público hay 25 coches rojos, 19 amarillos, 39 plateados, 50 blancos, 27 verdes, 30 azules y 10 negros.

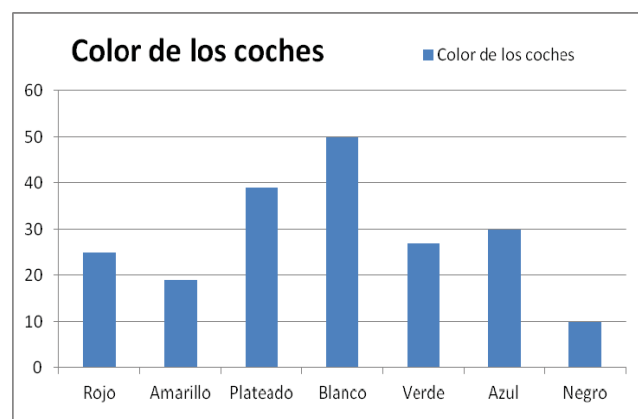
a) Construye la tabla de frecuencias.

Colores	f_i
Rojo	25
Amarillo	19
Plateado	39
Blanco	50
Verde	27
Azul	30
Negro	10
TOTAL	200

b) ¿Puedes hallar las frecuencias acumuladas?

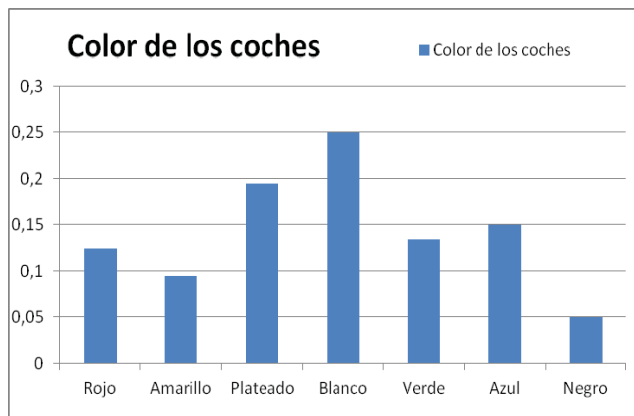
No, no podemos. Solo podemos calcular frecuencias acumuladas en variables cuantitativas, ya que es necesario que los datos puedan ordenarse de menor a mayor.

c) Realiza el diagrama de barras.



Ejercicio 19: Haz el gráfico del ejercicio anterior con las frecuencias relativas. ¿Qué observas?

Colores	f_i	h_i
Rojo	25	0,125
Amarillo	19	0,095
Plateado	39	0,195
Blanco	50	0,25
Verde	27	0,135
Azul	30	0,15
Negro	10	0,05
TOTAL	200	1



La forma de la gráfica es la misma. Lo único que cambian son los valores del eje y.

3.2 Histograma

Se usa para representar variables cuando los datos se agrupan en intervalos.

- En el eje de abscisas representamos los datos, y en el eje de ordenadas, las frecuencias.
- Se divide el eje de abscisas en intervalos y se levanta un rectángulo, sobre cada uno, de altura igual a su frecuencia.
- El polígono de frecuencias se obtiene uniendo los puntos medios de los extremos superiores de los rectángulos, o los vértices superiores de la derecha, en el caso de frecuencias acumuladas.

3.3 Diagrama de Sectores

Sirve para representar cualquier tipo de variable.

- Es un círculo dividido en sectores, uno para cada dato o intervalo.
- La amplitud de cada sector circular es proporcional a la frecuencia y se calcula multiplicando 360° por la frecuencia relativa.

Ver el ejemplo 8 (página 252). Hacer los ejercicios 20, 21 y 22 de la página 252. Los que no den tiempo, para hacer en casa.

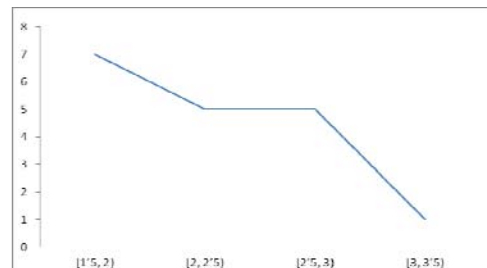
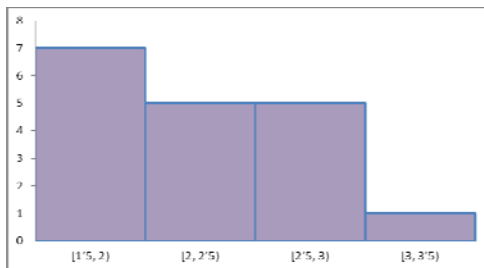
Ejercicio 20: La longitud (en cm) de 18 grillos es:

1,8	1,9	2	2,4	2,6	2,8
1,7	1,9	2,3	1,6	2,1	3
2,3	2,7	2,9	1,5	1,8	2,6

a) Construye la tabla de frecuencias tomando intervalos.

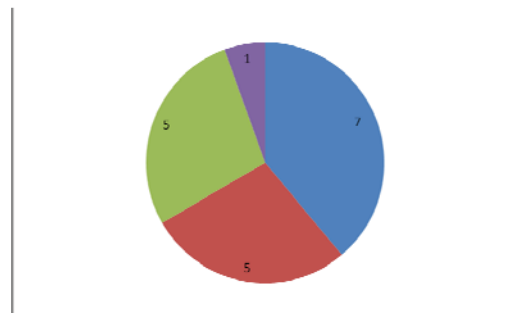
Intervalos	f_i	h_i
[1'5, 2)	7	7
[2, 2'5)	5	12
[2'5, 3)	5	17
[3, 3'5)	1	18
TOTAL	18	

b) Representa los datos mediante un histograma y un polígono de frecuencias.



c) Realiza un diagrama de sectores. ¿Qué gráfico te parece más adecuado?

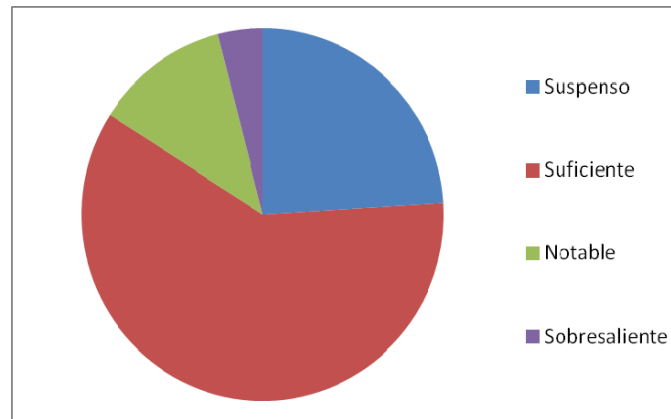
El gráfico más apropiado es el diagrama de sectores, ya que se ve a primera vista las diferentes clases y cuál es la más numerosa y la que menos.



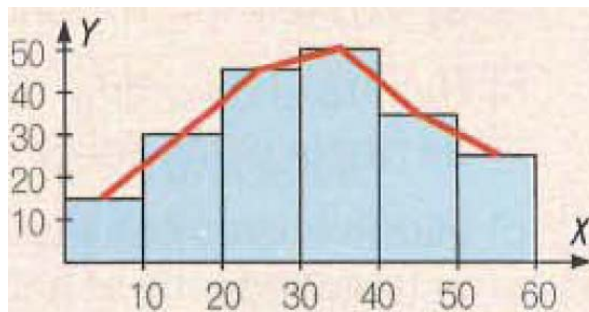
Ejercicio 21: Representa estos datos: en una clase de 50 alumnos, 12 de ellos han suspendido, 30 han sacado Suficiente, un 12% Notable y el resto Sobresaliente.

Calificaciones	f_i
Suspenso	12
Suficiente	30
Notable	6
Sobresaliente	2
TOTAL	50

← 12% de 50 = 6
 ← Resto: 50 - 12 - 30 - 6 = 2



Ejercicio 22: Haz la tabla de frecuencias que corresponde a este gráfico.



Intervalos	f_i
[0, 10)	15
[10, 20)	30
[20, 30)	45
[30, 40)	50
[40, 50)	35
[50, 60)	25
TOTAL	200

4. Medidas de Centralización

Las **medidas de centralización** resumen la información de la muestra.

- **Media aritmética**, \bar{x} : es el cociente de la suma de todos los valores multiplicados por su frecuencia, entre la suma de todas las frecuencias.

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \dots + f_n \cdot x_n}{N}$$

Si la variable es continua, x_i es la marca de clase del intervalo.

- **Moda**, M_o : es el valor de la variable, o la marca de clase para datos en intervalos, que tiene mayor frecuencia, es decir, la que más se repite.
- **Mediana**, M_e : es el valor que ocupa la posición central de los datos después de ordenarlos, o la media de los dos valores centrales en el caso de que el número de datos sea par.

Ver el ejemplo 9 (página 253). Hacer los ejercicios 23, 24 y 25 de la página 253. Los que no den tiempo, para hacer en casa.

Ejercicio 23: Las estaturas (en cm) de 24 alumnos de 3º ESO son:

158	160	168	156	166	158	160	168
168	158	156	164	162	166	164	168
162	158	156	166	160	168	160	160

a) Agrúpalas en intervalos.

Intervalos	f_i	Marca de Clase
[155, 160)	7	157,5
[160, 165)	9	162,5
[165, 170)	8	167,5
TOTAL	24	

b) Calcula la media, mediana y moda.

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3}{N} = \frac{7 \cdot 157,5 + 9 \cdot 162,5 + 8 \cdot 167,5}{24} = \frac{3905}{24} = 162,708\bar{3}$$

Mediana: ordenamos los datos primero y buscamos el valor central o la media de los dos valores centrales si hay un número par de datos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
156	156	156	158	158	158	158	160	160	160	160	160	162	162	164	164	166	166	166	168	168	168	168	168

Valores centrales (posiciones 12 y 13): $(160 + 162)/2 = 161$ cm (mediana)

Moda: la marca de clase que más se repite es 162,5 cm

Ejercicio 24: Interpreta las medidas de centralización del número de suspensos de 15 alumnos.

4	1	0	4	1	4	1	2	3	0	2	4	0	3	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

x_i	f_i
0	3
1	4
2	2
3	2
4	4
TOTAL	15

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

Mediana: ordenamos los datos de menor a mayor. Vemos que la mediana es 2.

0	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Moda: los valores que más se repiten son el 1 y el 4 (cuatro veces cada uno).

Ejercicio 25: Añade un valor que no haga variar la mediana.

18	8	7	9	12	15	21	12
----	---	---	---	----	----	----	----

Ordenamos los datos para calcular la mediana. Vemos que la mediana es 12.

7	8	9	12	12	15	18	21
---	---	---	----	----	----	----	----

Si tenemos que introducir un valor que no modifique la mediana, introduciremos un 12.

Así:

7	8	9	12	12	12	15	18	21
---	---	---	----	----	----	----	----	----

Pero podríamos introducir un valor menor que 12 o mayor que 12 y la mediana no variaría.

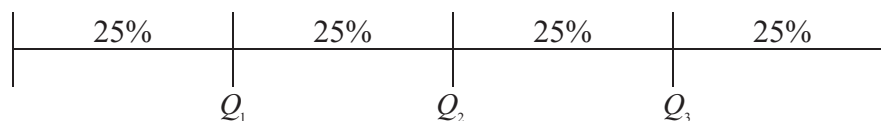
1	7	8	9	12	12	15	18	21
---	---	---	---	----	----	----	----	----

7	8	9	12	12	15	18	21	30
---	---	---	----	----	----	----	----	----

5. Medidas de Posición

Una **medida de posición** es un valor de la variable que informa del lugar que ocupa un dato dentro del conjunto ordenado de valores.

Los **cuartiles**, Q_1 , Q_2 y Q_3 (primero, segundo y tercer cuartil, respectivamente), son medidas que separan los datos en 4 partes iguales, es decir, en cada tramo está el 25% de los datos recogidos en el estudio.



Ver el ejemplo 10 (página 254). Hacer los ejercicios 26, 27 y 28 de la página 254. Los que no den tiempo, para hacer en casa.

Ejercicio 26: Calcula los cuartiles de este conjunto de datos que expresan los días de baja laboral sufridos por 10 trabajadores.

0	2	3	4	2	1	1	0	0	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Bajas	f_i	F_i
0	3	3
1	2	5
2	2	7
3	2	9
4	1	10
TOTAL	10	

Q_1 tiene el 25% de los datos por debajo y el resto por encima. Con 10 datos, el 25% es 2,5. Así que dejando 2 datos por debajo, localizamos $Q_1 \rightarrow Q_1 = 0$

Q_2 tiene la mitad de los datos por debajo y la otra mitad encima. Con 10 datos, el 50% es 5. Así que dejando 5 datos por debajo, localizamos $Q_2 \rightarrow Q_2 = 1$

Q_3 tiene el 75% de los datos por debajo y el resto por encima. Con los 10 datos, el 75% es 7,5. Así que dejando 7 datos por debajo, localizamos $Q_3 \rightarrow Q_3 = 3$

Ejercicio 27: Interpreta los cuartiles que has calculado en el ejercicio anterior.

$Q_1 = 0$: el 25% de los datos es 0 o menor.

$Q_2 = 1$: el 50% de los datos es 1 o menor.

$Q_3 = 3$: el 75% de los datos es 3 o menor.

Ejercicio 28: Se han convocado unas oposiciones en las que hay 50 plazas y se han presentado 200 personas. Estos son los resultados. ¿Con qué nota se consigue una plaza?

Notas	3	4	5	6	7	8	9	10
Opositores f_i	6	25	34	42	50	27	13	3

50 plazas y 200 personas \rightarrow 50 mejores notas \rightarrow 25% mejores \rightarrow 75% por debajo $\rightarrow Q_3$

f_i	6	25	34	42	50	27	13	3
F_i	6	31	65	107	157	184	197	200

$6 + 25 + 34 + 42 + 50 = 157 \rightarrow Q_3 = 7 \rightarrow$ Se consigue una plaza con un 7.

6. Medidas de Dispersión

Las **medidas de dispersión** permiten conocer el grado de agrupamiento de los datos en torno a las medidas de centralización.

Medida		Cálculo	Definición
Rango o Recorrido	R	$R = Máx - Mín$	Es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable.
Desviación media	DM	$DM = \frac{\sum f_i \cdot x_i - \bar{x} }{N}$	Es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de cada dato.
Varianza	σ^2	$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}$	Es la media de los cuadrados de las desviaciones.
Desviación típica	σ	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}}$	Es la raíz cuadrada positiva de la varianza.
Coefficiente de Variación	CV	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$	Es el cociente de la desviación típica y la media

Ver el ejemplo 11 (página 255). Hacer los ejercicios 29, 30 y 31 de la página 255. Los que no den tiempo, para hacer en casa.

Ejercicio 29: Las longitudes (en mm) de una muestra de tornillos son las siguientes. Calcula sus medidas de dispersión utilizando las marcas de clase.

Intervalos	f_i	Marca de Clase
[13, 14)	8	13,5
[14, 15)	7	14,5
[15, 16)	2	15,5
[16, 17)	3	16,5
TOTAL	20	

Calculamos la media antes:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{8 \cdot 13,5 + 7 \cdot 14,5 + 2 \cdot 15,5 + 3 \cdot 16,5}{20} = \frac{290}{20} = 14,5$$

$$\text{Rango o Recorrido: } R = Máx - Mín = 16,5 - 13,5 = 3$$

$$\text{Desviación media: } DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{8 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{20} = \frac{16}{20} = 0,8$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{8 \cdot 1^2 + 7 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2}{20} = \frac{22}{20} = 1,1$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1^2 + 7 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2}{20}} = \sqrt{\frac{22}{20}} = \sqrt{1,1} \approx 1,0488$$

$$\text{Coeficiente de Variación: } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{1,1}}{14,5} \approx 0,07233$$

Ejercicio 30: Las notas obtenidas por un alumno en cinco exámenes han sido: 3, 8, 5, 7 y 4, y las de otro alumno 2, 9, 4, 5 y 7. ¿En qué alumno es mayor la dispersión?

Alumno 1	3	4	5	7	8
Alumno 2	2	4	5	7	9

A simple vista, y ordenando los valores, vemos que el alumno 2 tiene notas “más extremas”: un 2 y un 9. Pero lo calculamos.

$$\bar{x}_1 = \frac{3+4+5+7+8}{5} = \frac{27}{5} = 5,4$$

$$R_1 = 8 - 3 = 5$$

$$DM_1 = \frac{2,4+1,4+0,4+1,6+2,6}{5} = \frac{8,4}{5} = 1,68$$

$$\sigma_1^2 = \frac{2,4^2+1,4^2+0,4^2+1,6^2+2,6^2}{5} = \frac{17,2}{5} = 3,44$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2,4^2+1,4^2+0,4^2+1,6^2+2,6^2}{5}} = \sqrt{\frac{17,2}{5}} \approx 1,8547$$

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{\sqrt{17,2/5}}{5,4} = 0,3435$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2+4+5+7+9}{5} = \frac{27}{5} = 5,4$$

$$R_2 = 9 - 2 = 7$$

$$DM_2 = \frac{3,4+1,4+0,4+1,6+3,6}{5} = \frac{10,4}{5} = 2,08$$

$$\sigma_2^2 = \frac{3,4^2+1,4^2+0,4^2+1,6^2+3,6^2}{5} = \frac{29,2}{5} = 5,84$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{3,4^2+1,4^2+0,4^2+1,6^2+3,6^2}{5}} = \sqrt{\frac{29,2}{5}} \approx 2,4166$$

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{\sqrt{29,2/5}}{5,4} = 0,4475$$

Mismo valor medio.

Mayor recorrido en el alumno 2.

Mayor desviación media en el alumno 2.

Mayor varianza en el alumno en el alumno 2.

Mayor desviación típica en el alumno 2.

Mayor coeficiente de variación en el alumno 2.

Ejercicio 31: Pregunta a 5 compañeros por su edad y su altura. Compara la dispersión de las dos variables.

Este ejercicio lo realizarían los alumnos con sus compañeros. Sus edades son más similares que sus estaturas, por lo que la dispersión será mayor en los datos referidos a la altura.

Ver en páginas 256 y 257 “Lo Esencial” con la teoría y los ejemplos que se muestran.

Hacer las actividades de “Y Ahora... Practica” de la página 257.

Construir tablas de frecuencias

Ejercicio 1: Si la frecuencia relativa acumulada de un dato es 0'35. Esto significa que:

- a) Hay 35 datos menores \rightarrow No
- b) El 35% de los datos son menores o iguales \rightarrow No
- c) Si no conocemos la frecuencia absoluta, no podemos asegurar nada \rightarrow Sí
- d) El dato se repite 35 veces \rightarrow No

Dibujar un histograma

Ejercicio 2: Si la frecuencia absoluta de $[a, b)$ es c , la altura del rectángulo al representarlo es:

- a) $a \rightarrow$ No
- b) $b \rightarrow$ No
- c) $c \rightarrow$ Sí
- d) $a + b \rightarrow$ No

Calcular las medidas estadísticas

Ejercicio 3: Para los datos 1, 2, 1, 1, 3:

- a) $\bar{x} = 2 \rightarrow \bar{x} = \frac{1+2+1+1+3}{5} = 1,6 \rightarrow$ No
- b) $\sigma = 0 \rightarrow \sigma_1 = \sqrt{\frac{0,6^2 + 0,4^2 + 0,6^2 + 0,6^2 + 1,4^2}{5}} = \sqrt{\frac{3,2}{5}} = 0,8 \rightarrow$ No
- c) $Me = 1 \rightarrow 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \rightarrow$ Sí (la mediana es 1)
- d) $R = 8 \rightarrow 3 - 1 = 2 \rightarrow$ No

Ejercicio 32: Queremos hacer un estudio de las horas que los alumnos dedican a la lectura.

- a) Elige una muestra para realizar el estudio \rightarrow Un aula de cada curso de la ESO.
- b) ¿Qué tamaño tiene dicha muestra? \rightarrow Entre 80 y 100 individuos.
- c) ¿Cuál es la población? \rightarrow Todos los alumnos.

Ejercicio 33: Indica el tipo de variable estadística que estamos estudiando y di, en cada caso, qué sería mejor, si estudiar una muestra o la población.

- a) El programa favorito de los miembros de tu familia → Variable cualitativa. Población.
- b) La talla de calzado de los alumnos de un IES → Variable cuantitativa discreta. Muestra.
- c) Temperatura media diaria de tu provincia → Variable cuantitativa continua. Población.
- d) Edad de los habitantes de un país → Variable cuantitativa discreta. Muestra.
- e) Sexo de los habitantes de un pueblo → Variable cualitativa. Población.
- f) Dinero gastado a la semana por tus amigos → Variable cuantitativa discreta. Muestra.
- g) Efectos de un nuevo medicamento en el ser humano → Variable cualitativa. Muestra.
- h) El color del pelo de tus compañeros de clase → Variable cualitativa. Población.

Ejercicio 34: De las siguientes variables, ¿cuáles son discretas?

- a) Número de mascotas → Sí
- b) Talla de calzado → Sí
- c) Perímetro craneal → No
- d) Ingresos diarios en una frutería → No (solo dos decimales)
- e) Kilogramos de carne consumidos en el comedor de un IES durante una semana → Sí

Ejercicio 35: Al preguntar a 20 personas sobre el número de veces que habían viajado al extranjero, el resultado fue:

3	5	4	4	2	3	3	3	5	2	6	1	2	3	3	6	5	4	4	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- a) Organiza los datos haciendo un recuento.

1 ha estado una vez en el extranjero; 3 han estado 2 veces; 7 han estado 3 veces; 4 han estado 4 veces; 3 han estado 5 veces; y 2 han estado 6 veces.

b) Obtén la tabla de frecuencias.

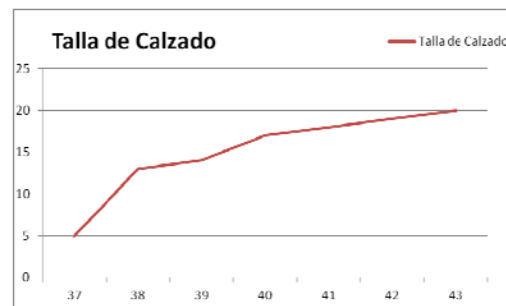
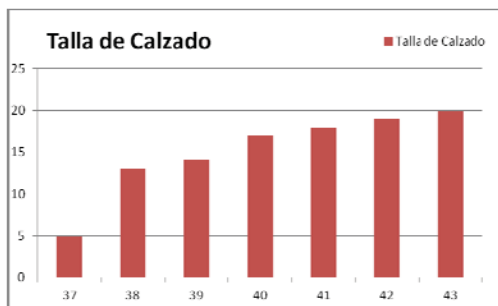
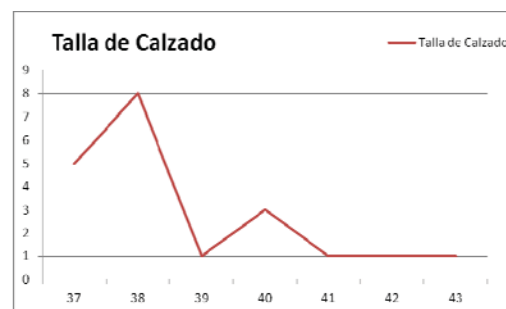
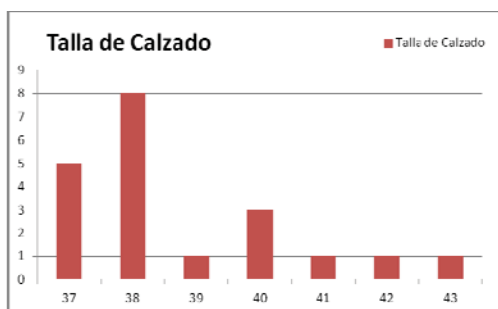
Veces en el Extranjero	f_i
1	1
2	3
3	7
4	4
5	3
6	2
TOTAL	20

Ejercicio 36: La talla de calzado que utilizan 20 alumnos en una clase de Educación Física es:

37	40	39	37	38	38	38	41	42	37	43	40	38	38	38	40	37	37	38	38
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias para las frecuencias absolutas y para las frecuencias absolutas acumuladas.

Talla Calzado	f_i	F_i
37	5	5
38	8	13
39	1	14
40	3	17
41	1	18
42	1	19
43	1	20
TOTAL	20	



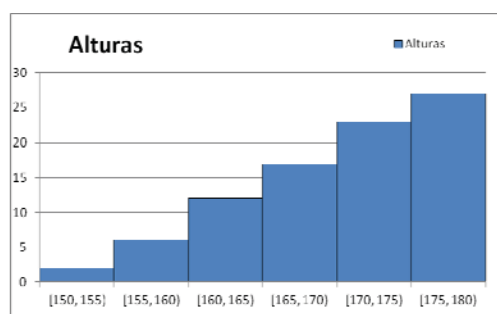
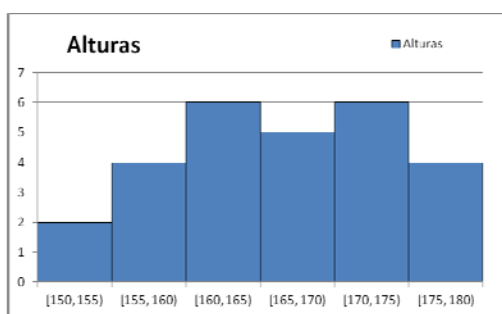
Ejercicio 37: Estas son las estaturas (en cm) de 27 jóvenes:

155 178 170 165 173 168 160 166 176
 169 158 170 179 161 164 156 170 171
 167 151 163 158 164 174 176 164 154

a) Utiliza intervalos de amplitud 5 para formar una tabla de frecuencias.

Alturas	f_i	F_i
[150, 155)	2	2
[155, 160)	4	6
[160, 165)	6	12
[165, 170)	5	17
[170, 175)	6	23
[175, 180)	4	27
TOTAL	27	

b) Representa los datos en un histograma utilizando las frecuencias absolutas y las frecuencias absolutas acumuladas.



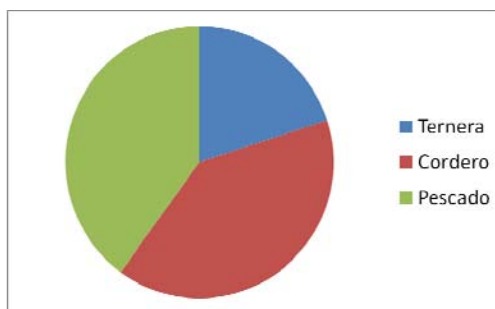
Ejercicio 38: De los 30 asistentes a una cena, el 20% comió ternera; el 40% cordero y el resto pescado. Indica la variable estadística y organiza los resultados en una tabla de frecuencias. Después, representa los datos en un gráfico de sectores.

Plato de la Cena	f_i
Ternera	6
Cordero	12
Pescado	12
TOTAL	30

← 20% de 30 = 6

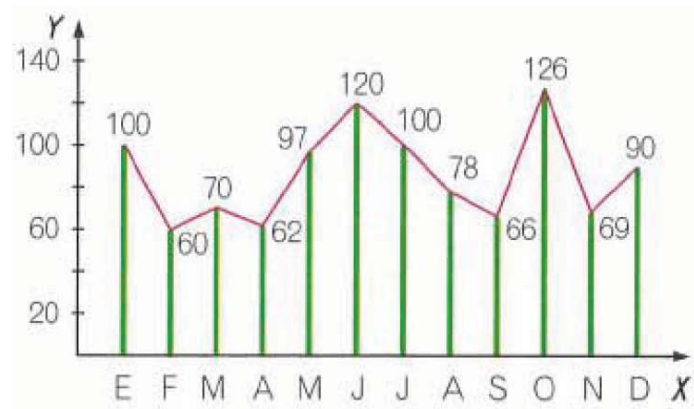
← 40% de 30 = 12

← Resto = 30 – 6 – 12 = 12



Ejercicio 39: El número de veces que se alquiló cada mes la pista de tenis de un polideportivo viene representado en este gráfico.

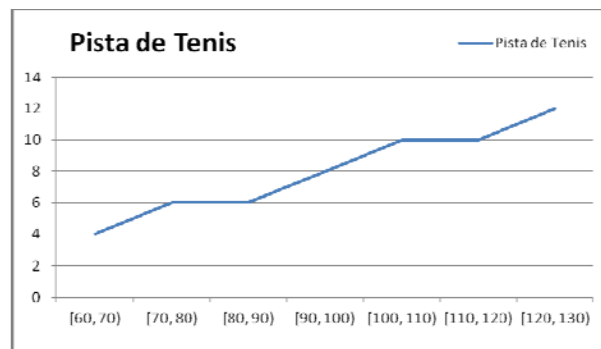
- Obtén las frecuencias relativas y acumuladas.
- ¿En qué porcentaje de meses se alquiló la pista más de 80 veces?
- Representa el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.



Presentamos a continuación la tabla de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas:

Uso pista de Tenis	f_i	F_i	h_i	H_i
[60, 70)	4	4	0,3	0,3
[70, 80)	2	6	0,16	0,5
[80, 90)	0	6	0	0,5
[90, 100)	2	8	0,16	0,6
[100, 110)	2	10	0,16	0,83
[110, 120)	0	10	0	0,83
[120, 130)	2	12	0,16	1
TOTAL	12		1	

En un 50% de los meses se alquiló la pista más de 80 veces.



Ejercicio 40: Obtén las medidas de centralización de esta serie de datos.

3	2	4	9	8
1	0	2	4	1
8	6	3	4	0
7	3	2	4	5
2	5	6	5	4
9	2	5	7	4
1	8	6	1	5
7	1	3	0	5
0	2	1	5	6

x_i	f_i	F_i
0	4	4
1	6	10
2	6	16
3	4	20
4	6	26
5	7	33
6	4	37
7	3	40
8	3	43
9	2	45
TOTAL	45	

Medidas de centralización:

- **Media aritmética:** $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \dots + f_n \cdot x_n}{N}$
- **Moda, M_o :** es el valor que tiene mayor frecuencia
- **Mediana, M_e :** valor que ocupa la posición central de los datos después de ordenarlos

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9}{45} = \frac{176}{45} = 3,91$$

Moda: el valor más frecuente es el 5

Mediana: el valor mediano es el 4 (es la posición 23, el valor central)

Ejercicio 41: Vuelve a realizar la actividad anterior con intervalos de amplitud 2.

¿Obtienes los mismos resultados? ¿Por qué crees que sucede esto?

3	2	4	9	8
1	0	2	4	1
8	6	3	4	0
7	3	2	4	5
2	5	6	5	4
9	2	5	7	4
1	8	6	1	5
7	1	3	0	5
0	2	1	5	6

Intervalo	Marca x_i	f_i	F_i
[0, 1)	0,5	10	10
[2, 3)	2,5	10	20
[4, 5)	4,5	13	33
[6, 7)	6,5	7	40
[8, 9)	8,5	5	45
TOTAL		45	

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{10 \cdot 0,5 + 10 \cdot 2,5 + 13 \cdot 4,5 + 7 \cdot 6,5 + 5 \cdot 8,5}{45} = \frac{176,5}{45} = 3,92$$

Moda: el valor más frecuente es el 4,5

Mediana: el valor mediano es el 4,5 (es la posición 23, el valor central)

No obtenemos los mismos resultados y es normal. Ahora estamos usando las marcas de clase, que son valores diferentes, las frecuencias han cambiado al agrupar datos...

Ejercicio 42: Determina la mediana de estos datos.

a)

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	5	3	4	2	4	6

b)

Var.	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)
f_i	1	3	5	2

a) Para ver la mediana ponemos todos los datos ordenados:

1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Vemos que el valor central es $(3+4)/2 = 3,5$

b) Vemos que hay $1 + 3 + 5 + 2 = 11$ valores. Así que tenemos que buscar el valor central que ocupa la posición 6. Ese valor está en el intervalo [20, 30). Tomando la marca de clase, podemos decir que el valor mediano es 25.

Ejercicio 43: Obtén la media, mediana, moda y cuartiles de los datos de esta tabla.

x_i	26	28	30	32
f_i	6	7	4	3

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{6 \cdot 26 + 7 \cdot 28 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 32}{20} = \frac{568}{20} = 28,4$$

Moda: el valor más frecuente es el 28

Mediana: el valor mediano es el 28 (es la media de la posición 10 y 11, el valor central)

Cuartiles: Los cuartiles, Q_1, Q_2 y Q_3 (primero, segundo y tercer cuartil, respectivamente), son medidas que separan los datos en 4 partes iguales, es decir, en cada tramo está el 25% de los datos recogidos en el estudio $\rightarrow Q_1 = 26 \rightarrow Q_2 = 28 \rightarrow Q_3 = 30$

26	26	26	26	26	26	28	28	28	28	28	28	28	30	30	30	30	32	32	32
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

a) Si multiplica por 3 los valores, ¿cuál será la media? ¿Y la mediana? ¿Y la moda?

x_i	78	84	90	96
f_i	6	7	4	3

Media: $\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{6 \cdot 78 + 7 \cdot 84 + 4 \cdot 90 + 3 \cdot 96}{20} = \frac{1704}{20} = 85,2 \rightarrow 3 \text{ veces más}$

Moda: el valor más frecuente es el 84 $\rightarrow 3$ veces más

Mediana: el valor mediano es el 84 (media de la posición 10 y 11) $\rightarrow 3$ veces más

b) Si a todos los valores de una variable les restamos o los dividimos entre un mismo número, ¿cuál es la nueva media?

El nuevo valor de la media será el antiguo menos el valor restado o el antiguo entre el valor por el que dividimos. Lo mismo al sumar y multiplicar.

Ejercicio 44: Los siguientes datos: 10, 17, a, 19, 21, b, 25 tienen como media, mediana y moda el valor 19. ¿Cuánto valen a y b?

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{10 + 17 + a + 19 + 21 + b + 25}{7} = \frac{92 + a + b}{7} = 19 \rightarrow 92 + a + b = 133 \rightarrow a + b = 41$$

Mediana: si es 19, tenemos que el valor central será 19. Suponemos que los números están ordenados, así que $a < b$, $17 \leq a \leq 19$ y $21 \leq b \leq 25$.

Moda: si la moda es 19, y todos los valores aparecen una vez, debe repetirse el valor 19 al menos una vez más. Así que $a = 19$. Por lo que: $a + b = 41 \rightarrow b = 41 - a = 41 - 19 \rightarrow b = 22$

Ejercicio 45: Considera el conjunto de datos: 23, 17, 19, x, y, 16. Sabiendo que la media es 20 y la moda es 23, ¿cuáles son los valores de x e y?

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{23 + 17 + 19 + x + y + 16}{6} = \frac{75 + x + y}{6} = 20 \rightarrow 75 + x + y = 120 \rightarrow x + y = 45$$

Moda: si la moda es 23, al menos tiene que haber algún dato más que sea 23 $\rightarrow x = 23$

Así que: $x + y = 45 \rightarrow 23 + y = 45 \rightarrow y = 45 - 23 \rightarrow y = 22$

Ejercicio 46: Datos de una encuesta sobre el número de radios en los hogares españoles.

Número de radios	0	1	2	3	4
Número de hogares	432	8343	6242	1002	562

a) ¿Cuántas radios tiene la cuarta parte de los hogares?

$$432 + 8343 + 6242 + 1002 + 562 = 16581 \rightarrow 16581/4 = 4145,25$$

El 25% de los hogares (la cuarta parte) tiene 0 ó 1 radio.

b) ¿Y el 75%?

$$4145,25 \cdot 3 = 12435,75 \rightarrow \text{El 75\% de los hogares tiene 0, 1 ó 2 radios.}$$

c) ¿Qué significado tiene la mediana?

La mediana es el valor que ocupa la posición central de los datos después de ordenarlos. Su significado, en este caso ($4145,25 \cdot 2 = 8290,5$), marca que el 50% de los hogares tiene 0 ó 1 radio y el 50% de los hogares tiene 1, 2, 3 ó 4 radios (el 50% tiene 1 o menos radios y el 50% tiene 1 o más radios).

Ejercicio 47: Resuelve con tu calculadora esta actividad. Durante un mes, ocho dependientes vendieron los siguientes aparatos de aire acondicionado: 8, 11, 5, 14, 8, 11, 16, 11. Calcula la media, la desviación típica y el coeficiente de variación de los datos.

5	8	8	11	11	11	14	16
---	---	---	----	----	----	----	----

Media:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{5+8+8+11+11+11+14+16}{8} = \frac{84}{8} = 10,5$$

Desviación Típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(5-10,5)^2 + 2 \cdot (8-10,5)^2 + 3 \cdot (11-10,5)^2 + (14-10,5)^2 + (16-10,5)^2}{8}} = \sqrt{\frac{86}{8}} = 3,279$$

Coeficiente de Variación:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3,279}{10,5} = 0,312$$

Ejercicio 48: Las edades (en años) de los 30 primeros visitantes al Planetario han sido:

20 7 10 13 4 7 8 11 16 14 8 10 16 18 12
3 6 9 9 4 13 5 10 17 10 18 5 7 10 20

Obtén sus medidas estadísticas.

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
f_i	1	2	2	1	3	2	2	5	1	1	2	1	0	2	1	2	0	2
F_i	1	3	5	6	9	11	13	18	19	20	22	23	23	25	26	28	28	30

$$\bar{x} = \frac{3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 11 + 12 + 13 \cdot 2 + 14 + 16 \cdot 2 + 17 + 18 \cdot 2 + 20 \cdot 2}{30} = \frac{320}{30} = 10,6$$

$$Mo = 10$$

$$Me = 10$$

$$R = 20 - 3 = 17$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(3-10,6)^2 + 2 \cdot (4-10,6)^2 + 2 \cdot (5-10,6)^2 + (6-10,6)^2 + 3 \cdot (7-10,6)^2 + 2 \cdot (8-10,6)^2 + \dots}{30}} = 4,8259$$

$$\sigma^2 = 4,8259^2 = 23,28$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4,8259}{10,6} = 0,4524$$

Ejercicio 49: El peso medio de una muestra de recién nacidos es $\bar{x} = 2,85$ Kg y su desviación típica es $\sigma = 1$ Kg. El peso medio de sus madres es $\bar{x} = 62$ Kg, con una desviación típica de $\sigma = 15$ Kg. ¿En cuál de las distribuciones es mayor la dispersión?

$$CV_{\text{bebés}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{2,85} = 0,35 = 35\%$$

$$CV_{\text{madres}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{15}{62} = 0,24 = 24\%$$

Comparamos los coeficientes de variación: la dispersión es mayor en los pesos de los bebés que en los de sus madres (aunque pueda parecer lo contrario si observamos sus desviaciones típicas: $1 < 15$).

Ejercicio 50: Las notas de Alberto en 5 exámenes son 4, 6, 6, 7 y 5, y las de Ana son 43, 62, 60, 50 y 55. ¿Cuál de ellos es más regular en su rendimiento académico?

$$\bar{x}_{\text{Alberto}} = \frac{4 + 6 + 6 + 7 + 5}{5} = \frac{28}{5} = 5,6$$

$$\bar{x}_{\text{Ana}} = \frac{43 + 62 + 60 + 50 + 55}{5} = \frac{270}{5} = 54$$

$$\sigma_{\text{Alberto}} = \sqrt{\frac{(4-5,6)^2 + 2 \cdot (6-5,6)^2 + (7-5,6)^2 + (5-5,6)^2}{5}} = \sqrt{\frac{5,2}{5}} = \sqrt{1,04} = 1,0198$$

$$\sigma_{\text{Ana}} = \sqrt{\frac{(43-54)^2 + (62-54)^2 + (60-54)^2 + (50-54)^2 + (55-54)^2}{5}} = \sqrt{\frac{238}{5}} = \sqrt{47,6} = 6,8993$$

$$CV_{\text{Alberto}} = \frac{\sigma_{\text{Alberto}}}{\bar{x}_{\text{Alberto}}} = \frac{1,0198}{5,6} = 0,1821 = 18,21\%$$

$$CV_{\text{Ana}} = \frac{\sigma_{\text{Ana}}}{\bar{x}_{\text{Ana}}} = \frac{6,8993}{54} = 0,1278 = 12,78\%$$

Ana es más regular en su rendimiento (su dispersión es menor).

Ejercicio 51: Halla la media, mediana, moda y desviación típica de los siguientes datos.

Peso (Kg)	Número de alumnos
[41, 47)	5
[47, 53)	6
[53, 59)	1
[59, 65)	4
[65, 71)	4

Media: $\bar{x} = \frac{44 \cdot 5 + 50 \cdot 6 + 56 \cdot 1 + 62 \cdot 4 + 68 \cdot 4}{20} = \frac{1096}{20} = 54,8$

Mediana: media de los valores 10 y 11, ordenando los dados de menor a mayor:
 $(50+50)/2=50$

Moda: el valor más repetido es 50.

Desviación Típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{5 \cdot (44 - 54,8)^2 + 6 \cdot (50 - 54,8)^2 + (56 - 54,8)^2 + 4 \cdot (62 - 54,8)^2 + 4 \cdot (68 - 54,8)^2}{20}} = 9,01998$$

Ejercicio 52: Las notas obtenidas por 40 alumnos en Música han sido:

6	4	1	7	3	6	6	2	5	2	4	9	5	10	8	2	6	10	5	7
5	3	7	8	4	6	0	5	8	7	6	9	7	2	5	6	8	7	3	6

Calcula la media y la desviación típica de los datos, considerando primero la variable como discreta y, después, agrupando los datos en los intervalos [0, 5), [5, 7), [7, 9) y [9, 10]. ¿Qué diferencias observas?

x_i	f_i
0	1
1	1
2	4
3	3
4	3
5	6
6	8
7	6
8	4
9	2
10	2
TOTAL	40

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 10}{40} = \frac{220}{40} = 5,5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1 \cdot (-5,5)^2 + 1 \cdot (-4,5)^2 + 4 \cdot (-3,5)^2 + 3 \cdot (-2,5)^2 + 3 \cdot (-1,5)^2 + 6 \cdot (-0,5)^2 + 8 \cdot (0,5)^2 + 6 \cdot (1,5)^2 + 4 \cdot (2,5)^2 + 2 \cdot (3,5)^2 + 2 \cdot (4,5)^2}{20}} = 3,41$$

Ahora, agrupamos los datos:

Intervalos	f_i	Marcas x_i
[0, 5)	12	2,5
[5, 7)	14	6
[7, 9)	10	8
[9, 10]	4	9,5
TOTAL	40	

$$\bar{x} = \frac{12 \cdot 2,5 + 14 \cdot 6 + 10 \cdot 8 + 4 \cdot 9,5}{40} = \frac{232}{40} = 5,8 \quad \sigma = \sqrt{\frac{12 \cdot (-3,3)^2 + 14 \cdot (0,2)^2 + 10 \cdot (2,2)^2 + 4 \cdot (3,7)^2}{20}} = 3,423$$

La media aumenta un poco ya que usamos las marcas de los intervalos y no los datos originales, y las primeras, toman valores más altos (teniendo en cuenta su valor y su frecuencia). La desviación típica aumenta muy poco.

Ejercicio 53: Los precios del alquiler mensual de la vivienda se recogen en la siguiente tabla:

Precio (€)	Número de Viviendas f_i	F_i
240	13	13
270	33	46
300	40	86
330	35	121
360	30	151
390	16	167
420	20	187
TOTAL	187	

a) ¿Cuál es la media de los alquileres?

$$\bar{x} = \frac{13 \cdot 240 + 33 \cdot 270 + 40 \cdot 300 + 35 \cdot 330 + 30 \cdot 360 + 16 \cdot 390 + 20 \cdot 420}{187} = \frac{61020}{187} = 326,31$$

b) Di cuál es el precio más común → El precio más común es 300€ (es la moda).

c) Obtén la mediana. ¿Qué significa?

El número total de viviendas son 187. La mitad de este valor es 93,5. En el momento en el que se alcanza este valor (94) es con 330€. El significado de este valor es que el 50% de los valores son menores que 300€ y el 50% de los valores son mayores que 300€.

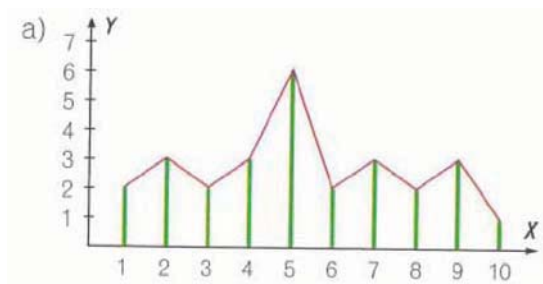
d) Calcula la varianza y la desviación típica. ¿Para qué sirven estos números?

$$\sigma^2 = \frac{13 \cdot (-86,31)^2 + 33 \cdot (-56,31)^2 + 40 \cdot (-26,31)^2 + 35 \cdot (3,69)^2 + 30 \cdot (33,69)^2 + 16 \cdot (63,69)^2 + 20 \cdot (93,69)^2}{187} = 2696,01$$

$$\sigma = \sqrt{2696,01} = 51,92$$

Estos dos valores nos dan información sobre la dispersión de los datos.

Ejercicio 54: A partir de estos gráficos determina su tabla de frecuencias y halla la media, mediana, moda y desviación típica de los datos.



2	3	2	3	6	2	3	2	3	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



1	2	2	2	2	3	3	3	3	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



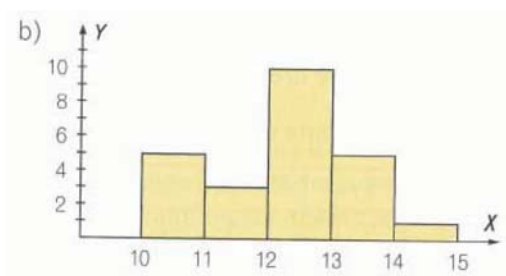
x_i	f_i	F_i
1	1	1
2	4	5
3	4	9
6	1	10
TOTAL	10	

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 6}{10} = \frac{1 + 8 + 12 + 6}{10} = \frac{27}{10} = 2,7$$

$$Me = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$Mo = 2$ y 3 (serie bimodal; si hay más de 2 modas, serie multimodal)

$$\sigma = \sqrt{\frac{1 \cdot (-1,7)^2 + 4 \cdot (-0,7)^2 + 4 \cdot (0,3)^2 + 1 \cdot (3,3)^2}{10}} = \sqrt{\frac{16,1}{10}} = \sqrt{1,61} = 1,2689$$



Intervalo	x_i	f_i	F_i
[10, 11)	10,5	5	5
[11, 12)	11,5	3	8
[12, 13)	12,5	10	18
[13, 14)	13,5	5	23
[14, 15]	14,5	1	24
TOTAL		24	

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 10,5 + 3 \cdot 11,5 + 10 \cdot 12,5 + 5 \cdot 13,5 + 1 \cdot 14,5}{24} = \frac{294}{24} = 12,25$$

$$Me = 12,5$$

$$Mo = 12,5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{5 \cdot (-1,75)^2 + 3 \cdot (-0,75)^2 + 10 \cdot (0,25)^2 + 5 \cdot (1,25)^2 + 1 \cdot (2,25)^2}{24}} = \sqrt{\frac{30,5}{24}} = \sqrt{1,2708\bar{3}} = 1,1273$$

Ejercicio 55: Un equipo de baloncesto necesita un alero. Se han seleccionado dos jugadores que, en los últimos cinco partidos, han anotado estos puntos. ¿Cuál de ellos elegirías?

Jugador A	16	14	13	13	14
Jugador B	25	10	8	6	21

Se calculan la media y la desviación típica:

$$\bar{x}_A = \frac{16 + 14 + 13 + 13 + 14}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{(2)^2 + (0)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (0)^2}{5}} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{1,2} = 1,0954$$

$$\bar{x}_B = \frac{25 + 10 + 8 + 6 + 21}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{(11)^2 + (-4)^2 + (-6)^2 + (-8)^2 + (7)^2}{5}} = \sqrt{\frac{286}{5}} = \sqrt{57,2} = 7,563$$

Se analizan los resultados anteriores. Como las medias son iguales, si el entrenador quisiera un jugador regular, escogería al jugador A (una desviación típica baja significa datos parecidos o similares). Sin embargo, si quisiera un jugador que pudiera actuar de revulsivo, escogería al B, ya que alterna partidos muy buenos con otros peores (desviación típica elevada indica datos muy diferentes).

Ejercicio 56: Compara el rendimiento de dos alumnos que realizan 5 pruebas, obteniendo estos resultados.

Juan	2	6	5	7	5
Ana	0	1	9	8	7

$$\bar{x}_{Juan} = \frac{2+6+5+7+5}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\sigma_{Juan} = \sqrt{\frac{(2-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (5-5)^2}{5}} = \sqrt{\frac{14}{5}} = \sqrt{2,8} = 1,6733$$

$$\bar{x}_{Ana} = \frac{0+1+9+8+7}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\sigma_{Ana} = \sqrt{\frac{(0-5)^2 + (1-5)^2 + (9-5)^2 + (8-5)^2 + (7-5)^2}{5}} = \sqrt{\frac{70}{5}} = \sqrt{14} = 3,7417$$

Los dos tienen el mismo valor medio, 5, pero Ana tiene mayor dispersión en sus datos, es decir, es más variable. Juan tiene unos resultados más similares y menos dispersos.

Ejercicio 57: En la primera evaluación, de 30 alumnos de una clase, el 10% aprobó todo, el 20% suspendió 1 asignatura, el 50% suspendió 2 asignaturas y el resto suspendió más de 2. Realiza con estos datos la tabla de frecuencias. ¿Hay algún tipo de frecuencia que responda a la pregunta de cuántos alumnos suspendieron menos de 2 asignaturas? Razona tu respuesta.

	Asignaturas suspendidas	f_i	F_i
10% de 30 →	0	3	3
20% de 30 →	1	6	9
50% de 30 →	2	15	24
El resto: 30 – 24	3 o más	6	30
	TOTAL	30	

¿Cuántos alumnos suspendieron menos de 2 asignaturas? → Tenemos que contar cuántos alumnos suspendieron 0 ó 1 asignaturas → $3 + 6 = 9 \rightarrow F_2 = 9$

Ejercicio 58: Un corredor entrena, de lunes a viernes, recorriendo las siguientes distancias: 2, 5, 5, 7 y 3 km, respectivamente (2, 3, 5, 5, 7). Si el sábado también entrena:

a) ¿Cuántos kilómetros debe recorrer para que la media sea la misma?

$$\bar{x} = \frac{2+5+5+7+3}{5} = \frac{22}{5} = 4,4$$

$$Me=5$$

$$Mo=5$$

Que la media no varíe: $\frac{2+5+5+7+3+s}{6} = \frac{22+s}{6} = 4,4 \rightarrow 22+s = 26,4 \rightarrow s = 4,4$

b) ¿Y para que la mediana no varíe?

Que la mediana no varíe: 5 km o más → Dos ejemplos: 2, 3, 5, 5, 5, 7 y 2, 3, 5, 5, 7, 8

c) ¿Y para que la moda permanezca constante?

Que la moda no varíe: ni 2, ni 3, ni 7 km. Así, la moda sigue siendo 5 km.

Ejercicio 59: Aplicada una prueba de Cálculo Mental (CM) y una prueba de Psicomotricidad (P) a los 28 alumnos de una clase, los resultados fueron:

Puntuación	CM	P
[10, 20)	2	1
[20, 30)	8	7
[30, 40)	11	9
[40, 50)	4	5
[50, 60)	2	4
[60, 70)	1	2

a) ¿En qué prueba se obtuvieron mejores resultados (mayor media)?

$$\bar{x}_{CM} = \frac{2+8+11+4+2+1}{6} = \frac{28}{6} = 4,6 \quad \bar{x}_P = \frac{1+7+9+5+4+2}{6} = \frac{28}{6} = 4,6$$

En las dos pruebas se obtuvieron los mismos resultados medios.

b) ¿Dónde fue mayor la dispersión? (Usa el coeficiente de variación)

$$\sigma_{CM} = \sqrt{\frac{(2-4,6)^2 + (8-4,6)^2 + (11-4,6)^2 + (4-4,6)^2 + (2-4,6)^2 + (1-4,6)^2}{6}} = \sqrt{\frac{79,3}{6}} = \sqrt{13,2} = 3,6362$$

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{(1-4,6)^2 + (7-4,6)^2 + (9-4,6)^2 + (5-4,6)^2 + (4-4,6)^2 + (2-4,6)^2}{6}} = \sqrt{\frac{45,3}{6}} = \sqrt{7,5} = 2,7487$$

$$CV_{CM} = \frac{\sigma_{CM}}{\bar{x}_{CM}} = \frac{\sqrt{13,2}}{4,6} = 0,7792 = 77,92\% \quad CV_P = \frac{\sigma_P}{\bar{x}_P} = \frac{\sqrt{7,5}}{4,6} = 0,5890 = 58,90\%$$

La prueba de Cálculo Mental (CM) fue la que tuvo mayor dispersión.

Ejercicio 60: De los 50 alumnos que respondieron a una prueba de 12 preguntas, el 10% contestó correctamente a 3, el 50% a 7, el 30% a 10 y el resto al total de la prueba. Calcula la media, mediana y moda de los datos. Halla también su desviación típica.

	Preguntas Correctas	f_i	F_i
10% de 50 →	3	5	5
50% de 50 →	7	25	30
30% de 50 →	10	15	45
El resto: 50 - 45	12	5	50
	TOTAL	50	

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 3 + 25 \cdot 7 + 15 \cdot 10 + 5 \cdot 12}{50} = \frac{400}{50} = 8 \quad Me = 7 \quad Mo = 7$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{5 \cdot (3-8)^2 + 25 \cdot (7-8)^2 + 15 \cdot (10-8)^2 + 5 \cdot (12-8)^2}{50}} = \sqrt{\frac{290}{50}} = \sqrt{5,8} = 2,4083$$

Ejercicio 61: Los diplomados en Informática de gestión tienen un salario medio, en su primer empleo, de 1280€, con una desviación típica de 380€. Por otra parte los diplomados en Informática de sistemas tienen un salario medio de 1160€, con una desviación típica de 350€. Si a un diplomado en Informática de gestión le ofrecen un sueldo de 1400€, y a un diplomado en Informática de sistemas, un sueldo de 1340€:

- ¿Cuál de los dos recibe mejor oferta?
- Razona por qué es mejor una u otra oferta.

Ejercicio 62: Un conjunto de datos, compuesto de números enteros positivos y diferentes entre sí, tiene 47 como media. Si uno de los datos es 97 y la suma de todos los datos es 329, ¿cuál es el mayor número que puede tener?

Ejercicio 63: Dado el conjunto de datos: 14 12 26 16 x, calcula x para que la mediana y la media de los datos sean iguales.

$$\text{Datos } 12 \ 14 \ 16 \ 26: \quad \bar{x} = \frac{12+14+16+26}{4} = \frac{68}{4} = 17 \quad Me = \frac{14+16}{2} = 15$$

Datos 12 14 16 26 x:

$$\frac{12+14+16+26+x}{5} = \frac{68+x}{5} = 17 \rightarrow 68+x = 17 \cdot 5 \rightarrow x = 85 - 68 \rightarrow x = 17$$

12 14 16 17 26 → $Me = 16$ → La mediana cambia si el dato es 17, para que no cambie la media. Así que, no podemos elegir un valor para que se cumpla que no cambie ni la media ni la mediana a la vez.

Ejercicio 64: Si en un conjunto de cinco datos, la media es 10 y la mediana es 12, ¿cuál es el menor valor que puede tomar el recorrido?

$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \leftarrow$ La serie está ordenada, así que la mediana es a_3

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = 10 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 10 \cdot 5 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 50$$

$$Me = 12 \rightarrow a_3 = 12$$

$$\text{Así que: } a_1 + a_2 + 12 + a_4 + a_5 = 50 \rightarrow a_1 + a_2 + a_4 + a_5 = 50 - 12 \rightarrow a_1 + a_2 + a_4 + a_5 = 38$$

a_1 y a_2 deben ser menores que 12 (no ponemos iguales a 12 porque la media es 10).

a_3 y a_4 deben ser mayores o iguales que 12. Para reducir el recorrido por la parte alta de la serie, podemos hacer que $a_3 = a_4 = 12 \rightarrow a_1 + a_2 + 12 + 12 = 38 \rightarrow a_1 + a_2 = 14$

Ahora, para reducir el recorrido por la parte inferior, hacemos que los dos valores sean iguales, de esta forma: $a_1 = a_2 \rightarrow a_1 + a_1 = 14 \rightarrow 2a_1 = 14 \rightarrow a_1 = a_2 = 7$

Así que la serie es 7 7 12 12 12, de media 10 y mediana 12, con recorrido $12 - 7 = 5$.

Ejercicio 65: Cuando escribimos en orden creciente la media, la mediana y la moda del conjunto de datos: 10, 2, 5, 2, 4, 2, x, obtenemos una progresión aritmética. Calcula todos los posibles valores de x.

Progresión aritmética: $\bar{x} \ Me \ Mo$

$$\bar{x} = \frac{10 + 2 + 5 + 2 + 4 + 2 + x}{7} = \frac{25 + x}{7} = 3,57 + \frac{x}{7}$$

Al añadir solamente un dato, y tener tres valores iguales (2), tenemos que: $Mo = 2$

$$10, 2, 5, 2, 4, 2, x \rightarrow 2, 2, 2, 4, 5, 10, x$$

$$\text{Si } x = 1 \text{ ó } x = 2: x, 2, 2, 2, 4, 5, 10 \rightarrow Me = 2 \rightarrow \bar{x} \ Me \ Mo \rightarrow \bar{x} \ 2 \ 2 \rightarrow \bar{x} = 2 \rightarrow$$

Pero hemos visto que será $3,57 + \frac{x}{7}$. No es progresión aritmética

$$\text{Si } x = 3 \text{ ó } x = 4: 2, 2, 2, x, 4, 5, 10 \rightarrow Me = x \rightarrow \bar{x} \ Me \ Mo \rightarrow \frac{25 + x}{7} \ x \ 2$$

$$\text{Con } x = 3: \frac{25 + 3}{7} \ 3 \ 2 \rightarrow \frac{28}{7} \ 3 \ 2 \rightarrow 4 \ 3 \ 2 \rightarrow x = 3$$

$$\text{Con } x = 4: \frac{25 + 4}{7} \ 4 \ 2 \rightarrow \frac{29}{7} \ 4 \ 2 \rightarrow \text{No es progresión aritmética}$$

Si $x = 5$: 2, 2, 2, 4, x , 5, 10 $\rightarrow Me = 4 \rightarrow \frac{25+5}{7} = 4 \rightarrow \frac{30}{7} = 4.28 \rightarrow$ No es progresión aritmética

Si $x = 6, 7, 8, 9$ ó 10: 2, 2, 2, 4, 5, x , 10 $\rightarrow Me = 4 \rightarrow \frac{25+x}{7}$

Con $x = 6$: $\frac{25+6}{7} = 4.28 \rightarrow \frac{31}{7} = 4.42 \rightarrow$ No es progresión aritmética

Con $x = 7$: $\frac{25+7}{7} = 4.28 \rightarrow \frac{32}{7} = 4.57 \rightarrow$ No es progresión aritmética

Con $x = 8$: $\frac{25+8}{7} = 4.28 \rightarrow \frac{33}{7} = 4.71 \rightarrow$ No es progresión aritmética

Con $x = 9$: $\frac{25+9}{7} = 4.28 \rightarrow \frac{34}{7} = 4.85 \rightarrow$ No es progresión aritmética

Con $x = 10$: $\frac{25+10}{7} = 4.28 \rightarrow \frac{35}{7} = 5 \rightarrow$ No es progresión aritmética

aritmética

Si x es mayor de 10: 2, 2, 2, 4, 5, 10, x $\rightarrow Me = 4 \rightarrow \frac{25+x}{7}$

Tenemos que hallar un valor que haga que: $\frac{25+x}{7} = 6 \rightarrow 25+x = 6 \cdot 7 \rightarrow x = 42 - 25 = 17$

Las dos soluciones son:

$$- 2, 2, 2, 3, 4, 5, 10 \rightarrow \bar{x} \quad Me \quad Mo \rightarrow 4 \quad 3 \quad 2$$

$$- 2, 2, 2, 4, 5, 10, 17 \rightarrow \bar{x} \quad Me \quad Mo \rightarrow 6 \quad 4 \quad 2$$

Ejercicio 66: Después de ordenar un conjunto de siete datos, tomamos los cuatro primeros datos, y resulta que su media es 5; pero si tomamos los cuatro últimos, su media es 8. Si la media de todos los números es $46/7$, ¿cuál será la mediana?

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \leftarrow$ La serie está ordenada, así que la mediana es a_4

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = 5 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5 \cdot 4 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 20 - a_4$$

$$\frac{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}{4} = 8 \rightarrow a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 8 \cdot 4 \rightarrow a_5 + a_6 + a_7 = 32 - a_4$$

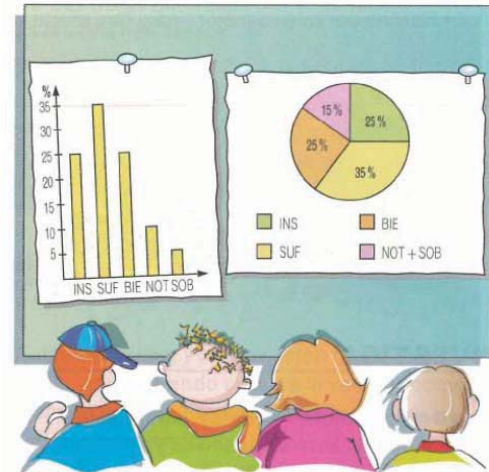
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}{7} = \frac{46}{7} \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 46 \rightarrow$$

$$\rightarrow 20 - a_4 + a_4 + 32 - a_4 = 46 \rightarrow 52 - a_4 = 46 \rightarrow a_4 = 52 - 46 \rightarrow a_4 = 6$$

Ejercicio 67: La Consejería de Educación está valorando el rendimiento de los alumnos en Matemáticas. Por ello, ha elaborado un informe en el que se muestran los resultados de los alumnos de Secundaria en Matemáticas durante el curso pasado. Un resumen del informe se muestra mediante gráficas.

Para realizar el diagrama de sectores han agrupado las notas más altas, NOTABLE y SOBRESALIENTE, y se han incluido los porcentajes de alumnos que han obtenido cada nota.

El informe indica que el número de estudiantes que han obtenido SUFICIENTE es de 28413. A la vista de estos gráficos y de los porcentajes, calcula el número total de alumnos evaluados y cuántos alumnos han obtenido la calificación de SOBRESALIENTE.



$$\text{Alumnos que han obtenido SUFICIENTE: } 28413 \rightarrow 35\% \rightarrow \frac{28413 \cdot 100}{35} = 81180$$

El número total de alumnos evaluados es 81180.

NOTABLE + SOBRESALIENTE = 15%. NOTABLE = 10% y SOBRESALIENTE = 5%. Así que:

$$\frac{81180 \cdot 5}{100} = 4059 \rightarrow 4059 \text{ alumnos han obtenido SOBRESALIENTE.}$$

Ejercicio 68: El número de espectadores de una cadena de televisión determina el coste de la publicidad que se emite. Por eso se hacen públicos regularmente sus índices de audiencia.

Las dos cadenas de televisión con mayor índice de audiencia han presentado sus resultados de los cuatro primeros meses del año. Estos son los gráficos que aparecieron en distintos medios de comunicación.



Ambas cadenas han experimentado un gran incremento, pero los responsables de TV MIRO insisten en que su crecimiento ha sido mayor: “Tal y como muestran las gráficas publicadas en los distintos medios de comunicación, hemos experimentado un crecimiento superior al de Canal Free”.

¿Cuántos espectadores ganó cada cadena?

El Canal Free ganó 40000 espectadores en los cuatro primeros meses del año: pasó de 300000 espectadores a 340000. Por otro lado, el canal TV MIRO ganó 25000 espectadores en el mismo periodo: pasó de 255000 espectadores a 280000.

Crecimiento de Canal Free:

$$\frac{340000 - 300000}{300000} = \frac{40000}{300000} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} = 0,1\bar{3} \rightarrow 13,3\%$$

Crecimiento de TV MIRO:

$$\frac{280000 - 255000}{255000} = \frac{25000}{255000} = \frac{25}{255} = \frac{5}{51} = 0,0980 \rightarrow 9,80\%$$

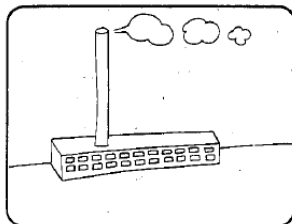
¿Qué representación refleja mejor la situación?

Debería representarse en una única gráfica el crecimiento en espectadores de ambas cadenas para poder comparar mejor los dos valores.

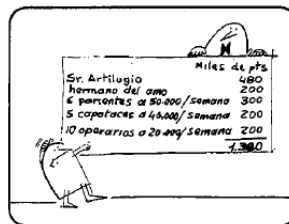
ANEXO 5: Problema de Martin Gardner (1981)

Este ejercicio nos ha servido de base para plantear uno, actualizado, en nuestro trabajo (puede verse en la sección de campos de problema de la moda):

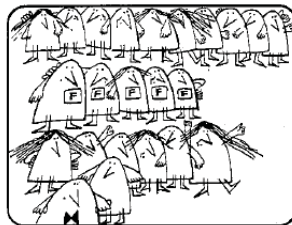
El engañoso «término medio»



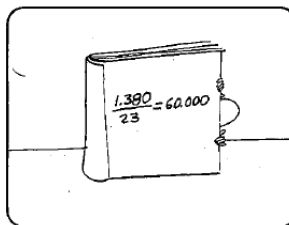
Productos Artilugio (PRODILUGIO, S. A.) tiene una pequeña fábrica de superartilugios.



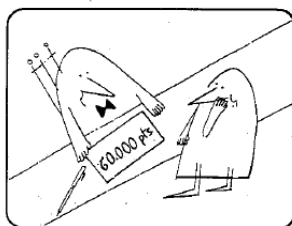
Señor Artilugio: He aquí la nómina semanal. Yo gano 480 000; mi hermano, 200 000; mis seis parientes sacan 50 000 cada uno; los cinco capataces, 40 000, y los 10 operarios, 20 000 cada uno. El total semanal es de 1 380 000 para 23 personas. ¿Me equivoco?



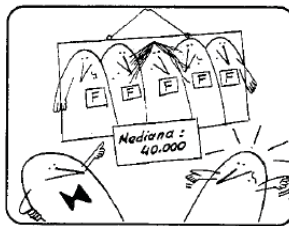
La dirección de la empresa está a cargo del señor Artilugio, su hermano y cinco parientes. La fuerza laboral consiste en cinco encargados y diez operarios. Los negocios van bien, y la fábrica precisa un operario más.



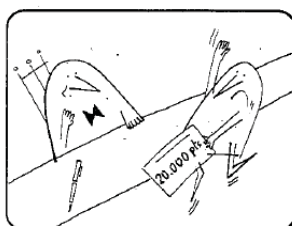
Félix: ¡Vale, vale! Tiene usted razón. El promedio es de 60 billetes a la semana. Pero, *aun así*, usted me ha engañado.



El señor Artilugio está entrevistando a Félix, candidato al puesto.
Señor Artilugio: Aquí pagamos muy bien. El salario medio es de 60 000 pesetas semanales. Durante el período de formación sólo cobrará usted 15 000, pero pronto le subiremos el sueldo.



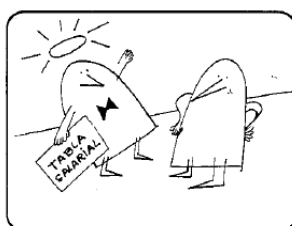
Señor Artilugio: No estoy de acuerdo. Lo que pasa es que usted no ha comprendido nada. Puede haber ido diciéndole los salarios por orden; el salario medio serían entonces 40 000 pesetas. Pero eso no es la media, sino la *mediana*.



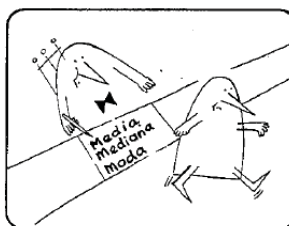
Al cabo de unos cuantos días, Félix quiso ver al jefe.
Félix: ¡Me ha engañado usted! He hablado con los otros operarios y ninguno gana más de 20 000 pesetas a la semana. ¿Cómo puede ser de 60 000 pesetas el salario medio?



Félix: ¿Y qué pintan aquí las 20 000?
Señor Artilugio: Eso se llama *moda*. Es el salario ganado por *máximo* número de personas.



Señor Artilugio: Vamos, Félix, no se excite. El salario medio es de 60 000 pesetas. Se lo voy a demostrar.



Señor Artilugio: Muchacho, lo malo de usted es que no distingue entre media, mediana y moda.
Félix: Bueno, ahora ya sé la diferencia. Y... ¡me despidió!

ANEXO 6: Prueba escrita: planteamiento y solución

Añadimos en este anexo la prueba que hemos diseñado para evaluar el objeto matemático que hemos tratado y las respuestas que esperaríamos por parte del alumnado a cada una de las preguntas:

E1. Responde a las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué tres medidas de centralización conoces? ¿Con qué tipos de variables se pueden calcular cada una? ¿Cómo calcularías cada una de ellas con estos datos: 5, 7, 12, 4, 12? (0,75p)

Conozco la media, la mediana y la moda.

La media y la mediana se pueden calcular en variables cuantitativas (continuas y discretas). La moda se puede calcular con variables cualitativas y cuantitativas.

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{5 + 7 + 12 + 4 + 12}{5} = 8$$

Mediana: ordenamos los datos $\rightarrow 4 \ 5 \ 7 \ 12 \ 12 \rightarrow Me = 7$

Moda: el único valor que se repite es el 12, así que: $Mo = 12$

- b) ¿Cómo se define la frecuencia relativa? ¿Con qué letra se representa? ¿Cuánto suman las frecuencias relativas de los valores de una variable estadística? (0,75p)

La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta (o número de veces que se repite un valor de la variable) y el número total de datos. Se representa con h_i . La suma de las frecuencias relativas de los valores de una variable estadística es 1.

E2. Una asociación contra la bulimia y la anorexia, informa que las pautas culturales han determinado que, la delgadez, sea sinónimo de éxito social. Muchos jóvenes luchan para conseguir el “físico ideal”, motivados por modelos, artistas o por la publicidad.

En el mes de marzo de 2006, en el colegio “Alcántara” de la ciudad de Talca, después de las vacaciones de verano, se observó con precaución a 25 estudiantes con síntomas de anorexia, registrándose los siguientes signos visibles (DS: Dieta Severa; RH: Usar Ropa Holgada; ME: Miedo a Engordar; H: Hiperactividad; UL: Usar Laxantes):

DS	H	DS	DS	RH
RH	UL	DS	H	DS
ME	UL	RH	H	RH
DS	RH	DS	H	ME
DS	ME	UL	UL	RH

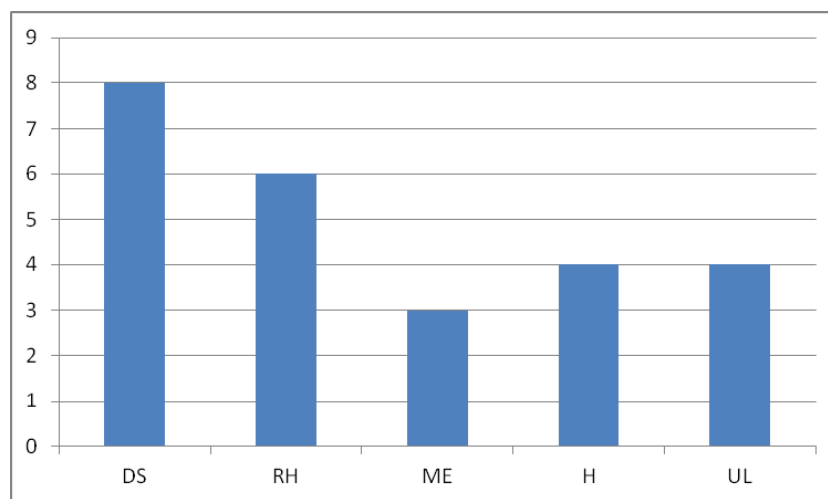
- a) Crea la tabla de frecuencias de la anterior variable, calculando todas las frecuencias que puedas. Si no puedes calcular alguna, explica el motivo. (1p)

La variable es cualitativa, por lo que no vamos a poder calcular las frecuencias absolutas acumuladas ni las frecuencias relativas acumuladas. Así que:

	f_i	h_i
DS	8	$8/25 = 0,32$
RH	6	$6/25 = 0,24$
ME	3	$3/25 = 0,12$
H	4	$4/25 = 0,16$
UL	4	$4/25 = 0,16$
	25	1

- b) Si es posible, haz un diagrama de barras y dibuja el polígono de frecuencias. Si no puedes, explica el motivo. (1p)

Dibuja el diagrama de barras, pero no el polígono de frecuencias, ya que no se puede hacer con variables cualitativas:



- c) Si es posible, calcula las tres medidas de centralización que conoces. Si no puedes, explica el motivo. (1p)

No podemos calcular los valores de la media y la mediana, ya que estamos estudiando una variable cualitativa. Sí que podemos calcular la moda. El variable toma más frecuentemente el valor de “Dieta Severa”, por lo que $Mo = DS$.

E3. En una empresa los operarios constituyen el 70% del personal, los técnicos el 25% y los directivos el 5%. Se sabe que los operarios ganan 1200 euros mensuales cada uno, los técnicos 1800 euros y los directivos 2500 euros. Se decide realizar una subida de 60 euros al sueldo de los operarios, de 90 euros a los técnicos y de 120 euros a los directivos. Sabiendo que en la empresa hay 300 trabajadores en total, calcula las tres medidas de centralización que conoces tras la subida de sueldos. Si no puedes calcular alguna, explica el motivo. (3p)

Tengo que saber cuántos operarios, técnicos y directivos hay en la empresa. Así que:

- 70% operarios $\rightarrow 300 \cdot 0,7 = 210 \rightarrow 1200 + 60 = 1260\text{€}$
- 25% técnicos $\rightarrow 300 \cdot 0,25 = 75 \rightarrow 1800 + 90 = 1890\text{€}$
- 5% directivos $\rightarrow 300 \cdot 0,05 = 15 \rightarrow 2500 + 120 = 2620\text{€}$

Después, tengo que saber cuál es el nuevo sueldo de cada uno de los trabajadores:

- operarios $\rightarrow 1200 + 60 = 1260\text{€}$
- técnicos $\rightarrow 1800 + 90 = 1890\text{€}$
- directivos $\rightarrow 2500 + 120 = 2620\text{€}$

Y ahora, calculamos las medidas de centralización:

Sueldo	f_i	F_i	h_i	H_i
1260	210	210	0,7	0,7
1890	75	285	0,25	0,95
2620	15	300	0,05	1
	300		1	

$$\bar{x} = \frac{210 \cdot 1260 + 75 \cdot 1890 + 15 \cdot 2620}{300} = 1485,50 \rightarrow \text{Sueldo medio: } 1485,50 \text{ euros}$$

$Me = 1260 \rightarrow$ Sueldo mediano: 1260 euros

$Mo = 1260 \rightarrow$ La moda es 1260 euros

E4. En un centro hospitalario de la provincia de Sevilla se ha tratado a 5000 pacientes durante 5 días con un nuevo medicamento llamado QUITA-MIGRAÑAS. Todos ellos padecen jaqueca crónica, es decir, tienen fuertes dolores de cabeza. Se realiza un estudio sobre el número de días que un paciente sufre mejoría con el medicamento, obteniendo la siguiente tabla en grados sexagesimales:

Días de mejoría	Grados sexagesimales
0	18
1	54
2	72
3	36
4	72
5	108

a) Dibuja el diagrama de sectores. (0,5p)

Empleando los grados facilitados en la tabla, puedo construir el diagrama de sectores:



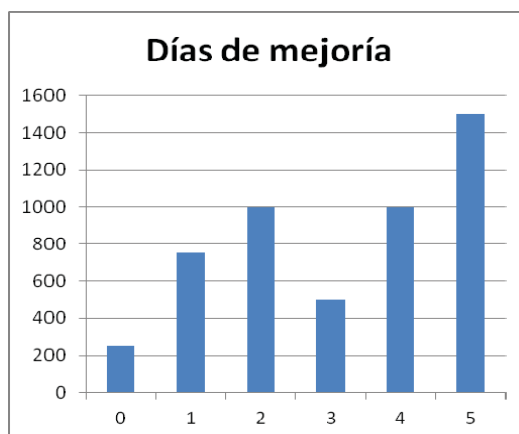
- b) ¿Qué porcentaje de pacientes obtuvieron mejoría durante justamente 3 días? ¿Qué porcentaje de pacientes obtuvieron mejoría más de 3 días? (0,5p)

Uso los grados sexagesimales para obtener las frecuencias absolutas de cada valor de la variable. Después, podremos contestar a las preguntas:

Días de mejoría	Grados sexagesimales	Pacientes (f_i)	h_i
0	18	$(18 \cdot 5000/360) = 250$	250
1	54	$(54 \cdot 5000/360) = 750$	1000
2	72	$(72 \cdot 5000/360) = 1000$	2000
3	36	$(36 \cdot 5000/360) = 500$	2500
4	72	$(72 \cdot 5000/360) = 1000$	3500
5	108	$(108 \cdot 5000/360) = 1500$	5000
	360	5000	

500 pacientes obtuvieron mejoría durante, justamente, 3 días. Por otro lado, un total de $1000 + 1500 = 2500$ pacientes obtuvieron mejoría más de 3 días.

- c) Si es posible, dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencias. Si no puedes, explica el motivo. (0,5p)



- d) Calcula la media, mediana y moda. Si no puedes, explica el motivo (1p).

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 250 + 1 \cdot 750 + 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 500 + 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 1500}{5000} = 3,15 \rightarrow 3,15 \text{ días}$$

Mediana: tengo un número par de datos, 5000 pacientes. Así que tengo que elegir los valores 2500 y 2501, tras ordenarlos, y realizar la media: $Me = \frac{3+4}{2} = 3,5 \rightarrow 3,5 \text{ días}$

Moda: el valor que más se repite es el de 5 días, por lo que: $Mo = 5 \rightarrow 5 \text{ días}$