MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS, ARTÍSTICAS Y DEPORTIVAS

# MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN 3º ESO

TRABAJO FIN DE MÁSTER
ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

**VERÓNICA MANCEBÓN PALOS**

CURSO 2011/2012

Universidad Zaragoza
1542

FACULTAD DE EDUCACIÓN ZARAGOZA

# ÍNDICE

## A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

Como Trabajo Fin de Máster, propongo estudiar y profundizar en la enseñanza de las medidas de centralización en 3º de ESO, dentro de la asignatura de Matemáticas.

Por medio de este objeto matemático, buscaremos que el alumno sepa reconocer y valorar la utilidad del lenguaje estadístico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana y del conocimiento científico, también se fomentará el espíritu crítico ante el conjunto de datos estadísticos que se ofrecen en los medios, valorando su veracidad.

Asociados a este objeto matemático, las medidas de centralización, trabajaremos con distintos campos de problemas, aquellos asociados a la media, la mediana y la moda; para que los alumnos interpreten y sepan utilizar estos objetos matemáticos en situaciones problemáticas contextualizadas, apliquen las correspondientes técnicas, y sean capaces de explicitar la tecnología que sustenta cada una de las técnicas asociadas al objeto matemático, medidas de centralización.

## B. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

Previamente, el alumno ha de comprender los conceptos de variable estadística y los tipos que hay. Tiene que saber que para realizar un estudio estadístico, partimos de una población de la que se elige una muestra, en la que cada elemento o individuo de ésta toma un valor. A partir de esos datos que da la muestra, el alumno debe saber construir la tabla de frecuencias correspondiente a la variable; y también dibujar la gráfica que mejor refleja la realidad de los datos.

Según los contenidos correspondientes al segundo curso de ESO reflejados en el Currículo de Aragón, el alumno ha sido capaz de adquirir esos conocimientos previos, luego está en disposición de estudiar las medidas de centralización. Es más, el alumno ya empezó a trabajar con la media, la mediana y la moda en 2º, pero en este curso profundizaremos más en su significado y aplicación.

Para comprobar la adquisición de dichos conocimientos previos, propondremos a los alumnos la creación de una encuesta, sobre la que tendrán que realizar un estudio. La secuenciación del proceso será la siguiente:

**1.** Elaboración de la encuesta

De forma individual, los alumnos deberán pensar las preguntas de su encuesta, teniendo en cuenta que:

a. La encuesta debe constar de 5 preguntas.
b. Entre las preguntas, debe haber alguna que tome valores numéricos enteros.
c. Debe haber alguna pregunta que tome valores numéricos reales.
d. Debe haber alguna pregunta que tome valores cualitativos, es decir, no numéricos. En este caso, la respuesta será múltiple.
e. Las respuestas esperadas de las preguntas se deben poder agrupar por valores o por intervalos.
f. La muestra sobre la que aplicarán el estudio será sus compañeros de clase.

Para orientarles en esta tarea, les propondremos algunas preguntas a modo de ejemplo, con la condición de que la encuesta de cada alumno sólo pueda contener dos de las preguntas ejemplo. Mostramos algunas de ellas:

- ¿Cuánto tiempo dedicas cada día entre semana a ver la televisión?
- ¿Cuántos libros hay aproximadamente en tu casa, sin incluir las revistas, los periódicos ni los libros de texto?
- ¿Cuál es tu asignatura favorita?

**2.** Obtención de los datos

Los alumnos procederán a entrevistar a todos los alumnos de la clase, y a tomar notas de las respuestas obtenidas.

El orden será elegido por cada alumno, pero se les aconsejará que tengan debida cuenta de a quién han entrevistado, pues al final deberán todos tener una muestra del mismo tamaño.

Llegará entonces el análisis de los datos, que se estructurará de la siguiente manera:

**3.** Tabulación de los datos
En primer lugar, los alumnos tendrán que definir la variable que se ajusta al contexto, fijando qué información obtienen a partir de cada una de las preguntas. Después, los alumnos deberán tratar los datos y agruparlos a través de la construcción de las tablas de frecuencia asociadas a cada variable, y a través de la representación de los datos en la gráfica que más se adecúe al tipo de variable. Para realizar este proceso, haremos uso de las TICs, de forma que cada alumno, individualmente, introducirá sus datos en Excel, y procederá al tratamiento de los mismos.

**4.** Análisis de los datos
Como encuestadores, a los alumnos les debe interesar, y a eso se les motivará, obtener un valor representativo de cada una de las variables o preguntas de su encuesta. Por tanto, surge ya la necesidad de nuestro objeto matemático, luego, en este momento del estudio, tiene sentido empezar a introducir las medidas de centralización.

A través de este estudio, conseguimos repasar todos los conocimientos previos del alumno, comprobando así la asimilación de los mismos; de manera, que si fuera necesario, según van avanzando en el tratamiento con los datos, aclararíamos las dudas que pudieran ir surgiendo, a la vez que recordaríamos los conceptos básicos relacionados. Además fomentaríamos el trabajo con las nuevas tecnologías, promoviendo su aprendizaje y los múltiples usos que tienen en el día a día.

- **Las medidas de centralización en el Currículo de Matemáticas de 3º de la ESO en Aragón**

Antes de proceder al planteamiento de nuestro objeto matemático y sus características, conviene que observemos los contenidos reflejados en el Currículo de Aragón respecto a las medidas de centralización en el curso 3º ESO.

Los contenidos del *Bloque 6. Estadística y probabilida*d para 3º de ESO que están referidos a nuestro objeto matemático son:

- Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Estimación de la media a partir de gráficos estadísticos.

- Utilización de la media para interpretar las características de la población.

- Utilización de las medidas de centralización para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística.

Por tanto, plantearemos nuestra propuesta con el objetivo de desarrollar, como mínimo, todos los contenidos referidos a las medidas de centralización en el Currículo de Aragón.

Según el Currículo de Aragón, los criterios de evaluación, referidos a las medidas de centralización, a tener en cuenta para comprobar el aprendizaje de los alumnos son los siguientes:

- Elaborar e interpretar informaciones estadísticas teniendo en cuenta la adecuación de las tablas y gráficas empleadas y analizar si los parámetros son más o menos significativos.

- Se valorará la capacidad de organizar, en tablas de frecuencias y en gráficas, información de naturaleza estadística, atendiendo a sus aspectos técnicos, funcionales y estéticos (elección de la tabla o gráfica que mejor presenta la información), y para hacer lecturas puntuales e interpretaciones globales de los datos presentados en tablas y en gráficos estadísticos.

- Se valorará la capacidad de calcular, utilizando si es necesario la calculadora o la hoja de cálculo, los parámetros centrales, media, mediana y moda, de una distribución.

- Se valorará la capacidad de interpretar información estadística dada en forma de tablas y gráficas.

- Obtener conclusiones pertinentes de una población a partir del conocimiento de sus parámetros más representativos.

Es importante destacar, que estos criterios de evaluación, junto con los contenidos del Currículo, se van a tener muy presentes en el diseño de la propuesta de enseñanza.

## C. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

El objetivo fundamental de las medidas de centralización es analizar unos datos, y obtener de ellos unas conclusiones. Lo primero de todo, es interpretar el significado de la variable objeto de estudio y de cada medida de centralización. Para abordar el tratamiento de los datos que toma la variable, será necesario agrupar los datos en tablas o gráficas, y estudiar su comportamiento. En el caso que nos concierne, las medidas de centralización, una de las conclusiones que buscaremos será saber cuál es la tendencia central de la distribución, su valor más representativo. Y éste será el objetivo de los apartados siguientes.

Para empezar, notaremos que la media y la mediana son medidas que se usan para variables cuantitativas. Hay que tener en cuenta, que la media es una medida que hace referencia a la magnitud de la variable, y que se puede calcular para cualquier tipo de distribución.

Sin embargo, cuando nos encontramos con una distribución sesgada o asimétrica, la media no da un valor real de los datos, por eso la mediana es una medida que se basa en la posición de los datos, y es la más adecuada en estos casos para la obtención del valor de tendencia central.

Como es obvio, si la distribución es simétrica, media y mediana coinciden.

Cuando trabajamos con variables cualitativas y que carecen de codificación numérica, no es posible trabajar con los valores numéricos de la variable; así pues, tendremos que fijarnos en la frecuencia de repetición de un dato a través de la moda.

Los problemas que son coherentes con las razones de ser del objeto matemático, medidas de centralización, los expondremos en el apartado del campo de problemas.

## D. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS

Los campos de problemas de los que surge la noción de medida de centralización, los dividiremos según vayan asociados a la media, mediana o moda. Seguiremos la clasificación propuesta por Batanero (2000). Dentro de cada campo, distinguiremos los posibles enunciados planteados en los problemas.

**Campos de problemas asociados a la media**

- Estimar la medida central a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores. Mostramos un ejemplo:

✧ *Hemos obtenido 50 bolsas de pasta alimenticia en un supermercado. Todas ellas llevan impreso "Peso neto: 250 g" en la etiqueta. Después de pesarlas con precisión, hemos obtenido los siguientes resultados, expresados en gramos.*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *243* | *269* | *226* | *249* | *255* | *240* | *266* | *230* | *236* | *250* |
| *252* | *261* | *242* | *240* | *270* | *240* | *251* | *228* | *259* | *262* |
| *260* | *231* | *261* | *268* | *252* | *259* | *250* | *249* | *243* | *256* |
| *230* | *250* | *252* | *259* | *236* | *249* | *243* | *256* | *230* | *250* |
| *249* | *243* | *256* | *230* | *250* | *252* | *274* | *268* | *270* | *233* |

*¿Qué peso podemos esperar que tenga una bolsa de pasta alimenticia de esta marca?*

- Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme. Veamos un ejemplo:

✧ *Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. Si los niños se reparten de forma equitativa los caramelos, ¿cuántos recibirá cada uno de ellos?*

- Comparar dos distribuciones que son aproximadamente simétricas, a través de su valor central. Veamos un ejemplo:

✧ *Al medir la altura en centímetros que pueden saltar un grupo de escolares, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes.*

| | Altura saltada en centímetros | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Alumno** | *Ana* | *Bea* | *Carol* | *Diana* | *Elena* | *Fanny* | *Gia* | *Hilda* | *Inés* | *Juana* |
| ***Antes del entrenamiento*** | *115* | *112* | *107* | *119* | *115* | *138* | *126* | *105* | *104* | *115* |
| ***Después del entrenamiento*** | *128* | *115* | *106* | *128* | *122* | *145* | *132* | *109* | *102* | *117* |

*¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?*

- Obtener el valor central de una distribución de la que se conocen los valores centrales de la variable, que ha sido separada atendiendo a algún atributo. Se trata de la media de medias o media ponderada. Mostramos un ejemplo:

✧ *Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres de 80. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?*

- Conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica. Mostramos un ejemplo:

✧ *La altura media de los alumnos de un colegio es 1.40. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1’38, 1’42, 1’60, 1’40. ¿Cuál sería la altura del quinto estudiante?*

Este problema es, en cierto modo *inverso* al del cálculo del valor central de una distribución. Tiene interés didáctico por cuanto moviliza importantes ideas del valor central de una variable.

**Campos de problemas asociados a la mediana**

- Encontrar un resumen estadístico de posición central, en situaciones en las que la media no es suficientemente representativa. Situación caracterizada porque la distribución de la variable es asimétrica. Veamos un ejemplo:

✧ *En un pequeño comercio hay cinco empleados cuyos sueldos mensuales son: 600, 600, 600, 1000 y 4000 euros.*

*a) Halla la moda y la mediana e interprétalas.*

*b) ¿cuánto cobran entre todos los empleados al mes? Si esta cantidad se repartiera por igual, ¿cuánto cobraría cada uno? ¿Alguno de ellos cobra este sueldo medio?*

*c) ¿Qué valor de los tres: moda, mediana o media, crees que representa mejor los sueldos de los empleados de este pequeño comercio?*

*d) ¿Cuál es el mayor sueldo? ¿Y el menor? ¿Cuál es la diferencia entre estos dos valores?*

- Encontrar un resumen estadístico de posición central para variables ordinales. Mostramos un ejemplo:

✧ *Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:*

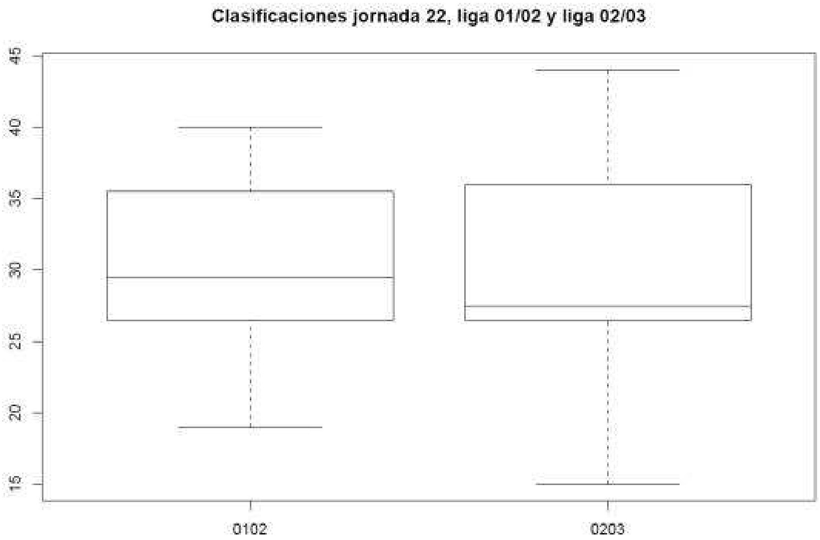
| | |
|---|---|
| ***Grupo 1*** | *I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S* |
| ***Grupo 2*** | *S S I I A N A N I I S N A S I N N* |

*¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?*

*¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?*

- Efectuar comparaciones de dos o más colecciones de datos usando gráficos de caja. Veamos unos ejemplos:

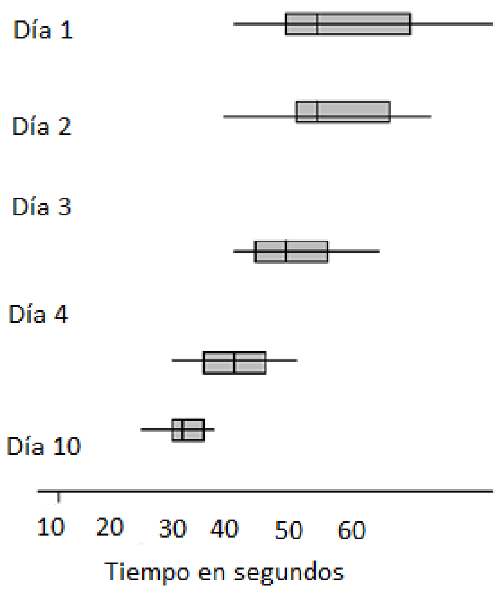
✧ *La puntuación de los equipos de la liga de la temporada 01/02 y 02/03 en primera división se puede comparar con un diagrama de caja, como aparece aquí,*




*Compara las distintas puntuaciones del primer y último equipo, en una temporada u otra; así como la concentración de equipos entorno a un conjunto de puntos en las distintas temporadas.*

En este problema no hay datos muy atípicos, es decir, que no hay equipo que se haya destacado por arriba o por abajo del resto de los equipos. Hay más diferencia de puntos entre el primer y el último clasificado para la liga 02/03 que en la liga anterior. Los equipos del tercer cuarto de la clasificación están más apelotonados en la liga 02/03.

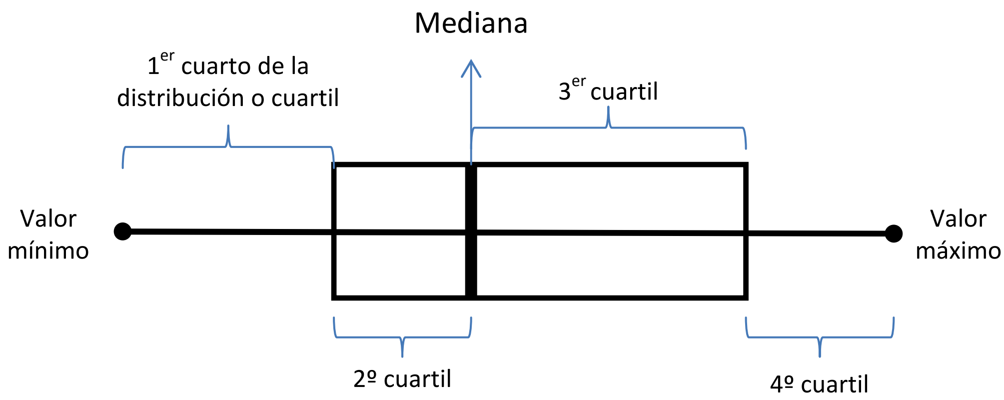
✧ *Un corredor entrena para una determinada carrera y se toman los tiempos que necesita para recorrer los 100m, durante 10 días consecutivos (cada día se toman varios tiempos y se calculan la mediana, cuartiles, valores mínimo y máximo). ¿Cómo ha evolucionado en la carrera?*



A través de este problema queremos que los alumnos observen que el desplazamiento de las gráficas de caja hacia la izquierda indica que el entrenamiento ha dado resultado, ya que se tarda menos segundos en recorrer la misma distancia, siendo la diferencia entre el máximo y el mínimo valor, cada vez menor, así como la diferencia intercuartílica.

- **Sobre la interpretación de diagramas de cajas**

Dada la mediana de la distribución de una variable, representada en un diagrama de caja; la información que recoge éste es la siguiente:




Así pues, la mediana es el valor que deja la mitad de la distribución por delante, y la mitad por detrás. Los cuartiles dividen a la distribución en cuatro partes iguales en tamaño.

De esta forma podemos estudiar la distribución y concentración de la variable entorno a unos valores, y su simetría, así como comparar distribuciones representadas en diagramas de caja.

Uno de los programas más sencillos con los que se pueden dibujar diagramas de caja es: **Esta**+. Se trata de un programa diseñado para realizar cálculos de estadística descriptiva con una o dos variables de tipo cuantitativo o cualitativo. Esta+ puede calcular los estadísticos descriptivos más comunes, como las medidas de tendencia central (varios tipos de media, mediana, moda), las de dispersión (incluyendo cuartiles) y valores extremos. Al mismo tiempo, puede generar diagramas de caja y bigotes o de dispersión.

**Campos de problemas asociados a la moda**

- Obtener como valor representativo de una colección de datos, el más frecuente de ellos, en situaciones en las que lo que interesa fundamentalmente es el valor dominante del conjunto. Mostramos unos ejemplos:

✧ *Al preguntar a 12 alumnos cuántas horas dedican semanalmente a la práctica de algún deporte, éstos respondieron: 2, 3, 5, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2.*

*¿Cuál es el valor de la variable que se repite más veces?*

✧ *A 40 alumnos de 3º de Secundaria se les ha preguntado sobre el número de horas que dedican al estudio durante la semana y se han obtenido los siguientes datos:*

| ***Nº de horas de estudio*** | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Nº de alumnos*** | *14* | *9* | *2* | *10* | *3* | *2* |

*¿Cuántas horas a la semana dedican al estudio la mayoría de los alumnos?*

✧ *A la pregunta: ¿cuántas personas forman tu hogar familiar?, 40 personas respondieron lo siguiente:*

*4 5 3 6 3 2 4 6 3 5 4 5 7 4 6 4 5 4 3 2 5 4 6 3 2 3 4 5 3 6 2 3 4 3 4 6 3 7 4 3*

*¿Cuántas personas componen la unidad familiar tipo?*

- Encontrar el valor representativo en datos cualitativos. Veamos unos ejemplos:

✧ *Los siguientes datos muestran las dificultades encontradas para llevar a cabo un cierto tipo de programa de salud en Florida. ¿Cuál considerarías la "barrera típica"? ¿Por qué?*

| ***Barrera*** | ***Número*** | ***Porcentaje*** |
|---|---|---|
| *Falta de apoyo administrativo* | *10* | *43.5* |
| *Tiempo* | *5* | *21.7* |
| *Dinero* | *4* | *17.4* |
| *Apatía* | *3* | *13.1* |
| *Falta de compensación* | *1* | *4.3* |
| ***Total*** | ***23*** | ***100*** |

✧ *En unas elecciones para delegado de curso se presentan 4 candidatos con los siguientes resultados:*

| | ***Juan*** | ***Nuria*** | ***Susana*** | ***David*** |
|---|---|---|---|---|
| ***Votos*** | *3* | *5* | *18* | *4* |

*¿Quién ha sido el alumno elegido?*

## E. SOBRE LAS TÉCNICAS

El cálculo de los estadísticos estudiados, media, mediana y moda, depende de la forma de presentación de los datos y del tipo de variable que se maneje. Explicaremos a continuación las distintas técnicas a llevar a cabo para su obtención; dando además, algún ejemplo asociado a cada una de ellas para ponerlas en práctica.

**Técnicas relacionadas con la media**

- Cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados

El algoritmo de cálculo para valores aislados consiste en la suma de todos los valores, dividiendo por el número total de datos.

✧ *Un alumno ha obtenido en cinco exámenes las siguientes calificaciones: 5, 7, 6, 7 y 9. ¿Cuál es su calificación media?*

- Cálculo de la media de una variable discreta en la que los datos tienen diferentes pesos

En este caso se calcula la media ponderada, se multiplica cada valor de la variable estadística por su peso o frecuencia absoluta correspondiente, se suman los resultados y se divide por el tamaño de la muestra.

✧ *Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres de 80. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?*

- Cálculo de la media de una variable continua o discreta con datos agrupados en intervalos de clases

Para el cálculo de la media en estos casos, empezaremos tomando un valor para cada marca de clase, que será la media simple de los extremos del intervalo. Después se procederá como en el caso de la media ponderada, se multiplicará este valor por su frecuencia absoluta, se sumarán los resultados y se dividirá por el número total de individuos. Hay que notar, que en este caso, la media es aproximada, pues que no se han tomado valores exactos de la variable.

✧ *Se están estudiando las precipitaciones caídas en España en un determinado mes. Para ello, se registran los litros por metro cuadrado caídos en diferentes provincias.*

| ***Litros por metro cuadrado*** | *10-20* | *20-30* | *30-40* | *40-50* | *50-60* | *60-70* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Nº de provincias*** | *4* | *2* | *3* | *1* | *2* | *1* |

*¿Cuál es la media de precipitaciones en España durante ese mes?*

- Inversión de la técnica de cálculo de la media

Se trata de usar la técnica de cálculo de la media para, dada la media, hallar uno de los valores de la variable.

Se sustituyen los datos en el algoritmo del cálculo de la media simple, y se trabaja con la expresión como si fuera una ecuación, despejando el valor que buscamos y calculando éste haciendo las operaciones oportunas.

✧ *Para hallar la nota de una evaluación, se hace la media de cuatro exámenes. Si en los tres primeros tengo una media de 4’2, ¿qué nota tengo que sacar en el último para aprobar?*

- Construir una distribución de media dada

Para poner en práctica esta técnica es importante tener en cuenta la siguiente propiedad: ”La suma de las desviaciones de los datos con respecto a la media es nula”. Esto es, dada la media de una distribución, la suma de la diferencia entre cada uno de los valores y la media, es cero. Por tanto, a través de esto podemos construir cualquier distribución, conocida la media, basta compensar las diferencias con la media entre un valor y otro de la variable.

✧ *Elabora una serie de 15 datos con valores entre 5 y 20 cuya media sea 15.*

**Técnicas relacionadas con la mediana**

- Cálculo de la mediana con datos no agrupados en clases, número de datos impar

La técnica se basa en la definición de mediana, basta ordenar los datos y tomar el de valor central de la distribución.

- Cálculo de la mediana con datos no agrupados en clases, número de datos par

Como antes, se ordenan los datos, y la mediana será, en este caso, la media aritmética de los dos valores centrales.

✧ *El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24.*

*a. ¿Cuál es el peso del niño mediano?*

*b. ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 kg?*

*c. En el segundo caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona tu respuesta*

- Cálculo de la mediana de datos agrupados en intervalos de clase

La agrupación de los datos en intervalos de clase implica el trabajo con valores aproximados, en lugar de con los datos originales. Por ello, los valores obtenidos para los diferentes estadísticos, como la mediana, son sólo valores aproximados.

Si los datos están agrupados en clases, se calculan las frecuencias acumuladas ($F_i$) de las clases a partir de las frecuencias absolutas ($f_i$). Una vez calculadas estas frecuencias y siguiendo la definición de mediana, se representa el diagrama acumulativo de frecuencias y, mediante éste se determina gráficamente la clase central de la variable, aquella en cuya frecuencia acumulada esté la posición *número de la muestra/2*. También se puede calcular la mediana analíticamente, tomando de la tabla de frecuencias acumuladas la clase en cuya frecuencia acumulada esté la posición *número de la muestra/2*.

Una vez tomada dicha clase, debemos calcular el valor exacto de la mediana calculando la proporción asociada a ésta en dicho intervalo. Para ello, basta hacer una regla de tres, relacionando:

- La diferencia entre la posición central de la muestra y la frecuencia acumulada de la clase anterior, proporcional a la relación de intervalo que se toma hasta alcanzar la mediana, con

- La diferencia entre las frecuencias acumuladas de esta clase y la anterior, es decir, la frecuencia absoluta de esta clase, proporcional al rango del intervalo de clase.

Una vez calculada esta relación de intervalo, se sumará al extremo inferior del intervalo de clase, y se obtendrá el valor de la mediana.

Para ayudar a la comprensión de la técnica, desarrollaremos el siguiente ejemplo:

✧ *La siguiente tabla se refiere al sueldo mensual en euros, de los 531 trabajadores de una fábrica.*

| ***Sueldo*** | ***$f_i$*** |
|---|---|
| *1305-1505* | *10* |
| *1505-1705* | *60* |
| *1705-1905* | *273* |
| *1905-2105* | *128* |
| *2105-2305* | *45* |

*¿Cuál es el sueldo mediano de un empleado de esta fábrica?*

Para resolver este problema, procedemos a calcular la tabla de frecuencias acumuladas.

| **Sueldo** | **$f_i$** | **$F_i$** |
|---|---|---|
| [1305, 1505) | 10 | 10 |
| [1505, 1705) | 60 | 70 |
| [1705, 1905) | 273 | 343 |
| [1905, 2105) | 128 | 471 |
| [2105, 2305) | 45 | 516 |

La posición central de la distribución corresponde a 516/2=258, cuyo valor se encuentra en la frecuencia acumulada asociada al intervalo de clase [1705, 1905), $F_i$=343

Para el cálculo de la mediana, basta aplicar la regla de tres explicada anteriormente:

258-70 → x

343-70 → 1905-1705

x= 137’73

Luego el sueldo mediano es,

1705 + 137’73= **1842’73 €**

**Técnicas relacionadas con la moda**

- Cálculo de la moda en una variable discreta con datos aislados o presentados en una tabla de frecuencias, respectivamente

En ambos casos, en que los datos se den aislados o en tablas de frecuencias, el algoritmo consiste en aplicar la definición de moda, siendo ésta el valor de mayor frecuencia absoluta.

✧ *Las notas en matemáticas de una clase están indicadas en la siguiente tabla. ¿Cuál es la moda?*

| ***Notas*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***8*** | ***9*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Nº de alumnos*** | *2* | *2* | *4* | *5* | *8* | *9* | *3* | *4* | *3* |

- Cálculo de la moda de una variable discreta con datos agrupados en intervalos de clase

El cálculo de la moda para variables continuas no es exacto, pues se toma la marca de clase como valor aproximado de la moda.

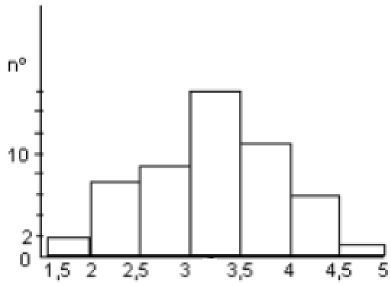
✧ *Los pesos de 50 recién nacidos están reseñados en la siguiente tabla. ¿Cuál es la moda?*

| ***Peso (kg)*** | *[1’5-2)* | *[2-2’5)* | *[2’5-3)* | *[3-3’5)* | *[3’5-4)* | *[4-4’5)* | *[4’5-5)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Nº de niños*** | *2* | *7* | *9* | *15* | *11* | *5* | *1* |

- Cálculo a partir de un diagrama de barras o histograma

Dado que es más fácil calcular la moda de una distribución a través de una gráfica, que la media o la mediana; la moda será el valor o la marca de clase de mayor frecuencia, que se podrá obtener por observación, porque será el que destaque de la gráfica.

✧ *Tenemos los mismos datos que en el problema anterior representados en una gráfica, ¿cuál es la moda?*




Si recordamos los campos de problemas propuestos, aquellos asociados a la media, a la mediana y a la moda, podemos ver cómo las técnicas sí que están adecuadas a ellos, ya que muestran como calcular cada una de estas medidas, según el campo de problemas en el que nos estemos moviendo.

## F. SOBRE LAS TECNOLOGÍAS

Las tecnologías propias del objeto matemático radican en la propia razón de ser y definición de las medidas de centralización.

La media aritmética o **media** de una variable estadística es la medida central atendiendo a la cantidad de magnitud de los valores de la variable. Se obtiene al dividir la suma de todos los valores entre el número total de datos.

La **mediana** de una distribución es el valor que ocupa la posición central al ordenar los datos.

La **moda** de un conjunto de datos es el dato que tiene mayor frecuencia, es decir, el valor más frecuente de la variable estadística.

Veamos algunas de las propiedades que las caracterizan y dan prioridad a unas sobre otras en función del tipo de problema al que nos estemos enfrentando.

- La media, la mediana y la moda de un conjunto de datos son siempre valores pertenecientes al rango de la variable.
- La mediana y la media pueden no coincidir con ninguno de los valores de los datos, mientras que la moda siempre es uno de estos valores, en distribuciones no agrupadas.
- La moda y la mediana son, en ocasiones, invariantes si cambian algunos de los datos, mientras que la media sí se ve afectada por cualquier cambio en los datos.
- La moda puede no existir o, si existe, no ser única, mientras que la media y la mediana siempre existen.
- La media de la suma de dos o más variables es la suma de las medias. En el caso de la mediana y la moda no se cumple.
- Existe moda para variables cuantitativas y cualitativas
- La media coincide con el centro de gravedad del conjunto de datos
- En distribuciones simétricas, la mediana, la media y la moda coinciden
- La suma de las desviaciones de un conjunto de datos con respecto a su media es cero
- En distribuciones asimétricas, la mediana es mejor representante que la media
- En distribuciones con más de una moda, la mediana es el mejor representante del conjunto de datos

Este conjunto de propiedades, no se explicarán explícitamente, sino que conforme avanzamos en el conocimiento de las medidas de centralización, y vemos los distintos resultados que ofrecen para distintas distribuciones, el profesor las nombrará; ofreciendo al alumno las justificaciones necesarias para discernir, en cada problema, cuál es la medida de centralización que mejor representante obtiene.

## G. METODOLOGÍA DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

La metodología está sustentada en la Resolución de Problemas y se concreta del siguiente modo:

El profesor planteará a los alumnos, distribuidos en grupos heterogéneos, una situación problemática. Cuando éstos hayan resuelto el problema, se procederá a una puesta en común entre los diversos grupos de trabajo formados en la clase, y el profesor, tras las intervenciones públicas de los alumnos, institucionalizará el objeto que ha aparecido en el aula.

A través de esta metodología, la labor del profesor no es la de realizar exposiciones para transmitir saberes, sino que consiste en diseñar y plantear problemas y actividades, que potencien el aprendizaje colaborativo, y que sean adecuados para que surja el conocimiento en el aula. De los alumnos se espera, que su trabajo exploratorio en la clase, propicie la elaboración de sus propias conjeturas, y tengan la posibilidad de comprobarlas para validarlas, o bien reorientarlas si las comprueban erróneas.

El profesor se convierte en promotor de la investigación, que únicamente presentará el problema y enseñará algunos aspectos o conocimientos mínimos necesarios para abordarlo. Después, su labor será de observación activa del trabajo de los alumnos organizados en grupos, comprobando el trabajo y el avance de los grupos, también resolviendo dudas o discutiendo las conjeturas que eventualmente pudieran plantear éstos.

Para el desarrollo de las clases, se ha pensado usar ordenadores personales en las sesiones iniciales, fomentando la inmersión en las nuevas tecnologías; la pizarra convencional, para las explicaciones, dudas o aclaraciones que deba hacer el profesor sobre algún concepto, y para la puesta en común de las conclusiones de los alumnos; y el proyector, para facilitar al profesor la labor de institucionalizar y formalizar los nuevos conocimientos.

En esta propuesta de enseñanza, se fomenta además el desarrollo de alguna de las competencias básicas. La competencia comunicativa se motiva por medio de las exposiciones de los alumnos y de las intervenciones en el aula; la competencia digital se desarrolla a través del uso de los programas Excel y Esta+; y, por supuesto, se trabaja la competencia matemática durante toda la propuesta.

## H. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

La secuencia didáctica que seguiremos para introducir el objeto matemático constará de 12 sesiones de 55 minutos cada una, que se distribuirán de la siguiente manera:

❖ 1ª sesión

En esta sesión comenzaremos a trabajar la actividad inicial para afianzar los conocimientos previos.

- Elaboración de la encuesta....................................................... 25 min.
- Obtención de los datos........................................................... 30 min.

❖ 2ª sesión

- Tabulación de los datos con las TICs ..................................... 45 min.

  Se trabajará con Excel para el tratamiento de los datos.

- Análisis de los datos ............................................................... 10 min.

  Para encontrar el valor representativo de las variables, introduciríamos los conceptos generales de media, mediana y moda, dando paso a los campos de problemas en la siguiente sesión para la profundización en los mismos.

A partir de las próximas sesiones, trabajaremos con la metodología planteada; de forma que podamos introducir paulatinamente los conceptos de media, mediana y moda según corresponda.

A su vez, se introducirán las técnicas asociadas a cada uno de estos conceptos. La introducción de las tecnologías se hará conforme avanzamos en los campos, y en función del problema al que nos enfrentemos.

Para conseguir esto, nos apoyaremos en los campos de problemas planteados anteriormente y en la clasificación de Batanero.

❖ 3ª, 4ª y 5ª sesión

- Campos de problemas (C) y técnicas (T) asociadas a la media.......165 min.

1. *(C) Hemos obtenido 50 bolsas de pasta alimenticia en un supermercado. Todas ellas llevan impreso “Peso neto: 250 g” en la etiqueta. Después de pesarlas con precisión, hemos obtenido los siguientes resultados, expresados en gramos.*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *243* | *269* | *226* | *249* | *255* | *240* | *266* | *230* | *236* | *250* |
| *252* | *261* | *242* | *240* | *270* | *240* | *251* | *228* | *259* | *262* |
| *260* | *231* | *261* | *268* | *252* | *259* | *250* | *249* | *243* | *256* |
| *230* | *250* | *252* | *259* | *236* | *249* | *243* | *256* | *230* | *250* |
| *249* | *243* | *256* | *230* | *250* | *252* | *274* | *268* | *270* | *233* |

*¿Qué peso podemos esperar que tenga una bolsa de pasta alimenticia de esta marca?*

2. *(C) Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6’2, 6’0, 6’0, 6’3, 6’1, 6’23, 6’15, 6’2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?*

3. *(T) Un alumno ha obtenido en cinco exámenes las siguientes calificaciones: 5, 7, 6, 7 y 9. ¿Cuál es su calificación media?*

4. *(C) Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?*

5. *(C) Al medir la altura en centímetros que pueden saltar un grupo de escolares, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes.*

***Altura saltada en centímetros***

| ***Alumno*** | *Ana* | *Bea* | *Carol* | *Diana* | *Elena* | *Fanny* | *Gia* | *Hilda* | *Inés* | *Juana* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Antes del entrenamiento*** | *115* | *112* | *107* | *119* | *115* | *138* | *126* | *105* | *104* | *115* |
| ***Después del entrenamiento*** | *128* | *115* | *106* | *128* | *122* | *145* | *132* | *109* | *102* | *117* |

*¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?*

6. *(C) (T) Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres de 80. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?*

7. *(C) La altura media de los alumnos de un colegio es 1.40. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1’38, 1’42, 1’60, 1’40. ¿Cuál sería la altura más probable del quinto estudiante?*

8. *(T) Para hallar la nota de una evaluación, se hace la media de cuatro exámenes. Si en los tres primeros tengo una media de 4’2, ¿qué nota tengo que sacar en el último para aprobar?*

9. *(T) Se están estudiando las precipitaciones caídas en España en un determinado mes. Para ello, se registran los litros por metro cuadrado caídos en diferentes provincias.*

| ***Litros por metro cuadrado*** | *10-20* | *20-30* | *30-40* | *40-50* | *50-60* | *60-70* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Nº de provincias*** | *4* | *2* | *3* | *1* | *2* | *1* |

*¿Cuál es la media de precipitaciones en España durante ese mes?*

10. *(T) Elabora una serie de 15 datos con valores entre 5 y 20 cuya media sea 15.*

- <u>6ª y 7ª sesión</u>

- Campos de problemas (C) y técnicas (T) asociadas a la mediana...110 min.

1. *(C) En un pequeño comercio hay cinco empleados cuyos sueldos mensuales son: 600, 600, 600, 1000 y 4000 euros.*

   *a) Halla la moda y la mediana e interprétalas.*

   *b) ¿cuánto cobran entre todos los empleados al mes? Si esta cantidad se repartiera por igual, ¿cuánto cobraría cada uno? ¿Alguno de ellos cobra este sueldo medio?*

   *c) ¿Qué valor de los tres: moda, mediana o media, crees que representa mejor los sueldos de los empleados de este pequeño comercio?*

   *d) ¿Cuál es el mayor sueldo? ¿Y el menor? ¿Cuál es la diferencia entre estos dos valores?*

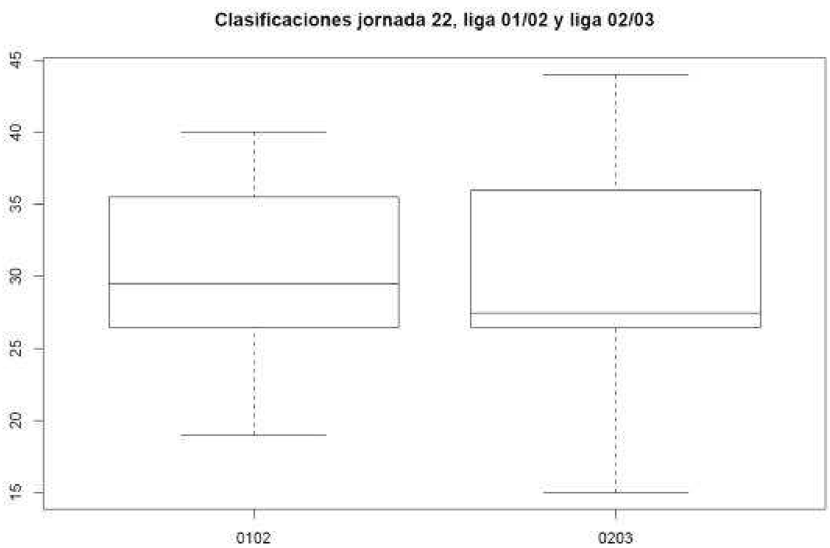
2. *(C) Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:*

| | |
|---|---|
| ***Grupo 1*** | *I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S* |
| ***Grupo 2*** | *S S I I A N A N I I S N A S I N N* |

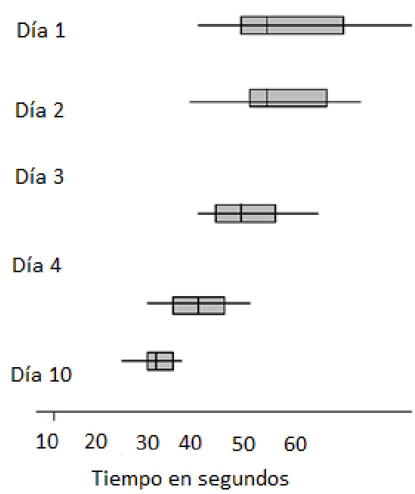
*¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?*

*¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?*

3. *(C) La puntuación de los equipos de la liga de la temporada 01/02 y 02/03 en primera división se puede comparar con un diagrama de caja, como aparece aquí,*




4. *(C) Un corredor entrena para una determinada carrera y se toman los tiempos que necesita para recorrer los 100m, durante 10 días consecutivos (cada día se toman varios tiempos y se calculan la mediana, cuartiles, valores mínimo y máximo). ¿Cómo ha evolucionado en la carrera?*




5. *(T) El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24.*
   a. *¿Cuál es el peso del niño mediano?*
   b. *¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 kg?*
   c. *En el segundo caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona tu respuesta*

❖ 8ª y 9ª sesión

- Campos de problemas (C) y técnicas (T) asociadas a la moda........110 min.

1. *(C) Al preguntar a 12 alumnos cuántas horas dedican semanalmente a la práctica de algún deporte, éstos respondieron: 2, 3, 5, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2.*

   *¿Cuál es el valor de la variable que se repite más veces?*

2. *(T) Las notas en matemáticas de una clase están indicadas en la siguiente tabla. ¿Cuál es la moda?*

| ***Notas*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***8*** | ***9*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Nº de alumnos*** | *2* | *2* | *4* | *5* | *8* | *9* | *3* | *4* | *3* |

3. *(C) A 40 alumnos de 3º de Secundaria se les ha preguntado sobre el número de horas que dedican al estudio durante la semana y se han obtenido los siguientes datos:*

| *Nº de horas de estudio* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Nº de alumnos*** | *14* | *9* | *2* | *10* | *3* | *2* |

*¿Cuántas horas a la semana dedican al estudio la mayoría de los alumnos?*

*¿Cuál es el tiempo medio que dedican a estudiar a la semana?*

4. *(C) A la pregunta: ¿cuántas personas forman tu hogar familiar?, 40 personas respondieron lo siguiente:*

   *4 5 3 6 3 2 4 6 3 5 4 5 7 4 6 4 5 4 3 2 5 4 6 3 2 3 4 5 3 6 2 3 4 3 4 6 3 7 4 3*

   *¿Cuál es la media de miembros por hogar entre estas personas?*

5. *(C) Los siguientes datos muestran las dificultades encontradas para llevar a cabo un cierto tipo de programa de salud en Florida. ¿Cuál considerarías la "barrera típica"? ¿Por qué?*

| ***Barrera*** | ***Número*** | ***Porcentaje*** |
|---|---|---|
| *Falta de apoyo administrativo* | *10* | *43.5* |
| *Tiempo* | *5* | *21.7* |
| *Dinero* | *4* | *17.4* |
| *Apatía* | *3* | *13.1* |
| *Falta de compensación* | *1* | *4.3* |
| ***Total*** | ***23*** | ***100*** |

6. *(C) En unas elecciones para delegado de curso se presentan 4 candidatos con los siguientes resultados:*

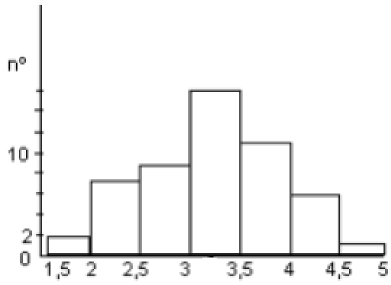
| | ***Juan*** | ***Nuria*** | ***Susana*** | ***David*** |
|---|---|---|---|---|
| ***Votos*** | *3* | *5* | *18* | *4* |

*¿Quién ha sido el alumno elegido?*

7. *(T) Los pesos de 50 recién nacidos están reseñados en la siguiente tabla. ¿Cuál es la moda?*

| ***Peso (kg)*** | *[1’5-2)* | *[2-2’5)* | *[2’5-3)* | *[3-3’5)* | *[3’5-4)* | *[4-4’5)* | *[4’5-5)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Nº de niños*** | *2* | *7* | *9* | *15* | *11* | *5* | *1* |

8. *(T) Tenemos los mismos datos que en el problema anterior representados en una gráfica, ¿cuál es la moda?*




❖ <u>10ª sesión</u>

- Repaso de los conceptos vistos a través de una colección variada de problemas que permita aplicar los conocimientos nuevos ................. 55min.

❖ <u>11ª sesión</u>

- Prueba escrita de evaluación del aprendizaje .................................... 55min.

❖ <u>12ª sesión</u>

- Prueba informática de evaluación del aprendizaje ............................. 30min.

## I. SOBRE LA EVALUACIÓN

### ❑ Sobre los criterios de evaluación

Siendo coherentes con lo que dice el Currículo de Aragón sobre los criterios de evaluación, en relación a las medidas de centralización; con la siguiente prueba buscaremos comprobar si el alumno:

- Tiene la capacidad de calcular, utilizando si es necesario la calculadora o la hoja de cálculo, los parámetros centrales, media, mediana y moda, de una distribución.

- Posee la capacidad de interpretar información estadística dada en forma de tablas y gráficas.

- Obtiene conclusiones pertinentes de una población a partir del conocimiento de sus parámetros más representativos.

### ❑ Sobre la prueba de evaluación

Para evaluar el aprendizaje de los alumnos de las medidas de centralización propongo la siguiente prueba:

1) *Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona.*

   a) *Escribe la distribución más uniforme que indica los caramelos que ha llevado cada persona.*
   b) *Escribe, al menos, otras 4 distribuciones posibles, y explica cómo las has obtenido.*
   c) *Un cuarto chico llega a la fiesta y lleva 3 caramelos. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.*

<u>Solución:</u>

a) Lucía, 11 caramelos; Juan, 11 caramelos; Pablo, 11 caramelos

b) Lucía 11, Juan 10, Pablo 12

   Lucía 5, Juan 14, Pablo 14

   Lucía 33, Juan 0, Pablo 0

   Lucía 1, Juan 2, Pablo 30

   Lucía 9, Juan 17, Pablo 7

   Para hallar las nuevas distribuciones, basta que la suma total de caramelos entre los tres chicos sea 33.

c) Hay 11*3 +3=36 caramelos en total

   El reparto es: 36/4=9 caramelos de media por chico

Al número total de caramelos que había antes, hay que sumarle los caramelos que trae el chico nuevo; y estos caramelos hay que repartirlos entre los cuatro chicos, de forma que se obtienen 9 caramelos de media por chico.

A través de esta pregunta se pretende evaluar:

- el concepto de media de una distribución
- la construcción de una distribución dada la media
- el cálculo de la media aritmética de un conjunto de valores

Es de esperar que la mayoría de los alumnos respondan que la distribución más uniforme es aquella en la que cada chico ha traído 11 caramelos; sin embargo, puede surgir algo de dificultad al buscar otras distribuciones con la misma media. Deben recordar la propiedad de la media en la que, la suma de las diferencias entre cada valor y la media, es cero, y la técnica para obtenerla, pues será más fácil para ellos encontrar las nuevas distribuciones.

La puntuación del ejercicio es sobre 2 puntos, y los criterios de calificación son:

- Da la distribución más uniforme, 0’3 puntos
- Otras distribuciones posibles, 0’2 por cada una hasta 1 punto
- Media de los cuatro chicos, 0’4 puntos
- Explicación del resultado, 0’3 puntos

2) *En un estacionamiento cobran por cada minuto que está estacionado el vehículo 0’10€. La ocupación del estacionamiento durante la semana pasada fue la siguiente:*

| ***Tiempo de estacionamiento (min.)*** | ***Nº de vehículos*** |
|---|---|
| *[0, 60)* | *1240* |
| *[60, 120)* | *3575* |
| *[120, 180)* | *746* |
| *[180, 240)* | *327* |
| *[240, 300)* | *218* |
| *[300, 360)* | *44* |

*¿Cuál es el tiempo medio de estacionamiento, el más frecuente y el mediano?*

Solución:

| **Tiempo de estacionamiento (min.)** | **Nº de vehículos** | **Marca de clase** |
|---|---|---|
| [0, 60) | 1240 | 30 |
| [60, 120) | 3575 | 90 |
| [120, 180) | 746 | 150 |
| [180, 240) | 327 | 210 |
| [240, 300) | 218 | 270 |
| [300, 360) | 44 | 330 |

Suma total de la muestra: 6150

- Tiempo medio de estacionamiento:

  1240*30 + 3575*90 + 746*150 + 327*210 + 218*270 + 44*330= 612900

  Media: 612900/6150 = **99’6585366 minutos**

- Tiempo de estacionamiento más frecuente:

  Mayor frecuencia de coches: 3575 en el intervalo [60, 120)

  Moda: **90 minutos**

- Tiempo de estacionamiento mediano:

  Construimos la tabla de frecuencias acumuladas:

| **Tiempo (min.)** | **$f_i$** | **$F_i$** |
|---|---|---|
| [0, 60) | 1240 | 1240 |
| [60, 120) | 3575 | 4815 |
| [120, 180) | 746 | 5561 |
| [180, 240) | 327 | 5888 |
| [240, 300) | 218 | 6106 |
| [300, 360) | 44 | 6150 |

La posición central de la distribución corresponde a 6150/2=3075, cuyo valor se encuentra en la frecuencia acumulada asociada al intervalo de clase [60, 120), $F_i$=4815

Para el cálculo de la mediana, basta aplicar la siguiente regla de tres:

3075-1240 → x

4815-1240 → 120-60

x= 30’79

Luego el tiempo mediano de estacionamiento es,

60 + 30’79= **90’79 €**

Este problema se realizará en una sesión aparte, haciendo uso de un ordenador y del programa Excel para su resolución.

A través de esta pregunta se pretende evaluar:

- La técnica del cálculo de la media, la mediana y la moda de una distribución agrupada
- El conocimiento y manejo de las tecnologías para su aplicación a la estadística

Es de esperar que los alumnos respondan de manera correcta cuál es el tiempo de estacionamiento más frecuente.

Con respecto a la media, deben calcular la media ponderada tomando la marca de clase de cada intervalo, pero es muy probable que tomen cualquiera de los extremos del intervalo en su lugar; además de que es posible que no se den cuenta de que debe calcularse la media ponderada.

La mayor dificultad estará en tomar el valor central de la distribución por medio de la mediana, pues deben trabajar sobre las frecuencias relativas, que serán el número total de vehículos, y las frecuencias acumuladas. Además, una vez localizado el intervalo en el que se encuentra la mediana, deberán calcular la proporción correspondiente asociada a la mediana, y dar el valor exacto de ésta, no la marca de clase.

La puntuación del ejercicio es sobre 2 puntos, y los criterios de calificación son:

- Tiempo de estacionamiento más frecuente, 0’4 puntos
- Tiempo de estacionamiento medio, 0’6 puntos
- Tiempo de estacionamiento mediano, 1 punto

3) *En una importante empresa láctea, hay 600 empleados que cobran 30.000 € anuales, 50 que cobran 40.000 €, 10 que cobran 100.000 € y 5 socios que perciben 1.000.000 € cada uno.*

   a) *Indica cuál es la variable estadística sobre la que estamos trabajando.*

   b) *¿Cuál es el ingreso promedio de los empleados?*

   c) *¿Puedes calcular la mediana de los ingresos?*

   d) *¿Cuál es el ingreso más recibido por los empleados?*

   e) *Razona las diferencias entre los tres valores, y qué medida de tendencia central estima mejor el sueldo de los empleados de la empresa.*

<u>Solución:</u>

a) El sueldo o ingreso de los empleados de una empresa

b) Número total de empleados: 600 + 50 + 10 + 5= 665 empleados

   600*30000 + 50*40000 + 10*100000 + 5*1000000= 26000000

   Ingreso promedio: 26000000/665= **39097’74 €**

c) Construimos la tabla de frecuencias acumuladas:

| **Sueldo (€)** | **$f_i$** | **$F_i$** |
|---|---|---|
| 30000 | 600 | 600 |
| 40000 | 50 | 650 |
| 100000 | 10 | 660 |
| 1000000 | 5 | 665 |

La posición central de la distribución corresponde a 665/2=332’5, es decir, a la posición 333, cuyo valor se encuentra en la frecuencia acumulada asociada al valor 30000, $F_i$=600

Por tanto, el sueldo mediano es, **30000 €**

d) Ingreso más recibido: **30000 €**, con una frecuencia absoluta de 600

e) La diferencia entre el sueldo medio y el sueldo más recibido se debe a que algunos empleados tienen sueldos mucho mayores que el resto.

Para estimar el sueldo de los empleados de la empresa, es mejor usar la mediana, ya que se trata de una distribución asimétrica.

A través de esta pregunta se pretende evaluar:

- El cálculo de la media ponderada, la mediana y la moda
- El concepto y las propiedades de media, mediana y moda

A pesar de tener una variable discreta, es de esperar que los alumnos, como en el ejercicio anterior, no respondan correctamente sobre el sueldo medio de los trabajadores, pues calcularán la media simple de los sueldos.

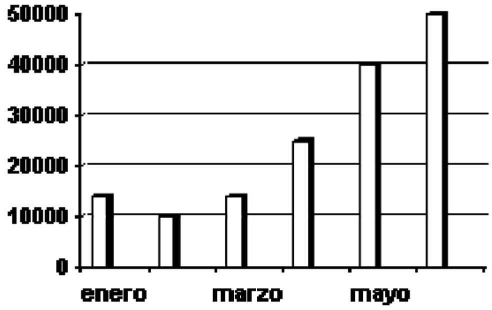
Si los alumnos han comprendido el concepto de mediana, al tener una variable discreta, sí es de esperar que sepan hallar el sueldo mediano; de la misma manera que el sueldo más recibido.

El razonamiento mostrará si los alumnos comprenden los conceptos y propiedades de las medidas de centralización, es decir, si han asimilado las tecnologías asociadas.

La puntuación del ejercicio es sobre 2 puntos, y los criterios de calificación son:

- Variable estadística, 0’2 puntos
- Ingreso medio, 0’3 puntos
- Ingreso mediano, 0’3 puntos
- Ingreso más recibido, 0’2 puntos
- Razonamiento sobre las diferencias, 0’4 puntos
- Razonamiento sobre la mejor estimación, 0’6 puntos

4) *Observa este diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa Bocatta durante los primeros 6 meses del año pasado:*




*a) Indica cuál es la variable estadística que aparece representada en el gráfico*

*b) Calcula la media de la variable e indica su significado*

*c) Calcula la mediana de la variable e indica su significado*

*d) ¿Cuál es la medida que mejor representa la tendencia central de ventas al mes? Razona tu respuesta.*

<u>Solución:</u>

a) El número de ventas de bocadillos al mes de la empresa Bocatta

b) Primero, damos un valor aproximado a la cantidad de ventas de cada mes:

Enero: 14000

Febrero: 10000

Marzo: 14000

Abril: 25000

Mayo: 40000

Junio: 50000

El número total de ventas en los primeros seis meses del año ha sido:

14000 + 10000 + 14000 + 25000 + 40000 + 50000 = 153000

Luego, el número medio de ventas al mes es 153000/6 = **25500 bocadillos**

Lo que significa, que de media se han vendido 25500 bocadillos cada uno de los meses.

c) Calculamos las frecuencias acumuladas

Enero: 14000

Febrero: 24000

Marzo: 38000

Abril: 63000

Mayo: 103000

Junio: 153000

La posición central en las ventas es 153000/2 = 76500, luego la mediana está en el mes de Mayo, pero vamos a calcular exactamente el día del siguiente modo:

76500-63000→x

103000-63000→30

x = 10’125

Por tanto la mediana es el de **10 de Mayo**, lo que significa que el 10 de Mayo es el momento en el que la empresa vendió la mitad de la producción de bocadillos.

d) Observando los resultados, y la gráfica, está claro que la medida que mejor representa la tendencia central de ventas al mes es la mediana; pues el dato que nos da la media no se acerca a la realidad, ya que según ésta, a finales de Marzo se habría vendido la mitad de la producción, cuando en realidad sabemos que no se vende hasta primeros de Mayo.

A través de esta pregunta se pretende evaluar:

- La aplicación de los conceptos nuevos para descubrir el significado real de la media y la mediana en una variable concreta
- Las técnicas y propiedades de la media y la mediana
- La capacidad de razonamiento ante la preferencia de una medida sobre otra para la obtención del valor central de una variable

Es de esperar que los alumnos respondan correctamente el número medio de ventas, pues basta con dar un valor aproximado al número de ventas de cada mes y aplicar la técnica asociada.

Sin embargo, para la estimación de la mediana, el alumno deberá proceder como en el segundo problema, con la diferencia de que los datos están expresados en una gráfica y no en una tabla de frecuencias.

Si el alumno conoce las propiedades de la mediana, podrá elegirla como la mejor medida para saber la tendencia central de la distribución.

La puntuación del ejercicio es sobre 2 puntos, y los criterios de calificación son:

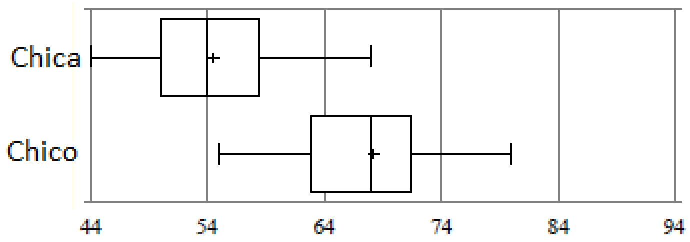
- Variable estadística, 0’2 puntos
- Número medio de ventas, 0’4 puntos
- Número mediano de ventas, 1 punto
- Mejor medida de tendencia central, 0’4 puntos

5) *En la siguiente gráfica se representa los pesos en kilos de chicos y chicas entre 16 y 18 años.*

   a) *Enumera la información que puedes obtener de los siguientes diagramas de caja*

   b) *¿Cómo interpretarías las diferencias de peso entre los sexos?*

   c) *¿Qué puedes decir de la simetría de las distribuciones?*




<u>Solución:</u>

a) Con respecto a las chicas:

   Peso mínimo: 44

   Peso máximo: 68

   Peso mediano: 55

   El segundo y tercer cuarto de chicas se concentran entre los 50 y 59 kilos.

   Con respecto a los chicos:

   Peso mínimo: 55

   Peso máximo: 81

   Peso mediano: 67

   El segundo y tercer cuarto de chicos se concentran entre los 63 y 71 kilos.

b) La diferencia de los pesos se debe a que a esta edad, los chicos ya se han desarrollado y han formado su musculatura, por lo que alcanzan a las chicas en peso. No como años antes, en los que, por ser el desarrollo biológico de las chicas más temprano, éstas siempre les sacaban ventaja en altura y peso.

c) La distribución asociada al peso de las chicas, es más simétrica, aunque se percibe una ligera diferencia entre el primer y cuarto cuartil, lo que denota una que el número de chicas de mayor peso es menor.

   En la distribución de los chicos se ve cómo el rango del tercer cuartil es menor, lo que implica que hay más concentración de chicos con respecto al resto de la distribución.

   De ambas se puede decir que los cuartiles centrales recogen a la mitad de cada distribución en rangos menores de peso.

A través de esta pregunta se pretende evaluar:

- El conocimiento de qué se expresa a través de un diagrama de caja
- La capacidad de interpretar la información que da un diagrama de caja, así como del significado de la mediana

Es de esperar que los alumnos respondan correctamente a la primera pregunta, pues basta recordar la descripción de los diagramas de caja que se ha hecho en clase.

La segunda pregunta requiere no sólo conocimientos en estadística, sino conocimientos del desarrollo diferenciado de chicos y chicas, así que el hecho de vivirlo en sí mismos, debe llevarles a responder de manera correcta.

Si los alumnos han comprendido qué expresa un diagrama de caja, podrán estudiar la simetría de las distribuciones, ya que es un aspecto bastante intuitivo de percibir.

La puntuación del ejercicio es sobre 2 puntos, y los criterios de calificación son:

- Descripción de los diagramas, 0’4 puntos cada uno, 0’8 puntos
- Interpretación de las diferencias de peso, 0’8 puntos
- Simetría de las distribuciones, 0’4

## ❑ Sobre el diseño de la prueba

Para el diseño de la prueba se ha buscado combinar aspectos conceptuales y procedimentales de las medidas de centralización. Así,

- En el primer problema, se trabaja el concepto de media como reparto, y las técnicas asociadas a la media en una distribución no agrupada
- En el segundo problema, además de trabajar las técnicas de la media, mediana y moda, se trabaja con el programa Excel, y sus aplicaciones para la estadística.
- En el tercer problema, se trabajan aspectos conceptuales de la media, mediana y moda, así como las técnicas de cálculo asociadas a ellas.
- En el cuarto problema, se trabaja con el concepto de variable estadística, los significados de la media y la mediana, y las técnicas asociadas.
- En el quinto problema, se trabaja el significado de la mediana y la interpretación de diagramas de caja.

## J. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB


[1]. Colera J., Gaztelu I., Oliveira Mª J. *Matemáticas 3º ESO*. Editorial Grupo Anaya, 2011

[2]. Carrasco Mª A., Martín R., Ocaña J.M., Sánchez J. Mª. *Matemáticas 3º ESO, Propuesta didáctica*. Editorial Luis Vives, 2007

[3]. Concepto e historia de la estadística. Disponible en: http://www.gestiopolis.com/recursos/experto/catsexp/pagans/eco/21/estadistica.htm

[4]. Batanero C. (2000) *Significado y comprensión de las medidas de posición central.* Granada

[5]. Cobo. B. (2003) Tesis doctoral: *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria.* Granada

[6]. Batanero C. y Godino J. D. (2001) *Análisis de datos y su didáctica.* Granada