MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS, ARTISTICAS Y DEPORTIVAS.

Facultad de Educación
Universidad Zaragoza

Trabajo Fin de Master

Especialidad de Matemáticas

"Trigonometría en 4º de la E.S.O."

Estudiante: **Assunta Tarantino**

Tutor Universidad: **José María Muñoz Escolano**

Tabla de contenidos

A. Sobre el objeto matemático a enseñar

i. Objeto matemático a enseñar. Curso y asignatura donde se sitúa el objeto matemático.

Según la ORDEN de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, se establece que la materia de Matemáticas se organiza en dos opciones en función de su carácter terminal (opción A) o propedéutico (opción B). Cada alumno podrá optar por una de ambas opciones de conformidad con sus intereses académicos y profesionales.

El objeto matemático a enseñar elegido por ese trabajo, se refiere al tema de trigonometría, que entra dentro del bloque de geometría de la asignatura de matemáticas, en 4º curso de ESO (opción B).

Los contenidos asociados a la Trigonometría en el currículo oficial (BOA, 2007, pág.8996) son los siguientes:

- Medida de ángulos: sistema sexagesimal, sistema de radianes, fórmulas para pasar de grados a radianes.
- Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno y tangente. Relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.
- Razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º, 60º, 90º.
- Cálculo gráfico de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Resolución de problemas de triángulos rectángulos.
- Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas.
- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas.

ii. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

La trigonométrica es importante, no solo como recurso en el estudio de la variación de las razones trigonométricas e introducción posterior en el concepto de función trigonométrica, sino que también en relación a su aplicación en la vida diaria.

Para que la introducción del tema resulte eficaz, atractiva y llamativa, hemos tenido en cuenta los aspectos funcionales de este contenido; esto es, hemos tenido en cuenta la aplicación de la trigonometría a distintos contextos de la vida real.

Se considera que el aprendizaje por descubrimiento, en el que sea el alumno que utilizando sus conocimientos previos, a cada paso tome decisiones, razone la estrategia, llegando poco a poco a construir el nuevo conocimiento, sea más eficaz y significativo.

Por ese motivo se desarrollan muchos problemas-situaciones de la vida real que llamen la atención, estimulando la curiosidad e interés del alumnado.

Campo de problemas

La trigonometría tiene muchas aplicaciones a la vida real: alturas, mediciones, estimaciones de la distancia entre la Tierra-Luna o Tierra-Sol (distancias inaccesibles).

Con un teodolito como el de la fotografía, por ejemplo, se pueden medir ángulos, tanto en el plano vertical como horizontal, que permite aplicar las razones trigonométricas y las relaciones que existen entre ellas, hallar distancias o calcular alturas y puntos inaccesibles.

Por campo de problema se entiende el conjunto de actividades y problemas antes las cuales los estudiantes no tienen una referencia primera de cómo se resuelven.

Relacionado al tema de trigonometría, dentro del campo de problemas que se considera desarrollar, se marcan distintos contextos de aplicación:

- Campo 1. *Resolución de triángulos rectángulos* en los que se pueden distinguir dos tipos:
    - Conozco dos lados: mediante el teorema de Pitágoras y la inversa de cualquier razón trigonométrica (seno, coseno o tangente) para conocer los ángulos agudos.
    - Conozco un lado y un ángulo agudo: mediante la adecuada elección de una razón trigonométrica (seno, coseno o tangente) de dicho ángulo.

- Campo 2. *Medidas de alturas indirectas:* medir una montaña, medir la altura de un árbol sin subirte en él, etc.

- Campo 3. *Medir distancias inaccesibles:* medidas de inclinación de una escalera medir el ancho de un río sin tener que mojarte.

- Campo 4. *Medidas de áreas y volúmenes:* áreas y volúmenes de terrenos, polígonos, figuras tanto geométricas como familiares de la vida diaria.

Técnicas

Los distintos problemas forman, junto a otros muchos, un tipo o campo de problemas, porque existe una técnica matemática que representa un "*saber hacer*" algebraico, que necesita ser introducida y justificada.

Técnica 1: *Conversión de grados y radianes*

La conversión de radianes a grados y viceversa presupone una técnica, un saber hacer.

"Para obtener los radianes que tiene una circunferencia, se tiene que dividir su longitud por la longitud del radian: $\frac{2\pi \cdot r}{r} = 2\pi$ *radianes".*

Ejemplos:

$$\frac{2\pi\ radianes}{360^{\circ}} = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}\ ra$$

$$\frac{2\pi\ radianes}{360^{\circ}} = 135^{\circ} = \frac{3\pi}{4}$$

Una de las aplicaciones más inmediatas de la trigonometría es la resolución de triángulos rectángulos.

Técnica 2: *Resolución de triángulos rectángulos*

Dentro de la resolución de triángulos rectángulos, distinguimos los problemas de tipo geométrico de los problemas de la vida cotidiana que involucran triángulos rectángulos. Por ello, se pueden clasificar dos técnicas:

Técnica 2.1:

Para la resolución de triángulos rectángulos, resolver un triángulo rectángulo significa encontrar las medidas de sus seis elementos: 3 lados y 3 ángulos. Siendo recto uno de sus ángulos, solo basta encontrar 2 ángulos. Entonces el uso de las razones trigonométricas junto con el teorema de Pitágoras, nos permiten resolver cualquier triángulo rectángulo conociendo dos datos. De estos dos datos, se pueden presentar dos situaciones:

1º) Se conocen dos lados (entre los dos catetos y la hipotenusa)
2º) Se conocen solo un ángulo agudo y un lado (áng. y cateto o áng. y hipotenusa).

Según el caso que se presente, el alumno debe reflexionar sobre lo que hay que hacer primero, tomar decisiones, aplicando los conocimientos que se posean acerca de las definiciones de las razones trigonométricas, para que no resulte en ningún momento un proceso mecánico, algorítmico y nada razonado.

También se especifica que se pueden resolver triángulos que inicialmente no son rectángulos descomponiéndolos en triángulos que los sean mediante el trazado de su altura. Las técnicas que hay de utilizar en su resolución son todas aquellas técnicas previas sobre ángulos, relaciones angulares, triángulos, semejanza entre triángulos, y por fin el uso de las razones trigonométricas junto con el teorema de Pitágoras, que permiten resolver cualquier triángulo rectángulo conociendo dos de sus datos.

Técnica 2.2:

Para la resolución de problemas de la vida cotidiana cuya modelización e interpretación matemática se reduce al estudio de triángulos rectángulos, se proporciona una técnica algorítmica al final de la unidad didáctica, en la fase de asentamiento y resolución de problemas. Los pasos a seguir son los siguientes:

- Construir la figura aproximadamente que muestre la situación propuesta y en la que se reflejen los dados.
- Determinar si se trata de un triángulo rectángulo o no
- Repasar ángulos, teorema de Pitágoras, relaciones trigonométricas, relación fundamental de la trigonometría, para decidir cual es la más apropiada en la situación planteada
- Realizar los cálculos para sacar el resultado
- Analizar, por último, las soluciones obtenidas.

En realidad, aún se trate de una técnica algorítmica, el alumno tiene de ser capaz de interpretar la situación en la que se encuentra. No hay de cumplir los pasos mecánicamente, sino que, si necesario, se pueden saltar unos pasos en lugar de otros. Siempre hay de saber en cada momento en qué situación me encuentro, que tengo que hacer, de cuales técnicas necesito y tomar decisiones adecuadas. Se pretende conseguir que el alumnado sea capaz adaptarse a cualquier contexto se le presente, que sepa razonar y reflexionar sobre los datos que posea y los que no, sepa lo que puede hacer con ellos, aplicando y relacionando entre si sus conocimientos.

Técnica 3: *Uso calculadora*

El uso de la calculadora permite dedicar más tiempo a la reflexión, a la conexión entre distintas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras áreas, al razonamiento, a la representación de los problemas, a la comunicación de los resultados.

Normalmente las calculadoras científicas utilizan tres tipos de unidades angulares. Nos muestran en pantalla las unidades de trabajo de forma:

- DEG: Sistema sexagesimal
- GRAD: Sistema centesimal
- RAD: Sistema en radianes

Las técnicas principales a enseñar son:

- Introducción de ángulos en el sistema sexagesimal
- Paso de grados decimales a grados, minutos y segundos. Calculo del seno, coseno y tangente de un ángulo:
- Cálculo de ángulo conociendo el valor del seno, coseno o tangente.

Tecnología

Ninguna técnica puede "vivir" con normalidad en un campo de problemas si no aparece en el mismo, como una manera de hacer a la vez correcta, comprensible y justificada.

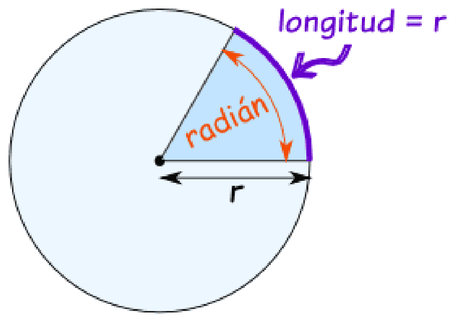
Las técnicas deben ser capaz de abordar a un campo de problemas y a partir de esto generar muchos más problemas del mismo tipo. Esto significaría que las técnicas están bien justificadas.

La existencia de una técnica supone, por tanto, que exista en su entorno un discurso justificativo de la técnica así como de su ámbito de aplicabilidad o validez (Tecnología, de tékhne, técnica y logos, discurso).

Tecnología 1: *Definición de radián*

La justificación de la medición en radianes se basa en el siguiente teorema:

"El ángulo formado por dos radios de una circunferencia, medido en radianes, es igual a la longitud del arco que delimitan los radios; es decir, $\theta = s/r$, donde θ es ángulo, s es la longitud del arco, y r es el radio. "



La demostración se basa en el concepto de longitud de arco.
En consecuencia, el ángulo *completo*, $\theta_{\text{circunferencia}}$, que subtiende una circunferencia de radio ***r***, medido en radianes, es:

$$\theta_{\text{circunferencia}} = \frac{L_{\text{circunferencia}}}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

Este concepto, introducido por Euler en el 1748, representa la justificación que se le da a la técnica de conversión de grados a radianes y viceversa.

Tecnología 2: *Relaciones trigonométricas*

La relación fundamental, $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ me permite encontrar las razones trigonométricas de un ángulo sin recurrir a la calculadora, solo conociendo el seno o el coseno. Esta, junto con la regla $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$, permite determinar áreas, longitudes (distancias, alturas), resolver problemas tanto geométricos como métricos o de la vida real. Por esta razón, estas dos relaciones representan la tecnología que justifica las técnicas empleadas hasta este momento. Estas hacen que la tecnología sea tangible y permita aportar elementos para modificar la técnica con el fin de ampliar su alcance, superando así sus limitaciones y posibilitando la producción de nuevas técnicas.
Se pretende que el alumnado sea capaz de aplicar las técnicas aprendidas, aumentando y ampliando sus habilidades y destrezas, intentando alcanzar nuevas técnicas, a partir de las que posea ya.

Tecnología 3: *Deducción de las razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º.*

Con una actividad centrada en el aprendizaje significativo y por descubrimiento, en la que el profesor vaya guiando al estudiante dándole pautas y sugerencias, y el alumno utilice sus conocimientos y técnicas previas, se definen las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente por un ángulo agudo. En este caso, se hace referencia a técnicas previas que se supone el alumnado haya ya asumido en los cursos anteriores: ángulos, relaciones angulares, teorema de Pitágoras, teorema de Tales, poliedros, áreas, volúmenes, etc, familiares para los alumnos ya desde 1º de la E.S.O.
Se desarrolla de esta forma el pensamiento divergente, a través de la creatividad, del aprendizaje por descubrimiento, del pensamiento lateral. El estudiante debe "moverse" en varias direcciones en busca de la mejor solución para resolver el problema.

Después se les invita a calcular, a partir de la definición y buscando los triángulos adecuados, las razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º, que aparecen con bastante frecuencia. La deducción de las razones trigonométricas de estos ángulos representa una tecnología.

iii. ¿Qué metodología se emplea para el objeto matemático a enseñar?

Antes de cada exposición teórica se plantearán problemas y situaciones en las que estén presentes los contenidos que se quieren tratar. Al intentar abordar los problemas se pondrá de manifiesto la necesidad de utilizar ciertos contenidos que el profesor irá explicando.

Posteriormente a la explicación como consecuencia de la necesidad se plantearán más problemas que precisen de los mismos contenidos para que el alumno pueda consolidar lo aprendido.

La metodología será activa, se estimulará la participación del alumno que guiado por el profesor, le indicará las actividades que debe realizar teniendo en cuenta la individualidad de cada alumno. En el desarrollo de las clases se combinará en la medida de lo posible, el trabajo individual con el trabajo en grupo. Con todo ello, se pretende que el alumno desempeñe un papel activo y no solo actúe como receptor de información. Para reforzar el aprendizaje de algunos conceptos puede ser de gran utilidad realizar algunas actividades haciendo uso de los recursos tecnológicos (calculadoras, programas informáticos como Geogebra, e Internet), siempre haciendo un uso racional, sin hacer un uso indiscriminado de los mismos.

Se considerará mucho también la observación en clase en la que se tendrá en cuenta el progreso del alumnado, creatividad, salidas a la pizarra, participación espontánea o estimulada, tanto de forma individual como en grupo de trabajo, actitud general positiva ante el aprendizaje propio y de los compañeros, puntualidad en la entrega de trabajos.

En algunas sesiones se buscará un método atractivo, asequible a la mayoría de los alumnos, que sustituye los cálculos trigonométricos por construcciones gráficas en el ordenador. Para el desarrollo de estas actividades se necesitará el ordenador, cañón proyector, el libro de texto para poder consultar la teoría, el cuaderno de trabajo donde ir apuntado y elaborando las actividades.

Paralelamente a lo anterior se propondrán trabajos, para realizar fuera del aula, que inviten a la investigación personal y a la interpretación de diferentes fuentes escritas. Se introducirá la calculadora y programas informáticos como Geogebra, Cabri de tipo geométrico.

B. Conocimientos previos del alumno

i. Los conocimientos previos que necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático, ¿están garantizados?

En la E.S.O. los alumnos han ido adquiriendo conocimientos geométricos en cada curso. Ya desde 1º de la E.S.O. se intenta que conceptos como:

- Ángulos
- Rectas
- Mediatriz y Bisectriz
- Relaciones angulares
- Ángulos en polígonos
- Simetrías en figuras planas
- Triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares
- Circunferencia
- Teorema de Pitágoras
- Teorema de Tales
- Poliedros, áreas, volúmenes.

sean familiares a los estudiantes.

Pero no será hasta 4º curso de la E.S.O. cuando los alumnos y alumnas vean en qué consiste la trigonometría. Pronto descubrirán la utilidad de la misma para todo tipo de cálculos geométricos como la obtención de áreas, medidas de lados y ángulos en figuras geométricas, hallar tamaños de manera indirecta, etc.

Anteriormente al tema de Trigonometría, también se supone que una posible unidad didáctica anterior haya sido la de "Semejanza y Movimiento, con lo cual los siguiente conceptos deben resultar ya conocidos: (BOA, 2007, pág.8996)

- Semejanza de triángulos.
- Triángulos semejantes: teorema de Tales.
- Criterios de semejanza de triángulos.
- Razón de semejanza.
- Escala.
- Razón de semejanza de las longitudes, áreas y los volúmenes.
- Resolución de problemas de medidas indirectas utilizando la semejanza de triángulos. Interpretación y cálculo de distancias, áreas y volúmenes en planos y maquetas de las que se conoce su escala.

ii. Si no es así, ¿mediante qué acciones didácticas vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

No siempre se puede estar seguro de que el alumnado haya alcanzado ya todos los contenidos didácticos de los cursos anteriores. Para poder detectar el nivel de partida del alumnado, se le puede plantear unas actividades de exploración, como repaso o refuerzo de los conocimientos previos.

Por ejemplo, el alumnado ya debería conocer los teoremas de Tales y Pitágoras. Se pueden plantear actividades de exploración inicial y de motivación relacionados con el concepto de semejanza o con la vida real.

Por lo tanto, a la hora de presentar las razones trigonométricas de un ángulo, es interesante que hagamos referencia a una posible unidad didáctica anterior “Semejanzas y Movimientos”, en la que dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen un ángulo agudo igual, por tanto, esto demuestra que las razones trigonométricas de un ángulo no dependen del triángulo escogido, sino del ángulo. De esta forma se le va ya informando y dando sugerencias sobre el nuevo tema.

Las figuras geométricas semejantes aparecen en numerosas ocasiones en nuestro entorno habitual: las ampliaciones o reducciones de una fotocopia, las copias de diferentes tamaños de una misma fotografía, los mapas de carreteras y planos con diferentes escalas o las maquetas de monumentos son simples ejemplos de la presencia de la semejanza geométrica en nuestra vida cotidiana. Por esta razón, los problemas que se plantean en una *primera sesión de exploración*, para activar los conocimientos previos, son de los siguientes tipos:

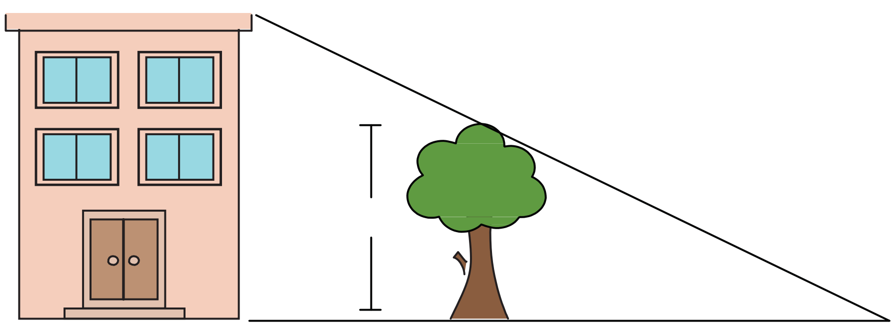
Ejemplos de actividades:

Actividad 1º. Semejanza entre objetos.

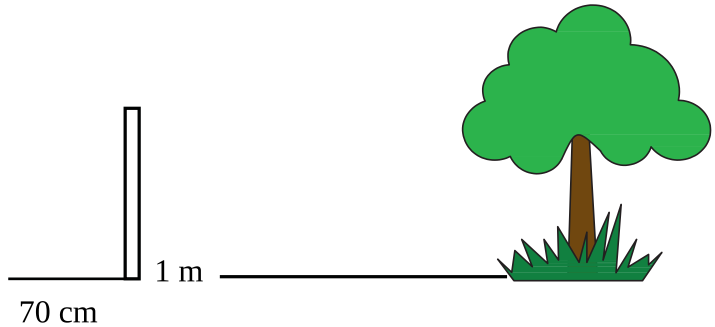
“*Dos fotografías de la misma persona, una de tamaño 3x4 pulgadas que luego es ampliada a 6x8 pulgadas. ¿Son semejantes? Y dos fotografías de tamaño 4x12 pulgadas y luego ampliada de 5x24 pulgadas. ¿Son semejantes estás últimas?*

Actividad 2º. Teorema Tales y alturas indirectas.

– *“Un árbol mide 5 m de altura y, a cierta hora del día, proyecta una sombra de 6 m. ¿Qué altura tendrá el edificio si a la misma hora proyecta una sombra de 270 m* ?



- *“Si en un determinado instante del día, una estaca de 1 metro produce una sombra de 70cm de longitud, ¿Cuál será el altura de un árbol que en ese mismo instante produce una sombra de 3,4m de longitud?*

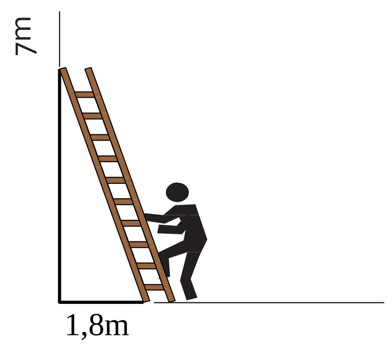


Actividad 3º: Áreas y volúmenes resueltos con semejanza.

- *Un rectángulo mide 4 cm de largo y 3 cm de ancho. ¿Cuál es el perímetro y el área de otro semejante cuyos lados miden el triple?*
- *Un cubo tiene de área 25 cm^2. Calcula su área si la arista aumenta el doble.*

Actividad 4º. Teorema Pitágoras.

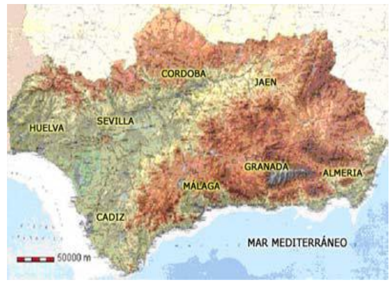
- *"Calcula la longitud de una escalera sabiendo que está apoyada en la pared a una distancia de 1,8 m y alcanza una altura de 7m*



- *Una antena está sujeta al suelo por dos cables que forman un ángulo recto de longitudes 27 y 36 cm. ¿Cuál es la distancia que separa los dos puntos de unión de los cables con el suelo? Representa mediante dibujo la siguiente situación.*

Actividad 5º. Escalas.

- "*En la mapa de España, se indica que la escala es 1:50000. ¿Cuál es la razón de semejanza entre la realidad y el mapa? Si la distancia entre dos ciudades en ese mapa es de 15'5 cm. ¿Cuál será la distancia real que las separa? Indica el resultado en kilómetros."*



Dentro de este apartado de actividades iniciales, se pretende diagnosticar el nivel inicial de los alumnos en cuanto a conocimientos relativos a triángulos, a la semejanza de triángulos, a triángulos rectángulos, así como sugerirles algunas líneas de actuación posteriores.

C. Razones de ser del objeto matemático

i. Explicación de cuál es la razón o razones de ser que se van a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático.

Desde que Tales, en el siglo VI a. C., midió la altura de las grandes pirámides de Egipto comparando la longitud de la sombra arrojada por ellas con la de otro objeto, la realización de mediciones indirectas ha constituido un tema de gran interés. Paralelamente, todos los currículos de enseñanza media han incluido estos problemas. La cuestión es que la resolución analítica de triángulos exige conocimientos de trigonometría que no resultan asequibles para muchos estudiantes. Así, el actual currículo de matemáticas contempla la resolución de triángulos cualesquiera en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, mientras que en 4º opción B se contemplan los casos de triángulos rectángulos.

El estudio de la trigonometría es muy interesante ya que permite resolver una gran cantidad de situaciones y problemas en el mundo real, resultando fundamental especialmente en cualquier tipo de aplicación basada en geometrías y distancias.

De hecho sus primeras aplicaciones fueron en el ámbito de la astronomía, la navegación y la geodesia; casos en los que no es posible hacer mediciones de manera directa o donde las distancias son inaccesibles, como la distancia de la Tierra a la Luna o la medida del radio del Sol.(*Razón de Ser Histórica*)

Otras aplicaciones interesantes de la trigonometría se realizan en Física, o en Ingeniería en casi todas sus ramas, siendo muy importante en el estudio de fenómenos periódicos, por ejemplo en el flujo de corriente alterna para la ingeniería eléctrica.

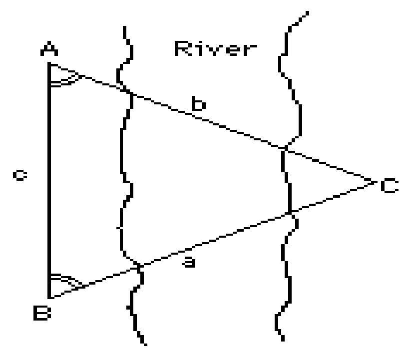
Muchas veces te suelen preguntar cuál es la aplicación que tienen las Matemáticas a situaciones de la vida real. Y en este caso concreto, ¿para qué sirve la trigonometría?.

Proponemos dos actividades distintas para mostrar la razón de ser del contenido, atendiendo al contexto en que se implementen esta propuesta didáctica:

a) Introducir el tema a través de su razón de ser histórica; esto es, desarrollar en distintas sesiones una experiencia en la que los estudiantes fueran los principales protagonistas, construyendo medidores de ángulos manuales. Seguidamente la salida al patio para llevar a cabo las mediciones del edificio del instituto, y luego recopilar en el aula los datos obtenidos. Al final la realización de un video elaborado con la información recogida de la experiencia (anotando las estrategias surgidas, resultados obtenidos, comparación de los mismos conclusiones y teoría encontradas, etc) y el planteamiento de los distintos problemas de situaciones de la vida real de resolución similar a las llevadas a cabo en la experiencia fuera del aula.

Dependiendo del contexto en el que se implemente esta actividad, como el tipo de centro, el alumnado, la disponibilidad de materiales específicos,… este tipo de actividad, aunque muy interesante, podría ser vista como un motivo para saltar la clase "magistral" en el aula, obteniendo que trabajen solo unos cuantos. En este sentido, también hemos comprobado que en muchos de los libros de texto consultados emplean este tipo de problemas como presentación de la unidad de trigonometría:

> *Imagínate que estas cerca de un ancho río y necesitas conocer la distancia hasta la otra orilla, digamos hasta el árbol marcado en el dibujo por la letra C (para simplificar, ignoremos la 3º dimensión). ¿Cómo hacerlo sin cruzar el río?*



Esta pregunta se planteó durante muchos años, y en su solución están los orígenes de la Trigonométrica. Se trata, pues, de modelizar una situación desde su punto final y acabar en el origen histórico. Sin embargo, ese proceso de modelización es complicado que sea gestionado por los alumnos de una manera autónoma sin que el docente tenga que realizar muchas orientaciones e introducir los conceptos trigonométricos previamente.

b) Sin embargo, puesto que deseamos involucrar y "obligar" todo el alumnado a reflexionar, razonar, tomar decisiones, elaborar conjeturas sobre unas situaciones que se le presenta, se ha considerado más conveniente introducir el objeto matemático a través de una razón puramente matemática, para desarrollar de esa forma también el pensamiento lateral, la creatividad, la abstracción a través del descubrimiento.

Proporcionando problemas tangibles a los estudiantes, de forma que a partir de cuestiones que vayan surgiendo o aquellas que se sugieran, sean capaces de llegar a darse cuenta de la necesidad que han tenido, y por la cual han llegado al objeto matemático que se quiera introducir.

Los conocimientos no se apilan unos encima de otros. Un aprendizaje resulta significativo si implica rupturas cognitivas, acomodaciones. La construcción del conocimiento no es un proceso continuo, surge de desequilibrios, rupturas con conocimientos anteriores, reconstrucciones. Se pretende fomentar un trabajo que lleve a la creatividad, a pensar lateralmente, que en otras palabras "*enseñe a pensar*".

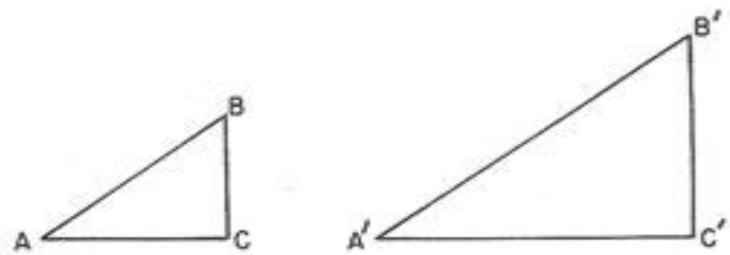
Se construyen los conceptos de razones trigonométricas de seno y coseno como invariantes dentro de un triángulo rectángulo en relación de la semejanza de triángulos. En el siguiente apartado, se presenta la actividad que se lleva a cabo en el aula para introducir las razones trigonométricas.

ii. Diseño de uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

En la *segunda sesión* (fase de iniciación), se propone introducir las razones trigonométricas mediante una serie de tareas que conducen a los alumnos a entender la razón de ser de las razones trigonométricas asociados a triángulos rectángulos en problemas de tipo geométrico.

Actividad 1.

Dados dos triángulos rectángulos de lados AB, BC, CA y A'B', B'C', C'A' respectivamente.



Primero se pide que hagan una pequeña investigación, midiendo los lados, sus ángulos para clasificar los triángulos, tanto en relación a la longitud de sus lados como a la amplitud de sus ángulos. Se rellenen las dos tablas siguientes:

Clasificación triángulos por sus lados

Tipo de triángulo	Descripción	Dibuja uno de ejemplo
Equilátero		
Isósceles		
Escaleno		

Clasificación triángulos por sus ángulos

Tipo de triángulo	Descripción	Dibuja uno de ejemplo
Rectángulo		
Acutángulo		
Obtusángulo		

Además de eso, se hacen consultas del tipo:
- ¿Cuánto miden los lados de cada triángulo?
- ¿De qué forma has obtenido la medida de los lados?
- ¿Cuánto miden los ángulos de cada triángulo?
- ¿De qué forma has obtenido esta medida?

De esta manera, investigamos también sobre el material empleado (regla, compás, transportador…) para dibujar y medir longitudes y amplitudes de ángulos.

A continuación se plantean cuestiones acerca de la semejanza de triángulos:
- ¿Los dos triángulos son semejantes? Completa la tabla a continuación.

Cociente	Valores cociente
$\frac{BC}{B'C'}$	
$\frac{AB}{A'B'}$	
$\frac{AC}{A'C'}$	

- ¿Qué representan estos valores encontrados?

Se comprueba que los tres cocientes toman el mismo valor, la razón de semejanza de los dos triángulos, y se vincula la semejanza de los triángulos rectángulos con la igualdad de un ángulo agudo en ambos, consecuencia del Teorema de Tales.

Ahora con los datos que se tienen, se pide a los alumnos que rellenen la siguiente tabla:

$\frac{BC}{AB}$	$\frac{B'C'}{A'B'}$	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{A'C'}{A'B'}$	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{B'C'}{A'C'}$

Y se realizan las siguientes preguntas:
- ¿Qué observas?, - ¿Cómo son los cocientes $\frac{A'C'}{A'B'}, \frac{AC}{AB}$?, ¿y los cocientes $\frac{A'C'}{C'B'}, \frac{AC}{CB}$?

Se construye ahora otro triángulo rectángulo de ángulo α y completa la tabla siguiente:

α	$\frac{BC}{AB}$	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{B'C'}{A'B'}$	$\frac{A'C'}{A'B'}$	$\frac{B'C'}{A'C'}$

Se les hace razonar, compartir ideas, métodos, para que surge poco a poco la necesidad necesitar del nuevo conocimiento.

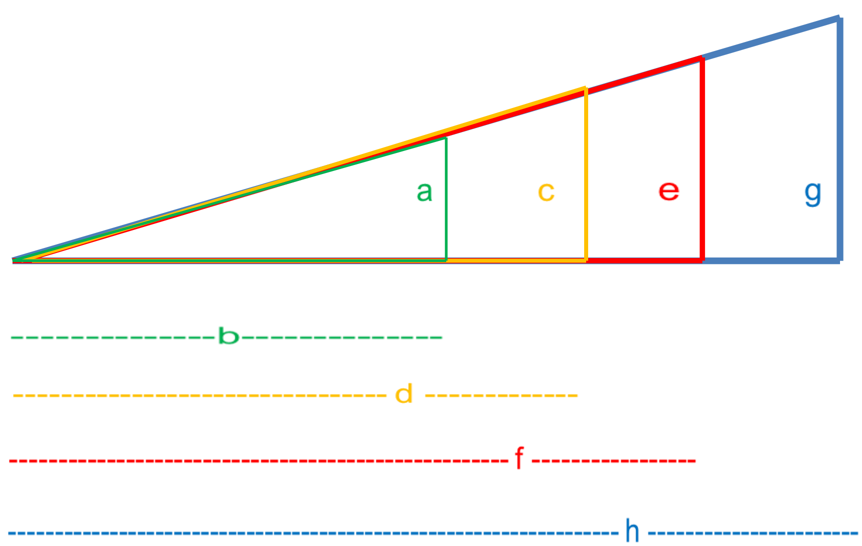
Se trata de proporcionar un aprendizaje significativo, fomentando la participación y colaboración del alumnado que va descubriendo poco a poco el nuevo concepto a introducir. También se pretende en la realización de esta actividad que se demuestre cierta destreza, creatividad y abstracción para dibujar, medir, buen manejo de reglas, compás, transportador.

iii. Metodología a seguir en su implementación en el aula.

Esta actividad se realiza en la segunda fase, la de iniciación, para estimular curiosidad, interés en el alumnado que de aquí a poco se enfrenta al nuevo tema.

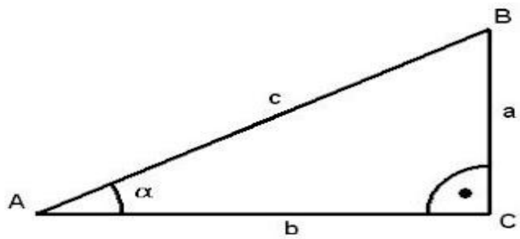
El desarrollo de tal actividad supone el uso de papel, del lápiz, de la regla, del transportador, de la calculadora. El alumnado se organiza en pequeños grupos de 3 personas máximo, en los que vayan observando los valores que toman los lados de los dos triángulos, los ángulos, los distintos cocientes, construyendo una tabla como la siguiente, tanto en Excel como en el propio cuaderno de trabajo, según las posibilidades.

De esta forma los alumnos irán observando, apuntando y comparando los valores obtenidos, descubriendo que los valores de los cocientes no cambian, demostrando que estos resultados no dependen del triángulo escogido, sino del ángulo agudo.



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \dots$$

Por lo tanto se llega a la necesidad de definir las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo de un ángulo α de la forma siguiente:



$$sen\alpha = \frac{BC}{AB}; \cos\alpha = \frac{AC}{AB}; tg\alpha = \frac{BC}{AC}$$

Podría pensarse que estas definiciones no son consistentes puesto que “parece” que dependen del triángulo rectángulo que se considere. Sin embargo no es así, ya que el valor del seno del coseno y de la tangente de un ángulo no varía aunque se considere otro triángulo rectángulo, puesto que son triángulos semejantes (por tener los tres ángulos iguales) y por tanto sus lados son proporcionales.

De esta forma, no solo se activan los conocimientos previos de los alumnos, sino que también a partir de estos, se los lleva a construir el nuevo conocimiento. Se les hace razonar, conduciéndolos poco a poco a formular nuevas teorías.

D. Campo de problemas

i. Diseño de los distintos tipos de problemas que se van a presentar en el aula.

El estudio de la trigonometría es muy interesante ya que permite resolver una gran cantidad de situaciones y problemas en el mundo real, resultando fundamental especialmente en cualquier tipo de aplicación basada en geometrías y distancias.

El conjunto de ejercicios, actividades y problemas que se considera se constituyen en razones de ser del objeto matemático de trigonometría: medidas de altura, distancias, áreas y volúmenes de terrenos, medidas de inclinación. También la resolución de problemas métricos y geométricos implica el uso de trigonometría.

Además se usa la trigonométrica para la construcción de diversas figuras geométricas tales como sillas, mesas y espacios a utilizar en la vida diaria de cada persona.

A continuación de marcan los distintos campos de problemas proporcionados al alumnado:

Campo 1. *Resolución de triángulos rectángulos* (tanto de tipo geométrico como problemas de la vida cotidiana)

i. *Conozco dos lados* (Hipotenusa y un cateto o dos catetos)

a) En un triángulo rectángulo los catetos miden respectivamente 15cm y 8cm. Hallar los ángulos agudos.

b) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 45cm y un cateto 27cm. Halla los ángulos agudos.

c) Una escalera de 3 metros está apoyada sobre una pared, estando su base a una distancia de un metro y medio de la pared. ¿ qué ángulo forma la pared con el suelo?

ii. . *Conozco un ángulo y un lado*

a) Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 47º y el cateto opuesto 8 cm, halla la hipotenusa.

b) La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de 36º, mide 11m. ¿Cuál es la altura del árbol?

c) El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de 37º, ¿a qué altura vuela la cometa?

Campo 2. *Medidas de alturas indirectas*

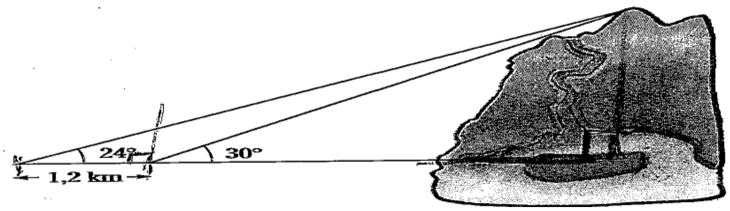
a) Juan y Pedro ven desde las puertas de su casa una torre, bajo ángulos de 45° y 60°. La distancia entre sus casas es de 126 m y la torre está situada entre sus casas. Halla la altura de la torre. Hacer un dibujo con los datos.

b) Para medir la altura de una montaña se obtuvieron las medidas de la figura adjunta. Si los dos puntos de observación están situados a 1.200 metros sobre el nivel del mar, ¿Qué altura alcanza dicha montaña?

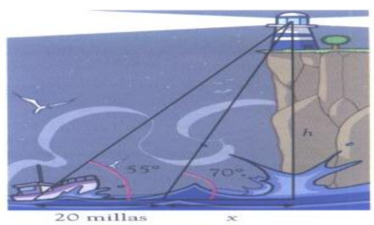
c) Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 100m. ¿cuál es la altura si los ángulos son 33º y 46º?

d) Una antena de teléfonos se encuentra sujeta por dos cuerdas que forman un ángulo recto. Los puntos de anclaje de las cuerdas en el suelo están alineados con el pie de la antena y distan de él 5 y 9 metros, respectivamente. Calcula la altura de la antena y la longitud de las cuerdas.

e) Para medir la altura de una montaña se obtuvieron las medidas de la figura adjunta. Si los dos puntos de observación están situados a 1.200 metros sobre el nivel del mar, ¿qué altura alcanza dicha montaña?



f) Desde un barco vemos la luz de un faro con una inclinación de 55º y después de avanzar 20 millas en esa dirección, se ve con un ángulo de 70º ¿A qué distancia estamos del faro?



<u>Campo 3.*Medidas de distancias inaccesibles.*</u>

a) Un rió tiene un anchura de 40 metros y corren sus aguas a una velocidad de 1,5 Km/hora. Una persona desea atravesarlo en línea recta en una barca. Si la velocidad de la barca en aguas tranquilas es de 3Km/hora, ¿a qué distancia el río desembarcará?

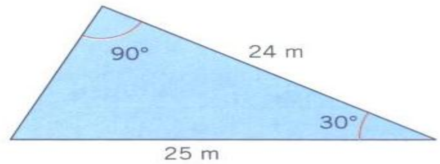
b) Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40º23´ y si se retrocede 40 m se ve bajo un ángulo de 28º30´ 25´. Halla la altura del árbol y el ancho del río.

c) Marta, que vive en primera línea de playa, observa un hidropedal averiado bajo un ángulo de depresión de 10º. Si está a 20 m de altura, ¿cuántos metros deben nadar sus ocupantes para llegar a la costa?

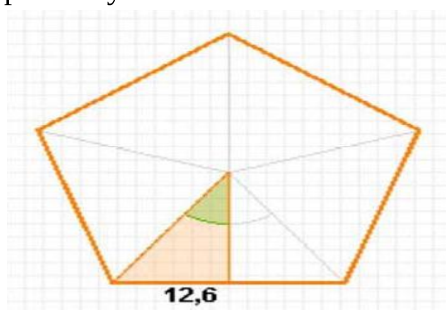
d) Un rio tiene un anchura de 40 metros y corren sus aguas a una velocidad de 1,5 Km/hora. Una persona desea atravesarlo en línea recta en una barca. Si la velocidad de la barca en aguas tranquilas es de 3Km/hora, ¿a qué distancia el río desembarcará?

Campo 4. *Medidas de áreas y volúmenes*

a) Resuelve el triángulo y calcula su área.



b) Calcular el área de un pentágono regular de 25,2 cm de lado. El área de un polígono regular: perímetro·apotema/2 Como se trata de un pentágono el ángulo central mide 360º/5=72º Nos fijamos en el triángulo rectángulo de la figura en el que un cateto es la apotema y otro la mitad del lado. En este triángulo:



$$tg\,36^o = \frac{12{,}6}{a} \Rightarrow a = \frac{12{,}6}{tg\,36^o} = \frac{12{,}6}{0{,}72} = 17{,}34cm$$

Luego el área del polígono es:

$$\text{Área: } \frac{25{,}2 * 17{,}34}{2} = 1092{,}57cm^2$$

c) Calcula la cantidad de chapa necesaria para fabricar una señal de STOP de forma octogonal, sabiendo que la diagonal marcada mide 1,25m.

ii. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Todas las técnicas proporcionadas al alumnado resultan necesarias para la resolución de dichos problemas. En cada momento hay un campo de aplicabilidad de las mismas que da validez y sentido al mismo.

Respecto a las modificaciones de técnicas que dicho campo de problemas exige, se pretende que se amplíen las formulas trigonométricas combinando ya las conocidas. Aplicar estás dentro y fuera de las matemáticas, diversificando los estilos y eligiendo una vía más intuitiva como la de interpretación de figuras, que justifiquen los enunciados.

iii. Metodología a seguir en su implementación en el aula.

El campo de problemas considerado se va desarrollando en distintas sesiones, durante la fase de asentamiento y resolución de problemas, prevista para el final de la unidad didáctica.

Algunos se desarrollarán de forma individual en el aula o en casa, otro de forma grupal en el aula, organizados por pequeños grupo de 2-3 personas. El profesor irá observando el trabajo de grupo, para que resulte una guía en el proceso de enseñanza-aprendizaje, realizando preguntas para verificar si están alcanzando los objetivos propuestos.

En cuanto a las actividades, se les plantea contextos reales para que puedan acercarse lo más posible a la realidad. Con estos problemas, se pretende estimular a los alumnos a realizar un estudio no memorístico, sino comprensivo.

La aplicación de las razones trigonométricas en la resolución de problemas matemáticos relacionados con situaciones del entorno, estimula curiosidad e interés en el alumnado. Problemas donde haya que calcular distancias, medir alturas, calcular áreas, necesitan la realización de un dibujo que aclare el enunciado del problema. De esta forma se facilitará el planteamiento del problema. Se les plantea contextos, lo más posibles, reales para que puedan acercarse más a la realidad.

El trabajo de los alumnos, ha de ser dirigido y animado por el profesor. Como profesores nos esforzaremos, sin cortar la espontaneidad del trabajo de los alumnos, en organizar las conclusiones y, periódicamente, sistematizarlas de modo que se cree un pequeño compendio teórico en el que se recojan de forma organizada los resultados básicos y más relevantes que hayan ido surgiendo. De forma individual, cada alumno realizará las tareas en su cuaderno/portafolio de trabajo, revisado diariamente por parte del profesor.

E. Técnicas

i. Diseño de los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos? Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático? Metodología a seguir en su implementación en el aula

Se van a presentar a continuación los tipos de ejercicios que se proporcionan por la siguiente unidad didáctica, clasificados según las técnicas que se emplean para ellos. También se comentarán la metodología a seguir para llevarlos a cabo.

- *Conversión de grados a radianes. Razones trigonométricas de un ángulo agudo.* (Asociado a la técnica 1 y también al uso de la calculadora (Técnica 3))

  a. Completa la siguiente tabla:

Grados	25º		90º	140º		315º
Radianes		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{3\pi}{2}$	

b. ¿A cuánto equivale un radián expresado en grados, minutos y segundos?
c. Reduce al primer giro los siguientes ángulos: 725º, 390º, 1320º.
d. Expresa en grados los siguientes radianes: $\pi/2$ rad, 2 rad, 5 rad, 2π rad.
e. Expresa en radianes los siguientes ángulos medidos en grados: 90º, 300º, 240º, 150º, 330º

La técnica de conversión para pasar de grados a radianes y viceversa, resulta ahora útil y bien justificada a la hora de resolver estos tipos de ejercicios. En equipos de 3-4 integrantes, conviertan ángulos de grados a radianes y viceversa. En este momento, también, se quiere que empiecen a hacer uso de la calculadora, cuando sea necesario, para valorar en su justa medida la utilidad de la misma, entendiendo que esta herramienta nos ayuda en los casos en que una razón trigonométrica nos sea desconocida, no cuando podemos deducir el valor del ángulo a partir de un razonamiento gráfico.

De esta forma se les hace observar las abreviaturas que aparecen en la pantalla de una calculadora, DEG y RAD conociendo así la equivalencia entre grados y radianes.

El uso de la calculadora permite dedicar más tiempo a la reflexión, a la conexión entre distintas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras áreas, al razonamiento, a la representación de los problemas, a la comunicación de los resultados.

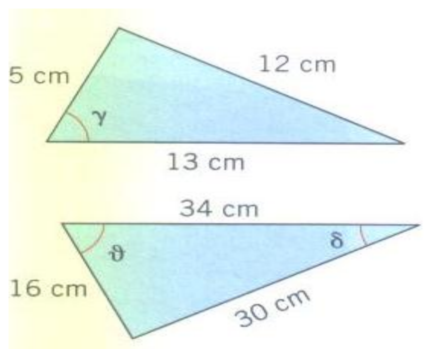
Las técnicas o modificaciones de las mismas que nos permite desarrollar el uso de la calculadora son:

- Introducción de ángulos en el sistema sexagesimal
- Paso de grados decimales a grados, minutos y segundos.
- Calculo del seno, coseno y tangente de un ángulo:
- Cálculo de ángulo conociendo el valor del seno, coseno o tangente.

Se utilizará la calculadora técnico-científica de CASIO, FX-570ES Plus, clásico de confianza en la escuela.

- *<u>Razones trigonométricas de un ángulo agudo.</u>* (Técnica de resolución de triángulos rectángulos de tipo geométricos)

1. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos marcados en cada caso:



2. Dado el triángulo ABC, recto en C, de catetos respectivamente 4 y 3 cm, hipotenusa 5 cm. Suponiendo que los ángulos en A y B se llamen respectivamente α y β, calcula:

   $sen\alpha$

   $\cos\alpha$

   $tg\alpha$

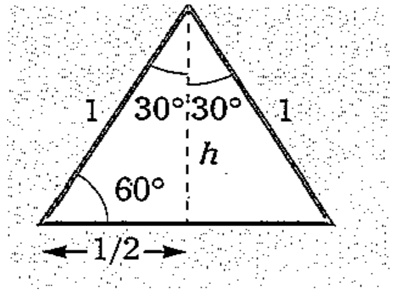
   $sen\beta$

   $\cos\beta$

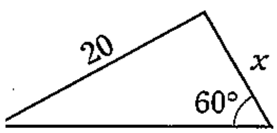
   $tg\beta$

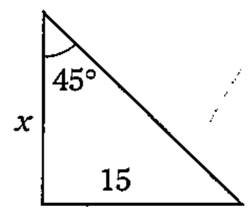
   $\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$

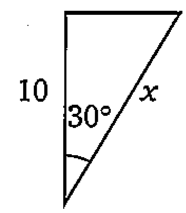
3. Observa el siguiente triángulo equilátero de lado unidad. ¿Cuánto vale la altura? ¿Y cuánto vale el seno de 60º? ¿Cuáles el valor del coseno de 60º? ¿Y lo de sen30º?



4. Halla las incógnitas en los siguientes triángulos rectángulos:







- *<u>Relaciones entre las razones trigonométricas</u>*.(Con y sin uso calculadora)

1. Calcula las demás razones trigonométricas, sabiendo que:
   sen α = 4/7
   tan α = 4/7
   cos α = 4/7
   sen α = 1/3

2. ¿Puede existir algún ángulo α que cumpla estas dos igualdades?
   sen α = 3/5 y tan α = 3/4.

3. Calcula las otras dos razones trigonométricas con el uso de la calculadora sabiendo que:
   sen α = -1/2 270º ≤ α ≤ 360º
   cos α = -1/2 180º < α < 270º

4. Si cos α = sen α, halla cuánto valen sus razones trigonométricas, si α es un ángulo agudo.

5. Halla, utilizando la calculadora:
   a) cos -25º 12’ 15’’ b) sec 28º 42’ 36’’

6. Calcula el ángulo A conociendo una razón trigonométrica
   a) tag A = 7,11 b) cos A = 3,57

7. Obtiene con la calculadora:

$sen 30º$

$\cos 60º$

$tg\, 45º$

8. Determina las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo donde la hipotenusa vale 3 cm y uno de los dos el catetos 1.

La calculadora, contrariamente a lo esperado o intuido, es un potentísimo instrumento de cálculo; es motivadora, despierta el interés de los alumnos en la búsqueda de regularidades o bien genera interrogantes. Por otra parte, constituye una herramienta de control neutral, ya que el alumno puede utilizarla para verificar sus estimaciones sin percibir reprobación ni crítica ante las respuestas equivocadas.

Su uso se hace imprescindible en un momento en que el cálculo algorítmico dio lugar a nuevas formas de pensar en la educación matemática. Las nuevas tecnologías son herramientas demasiado valiosas como para dejarlas fuera del aula. El imperativo es encontrar la conexión entre aquello que los jóvenes se sienten motivados a hacer y aquello que como educadores consideramos que tienen que aprender.

En cuanto a la metodología a utilizar por este campo de ejercicios, hay que destacar que en la definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo es importante que diferencien bien los lados y ángulos de un triángulo rectángulo, así como la semejanza entre triángulos rectángulos. Una vez que conozcan el seno, coseno y tangente de un ángulo agudo, practicar con actividades en las que tengan que dibujar un triángulo rectángulo conocidos los catetos que tengan que calcular el seno y coseno de los ángulos respectivos. Pero para obtener con precisión las razones trigonométricas es necesario la utilización de la calculadora científica, por tanto, practicaríamos calculando las razones trigonométricas conocido el ángulo y al revés, tanto en grados como en radianes.

Se pide que las tareas sean realizadas en el propio cuaderno de trabajo de forma individual, en el aula o en clase, según los casos. Las mismas serán revisadas a través de controles diarios y/o corrigiéndolas a la pizarra, cuando resulte necesario. De esta forma se comparan diferentes métodos utilizados, resultados encontrados, permitiendo corregir errores comunes a un número elevado o menos de alumnos, resolver dudas, dar sugerencias.

F. Tecnologías

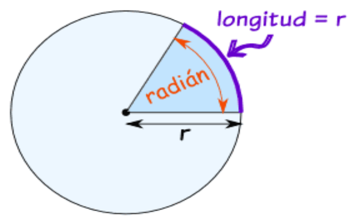
i. ¿Mediante que razonamientos se van a justificar las técnicas?

La existencia de una técnica supone, por tanto, que exista en su entorno un discurso justificativo de la técnica así como de su ámbito de aplicabilidad o validez (Tecnología, de tékhne, técnica y logos, discurso).

Tecnología 1: Conversión de grados a radianes.

La justificación de la medición en radianes se basa en el teorema que sigue:

"El ángulo formado por dos radios de una circunferencia, medido en radianes, es igual a la longitud del arco que delimitan los radios; es decir, $\theta = s/r$, donde θ es ángulo, s es la longitud del arco, y r es el radio. "



La demostración se basa en el concepto de longitud de arco.

En consecuencia, el ángulo *completo*, $\theta_{\text{circunferencia}}$, que subtiende una circunferencia de radio ***r***, medido en radianes, es:

$$\theta_{\text{circunferencia}} = \frac{L_{\text{circunferencia}}}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

Este concepto, introducido por Euler en el 1748, representa la justificación que se le da a la técnica de conversión de grados a radianes y viceversa.

También hay que destacar que muchas técnicas que se van a utilizar son técnicas previas debidas a conocimientos geométricos previos que se supone que el alumnado posea, como ángulos, rectas, relaciones angulares, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, teorema de Pitágoras, teorema de Tales, poliedros, áreas, volúmenes, etc, familiares para los alumnos ya desde 1º de la E.S.O.

Todas las técnicas empleadas están efectivamente bien justificadas, en cuanto a cada avance se van utilizando las técnicas introducidas anteriormente y estás dan sentido al campo de problemas propuesto.

La existencia de una técnica supone, por tanto, que exista en su entorno un discurso justificativo de la técnica así como de su ámbito de aplicabilidad o validez (Tecnología, de tékhne, técnica y logos, discurso).

Tecnología 2: *Relaciones trigonométricas*

La relación fundamental, $sen^2 + cos^2 = 1$ me permite encontrar las razones trigonométricas de un ángulo sin recorrer a la calculadora, solo conociendo el seno o el coseno. Esta, junto con la regla $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$ me permiten determinar áreas, longitudes (distancias, alturas), resolver problemas tanto geométricos como métricos o de la vida real. Por esta razón, estas dos relaciones representan la tecnología que justifica las técnicas empleadas hasta este momento. Estas hacen que la tecnología sea tangible y permita aportar elementos para modificar la técnica con el fin de ampliar su alcance, superando así sus limitaciones y posibilitando la producción de nuevas técnicas.

Se pretende que el alumnado sea capaz de aplicar las técnicas aprendidas, aumentando y ampliando sus habilidades y destrezas, intentando alcanzar nuevas técnicas, a partir de las que posea ya. (Aprendizaje significativo y constructivista).

Tecnología3: *Deducción de las razones trigonométricas de los ángulo de 30º, 45º y 60º.*

Con una actividad centrada en el aprendizaje significativo y por descubrimiento, en la que el profesor vaya guiando el estudiante dándole pautas y sugerencias, y el alumno utilice sus conocimientos y técnicas previas, se definen las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente por un ángulo agudo. En este caso, se hace referencia a técnicas previas que se supone el alumnado haya ya asumido en los cursos anteriores: ángulos, relaciones angulares, teorema de Pitágoras, teorema de Tales, poliedros, áreas, volúmenes, etc, familiares para los alumnos ya desde 1º de la E.S.O.

Se desarrolla de esta forma el pensamiento divergente, a través de la creatividad, del aprendizaje por descubrimiento, del pensamiento lateral. El estudiante hay moverse en varias direcciones en busca de la mejor solución para resolver el problema.

Después se les invita a calcular, a partir de la definición y buscando los triángulos adecuados, las razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º, que aparecen con bastante frecuencia. La deducción de las razones trigonométricas de estos ángulos representa una tecnología.

ii. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas? Metodología a seguir en su implementación en el aula.

Todas las técnicas empleadas en esta unidad didáctica justifican efectivamente el campo de problemas propuesto. Inicialmente se proporciona al alumnado actividades de exploración e iniciación, en las que se pretende valorar el estado inicial de los alumnos en cuanto a conocimientos previos relativos a ángulos, triángulos rectángulos, y destrezas en el manejo de instrumentos de dibujo, así como sugerir algunas líneas de actuación posteriores. En esta ocasión el profesor deja que sean los alumnos que vayan justificando y explicando sus razonamientos y sus resultados obtenidos.

Seguidamente, en la fase de desarrollo, los ejercicios y problemas proporcionados están bien adecuados a las técnicas empleadas: formula de conversión para pasar de grados a radianes, razones trigonométricas. Será el profesor el referente encargado de justificar las técnicas, especificando en sus explicaciones cuando y como utilizarlas y aplicarlas. Siempre se intentará que los alumnos participen lo máximo posible en la interpretación de los ejercicios, y en el porqué de los resultados.

En esta fase se pretende encaminar el alumno a reforzar la adquisición de los conceptos y a relacionarlos también con situaciones de la vida cotidiana.

Además, en esta fase, inicialmente se presentan actividades relativas a las relaciones entre razones trigonométricas que pueden limitarse a cálculos sencillos. Conforme se vaya avanzado con los conceptos y las técnicas, se presentan actividades de interesante aplicación de la trigonometría dentro de la propia matemática o en otras ramas del saber. Se deja el descubrimiento al alumno, sobre todo a aquellos que tengan más conocimientos, estén más avanzados o tengan predisposición a querer adentrarse más en el aprendizaje significativo y por descubrimiento.

En la fase de resolución de problemas, considerando que el alumnado posea más recursos y habilidades acerca del tema tratado, se exige ya un mayor grado de madurez para ampliar las formulas trigonométricas combinando las ya conocidas, aplicándolas dentro y fuera de contexto matemático. Se pretende que los alumnos, a partir de la visualización de diversas figuras, expliquen por qué la trigonometría justifica los enunciados. Pues, se exige estimular a realizar un estudio no memorístico, sino comprensivo y significativo.

En esta ocasión, la justificación de las técnica la asume el alumno mismo, que a través de las técnicas conocidas, intenta construir a partir de estás, otras técnicas que juntas con las demás, constituyan la tecnología. Han de ser capaz de aplicar todos los conocimientos a situaciones concretas y resolver problemas de planteamiento, ajustando el modelo matemático adecuado a la situación descrita en el enunciado. Como siempre, en los problemas de planteamiento se tiene la ocasión de relacionar las matemáticas con otras ciencias o aéreas del saber o simplemente situaciones de la vida diaria. Los problemas son mezclados, sin clasificarlos. De esta manera se evita caer en compartimientos estancos y se obliga a los alumnos a aplicar una estrategia fundamental en la resolución de los mismos.

¿Conozco algún resultado teórico relacionado con esto? ¿De los que recuerdo, cual me puede servir mejor?

De esta forma el alumno tiene que justificar sus técnicas, sus razonamientos, sus resultados y dar una explicación adecuada a su estrategia. El profesor se limitará a dar las indicaciones necesarias y convenientes, dejando que los alumnos lleven la iniciativa para que al final del proceso puedan sentirse satisfechos de sus aportaciones personales. Se trata, pues, de invitar los alumnos a una verdadera experimentación dentro de las posibilidades y de los recursos de los que disponen.

iii. Diseño del proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

La institucionalización es la fijación de reglas y convenios en el grupo de alumnos, de acuerdo con el profesor. En una clase, los conocimientos de cada alumno en un momento dado son muy variados. Hablamos de conocimiento personal de cada alumno para diferenciarlo del conocimiento fijado por el profesor, por el libro de texto o en un currículo (conocimiento institucional).

Las matemáticas constituyen un sistema conceptual lógicamente organizado. Una vez que un objeto matemático ha sido aceptado como parte de dicho sistema puede ser considerado como una realidad cultural, fijada mediante el lenguaje, y un componente de la estructura lógica global. En el proceso de estudio matemático habrá pues una fase en la que se fija una "manera de decir", públicamente compartida, que el profesor deberá poner a disposición de los alumnos en un momento determinado.

La institucionalización será pues, donde se ponga en común lo aprendido, se fijen y compartan las definiciones y las maneras de expresar las propiedades matemáticas estudiadas. Por lo tanto se emplearán las sesiones donde los alumnos expongan los resultados de sus análisis estadísticos para llevar a cabo este proceso.

G. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

i. Secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores. Duración temporal aproximada para dicha secuenciación.

La mejor forma de desarrollar los contenidos es a través de actividades secuenciadas a realizar por los alumnos preparados previamente por el profesor. Estás permiten poner a los alumnos en situación de construir por sí mismos los conocimientos, con ayuda del resto de los compañeros y el profesor, superando la mera asimilación de conocimientos ya elaborados.

Las actividades propuestas en los apartados anteriores están secuenciadas de la siguiente forma:

1. Las actividades de exploración de ideas previas tratan de explorar y explicar los conocimientos previos de los estudiantes para conocer los niveles de partida y teniendo también en cuenta el ritmo de aprendizaje de cada alumno, adoptar las medidas necesarias para acercar de la mejor forma posible los contenidos a las características del grupo.

Se repasarán y evaluarán los conocimientos de cursos anteriores en relación a la geometría y los triángulos. Se presentan a los alumnos unos problemas, cuyo planteamiento necesita el uso de conocimientos anteriores como el teorema de Pitágoras, el teorema de Tales y que al mismo tiempo sean relacionados a contextos reales (mapa geográfico de España, tamaño de dos fotos, etc.) para que suscite más interés y curiosidad en el alumnado. A esta fase se va a dedicar la sesión introductoria.

2. Las actividades de iniciación (orientación, motivación) tratarán de despertar la atención y el interés del alumnado por los contenidos que se van a estudiar. Servirían para la formulación de situaciones problemáticas en cuyo planteamiento se construyen los conceptos necesarios para abordarlos y surgen problemas más concretos sobre los que los alumnos pueden formular hipótesis. Para ello se ha recurrido a plantear un problema en el qué su razón de ser matemáticas lleva poco a poco el estudiante a construir el concepto de razón trigonométrica, a través de medidas de ángulos, lados, interrogándose sobre cuestiones geométricas, etc. Esta fase consta de una sesión.

3. Las siguientes actividades de desarrollo se referirán a la exposición de contenidos conceptuales que se completarán con la realización de ejercicios procedímentales y algorítmicos para reforzar estos conocimientos. Los contenidos se han dividido en 4 apartados, cuyo desarrollo constará de 3 sesiones:

- Unidades de medida de ángulos;
- Razones trigonométricas y sus relaciones**;**
- Resolución de triángulos rectángulos.

4. Después será necesario realizar actividades de asentamiento de todo lo realizado en las que se pueden resolver ejercicios de lápiz y papel sobre los principios, teorías y conceptos aplicándolos a situaciones nuevas. Estos ejercicios serían de aplicación directa para

convertirse de una forma gradual en problemas abiertos que el propio alumno no deba acotar, eligiendo la estrategia de resolución más adecuada.

La Resolución directa de triángulos rectángulos en situaciones reales es una forma para que se afiancen los conocimientos adquiridos, y a modo de preparación de las sesiones posteriores. En esta fase, tiempo permitiendo, se podría plantear también una actividad de recopilación, con el fin de que el alumno sea consciente de en que parte del proceso de desarrollo de los contenidos nos encontramos (para ello puede resulta muy eficiente y de gran utilidad los mapas conceptuales).

Esta fase puede constar de 2 a 3 sesiones, según el tiempo disponible, conforma se vaya desarrollando la unidad.

5. Fase de evaluación consiste de una prueba final escrita, análisis de resultados y repaso. Se le dedica la última sesión.

La tabla a continuación resume las sesiones apenas explicadas, cada una con su temporalización aproximadamente.

Fase de exploración de ideas previas	1sesión Planteamiento de problemas cuya resolución supone activar los conocimientos previos (teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, conceptos de ángulos, triángulos rectángulos)
Fase de iniciación	1sesión Se les presenta una actividad que supone la aplicación de conocimientos que ya deberían poseer. A partir de estos, se quiere que se construya el nuevo conocimiento. El profesor actuará de guía haciendo las preguntas tipo ¿Qué estáis haciendo? ¿Por qué lo hacéis de esta forma? ¿Cuál pasaría si se considerara…..?¿Cuál sería el siguiente paso?
Fase de desarrollo	Medida de ángulos (1 sesión) Se mostrará a los alumnos los modos sexagesimales y radian de la calculadora, y se realizarán ejercicios sencillos para comprobar que se obtienen los resultados esperados. Conversión de medidas.
	Razones trigonométricas y relaciones (3 sesiones) Se elaborar y construye el significado de las razones trigonométricas, a partir de una actividad en la que el estudiante va descubriendo poco a poco la necesidad del nuevo conocimiento.
	Resolución triángulos rectángulos (2 sesiones) Organización de la clase en grupos de 3 alumnos designados por el profesor, mezclando alumnos más avanzados con otros más atrasados. Trabajarán juntos en la resolución de problemas en sus cuadernos. Ellos discuten entre sí estas cuestiones y las van anotando. Los problemas planteados serán siempre sobre casos relacionados con medidas de altura, medidas de distancia, problemas geométricos-métricos. El profesor actuará de guía

	haciendo las preguntas tipo: Se trata de que este comportamiento se convierta en habitual. ¿Qué estáis haciendo? ¿Por qué lo hacéis? ¿Cuál sería el siguiente paso?
Fase de asentamiento, resolución problemas	1- 2 sesiones Entrega de trabajos, grupales e individuales, realización de problemas, recapitulación de la unidad didáctica a través de mapa conceptual.
Fase de evaluación	1 sesión Realización examen
	Total (aproximado): 12 sesiones

H. Sobre la evaluación

i. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

Prueba de evaluación

Se considera conveniente plantear una prueba de evaluación que conste de una parte teórica, "conceptos", y de una parte práctica, "procedimental", que se refiere a ejercicios y problemas. El examen propuesto a continuación está formado por dos preguntas teóricas y, respecto a la parte procedimental, tres ejercicios y dos problemas.

CONCEPTOS.

1. Formula de conversión de grados a radianes. Demostración.
2. Definición de las razones trigonométricas. Principales relaciones entre las razones trigonométricas.

PROCEDIMIENTOS.

1. Sin utilizar la calculadora:
   a. Expresa en grados los siguientes ángulos en radianes:
   b. Expresa en radianes los siguientes ángulos en grados: 300º, 150º, 30º.

2. Hallar las restantes razones trigonométricas del ángulo agudo (con calculadora):
   a) sen a= 1/3 b) cos a= 0,6 c) tg a=3

3. Resolver un triángulo rectángulo cuyo uno de sus catetos mide 12cm y el ángulo agudo contiguo es de 60º.

PROBLEMAS

4. Deseamos medir la altura de un edificio para lo cual nos situamos a una cierta distancia y vemos el edificio bajo un ángulo de 45º. Si nos alejamos 10m del edificio, el ángulo de observación es de 30º. ¿Cuál es la altura del edificio?

5. Calcula el área de un rombo sabiendo que el lado mide 20cm y la diagonal menor mide 20cm. ¿Cuánto mide la otra diagonal?

ii. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático se pretenden evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

En cuanto a la evaluación de la prueba diseñada, hay de tener en cuenta los siguientes aspectos del conocimiento sobre el tema de trigonometría:

- Manejar tanto el sistema sexagesimal como el sistema en radianes y saber pasar de uno a otro.
- Calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Manejar con soltura las razones trigonométricas y las relaciones entre ellas. (Por ejemplo obteniendo una razón trigonométrica de un ángulo agudo a partir de otra, aplicando las relaciones fundamentales.)
- Resolver triángulos rectángulos cuando se conocen dos lados o un lado y un ángulo.
- Resolver triángulos rectángulos y otras figuras planas por descomposición en otras más simples con ayuda del triángulo rectángulo y sus razones trigonométricas. (Por ejemplo el cálculo de distancias y ángulos.)
- Resolver situaciones de la vida cotidiana relacionadas con la geometría en las que se puedan ver útiles los conocimientos trigonométricos adquiridos, con el fin de resolver problemas como efectuar mediciones de longitudes o ángulos en situaciones reales, calcular superficies y áreas, calcular ángulos y distancias entre dos puntos.
- Utilizar la calculadora para obtener razones o ángulos agudos.

iii. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Las dificultades que surgen al enfrentarse al tema de trigonometría suelen ser relacionadas con la estructura conceptual de las razones trigonométricas de un ángulo y con la relación entre los sistemas de representación.

- No se traza correctamente las alturas en triángulos cualesquiera.
- No se identifica correctamente los lados del triángulo respecto a un ángulo, impidiéndole construir las razones trigonométricas
- No se asigna correctamente los ángulos en la representación gráfica de un problema trigonométrica
- No se identifica las longitudes dadas en un problema dentro de su representación gráfica
- Traducción entre las representaciones
- En la representación gráfica del problema se coloca equivocadamente los datos conocidos
- No se interpreta ni relaciona correctamente los valores numéricos obtenidos dentro de la solución del problema
- Al determinar la razón trigonométrica que resuelve el problema, no se asigna correctamente los datos conocidos en ella
- No se despeja correctamente las variables pedidas en las razones trigonométricas
- Se hallar la amplitud de un ángulo, afirmando que el valor obtenido por una razón trigonométrica lo representa.

Entonces lo que se espera que los alumnos realicen en la prueba de evaluación es que apliquen correctamente todas las técnicas que disponen , que sepan interpretar resultados, relacionar conocimientos entre si, que sepan descontextualizar un enunciado de la vida cotidiana, traduciéndolo en términos matemáticos. Que demuestren destrezas y habilidades de iniciativa , de creatividad, de abstracción en la resolución de problemas.

iv. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

En una prueba escrita, el alumno resuelve problemas que el docente corrige. Esta corrección deberá considerar tanto la resolución del problema en su totalidad como el pertinente uso de las herramientas matemáticas. Esto implica evaluar que el estudiante, una vez realizada la operatoria necesaria, sea capaz de contextualizar los resultados obtenidos para construir respuestas coherentes a la situación planteada así como la lógica del razonamiento.

Supone también la capacidad de explicar y justificar los procedimientos elegidos para la resolución de un problema, mediante el uso del lenguaje matemático en sus diferentes variantes (coloquial, gráfico, simbólico) y la producción de un registro que permita comunicar los resultados de manera eficaz.

Cada pregunta, tanto de conceptos como de ejercicios, se evaluará sobre 10, en cuanto se considera más fácil poder calificar de esta forma y seguidamente redondear tanto por exceso como por diminución la nota final.

Se hará más hincapié en la resolución de problemas que serán avaluados sobre 20 puntos, para que se les inculque la importancia de la interpretación y modelización de situaciones de la vida cotidiana a los conocimientos matemáticos.

De esta forma se obtiene la nota sobre 90, por lo cual dividiendo por el número de ejercicios/problemas propuestos (9) se obtendrá la nota en décimas.
En cada momento hay que tener claro el objetivo de cada ejercicio o problema y lo que el profesor pretende conseguir con la resolución de los mismos.
También el orden y la forma de presentar un problema y/o ejercicio es algo que hay de destacar entre otros aspectos.

I. Sobre el aprovechamiento del libro de texto

i. ¿Cómo se va a utilizar el libro de texto? ¿Mediante qué recursos didácticos se va a complementar?

Como instrumentos básicos, se considera el Libro de texto que servirá de apoyo al desarrollo de la materia; el Cuaderno o portafolios del alumno que va a complementar el libro de texto y servirá para hacer un seguimiento del trabajo diario del alumno.
En el cuaderno de Trabajo deben quedar recogidos apuntes, resúmenes, ejercicios y problemas. Se observará si acaba las actividades, correcciones y auto correcciones, así como también aspectos formales como márgenes, claridad, orden, limpieza.
Se incluirán en él, además de los materiales habituales (ejercicios y notas de clase, apuntes, exámenes corregidos, etc.) las tareas para casa y los trabajos escritos adicionales que pudiera encomendar el profesor.
Como material de dibujo y de escritura se necesitará: Bolígrafo, lápiz, regla y cartabón, compás. Estos instrumentos servirán para realizar los trabajos escritos y los gráficos necesarios.
También se sugiere el uso de la calculadora científica ya que es un material necesario. Programas de ordenador, entre los que se puede destacar el Geogebra de tipo geométrico (o Cabri), con el que se puede realizar operaciones con ángulos y razones trigonométricas.

J. Sobre la Bibliografía y páginas web

En esta sección se encuentran los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.

Normativa:

Ley Orgánica 2/2006 de Educación.

- REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- ORDEN de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte,

por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Libros de Texto:

- Libro de texto de Matemáticas de Cuarto de E.S.O. Editorial Santillana.

- Libro de texto de Matemáticas de Cuarto de ESO Editorial Edelvives.

- Libro de texto " Matemáticas, Esfera, 4º ESO, Editorial SM.

Páginas web/ Paginas PDF:

- Trigonometría, 4 ESO, opción B. Cuadernillo de ejercicios [Recurso electrónico] (2007). Autor: Acosta Gavilán, Eva María; Pino Mejías, Miguel Francisco. Editor: Tutorial Formación, S. L. L.

- Matemáticas, semejanza y trigonometría, 4 ESO. Cuaderno 4 [Monografía] (2007) Autor: Bellón Fernández, Manuel; Alcaide Guindo, Fernando; González, José Luis (1979-), Editor: Ediciones SM.

- www.cidead.cnice.mec.es : Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia , Unidad 6(Semejanza) y Unidad 7(Trigonometría).

- http://matematicasmario.blogspot.com.es/2009/10/actividades-para-4-eso.html, Experiencias Matemáticas.

- http://www.cuadernalia.net/introduccion-a-la-trigonometria.