TESIS DE LA UNIVERSIDAD
DE ZARAGOZA

2019

146

Rafael Escolano Vizcarra

Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente

Departamento
Matemáticas

Director/es
José María Gairín Sallan

ISSN 2254-7606

Prensas de la Universidad
Universidad Zaragoza

ISSN 2254-7606

Universidad Zaragoza

Tesis Doctoral

ENSEÑANZA DEL NÚMERO RACIONAL POSITIVO EN EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ESTUDIO DESDE MODELOS DE MEDIDA Y COCIENTE

Autor

Rafael Escolano Vizcarra

Director/es

José María Gairín Sallan

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Matemáticas

2007

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
Departamento de Matemáticas

Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente

Memoria presentada por
RAFAEL ESCOLANO VIZCARRA
para optar al Grado de Doctor por
la Universidad de Zaragoza,
dirigida por el Dr. JOSE Mª GAIRÍN SALLÁN

VOLUMEN I

Zaragoza, Mayo de 2007

La fase experimental de esta Tesis Doctoral se llevó a cabo en el el C.E.I.P. “Tío Jorge” de la ciudad de Zaragoza. Deseo expresar mi agradecimiento a su director, Lorenzo Oro; a su Jefe de Estudios, Clemente Rada; y a los profesores que han participado en la experimentación de aula: Agustín Fuster, Eva Aguiran, Isabel Soteras, Aurelio Hernández y Francisco Latorre. Sus observaciones y sugerencias han sido muy valiosas y han permitido la toma de decisiones para la mejora de la propuesta de enseñanza. Hago extensivo mi agradecimiento a los alumnos del C.E.I.P. “Tío Jorge” que han participado en la experimentación; todos ellos me han dado abundantes muestras de cariño.

Mi gratitud al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza por facilitarme los medios para la realización de este trabajo. El principal agradecimiento va dirigido a mi director de tesis, José Mª Gairín, a quien se debe en gran parte la realización de esta tesis por su constante apoyo y motivación. En nuestro trabajo diario ha sabido conjugar el rigor científico con un clima de amistad y confianza del que me siento deudor.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a Luis Rico que con su magisterio científico orientó, en los momentos iniciales, las etapas de esta investigación.

A Jesús Murillo y Petra Mary Arnal, mis amigos y compañeros de la Universidad de La Rioja, que fueron los primeros catalizadores de mis ideas e inquietudes en el terreno de la Didáctica de las Matemáticas. En particular, a Jesús Murillo, que se ha implicado en el trabajo formando parte del Equipo Investigador, por sus sugerencias y continuas muestras de ánimo.

A mis compañeros del Área de Didáctica de las Matemáticas; en particular a Eva Cid por su apoyo y por su empeño permanente por mejorar nuestra área; su trayectoria profesional ha contribuido a la consolidación del área dentro del Departamento de Matemáticas.

A José Mª Muñoz-Escolano, compañero del Área de Didáctica, por sus palabras de aliento y sus sugerencias atinadas. Su alta capacidad intelectual le ha permitido compaginar la elaboración de su tesis doctoral sobre Grupos Infinitos con aportaciones en la investigación de la Didáctica del Número Racional Positivo.

Finalmente, deseo agradecer a los miembros del grupo de Investigación de Pensamiento Numérico y Algebraico que se interesaron por este trabajo y realizaron sugerencias de interés en todas aquellas ocasiones en las que presentamos los avances de investigación.

Índice general

VOLUMEN I

Capítulo I. El problema de investigación

Capítulo II. Significados del número racional positivo

Capítulo IV. Diseño de la investigación

Capítulo V. Fase de Planificación

Capítulo VI. Fase de Acción

VOLUMEN II

ANEXOS

Anexo III. Resultados de la Experimentación

Anexo IV. Estudio Comparativo entre colegios

Anexo V. Interacción didáctica

Anexo VI. Material entregado a los alumnos

Capítulo I
El problema de investigación

I.1. Presentación

En la formación matemática de los ciudadanos ocupa un lugar importante la que se realiza durante la etapa de la educación obligatoria, puesto que sobre esta base se construirán los fundamentos profesionales y de estudios futuros de los jóvenes y adolescentes.

Diversos estudios nacionales e internacionales de evaluación de los currículas de matemáticas han puesto de manifiesto que los escolares españoles tienen un rendimiento bajo en matemáticas. En este sentido, el informe internacional TIMSS de resultados de Matemáticas para alumnos de 7º y 8º de E.G.B, realizado en el curso 1994/95, concluye que:

> *La puntuación media de los alumnos de 8º es 487, por debajo del rendimiento medio internacional y en 7º es 448, también por debajo del rendimiento medio internacional. Si se ordenan los países por orden decreciente de rendimiento en 8º España ocupa el puesto 31º de 41 países y en 7º el 32º de 39.* (López y Moreno, 1997, pp. 10).

Más recientemente, el programa de evaluación PISA *(Programme for Internacional Student Assessment)* con el que la OCDE elabora indicadores, basados en competencias matemáticas, para evaluar el modo en que los sistemas educativos de los países preparan a los estudiantes de 15 años para desempeñar un papel activo como ciudadanos, informa que el rendimiento en matemáticas de los estudiantes españoles que concluyen la etapa de Educación Obligatoria está 15 puntos por debajo del promedio de la OCDE. Estos resultados sitúan a España por debajo de otros países de menor un potencial económico:

> *Aunque España figura en el puesto 26 de la lista, la falta de significatividad estadística de las diferencias con los países mencionados en el punto anterior hace que España ocupe un puesto indeterminado entre las posiciones 22 y 24 entre los países de la OCDE, o entre las posiciones 25 y 28 entre los 41 países participantes. España ocupa el puesto 22 entre estos países en cuanto a PIB per capita.* (INECSE, 2004b, pp. 6).

Estamos especialmente interesados en analizar los problemas que se producen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones en Educación Primaria, y más ampliamente de la estructura de los números racionales positivos. Este interés surge, en primer lugar de los bajos resultados que aportan los sucesivos informes que elabora el Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE). Así, un informe que evalúa los aprendizajes de los alumnos de sexto curso de Educación Primaria, en el curso 1998/99, concluye:

> *Son casi tres de cada cuatro los que tienen dificultad para comprender el concepto de fracción y operar con fracciones.* (INCE, 2002, pp. 2).

Otro informe del INECSE (Pérez Zorilla, 2005; pp. 138) posterior, que aporta resultados de pruebas realizadas al concluir el curso 2002/03, confirma que "*los alumnos de sexto curso de Educación Primaria tienen dificultades para resolver problemas donde intervienen fracciones*". Este mismo informe aporta, en la página 152, un dato revelador: solo el 15% de los alumnos de sexto curso encuestados logran resolver con éxito el siguiente problema:

> *Repartimos el contenido de una botella de 2 litros en recipientes de 1/20 de litro. ¿Cuántos recipientes podemos llenar?*

En segundo lugar, también nos preocupa la trascendencia que tiene este tema para un mejor conocimiento de las matemáticas, porque amplía el concepto inicial de número que se forjan los escolares desde sus experiencias iniciales con los números naturales, porque introduce la idea de densidad respecto del orden que se necesita para comprender los números reales, y porque introduce al escolar en la noción de estructura multiplicativa que le permitirá resolver una multiplicidad de nuevos problemas. Desde un punto de vista cultural y social situamos a la estructura numérica del número racional en el umbral de los conocimientos aritméticos básicos y necesarios para la vida adulta del ciudadano.

Consecuentemente queda delimitado el campo de trabajo a la estructura de los números racionales positivos en el nivel de Educación Primaria. Y desde este posicionamiento nos planteamos dos cuestiones a las que se pretende contestar con este trabajo de investigación:

- ¿cuáles son las causas del bajo rendimiento de los escolares españoles en el tópico de los números racionales?
- ¿cómo incrementar la comprensión que tienen estos escolares sobre los números racionales?

Al abordar este estudio admitimos que una parte del problema de la enseñanza y del aprendizaje de los números racionales reside en su propia estructura numérica; es en el conjunto de conceptos, procedimientos, relaciones y operaciones donde se encuentran las principales dificultades de comprensión de los escolares (Rico y Saenz, 1982; Kerslake, 1986; Bezuk y Bieck, 1993; Mack,1993; Kieren, 1993).

Pero nuestra intención es la de avanzar en el análisis de estas dificultades en el sentido de cuestionar hasta qué punto las elecciones didácticas que se hacen al desarrollar las propuestas de enseñanza influyen en las dificultades de comprensión de los escolares; más concretamente, si la decisión de nuestro Sistema Educativo al priorizar el significado del número racional como relación parte-todo puede obstaculizar el aprendizaje de los alumnos; queremos, en suma, considerar entre las dificultades de comprensión de los alumnos las provocadas por los obstáculos didácticos, entendido el término en el sentido que le otorga Brousseau (1983).

Además, nuestro propósito es hacer indagaciones sobre la viabilidad de llevar al aula propuestas de enseñanza alternativas, puesto que consideramos que los planteamientos teóricos sobre temas educativos han de orientarse a la resolución de problemas en el sistema escolar, y que la investigación debe estar conectada con la reflexión crítica sobre lo que ocurre en las aulas. Esta posición resulta adecuada por cuanto constituye un campo propio de indagación para el investigador en educación matemática (Kilpatrick, 1993), y porque tanto los expertos (Kilpatrick, 1992; Nickson, 1992), como las instituciones y sociedades (I.C.M.I., 1987) recomiendan la conexión entre teoría y práctica para fortalecer la coherencia interna de la disciplina.

Desde esta posición, abordamos el trabajo de diseño e implementación de una propuesta curricular para escolares de Educación Primaria. La observación e interpretación de los fenómenos que se produzcan, así como el análisis de datos obtenidos, permitirán elaborar las conclusiones del trabajo.

Las herramientas conceptuales más importantes que utilizamos son las nociones de comprensión del conocimiento matemático (Wittrock, 1990; Hiebert y Carpenter, 1992); modelos matemáticos para el aprendizaje (Castro,1994, Gairín, 1999; Gagatsis y Patronis, 1990; Lesh et al., 1987); y sistemas de representación (Castro, Rico y Romero, 1997; Duval, 1995; Kaput, 1992).

El método de investigación que se adopta en esta Tesis Doctoral es el denominado de Investigación-Acción (Elliot, 1990; Kemis y McTaggart, 1988; Mcniff, 1991) y se va centrar en el estudio de un problema específico sobre un escenario específico (Cohen y Manion, 1990).

Quedan así presentados los datos globales de un trabajo de investigación cuya parte experimental se llevará a cabo en el Colegio de Educación Infantil y Primaria "Tío Jorge" de la ciudad de Zaragoza.

I.2. Causas del problema

Una historia de más de 7.000 años y un proceso dialéctico de ensayos, interpretaciones, errores, desarrollos conceptuales y formalizaciones, han llevado a la configuración actual del concepto matemático de Número Racional (Benoit et al., 1992); concepto sin duda complejo puesto que recoge y sintetiza todos los aspectos considerados a lo largo de su proceso constructivo (Feferman, 1989). Esta construcción formal sintetiza las diversas conceptualizaciones que, a lo largo del proceso histórico, han surgido sobre los números racionales (Cajori, 1985; Flegg, 1989; Kieren, 1993) y que dan muestra de las necesidades sociales que ha resuelto este conjunto numérico.

Una construcción del concepto de número racional cognitivamente efectiva exige de un proceso lento de dominio e integración de nuevos significados. También supone la incorporación de nuevas especificidades simbólicas, operatorias, estructurales, relacionales y de representación, que hay que acomodar a una variedad de nuevos significados; igualmente hay que profundizar sobre las relaciones que se presentan entre los distintos sistemas de representación considerados. Además, se precisa de la comprensión en profundidad de una estructura algebraica diferente, la estructura de grupo multiplicativo, lo que implica dotar de significado al inverso de un número. Por otra parte, la comprensión de la estructura topológica de los números racionales supone una reorganización de los conocimientos de los escolares sobre la idea de número que se han formado en el estudio de los números naturales. Ideas novedosas que han de incorporar los escolares, como la densidad respecto del orden, les exigen la acomodación de los nuevos conceptos a los preexistentes; es decir, los escolares deben asumir una disgregación cognitivamente significativa de la idea de número en dos ideas diferenciadas: la idea de número natural y la de número racional.

Finalmente, la fenomenología del número racional resuelve los problemas que se le presentan a un ciudadano y que no podía afrontar con sus conocimientos del número natural. A cambio, se le exige ampliar de forma notoria el mundo de las magnitudes que debe conocer, el mundo de las magnitudes mensurables; también se le exige saber interpretar las magnitudes que aparecen como resultado de las operaciones y, en suma, ejercer un control constante sobre unos números que han de interpretarse como expresiones de cantidades de magnitud.

Quedan así enunciados la variedad de problemas que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje del conjunto de los números racionales, las dificultades para su comprensión provenientes de la complejidad que subyace en su estructura topológica y algebraica, y las cuestiones derivadas de los diferentes significados que sintetiza este conjunto numérico y de los sistemas de representación que simbolizan sus elementos.

I.3. Consideraciones sobre la instrucción

La enseñanza de los números racionales junto con sus operaciones y aplicaciones es un contenido curricular importante de la aritmética en Enseñanza Primaria. Sin embargo, resulta preocupante que el análisis del estado de conocimientos de los alumnos sobre el tema haya puesto de manifiesto múltiples disfunciones entre los resultados esperados y el conocimiento realmente alcanzado por estos alumnos.

En esta investigación nos proponemos analizar la viabilidad de una Propuesta Didáctica que arbitre los medios necesarios para superar los obstáculos didácticos que han aparecido en la práctica docente habitual. Los aspectos esenciales que se consideran son los siguientes:

I.3.1. Utilizar modelos de aprendizaje

Es habitual presentar y justificar las ideas y conceptos matemáticos en orden deductivo, sin que ello signifique que el alumno los organice y estructure cognitivamente de esta forma (Tall, 1991). Desaconsejamos esta práctica de instrucción en todos los niveles educativos y, en particular, en los niveles básicos de enseñanza y abogamos por metodologías que asocien los conceptos matemáticos con situaciones y acciones cercanas a la experiencia vital de los alumnos. Los documentos previos al desarrollo de la LOGSE apuntan orientaciones en este sentido

> *Es preciso, por tanto, que el currículo refleje el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su proceso histórico como en su apropiación por el individuo. La formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no es el punto de partida, sino más bien un punto de llegada de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad.* (M.E.C., 1990).

Es más, puesto que la construcción de ideas sobre números racionales comienza a edades tempranas (9-10 años), el diseño de la enseñanza debe adaptarse a la naturaleza de mente humana pues pensamos mejor con lo familiar, perceptible y manipulable, que con lo abstracto, no representable y desconocido (Castro, 1994, pp. 13). Resulta, por tanto, justificable que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos y, sobre todo en los primeros niveles educativos, estos conceptos se presenten asociados a situaciones de la vida real. En este sentido, la instrucción sobre los conceptos matemáticos está ligada a la noción de modelo de aprendizaje (Gairín, 1999, pp. 15), o herramienta conceptual coherente con el paradigma constructivista del aprendizaje que permite definir, con precisión, secuencias de enseñanza para realizar una construcción efectiva de significados.

Consecuentemente, al elaborar una propuesta didáctica hay que analizar los modelos de aprendizaje que se van a utilizar, los significados del números racional que se derivan de tales modelos, y las potencialidades y limitaciones de los modelos para abordar la instrucción sobre operaciones y relaciones entre números racionales.

I.3.2. Construir modelos de aprendizaje coherentes con la génesis histórica del número racional

El proceso de enseñanza y aprendizaje del número racional positivo en Educación Primaria debería sustentarse sobre propuestas didácticas basadas en modelos de aprendizaje que sean coherentes con la génesis histórica de esta estructura numérica. La atención a los usos, contextos y problemas que resolvieron los números racionales aportan información relevante sobre su estructura numérica. Sin embargo, la introducción escolar de los racionales positivos se suele realizar actualmente de espaldas a la medida, usando, básicamente, la relación parte-todo.

Es evidente que toda génesis escolar de un tópico matemático es artificial y no tiene por qué reproducir la correspondiente génesis histórica; de hecho, esta génesis puede involucrar nociones, técnicas y problemas actualmente inexistentes o irrelevantes, o tan complicados que caigan fuera de las posibilidades de comprensión de los alumnos. Pero aquí no estamos en este caso: los modelos utilizados habitualmente en la escuela para introducir los números racionales no sólo son contradictorios con la historia de dichas nociones, sino que además no representan una opción más económica desde el punto de vista didáctico, ni más cercana a las matemáticas de hoy.

En nuestra propuesta situamos la medida de cantidades de magnitud en la génesis del número racional positivo. Y, desde esta consideración, se diseñan las actividades que permitan a los alumnos construir ideas sobre la fracción, así como sobre las relaciones y operaciones entre fracciones; mientras que el cociente partitivo permite la introducción de los número decimales.

I.3.3. Estudiar los significados del número racional positivo para planificar la Propuesta

El estudio de la fenomenología del número racional ha sido objeto de trabajo de numerosos investigadores; algunos de estos trabajos se han centrado en los significados o constructos del número racional. Así Behr, M. J., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993, pp. 14) identifican cinco significados: parte-todo, cociente, razón, operador y medida. Más recientemente, Escolano (2004) descompone el significado de cociente en dos interpretaciones de naturaleza diferenciada: división indicada y cociente partitivo; además, en el significado de medida establece estados de desarrollo distintos: la medida real, la medida evocada y la medida aparente. Estas interpretaciones se abordan con mayor amplitud en el Capítulo II.

No todos los significados que se han identificado se encuentran en la génesis del número racional, ni todos son valorados por igual, ni se les concede la misma importancia en los currícula de matemáticas escolares. Aun cuando se incluye un análisis más exhaustivo en el Capítulo II, basta recordar que las recomendaciones didácticas que acompañaron la entrada en vigor de la Ley General de Educación y Financiación de la Reforma Educativa, de 1970, priorizaron las fracciones con significado de operadores, significado que pertenece al campo de la matemática; mientras que desde el "retorno a lo básico" que propugnaron los Programas Renovados de la década de los 80 el número racional se viene enseñando desde el significado prioritario de relación entre la parte y el todo; significado que no está en la génesis del número racional, ni pertenece al campo de las Matemáticas.

Parece oportuno, por tanto, analizar cuáles son los significados del número racional que debe abordar una propuesta didáctica, así como el modo en que se han de secuenciar y la forma en que se han de conectar los significados para producir un aprendizaje significativo.

I.3.4. La enseñanza actual del número racional positivo es altamente criticable

La enseñanza actual del número racional está sustentada, exclusivamente, sobre el significado de relación parte-todo (Morcote y Flores, 2001). Esta opción didáctica que realiza el Sistema Educativo Español plantea limitaciones en la enseñanza del número racional. En efecto, a principios de la década de lo ochenta, Freudhental, H. (1983, pp.134) alertaba de este problema:

> *No cabe duda de que la didáctica de la fracción está caracterizada por una unificación de tendencias. En general, los números naturales son acercados desde una variedad de caminos. Si miramos a las fracciones, se supone que los alumnos avanzan tanto en cuanto estén satisfechos con una aproximación de la realidad. En mi opinión, esta asunción incorrecta es la razón por la que funcionan las fracciones mucho peor que los números naturales y porqué mucha gente nunca aprende fracciones.*

I.3.5. La enseñanza sustentada en la relación parte-todo crea obstáculos didácticos

La aparente facilidad, desde el punto de vista docente, con la que se introduce la fracción como relación parte-todo tiene costes en términos de comprensión. Aparecen así los que Brousseau (1983) denomina *obstáculos didácticos*, o dificultades y errores que origina el propio proceso de enseñanza. El análisis de las tareas formuladas desde la relación parte-todo y el estudio de las dificultades y errores que cometen los escolares nos lleva a formular tres tipos de obstáculos didácticos:

5.1. Se obstaculiza la formación de concepciones adecuadas de la fracción

- *No existen las fracciones impropias*. El modelo relación parte-todo solo permite enseñar fracciones propias. (Freudenthal, 1983; Bonotto, 1993)
- *Las fracciones son números no medida*. Si los alumnos solo gestionan representaciones simbólicas descontextualizadas, al margen de las cantidades de magnitud, no son capaces de modelizar las situaciones concretas que exige la resolución de problemas (Mack, 1990) porque el conocimiento que construyen de la parte-todo es inflexible y difícil de aplicar a la amplia gama de situaciones que organiza el número racional (Kieren, 1992).

- *El "todo" o unidad no es un número*. En el proceso instructivo no se explicita el sentido y funciones de la unidad, lo que dificulta la identificación de las fracciones del tipo *a*/*a* con la unidad. Así, ante la fracción 4/4 los alumnos ofrecen comentarios como "no representa nada porque la unidad está dividida en cuatro partes y tomamos cuatro", o "vale 4 unidades porque tomo 4 cosas de 4 cosas que hay" (Gairín, 1999).

5.2. Se obstaculiza la separación conceptual del número racional y del número natural

La instrucción desde el significado de parte-todo no justifica la introducción de una nueva estructura numérica puesto que para resolver las tareas basta el recuento de números naturales, lo que provoca ideas erróneas en los alumnos:

- *La fracción está formada por dos números naturales*. La fracción describe una situación estática en la que hay involucrados dos números naturales; por tanto, ni la fracción, ni la expresión decimal, se entienden como un solo ente numérico de naturaleza diferente a la de los números naturales.

- *Las relaciones y operaciones con números racionales tienen el mismo significado que en los números naturales*. Los alumnos extienden los significados y técnicas del número natural a una nueva situación en la que, desde sus creencias, los entes numéricos no cambian de sentido: el orden de los números racionales es igual que el de los naturales, la multiplicación de racionales es una suma reiterada, el resultado del producto de dos números racionales es mayor que cualquiera de los factores, etc. (Kerslake, 1986; Mack, 1990; Nunes y Bryant, 1996)

5.3. Se obstaculiza la formación de ideas abstractas

La enseñanza desde la relación parte-todo enfatiza las representaciones gráficas con lo que se corre el peligro de que alumnos fijen su atención en las características superficiales –la fracción sirve para expresar una situación estática- y no en las ideas que comporta dicha relación (Kerslake, 1991). No se sitúa a los alumnos en disposición de buscar estrategias de resolución de problemas; así, los alumnos se forjan creencias como las siguientes:

- *Los conceptos son las técnicas asociadas a los mismos*. Para los alumnos las ideas sobre relaciones y operaciones se limitan al uso de sus técnicas asociadas; por ejemplo, el significado de la suma de fracciones es el algoritmo que proporciona el resultado de dicha suma.

- *Los contenidos útiles son los procedimentales*. Los alumnos memorizan las técnicas de cálculo sin preocuparse de sus fundamentos teóricos, lo que provoca resultados de esta índole: *solo el 33% de los alumnos de 6º curso de Educación Primaria* (11-12 años) *responde correctamente a la pregunta ¿qué tanto por ciento representan 2/5?* (INCE, 2002, pp.2).

En resumen, la relación parte-todo es un recurso didáctico creado por necesidades del proceso de enseñanza y aprendizaje de la fracción que permite introducir, de forma inmediata, la representación simbólica de la fracción. Sin embargo, la relación parte-todo plantea obstáculos didácticos como los que hemos descrito porque este significado no pertenece a la fenomenología histórica del número racional.

I.3.6. No hay propuestas didácticas que eludan los obstáculos didácticos de la parte-todo

Hasta el momento actual, la investigación en Didáctica de las Matemáticas no ha resuelto el problema de la enseñanza del número racional positivo. A pesar de las críticas que suscita la introducción de la fracción y del número decimal desde la perspectiva exclusiva de la relación parte-todo, observamos que la investigación en Didáctica de las Matemáticas no consigue cambiar esta inercia porque este significado sigue priorizando el proceso de enseñanza.

La investigación desde la Didáctica de las Matemáticas en este dominio numérico es insatisfactoria porque la mayoría de las investigaciones, que reconocen las limitaciones de la relación parte-todo, experimenten propuestas didácticas que modifican parcialmente la relación parte-todo pero que no cuestionan este modelo de enseñanza. Así, por ejemplo, Kieren (1995; pp. 36) critica la enseñanza desde la parte-todo:

> *… la percepción de las fracciones era totalmente visual, estática y solo nominalmente vinculada con la noción matemática que una unidad se puede dividir en cualquier número de partes iguales, y que cada parte es en sí misma una entidad o cantidad independiente. Con tal, el enfoque era una situación inadecuada en cuanto al aprendizaje de las fracciones y lo inapropiado de su "definición estática seguida por acercamiento de los algoritmos dados" fue visible en la valoración del trabajo de los niños con las fracciones durante los últimos 20 años en una variedad de países del mundo.*

Sin embargo, en este mismo trabajo, Kieren propone "mejorar" la parte-todo introduciendo actividades de reconstrucción de la unidad.

De modo análogo, Behr y su equipo (1983) modifican el modelo parte-todo incluyendo en las representaciones gráficas *citas perceptuales*.

Lamon (2001, pp. 163) critica abiertamente la enseñanza sustenta en este modelo: "*la instrucción como parte-todo es actualmente el camino menos valioso en el sistema de los números racionales*". Esta investigadora modifica parcialmente el modelo y lo denomina *parte-todo con "unitizing"* que consiste en hacer explícita la unidad a la que se refiere el "todo". En un trabajo posterior, la propia investigadora reconoce la similitud entre el modelo parte-todo y el modificado: "*no es radicalmente diferente de la instrucción parte-todo, y no es un cambio difícil de hacer*" (Lamon, 2005; pp. 231).

La enseñanza del número racional positivo, en España y en otros muchos países, se caracteriza por la "unificación de tendencias" que criticaba Freudhental (1983): la fracción y el número decimal se introducen, únicamente, desde el significado de relación parte-todo. Resulta evidente que la práctica docente el número racional positivo es susceptible de mejora. En estas condiciones, la investigación en Didáctica de las Matemáticas debería abordar el problema de la enseñanza del número racional en la etapa de la Educación Primaria y de la Educación Secundaria Obligatoria.

Atendiendo a estas consideraciones, se han delimitado los objetivos generales de nuestro trabajo de investigación y que enunciamos de este modo:

Objetivo I:	***Diseñar una Propuesta Didáctica para la enseñanza del Número Racional Positivo en Educación Primaria, que constituya una alternativa a la enseñanza tradicional sustentada en la relación parte-todo.***
Objetivo II:	***Explorar las potencialidades y limitaciones de la Propuesta Didáctica cuando se implementa con grupos naturales de cuarto y quinto curso de Educación Primaria.***

I.4. Marco de la investigación

Este trabajo se sitúa en un campo general que denominamos Pensamiento Numérico y Algebraico, que constituye una de las líneas de investigación que articulan el desarrollo de la investigación en Didáctica de la Matemática en España, y que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos numéricos en el sistema educativo y en el medio social. La línea de investigación Pensamiento Numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas (Rico y Castro, 1995; pp. 167).

El marco conceptual en que se sitúa esta línea de investigación se sustenta en los siguientes principios: asume que la construcción del conocimiento matemático es un fenómeno social y cultural y que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad; centra su objeto de reflexión en el campo de las matemáticas que comienza con la aritmética escolar, avanza por los sistemas numéricos superiores y continúa con el estudio sistemático de las relaciones numéricas; tiene una orientación esencialmente curricular; el estudio de los errores y dificultades en la compresión de los escolares sobre los campos conceptuales reseñados es parte esencial de la tarea de análisis e interpretación que se lleva a cabo en esta línea de investigación. (Castro, Rico y Romero, 1997)

El núcleo de reflexión, trabajo y estudio de este grupo de investigación son las familias de problemas que pertenecen a la fenomenología del sistema numérico y le confieren significado; los sistemas de signos utilizados para representar conceptos y procedimientos; y las competencias cognitivas que sostienen un dominio significativo de las estructuras numéricas, de su desarrollo y mejora, junto con el diagnóstico y tratamiento de los errores y dificultades en la comprensión de los escolares sobre estas estructuras. Por este motivo las investigaciones dentro del grupo de Pensamiento Numérico se focalizan en tres ámbitos de actuación:

- Las herramientas conceptuales: estructuras numéricas y sistemas de representación, que son estudiados con la intención de organizar sistemas simbólicos de codificación, válidos para la expresión y comunicación de los conceptos y relaciones de una estructura numérica o algebraica y las interrelaciones entre tales sistemas;
- el campo de problemas asociado al sistema numérico, con el objetivo de estudiar los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos y cuestiones que admiten ser analizados mediante los conceptos y procedimientos que forman parte de una determinada estructura numérica; y
- la competencia en el usos del sistema numérico, con la intención de estudiar la organización, sistematización y desarrollo de diferentes competencias cognitivas que surgen y encuentran un modo de actuación en la estructura numérica, para mejorar la enseñanza del sistema numérico.

De este modo, el Pensamiento Numérico realiza una aproximación analítica al estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales sobre la base de un esquema funcional con tres componentes (Rico, Castro, Castro, Coriat y Segovia (1997)):

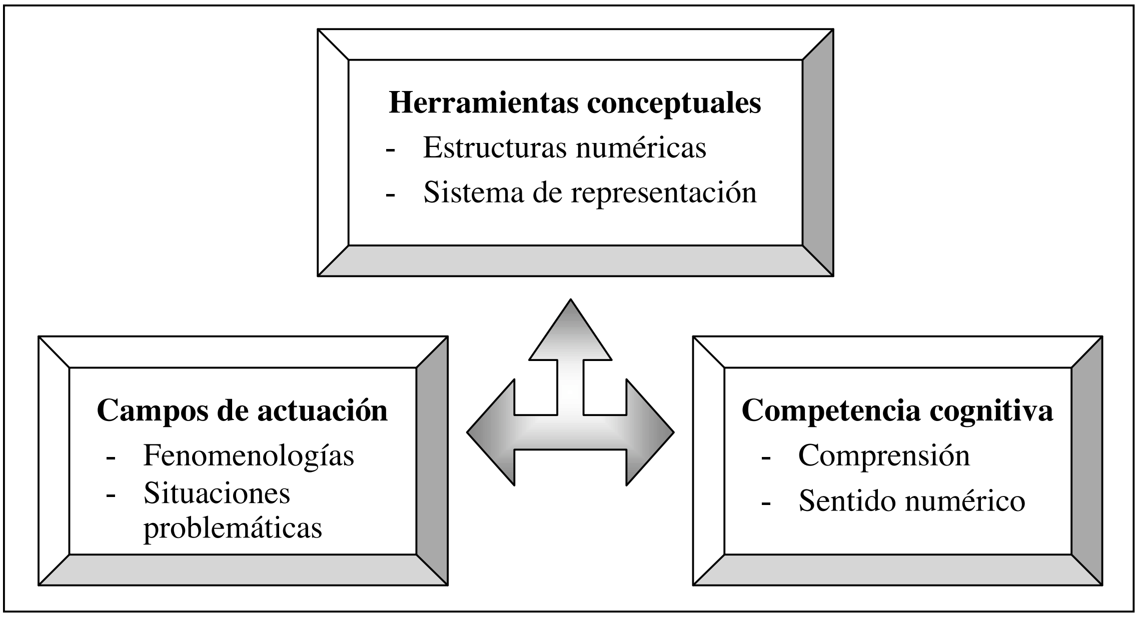


Gráfico I.1: Esquema funcional de la línea de investigación Pensamiento Numérico

La pertenencia de nuestra investigación en el grupo de Pensamiento Numérico se concreta en el estudio del Campo Conceptual de los Números Racionales, según el sentido establecido por González (1995; pp. 226-228), teniendo en cuenta las tres vertientes de la terna analítica que acabamos de presentar: una primera que aborda el conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones que constituyen la estructura matemática de los Números Racionales; una segunda que se ocupa del campo de los fenómenos y situaciones que admiten ser analizados mediante ese sistema numérico y de los problemas que con el mismo pueden abordarse y resolverse; y una tercera que hace referencia a las actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos y relaciones propios del conjunto numérico de los Números Racionales Positivos.

I.5. Metodología de investigación

Para alcanzar uno de los objetivos de nuestra investigación, el diseño de una propuesta didáctica, hemos considerado tres elementos o componentes que se recogen en los métodos de investigación denominados Análisis Didáctico (Gómez, 2006; Godino et al, 2006; Gallardo y González, 2006) y Modelos Teóricos Locales (Puig, 2006; Contreras y Gómez, 2006): análisis conceptual (referido al contenido matemático), análisis cognitivo (referido al aprendizaje matemático) y análisis didáctico (referido a la instrucción).

Además, hemos incorporado un análisis sobre la práctica educativa que, sobre el número racional positivo, se desarrolla actualmente en Educación Primaria. Este análisis, que no se contempla en los métodos de investigación citados en el párrafo anterior, nos resulta esencial para establecer relaciones entre el rendimiento de los alumnos y la enseñanza que reciben. Conocer estas relaciones orienta el estudio de alternativas didácticas adecuadas para mejorar la comprensión de los escolares.

En cuanto a la implementación de la propuesta en el aula hemos adoptado la metodología de trabajo denominada Investigación-Acción por ser la más adecuada a nuestras necesidades; metodología que se enmarca en el paradigma cualitativo, puesto que acentúa la consideración de la naturaleza socialmente construida de la realidad, la íntima relación entre el investigador y el problema investigado y los condicionantes situacionales que dan forma a la investigación (Denzin y Lincoln, 1994, pp. 4).

En nuestro trabajo utilizaremos el carácter recursivo de esta metodología para las dos etapas en que se estructurado el trabajo de campo. En la Primera Etapa diseñamos e implementamos una propuesta curricular sobre los Números Racionales Positivos para alumnos de cuarto y quinto curso de Educación Primaria y en la que cubriremos las fases de planificación, acción, observación y reflexión.

El estudio de Investigación-Acción en la Primera Etapa nos permite profundizar en la interpretación de los resultados y, atendiendo a los fenómenos que aparecen, ajustar la propuesta curricular y aplicar una Segunda Etapa de esta metodología de investigación con escolares del mismo centro educativo pero de otra promoción posterior.

Esta metodología de investigación se desarrolla con mayor amplitud y profundidad en el Capítulo IV de esta Memoria.

I.6. Consideraciones generales sobre la propuesta didáctica

Como ya hemos enunciado en el apartado I.3, los objetivos de esta investigaciones son los de elaborar, implementar y analizar la viabilidad de una propuesta didáctica alternativa a la enseñanza habitual de los números racionales positivos en Educación Primaria.

El cumplimiento de estos objetivos tiene como finalidad incrementar la comprensión de los escolares sobre esta estructura numérica, por lo que resulta oportuno precisar nuestra interpretación de este término, al que también aluden los estudiosos de la Educación Matemáticas y las autoridades educativas que reiteradamente vienen manifestando la necesidad de promover el aprendizaje comprensivo de las matemáticas (M.E.C. 1990, 2004, 2007).

Desde nuestro marco teórico la comprensión esta fuertemente ligada a la representación de las ideas matemáticas, de modo que compartimos la caracterización de la comprensión que realiza Wittrock (1990, pp. 363):

> *Una representación estructural o conceptualmente ordenada, de las relaciones entre las partes de información que se deben aprender, y entre esa información y esas ideas y nuestra base de conocimientos y experiencias.*

Esta representación estructural de un concepto o constructo teórico perteneciente al conocimiento formal es el producto de un largo proceso temporal (Tall y Winner, 1981). A lo largo de este proceso las experiencias de cada individuo determinan diferentes tipos de estructuraciones a las que denominamos comprensión o conocimiento sobre el concepto.

Desde la perspectiva particular de la Educación Matemática asumimos la idea de comprensión de Hiebert y Carpenter (1992; pp. 67):

> *Las matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes.*

En esta caracterización aparecen ideas similares a las de Wittrock, como las de la comprensión como estado mental en evolución o la de conectar la información de que dispone el individuo con la información que recibe. El fenómeno de la comprensión aparece vinculado al concepto de representación, que constituye una herramienta de gran utilidad como elemento caracterizador de los procesos cognitivos en la educación matemática.

Hipótesis importantes en los estudios sobre Educación Matemática es que para alcanzar la comprensión del concepto que se considera, es necesario el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación (Kaput, 1992; Romero, 1995) y que las dificultades de comprensión se detectan en la falta de coordinación entre diferentes sistemas, cuando tratan de expresar los mismos conceptos (Castro, 1994; Duval, 1995). Aunque conviene precisar que no es suficiente el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación, y que no todas las dificultades se detectan en la falta de coordinación entre distintos sistemas (Hitt, 1988)

Hechas estas precisiones, podemos enumerar los elementos que caracterizan esta propuesta, y que serán abordados con mayor detalle en el capítulo V:

- El aprendizaje se sitúa en el paradigma constructivista. Son los propios alumnos los que construyen las ideas matemáticas, a partir de situaciones problemáticas, manipulando objetos y realizando abstracciones a partir de las observaciones realizadas.

- La propuesta se caracteriza por la utilización sistemática de modelos de aprendizaje. Los modelos han sido previamente caracterizados, se han analizado sus potencialidades y limitaciones y, en consecuencia, se delimita con precisión el uso y alcance que van a tener cada uno de los modelos en la propuesta didáctica.
- Los sistemas de representación surgen y se asocian con los modelos de aprendizaje. Ahora bien, el currículo oficial contempla como sistemas habituales de representación del número racional la notación fraccionaria y la notación decimal; por tanto, se han adoptado las medidas oportunas para que los escolares no manipulen otros sistemas diferentes a los curriculares.
- La construcción de los conceptos de número racional se sustenta en los significados de medida y cociente partitivo. En consecuencia, se toma como punto de partida la génesis histórica del número racional y se abandona el significado relación parte-todo.
- La propuesta didáctica presenta el número racional a partir de la idea de fracción, en cuarto curso de Primaria. En el curso siguiente se introduce el concepto de número decimal conectado a el de fracción. Esta elección reitera el proceso histórico producido en Europa, y es coherente con la afirmación de Freudenthal (1983, pp. 134) en el sentido de que la fracción es la fuente fenomenológica del número racional.

La caracterización de nuestra propuesta didáctica incorpora dos herramientas conceptuales de gran interés para su desarrollo: modelo de aprendizaje y sistemas de representación. En los siguientes apartados I.7 y I.8 desarrollamos el sentido que damos a estas herramientas conceptuales y el uso que vamos a hacer de ellas.

I.7. Los modelos en la actividad matemática

Hay dos ideas sobre la noción de modelo que juegan un papel "inverso"; en el sentido de que su función y finalidad son intercambiables (Gairín, 2004).

• Desde la disciplina de las matemáticas se considera que las matemáticas modelizan situaciones del mundo físico (o del mundo de las nociones matemáticas). La idea de modelo es la de esquema simbólico que reproduce algún fenómeno físico; o la de un conjunto de símbolos y conceptos matemáticos que simulan un fenómeno real, tal y como indica el siguiente gráfico:

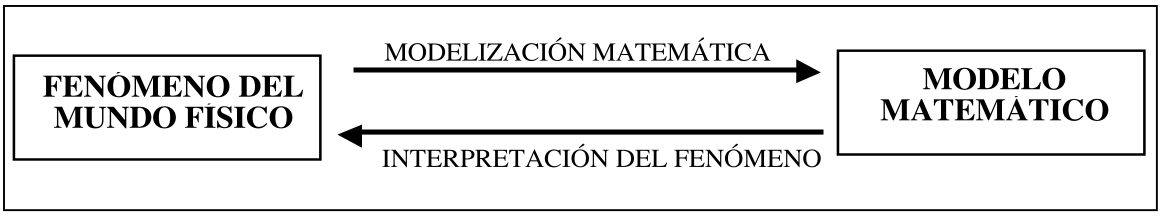


Gráfico I.2.: Función del modelo matemático para interpretar la realidad

Así, por ejemplo, sabemos que la derivada es un modelo matemático de la velocidad instantánea, que la probabilidad permite modelizar juegos de azar, o que la geometría analítica sirve de modelo para discutir sobre los sistemas de ecuaciones. Como vemos en estos ejemplos, la finalidad del modelo matemático es la de hacer una réplica de la realidad, y su función es la de simular acciones y predecir resultados.

• Desde la posición de la enseñanza de las matemática, las ideas surgen de la observación de fenómenos físicos (o de la utilización de conocimientos matemáticos). La finalidad del modelo, que dada su intencionalidad didáctica le llamamos de aprendizaje, es la de crear condiciones adecuadas para que surja el conocimiento matemático, y su función es favorecer el razonamiento abstracto a partir de percepciones sensoriales. En este caso, lo que se ofrece es el fenómeno y lo que se persigue es la construcción del conocimiento matemático:

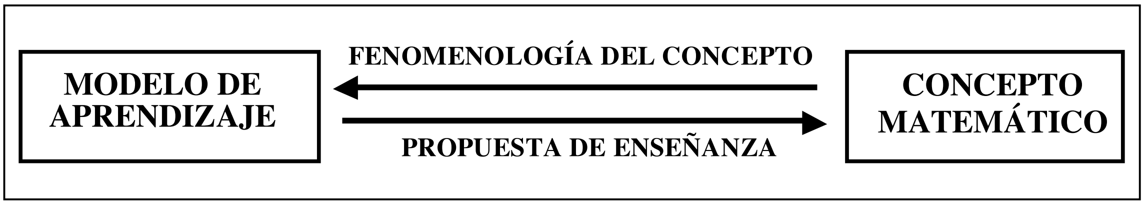


Gráfico I.3.: Función didáctica del modelo de aprendizaje

Así, por ejemplo, modelos de contabilidad o de temperatura sirven para que los alumnos construyan ideas sobre el número negativo; y una vez que el concepto ya está introducido, los números negativos servirán para modelizar situaciones problemáticas del mundo matemático o del mundo físico.

Los gráficos I.2 y I.3 ponen de manifiesto la doble funcionalidad del concepto matemático en el modelo matemático y en el modelo de aprendizaje. En efecto, mientras que el modelo matemático y los conceptos matemáticos que constituyen el modelo estudian un fenómeno de la realidad, el modelo de aprendizaje tiene en cuenta los fenómenos que organiza el concepto matemático para construir un dispositivo didáctico que sea eficaz para la enseñanza de dicho concepto.

I.7.1. Modelos de aprendizaje

Para nuestros propósitos educativos interesa especialmente la actividad de formación de ideas matemáticas. Por tanto, en lo sucesivo nos referiremos al modelo con el sentido que Gairín, (1999, pp. 15) otorga a los modelos de aprendizaje:

> *un entorno físico con el que se esquematiza y recrea una parte del mundo real, con variables bien definidas, estable frente a interacciones con el mundo exterior, y que permite las acciones de los sujetos.*

El modelo, sobre todo en los primeros niveles educativos, juega un papel importante en la formación y aprehensión de los conceptos matemáticos. Y este papel es importante tanto para el que aprende como para el que enseña.

• Desde la posición del escolar, el empleo de modelos tienen gran utilidad en la construcción del conocimiento matemático, por cuanto que: (Gairín, 1999)

- permiten la aprehensión sensorial de hechos y relaciones matemáticas mediante la manipulación de objetos físicos o la simulación de acciones;
- facilitan la construcción o interpretación de los sistemas de representación que comunican los resultados producidos al actuar sobre los objetos;
- facilitan la comprensión de las relaciones sintácticas y semánticas de los sistemas de representación empleados;
- sirven como apoyo y contraste de la certeza o falsedad de las relaciones simbólicas que se establecen a través de los sistemas de representación;
- facilitan la resolución de situaciones problemáticas cuando éstas se formulan en términos de los objetos del modelo.

De este modo el concepto queda fuertemente vinculado al modelo en que se concibió y persistirá en esta forma mientras el estudiante no sustituya la modelización del concepto por otra nueva. De hecho, se constata que los escolares y bachilleres mencionan las tartas o las barras de helado cuando expresan sus conocimientos sobre las fracciones.

• Desde la posición del profesor el modelo constituye una herramienta que se proporciona al estudiante con una clara intencionalidad educativa: dotarle de un material concreto y un entorno físico sobre los que pueda actuar y reflexionar para que, mediante esta interacción, avance en la construcción del conocimiento cuyo aprendizaje se promueve.

En consecuencia, la propia intencionalidad del recurso didáctico obliga al profesor a diseñar y establecer el modelo de manera que permita hacer explícitos aquellos aspectos relevantes del concepto matemático que se quieren enseñar. Por tanto, corresponde al profesor tomar, cuando menos, dos cautelas en la elección del modelo: de una parte, cuáles son los aspectos del concepto que explicita el modelo y cuáles son los que oculta u obstaculiza; y, de otra parte, cómo transmitir al alumno una caracterización correcta del modelo, que destaque los aspectos relevantes de los objetos, la acciones que se pueden realizar y las características del resultado que se han de considerar.

Por todo ello, para llevar a efecto nuestro trabajo de investigación conviene que analicemos en detalle algunas ideas sobre modelos para la conceptualización de las fracciones.

1.7.2. Modelos para dotar de significado al número racional positivo

Para cumplir los objetivos de nuestro trabajo de investigación es necesario analizar los modelos que permiten construir la notación fraccionaria como el primer sistema de representación del número racional. Ahora bien, dotar de significado a la fracción en el mundo físico significa, en primer lugar, dotar de significado a pares de números naturales, lo que exige el trabajo con magnitudes mensurables. En consecuencia, los modelos útiles para la instrucción sobre fracciones admiten cuatro variables o componentes diferenciadas (Gairín, 2004):

- **una magnitud mensurable**, para que cualquier cantidad de la misma se exprese de forma numérica,
- **unos objetos,** en los que resulta perceptible la cantidad considerada de esa magnitud,
- **unas acciones**, que provoquen alteraciones en la cantidad de magnitud expresada en los objetos,
- **unas técnicas,** con las que se llevan a cabo las acciones

Estas cuatro variables caracterizan los modelos para el aprendizaje de los números racionales: es esencial que el modelo exprese alguna magnitud mensurable puesto que con la instrucción se persigue representar unas relaciones entre cantidades de esa magnitud en términos de una acción. Los objetos resultan imprescindibles por cuanto permiten que, de forma tangible, se disponga de cantidades de magnitud susceptibles de transformaciones. La aparición de los conceptos se producirá como consecuencia de las relaciones que surgen de las acciones que realice el alumno sobre los objetos y que provoquen modificaciones de las cantidades; pero teniendo en cuenta que la técnica utilizada al efectuar la acción ofrece una perspectiva diferenciada del concepto matemático.

Nuestra idea de modelo para la noción de número racional queda esquematizada mediante un tetraedro, en cuyos vértices se ubican cada una de las componentes del modelo. Este esquema expresa que las cuatro componentes del modelo tienen la misma importancia. Para indicar que estas componentes no se consideran aisladas sino que cada una influye y está condicionada por las otras dos hemos señalado los lados con una doble flecha. En tanto que hemos visto que cada componente admite valores diferentes asumimos que el modelo para dotar de significado al concepto de número racional es un sistema de cuatro variables interrelacionadas.

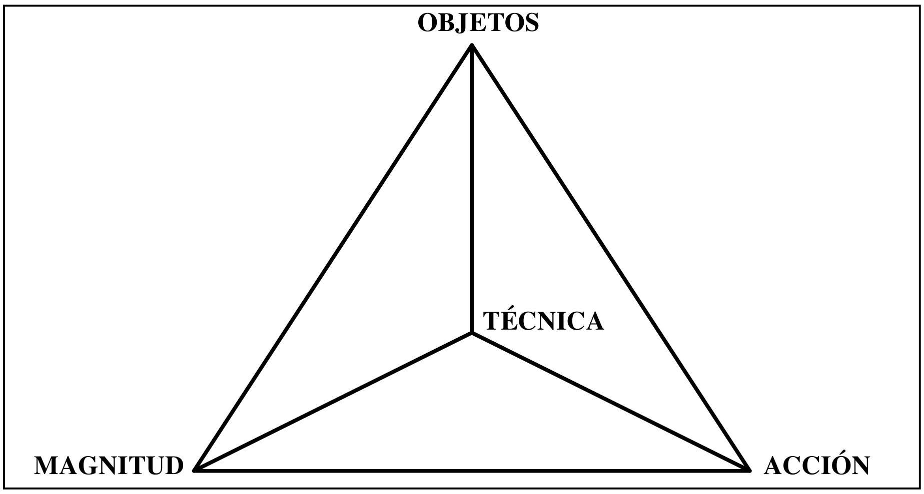


Gráfico I.4: Componentes del modelo de aprendizaje

Dando valores a los vértices del tetraedro se pueden construir una multiplicidad de tetraedros o modelos particulares. Ahora bien, desde un modelo concreto se favorece alguna de las múltiples perspectivas del concepto, a la vez que se pueden oscurecer otras, o incluso puede ocurrir que no se produzca significado alguno. Así, por ejemplo, si utilizamos como objetos listones de madera, si la magnitud es la longitud y si la acción es la de medir, el uso de diferentes técnicas ofrece resultados como los siguientes:

- La técnica de fraccionamiento arbitrario de la unidad presenta el número racional como el resultado de sumar un número entero de veces la longitud de subunidades del mismo tamaño.
- La técnica de hacer fraccionamientos sistemáticos de la unidad, o de partes de la unidad, nos lleva a concebir el número racional como la suma de cantidades de diferentes tamaños.
- La técnica de medir por conmensuración introduce el número racional con el significado de razón de dos cantidades de la misma magnitud.

Sirvan estos ejemplos para poner de manifiesto que existe una relación entre el modelo utilizado y la noción de número racional que se promueve en quien lo utiliza. En consecuencia, el modelo propuesto en la instrucción reflejará los conocimientos del profesor y delimitará los resultados educativos que se alcanzarán. Por otra parte, como ninguno de los modelos abarca la totalidad de significados, relaciones y propiedades del concepto, deberemos establecer, para cada uno de los modelos utilizados, aquellos aspectos del concepto que recoge el modelo, así como aquellos otros aspectos del concepto que son ignorados u obstaculizados por el propio modelo.

I.7.3. Presencia de modelos de aprendizaje en la práctica docente

En el Capítulo III de esta Memoria se analiza la práctica docente de la enseñanza del número racional positivo en las aulas de Educación Primaria tomando como referencia el libro de texto porque se trata de recurso didáctico fuertemente implantado en el Sistema Educativo Español. Como consecuencia de este estudio se detecta, en las propuestas de enseñanza del número racional que realizan las editoriales del sector educativo, una excesiva variedad de modelos inconexos, atomizados y que no están incardinados en una planificación global de la propuesta de enseñanza.

En los textos escolares estudiados proliferan modelos de aprendizaje escasamente eficaces, a pesar de que en sus propuestas didácticas podemos identificar las cuatro componentes que definen el modelo. Así, observamos que las **magnitudes** con las que, de manera más habitual, se trabaja son las de superficie, longitud, masa, volumen, capacidad, tiempo, dinero y cardinalidad (colecciones de objetos de igual forma e "indivisibles" para que sean mensurables con la medida de contar).

Las **acciones** que se proponen son muy variadas y las podemos clasificar en cinco grandes grupos: Medir (comparar una cierta cantidad de magnitud con una unidad), Fraccionar (un objeto se divide en partes iguales), Transformar (una cantidad de magnitud se convierte en otra diferente), Comparar (relacionar dos cantidades de la misma o distinta magnitud) y Repartir (separar una cantidad de magnitud en partes iguales). Además de estas acciones que aparecen en la introducción del concepto de fracción, estos manuales escolares utilizan otras acciones como ordenar, comparar, unir, reiterar, .., con las que se persigue dotar de significado a las relaciones y operaciones entre fracciones.

En cuanto a los **objetos** que se utilizan en los manuales escolares la gama es muy amplia, pero todos son cercanos al mundo del alumno y contienen una cantidad de magnitud reconocible; entre ellos, tienen mayor presencia las figuras regulares planas y las colecciones de objetos discretos.

Finalmente, en lo que respecta a las **técnicas** utilizadas en las acciones hemos constatado que los autores no las detallan, parece presuponerse que solamente hay una forma de efectuar las acciones y que, además, dicha técnica es universalmente conocida.

I.8. Sistemas de representación

La noción básica de representación expresa que una cosa significa, trata de o se refiere a otra; de modo que en el concepto de representación hay dos entidades relacionadas: el objeto representante (o representación) y el objeto representado. Sobre el uso que vamos a hacer de esta noción en nuestro trabajo asumimos las acotaciones de Gairín (2004; pp. 105):

- Bajo el término representación tienen cabida dos ideas diferenciadas: la representación interna de ideas matemáticas que se ubican en la mente del individuo, por lo que resultan inobservables; y la representación externa que con la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos permite expresar las nociones que el individuo comunica o recibe del exterior.
- Nuestro interés se centra en el estudio de las representaciones externas de los sujetos. Nos proponemos analizar los modos de representación empleados por los estudiantes y los significados que asignan a estas representaciones; de este modo, interpretaremos la comprensión que alcanzan sobre los números racionales.
- Por otra parte la comunidad matemática, en la comunicación y transmisión de ideas, suele identificar cada concepto con una de sus representaciones prioritarias y simplificar las conexiones entre los diversos sistemas de representación, dificultando así la comprensión de los aprendices. De este proceso no suelen ser conscientes los profesores noveles que consideran los modos estandarizados de comunicación matemática como transparentes.
- Enfrentar a los estudiantes para profesor, mediante una serie de tareas, con la complejidad subyacente a los sistemas de representación de los números racionales y de sus conexiones facilita la captación de las dificultades que subyacen al proceso formal de conceptualización y que muestran las representaciones convencionales, así como de las dificultades que surgen en los procesos de aprendizaje y que muestran las representaciones que producen los estudiantes.

Sobre el papel que juegan y la utilidad que tienen las representaciones en la educación matemática se ha creado una abundante documentación, cuya revisión escapa a los propósitos de este trabajo. Pero si que consideramos importante destacar algunos resultados que tienen especial incidencia en esta investigación:

- Los objetos matemáticos no deben confundirse con la representación que se hace de ellos. Aunque las representaciones son indispensables y no pueden suprimirse, lo que importa conceptualmente es tanto el objeto matemático como sus representaciones, (Duval, 1995)
- Las representaciones de algo por algo no se presentan de forma aislada, sino que tienen un carácter sistémico (Gunttenplan, 1994, pp. 536). En el caso más concreto de las matemáticas la noción de sistema de representación se hace equivalente con la de un sistema simbólico o sistema de símbolos que se caracterizan por un conjunto de relaciones semánticas y sintácticas.
- No hay representaciones de las ideas matemáticas que tengan carácter universal; cualquiera de ellas destaca algunos aspectos mientras que oscurece otros (Figueras, 1988; Ball, 1993)

I.8.1. Modelos y sistemas de representación

Las matemáticas son el estudio de las estructuras y, en particular, el estudio de estructuras numéricas, entendiendo éstas como conjunto de entes numéricos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones y de unas relaciones.

Las ideas que determinan estas estructuras numéricas surgen del trabajo con modelos para dar respuesta a situaciones problemáticas cotidianas; situaciones que el escolar resuelve manipulando los objetos, observando el resultado de su acción y describiendo lo acontecido. De este modo, las ideas que aparecen, y que ya no se refieren a los propios objetos, se conforman como entidades abstractas sostenidas por un sistema simbólico con el que se formulan enunciados y demostraciones. Por tanto, y de acuerdo con Lesh (1997), el aprendizaje de las estructuras matemáticas no solamente consiste en la manipulación de símbolos, implica además interpretar situaciones matemáticamente; también implica cuantificar, visualizar o coordinar sistemas estructuralmente interesantes; y, por supuesto, implica utilizar un lenguaje especializado, símbolos, esquemas, gráficos u otros sistemas de representación para desarrollar descripciones.

En tanto en cuanto las actuaciones sobre un modelo van asociadas a la descripción de lo observado, entendemos que los medios de expresión que se utilizan están, al menos en sus inicios, fuertemente vinculados al modelo en que se trabaja. Y en la medida en que esos medios de expresión adquieren características de generalidad y universalidad tienden a un mayor nivel de abstracción, a la vez que definen unas relaciones sintácticas y semánticas más exigentes, como se pone de manifiesto en los trabajos de Ifrah (2001) sobre la evolución histórica de los sistemas de numeración.

Surge así la noción de sistema de representación como el modo de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas mediante unos signos, unas reglas y unos enunciados (Castro, Rico, Romero, 1997). Es más, entendemos que el uso y gestión de sistemas de representación desempeña un papel central en la comprensión de las ideas matemáticas, puesto que un análisis profundo de las características sintácticas y semánticas que subyacen en el sistema de representación utilizado permitirá la comprensión de las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos.

Tanto las ideas matemáticas del individuo como los sistemas de representación asociados interactúan, son inestables y evolucionan constantemente (Lesh, 1997), y esto permite que los conocimientos del individuo avancen hacia una mayor comprensión del concepto.

Por tanto, y puesto que la complejidad de cada concepto matemático no se agota en uno sólo de los sistemas de representación, interesa conocer qué propiedades se ponen de manifiesto con uno determinado de esos sistemas, así como qué propiedades se oscurecen o se dificultan con dicho sistema. En consecuencia, el uso coordinado de dos a más sistemas de representación facilitará al alumno la plena compresión de las ideas matemáticas.

En el ámbito de nuestro trabajo de investigación, hay que constatar que los sistemas de representación se han utilizado en el estudio del número racional (Lesh, Post y Behr, 1987) e, igualmente, se ha estudiado la comprensión de los conceptos implicados, en el sentido de incrementar la variedad y consistencia de las redes de conexión entre diversos sistemas de representación (Kaput, 1992). La complejidad de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones también ha recibido la atención de los especialistas en Educación Matemática (Hiebert, 1993). Sin embargo, no conocemos ningún estudio que trate de explorar la complejidad de relaciones entre la notación fraccionaria y la decimal, profundizando en la estructura polinómica de las fracciones.

La conexión entre los dos sistemas de representación habituales de los Números Racionales Positivos constituye uno de nuestros centros de interés: construir un modelo de aprendizaje que permita la caracterización, sintáctica y semántica, de la notación fraccionaria y la notación decimal, que posee una estructura polinómica similar a la del sistema de numeración decimal. Desde estos sistemas de representación se revisan las relaciones y operaciones en dicho conjunto numérico y se persigue incrementar la comprensión de las relaciones entre ambas representaciones.

Con la finalidad de instruir a los escolares sobre los sistema de representación habituales en nuestro Sistema Educativo tendremos en cuenta elementos conceptuales y procedimentales de interés para nuestros fines:

- Un mismo sistema simbólico de representación admite diferentes significados del objeto representado. Así, con la notación fraccionaria habitual, a/b, se puede simbolizar una relación entre la parte y el todo, o el cociente de dos números enteros, o una relación funcional, ...

- Desde un significado concreto se potencian o dificultan determinados aspectos del concepto matemático; por ejemplo, el significado de la fracción como relación parte-todo dificulta la comprensión de las fracciones mayores que la unidad, mientras que el significado de la fracción como razón dificulta la comprensión de la suma de fracciones.
- Un sistema de representación destaca u oscurece aspectos de un mismo concepto: interpretadas con significado de cociente, la comparación de las fracciones 3/5 y 4/7 no es inmediata; mientras que sus expresiones decimales 0’6 y 0’5714… , son fácilmente comparables.
- Un determinado significado del número racional admite la representación fraccionaria y la representación decimal; sin embargo, esas representaciones no surgen desde un mismo modelo de aprendizaje. Así, por ejemplo, la técnica de fraccionamiento arbitrario de la unidad lleva a la notación fraccionaria pero no hace emerger la notación decimal.
- La conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal tiene sentido en alguno de los significados del número racional, pero no lo tiene en otros. Así, por ejemplo, desde el significado parte-todo no tiene sentido dividir las partes que se toman entre las partes en que se ha fraccionado el todo.

Desde estas consideraciones, las ideas que deben guiarnos en el momento de elaborar una propuesta didáctica sobre los números racionales positivos han de sustentarse en la caracterización de los modelos de aprendizaje que se van a utilizar, en los sistemas de representación que surgen desde cada uno de los modelos, y en la viabilidad de conectar los sistemas de representación en cada uno de los modelos presentes en la instrucción.

I.9. Revisión bibliográfica y antecedentes

Nuestro trabajo se centra en los momentos iniciales de la enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria. Con esa intención, hemos realizado el trabajo de revisar la documentación que nos informe sobre los resultados de trabajos con características similares al que nos ocupa. Para ello, se hizo una revisión de artículos publicados en las siguientes revistas:

Journal for Research in Mathematics Education (desde 1984),
Recherches en Didactiques des Mathématiques (desde 1990);
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (desde 1988);
Educational Studies in Mathematics (desde 1988);
Arithmetic Teacher (desde 1986);
Mathematics Teacher (desde 1986);
Teaching Children Mathematics (completa);
Mathematics Teaching in the Middle School (completa);
Enseñanza de las Ciencias (completa);
Revista Interuniversitaria (completa);

Suma (completa);
Uno (completa);
Unión (completa).

Esta revisión se cerró el 15 de julio de 2006. También realizamos una búsqueda en distintas bases de datos para completar nuestra información de los antecedentes sobre el tema. En concreto se consultaron las bases internacionales ERIC y MATHDI, además de la española ISOC.
Realizamos una indagación de publicaciones que contuviesen los descriptores: *número racional, fracciones, fracciones decimales, número decimal, enseñanza, aprendizaje, comprensión, significado, representación, concepciones, errores, obstáculos, relación parte-todo, currículum, investigación educativa, enseñanza primaria y enseñanza secundaria*.

Además, la búsqueda se limitó a publicaciones no fuesen anteriores al año 1996. Se obtuvieron 184 reseñas. Para organizar el estudio de esta documentación hemos establecido tres campos de estudio: los trabajos que aportan alguna modificación a la enseñanza sustentada en el significado parte-todo, los trabajos referidos a la enseñanza del significado de medida, y los trabajos que abordan la enseñanza del significado de cociente. La elección de estos campos viene determinada por las peculiaridades de nuestra investigación: utilizar modelos estables de medida y de cociente, con la intención de eludir la enseñanza del significado de la fracción como relación parte-todo.

Campo 1: modificaciones al significado parte-todo

Son investigaciones que, en su mayor parte, desarrollan científicos procedentes del campo de la psicopedagogía. El método de investigación sigue un esquema claramente delimitado: en primer lugar se hace un análisis de las dificultades de comprensión que produce la enseñanza tradicional, la enseñanza sustentada en el significado parte-todo, con especial énfasis en alguna de las causas que producen estas dificultades; en segundo lugar se elabora una propuesta didáctica alternativa que, a juicio de los investigadores, permitirá que los alumnos superen las dificultades de comprensión previamente detectadas; en tercer lugar se implementa la propuesta en un grupo experimental; finalmente se elaborar las conclusiones del estudio comparando los resultados del grupo experimental con un grupo de control, que ha recibido la enseñanza tradicional.

Las causas que originan las dificultades de comprensión del número racional que se detectan en los estudiantes, y que tienen su origen en la enseñanza, se pueden agrupar en cuatro tipologías (Moss y Case, 1999): dificultades derivadas de una enseñanza que prioriza el conocimiento procedimental sobre el conocimiento conceptual; dificultades derivadas de enseñar la fracción con el significado parte-todo sin establecer la necesaria diferenciación entre los números naturales y los números racionales; dificultades derivadas de presentar los sistemas de representación simbólicos como objetos transparentes desatendiendo, en consecuencia, el conocimiento de las relaciones sintácticas y semánticas subyacentes; y dificultades provocadas por utilizar una enseñanza formal que no tiene en cuenta la construcción del conocimiento de los alumnos a partir de sus propias experiencias.

Entre los trabajos realizados en este campo hacemos referencia a los que nos han resultado de mayor interés para nuestra investigación atendiendo a las propuestas alternativas que plantean para mejorar la comprensión del significado parte-todo:

Moss y Case (1999) trabajan en la introducción de la fracción a partir de las representaciones gráficas y porcentuales que aparecen en los ordenadores Macintosh cuando se están copiando archivos. La secuencia de enseñanza sigue el orden porcentaje, decimal, fracción.

Moseley (2005) compara los resultados de la instrucción de un grupo de estudiantes a los que se instruye exclusivamente con el significado parte-todo, y otro grupo de estudiantes cuya instrucción incluye, además, los significados de razón y operador.

Valdemoros (2004) investiga una propuesta instruccional a partir del significado de reparto igualitario con alumnos que han recibido enseñanza previa de la fracción como relación parte-todo. En la propuesta que se investiga las acciones de reparto se sustentan sobre la relación parte-todo en lugar del significado de medida, lo que ocasiona inconsistencias.

Otros investigadores, como Obando (2003), Martínez (2001) y Bustos y otros (2003), realizan modificaciones parciales de la relaciones parte-todo porque reconocen la necesidad de cambiar las prácticas de enseñanza, pero obtienen resultados desalentadores.

Este tipo de investigaciones tiene como núcleo de interés los aspectos psicolingüísticos y representacionales, pero desatienden los aspectos relativos a las características del conocimiento matemático que resultan esenciales para la comprensión de los alumnos. En estas condiciones, el estudio de las dificultades de comprensión se queda limitado pues no se contemplan los obstáculos provocados por el significado parte-todo, como son la imposibilidad de justificar las fracciones impropias, o la imposibilidad de conectar con significado las notaciones fraccionaria y decimal, etc. Es más, en estas investigaciones ni se tienen en cuenta los aspectos matemáticos del número racional presentes en el significado parte-todo, ni se tienen en cuenta los aspectos matemáticos que están presentes en las propuestas didácticas alternativas que se investigan; en consecuencia, los resultados los consideramos incompletos porque no incluyen un estudio comparativo de los elementos matemáticos puestos en juego.

Campo 2. Significado de medida

En la génesis del número racional encontramos, entre otros significados, el de medida directa; es decir, la notación fraccionaria expresa el resultado de la medida de una cantidad de magnitud que no contiene un número entero de veces a la unidad de medida. Esta idea de fracción no la hemos visto recogida en ninguno de los trabajos que hemos revisado, pero sí que hay autores que utilizan la idea de medir para introducir el número racional y entre los que cabe citar a los siguientes:

A) Keijzer y Terwel (2003) utilizan dos grupos de alumnos de 9-10 años para experimentar dos propuestas didácticas. En el grupo experimental, con una metodología basada en el trabajo en pequeño grupo, se introduce el significado de fracción como la medida de distancias en un modelo mental que es la recta numérica. En el grupo de control, con el trabajo individual como recurso metodológico, se introduce la fracción con el significado de parte-todo.

B) Lamon (2001, 2005) introduce una variante en el significado parte-todo, que denomina *unitizing* y que consiste en hacer explícita la unidad a la que se refiere el todo. Pero a pesar de esta variación mantiene como diferenciado el significado de medida que, en su opinión, es la distancia entre puntos de la recta numérica. Esta situación es un claro reflejo de la tendencia de muchos autores a añadir ligeras variantes en la práctica docente tradicional de introducir la fracción con el significado parte-todo; y también es un reflejo de la resistencia de estos autores a confundir el sistema de representación de la recta numérica con el modelo de enseñanza basado en la medida directa de cantidades de magnitud.

C) Brousseau y otros (2004) utilizan la medida por conmensuración, para introducir la fracción a partir de una situación problemática, la medida del grosor de un folio, en la que intervienen dos números naturales. Se trata, por tanto, de la medida por conmensuración de magnitudes de diferente naturaleza y, como resultado de las correspondientes acciones, la fracción se configura con el significado de razón entre la medida del grosor de un grupo de folios y el número de folios que conforman dicho grupo. Este significado de la fracción crea dificultades en la posterior secuenciación de los contenidos pues las operaciones con fracciones ya no se justifican en el mismo mundo de objetos; además, no es consistente el modelo para introducir la notación decimal, pues el autor se ve obligado a abandonar el mundo de los objetos físicos y trabajar con números no medida (atrapar fracciones mediante fracciones decimales). Hay que reconocer la valía e interés de este trabajo por cuanto es de los pocos que plantea una propuesta completa para la enseñanza del racional positivo.

D) Dörfler (2004) mantiene que el significado parte-todo está sustentado en aspectos figurales de los objetos, y esta objetivación constituye un obstáculo para una correcta comprensión de las fracciones y del número racional. Enuncia las bases para una propuesta didáctica alternativa sustentada en dos pilares: el trabajo de los escolares se realizará en un modelo que facilite su desarrollo cognitivo, y atender a la reconstrucción de la génesis histórica del número racional. Y propone presentar la fracción con el significado de medida por conmensuración; es decir, la fracción como razón entre cantidades de longitud. El trabajo de este autor es teórico, por lo que nos podemos analizar las ventajas e inconvenientes de una propuesta didáctica que nos perece interesante, aunque es cuestionable la gestión en el mundo escolar de un significado del número racional que tiene mayores dificultades de comprensión que el significado de medida directa; además, tampoco conocemos la intenciones del autor para gestionar la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal.

Campo 3. Significado de cociente

La secuencia de enseñanza tradicional de la fracción con el significado de relación parte-todo, se bloquea al justificar el paso de la notación fraccionaria a la notación decimal mediante el algoritmo extendido de la división de números naturales. Este bloqueo proviene de la ausencia de significado que pueda otorgarse al resultado de dividir el número de partes que se consideran entre el número de partes totales. Surge así la necesidad de incorporar a la instrucción el significado de la fracción como cociente.

En estas condiciones, hay una abundante literatura de investigación, procedente del ámbito de la psicopedagogía, cuyo interés se sitúa en dar sentido al significado de la fracción como cociente o como división. A partir de estas coordenadas la mayor parte de las investigaciones plantean como situación problemática hacer repartos igualitarios de objetos fraccionables. Y los intereses son de naturaleza bien diferenciada como estudiar las estrategias que utilizan los alumnos para hacer los repartos (Charles y Nason, 2000), la conexión entre la fracción y la división de números naturales (Toluk y Middleton, 2001), los obstáculos generados por los conocimientos anteriores sobre el significado parte-todo (Middleton y otros, 2001), y hasta los contextos en los que situar la manipulación de objetos por parte de los escolares (Charles, K., Nason, R. y Cooper, T.; 1999), etc

Este pequeño listado de nombres indica que son escasos los trabajos sobre este significado de cociente que han aparecido en la búsqueda realizada. Es más, nos parece llamativo que la mayor parte de los trabajos se sitúen más en el campo de la psicopedagogía que en el campo de la Didáctica de la Matemática.

Del análisis del contenido de estos trabajos se deriva su escasa relevancia para nuestra investigación. En efecto, estos trabajos eluden una premisa consustancial con nuestra investigación: los sistemas de representación están asociados a técnicas de trabajo, a las técnicas utilizadas para efectuar las acciones cuyo resultado se expresa mediante un sistema de representación. Para estos autores lo importante es analizar las distintas formas o técnicas de reparto que utilizan los escolares; mientras que nuestra posición es la de analizar la técnica de reparto que deben aplicar los escolares para que aparezca el sistema de representación que interesa para cumplir los objetivos de la enseñanza.

En este campo solamente nos parece de interés para nuestra investigación el trabajo de Streefland (1991) porque incluye una propuesta didáctica, sustentada en la idea de reparto igualitario, para escolares de 9-10 años. Entre sus aportaciones cabe destacar el desarrollo completo de la fase de implementación de la propuesta; y entre sus limitaciones incluimos la ausencia de conexiones entre la fracción y el número decimal.

Balance

De la revisión de los documentos encontrados obtenemos las siguientes conclusiones:

1. Hay una literatura clásica sobre la enseñanza del número racional, cuya producción finaliza en los primeros años de la década de los 90, y que ha institucionalizado los

resultados de autores como Behr, Post, Harel, Lesh, Cramer, Kieren, Carpenter, Llinares y Sánchez, Brousseau, Streefland, etc.

A partir de las producciones de estos autores se tiene la sensación de que el estudio sobre el número racional ya se ha completado, que no hay aportaciones nuevas desde la Didáctica de la Matemática. En efecto, cuantitativamente las producciones posteriores son bastante escasas y, cualitativamente, se limitan a estudiar aspectos muy parciales de la enseñanza del número racional respetando, eso sí, los resultados de la literatura clásica. Así se constata en trabajos recientes de Contreras y Gómez (2006) y Kribs-Zaleta (2006) que estudian las estrategias de los alumnos al afrontar la resolución de problemas en los que está implicada la división de fracciones.

2. Una parte muy notable de los trabajos publicados sobre la enseñanza del número racional hay que situarla en los campos de la Psicología y, en menor, medida, de la Pedagogía. En estos trabajos se detecta una clara dependencia teórica de la literatura clásica y, en consecuencia, se suelen analizar los resultados de introducir modificaciones en la enseñanza de la parte-todo y contrastar los resultados con un grupo de control.

Desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática, las aportaciones de este tipo de trabajos tiene una relevancia poco notable, pues hay importantes lagunas en el análisis de los conceptos matemáticos puestos en juego, así como de las potencialidades y limitaciones de las alternativas que se proponen. En este sentido resulta ilustrativo el trabajo de Arnon et al. (2001) que crea un software específico para estudiar la equivalencia de fracciones, sin advertir que la idea de fracción que se maneja es la de la tangente trigonométrica o pendiente de rectas que pasan por el origen de coordenadas.

3. Es de destacar que todos los documentos consultados justifican la pertinencia de su investigación en la necesidad de superar las dificultades de comprensión que tienen los escolares con el significado parte-todo. Esta coincidencia en el significado que se analiza es debido a la universalidad de la parte-todo como pilar fundamental de la enseñanza del número racional.

Resulta llamativo que todos los investigadores critiquen la eficacia del significado parte-todo y sin embargo, y de forma mayoritaria, se limiten a modificar algunos aspectos parciales de la enseñanza pues, en su opinión, estos cambios serán suficientes para mejorar el rendimiento del proceso educativo. Son muy pocos los autores que optan por realizar un cambio sustancial en el sentido de eludir el significado parte-todo en la secuencia instructiva. En estas condiciones, resulta que la mayoría de los investigadores tienden a consolidar una práctica educativa que ellos mismos denuncian como insatisfactoria.

4. Salvo casos excepcionales, las investigaciones no abordan la enseñanza del número racional, suelen limitarse a analizar y modificar aspectos parciales de la enseñanza de este importante tópico del currículo. Estos estudios parciales suelen tener poca incidencia en la práctica docente habitual pues el profesor de aula necesita dar la secuencia instructiva

completa; es decir, también necesita enseñar los contenidos anteriores y posteriores a los que aparecen en la investigación. Y no resulta sencillo dar coherencia a una discurso en que hay partes modificadas y otras partes sin modificar.

5. En la totalidad de los trabajos analizados se refleja una preocupación de los investigadores por sustentar la enseñanza en la manipulación de objetos y en una reflexión posterior sobre las observaciones realizadas. La aplicación de este posicionamiento sobre la enseñanza se refleja de formas muy diferentes en las propuestas de enseñanza.

En general los autores no precisan el modelo de aprendizaje sobre el que van a trabajar su propuesta didáctica, simplemente lo describen sin analizar las potenciales y limitaciones de dicho modelo. En consecuencia, una herramienta conceptual de la importancia del modelo de aprendizaje queda desvirtuada en estos trabajos, lo que condiciona los resultados de los mismos.

6. Aun cuando en buena parte de los trabajos se incorporan consideraciones sobre el lenguaje y sobre los sistemas de representar la información, se detecta la ausencia de un análisis fino sobre las peculiaridades de los sistemas de representación habituales en la enseñanza del número racional. Este análisis es esencial para determinar los aspectos del concepto que potencia cada uno de los sistemas de representación, así como aquellos aspectos que quedan ocultos o cuya percepción es obstaculizada por el propio sistema de representación. Entendemos que el análisis sintáctico y semántico de los sistemas de representación puestos en juego es esencial para determinar si la propuesta didáctica que se implementa incrementa la comprensión de los alumnos sobre el número racional.

Especialmente llamativo nos ha resultado la ausencia de investigaciones sobre la conexión entre los distintos sistemas de representación del número racional y, particularmente, en el caso de las notaciones fraccionaria y decimal. Da la sensación de que tema carece de interés para los investigadores porque entienden que es correcta la conexión tal y como se realiza en la enseñanza tradicional, o porque no encuentran propuestas alternativas. En todo caso, nos preocupa que este aspecto de la enseñanza no haya recibido la atención de alguno de los investigadores que hemos analizado.

I.10. Objetivos de la investigación

En este trabajo estamos interesados en hacer indagaciones con alumnos de cuarto y quinto curso de Educación Primaria para observar si la implementación de una propuesta didáctica les permite fortalecer las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal del Número Racional. El resultado de esta investigación será útil para diseñar un currícula escolar que promueva el incremento de los conocimientos matemáticos.

Para la consecución de nuestros propósitos, esta investigación se debe diseñar de manera que proporcione un análisis detallado de cómo interaccionan los elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje (Hiebert y Carpenter, 1992). Consecuentemente, en este trabajo indagatorio se aborda la elaboración de una propuesta didáctica, su posterior implementación en un grupo natural de alumnos de Educación Primaria, el análisis posterior de la información obtenida y una evaluación final de la propuesta implementada.

Con ese fin se contempla, en primer lugar, una revisión bibliográfica. La documentación estudiada ha permitido que el investigador elabore esta propuesta desde una perspectiva multidimensional: las características matemáticas del conjunto de los Números Racionales; los obstáculos y dificultades que condicionan el aprendizaje de este tópico; las concepciones y errores más frecuentes que se han detectado; y las propuestas didácticas que han experimentado otros investigadores.

En segundo lugar se contempla, desde el punto de vista de la investigación, que es ineludible observar la construcción del conocimiento en los entornos en que se produce y a los que tiene acceso el investigador (Resnick et al., 1989, pp. 11). Por ello, concedemos prioridad al aula como espacio natural en que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje y en el que se contempla toda la riqueza y multiplicidad de las variables que lo conforman. Queda así marcado como objetivo prioritario estudiar el proceso constructivo de la comprensión de unos alumnos a través de dos sistemas de representación simbólicos de los Números Racionales en la situación escolar que dicho proceso tiene lugar. Pensamos que este enfoque permite, desde una dimensión social, una mayor aproximación e integración entre la teoría y la práctica (Bauersfeld, 1994, pp. 134); aunque somos también conscientes de que abordar el estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el contexto en que se producen es compleja y problemática.

En tercer lugar, y atendiendo a las recientes investigaciones sobre psicología del aprendizaje, se contempla situar al alumno como agente principal en la construcción de sus conocimientos. Esto supone utilizar estrategias metodológicas en las que se prioricen los trabajos de estos alumnos (National Research Council, 1989, pp. 60):

> *Las presentaciones claras por si mismas son inadecuadas para sustituir los errores por ideas claras. Lo que los estudiantes construyen por si mismos, aunque pueda ser inadecuado, está con frecuencia lo suficientemente arraigado como para no ser erradicado con una explicación seguida de unos pocos ejercicios.*

Estas producciones de los escolares, junto a otras informaciones, nos permitirán observar cómo éstos adquieren y organizan los conocimientos y cómo esa organización se modifica con el tiempo y con las experiencias del que aprende (Resnick y Ford, 1991; Coob, 1987; Brousseau et al., 1986); y también nos permitirán caracterizar sus concepciones y afrontar la superación de sus errores (Radatz, 1980; Blando et al. 1989; Movshovitz-Hardar et al, 1987).

Igualmente se contempla la posición del investigador a lo largo del proceso. En este trabajo el investigador se sitúa como miembro pleno de la situación que estudia, pues es el investigador el que asume el trabajo de campo como profesor de aula en el Colegio Tío Jorge de la ciudad de Zaragoza. Más concretamente, el investigador ocupa la posición de profesor integrado en un grupo de trabajo que adopta el método de Investigación-Acción (Elliot, 1990; Kemis y McTaggart, 1988; Mcniff, 1991). Desde esta posición hay que entender que las preocupaciones del investigador tienen el propósito de mejorar el trabajo diario y de encontrar soluciones inmediatas a los problemas que aparecen en la realidad cotidiana; mientras que los resultados de la investigación tienen un sentido personal de validación y de mejora de la tarea profesional, pues el investigador realiza una indagación de tipo práctico (Romero, 1995).

Por lo tanto, el autor de esta tesis asume el papel de investigador experto en Didáctica de las Matemáticas y el de profesor de un grupo natural de estudiantes de los cursos cuarto y quinto de Educación Primaria. Esta posición del investigador nos ha exigido tomar las cautelas necesarias para garantizar la fiabilidad y validez de la investigación. En tal sentido, y como se detalla el Capítulo IV, se han cuidado con especial atención las exigencias de fiabilidad y validez del proceso atendiendo a aspectos tales como los métodos de recogida y análisis de los datos, la selección de los informantes, la autovigilancia del investigador; y la descripción rica, detallada y completa del proceso.

Respecto al proceso instructivo destacamos los trabajos de investigación en Didáctica de la Matemática que han puesto de manifiesto la complejidad de conceptos, relaciones, operaciones y propiedades que conforman el aprendizaje y comprensión de los números racionales (Carpenter et al., 1993; Behr et al., 1993). En este sentido, y situados en el campo del Pensamiento Numérico, abordamos el estudio sobre la formación matemática de los futuros ciudadanos desde los siguientes supuestos:

- Para incrementar la comprensión de los números racionales, los escolares deben fortalecer sus conocimientos personales sobre los diferentes significados de la fracción y establecer conexiones entre los mismos: "*Si los estudiantes aprenden solamente la interpretación de la fracción como relación parte-todo, tienen serias limitaciones para una sólida comprensión de las fracciones*" (Kerslake, 1986). Por ello, se pretende lograr que estos estudiantes doten de significado a la fracción como medida y como cociente.
- También debe incrementarse esta comprensión de los números racionales fortaleciendo las conexiones conceptuales entre las notaciones fraccionaria y decimal: "*Enseñar fracciones y decimales como tópicos separados sin proporcionar a los estudiantes oportunidades para establecer conexiones, empequeñece su desarrollo para la plena comprensión de los números racionales*" (Sowder, 1995). Para ello, este trabajo articula estrategias de aprendizaje basadas en la utilización de nuevos sistemas de representación que faciliten la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal.
- Para que el proceso de construcción del conocimiento sea efectivo es preciso disponer de un medio físico y natural, utilizado como escenario idóneo para la formación de conceptos y, además, como área de aplicación de los mismos. Así, a partir de la percepción sensorial y combinando pensamiento con experiencia, la formación de ideas sobre los números racionales positivos aparece conectada.
- Ahora bien, para que los estudiantes incrementen sus conocimientos es necesario que los esfuerzos se centren en la resolución de situaciones problemáticas: *"es a través de la resolución de problemas como un concepto cualquiera adquiere sentido para un*

alumno. Este proceso de elaboración pragmática es esencial para la psicología y la didáctica, como es esencial para la historia de las ciencias" (Vergnaud, 1990, pp. 135). Estas situaciones problemáticas deben tener sentido para los alumnos y ser generadoras de conflictos que favorezcan el sentido del número y no habilidades rutinarias y reglas para su aplicación.

- Además, es necesario fomentar un "aprendizaje intencionado" (Scardamalia et al., 1989), o aprendizaje en el que la construcción del conocimiento sea un proceso abierto y que los estudiantes tomen responsabilidades sobre el mismo. Para ello, se favorece un clima de trabajo en el que los estudiantes puedan examinar sus propios errores, que tengan oportunidades para el diálogo, que el clima de la clase esté libre de presiones externas y que los estudiantes acepten que la comprensión de los Números Racionales exige de un esfuerzo personal importante y de un tiempo amplio para la acomodación de los nuevos conocimientos con los que ya tenían (Hatano e Inagaki, citados por Sowder et al, 1993, pp. 258).

En base a todas las consideraciones anteriores precisamos los objetivos generales que orientan nuestra investigación:

Objetivo I:

Diseñar una Propuesta Didáctica para la enseñanza del Número Racional Positivo en Educación Primaria, que constituya una alternativa a la enseñanza tradicional sustentada en la relación parte-todo.

Para alcanzar este objetivo se marcan los siguientes objetivos parciales:

I.a. ***Caracterizar un modelo para el aprendizaje de los números racionales positivos basado en la acción de medir directamente cantidades de longitud, superficie y masa.***

I.b. ***Articular una secuencia de actividades sobre el modelo anterior para dar significado a las relaciones de orden y de equivalencia entre fracciones.***

I.c. ***Dotar de significado, en el modelo de medida, a las operaciones de suma , resta, multiplicación de una fracción por un natural y cociente entre una fracción y un número natural.***

I.d. ***Caracterizar un modelo de aprendizaje basado en el reparto igualitario de cantidades de longitud y de superficie.***

I.e. ***Explicitar las características sintácticas y semánticas del sistema de representación polinómico decimal utilizado para expresar el resultado del reparto realizado por fases y con fraccionamientos sistemáticos, de la unidad o de partes de la unidad, en diez partes iguales.***

I.f. ***Conectar las notaciones fraccionaria y decimal como formas diferentes de expresar la misma cantidad de magnitud.***

I.g. ***Dotar de significado a las relaciones de orden entre números decimales; a las operaciones de suma y resta de números decimales; y a la multiplicación de un decimal por un natural y al cociente de un decimal por un número natural.***

Objetivo II:

Explorar las potencialidades y limitaciones de la Propuesta Didáctica cuando se implementa con grupos naturales de alumnos de cuarto y quinto curso de Educación Primaria.

Este objetivo queda desglosado en los objetivos parciales siguientes:

II.a. ***Precisar los medios, los recursos y la organización necesarios para la recogida de la información.***

II.b. ***Definir las unidades de análisis para procesar la información, atendiendo a la comprensión de los alumnos, a la eficacia de la propuesta didáctica y las estrategias metódicas utilizadas.***

II.c. ***Analizar y valorar los resultados obtenidos.***

I.11. Diseño de la investigación

Con la finalidad de cubrir los objetivos ya enunciados, el trabajo de investigación se organiza en torno a tres ámbitos: teórico (capítulos II y III), metodológico (capítulo IV) y de aplicación (capítulos V, VI y VII). El trabajo termina con las conclusiones de la investigación y las perspectivas para futuras investigaciones sobre la enseñanza del número racional positivo (capítulo VIII). A continuación adelantamos los aspectos más destacados de cada uno de los capítulos de esta memoria de investigación

Capítulo II: Precisiones sobre el significado del número racional positivo

El número racional positivo tiene significados diferentes sobre los que no hay acuerdo entre los autores que los han definido ni entre los investigadores que los utilizan. Ítem más, ante un mismo significado tampoco existe una interpretación única en el ámbito de la Educación Matemática.

Para nuestra investigación resulta esencial precisar el alcance y características de cada uno de los significados del número racional tal y como se van a utilizar en este trabajo. En este sentido, nuestro interés es el de determinar el modo en que los números racionales se han presentado en el ámbito escolar; es decir, nos interesa precisar, desde la práctica educativa, la evolución del concepto de número racional.

Para alcanzar nuestros propósitos, se han establecido cinco periodos históricos, que cubren desde 1850 hasta nuestros días, en los que se ha estudiado los significados que utilizan los respectivos Sistemas Educativos. Se trata, por tanto, de reflejar todos los significados del número racional que han estado presentes en la enseñanza; no se trata, por tanto, de un análisis de tendencias predominantes. En estas condiciones, el trabajo se ha dirigido al análisis de todos los libros de texto que hemos encontrado en cada época, pues el estudio de libros paradigmáticos de Especial atención hemos dedicado al significado relación entre la parte y el todo debido a su destacada presencia en el sistema educativo español, a su génesis de origen didáctico y a su supuesta similitud con el significado de medida.

Capítulo III. Características de la enseñanza tradicional

Dado la intención de este trabajo de elaborar e implementar una propuesta didáctica alternativa a la que habitualmente emplea nuestro Sistema Educativo, consideramos necesario hacer un análisis minucioso que nos permita conocer los contenidos y métodos implicados en la enseñanza actual. De este modo, estaremos en mejores condiciones de elaborar una propuesta didáctica alternativa que facilite un mayor grado de comprensión de los alumnos.

Con esta finalidad se han analizado los libros de texto de los cursos 4º, 5º y 6º de Educación Primaria de una editorial de amplia difusión en nuestro sistema educativo, Editorial Anaya. Para este análisis se han considerado las siguientes variables: secuenciación de los contenidos, estrategias metodológicas que se proponen, modelos de aprendizaje que se utilizan, sistemas de representación que se presentan, significados que se construyen y papel asignado a la resolución de problemas.

Una vez finalizado este estudio genuino se cubre el ámbito teórico de nuestra investigación, por lo que se está en condiciones de precisar y enunciar los objetivos e hipótesis de la investigación.

Capítulo IV. Metodología de investigación

Se incluye una primera parte que contiene las razones por las que se ha organizado la investigación en dos etapas, las relaciones entre dichas etapas, las similitudes y diferencias entre las etapas y la temporalización del proceso global.

En la segunda parte del capítulo se concretan todos los aspectos relacionados con la metodología de Investigación-Acción que se utiliza en nuestro trabajo: características de los participantes en la fase experimental y definición de las Unidades de Análisis correspondientes a la Organización del Contenido, a la Comprensión del Contenido y a la Interacción Didáctica.

Capítulos V, VI y VII: Experimentación de la Propuesta Didáctica

Atendiendo a las diferentes fases que comprende la metodología de Investigación-Acción, se conforman estos tres capítulos que recogen informaciones de naturaleza diferenciada:

- El capítulo V describe la fase de Planificación. Aquí se refleja en proceso costoso y dilatado de elaborar una propuesta didáctica que incluya los dos sistemas de representación habituales, notación fraccionaria y notación decimal, así como la conexión entre ellos. Es, sin duda, una aportación original tanto por alcance de los contenidos que se incluyen, como por la variedad de elementos metodológicos y didácticos que se han considerado.
- La fase de Acción se incluye en el capítulo VI, incluyendo todas las informaciones que se produjeron en la Primera Etapa, y las que resultaron novedosas en la Segunda Etapa
- El capítulo VII se dedica a las fases de Observación y de Reflexión. Allí se reflejan los datos aportados en la investigación y el análisis de los mismos.

La última parte de la investigación se dedica, en el **Capítulo VIII**, a reflejar las conclusiones de esta investigación, así como las sugerencias para avanzar en la investigación sobre la enseñanza del número racional positivo.

Capítulo II Significados del número racional positivo

II.1. Introducción

En este estudio se diseña, implementa y evalúa una propuesta de enseñanza del número racional positivo para escolares de 4º y 5º curso de Educación Primaria. Esta propuesta se fundamenta sobre modelos de aprendizaje estables. Partimos del supuesto de que el diseño de modelos de aprendizaje adecuados para la enseñanza de un determinado concepto debe tener en cuenta todos los significados asociados a dicho concepto. En este capítulo vamos a identificar los significados del número racional positivo y conocer qué uso hace y ha hecho el Sistema Educativo de cada uno de los significados, con la intención de disponer de elementos teóricos sobre los que fundamentar la propuesta de enseñanza del número racional positivo que va a ser experimentada.

En primer lugar precisamos, en el apartado II.2, la noción de significado; estudiamos las clasificaciones tradiciones de los significados del número racional positivo[1] y abordamos, en el apartado II.3, el problema complejo de la caracterización de dichos significados. Después, identificamos, en los apartados II.4 a II.9, los significados que pertenecen a la

---

[1] Algunos investigadores hablan de *significados de la fracción* porque es el primer sistema de representación del número racional positivo que se enseña a los escolares; nosotros preferimos hablar de significados del número racional positivo porque los sistemas de representación decimal y porcentual participan de los mismos significados que la fracción.

fenomenología histórica del número racional positivo; y expondremos, en el apartado II.10, los resultados del análisis. En el apartado II.11 presentamos el significado de relación parte-todo que no pertenece a la fenomenología histórica del número racional pero está fuertemente consolidado en las prácticas de enseñanza del número racional. En el apartado II.12, abordamos el análisis fenomenológico didáctico que nos permite identificar los significados del número racional positivo que utiliza y ha utilizado el Sistema Educativo Español en los momentos iniciales de la enseñanza de la fracción y del número decimal, tomando como referencia los manuales escolares publicados en España desde mitad del siglo XIX hasta la fecha actual. En los apartados II.13 y II.14, se focaliza el análisis fenomenológico didáctico en la representación fraccionaria y del número decimal, respectivamente; y los resultados se describen en el apartado II.15. Finalmente, en el apartado II.16, se exponen las conclusiones del estudio sobre los significados del número racional positivo que se aborda en este capítulo de la Memoria de Investigación.

II.2. Noción de significado

En este trabajo, asumimos la hipótesis del paradigma del constructivismo social (Ernest, 1991) que postula la construcción del conocimiento matemático en estrecha relación con las condiciones culturales y sociales del momento histórico en el que éste se desarrolla.

Para el constructivismo social, las matemáticas son construcciones sociales que tienen el propósito de explicar la experiencia humana en el contexto físico y social. Los conceptos matemáticos son elaboraciones sociales que existen objetivamente, y la necesidad de los conceptos y las proposiciones matemáticas surgen y se basan en convenciones socialmente compartidas. La mayoría de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas vinculan la noción de significado con la construcción del conocimiento matemático como el producto de la actividad de una comunidad que se rige por unas normas y que aborda y resuelve problemas con unos propósitos. Este es el caso de la línea de investigación "Pensamiento Numérico" que estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas (Rico y Castro, 1995; pp. 167).

Desde otro programa de investigación, Vergnaud (1990; pp. 135) vincula el significado con las prácticas que realiza el alumno enfrentado a la resolución de problemas: *"es a través de la resolución de problemas como un concepto cualquiera adquiere sentido para un alumno. Este proceso de elaboración pragmática es esencial para la psicología y la didáctica, como es esencial para la historia de las ciencias"*. Desde el enfoque pragmático-semiótico Godino y Batanero (1994) entienden el significado de una noción matemática como el *sistema de prácticas asociadas al campo de problemas de las que emerge dicha noción en un momento dado*. Desde estas perspectivas, las nociones matemáticas se consideran como símbolos de unidades culturales emergentes de unos sistemas de prácticas ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo.

Aceptando esta idea de significado nos proponemos delimitar los campos de problemas que generan el número racional positivo. Caracterizar los significados del número racional positivo es fundamental para nuestro estudio porque nos permitirá seleccionar y secuenciar aquellos significados sobre los que vamos a articular la propuesta de enseñanza, dado que la finalidad última de nuestras investigaciones es la mejora de la enseñanza de la estructura numérica de los números racionales y, que desde la perspectiva educativa que nos ocupa, partimos del supuesto de que la comprensión del número racional exige del dominio coordinado de todos sus significados (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Freudenthal, 1983; Kieren, 1976; Moseley, 2005; Sowder, 1995; Vergnaud, 1983).

II.3. El problema de la caracterización de los significados

Los significados del número racional positivo ha sido objeto de estudio por investigadores prestigiosos como Kieren, (1976, 1980); Freudenthal, 1983; o Behr, (1983, 1992). Los resultados de sus estudios han dado lugar a una clasificación uniforme, que es aceptada por la comunidad científica, y que comprende cinco significados: medida, cociente, razón, operador y relación parte-todo. No obstante, si analizamos los trabajos de cada uno de estos investigadores observamos que interpretan de diferente modo determinados significados. Así, por ejemplo, Kieren (1980, pp.134) identifica parte-todo y razón, y medida con recta numérica (Kieren, 1980; pp.142); Behr (1983, pp.98) identifica los significados de medida y parte-todo al considerar que "*el subconstructo medida del número racional representa una reconceptualización de la noción parte-todo de la fracción*"; sin embargo, Freudenthal (1983) separa estos dos significados porque considera que provienen de fenomenologías diferenciadas.

A pesar de estas discrepancias, esta clasificación de significados ha tomado carta de naturaleza y no es cuestionada por los investigadores en Didáctica de las Matemáticas que, en todo caso, realizan modificaciones parciales de algunos significados sin especificar los criterios que fundamentan los cambios que proponen. La falta de claridad en los criterios que sostienen las clasificaciones de los significados del número racional positivo nos anima a realizar una revisión de los significados asociados a este concepto matemático.

Caracterizar los significados de un concepto matemático es una tarea compleja porque cada significado presenta aspectos diferentes del mismo concepto, lo que obliga a que estén interconectados de alguna manera. Para identificar los significados del número racional positivo vamos realizar un análisis fenomenológico de esta estructura numérica, que es una herramienta conceptual ideada por Freudenthal (1983), y que utilizamos para describir todas aquellas situaciones problemáticas susceptibles de poder resolverse con este conjunto numérico. El análisis fenomenológico del número racional positivo nos va a permitir identificar las prácticas sociales, matemáticas y educativas que están en la génesis de este conjunto numérico y, por lo tanto, identificar los significados del número racional positivo.

El análisis fenomenológico plantea dos dificultades. La primera dificultad es, en cierto modo, ineludible y consiste en la imposibilidad de hallar, en su totalidad, el conjunto de situaciones problemáticas asociadas a un concepto matemático. La segunda dificultad para identificar y separar los significados del número racional se deriva del hecho de que los conocimientos matemáticos están relacionados entre sí de múltiples formas, y también lo están las situaciones problemáticas que resuelve el número racional. Posiblemente, esta limitación explica las discrepancias entre los investigadores de Didáctica de la Matemática a la hora de pronunciarse sobre si determinados significados del número racional son independientes entre sí o existe alguna relación de inclusión entre ellos.

Para hacer efectivo el análisis fenomenológico histórico nos servimos de tres dimensiones del significado que se muestran en el siguiente diagrama:

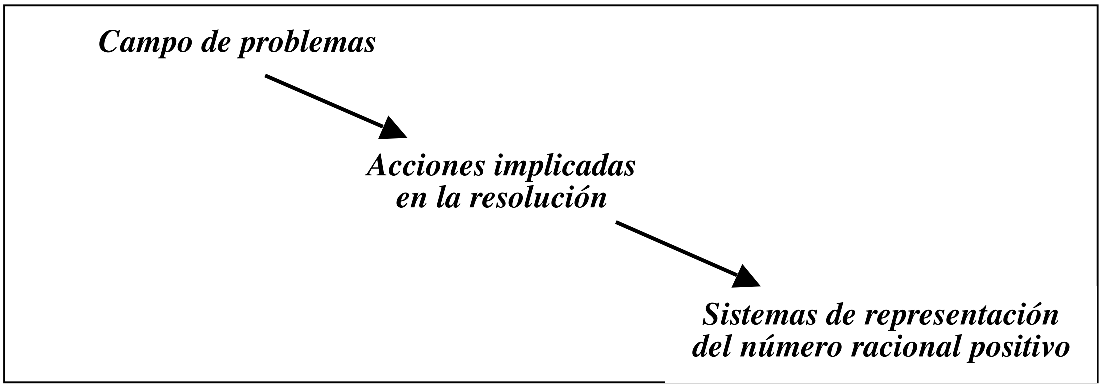


Gráfico II.1: Las tres dimensiones del significado a considerar en el análisis fenomenológico histórico

Según este diagrama, en primer lugar vamos a estudiar los campos de problemas que generan cada significado, después las acciones que debería realizar un resolutor hipotético para resolver los problemas de cada campo y, finalmente, los sistemas de representación del número racional positivo que emergen al comunicar el resultado del problema.

Estas dimensiones del significado son una adaptación de la terna (S, I, Z) con la que Vergnaud (1982, pp. 36) define el significado de un concepto, donde:

- S es el conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto;
- I es el conjunto de invariantes que constituyen el concepto, y que entendemos como la práctica o acción que permite resolver con sentido la situación problema que hace emerger el concepto y utilizar eficazmente los sistemas de representación asociados a ese concepto;
- Z es el conjunto de representaciones simbólicas usadas para representar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere.

En coherencia con esta definición de significado que hemos adoptado, para establecer una separación efectiva entre los diferentes significados imponemos el criterio que consiste en *analizar los campos de problemas que resuelve cada significado* y, además, *analizar la naturaleza de las acciones físicas y mentales* que comporta resolver los problemas formulados desde cada campo. Por último, se procederá a evaluar la componente semántica y sintáctica de los sistemas de representación que emergen al resolver el problema.

De esta manera, identificaremos un nuevo significado del número racional positivo cuando éste aparezca como solución de un campo de problemas novedoso, que exija al resolutor poner en juego acciones físicas y mentales novedosas, puesto que entendemos el significado personal del alumno (resolutor) como la aprehensión mental de un objeto matemático en un proceso que integra el concepto matemático con las acciones que éste realiza.

II.4. Análisis fenomenológico histórico del número racional positivo

El análisis fenomenológico ideado por Freudenthal (1983) tiene por objeto servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas. El análisis fenomenológico nos va a permitir identificar, describir, caracterizar y clasificar los fenómenos sociales, matemáticos y educativos que pueden ser modelizados por la estructura numérica del racional. Para hacer operativo este análisis, Freudenthal lo separa en cuatro tipos y aconseja aplicarlos tal como lo refiere Puig (1997, pp. 65):

> *El orden en que hay que desplegar los distintos tipos de análisis fenomenológico comienza por la pura fenomenología (para lo que basta conocer las matemáticas y sus aplicaciones), se completa con una fenomenología histórica, sigue por una fenomenología didáctica (para lo que hay que conocer el proceso de enseñanza y aprendizaje) y termina, en todo caso, con una fenomenología genética.*

Siguiendo las recomendaciones de Freudenthal partimos del análisis fenomenológico histórico estudiando las situaciones problemáticas de las que emergen diferentes sistemas de representación del número racional, al considerar como eje prioritario las acciones que llevan a resolver las situaciones problemas. Entendemos que para realizar el análisis fenomenológico histórico debemos dar respuesta a la siguiente cuestión: ¿qué acciones básicas han realizado nuestros antepasados para que el número racional aparezca como respuesta adaptada a sus necesidades cotidianas o intelectuales?

La historia de las Matemáticas muestra que las ideas iniciales de número racional positivo han aparecido a partir de las acciones de medir, repartir y comparar cantidades. Sin embargo, estos fenómenos del mundo real, físico y cotidiano no agotan el campo de problemas que genera el racional positivo porque los propios objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia y, a su vez, se convierten en medios de organización de nuevos conceptos matemáticos. De esta forma, Freudenthal explica el proceso de creación de conceptos matemáticos mediante la progresión sucesiva de relaciones entre la pareja fenómeno y el medio de organización. En la historia de la Matemáticas detectamos dos nuevos significados del número racional: operador y cociente indicado, que surgen para resolver problemas internos de las matemáticas y no para satisfacer necesidades cotidianas.

A modo de resumen, indicamos los significados del número racional positivo que se derivan del análisis fenomenológico histórico:

Significados asociados al problema de la medida	*Significados asociados a la evolución de las matemáticas*
- medida - cociente partitivo o reparto - razón	- operador - cociente indicado

Cuadro II.1: Primera clasificación de los significados del análisis fenomenológico histórico

Con la intención de clarificar cada uno de los significados que pertenecen a la fenomenología histórica del número racional positivo vamos a tener en cuenta las tres dimensiones del significado que hemos descrito en el gráfico II.1 (pp. 4). Así, en los siguientes apartados vamos a estudiar las tres dimensiones de cada uno de los significados del número racional que hemos identificado, a saber:

1º el campo de problemas que organiza cada significado, enunciando un problema prototípico de cada campo.

2º las acciones que exige la resolución del problema y las posibles técnicas de resolución,

3º los sistemas de representación del número racional positivo asociados a cada significado que emergen al comunicar la solución del problema, y la constatación histórica de la existencia de tal representación asociada a un determinado significado.

En el apartado II.5, II.6 y II.7 describimos de los significados de medida, cociente partitivo y razón que pertenecen a la fenomenología histórica del número racional positivo que resuelven problemas de medida, entendida la actividad de medir en un sentido amplio que será comentado posteriormente. En el apartado II.8 y II.9 describimos los significados asociados a la evolución de las matemáticas: operador y cociente indicado. Y, finalmente, en el apartado II.10, se muestran los resultados del análisis fenomenológico histórico del número racional positivo.

II.5. Significado de medida

La medida realizada con objetos tangibles sobre una magnitud continua constituye uno de los usos sociales de lo que hoy llamamos número racional positivo. La medida de cantidades de magnitud es una actividad inherente a todas las culturas:

Medir se ocupa básicamente de comparar cosas en función de una cualidad compartida (magnitud), y su desarrollo va de las comparaciones de pares a las comparaciones de muchos, y de las unidades prácticas (antropomórficas y locales) a las unidades normalizadas y los sistemas de unidades (Bishop, 1999; pp. 134).

Los números naturales se muestran insuficientes para expresar el resultado de la medida si la cantidad a medir no contiene un número entero de veces a la unidad de medida. En estos casos hay que utilizar una parte de la unidad para realizar el proceso de medida; y para obtener esta parte haya que proceder a un fraccionamiento de la unidad significa. Por consiguiente, hay que hacer una primera distinción en la tipología de las magnitudes sobre las que se realiza la medición: magnitudes continuas o magnitudes discretas.

II.5.1. Medida de magnitudes continuas

II.5.1.1. Campo de problemas

Conocer la medida de una cantidad de magnitud continua conlleva el diseño y aplicación de una técnica de medida. Y dado que hay múltiples técnicas de medida nos limitamos a estudiar las que resultan más adecuadas para nuestro trabajo: medida directa y medida por conmensurabilidad. Abordamos el estudio poniendo de manifiesto las acciones implicadas en la resolución de un problema y en los sistemas de representación que emergen.

Una tarea prototípica de la medida puede enunciarse de la forma siguiente:

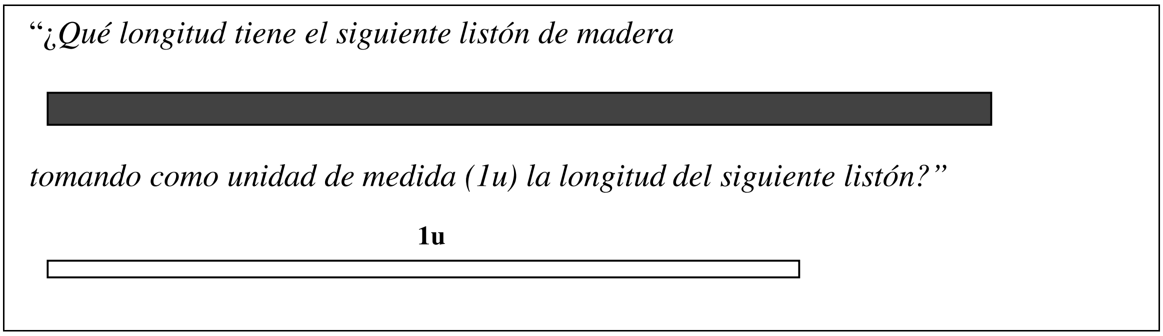


Gráfico II.2: Tarea prototípica de medida directa de una cantidad de magnitud continua

La formulación de este problema no necesita ningún soporte gráfico, aunque la presentación textual de esta Memoria de Investigación obliga a mostrar gráficamente la unidad de longitud y la cantidad de longitud del listón, a pesar de que el resolutor necesite únicamente los materiales físicos.

II.5.1.2. Acciones implicadas en la resolución del problema

Las acciones que realiza el resolutor están condicionadas por la técnica de medida que utiliza. En concreto, esta situación admite dos técnicas de medida: a) medida directa y b) medida por conmensurabilidad.

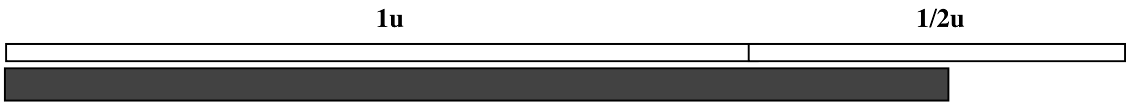
a) Medida directa

Se trata de comparar la cantidad a medir con la unidad de medida y fraccionar la unidad de medida si, como en este caso, fuese necesario. Este fraccionamiento puede hacerse de maneras diferentes, pero nos limitaremos a dos de las que resultan más significativas:
a.1) en una fase y a.2) en varias fases.

a.1) Técnica de medida directa en una fase.

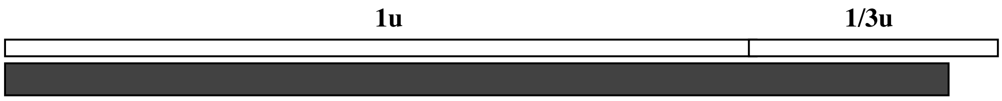
Consiste en realizar fraccionamientos arbitrarios e igualitarios de la unidad, de modo que todas las subunidades o partes de la unidad, tienen la misma cantidad de magnitud.
Si el resolutor opta por la medida directa el problema no tiene solución inmediata porque deberá seguir alguna estrategia y tomar decisiones. Posiblemente, el resolutor comprobará, en primer lugar, que la longitud está comprendida entre $1u$ y $2u$. Después buscará un fraccionamiento adecuado de la unidad.

Si procede de modo sistemático, probará con subunidades de longitud $\frac{1}{2}u$:

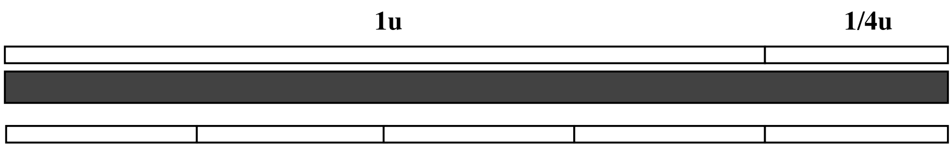


Y observará que la longitud del listón es menor que $\frac{3}{2}u$

Si intenta medir la longitud del listón con subunidades de $\frac{1}{3}u$ fracasará:



Sin embargo, si utiliza subunidades de $\frac{1}{4}u$ conseguirá medir la longitud del listón:

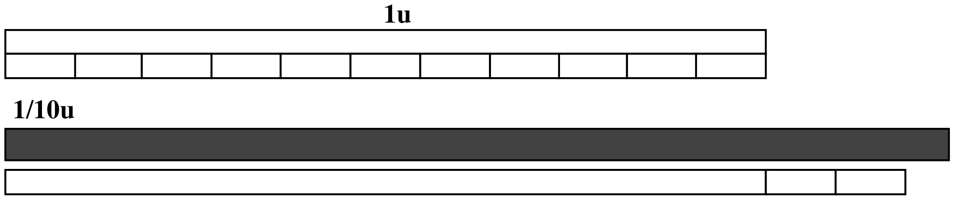


El listón mide $\frac{5}{4}u$. La fracción expresa la medida de una cantidad de longitud que se compone de 5 subunidades, todas ellas de longitud $\frac{1}{4}u$.

a.2) Técnica de medida directa en varias fases.

Supuesto que la reiteración de la unidad no cubre totalmente la cantidad a medir, se crea una subunidad con la que se mide la cantidad que falta por medir; y si con esta subunidad no se cubre totalmente la cantidad a medir se reitera el proceso. Y así se procede hasta lograr el resultado de la medida. La creación de nuevas subunidades puede efectuarse de forma sistemática o de forma arbitraria.

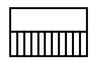
Para nuestros propósitos interesa destacar, entre los fraccionamientos sistemáticos, el que consiste en crear subunidades sistemáticas de la unidad al fraccionar la unidad o las sucesivas subunidades en 10 partes iguales hasta completar la cantidad de magnitud a medir. Esta técnica se conoce como medida en varias fases con fraccionamientos sistemáticos decimales de la unidad y vamos a aplicarla para resolver la tarea propuesta: del orden inmediato inferior tantas veces como sea posible; y así sucesivamente.
Como el resultado de la medida está comprendido entre *1u* y *2u*, se necesita fraccionar la unidad en 10 partes iguales:



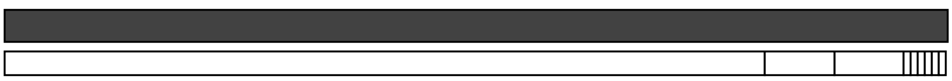
Se observa que una aproximación de la medida de la cantidad de longitud del listón es:

$$1+2\left[\frac{1}{10}\right]u$$

Para mejorar el resultado de la medida se necesita fraccionar la subunidad de $\left[\frac{1}{10}\right]u$ en 10 partes iguales de modo que: $\left[\frac{1}{10}\right]u = 10\left[\frac{1}{10^2}\right]u$



Utilizando 5 subunidades de $\left[\frac{1}{10^2}\right]u$ se completa la cantidad de longitud del listón:



Con esta técnica, la Representación Polinómica Decimal:

$$1+2\left[\frac{1}{10}\right]+5\left[\frac{1}{10^2}\right]u$$

expresa la medida de la cantidad de longitud del listón.

b) Medida por conmensurabilidad

La técnica por conmensurabilidad consiste en reiterar la cantidad de longitud del listón a medir (l) y la de la unidad (u) un número entero de veces cada uno hasta conseguir que las cantidades de longitud reiteradas sean iguales. En este momento tiene sentido expresar la igualdad:

$$4.\, l = 5.u$$

para expresar que cada 4 listones tienen la misma cantidad de longitud que 5 unidades.

La representación fraccionaria $l/u = 5/4$ tiene un valor descriptivo, es un número no medida que expresa la comparación multiplicativa entre la cantidad a medir (l) y la unidad de medida (u) del listón. La fracción $\frac{5}{4}$ tiene el significado de razón.

Además, la fracción $l = \frac{5}{4}u$ admite otra interpretación: es la medida de la cantidad de longitud (l) del listón.

Se observará que en este proceso de medida no hay necesidad de realizar fraccionamientos de la unidad. Este método fue utilizado por los matemáticos griegos que construyeron una teoría de cocientes de intervalos, como queda recogida en los Elementos de Euclides, con una intencionalidad teórica alejada de la práctica porque los problemas reales o usos vulgares de la medida los resolvían utilizando fracciones unitarias. A pesar de las aportaciones valiosas realizadas por esta civilización los griegos no llegaron a considerar la razón o cociente de longitudes como un número.

Con esta técnica, la fracción tiene el significado de razón porque la técnica por conmensurabilidad potencia ideas de proporcionalidad directa entre las cantidades de longitud implicadas en la tarea de medida.

II.5.1.3. Sistemas de representación asociados

Las técnicas de medida que hemos descrito en el apartado anterior hacen emerger sistemas de representación del número racional positivo para comunicar el resultado de la medida de una cantidad de magnitud. Las representaciones que surgen al aplicar una u otra técnica de medida admiten evaluaciones semánticas diferentes. Es más, un mismo sistema de representación ofrece significados diferentes del número racional

II.5.1.3.1. Notación fraccionaria

Este sistema de representación surge al expresar el resultado de la medida, y lo hace al aplicar dos técnicas de medida diferentes: a) medida directa en una fase y b) medida por conmensurabilidad.

a) Medida directa en una fase

La fracción $\frac{a}{b}u$ expresa el resultado de la medida de una cantidad de magnitud de un objeto tangible, siendo: u la unidad de medida, que es la medida del objeto con el que se efectúa la medida, a el número de subunidades que completan la cantidad de magnitud de objeto a medir, y b es el número de subunidades iguales en el que se ha fraccionado la unidad de medida de modo que $1/b\ u$ es la medida de cada subunidad.

Las características esenciales de este sistema de representación son las siguientes:

- La fracción $\frac{a}{b}u$ es un número medida, que surge de una acción física de medida con dos objetos tangibles: la cantidad a medir y la cantidad con la que se mide.
- b no puede ser 0 porque este número de partes iguales en que se divide la unidad debe ser entero.
- Las fracciones propias e impropias aparecen de modo natural porque el número de subunidades (a) no está limitado por el fraccionamiento de la unidad (b). Por lo tanto, a puede ser mayor, igual o menor que b.
- La fracción $\frac{a}{b}u$ *puede interpretarse como* $a \, x \frac{1}{b} u$

Desde tiempos remotos la fracción surge para resolver el problema de la medida de cantidades de magnitud. A lo largo del tercer milenio antes de Cristo se configura la idea abstracta de número natural asociado a la cardinalidad. Esta evolución de la idea del número hace que en la segunda media mitad del tercer milenio aparezcan medidas fraccionarias en Egipto y Mesopotamia (Ritter, 1992, pp. 30). En estas civilizaciones, las fracciones aparecen como subunidades de sistemas métricos para las magnitudes de capacidad en Mesopotamia y de longitud en Egipto. Así, además de las fracciones unitarias, los escribas egipcios utilizan la fracción 2/3 y los escribas asirios 2/3, 3/4 y 5/6. (Michel, 1992; pp. 89)

El descubrimiento de la existencia de signos, como 5/6, nos permite suponer que la cantidad que representa se percibe descompuesta en 5 subunidades iguales de 1/6 de unidad, a pesar de que este signo no tenga para esa civilización el estatus de fracción como medida. De ser cierta esta interpretación, cabe suponer el uso de la técnica de medida en una fase desde tiempos remotos.

b) Medida por conmensurabilidad

Cuando se mide una cantidad de magnitud tomando como unidad de medida otra cantidad de la misma magnitud (u) con la técnica de conmensurabilidad, la fracción $\frac{a}{b}u$ indica el resulta de la medida de la cantidad del objeto a medir, pero se interpreta como una razón:

> "*a* veces la unidad de medida es igual a *b* veces la cantidad del objeto a medir".

El sistema de representación fraccionario posee las siguientes características:

$\frac{a}{b}$ tiene el sentido de comparar cantidades de magnitud, o de relación multiplicativa entre una cantidad de magnitud y una unidad de la misma magnitud.

$\frac{a}{b}$ es un número que puede ser medida o ser un ente abstracto, un número no medida.

b no puede ser cero porque carece de sentido comparar una cantidad de una magnitud con una cantidad nula.

a puede ser mayor, igual o menor que *b* puesto que se trata de una comparación entre cantidades de magnitud y puede efectuarse en tomando como unidad la cantidad que se desee.

La técnica por conmensurabilidad imposibilita que tenga sentido otra representación del número racional que no sea la representación fraccionaria.

Esta técnica de medida se inscribe en la tradición erudita de la aritmética griega que convive con la tradición logística que se conceptúa como una disciplina que atiende a las aplicaciones prácticas de la aritmética.

Euclides se sirve de la idea de medida para vincular la proporcionalidad entre magnitudes con la proporcionalidad entre números: "*Una razón es una determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas*" (Euclides, 1994; pp. 9). Este punto de vista prioriza la conexión entre pares de números y pone el énfasis en los aspectos teóricos del concepto de número y no en el papel del número como herramienta para el cálculo o para la aproximación de la medida (Boyer, 1986, pp. 83).

II.5.1.3.2. Notación decimal

Aparece este sistema de representación al realizar las mediciones aplicando la técnica de medida en varias fases con fraccionamientos sistemáticos y decimales de la unidad

El resultado de la medida de la cantidad de magnitud viene dado por la Representación Polinómica Decimal:

$$a_0 + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_s\left[\frac{1}{10^r}\right] + \ldots$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, .., a_r$ son números naturales y $0 \leq a_1, a_2, .., a_r \leq 9$

Este sistema representación posibilita construir la notación decimal al aplicar un convenio basado en un criterio de economía y el conociendo del sistema de numeración decimal. En efecto, la Representación Polinómica Decimal posee las siguientes características:

- El resultado de la medida se ha obtenido como suma de medidas parciales.
- Todas las medidas parciales vienen dadas por el producto de un número comprendido entre 0 y 9 y una potencia de base decimal, con exponente positivo o negativo.

- Si ordenamos las potencias de las fracciones decimales se puede sustituir su presencia por el lugar que ocupan, se puede reducir la escritura de la Representación Polinómica Decimal:

$$a_0 + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + \ldots. + a_r\left[\frac{1}{10^r}\right] + \ldots = a_0 + [a_1] + [a_2] + \ldots + [a_r] + \ldots$$

- Cuando escribimos números naturales no colocamos ningún signo entre las cifras porque la colocación de las cifras se interpreta como adición de las cantidades que representa cada cifra. Si ahora actuamos del mismo modo, podemos escribir:

$$a_0 + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + \ldots. + a_r\left[\frac{1}{10^r}\right] + \ldots = a_{0,}\ a_1\ldots..a_r \ldots ;;\ 0 \le a_i \le 9$$

Establecidos estos criterios la nueva simbolización se denomina *notación decimal.*

$a_{0,}\ a_1\ldots..a_r\ \ldots\ u$ es un número medida que expresa la medida de una cantidad de magnitud referida a una unidad de medida prefijada (u).

La notación decimal se conforma como un sistema de representación con las siguientes características:

- La técnica de medida se realiza en varias fases de modo que se crean subunidades sistemáticas que se construyen mediante múltiplos y divisores decimales de la unidad de medida.
- La Representación Polinómica Decimal y la Notación Decimal son finitas porque en los procesos de medida físicos, realizados con objetos tangibles, hay que asumir la existencia de un error o aproximación entre el resultado real y el resultado obtenido.
- Las cifras $a_{0,}\ a_1, \ldots., a_r, \ldots$ son números naturales comprendidos entre 0 y 9, e indican el número de veces que se debe reiterar el múltiplo o divisor de la unidad, en una determinada fase del proceso de medida.
- La cantidad de magnitud que expresa el número decimal es la suma de las cantidades relativas que corresponden a cada sus cifras.
- En ambos sistemas de representación se verifica la unicidad porque los valores a_j que se han encontrado con la doble desigualdad que resulta de la aplicación de la propiedad arquimediana, los convierte en únicos.
- Cada cifra tiene un valor relativo; la cifra que ocupa el lugar i indica el número de subunidades de tamaño $\frac{1}{10^{i-1}}$ de unidad que aporta a la medida total.
- Ambos sistemas de representación cumplen la propiedad fundamental del orden: una unidad de cualquier tamaño es mayor que la suma de todos los sumandos siguientes.
- La Representación Polinómica Decimal y el Número Decimal son extensiones del sistema de representación escrito del número natural.

Los números decimales surgen para resolver el problema de la medida. Antiguas civilizaciones, como la babilónica, utilizaron con esta finalidad técnicas de medida que esbozan el futuro número decimal a pesar de no disponer de una base decimal, ni de un signo para el cero, ni progresar en su estudio.

El número decimal es un invento tardío; la idea de número decimal se ha construido a partir del desarrollo del álgebra y de la obtención de métodos numéricos de la aproximación de radicales (Rashed, 1984; pp. 94). El primer paso lo dan los matemáticos árabes del siglo XII y, después, Stevin (1582), que convierte los decimales en un objeto de estudio que puede ser enseñado y utilizado en aplicaciones prácticas. Sin embargo, el reconocimiento y utilización de los números decimales no se produce hasta finales del siglo XVIII cuando se consolidan los sistemas métricos de medida decimales, permanentes y universales (Ifrah, 2001) y, posteriormente, en el siglo XIX, se formalizan los conjuntos numéricos mediante construcciones axiomáticas. El significado del número decimal se fundamenta en el número racional, a través de la representación fraccionaria, y en el número real.

La consolidación del número decimal ha exigido un período largo que comienza en los siglos IV-V con la aparición del cero, la numeración posicional de origen indio, y que concluye en el siglo XIX con la formalización de las estructuras numéricas. Desde entonces, cabe suponer que el número decimal se utiliza para calcular la medida con la técnica que hemos descrito a pesar de que no hayamos encontrado esta técnica en los libros de historia de las matemáticas consultados porque, posiblemente, la lenta consolidación de los números decimales y la amplia difusión social de estos números en contextos de medida hace que los investigadores tengan dificultades para ubicar el momento inicial de aplicación de esta técnica y, por otro lado, consideren innecesario describir esta técnica cuyo uso resulta muy evidente desde el punto de vista matemático.

II.5.2. Medida de magnitudes discretas

II.5.2.1. Campo de problemas

La medida de cantidad de la magnitud discreta o magnitud cardinalidad presenta características muy diferentes con respecto a la medida de magnitudes continuas. Dado que el número natural resuelve el problema de la medida de la cardinalidad nos preguntamos en qué condiciones resulta necesario introducir el número racional para cuantificar el resultado de la medida del cardinal de una colección de objetos. Para dar respuesta a esta cuestión enunciamos una situación prototípica de medida de cantidades discretas en la que la fracción aparece como respuesta adaptada al problema de medida cuando se considera como unidad un subconjunto de la colección de objetos y no el objeto básico. Enunciamos una tarea típica de medida de cantidades discretas en los términos siguientes:

“*En una caja hay 15 magdalenas, ¿Cuántas docenas de magdalenas hay en la caja?*”

II.5.2.2. Acciones implicadas en la resolución del problema

La técnica de medida con la magnitud cardinalidad presenta diferencias importantes con respecto a la medida de cantidades de magnitud continuas. Las diferencias aparecen en el momento de buscar fraccionamientos de la unidad, pues éstos solamente se pueden hacer creando subconjuntos cuyo cardinal sea un divisor del cardinal de la unidad; aunque siempre es posible hacer un fraccionamiento que garantice el éxito: fraccionar la unidad en tantas partes iguales como indica su cardinal. En el problema que nos ocupa la respuesta viene dada por la fracción $\frac{15}{12}$ docenas de magdalenas.

Una medida "más refinada" nos lleva a buscar aquella unidad del mayor tamaño posible que permita hallar la medida solicitada en una sola fase. Para alcanzar este resultado es preciso considerar un proceso de "unitización" que consiste en construir una nueva unidad (subconjunto) formada por unidades básicas de modo que el subconjunto puede ser expresado como parte de la unidad de medida porque hay un número entero de subconjuntos que completan la unidad. En el enunciado propuesto, la nueva unidad estará compuesta por 3 magdalenas y el tamaño de este subconjunto es $\frac{1}{4}$ de docena. Una vez definido el tamaño de la nueva unidad, el proceso de medida se completa contando las veces que dicha unidad se reitera hasta completar la cantidad a medir; en este caso *5* veces. Por lo tanto, el resultado de la medida es $\frac{5}{4}$ docenas de magdalenas.

II.5.2.3. Sistema de representación asociado

La técnica de medida que hemos descrito en el apartado anterior hace emerger el sistema de representación fraccionario del número racional positivo que posee la misma sintaxis que en el caso de la medida de cantidades de magnitud continuas. Sin embargo, el numerador y el denominador de la fracción admiten interpretaciones diferentes que en el caso de la medida de magnitudes continuas, debido a la existencia de una unidad básica, no fraccionable, que es distinta de la unidad de medida.

La fracción $\frac{a}{b}u$ expresa el resultado de la medida la medida de la cardinalidad de una colección de objetos, siendo u la unidad de medida, que puede ser un sólo objeto o un conjunto de objetos.

- Si la unidad u tiene un solo objeto, entendemos que $b=1$ y que el conjunto a medir tiene a objetos.

- Si el cardinal de la unidad no tiene b objetos, entendemos que la medida se realiza con una nueva unidad cuyo cardinal sumado b veces nos proporciona el cardinal de la unidad de medida inicial; mientras que el cardinal del conjunto a medir es a veces el cardinal de la nueva subunidad de medida.

En los contextos discretos la fracción surge para expresar la medida del cardinal de una colección de objetos si se introduce un cambio de unidad que hace que el número natural se muestre ineficaz para expresar el cardinal de la colección. Si no se realiza un cambio de unidad, el número natural da cuenta de la medida de la cardinalidad y resulta superfluo introducir el número racional. En este sentido, apenas hemos encontrado referencias históricas del uso de la fracción como medida de la cardinalidad. Tan solo encontramos vestigios de la fracción con este significado en los cambios entre las unidades que forman los sistemas metrológicos. Así, Ritter (1992; pp. 21) informa del uso de un sistema de medida de capacidad descubierto en tablillas sumerias fechadas en la mitad del tercer milenio para medir "ciertas clases de objetos discretos". La representación fraccionaria como resultado de la medida de la cardinalidad no tiene una fenomenología histórica tan nítida como en el caso de la medida de cantidades de magnitud continuas.

II.6. Significado de cociente partitivo o reparto igualitario

II.6.1. Campo de problemas

Repartir de forma igualitaria consiste en distribuir una cantidad de magnitud en un número entero de partes de igual tamaño. Se trata de repartir la cantidad de magnitud que poseen un número determinado de objetos. Todos los objetos deben ser fraccionables y poseer la misma cantidad de magnitud continua y medible. La cantidad de magnitud común de los objetos se considera como unidad de medida.

La acción de repartir exige dos tareas: distribuir la cantidad inicial en las partes señaladas y medir la cantidad correspondiente a una cualquiera de las partes obtenidas.

"*Dispones de 5 barras de regaliz, todas iguales. Deseas repartirlas de modo igualitario entre 4 niños, ¿qué cantidad de regaliz recibirá cada niño?*"

II.6.2. Acciones implicadas en la resolución del problema

La resolución de este problema permite introducir distintos sistemas del número racional positivo. Existen distintas técnicas de reparto (Gairín, 1999), cada una de las cuales utiliza un sistema de representación diferente. Estas técnicas y su representación simbólica son descritas ampliamente en el Capítulo V dedicado a la planificación de la Propuesta. Mostramos algunas de estas técnicas.

a) Reparto efectuado en una sola fase.

Consiste en fraccionar cada una de las 5 barras en tantas partes iguales como participantes en el reparto haya, o en un múltiplo del número de participantes. Si cada barra se fracciona en 4 partes, después de realizar el reparto cada niño recibirá $\frac{5}{4}$ barras.

b) Reparto efectuado en varias fases siguiendo el "criterio de la mayor parte"

El criterio denominado "de la mayor parte" consiste en que, en cada fase del reparto, se da a cada individuo la mayor parte de unidad posible. En este caso, resulta clave la elección del fraccionamiento adecuado de la unidad. Siguiendo esta técnica el reparto concluye en dos fases: en primera fase cada niño recibe una barra entera y en la segunda fase $\frac{1}{4}$ de barra. El resultado viene dado como suma de fracciones unitarias:

$$1+\frac{1}{4}\ \textit{barras.}$$

c) Reparto efectuado en varias fases mediante fraccionamientos decimales

Ahora la técnica de reparto consiste en utilizar los fraccionamientos decimales de la unidad y repartir, por fases, dando en cada fase la mayor cantidad posible de magnitud. La elección del fraccionamiento decimal de las unidades se fundamenta en la base decimal de nuestro sistema de numeración y en la posibilidad de utilizar las unidades del Sistema Métrico Decimal dado que la acción de reparto conlleva un proceso de medida de magnitudes. Si aplicamos procedimiento del reparto realizado en fases sucesivas en las que los individuos reciben la mayor cantidad de unidad posible, pero con la exigencia de que la unidad o cualquier parte de ella solo puede ser dividida o fraccionada en 10 partes iguales, el resultado es único y, además, el proceso del reparto es algoritmizable.

Con esta técnica, el problema que estamos resolviendo el reparto concluye en tres fases: en primera fase cada niño recibe una barra entera, en la segunda fase 2 subunidades de un décimo de barra y en la tercera fase recibe 5 subunidades de un centésimo de barra. El sistema de representación que surge se denomina Representación Polinómica Decimal:

$$1 + 2\left[\frac{1}{10}\right] + 5\left[\frac{1}{10^2}\right]\ \textit{barras.}$$

La notación decimal aparece como un convenio adecuado para simplificar la Representación Polinómica Decimal:

$$1 + 2\left[\frac{1}{10}\right] + 5\left[\frac{1}{10^2}\right]\ \textit{barras} = 1{\acute{}}25\ \textit{barras}$$

Con independencia de la técnica de reparto utilizada, el resolutor necesita medir, con objetos tangibles o evocados, para cuantificar el resultado del reparto igualitario.

II.6.3. Sistemas de representación asociados

Dependiendo de la técnica de reparto utilizada emergen diferentes sistemas de representación del número racional positivo.

a) Notación fraccionaria

La fracción $\frac{a}{b}u$ expresa el resultado del reparto igualitario de *a* unidades que poseen una misma cantidad de magnitud continua que se reparten entre *b* personas o se distribuyen en *b* partes iguales.

La fracción posee una doble interpretación porque expresa:

1º la medida de una cantidad de magnitud: lo que recibe cada persona que participa en un reparto igualitario, y

2º las condiciones iniciales del reparto igualitario: el numerador indica el número de unidades a repartir y el denominador expresa el número de personas que participan en el reparto igualitario.

La fracción como resultado de un reparto igualitario está constatada históricamente en el período paleobabilónico, en la primera mitad del segundo milenio. Así, Démare-Lafont (1992; pp. 105) informa del reparto de la superficie de una casa entre dos hermanos en el que cada uno recibe 5/6 SAR 8 gín.

b) Representación Polinómica Unitaria

El resultado del reparto se expresa mediante la representación polinómica unitaria que se simboliza como una suma de fracciones unitarias:

$$a_0 + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_1 n_2 n_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots n_p} \; u$$

donde $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \ldots\ldots \leq n_p$ siendo n_i el número del fraccionamiento, en partes iguales, realizado sobre cada una de las partes que han sobrado en la fase i-1 del reparto.

Existe abundante literatura acerca de la manera como los escribas del Antiguo Egipto utilizan fracciones unitarias para representar los resultados de repartos igualitarios de cantidades de magnitudes diversas (Gairín, 2001; Gillings, 1982; Maza, 2003). La fracción como suma de fracciones unitarias que hemos descrito guarda bastantes similitudes con las técnicas de reparto que utilizaban los escribas egipcios.

c) Notación Decimal

El resultado del reparto se expresa mediante la Representación Polinómica Decimal:

$$a_0 + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_s\left[\frac{1}{10^r}\right] + \ldots\; u$$

o la Notación Decimal $a_{0,}\ a_1\ldots..\ a_r \ldots\ u$

donde los coeficientes $a_1, a_2, .., a_r$ son números naturales y $0 \leq a_1, a_2, .., a_r \leq 9$

Las características semánticas y sintácticas de estos dos sistemas de representación se han descrito en el apartado II.5.1.3.2 cuando ambas representaciones surgen asociadas a una técnica de medida directa. Sin embargo, existe una variación en el caso de la acción de reparto: la Representación Polinómica Decimal y la Notación Decimal puede ser finita o infinita. El proceso de reparto, a diferencia del de medida, puede ser efectuado sin necesidad de realizar manipulaciones con objetos tangibles y, por lo tanto, la técnica del reparto puede ser evocada. El hecho de que la técnica del reparto esté vinculada a un proceso mental que además es algoritmizable posibilita la realización del reparto en infinitas fases y la aparición de Notación Decimal con infinitas cifras que se repiten periódicamente.

No hemos podido constatar esta técnica del reparto igualitario en los libros de historia de las Matemáticas consultados. Posiblemente, se repiten aquí los mismos motivos por los que nos fue imposible constatar la técnica de medida con subunidades sistemáticas decimales de la unidad: el número decimal se consolida en un período histórico tardío en el que las técnicas de medida y de reparto igualitario se consideran evidentes y, por lo tanto, los investigadores en historia de las Matemáticas obvian la descripción y la ubicación temporal del uso de estas técnicas.

II.7. Significado de razón

Entendemos que las situaciones problemáticas de razón cumplen las dos condiciones definitorias siguientes:

1º Una cantidad de magnitud, au_1, de la magnitud M_1 se mide con la unidad de medida, u_2, de otra cantidad de magnitud, $b\,u_2$, de la magnitud M_2.

La fracción como razón $\frac{a}{b}\,u_1/u_2$ expresa la medida de la cantidad au_1 cuando se considera como unidad de medida (u_2), que es la unidad de la magnitud M_2, es decir, expresa la medida de au_1 por unidad de medida (u_2) de la cantidad bu_2.

2º Las magnitudes implicadas cumplen la condición de proporcionalidad, es decir, que una variación multiplicativa en una de las cantidades (au_1 de la magnitud M_1 ó bu_2 de la magnitud M_2) produce el mismo efecto en la otra cantidad. Es decir, las magnitudes implicadas sean proporcionales.

Estas dos características definen los fenómenos asociados al significado de razón. La medida o comparación multiplicativa que existe entre las cantidades au_1 y bu_2 se verbaliza del siguiente modo:

"*por cada a unidades de M_1 hay b unidades de M_2*".

II.7.1. Campo de problemas

El campo de problemas que organiza la razón es muy amplio. Así, las magnitudes físicas, como la velocidad, densidad o caudal; los indicadores sociales como la densidad de población, el consumo medio por habitante; las situaciones de cambio o trueque; y las proporciones entre mezclas son razones entre magnitudes distintas que modelizan fenómenos cotidianos. Otras razones establecen comparaciones entre magnitudes iguales como es el caso de la escala asociada a la semejanza geométrica, la probabilidad, el porcentaje de aumento o descuento de precios y las situaciones de mezcla con objetos discretos medibles mediante la magnitud cardinalidad que Freudenthal (1983) denomina como partición de un "todo". Con objeto de ejemplificar el significado de razón vamos a enunciar un problema de este campo:

"Una receta de cocina recomienda mezclar 5 kilos de harina con 4 litros de agua para hacer masa de rebozar. Si sólo se dispone de un litro de agua, ¿cuántos kilos de harina hay que mezclar?"

II.7.2. Acciones implicadas en la resolución del problema

Para resolver el problema desde el significado de razón debemos comprobar si se cumple la condición de proporcionalidad, es decir, si tiene sentido suponer que las cantidades se mezclan en la misma proporción. Después, una vez verificada la condición de proporcionalidad, se trata de medir los kilos de harina que se mezclan con la unidad de la otra magnitud: un litro de agua.

La fracción $\frac{5}{4}$ kilos de harina/1 litro de agua aparece como solución del problema que se expresa del siguiente modo:

"hay que mezclar $\frac{5}{4}$ kilos de harina por cada litro de agua".

El número decimal es otra forma de expresar la medida:

1´25 kilos/1 litro de agua.

También, tiene sentido, utilizar la notación porcentual 125% para indicar la proporción entre harina y agua, es decir, que hay que mezclar 125 kilos de harina por cada 100 litros de agua.

II.7.3. Sistemas de representación asociados

a) Notación fraccionaria

La fracción es el sistema de representación más habitual para comunicar ideas de razón.

En este caso la fracción $$\frac{a}{b}\, u_1/u_2$$ se conceptúa como la medida de la cantidad $a\ u_1$ cuando se considera como unidad de medida (u_2), que es la unidad con la que se está medida la cantidad $b\ u_2$

Habitualmente este tipo de medida o relación comparativa entre las cantidades de magnitud $a\ u_1$ y $b\ u_2$ se verbaliza del siguiente modo:

"por cada a unidades de M_1 hay b unidades de M_2"

La sintaxis de este sistema de representación tiene la ventaja de que hace explícitas de las cantidades de magnitud que se comparan.

La fracción con el significado de razón está constatada históricamente al comienzo del segundo milenio. En efecto, en las tablillas económicas encontradas en Asiria y en Babilonia fechadas en esa época aparecen fracciones con el significado de razón que informan de diversas actividades comerciales como cambios o trueques, y actividades financieras como préstamos e intereses (Michel, 1992, pp. 87). En la antigua civilización egipcia la fracción aparece como solución de problemas de proporcionalidad entre el número de hogazas de pan y la "fuerza" o *"pesu"* del pan es la magnitud recíproca de la densidad del grano, es decir, el cociente del número de hogazas entre la cantidad de grano empleado (Boyer, 1986; pp. 36)

b) Notación porcentual

Las situaciones problemáticas que organiza la razón hacen emerger otros sistemas de representación del número racional positivo como el porcentaje. La sintaxis de la representación porcentual presenta variaciones importantes con respecto a la representación fraccionaria: el porcentaje no explicita las cantidades que se comparan, indica la comparación multiplicativa entre una cantidad y 100 unidades de la unidad de medida con la que se mide la otra cantidad.

La representación porcentual ($a\%\ u_1/u_2$) es un número medida que expresa la medida o comparación multiplicativa de una cantidad de magnitud cuando se toma como unidad de medida 100 unidades de otra o de la misma magnitud.

El porcentaje es una notación que describe la proporcionalidad entre cantidades de magnitud de modo único, conciso, compatible con el orden de los decimales y que permite evaluar fácilmente la cantidad de magnitud.

Además,

- *a* puede ser un número entero o una expresión decimal.
- *100%* u_1/u_2 coincide con la unidad u_1/u_2 de la magnitud intensiva M_1/M_2.
- *a* puede ser mayor, igual o menor que *100.*

La revisión histórica del porcentaje que llevan a cabo Parker y Leinhardt (1995) aporta evidencias del uso de proporciones con la centena en las prácticas comerciales de la antigua Babilonia, India y China. Estas autoras sitúan la aparición del signo del porcentaje en un manuscrito comercial italiano del siglo XVI que se emplea para expresar la comparación relativa de beneficios. Posteriormente, en el siglo XIX, el uso del signo del porcentaje se extiende ampliamente para prácticas no comerciales.

c) Notación decimal

Las situaciones problemáticas que organiza la razón pueden ser cuantificadas por la notación decimal. En tal caso, la expresión decimal indica la medida de una cantidad de magnitud cuando se mide con la unidad de medida de otra o de la misma magnitud.

El número decimal $a_0, a_1 .... a_r$ u_1/u_2 tiene el significado de "tanto por uno"; es decir, la medida de una cantidad de la magnitud M_1 (medida con la unidad u_1) que se corresponde con la unidad, u_2, de otra magnitud M_2 Las magnitudes pueden ser iguales o diferentes, y en el caso de ser iguales pueden estar medidas con la misma o con distinta unidad.

II.8. Significado de operador

Desde este significado el número racional positivo se conceptúa como un operador externo que dota al semigrupo ordenado de las magnitudes absolutas de la estructura de semimódulo. Gracias a este significado, la multiplicación de un números racional positivo, que actúa como operador, por otro número racional positivo que expresa la medida de una cantidad de magnitud, modeliza las situaciones de "parte de parte" que se ocupan de cuantificar la medida de las cantidades de magnitud que sufren alguna transformación.

De esta forma, las situaciones de "parte de parte" quedan modelizadas mediante la operación externa de un número racional positivo sobre el conjunto de las magnitudes absolutas M:

$$Q^+ x\, M \longrightarrow M$$

tal que $$q\ x\ c_i = c_f$$

siendo q el operador que transforma la cantidad de magnitud c_i en la cantidad c_f de la misma magnitud.

La fundamentación de los conceptos de magnitud y medida fue tardía, concluyó a principios del siglo pasado, lo que muestra a las claras la dificultad de estos conceptos. El origen del estudio de la medida hay que situarlo en concepto de cantidad aportado por Eudoxo, recogido en los Elementos de Euclides; pero los primeros pasos para la definición formal de estas nociones se dio en los siglos XVII y XVIII con el descubrimiento del cálculo infinitesimal y la introducción del concepto de función. La construcción formal de los sistemas numéricos que se aborda en el siglo XIX con los trabajos de Weierstrass, Dedekind y Cantor, y la definición de conjunto medible dada por Lebesgue son los pilares de los fundamentos teóricos de estos conceptos clásicos de magnitud y medida que constituyen el punto de partida de una rama del análisis matemático denominada teoría de la medida que estudia las formas lineales sobre ciertos espacios vectoriales de funciones numéricas.

La formalización de concepto de magnitud absoluta (M, +, ≤, $\cdot_{R^+}$) como semimódulo ordenado sobre el semianillo formado por los números reales positivos multiplicables por todos los elementos de la magnitud permite conceptuar la medida como un isomorfismo entre la magnitud absoluta y el subconjunto de los números reales positivos multiplicables por todos los elementos de la magnitud. El hecho de que el isomorfismo sea compatible con las operaciones definidas en la magnitud y con la relación de orden muestra una característica peculiar de la magnitud medible: la existencia de un comportamiento similar entre las operaciones con cantidades de magnitud y las operaciones con los números que expresan el resultado de la medida. Esta fundamentación teórica permite modelizar las situaciones "de parte de parte" mediante la operación externa de un número racional positivo sobre otro número racional que expresa la medida de una cantidad de magnitud y asignar un significado a la multiplicación de números racionales positivos.

En el ámbito de la enseñanza obligatoria el significado de operador se adapta a las exigencias de la transmisión de las ideas matemáticas, en el sentido que indica El Diccionario de Matemáticas:

> *En la enseñanza elemental, se da a este término el sentido intuitivo de "máquina" para insistir en la idea de transformación, por ejemplo, el "operador multiplica por 4" (*Bouvier y George,1984, pp. 590)

En estas condiciones, la resolución de problemas contextualizados para generar el aprendizaje del número racional con el significado de operador plantea una dificultad que no se da en la enseñanza de los significados de medida y cociente: la exigencia de que el aprendiz disponga de conocimientos previos del numero racional positivo como función de cambio. La gestión del significado de operador plantea dificultades conceptuales derivadas del carácter funcional del número que modeliza la transformación.

II.8.1. Campo de problemas

El número racional positivo como operador organiza situaciones contextualizadas en las que la medida de una cantidad sufre una transformación. Estas situaciones son modelizadas por la multiplicación y división de números racionales positivos. Los enunciados de los siguientes problemas ejemplifican una situación "de parte de parte" de una magnitud continua que resuelve, en el caso del problema nº 1, la multiplicación y, en los otros dos problemas, la división de números racionales positivos:

Problema nº 1: "*Si bebes los 5/6 de una botella de agua de 3/2 de litro, ¿cuántos litros de agua has bebido?*" Problema nº 2: "*Dispones de una botella de agua que está llena. Si bebes los 5/6 de la capacidad de la botella has bebido 5/4 litros. ¿Qué capacidad tenía la botella de agua?*" Problema nº 3 *"De una botella de agua que contiene 3/2 litros bebes 5/4 litros. ¿Qué parte de la capacidad de la botella has bebido?"*

II.8.2. Acciones implicadas en la resolución del problema

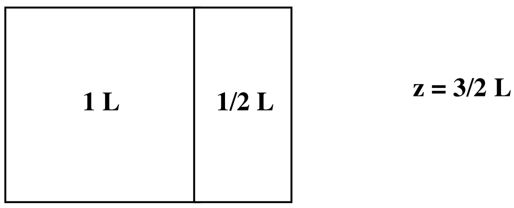
II.8.2.1. Magnitudes continuas

II.8.2.1.1. Multiplicación de fracciones

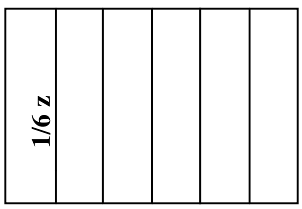
En el problema nº 1, la fracción 5/6 no es una cantidad de magnitud, es un operador que modifica una cantidad de magnitud: 3/2 de litro. La multiplicación de fracciones aparece como la operación canónica de resuelve este problema; sin embargo éste admite otras estrategias de resolución al margen de la aplicación del algoritmos de la multiplicación.

a) Cambio de unidad

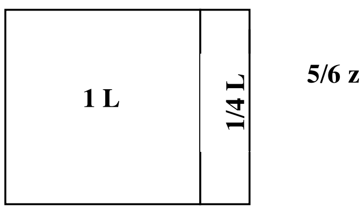
Consiste en realizar el cambio de unidad que plantea la situación con la ayuda de gráficos bidimensionales. Representamos gráficamente la unidad de medida, 1 litro (L), y consideramos una nueva unidad $z = \frac{3}{2}L$



Debemos calcular $\frac{5}{6}z$. La evaluación semántica de $\frac{5}{6}z$ obliga a fraccionar la unidad (z) en 6 partes iguales:



Y, después, reiterar 5 veces la capacidad $\frac{1}{6}z$, para obtener $\frac{5}{6}z$:



Si medimos la cantidad $\frac{5}{6}z$ considerando el litro como unidad, obtenemos que:

$$\frac{5}{6}z = \frac{5}{6}de\left(\frac{3}{2}L\right) = \frac{5}{4}L$$

b) Composición de funciones

Consiste en simbolizar las acciones implicadas en el cambio de unidades que se han descrito en el apartado anterior y que se concretan en una doble actuación:

1º) dividir $\frac{3}{2}L$ en 6 partes iguales que es el denominador del operador $\frac{5}{6}$, y

2º) multiplicar el resultado por 5, que es el numerador del operador $\frac{5}{6}$

$$\frac{5}{6} x \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2} : 6\right) x\, 5 = \frac{1}{4} x\, 5 = \frac{5}{4} \quad litros$$

Cabe indicar que el resultado no varía si se multiplica primero la cantidad por el numerador y se divide, después, por el denominador del operador.

La aplicación de la regla simbólica de actuación del operador facilita el cálculo de la multiplicación de fracciones de modo que el procedimiento se torna más eficaz que la representación gráfica del cambio de unidades de medida. Ahora bien, el significado lo establece la comprensión de la función de cambio de unidad, al margen de la correcta aplicación de la regla de actuación.

II.8.2.1.2. División de fracciones

El problema nº 2 es uno de los problemas duales del nº 1 pues indaga por la capacidad inicial de una botella (C) de la que se sabe que se han consumido los 5/6 de su capacidad y que esta cantidad es 5/4 litros. La división de fracciones es la operación aritmética que resuelve este problema, que denominamos, de ***Cantidad inicial desconocida,*** aunque puede ser abordado desde otras técnicas.

a) Cambio de unidad

Si llamamos C a la capacidad inicial de la botella de agua:

$$\frac{5}{6} x\ C = \frac{5}{4} litros$$

La evaluación semántica de la fracción $\frac{5}{6}C$ como 5 subunidades de capacidad $\frac{1}{6}C$ permite establecer la igualdad:

$$\frac{1}{6}C = \frac{1}{4} litros$$

Y, por lo tanto,

$$C = \frac{6}{6}C = \frac{6}{4} litros = \frac{3}{2} litros$$

b) Composición de funciones

Una vez que se ha identificado la estructura multiplicativa del problema:

$$\frac{5}{6} x\ C = \frac{5}{4} litros$$

tiene sentido ponen en juego las propiedades multiplicativas del operador, en particular, la existencia del operador inverso:

$$\frac{6}{5} x \left(\frac{5}{6} x\ C \right) = \frac{6}{5} x \frac{5}{4} litros$$

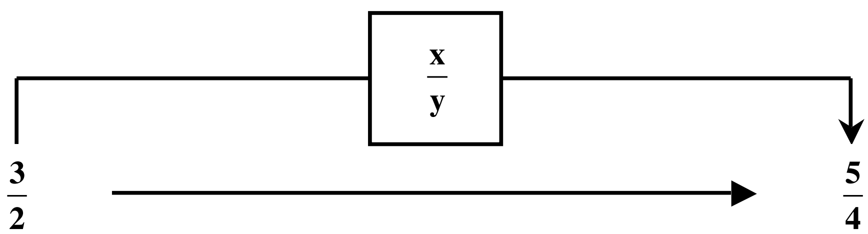
$$\left(\frac{6}{5} x \frac{5}{6} \right) x\ C = \frac{6}{5} x \frac{5}{4} litros$$

$$C = \frac{6}{5} x \frac{5}{4} litros = \frac{3}{2} litros$$

La aplicación del operador inverso resuelve el problema y justifica la introducción del algoritmo para la división de fracciones mediante el algoritmo de multiplicación:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} x \frac{d}{c}$$

El problema nº 3 es dual del nº 1. En este caso la incógnita del problema es el operador, es decir, tenemos que encontrar la función de cambio que nos transforma la cantidad total de agua (3/2 de litro) en otra cantidad (5/4 de litro). La primera cantidad expresa la medida de la capacidad de la botella y la segunda la del agua que se ha bebido. Se trata, por tanto, de los problemas que denominamos de ***Transformación desconocida***



Se trata de encontrar el operador $\frac{x}{y}$ que transforma $\frac{3}{2}L$ en $\frac{5}{4}L$, es decir:

$$\frac{x}{y} de \frac{3}{2} L = \frac{5}{4} L$$

Una de las posibles estrategias consiste en expresar la medida de las dos cantidades con la misma subunidad:

$$\frac{3}{2} L = \frac{6}{4} L$$

Ahora, la búsqueda del operador $\frac{x}{y}$ consiste en encontrar la fracción que cumple:

$$\frac{x}{y} de \frac{6}{4} = \frac{5}{4}$$

La fracción transforma 6 subunidades de $\frac{1}{4}L$ en 5 subunidades de $\frac{1}{4}L$ es $\frac{5}{6}$, porque es el operador que transforma un número de subunidades en otro número.

II.8.2.2. Magnitudes discretas

El significado de operador que actúa sobre magnitudes discretas es similar al del operador que actúa sobre magnitudes continuas. Ahora bien, las peculiaridades de las magnitudes discretas obliga a que el denominador del operador sea un divisor del cardinal del conjunto que actúa como unidad. En cualquier otro caso, la transformación carece de sentido pues los objetos resultantes no son completos; aparecen partes de los objetos.

II.8.3. Sistemas de representación asociados

Al resolver las situaciones problemáticas de "parte de parte" que resuelve la multiplicación o división de números raciones positivos observamos que el número racional que modifica la cantidad de magnitud admite la representación fraccionaria, porcentual o decimal.

Con cualquiera de los sistemas de representación, el significado del número racional como operador enfatiza la estructura multiplicativa del número racional positivo porque su génesis está vinculada a la multiplicación y división de números racionales.

a) Notación fraccionaria

Las matemáticas son construcciones sociales que han evolucionado para dar respuesta adaptada a problemas generados por necesidades humanas, a pesar de la escasez de elementos teóricos disponibles. Así, culturas antiguas, como la egipcia, han abordado y resuelto situaciones problemáticas de "de parte de parte" en momentos históricos muy anteriores a la formalización de las estructuras numéricas y del concepto de magnitud. Por ejemplo, Benoit (1992, pp. 36) informa del problema 67 del Papiro de Rhind, legado importante de la civilización egipcia fechado en 1550 a C. que transcribimos a continuación:

> *"Un cierto pastor llega con ocasión de los impuestos sobre el ganado con 70 bueyes. El encargado de hacer el censo de rebaño dice al pastor: - Son muy pocos los bueyes marcados que ha traído. ¿Cuál es el número habitual de sus bueyes marcados?- El pastor responde: -Yo traigo los 2/3 de 1/3 de los bueyes marcados. Calcule por mí y me encontrará en regla-"*

La fracción es el sistema de representación más representativo de este significado del número racional positivo.

La fracción se conceptúa como una función que se aplica a un número o una cantidad de magnitud acuerdo con las instrucciones siguientes: 1º multiplicar el número o cantidad por el numerador y, después, dividir el resultado por el denominador del operador, o bien 2º dividir el número o cantidad por el denominador y, después, multiplicar el resultado por el numerador del operador.

Cuando la representación fraccionaria aparece como resultado de la división de números racionales en contextos de "parte de parte", ésta admite una segunda interpretación que la vincula con el significado de razón:

La fracción expresa la medida entre dos cantidades de la misma magnitud.

Además,

- $\frac{a}{b}$ carece de unidades, es un número no medida, porque el operador surge de la comparación multiplicativa de dos cantidades de la misma magnitud.
- b no puede ser cero porque carece de sentido dividir por cero.
- $\frac{a}{a}$ es el operador identidad que deja invariante la cantidad sobre la que éste se aplica.
- $\frac{b}{a}$ es el operador inverso de $\frac{a}{b}$ y tiene el significado de deshacer la transformación realizada por el operador $\frac{a}{b}$
- a puede ser mayor, igual o menor que b. Cuando el operador actúa sobre cantidades de magnitud hay que estudiar el contexto para determinar si existen restricciones en la relación de orden entre numerador y el denominador.

b) Notación porcentual

La representación porcentual modeliza situaciones problemáticas de "parte de parte" que resuelve la multiplicación de un porcentaje por un número racional positivo que expresa una cantidad de magnitud.

La representación porcentual, $a\%$, se interpreta como una función que se aplica a una cantidad de magnitud o a un número de acuerdo con las instrucciones siguientes: 1º multiplicar el número o cantidad por a y, después, dividir el resultado por 100, o bien 2º dividir el número o cantidad por 100 y, después, multiplicar el resultado por a.

Cuando la representación porcentual aparece como resultado de la división de números racionales en contextos de "parte de parte", ésta admite una segunda interpretación que la vincula con el significado de razón:

El porcentaje expresa la medida entre una cantidad y 100 unidades de la misma cantidad magnitud.

Además,

- *a* puede ser un número entero o una expresión decimal.
- *a* carece de unidades, es un número no medida, porque el operador surge de la comparación multiplicativa de dos cantidades de la misma magnitud.
- *100%* es el operador identidad que deja invariante la cantidad sobre la que éste se aplica.
- Desde la notación porcentual resulta menos evidente la obtención del operador inverso que en el caso de la notación fraccionaria.
- *a* puede ser mayor, igual o menor que *100.*

El uso funcional del porcentaje aparece en épocas históricas tempranas para satisfacer numerosas situaciones prácticas. Así, Smith (1953; pp. 247) informa que el emperador romano Augustus impuso un impuesto sobre todas las mercancías vendidas en la subasta cuya tarifa era 1/100 del dinero obtenido en la venta (centesima rerum venalium). Históricamente, el uso funcional del porcentaje precede al uso descriptivo.

c) Notación decimal

La notación decimal modeliza situaciones problemáticas de "parte de parte" que resuelve la multiplicación de un operador, cuya expresión decimal se conoce, por un número racional positivo que expresa una cantidad de magnitud.

La expresión decimal $a_{0,}\ a_{1}....\ a_{r}$ es un número no medida que tiene el significado de un número racional que multiplica a otro numero racional. Este último número expresa la medida de un cantidad de magnitud que es modificada por la expresión decimal.

La notación decimal para expresar un operador tiene un uso más restringido que la fracción o el porcentaje. La utilización de este sistema de representación aparece en un período histórico tardío cuando se consolida el sistema de numeración decimal; y esta circunstancia dificulta situar el momento histórico en el que la expresión decimal se usa con el significado de operador.

II.9. Significado de cociente indicado

La génesis de este significado se sitúa en el desarrollo interno de las Matemáticas: la necesidad de encontrar la menor estructura aritmética que extienda al conjunto de los números naturales y que haga que la división de naturales sea una operación interna:

$$a : b = q$$

siendo q un elemento de un conjunto numérico que sea estable con las operaciones de números naturales.

En estas condiciones q debe ser de la forma $q = \frac{a}{b}$ *para que se cumpla que* $a = q.b$

II.9.1. Campo de problemas

El problema que organiza el significado de cociente indicado es teórico y la solución de este problema supone conceptuar la división de naturales como un elemento del conjunto de los numero racionales positivos y tiene implicaciones más profundas que la constatación del convenio: $\boldsymbol{a : b = \frac{a}{b}}$

En consecuencia, el significado de cociente indicado no posee un campo de problemas *contextualizados* que haga surgir la representación fraccionaria como solución adaptada a los problemas del campo. Mostramos, a continuación, un problema formal, no contextualizado, cuya solución hace emerger el número racional positivo:

¿Qué número es el resultado de la división de 5 entre 4?

A partir de este significado de la fracción como el resto de una división de naturales que no se puede terminar diferentes culturas han desarrollado una aritmética del número racional positivo con características comunes que pueden ser estudiadas en los textos chinos a partir del primer siglo, en los textos indios a partir del siglo V, y en los textos árabes a partir del siglo IX. Entre las características comunes destaca la asunción del sistema de representación de la fracción como pareja (numerador, denominador) o terna (cociente, divisor, resto) y la existencia de una aritmética para estas notaciones simbólicas.

Chemla (1992) informa de diversos tratados de aritmética escritos en China, en los primeros siglos de nuestra era, que conceptúan la fracción como cociente indicado. La aritmética "*Nueve capítulos sobre procedimientos matemáticos*" del siglo I recoge esta interpretación de la fracción y, posteriormente, entre los siglos IV y V, en la "*Matemática clásica de Sunzi*" podemos leer:

> *"Cuando el dividendo tiene un resto, con la ayuda del divisor se nombra: el divisor se coloca como denominador, el resto del dividendo como numerador"* (Chemla, 1992; pp. 191)

II.9.2. Acciones implicadas en la resolución del problema

En este problema no hay objetos físicos concretos o evocados que induzcan al resolutor a utilizar estrategias informales. El resolutor que conozca la división de números naturales comprobará que no hay ningún número natural que cumpla las condiciones del problema y conjeturará que la solución debe ser un número mayor que 1 y menor que 2. Ahora bien, si el resolutor desconoce la notación fracción será incapaz de resolver este problema, porque aunque escriba correctamente la división entera:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \cline{2-2} \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{array}$$

difícilmente podrá expresar el cociente de la división como:

$$\boldsymbol{5 : 4 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}}$$

El resolutor que se enfrente al problema solo podrá expresar, de forma correcta, la fracción que expresa el cociente indicado de la fracción si conoce previamente el convenio que liga el dividendo con el numerador de la fracción y el divisor con el denominador.

II.9.3. Sistemas de representación asociados

La fracción es el único sistema de representación del número racional asociado al significado de cociente indicado.

Desde este significado la fracción $\frac{a}{b}$ se conceptúa como la división del número natural *a* entre el número natural *b*, siendo *b* no nulo. El numerador de la fracción coincide con el dividendo de la división, y el denominador de la fracción coincide con el divisor de la división.

Además:

- $\frac{a}{b}$ carece de unidades, es un número no medida, porque los términos de la división son números descontextualizados.
- $\frac{a}{b}$ es un número natural en el caso particular de que el dividendo sea un múltiplo del divisor.
- *b* no es cero porque no tiene sentido dividir por cero.
- No hay ninguna restricción entre los términos de la fracción: *a* puede ser mayor, igual o menor que *b*.

II.10. Resultados del análisis fenomenológico histórico

Hemos abordado el estudio de los significados del número racional positivo con dos intenciones:

- Disponer de una base teórica sobre la que elaborar modelos de aprendizaje adecuados para enseñar la fracción y el número decimal sustentados en significados que respeten la génesis histórica del número racional, y
- Revisar la clasificación tradicional de los significados del número racional establecida por Kieren (1976, 1980) y posteriormente modificada por Behr y sus colaboradores (1983, 1992). Se trata de una clasificación formulada desde la psicología matemática, lo que provoca que muchos investigadores interpreten de diferentes maneras un mismo significado, y nuestra intención es realizarla desde la Didáctica de la Matemática.

Teniendo en cuenta estas intenciones, el análisis fenomenológico histórico del número racional positivo aporta los siguientes resultados:

1. Identificamos cinco significados del número racional positivo: medida, cociente partitivo, razón, operador y cociente indicado. Los tres primeros significados surgen para resolver problemas asociados a necesidades humanas y sociales, mientras que los dos últimos tienen su origen en el desarrollo interno de las matemáticas.

A modo de resumen, mostramos en el siguiente cuadro las características de los cinco significados que pertenecen a la fenomenología histórica del número racional positivo:

	Significado	*Acción*	*Naturaleza de la acción*
asociados al problema de la medida	*Medida directa*	Medir	Medida de una magnitud, con objetos tangibles
	Cociente partitivo	Reparto igualitario y medir	Repartir, de forma igualitaria, una cantidad de magnitud continua. La acción puede ser física, gráfica o mental
	Razón	Medir una cantidad con la unidad de otra magnitud	Idea mental, sin soporte físico, para construir la razón o magnitud intensiva, si se verifica la condición de proporcionalidad
evolución de las matemáticas	*Operador*	uso funcional: operación simbólica uso descriptivo: como razón	Acción mental con objetos matemáticos contextualizados o formales
	Cociente indicado	Operación simbólica: ecuación algebraica	Acción mental con objetos matemáticos formales

Cuadro II.2: Significados que pertenecen a la fenomenología histórica del número racional positivo

Los tres significados que pertenecen a la fenomenología histórica del número racional positivo involucran acciones de medida. Ahora bien, estas acciones de medida son de naturaleza muy diferente. Así, mientras que la gestión de la medida directa exige efectuar acciones físicas con objetos tangibles, el cociente partitivo incorpora acciones que pueden ser realizadas físicamente o bien pueden ser evocadas mentalmente; sin embargo, el significado de razón es un constructo mental que obliga al individuo a abordar la tarea sin el apoyo de materiales concretos que representen la razón.

Los significados de operador y de cociente indicado presentan mayor grado de abstracción que los significados asociados a la medida porque están directamente relacionados con la estructura algebraica multiplicativa del número racional positivo. El uso funcional del número racional como operador modeliza, mediante la multiplicación de racionales, determinadas situaciones problemáticas. El significado de cociente indicado dota al conjunto de los racionales positivos de la estructura algebraica mínima que hace interna la división de racionales y que, además, incluye al conjunto de los naturales como subconjunto suyo.

2. La clasificación de los significados que hemos elaborado presenta dos variaciones importantes con respecto a la clasificación propuesta por Kieren (1976, 1980) y modificada posteriormente por Behr y sus colaboradores (1983, 1992):

a) El cociente partitivo y el cociente indicado son dos significados diferentes del número racional porque provienen de fenomenologías distintas. Mientras el primero de ellos aborda un problema del mundo sensible, el reparto igualitario, que resolvió la antigua civilización egipcia a través de la suma de fracciones unitarias; el segundo de ellos tiene su origen en necesidades internas de las matemáticas como la búsqueda de una estructura numérica que garantice la existencia de elemento simétrico de cualquier elemento, no nulo, para la operación multiplicación.

b) La relación parte-todo no pertenece a la fenomenología histórica de la fracción, a pesar de que se trata de un significado que contemplan las clasificaciones tradicionales de los significados del número racional positivo. En el siguiente apartado vamos a estudiar este significado y, en el apartado II.12, abordaremos el análisis fenomenológico didáctico que nos va a permitir obtener resultados sobre la génesis, evolución y estado actual de la relación parte-todo y de los significados que pertenecen a la fenomenología histórica en la enseñanza del número racional postivo a lo largo del último siglo y medio.

II.11. Significado de relación parte-todo

Después de efectuar el análisis fenomenológico histórico detectamos la existencia de un nuevo significado que recogen investigadores como Kieren, Freudenthal o Behr, que recibe el nombre de relación parte-todo, y que no aparece en nuestro análisis fenomenológico histórico.

Por otra parte, este significado tiene gran influencia en la enseñanza del número racional positivo. En efecto, en la actualidad, la relación parte-todo es el significado prioritario en la enseñanza del número racional positivo en España (Morcote y Flores, 2001) y en el plan de estudios de los E.E.U.U. (Moseley, 2005). En España, la administración educativa propone, a través del Real Decreto 115/2004 de 23 de enero que establece el currículo en Educación Primaria (B.O.E., 33 de 7 de febrero de 2004, pp.5384), como contenido para el Segundo Ciclo de Educación Primaria*: la fracción como relación entre las partes y el todo*.

II.11.1. Campo de problemas

Nos servimos de la definición que aportan Post, Behr y Lesh (1982, pp. 62):

> *La interpretación parte-todo del número racional es representada en ambas situaciones continuas (longitud, área y volumen) y discretas (recuento). Este subconstructo depende directamente de la habilidad para fraccionar cada cantidad continua o conjunto de objetos discretos en subpartes o subconjuntos de igual tamaño.*
>
> *Parte-todo solo es aplicado cuando dos conjuntos, A y B, son comparados y el conjunto A es un subconjunto el conjunto B. Además, el siguiente criterio se satisface:*

1. *El conjunto A ha sido dividido en partes o subconjuntos iguales (en las fracciones unitarias esto es una parte simple).*
2. *El conjunto B ha sido dividido en partes o subconjuntos iguales.*
3. *Cada parte individual o subconjunto de A es equivalente a cada parte individual o subconjunto de B.*

Los sistemas educativos utilizan la relación parte-todo para introducir la fracción. Así, en los momentos iniciales de la enseñanza de la fracción de numerosos países es habitual plantear a los escolares problemas, como el propone Mack (1993; pp. 98):

Problema nº 1; *¿Cuánto representa la parte sombreada?*

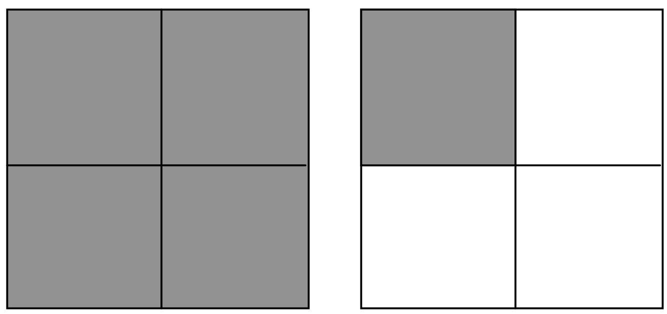


Gráfico II.3: Tarea típica formulada desde la relación parte-todo

II.11.2. Acciones implicadas en la resolución del problema

La resolución de este tipo de tareas exige del escolar realizar transferencias entre representaciones gráficas y representaciones simbólicas. Para ello, debe actuar del siguiente modo:

a) Interpretar, en la representación gráfica, aquellos aspectos que representan el "todo" y los que representan las partes destacadas.

b) Realizar un doble recuento: el de las partes iguales que forman el "todo" y el de las partes destacadas.

c) Representar, de forma simbólica, el resultado de los dos recuentos: colocar debajo de una raya el resultado de contar el "todo", y escribir, encima de la raya, el resultado de contar las partes destacados.

Desde la relación parte-todo la fracción impropia, 5/4, tiene un significado impreciso que proviene de la indefinición del "todo". En estas condiciones, para asignarle significado se suele argumentar del siguiente modo: se ha tomado un "todo" y del segundo "todo" se ha fraccionado en cuatro partes iguales y se ha tomado una de ellas.

En el caso de la fracción propia, como por ejemplo, 4/5, el significado se percibe con mayor nitidez: de un "todo" que se fracciona en 5 partes iguales se toman 4 de esas partes.

II.11.3. Sistemas de representación asociados

La fracción se interpreta como la *relación entre la parte y el todo,* es decir, como una comparación multiplicativa entre un todo y un subconjunto suyo.

La fracción describe una situación estática entre dos cardinales o dos figuras geométricas.

El denominador de la fracción $\frac{a}{b}$ indica el número de partes iguales en el que se fracciona el "todo" o unidad; y el numerador el número de partes iguales que se toman.

Además:

- $\frac{a}{b}$ carece de unidades, es un número no medida.
- $\frac{a}{b}$ es siempre una fracción propia porque la definición de relación parte-todo impide tomar más partes de las que hay en el "todo" o unidad.
- La fracción como relación parte-todo no expresa el resultado de una medida porque la fracción carece de unidad, ni tampoco expresa una razón porque en las tareas formuladas desde la relación parte-todo no se pretende construir una nueva magnitud.

II.11.4. La relación parte-todo es un significado diferenciado

La relación parte-todo presenta características diferenciadas de los significados que pertenecen a la fenomenología histórica del número racional positivo. Para ejemplificar nuestras argumentaciones nos servimos del problema nº 1 enunciado en II.11.1.

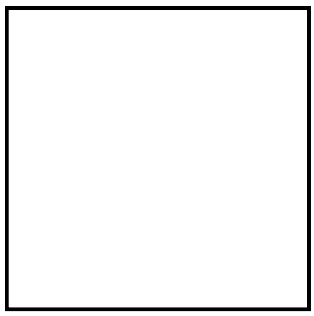
II.11.4.1. La relación parte-todo no tiene significado de medida

No es infrecuente que se identifiquen los significados de parte-todo y de medida. Por ejemplo, Behr (1983; pp. 98) considera que "*el subconstructo medida del número racional representa una reconceptualización de la noción parte-todo de la fracción*".

Consideramos conveniente separar ambos significados. Para ello reformulamos el problema anterior en un contexto de medida directa de cantidades de superficie. El resolutor recibe una unidad de medida, y una cartulina rectangular que posee la misma cantidad de superficie que la dibujada en el problema:

Problema nº 2:

Considerando como unidad de superficie, u, la de la siguiente figura:



calcula la cantidad de superficie de la siguiente figura:

Gráfico II.4: Tarea formulada desde el significado de medida

Si analizamos las acciones que un resolutor hipotético realiza cuando resuelve los problemas nº 1 y nº 2 que están planteados desde la relación parte-todo y desde la medida directa respectivamente, observamos para resolver el problema nº 1 existe un procedimiento completamente pautado, mientras que la resolución del problema nº 2 exige que el resolutor realice un proceso de deliberación y la consiguiente toma de decisiones.

La resolución del problema nº 2 exige del resolutor la siguiente toma de decisiones:

1. Es evidente que la superficie a medir contiene una vez la unidad de medida u, pero queda por medir la cantidad sobrante; por tanto, hay que decidir sobre el tamaño de una nueva unidad de medida que, necesariamente, ha de ser una parte alícuota de la unidad u. Pero, ¿cuál es esa parte o subunidad?, ¿la mitad de u, la tercera parte de u, ..?; no queda otra opción que construir tal subunidad y comprobar que está contenida un número entero de veces en la cantidad de superficie a medir.

2. Una vez finalizado el proceso, hay que expresar el resultado de la medida. Y este resultado dependerá de la técnica utilizada en el proceso de medida: habrá que mencionar la subunidad o subunidades utilizadas y el tamaño de éstas respecto a la unidad u. En consecuencia, pueden aparecer distintas formas de expresar el resultado de la medida, como:

$$1 + 1/4\ u,\ 5/4\ u,\ 1 + 2/8\ u,\ 10/8\ u,\ \ldots$$

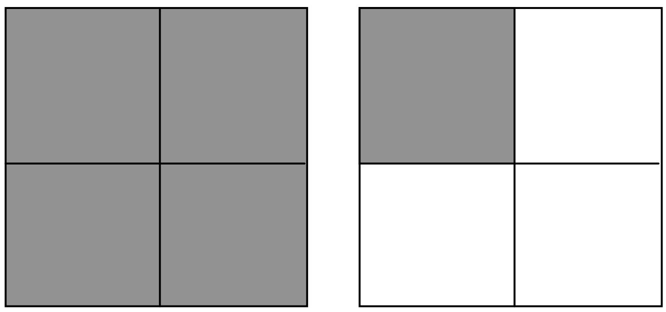
Cualquiera de estas representaciones fraccionarias expresan la medida de la cantidad de superficie del rectángulo. La fracción 5/4 *u* indica la medida de la cantidad de superficie que se percibe descompuesta como 5 subunidades de superficie 1/4 *u* cada una.

A la vista de estas consideraciones resulta evidente que el significado de medida es muy diferente de la relación parte-todo, tanto por las exigencias cognitivas que exige resolver los problemas de cada uno de los campos como por las ideas matemáticas implicadas en las respectivas estrategias de resolución.

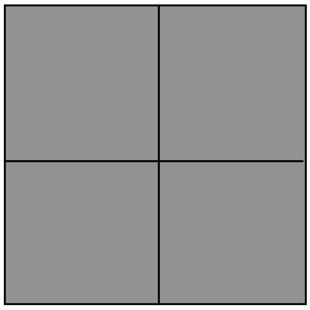
II.11.4.2. La relación parte-todo no tiene significado de razón

Algunos investigadores, como Kieren (1980, pp.134) y Figueras (1988), identifican parte-todo y razón. La relación parte-todo podría considerarse como un caso particular del significado de razón si se compara la cantidad de superficie sombreada con la cantidades de superficie "total". En este caso, el resultado de esta comparación sería un número no medida, la razón de semejanza, como ocurre en el caso de las escalas.

Ahora bien, los enunciados de las tareas que se formulan desde la relación parte-todo. La formulación del problema nº 1 impide al resolutor percibir la razón de semejanza, entre la cantidad de superficie sombreada:



y la cantidad que se considera como “todo” o unidad:



Las tareas basadas en la relación parte-todo se resuelven mediante un doble recuento de números naturales; y en consecuencia el resolutor no se plantea definir una nueva magnitud: la razón de semejanza que surge de la comparación multiplicativa entre las áreas implicadas. Por lo tanto, la relación parte-todo tiene un significado claramente diferenciado del de razón.

II.11.4.3. La relación parte-todo no tiene significado de cociente partitivo

Entendemos que el significado de cociente corresponde a la idea de cociente partitivo, a la expresión del resultado de repartir de forma igualitaria a unidades entre b personas, o de distribuir a unidades en b grupos iguales. Por tanto, intervienen dos magnitudes: la cantidad a repartir y otra cantidad discreta, que expresa la cantidad de grupos o personas que participan. Con estas consideraciones, la expresión a/b aparece al aplicar la técnica del reparto en una sola fase: cada una de las a unidades a repartir se fraccionan en b partes iguales y a cada participante se le entrega una parte de cada una de las unidades previamente fraccionadas.

La relación parte-todo no expresa el resultado de un reparto, puesto que en la fracción 5/4 tanto el 5 como el 4 indican un número de regiones del plano y, en consecuencia, no tiene cabida la idea de expresar el resultado de disgregar una cantidad de magnitud en un número entero de partes iguales. Por lo tanto, la relación parte-todo tiene un significado claramente diferenciado del cociente partitivo.

II.11.4.4. La relación parte-todo no tiene significado de operador

Entendemos que el significado de operador es el de una función racional que produce transformaciones de una cantidad de magnitud, obteniéndose otra cantidad de esa misma magnitud medida con la misma unidad. Ahora bien, para poder aplicar estas transformaciones es preciso conocerlas previamente, y tal conocimiento lleva implícito el símbolo a/b como convenio que expresa que a es el número por el que se multiplica la cantidad y b por el que se divide.

Con el significado parte-todo la fracción 5/4 describe una situación estática que es muy diferente de la transformación que impone la función racional. Por lo tanto, la relación parte-todo tiene un significado claramente diferenciado del operador.

II.11.4.5. La relación parte-todo no tiene significado de cociente indicado

La idea de la fracción como cociente indicado es un significado teórico que permite percibir la división de naturales como un número racional positivo y establecer la conversión simbólica entre la fracción y la división del numerador entre el denominador. El carácter formal de este significado se sitúa muy lejos de las acciones que exige la resolución de las tareas formuladas desde la parte-todo. En consecuencia, la relación parte-todo es un significado claramente diferenciado del significado de cociente indicado.

De los resultados anteriores se deduce que el significado de relación parte-todo es un significado diferenciado de los significados que pertenecen a la fenomenología histórica del número racional positivo.

Puesto que este significado no ha aparecido en el estudio fenomenológico histórico nos preguntamos por su origen. Conjeturamos, como hipótesis de trabajo, que se trata de un recurso didáctico creado por necesidades del proceso de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas escolares. Para corroborar o desechar esta hipótesis vamos a abordar, en el apartado II.12, el análisis fenomenológico didáctico del número racional positivo.

II.12. Análisis fenomenológico didáctico del número racional positivo

Fundamentamos el análisis fenomenológico didáctico en una revisión histórica de la enseñanza del numero racional en nuestro país. Esta revisión consiste en determinar qué significados ha utilizado y utiliza el Sistema Escolar Español para introducir la fracción y el número decimal. La fuente de información nos la proporcionan los libros de texto escolares publicados desde la segunda mitad del siglo XIX hasta nuestros días. Se trata de identificar, en los libros de texto, los distintos significados del número racional; no se persigue, por tanto, atender a tendencias mayoritarias que sostuviesen los textos más significativos de cada época.

Con este estudio pretendemos analizar los significados del número racional positivo que ha utilizado el Sistema Educativo en los momentos iniciales de la enseñanza de la fracción y del número decimal y, en particular, analizar la constitución y evolución de la relación parte-todo hasta su posición actual de significado predominante.

Organización del análisis fenomenológico didáctico

Dado que el libro escolar refleja la práctica docente, hemos realizado una revisión histórica de los significados del número racional positivo que han utilizado los libros escolares en España para enseñar este concepto, porque las prácticas de enseñanza vienen determinadas en mayor medida por los libros de textos utilizados en la enseñanza antes que por los decretos y órdenes ministeriales emanadas desde los organismos oficiales. Por otra parte, hasta mediados del siglo XX, el libro de texto es la única fuente de documentación de que disponemos porque los primeros programas escolares por materias datan de 1953, año en el que se publican los Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria.

Situamos el comienzo de la revisión de textos escolares en la segunda mitad del siglo XIX porque coincide con el momento de expansión y generalización del sistema de instrucción pública primaria, y porque se considera que en esta época aparecen los manual escolares "*para uso de los niños*" (Escolano, A, 1998).

Se ha dividido el periodo temporal que abarca desde el nacimiento del texto escolar hasta nuestro días en seis periodos históricos que presentan diferencias significativas en cuando a la organización del Sistema Educativo o en cuanto a la promulgación de Leyes que regulan la Educación Obligatoria en nuestro país; a saber:

• *Periodo I. Segunda mitad del XIX (1850-1900)*: se generaliza y se extiende la enseñanza obligatoria. En este período analizamos los manuales para las Escuelas de Primera Enseñanza porque es la etapa de la enseñanza elemental donde los alumnos reciben instrucción del quebrado y del número decimal. Entre los textos estudiados destacamos los siguientes: Almeda, J. (1892), De Yéves. J. M. (1860), Gallego Chaves, A. (1880) y Torrecilla, G. (1898).

• *Periodo II. Primera mitad del XX (1900-1950)*: se producen cambios políticos y sociales importantes en nuestro país. Entre los textos estudiados destacamos los siguientes: Castro y Legua, V. (1911), Gutiérrez Del Arroyo, L. (1916), Miralles y Solbes, L. (1919), Palau Vera, J. (1923), Yeves, C. (1926) y los de la editorial Edelvives (1932, 1934, 1939, 1945).

• *Periodo III. 1950-1970*: se producen avances en educación como consecuencia de la apertura al exterior y que concluye con la publicación de la Ley General de Educación de 1970 que extiende la enseñanza obligatoria hasta los 14 años. Entre los textos estudiados destacamos Bruño (1960), Casulleras, J. (1967), Edelvives (1951, 1954) y la enciclopedia Alvárez (1964).

• *Periodo IV. 1970-1980*: se caracteriza por el auge del movimiento de la llamada "Matemática Moderna". Hemos analizado la colección de textos de Aizpún, A. (1974), Ramos, A. (1977), Santillana (1972) y Teide (1972)

• *Periodo V. 1980-1990*: supone "el retorno a lo básico" en la enseñanza de las matemáticas de la EGB tras el abandono del movimiento de la "Matemática Moderna". Hemos estudiado las colecciones de las editoriales Anaya, Santillana, Edebé y S.M.

• *Periodo VI. 1990-2006*: en este último período se han promulgado tres leyes: la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990, la Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE) de 2002 y Ley Orgánica de Educación de 2006. Las sucesivas Leyes de Educación se suceden cada vez que cambia el partido político que gobierna la nación; sin embargo, ni el paradigma de aprendizaje ni los contenidos curriculares referidos al racional han cambiado, en este periodo. Hemos estudiado las colecciones de las editoriales Anaya, Santillana, Edebé, S.M., Edelvives y Vicens Vives.

A modo de resumen, reflejamos en el cuadro II.3 el contexto educativo de la enseñanza del número racional positivo en los diferentes períodos temporales atendiendo a los parámetros siguientes: órgano que se encarga de establecer los currícula de matemáticas, finalidad de la enseñanza de este conjunto numérico, y paradigma de aprendizaje que sustenta el proceso de enseñanza:

Contexto	***1850/1900***	***1900/1950***	***1950/1970***	***1970/1980***	***1980/1990***	***1990/2006***
Diseño de programas	Libros de texto	Libros de texto	Cuestionarios del 53 y 65	LGE	Programas Renovados	LOGSE, LOCE y LOE
Finalidad de la enseñanza	Utilitaria	Utilitaria	Utilitaria.	Formativa	Formativa y funcional	Formativa y funcional
Paradigma de aprendizaje	No existe	Conductismo	Conductismo	Por descu-brimiento	Por descu-brimiento	Construc-tivismo

Cuadro II.3: Algunos indicadores del contexto educativo en el que se publican los libros de texto para la enseñanza inicial de la fracción y del número decimal en el Sistema Educativo Español

Tres son las variables que vamos a considerar en el estudio: los seis períodos temporales que hemos señalado, los seis significados del número racional positivo y los dos sistemas de representación, la notación fraccionaria y la notación decimal, que son objetivo de enseñanza en los momentos iniciales de la instrucción de la estructura numérica del racional. De los seis significados del número racional positivo, cinco proceden del análisis fenomenológico histórico (medida, razón, cociente partitivo, operador, cociente indicado) y uno, la relación parte-todo, que posee una génesis diferenciada.

El método de trabajo va a ser el siguiente: fijado uno de los dos sistemas de representación, la notación fraccionaria o la notación decimal, variaremos la variable significado para analizar qué uso hacen los textos escolares de cada uno de los seis significados cuando inician la enseñanza de la fracción y del número decimal en los períodos temporales comprendidos entre la mitad del siglo XIX y la fecha actual. El siguiente gráfico resume el método de trabajo:

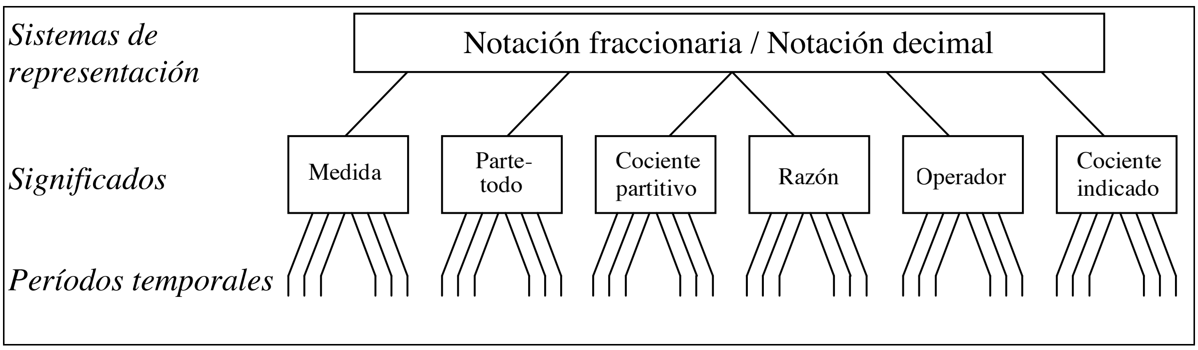


Gráfico II.5: Organización del análisis fenomenológico didáctico del número racional positivo

Los documentos de trabajo son los libros de textos escolares que están disponibles en las bibliotecas de la Universidad de Zaragoza, los documentos legales que desarrollan las sucesivas reformas educativas y diversas publicaciones del Ministerio de Educación entre las que destacamos la revista Vida Escolar. En la bibliografía de esta Memoria de Investigación queda referenciado el fondo bibliográfico de los manuales escolares y documentos oficiales que hemos utilizado en este estudio.

En el apartado II. 13 vamos a efectuar el análisis fenomenológico didáctico de la fracción y, en apartado II. 14, el análisis fenomenológico didáctico del número decimal.

II.13. Análisis fenomenológico didáctico de la fracción

Vamos a analizar cómo se introduce la idea de fracción; es decir, nos limitamos a enunciar las ideas que aparecen en los textos escolares al inicio de la enseñanza de la fracción.

II.13.1. Medida

La tarea a resolver es la de cuantificar la cantidad de una determinada magnitud que contiene un determinado objeto. El modo de alcanzar el resultado de la medida se realiza de formas diferentes.

a) Medida directa

Entre los manuales consultados, en todos los períodos temporales, no hemos encontrado ningún autor que introduzca las fracciones a partir de la medida directa de cantidades de magnitud. Posiblemente son razones de tipo organizativo y de economía de tiempo las que han provocado esta situación.

b) Medida por conmensuración

Este significado tampoco se encuentra en los libros analizados posiblemente porque la técnica de medida por conmensuración es difícil de aplicar, y porque el significado de la fracción que se obtiene, de razón, resulta difícil de comprender para los escolares.

c) Medida evocada

Las acciones que llevan a la resolución de la tarea no las hace el aprendiz sino que es el maestro el que expone la técnica a utilizar: buscar una parte de la unidad que esté contenida un número entero de veces en la cantidad a medir. En la página siguiente mostramos como el texto *Primeras Nociones de Aritmética*[2] (pp. 67) utiliza la medida de objetos tangibles a través de un discurso que describe una actuación que el alumno lee, pero que no realiza.

Esta presentación conserva aspectos importantes de la medida directa aunque el alumno no construye la fracción a partir de las acciones que realiza, pues éstas las hace el autor. Es, a nuestro entender, un significado más débil que el de medida directa pues el alumno no ha

[2] Miralles y Solbes, Lorenzo. (1919) *Primeras Nociones de Aritmética*. Tipografía Doménech. Valencia

experimentado el sentido que tienen el numerador y el denominador de la fracción; no ha tenido que afrontar tareas como realizar fraccionamientos reales de la unidad; no ha tenido que evaluar la pertinencia del fraccionamiento que ha hecho, no ha tenido que tomar decisiones sobre la conveniencia de aumentar o disminuir el número de partes en que se fracciona la unidad; no ha percibido la necesidad de simbolizar las acciones realizadas, etc.

Números fraccionarios

Prepárense varios listones (1) de un metro de longitud. Divídase uno de ellos en dos trozos iguales; cada uno de ellos será *medio* metro. Divídase otro de los listones en tres trozos iguales: cada uno de éstos se llamará *tercio* de metro. De un modo análogo obtendríamos los *cuartos*, *quintos*, *sextos*, *séptimos*, *octavos*, *novenos* y *décimos* (o dm.) de metro, dividiendo un metro en 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 partes iguales, respectivamente. Si se dividiera en mas partes, una de ellas se expresaría enunciando la palabra que indicara su número, seguida de la terminación *avos*. Así, cada una de las partes que resultaran de dividir un metro en 13 porciones iguales, se llamaría un *treceavo*.

1. *(a)* Mídase una longitud con *medio metro*. Supongamos que se ha podido aplicar 11 veces: diremos que la longitud tiene *once medios metros*; por escrito expresaremos la medida efectuada con el número $\frac{11}{2}$ m.

(b) De un modo enteramente análogo expresaríamos con el número $\frac{19}{7}$ m. una cantidad que contuviera *diez y nueve veces* al *séptimo* de metro; y así de otras.

(1) En vez de listones pueden usarse cintas.

Texto II.1: La fracción como medida evocada

La explicación que aporta el autor sirve para definir la fracción, en términos muy similares a los utilizados en la medida directa, aunque sabemos que los alumnos construyen ideas diferentes si en lugar de recibir una explicación realizan acciones físicas de medida con objetos tangibles (Miralles y Solbes, 1919, pp. 68):

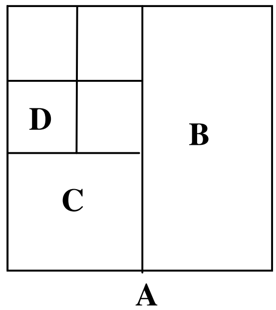
> *Estos números que se obtienen midiendo una cantidad con una parte de las unidades hasta ahora empleadas, se llaman quebrados o fraccionarios. El número que figura encima de la raya, que es el que expresa cuántas unidades fraccionarias contiene la cantidad que se mide, se llama numerador; y el que figura debajo de ella, que es el que nos dice cuántas unidades como las empleadas contiene la unidad a que nos referimos, ha recibido el nombre de denominador.*

El significado, por tanto, no lo construye el alumno a partir de la resolución de una situación problemática, sino que lo hace el autor del texto; por ello clasificamos este significado como de *medida evocada*.

d) Medida aparente

La tarea que se propone es la de comparar dos cantidades de magnitud, aunque no se explicita ni la magnitud que se considera ni la cantidad que ejerce las funciones de unidad. Este significado lo encontramos en Gutiérrez del Arroyo (1916, pp. 50):

¿Cuántas veces está contenido B en A?
¿Y C? ¿Y D?
¿Qué parte de A es D?



Texto II.2: La fracción como medida aparente

Aun cuando no figura en el enunciado, se supone que la tarea a realizar es la de comparar cantidades de superficie; tarea que exige una evaluación visual de las cantidades a comparar. Se trata, por tanto, de una situación problemática de medir una cantidad menor que la unidad de medida; ahora bien, hay una presentación gráfica del enunciado que elude el fraccionamiento y facilita la comparación de las superficies mediante el recuento.

Facilitar la respuesta implica modificar aspectos esenciales de la actividad de medir; en contrapartida, el alumno tendrá dificultades para interpretar el sentido de la fracción y el modo en que se simboliza, pues la respuesta a la que lleva el gráfico es a que D está contenido 16 veces en A. Y desde este recuento queda un camino complejo hasta la respuesta esperable 1/16, pues si el alumno no entiende cuál es el sentido del símbolo 1, ni tampoco entiende qué papel juega la barra de la fracción, le resultará más complicado entender el significado que encierra la composición de esos símbolos.

La acción de medida está oculta en la tarea que hemos presentado. En efecto, la actividad de medir exige un posicionamiento inicial sobre la magnitud que se considera; posicionamiento que no hace explícito el autor, posiblemente porque presuponga que el lector entenderá que se miden cantidades de superficie; además, tampoco existen referencias a la unidad de medida, que es un elemento esencial en toda actividad de medida. En diversos manuales de la primera mitad del siglo XX aparecen actividades como la que propone Gutiérrez del Arroyo. Son tareas, que bien pudieran evocar la acción de medida de cantidades de superficie porque hay una comparación entre cantidades de superficie, pero que no son actividades de medida porque no se explicita la magnitud de medida ni la unidad de medida. Por lo tanto clasificamos este significado de la fracción como de *medida aparente*.

A modo de resumen, mostramos en el cuadro II.4 los períodos temporales en los que hemos detectado algún significado de medida en los textos escolares que presentan el concepto de fracción. La ausencia de un determinado significado se denota con un guión:

Significado de la fracción	*1850/1900*	*1900/1950*	*1950/1970*	*1970/1980*	*1980/1990*	*1990/2006*
Medida directa	-	-	-	-	-	-
Conmensuración	-	-	-	-	-	-
Medida evocada	SI	SI	-	-	-	-
Medida aparente	-	SI	-	-	-	-

Cuadro II.4: Evolución en el tiempo de los significados de medida de la fracción

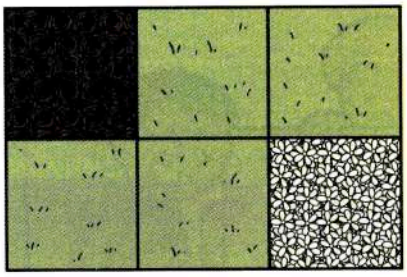
II.13.2. Relación parte-todo

La formulación de tareas de medida aparente en los manuales de la primera mitad del siglo XX deriva en la aparición de la relación parte-todo como modelo de enseñanza de la fracción cuando se generaliza el uso de gráficos en los textos escolares y desaparece la referencia a la comparación de cantidades de superficie.

Desde la reforma de los Programas Renovados emprendida a comienzos de la década de los ochenta la relación parte-todo es el primer significado que utilizan los libros de texto de todas las editoriales para enseñar la fracción. Sirva como ejemplo, la introducción de la fracción que realiza un libro de texto actual[3] (pp. 68), de 5º curso de Educación Primaria:

APRENDE

En la urbanización Puertogrande, han hecho un plano de la zona que tienen dedicada para jardín. ¿Qué fracción representa la parte con flores?



Observa que el jardín está dividido en 6 partes iguales y que hay flores en 2 de estas partes.

Por tanto, la fracción que representa la parte con flores es $\frac{2}{6}$.

Recuerda cómo se llaman los términos de una fracción y lo que significa cada uno.

Numerador ▸ 2 ◂ Número de partes con flores.

Denominador ▸ 6 ◂ Número de partes iguales en que está dividido el jardín.

Los términos de una fracción son numerador y denominador.
El **denominador** indica el número de partes iguales en que se divide la unidad.
El **numerador** indica el número de partes que se toman de la unidad.

Texto II.3: La fracción como relación parte-todo

[3] Alzu, J. L. (2002) Matemáticas 5. Primaria. Entre amigos. Santillana.

El texto se ayuda de un gráfico para introducir, de modo rápido, la notación fraccionaria. La relación parte-todo confiere a la fracción un significado estático que describe una situación: en un jardín fraccionado en 6 partes iguales se han plantado flores en 2 de ellas.

En la relación parte-todo la notación fraccionaria no surge como solución de ningún problema plantado en el mundo de los objetos sensibles ni del mundo de los objetos matemáticos; la fracción sirve para *representar*, con símbolos, un gráfico que describe una situación evidente. En este modelo de enseñanza, la fracción no sirve para medir, ni para repartir, ni para comparar, ahora la fracción se utiliza para *representar* una situación que los números naturales describen con mayor eficacia.

Desde la relación parte-todo la introducción de la fracción está forzada por necesidades del ámbito educativo y no porque de respuesta a un problema que sea irresoluble desde el conjunto de los números naturales.

II.13.2.1. Origen de la relación parte-todo

Situamos el origen de la enseñanza de la fracción con el significado *parte-todo* en la primera mitad del siglo XX, como consecuencia de la pérdida de la referencia del proceso de medida de cantidades de magnitud.

Nos servimos de la sexta edición de la *Aritmética*[4] de la editorial Edelvives (1934) para ejemplificar el tránsito de la utilización de modelos de *medida aparent*e al de *relación parte-todo*. La mejora en los mecanismos de impresión de libros que publican en la primera mitad del siglo XX permite insertar gráficos en el texto escrito como el que aparece en la página 114 del texto de Edelvives:

985. Dividido un rectángulo en 2 partes iguales (fig. 7ª). Una de estas partes la divido en otras dos iguales, y así sucesivamente. ¿Con qué quebrado se indicará una de las *a*? *b*? *c*? *d*? *e*? *f*?

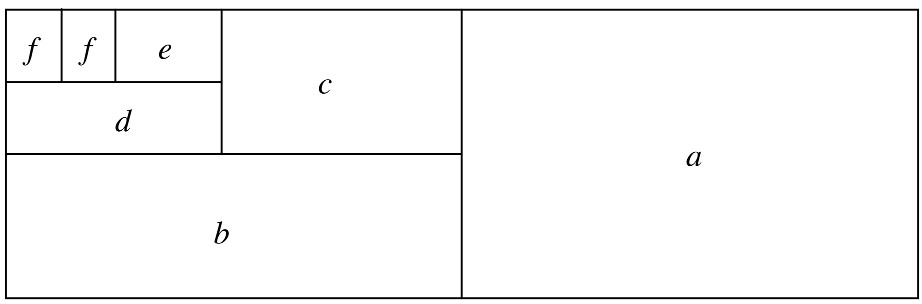


FIG. 7ª

Texto II.4: Tránsito de la fracción como medida aparente a la relación parte-todo

4 Aritmética (1934). Segundo Grado. Sexta edición. Editorial Luis Vives. Barcelona

En la formulación del ejercicio de Edelvives no hay ninguna petición de comparación entre regiones como ocurría en la tarea propuesta en el manual de Gutiérrez del Arroyo (texto II.2) con el que hemos ejemplificado la *medida aparente*. Ahora, se le pide al alumno que encuentre un quebrado, es decir, una representación simbólica, a partir de la visualización de unos gráficos. Sin embargo, el alumno no estará en condiciones de resolver por sí mismo el ejercicio si antes no ha recibido enseñanza del código que sustenta la relación parte-todo porque, ahora, la traslación entre las representaciones gráficas y las representaciones simbólicas no surge como solución de un problema: el ejercicio que propone el texto no hace referencia a ningún proceso de medida dado que no se explicita ni la magnitud ni la unidad de medida. En estas condiciones, el alumno que intenta resolver este ejercicio no dispone de otro recurso que seguir las pautas que le indique el profesor: se trata de una tarea formulada desde la relación parte-todo.

La *relación parte-todo* aparece como consecuencia de un proceso gradual de abandono del significado de medida con objetos reales que se manifiesta inicialmente en que los autores de los textos escolares optan por evocar la medida (medida evocada) y posteriormente utilizar de modo encubierto la magnitud superficie y, con la ayuda de gráficos bidimensionales, preguntar "que parte de una región es otra región" (medida aparente).

En consecuencia, se trata de un recurso didáctico que surge para eludir las actividades de medida con objetos tangibles, posiblemente, porque los procesos de medida en el aula generan dificultades como la gestión del material, el control de la diversidad de resultados obtenidos o la aparición de interferencias con la enseñanza del Sistema Métrico Decimal.

II.13.2.2. Consolidación de la relación parte-todo

En el período comprendido entre los años 1950 a 1970 la *relación parte-todo* se consolida como el método prioritario con el que se enseña la fracción.

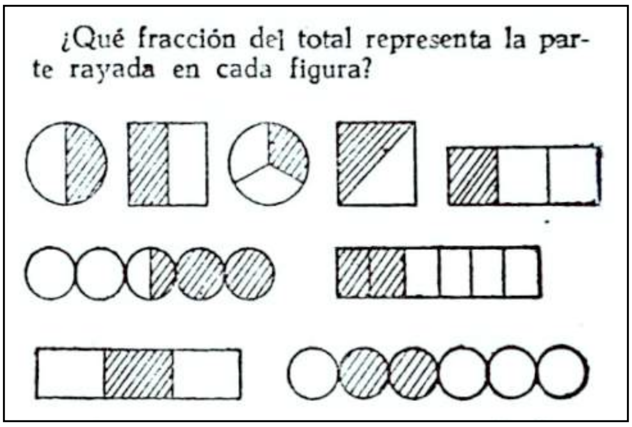
Los Cuestionarios Nacionales de 1953[5] y de 1965[6] son los primeros documentos oficiales que intentan pautar la actividad de los maestros en España y establecer un currículo escolar; función que hasta entonces habían asumido las editoriales de libros de texto. Estos dos textos legales tienen una marcado carácter normativo; refuerzan los principios metodológicos del conductismo pero no aportan indicaciones didácticas para enseñar la fracción ni el número decimal. La labor asesora recae en el Centro de Orientación y Documentación Didáctica de Enseñanza Primaria a través de la revista Vida Escolar, que se distribuía gratuitamente a los centros docentes. Esta revista incluía orientaciones didácticas y guiones de trabajo escolar de las distintas materias que elaboraban los inspectores de Enseñanza Primaria.

---

[5] Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria. (1953) Ministerio de Educación Nacional

[6] Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria. Orden Ministerial de 8 de Julio de 1965. (BOE 24-IX-65). Ministerio Nacional de Educación

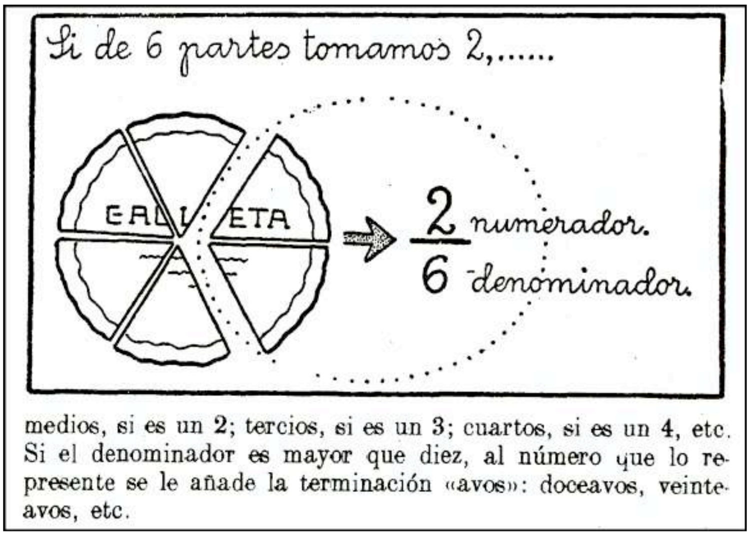
En el nº 43 de Vida Escolar, de noviembre de 1962, encontramos la Ficha Didáctica:



Texto II.5: La inspección educativa propone enseñar la fracción como relación parte-todo

Esta ficha didáctica refleja fielmente la formulación de las tareas basadas en la relación parte-todo y que hoy día, casi medio siglo más tarde, encontramos en los libros de texto actuales. Habitualmente, en los enunciados de las tareas formuladas desde la parte-todo se lee el vocablo *representar* que invita al escolar a aplicar un convenio previamente establecido; no sugiere la realización de acciones, físicas o mentales, que favorezcan el aprendizaje autónomo.

Las enciclopedias de Enseñanza Primaria alcanzan gran popularidad en los años de penuria económica posteriores a la guerra civil puesto que se trataba de un producto de bajo coste económico al reunir en un solo volumen todos los conocimientos que había de dispensar la escuela. Las enciclopedias de esta época siguen las orientaciones de la inspección educativa e introducen la fracción como relación parte-todo, como se observa en la enciclopedia Alvárez[7] de Segundo Grado:

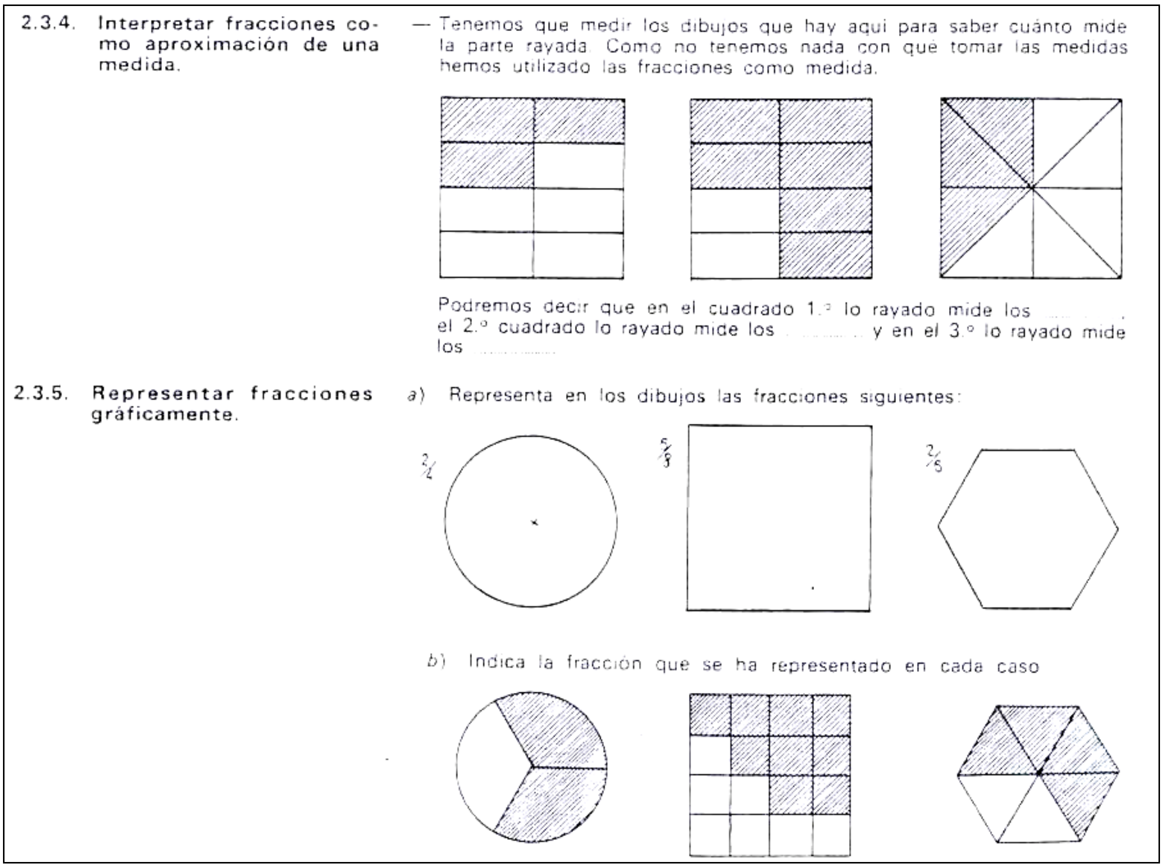


Texto II.6: Las enciclopedias de mitad del siglo XX introducen la fracción como relación parte-todo

[7] Alvarez Pérez, A. (1962). Enciclopedia. Segundo Grado.. Editorial Miñón. Valladolid

Es de reseñar que los libros de texto de Bachillerato Elemental[8] también se sirven de la relación parte-todo para introducir el concepto de fracción.

En la década de los 70 las nuevas tendencias en la enseñanza de las matemáticas se concretan en la reforma de la llamada Matemática Moderna. Este enfoque propugna la enseñanza de la fracción exclusivamente desde el significado de operador. La constatación del fracaso de esta reforma dio paso, en la década de los 80, a un "retorno a lo básico" que en España se materializó en los Programas Renovados. En el nº 210 de la revista Vida Escolar de Enero-Febrero de 1981 (pp. 19-20) se detallan los objetivos y actividades que propone el documento de consulta para la elaboración de los Programas Renovados. Este documento recomienda estudiar tres significados de la fracción: relación parte-todo, operador y cociente indicado:


2.3.4. Interpretar fracciones como aproximación de una medida.

— Tenemos que medir los dibujos que hay aquí para saber cuánto mide la parte rayada. Como no tenemos nada con que tomar las medidas hemos utilizado las fracciones como medida.

Podremos decir que en el cuadrado 1.º lo rayado mide los ...., el 2.º cuadrado lo rayado mide los .... y en el 3.º lo rayado mide los ....

2.3.5. Representar fracciones gráficamente.

a) Representa en los dibujos las fracciones siguientes:

b) Indica la fracción que se ha representado en cada caso

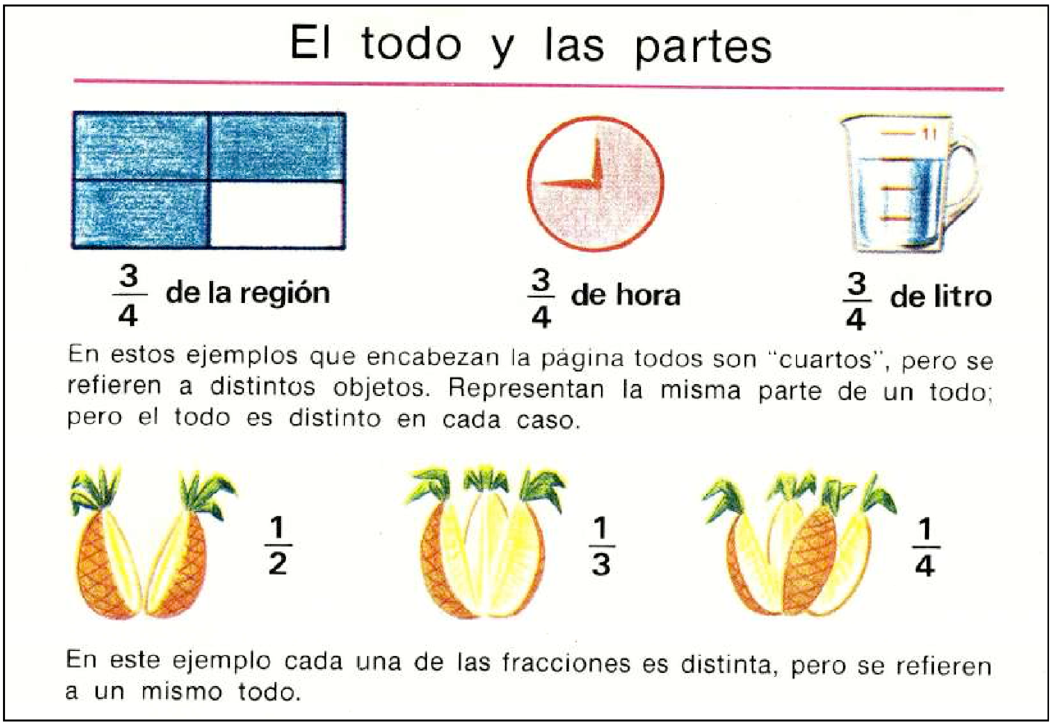
Texto II.8: Los Programas Renovados proponen introducir la fracción como relación parte-todo

Observamos que en las actividades de este documento se utiliza el significado de relación parte-todo; es más, como pone en las indicaciones que acompañan a las actividades del objetivo 2.3.4, se pretende introducir el recurso de la parte-todo y eludir cualquier proceso

[8] En 1967 se reforman los Cuestionarios de Bachillerato Elemental vigentes desde 1953. En este período se sigue manteniendo la "doble vía" en el tramo educativo de 10 a 14 años; mientras unos alumnos cursan el tramo de 5º a 8º curso de Enseñanza Primaria, otros cursan el Bachillerato Elemental

de medida, pues no hay referencia explícita a ninguna magnitud ni unidad de medida: "*no tenemos nada con qué tomar las medidas*".

Los libros de texto de la década de los 80 proponen abiertamente la enseñanza de la fracción desde la relación parte-todo, como muestra el texto *Pitágoras 4º curso*[9] (pp. 154), en el que las fracciones que aparecen en este texto no poseen el significado de medida:


El todo y las partes

$\frac{3}{4}$ de la región $\frac{3}{4}$ de hora $\frac{3}{4}$ de litro

En estos ejemplos que encabezan la página todos son "cuartos", pero se refieren a distintos objetos. Representan la misma parte de un todo; pero el todo es distinto en cada caso.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

En este ejemplo cada una de las fracciones es distinta, pero se refieren a un mismo todo.

Texto II.9: En la década de los 80 los textos escolares introducen la fracción como relación parte-todo

A partir de la década de los 80 y hasta la fecha actual la relación parte-todo se ha ido consolidando como el significado prioritario desde el que se enseña la fracción y el número decimal.

En el cuadro II.5 resumimos los períodos temporales en los que hemos detectado la *relación parte-todo* en los textos escolares para introducir la fracción:

Significado	***1850/1900***	***1900/1950***	***1950/1970***	***1970/1980***	***1980/1990***	***1990/2006***
Relación parte-todo	-	SI	SI	SI	SI	SI

Cuadro II.5: Evolución en el tiempo del significados relación parte-todo de la fracción

II.13.3. Cociente partitivo

Con este significado el número racional expresa la cantidad que resulta al dividir una cantidad en un número entero de partes iguales.

---

9 Ayuso, J., Bujanda, Mª P. (1983) *Pitágoras 4º curso*. Ediciones SM. Madrid

En los textos de Primera Enseñanza del siglo XIX no hemos encontrado este significado de la fracción. Esto es así, porque los manuales escolares de este siglo se caracterizan por la ausencia de argumentaciones para justificar la introducción de los conceptos y reglas de cálculo simbólico; los sistemas de representación se introducen y se manejan desconectados de las acciones humanas que originaron los conceptos matemáticos. Tan solo los libros de Aritmética destinados a la Segunda Enseñanza o a Estudios Superiores se preocupan por la justificación matemática de los contenidos relacionados con el número racional. Este es el caso del texto de Aritmética teórica de José Mariano Vallejo[10] que presenta el significado de la fracción como resultado de un reparto igualitario.

En la primera mitad del siglo XX, la Aritmética de Segundo Grado de Gutiérrez del Arroyo (1916; pp. 43) introduce la fracción con el significado de reparto igualitario:

"*Repartir tres manzanas entre 4 niños, de modo que a todos les toque lo mismo.*

Cogemos una manzana y la cortamos en 4 pedazos iguales, y daremos un pedazo a cada niño. Después cogeremos otra manzana, y también la cortaremos en 4 partes iguales, y repartiremos una a cada niño.

Y lo mismo la otra manzana que nos queda: la partimos en 4 partes iguales y daremos una a cada niño.

…………

En el ejemplo anterior, en que hemos partido una manzana en 4 partes iguales, cada pedazo será un cuarto, $\frac{1}{4}$*, de manzana; a cada niño le tocaban 3 pedazos, o sea tres cuartos de manzana. Tres cuartos (3 de las 4 partes iguales en que se divide una cosa) se escribe así:* $\frac{3}{4}$ "

Texto II.10: Algunos textos de la primera mitad del siglo XX introducen la fracción como cociente partitivo

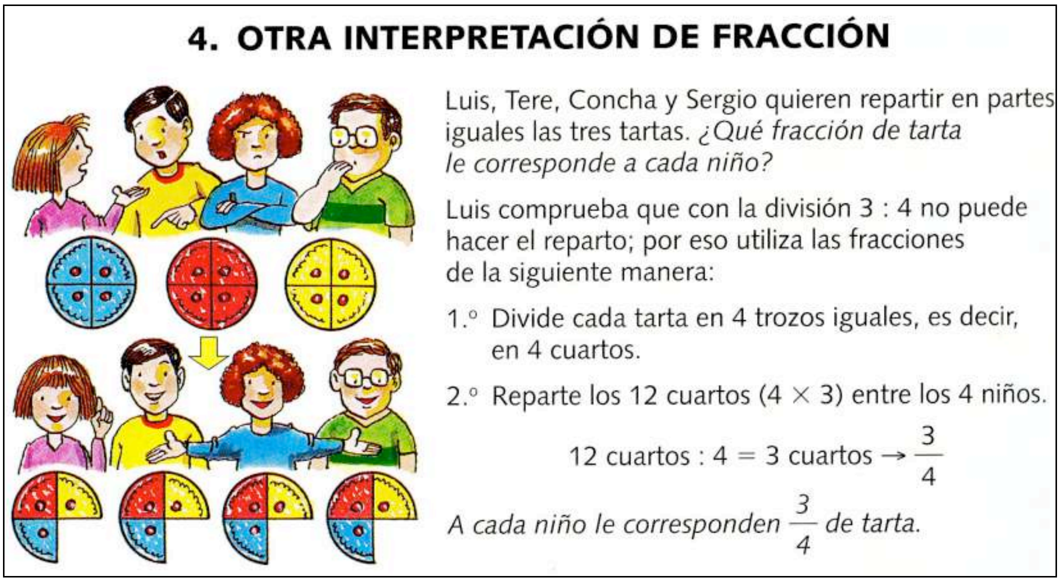
Si bien algunos libros de textos de la primera mitad del siglo XX se sirven de este significado para presentar la fracción también hemos constatado que ninguno de ellos utiliza dicho significado para justificar las relaciones y operaciones con fracciones.

El significado de cociente partitivo no se detecta en los libros de libros de texto anteriores a la década de los 90. Es en las *orientaciones didácticas* del Diseño Curricular Base de la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990 donde se recomienda este significado:

18. Los números fraccionarios se abordarán como partes de un grupo o de magnitudes continuas en diferentes contextos (reparto y medida). (pp. 414)

10 Vallejo, J. Mariano. (1821) *Tratado Elemental de Matemáticas* (tercera edición) para uso de los Caballeros Seminaristas del seminario de Nobles de Madrid y demás Casas de Educación del Reino.

Pero a pesar de estas orientaciones didácticas son muy escasos los libros de texto que introducen la fracción con el significado de reparto igualitario, aunque encontramos editoriales que si atendieron a dichas orientaciones, como ocurre con el texto Matemáticas[11] 5º curso de la Editorial Santillana (pp. 81), que recurre a la técnica del reparto en una fase:



4. OTRA INTERPRETACIÓN DE FRACCIÓN

Luis, Tere, Concha y Sergio quieren repartir en partes iguales las tres tartas. *¿Qué fracción de tarta le corresponde a cada niño?*

Luis comprueba que con la división 3 : 4 no puede hacer el reparto; por eso utiliza las fracciones de la siguiente manera:

1.º Divide cada tarta en 4 trozos iguales, es decir, en 4 cuartos.

2.º Reparte los 12 cuartos (4 × 3) entre los 4 niños.

12 cuartos : 4 = 3 cuartos → $\frac{3}{4}$

A cada niño le corresponden $\frac{3}{4}$ *de tarta.*

Texto II.11: La fracción con el significado de cociente partitivo en un texto de la década de los 90

Los libros de texto editados en el período de vigencia de la LOGSE y los publicados con posterioridad tampoco siguen la orientación didáctica que propone el Diseño Curricular Base de la LOGSE. Los libros de texto publicados en la década de los 90 y los actuales confunden los significados de medida y de relación parte-todo.

A modo de resumen, mostramos en el cuadro II.6 los períodos temporales en los que hemos detectado el significado de cociente partitivo en los textos escolares para introducir el concepto de fracción:

Significado de la fracción	*1850/1900*	*1900/1950*	*1950/1970*	*1970/1980*	*1980/1990*	*1990/2006*
Cociente partitivo	-	SI	-	-	-	SI

Cuadro II.6: Evolución en el tiempo del significados de cociente partitivo de la fracción

Estos resultados indican que los libros de texto y, por extensión, el Sistema Educativo Español, no han sabido valorar la riqueza conceptual del significado de cociente partitivo. Se trata de un significado del número racional positivo infrautilizado porque son muy pocos los textos escolares que dotan a la fracción con este significado. Además, los escasos textos que recogen este significado, después no lo utilizan para justificar las relaciones y operaciones con fracciones.

11 Matemáticas 5º Educación Primaria. (1998) Editorial Santillana

II.13.4. Razón

Todos los libros publicados a lo largo del siglo y medio que abarca nuestro estudio poseen una característica común: el significado de razón se presenta vinculado a la proporcionalidad y su estudio se retrasa con respecto a los temas en los que se introduce la fracción y el número decimal. Las investigaciones relativamente recientes que proponen secuencias de enseñanza de la fracción a partir del significado de razón (Brousseau et al., 2004; Dörfler, 2004) no han sido recogidas por las editoriales de libros escolares.

Dado que el análisis fenomenológico didáctico se concreta en la búsqueda de los significados con que los libros de texto abordan los momentos iniciales de la enseñanza de la fracción y del número decimal, no tiene sentido rastrear el significado de razón en los libros de texto. Por este motivo, no realizamos el análisis fenomenológico didáctico del significado de razón de la fracción y del numero decimal.

II.13.5. Operador

En la década de los 70 se producen cambios radicales que en el caso de la enseñanza de la fracción que se concretan en el abandono de la relación parte-todo y en la utilización del operador como significado exclusivo en la enseñanza de la fracción.

Un factor importante del cambio fue la promulgación de la ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa (LGE), de agosto de 1970, que reguló y estructuró, por primera vez en el siglo XX, todo el Sistema Educativo Español. Fue una ley de gran alcance, que pretendió superar las contradicciones internas en las que el sistema había caído mediante sucesivas reformas sectoriales que se habían mostrado insuficientes para responder al cambio social y económico del país. La LGE diseñó un sistema unitario porque se suprime la doble vía –perfeccionamiento o bachillerato- y flexible porque permite el paso de una rama a otra en los niveles educativos superiores. Como característica reseñable de la LGE destacamos la escolarización plena, en un sistema único, de todos los niños entre 6 y 14 años.

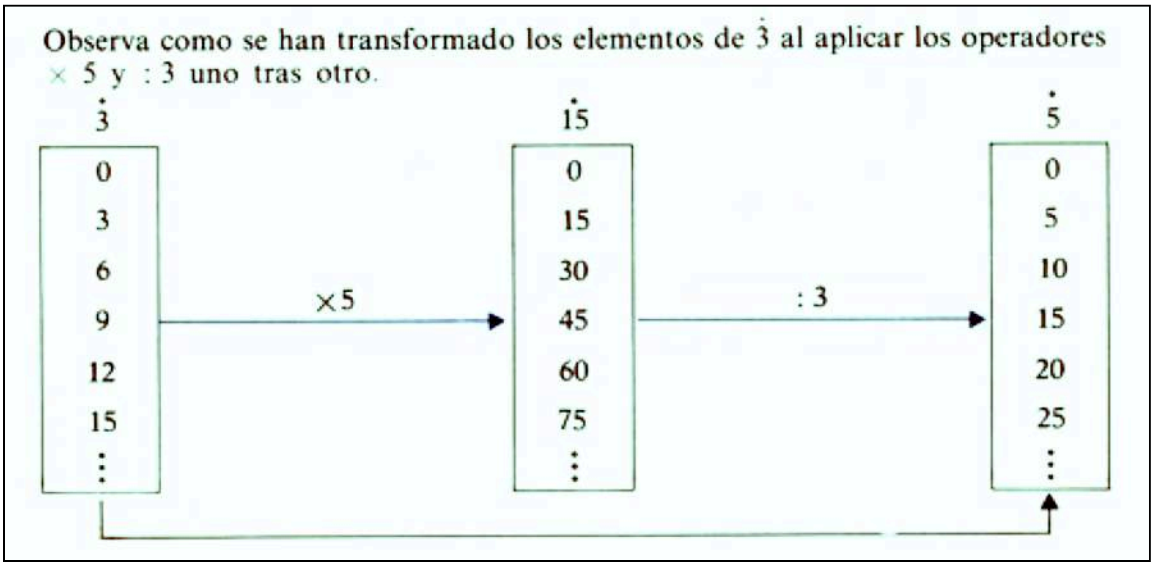
En esta década se asumen importantes cambios en la metodología de enseñanza que afectan sustancialmente a los manuales escolares. Desaparecen las enciclopedias que ya estaban en declive y surge un abanico importante de materiales didácticos entre los que destacamos *las fichas* muy utilizadas en las clases de matemáticas de este período. En consonancia con el momento cambiante de esta época las arcaicas enciclopedias se sustituyen por libros por materias de moderna expresión estética y comunicativa. La modernidad de los libros de texto de matemáticas se percibe en la profusión de esquemas de procesos activos, elementos grafo-numéricos, ejercicios de aplicación y control; y en la utilización simultánea por parte del escolar, de libros de consulta y libros de trabajo que se componen de fichas.

Las Orientaciones Pedagógicas para los Planes y Programas de estudios de la Educación General Básica[12] asumen como objetivo de la enseñanza de las matemáticas aspectos formativos tales como la comprensión de los conceptos por parte de los escolares. Las nuevas tendencias en la enseñanza, en el caso de las matemáticas, se concretan en la reforma de la llamada Matemática Moderna. El enfoque que se daba a la enseñanza intentaba subrayar la naturaleza unitaria de las matemáticas frente a la tradicional división entre aritmética, álgebra y geometría. El vínculo de unión lo aportaría la teoría de conjuntos. Los contenidos de la reforma son bien conocidos: introducción de la teoría de conjuntos, simbolismo moderno, erradicación de la geometría euclidiana, introducción de las estructuras algebraicas y de sistemas axiomatizados, etc.

En el año 1971 el Ministerio de Educación y Ciencia publica *Nuevas Orientaciones Pedagógicas para la Segunda Etapa de la Educación General Básica*. Este documento[13] (pp. 33) recomienda enseñar la fracción desde el significado exclusivo de operador:

> *Parece conveniente hacer la construcción del conjunto de los números racionales positivos a partir de la noción de operador, llegando a la de número racional mediante la clase de operadores equivalentes.*

Todos los libros de texto de la década de los 70 introducen la fracción con el significado exclusivo de operador. Por ejemplo, el libro de texto *Matemáticas 5*[14] (pp. 143-144) recuerda las fichas de trabajo que han realizado previamente los alumnos que consisten en efectuar la composición de dos aplicaciones: multiplicar por 5 y dividir por 3, tomando como conjunto inicial el de los números naturales múltiplos de 3; y escribe esta composición de aplicaciones del siguiente modo:



Texto II.12: Todos los textos de la década de los 70, sin excepción, enseñan la fracción como operador

---

[12] M.E.C. (1970) Las Orientaciones pedagógicas para los Planes y Programas de estudios de la Educación General Básica. Madrid

[13] Vida Escolar. Nº 128-130 de abril-junio de 1971. Dirección General de Ordenación Educativa

[14] Aizpún, Alberto (1974) *Matemáticas 5* (Libro de consulta). Magisterio Español. Madrid

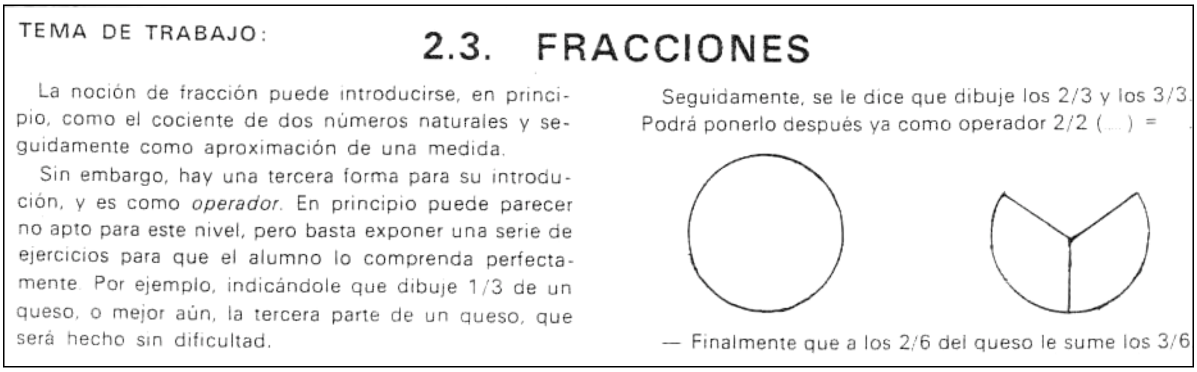
Finalmente el autor, institucionaliza la fracción del siguiente modo:

> *El operador* $x\dfrac{a}{b}$ *indica que se debe multiplicar por a y luego dividir el resultado por b.*
>
> *Este operador* $x\dfrac{a}{b}$ *transforma elementos del conjunto* $\dot{b}$ *en elementos del conjunto* $\dot{a}$.
>
> *La escritura* $\dfrac{a}{b}$ *corresponde a una fracción.*

La introducción de la fracción como operador se realiza desde una práctica educativa formal, abstracta y descontextualizada del mundo de los objetos sensibles. El autor utiliza una simbolización para las fracciones, $x\dfrac{a}{b}$, definida por unas relaciones operatorias cuyo sentido es el de transformación de conjuntos numéricos; no es un significado que el alumno pueda abstraer del mundo de los objetos sensibles.

El discurso que se presenta en este texto lleva al alumno a interpretar las fracciones como símbolos que indican la transformación de números mediante la sucesiva aplicación de dos operaciones. La fracción no aparece como solución de ningún problema cotidiano, contextualizado en el mundo de las magnitud. Se trata de un significado abstracto conformado en torno a números no medida. Pero, además, difícilmente el alumno podrá percibir la fracción como un ente numérico; más bien la conceptuará como una instrucción para operar con números naturales.

En la década de los 80, tras el abandono de la reforma de la Matemática Moderna, la administración educativa recomienda, en el Documento de Consulta[15] para la elaboración de los Programas Renovados, la enseñanza de la fracción como operador aunque, en realidad, la intencionalidad de los expertos es proponer la enseñanza como relación parte-todo:


TEMA DE TRABAJO:

2.3. FRACCIONES

La noción de fracción puede introducirse, en principio, como el cociente de dos números naturales y seguidamente como aproximación de una medida.

Sin embargo, hay una tercera forma para su introducción, y es como *operador*. En principio puede parecer no apto para este nivel, pero basta exponer una serie de ejercicios para que el alumno lo comprenda perfectamente. Por ejemplo, indicándole que dibuje 1/3 de un queso, o mejor aún, la tercera parte de un queso, que será hecho sin dificultad.

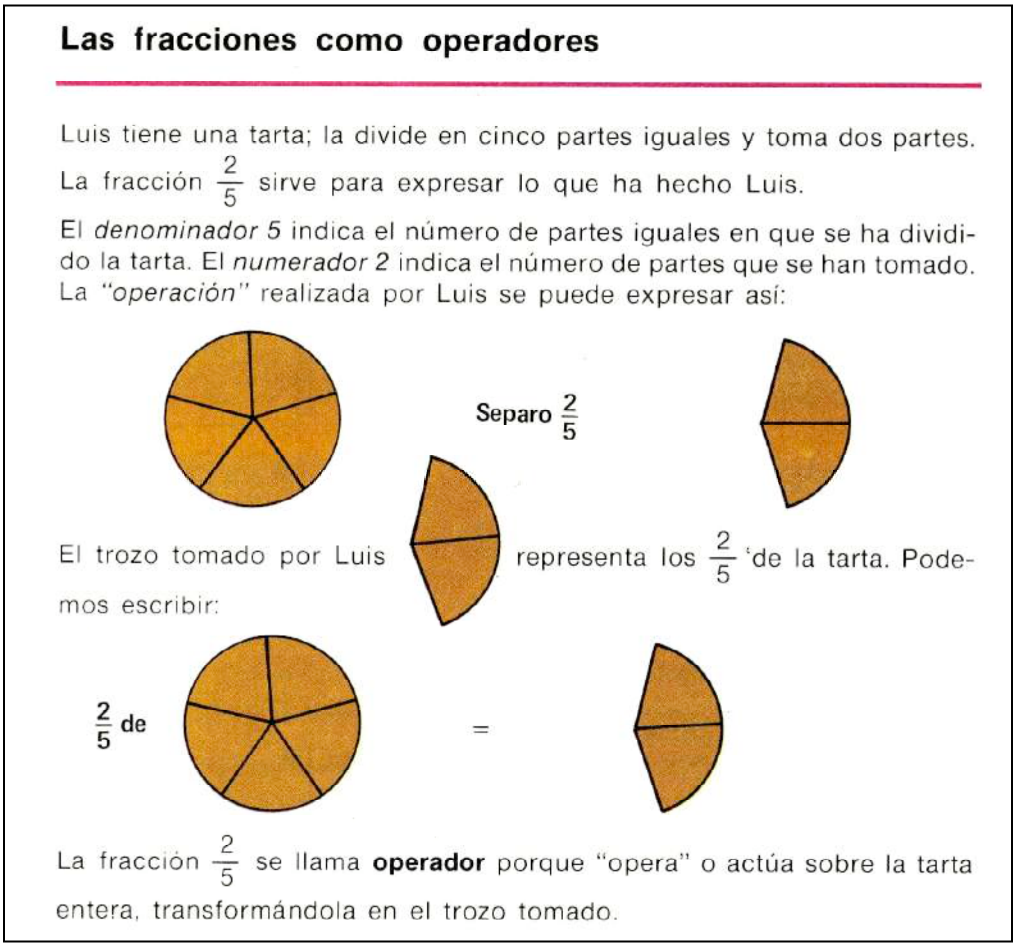
Seguidamente, se le dice que dibuje los 2/3 y los 3/3. Podrá ponerlo después ya como operador 2/2 (...) =

— Finalmente que a los 2/6 del queso le sume los 3/6

Texto II.13: Los Programas Renovados sustituyen el significado de operador por el de relación parte-todo

15 Vida Escolar nº 210. Enero-Febrero 1981. pp. 18. Revista oficial del Ministerio de Educación y Ciencia

Los libros escolares de esa década siguen fielmente las consignas del Documento de Consulta y proceden a modificar el significado de operador hasta convertirlo en el de relación parte-todo. El texto *Pitágoras 5º curso*[16] (pp. 108) ejemplifica la pérdida del significado de operador en favor de la parte-todo:



Las fracciones como operadores

Luis tiene una tarta; la divide en cinco partes iguales y toma dos partes.
La fracción $\frac{2}{5}$ sirve para expresar lo que ha hecho Luis.
El *denominador* 5 indica el número de partes iguales en que se ha dividido la tarta. El *numerador* 2 indica el número de partes que se han tomado.
La *"operación"* realizada por Luis se puede expresar así:

Separo $\frac{2}{5}$

El trozo tomado por Luis representa los $\frac{2}{5}$ 'de la tarta. Podemos escribir:

$\frac{2}{5}$ de =

La fracción $\frac{2}{5}$ se llama **operador** porque "opera" o actúa sobre la tarta entera, transformándola en el trozo tomado.

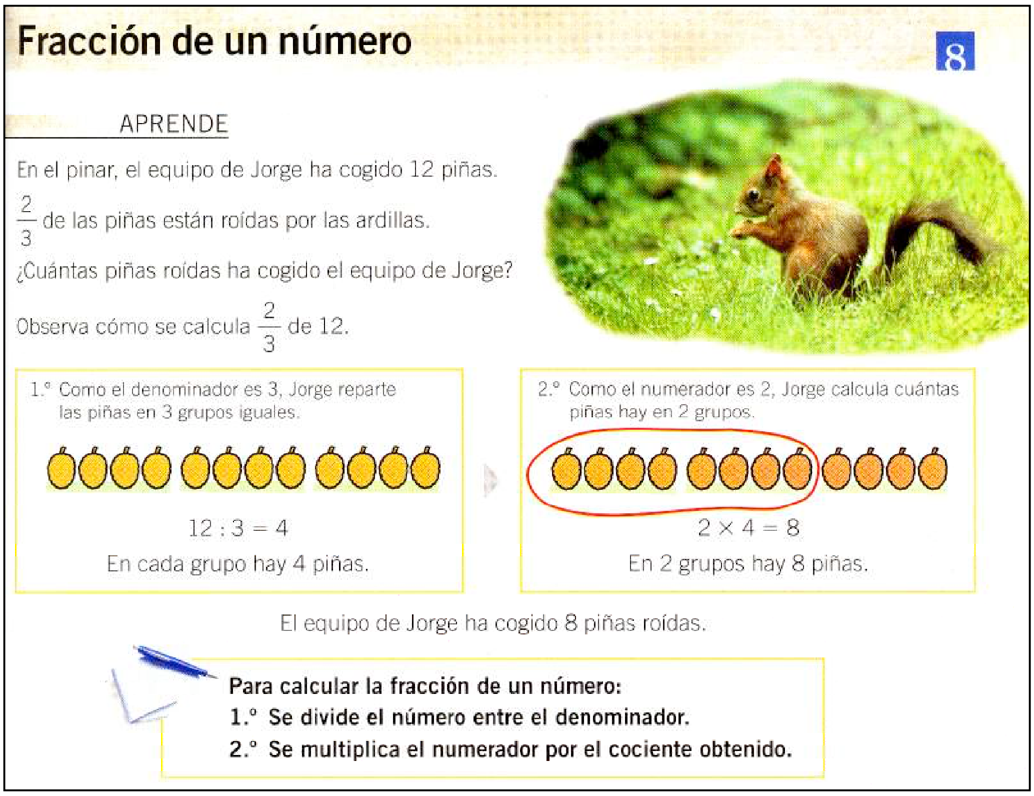
Texto II.14: Pérdida de significado de operador en favor de relación parte-todo

En este texto la fracción no se conceptúa como la composición de dos funciones tal como proponían las Orientaciones Pedagógicas de los años setenta. La fracción 2/5 no tiene el sentido de la composición de dos acciones: dividir entre 5 y multiplicar por 2; la acción que describe el texto es única: separar dos trozos de la tarta, que es una acción que contiene ideas de parte-todo. Los términos de la fracción 2/5 aparecen definidos como relación parte-todo. De esta forma el texto, al igual que otros manuales de esta década, identifican el significado de operador con las acciones que se llevan a cabo en las tareas formuladas desde la relación parte-todo.

El significado de la fracción como operador fue desapareciendo de los textos escolares, poco a poco, durante la década de los 80. En los libros de texto actuales encontramos

16 Ayuso, J., Bujanda, Mª P. (1983) *Pitágoras 5º curso*. Ediciones SM. Madrid

vestigios de esta interpretación cuando bajo el epígrafe *la fracción de un número o de una cantidad* presentan una regla que consiste en concatenar dos operaciones: dividir una cantidad discreta por el denominador y, el resultado, multiplicarlo por el numerador de la fracción. Los textos de 4º curso presentan este contenido en el tema en el que introducen la fracción, como podemos observar en el propuesta de la editorial Santillana[17] (pp. 99) y que mostramos a continuación:


Fracción de un número

8

APRENDE

En el pinar, el equipo de Jorge ha cogido 12 piñas.

$\frac{2}{3}$ de las piñas están roídas por las ardillas.

¿Cuántas piñas roídas ha cogido el equipo de Jorge?

Observa cómo se calcula $\frac{2}{3}$ de 12.

1.º Como el denominador es 3, Jorge reparte las piñas en 3 grupos iguales.

$12 : 3 = 4$

En cada grupo hay 4 piñas.

2.º Como el numerador es 2, Jorge calcula cuántas piñas hay en 2 grupos.

$2 \times 4 = 8$

En 2 grupos hay 8 piñas.

El equipo de Jorge ha cogido 8 piñas roídas.

Para calcular la fracción de un número:
1.º Se divide el número entre el denominador.
2.º Se multiplica el numerador por el cociente obtenido.

Texto II.15: La fracción de un número es un vestigio del operador en los libros de texto actuales

Las tareas que se proponen bajo el epígrafe *fracción de una cantidad* se refieren a contextos discretos y pueden ser gestionadas eficazmente desde la relación parte-todo o desde el significado de medida. La intención de los libros de texto no es la de introducir un nuevo significado de la fracción; más bien se trata de presentar al alumno un contexto problemático que puede ser resuelto desde el significado parte-todo y, además, dotar a la fracción de una "utilidad práctica" que no tienen las tareas introductorias de la relación parte-todo. Según esto, entendemos que los libros de texto actuales que se adaptan a las directrices de la LOGSE, LOCE y LOE han abandonado, sin excepción, el significado de fracción como operador.

El significado de operador como composición de funciones visualizadas mediante diagramas sagitales y máquinas operadoras desapareció con el declive de la llamada "Matemática Moderna"; y los situaciones problemáticas que se resolvían desde este

[17] Alzu, J. L. (2001) Matemáticas 4. Primaria. Entre amigos. Santillana

significado han pasado a ser interpretados y gestionados desde la relación parte-todo. De nuevo observamos como la parte-todo va ganando influencia en detrimento de otros significados del número racional positivo.

A modo de resumen, mostramos en el cuadro II.7 los períodos temporales en los que hemos detectado el significado de operador en los textos escolares para introducir el concepto de fracción:

Significado de la fracción	*1850/1900*	*1900/1950*	*1950/1970*	*1970/1980*	*1980/1990*	*1990/2006*
Operador	-	-	-	SI	SI	-

Cuadro II.7: Evolución en el tiempo del significados de operador de la fracción

II.13.6. Cociente indicado

El significado de cociente indicado es un constructo teórico que resuelve un problema interno de las matemáticas: la necesidad de extender el conjunto de los naturales a otra estructura superior en el que todo número, distinto de cero, tenga elemento simétrico para la operación multiplicación. En sentido estricto, ninguno de los libros de texto destinados a la etapa escolar en la que se inicia la enseñanza de la fracción y del decimal utiliza el significado de cociente indicado. La complejidad conceptual de este significado aconseja retrasar el estudio de las propiedades estructurales del conjunto de los números racionales a otras etapas educativas posteriores. No obstante, en aras a hacer efectivo el análisis fenomenológico vamos a "rebajar" el nivel conceptual que debiera exigirse a la gestión del cociente indicado e interpretaremos que un libro de texto "enseña" el significado de cociente indicado si conceptúa la fracción como una división del numerador entre el denominador e introduce el convenio que liga la fracción con el cociente indicado:

$$\frac{a}{b} = a : b$$

Admitiendo esta "versión débil" del cociente indicado como un auténtico significado constatamos la presencia de la fracción como cociente indicado en todos los períodos temporales, salvo en la década de los 70. Ahora bien, a pesar de que la mayoría de los textos consultados presentan el convenio los argumentos para justificarlo son inexistentes o insuficientes. Los libros de texto introducen el significado de cociente indicado porque ven en este convenio un método económico para conectar dos sistemas de representación habituales del número racional positivo: la notación fraccionaria y la notación decimal.

Los manuales escolares destinados a los niveles elementales de enseñanza, anteriores a la década 70, no sienten la necesidad de justificar el convenio que establece la igualdad entre elementos de conjuntos numéricos diferentes. Esto es así, porque los manuales escolares de estos períodos presentan las características siguientes:

a) presentan los conceptos matemáticos desprovistos de las acciones básicas que los generaron,

b) enfatizan la adquisición de destrezas en detrimento de argumentaciones que justifiquen la introducción de los conceptos y de las reglas de cálculo simbólico, y

c) no establecen una separación conceptual entre los conjuntos numéricos de los naturales y los racionales; e introducen la fracción (quebrado) en la lección dedicada a la división de números naturales.

Los manuales de estas épocas se sirven de un ejemplo para mostrar que la fracción puede interpretarse como un cociente indicado. Así, Gallego Chaves (1880; pp. 25), en la *Aritmética completa para niños*[18], introduce el quebrado para expresar el "*verdadero cociente en la división inexacta"*:

> *P. ¿Cómo se indica la división?*
>
> *R. Con dos puntos entre el dividendo y el divisor, en esta forma: 6 : 3; ó colocando el divisor debajo del dividendo y entre ellos una raya, como* $\frac{6}{3}$.
>
> *De ambos modos se lee 6 dividido por 3.*
>
> *…………………*
>
> *P. ¿Cómo se indica el verdadero cociente en la división inexacta?*
>
> *R. Sumando con el cociente entero la división indicada del residuo por el divisor.*
> *Ejemplo:* $27 : 6 = 4 + \frac{3}{6}$ *y se dice: 27, dividido por 6, igual a 4, más 3 dividido*[19] *por 6.*

Texto II.16: La fracción con el significado de cociente indicado en un libro de texto siglo XIX

En esta presentación, la fracción como cociente indicado se utiliza para mostrar la igualdad entre la división de naturales y la fracción, pero no plantea la resolución de un problema contextualizado con cantidades de magnitud. Tal y como se presenta este significado, el alumno entenderá que las fracciones tienen el numerador menor que el denominador por cuanto se refieren, respectivamente, al resto y al divisor de una división de números naturales. Además, difícilmente el alumno percibirá que la fracción es un ente numérico necesario para cubrir limitaciones del número natural; antes bien, interpretará la fracción como un símbolo que describe el modo en que se completa la división de números naturales. Evidentemente, el alumno construirá una idea abstracta de la fracción; al vincular ésta con la división de números no medida; pero difícilmente generará aprendizajes significativos porque el alumno no dispone de acciones físicas ni de modelos de aprendizaje sobre los que construir, de forma eficaz, el significado de fracción.

---

[18] Gallego Chaves, A. (1880) *Aritmética completa para niños* (9ª edición). Aprobada por la Autoridad eclesiástica y declarada de utilidad para la enseñanza por Real orden de 20 de Diciembre de 1886. Saturnino Calleja Fernández. Madrid

[19] En esta respuesta el autor recomienda: "Los señores Profesores cuidarán de que este modo de nombrar el cociente de una división inexacta varíe tan pronto como los discípulos conozcan los números quebrados"

La *Aritmética* de la editorial Edelvives[20] (1934, pp. 82) mantiene el criterio observado en los manuales del siglo XIX y presenta el quebrado en la lección dedicada a la división de números naturales:

75. **Cociente completo de una división inexacta.**—Si al cociente de una división se agrega el resto y el divisor, separados por una rayita, se tiene el *cociente completo*. En la división

$$\begin{array}{r|l} 25 & \underline{4} \\ 1 & 6 \end{array}$$

el cociente completo será, pues, **6 1/4** (6 y 1 cuarto). La forma 1/4 indica que para llegar al resultado exacto, habría que dividir el resto 1 por el divisor 4.

Así, por ejemplo, si 25 metros de paño han de repartirse entre 4 personas, a cada una tocan exactamente, según la división anterior, *6 metros y cuarto,* es decir, 6 metros y una fracción de otro dividido en 4 partes iguales.

NOTA. — El número 1/4 constituye un *quebrado*. Los quebrados vienen originados por divisiones inexactas.

Texto II.17: La fracción como cociente indicado en un libro de texto de la primera mitad del siglo XX

Esta forma de presentar la fracción como cociente indicado es similar a la de Gallego Chaves (Texto II.16) y a la de otras aritméticas de la época. Sin embargo, ninguno de estos manuales cuestiona la aportación de éstos nuevos números al desarrollo del conocimiento matemático aparte, claro está, de completar la división de naturales.

Desde la perspectiva educativa que nos ocupa, entendemos que la cuestión de la extensión algebraica de un conjunto numérico en otro no puede ser abordada en los momentos iniciales de la enseñanza del número racional positivo. Ahora bien, la enseñanza en los niveles básicos debería ir preparando el camino hacia la construcción de ideas abstractas a partir de las acciones, físicas y mentales, que los alumnos realicen en un ambiente de resolución de problemas planteados de acuerdo con modelos de aprendizaje estables. La construcción de ideas abstractas debería venir precedida del trabajo del alumno resolviendo problemas contextualizados y, en este sentido nos parece adecuado el problema que enuncia el manual de Edelvives que está contextualizado en una situación de reparto igualitario de una magnitud continua, la longitud.

A pesar de que el texto de Edelvives no resuelve este problema, suponemos que la situación de reparto se formula para dar sentido a la división de naturales 25:4. Desconocemos si la intención de los autores es la de realizar el reparto de los 25 metros de

[20] Aritmética (1934). Segundo Grado. Sexta edición. Editorial Luis Vives. Barcelona

tela en dos fases para obtener la representación fraccionaria $6\frac{1}{4}$ que le permitiría conectar conceptualmente la división y la fracción con la idea de reparto. Preferimos pensar que los autores de este texto presentan un problema contextualizado en términos de reparto porque entienden que las situaciones concretas permiten dotar de significado a los símbolos matemáticos y que el contexto de reparto igualitario es un modelo adecuado para la enseñanza de la fracción.

En general, los manuales escolares destinados a los niveles elementales de enseñanza, anteriores a la década de los 70, introducen el significado de cociente indicado mediante el convenio que liga la fracción y la división de naturales pero no justifican dicho convenio. Con el paso del tiempo y el advenimiento de nuevos planes de estudios se esperaba que los textos escolares se implicasen en mayor medida en los aspectos conceptuales de la enseñanza del número racional y, en particular, en la justificación conceptual del significado de la fracción como cociente indicado. La década de los 80, después del abandono de la Matemática Moderna, hubiera sido un momento adecuado para replantear la enseñanza de las Matemáticas porque la organización escolar en España estaba suficientemente preparada, y porque se daban las condiciones para abordar una reforma en profundidad de las materias curriculares. Pero esto no ocurrió, y la "vuelta a lo básico" se concretó, en la modificación del significado de cociente indicado que pasó a denominarse *división exacta,* y que consiste en proponer la enseñanza del convenio que liga la fracción y la división de naturales en el caso particular de que el numerador sea múltiplo del denominador[21]:

2.3.3. Interpretar fracciones como cociente de dos números.

a) Pon en forma de fracción las divisiones siguientes:

16 : 4 =   12 : 3 =   25 : 5 =

b) Indica a qué división se refieren las fracciones siguientes:

$\frac{8}{2}$ = ... $\frac{18}{6}$ = ... $\frac{25}{5}$ = ...

Texto II.18: Los Programas Renovados proponen introducir la fracción como división exacta

La modificación del significado de fracción como cociente indicado, en favor de *división exacta,* invalida la idea que origina y da sentido a la fracción como cociente indicado; a saber, que la fracción pertenece a una estructura numérica en la que todos los números pueden ser expresados mediante la división de números enteros. Desde la visión restrictiva de la fracción como división exacta, el alumno puede forjarse ideas erróneas como pensar que solo los números naturales admiten una expresión fraccionaria o que no existen otras fracciones que las que generan un cociente exacto. Desde un punto de vista fenomenológico es inoportuno incidir en la enseñanza de la fracción como división exacta, porque obstaculiza la comprensión de la fracción como cociente indicado.

21 Vida Escolar nº 210. Enero-Febrero 1981. pp. 19. Revista oficial del Ministerio de Educación y Ciencia

Desde la década de los 80 hasta el momento actual los libros de texto presentan la fracción como división exacta e intentan justifican el convenio que liga la fracción con el número natural mediante argumentaciones sustentadas en la relación parte-todo. El libro de texto Matemáticas 4º ALERCE[22] (pp.72) ejemplifica esta práctica de enseñanza que opta por realizar justificaciones desde la relación parte-todo:

7. Una fracción representa el cociente de dos números

- *Observa: Cada queso está dividido en 2 partes iguales. Hay 6 partes.*

¿Cómo se representan estos 3 quesos con una fracción?

La unidad está dividida en 2 partes iguales y tomo 6; luego la fracción es:

$\frac{6}{2}$ ← partes que tomo. ← partes en que está dividido cada queso.

- Pero, además, si dividimos las 6 partes entre 2 obtenemos como cociente 3 quesos:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \qquad \text{o también } 6 : 2 = 3$$

Vemos que la fracción $\frac{6}{2}$ representa el cociente de la división 6 : 2.

> Una fracción representa el **cociente** de la división del numerador y del denominador.

Texto II.19: Presentación del significado de división exacta desde la relación parte-todo

El texto utiliza la relación parte-todo para interpretar la fracción $\frac{6}{2}$ y justificar la igualdad:

$$\frac{6}{2} = 3$$

Sin embargo, no dota de significado a la división 6 : 2. Desde la situación que plantea no se justifica la necesidad de realizar la división; ésta carece de sentido. El texto concluye afirmando que *una fracción representa el cociente de la división* pero se desconoce qué significado tiene tal cociente.

Lógicamente, la relación parte-todo es ineficaz para justificar, por sí sola, la introducción de la fracción como división exacta; el aporte conceptual debe provenir de alguna situación en el que tenga sentido la división. En consecuencia, el libro de texto no consigue justificar la fracción como división exacta mediante razonamientos sustentados en la relación parte-todo porque no asigna ningún significado a la división de naturales.

[22] Bujanda, M.P., Mansilla, S, (1986) ALERCE. Matemáticas 4º EGB. Ediciones SM. Madrid

Los libros de texto actuales introducen el significado de cociente indicado o división exacta en momentos puntuales de la secuencia de enseñanza para establecer la conexión entre la notación fraccionaria y la notación decimal, pero no lo consideran relevante en la enseñanza del número racional positivo porque no lo utilizan para justificar relaciones o propiedades de dicho conjunto numérico.

En el cuadro II.8 se muestran los períodos temporales en los que los textos escolares han presentado el significado de cociente indicado de la fracción con las limitaciones que acabamos de indicar:

Significado de la fracción	*1850/1900*	*1900/1950*	*1950/1970*	*1970/1980*	*1980/1990*	*1990/2006*
Cociente indicado	SI	SI	SI	-	SI Div. exacta	SI Div. exacta

Cuadro II.8: Evolución en el tiempo del significados de cociente indicado de la fracción

A modo de resumen, mostramos en el cuadro II.9 los períodos temporales en los que hemos detectado los seis significados de la fracción en los textos escolares. La ausencia de un determinado significado en el período temporal se denota con un guión:

Significado de la fracción	*1850/1900*	*1900/1950*	*1950/1970*	*1970/1980*	*1980/1990*	*1990/2006*
Medida directa	-	-	-	-	-	-
Medida evocada	SI	SI	-	-	-	-
Medida aparente	-	SI	-	-	-	-
Relación parte-todo	-	SI	SI	SI	SI	SI
Cociente partitivo	-	SI	-	-	-	SI
Razón	-	-	-	-	-	-
Operador	-	-	-	SI	SI	-
Cociente indicado	SI	SI	SI	-	SI Div. exacta	SI Div. exacta

Cuadro II.9: Evolución en el tiempo de los significados de la fracción

II.14. Análisis fenomenológico didáctico del número decimal

Después de efectuar el análisis fenomenológico didáctico de la fracción vamos a efectuar el correspondiente análisis centrado en el número decimal; con esta finalidad nos proponemos estudiar qué significados han utilizado y utilizan los libros escolares del Sistema Educativo Español para introducir el concepto de número decimal.

Abordamos este estudio a partir de las siguientes consideraciones:

- El hecho de haber realizado previamente el estudio correspondiente a la fracción va a simplificar el análisis fenomenológico didáctico del número decimal porque ninguno de los textos consultados aborda la enseñanza del número decimal desde los significados de operador, cociente indicado, cociente partitivo y razón. Conviene observar que estamos estudiando los significados del número racional que emplean los libros de texto en los momentos iniciales de la enseñanza del número decimal. En consecuencia, hemos de estudiar dos significados del número racional positivo: medida y relación parte-todo.
- También hemos detectado propuestas de enseñanza del número decimal que no se ajustan a ninguno de los significados porque proponen situaciones descontextualizadas con números no medida. Plantean una enseñanza abstracta, al margen de los significados del número racional, sustentada en la presentación formal de los contenidos.
- Entendemos que la génesis histórica de la fracción es anterior a la del número decimal, y coincidimos con Freudenthal (1983, pp. 134) en que la fracción es la fuente fenomenológica del número racional puesto que este término evoca ideas de fractura, que es una acción básica que está en el origen del número racional positivo.

  Sin embargo, a lo largo de las distintas épocas educativas los libros de texto presentan los contenidos de formas distintas, y también son distintas las ideas sobre la separación conceptual de las estructuras numéricas, tal y como se refleja en el cuadro C.II.10:

	1850/1900	*1900/1950*	*1950/1970*	*1970/1980*	*1980/1990*	*1990/2006*
El decimal, ¿se enseña antes o después de la fracción?	Se enseña a partir de fracciones decimales	Se enseña antes que la fracción	Se enseña antes que la fracción	Se enseña antes que la fracción	Se enseña a partir de fracciones decimales	Se enseña a partir de fracciones decimales
¿Existe separación conceptual entre N y Q?	NO	NO	NO	SI	SI	SI

C.II.10: Indicadores referidos a la enseñanza del número decimal que proponen los libros de texto

Atendiendo a estas consideraciones y a la secuenciación de contenidos del cuadro anterior, percibimos dos grupos claramente diferenciados al estudiar los significados del número decimal que proponen los libros de texto:

- El número decimal se presenta antes que la fracción.
- El número decimal se presenta a partir de las fracciones decimales.

II.14.1. El número decimal se presenta antes que la fracción

Esta secuencia de enseñanza no obedece a la génesis histórica del número racional, y este hecho obliga a los autores de libros de texto a utilizar discursos formales o a recurrir a artificios que empobrecen la comprensión de los aspectos esenciales del número decimal. Seguidamente analizamos tres presentaciones del número decimal que caracterizan esta secuencia instructiva: como extensión del sistema de numeración, como sumas de potencias de 10 y como el resultado de la medida

II.14.1.1. El número decimal como extensión del sistema de numeración decimal

Debido a la influencia de la constitución del Sistema Métrico Decimal a finales del siglo XXVIII, se incrementan las necesidades sociales de conocer y utilizar los números decimales. Consecuentemente, las autoridades educativas conceden mayor importancia a la enseñanza del número decimal y adelantan su presentación al Primer Grado de Educación Primaria. En estas condiciones, y como hemos podido constatar en nuestro estudio, la introducción del número decimal se hace de forma descontextualizada, sin hacer referencia a cantidades de magnitud. En consecuencia, el número decimal se concibe como otra forma diferente de escribir el número natural, dado que los textos escolares no establecen una separación conceptual entre los números naturales y los racionales positivos.

Hasta la publicación de la L.G.E. de 1970 se detecta una cierta estabilidad en la presentación del número decimal como “números naturales con coma” , cuya simbolización se presenta mediante la extensión formal del sistema de representación de los números naturales. Y así figura expresamente en las directrices ministeriales que ordenan los Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria de 1965 (B.O.E. de 24-IX-65; pp. 14):

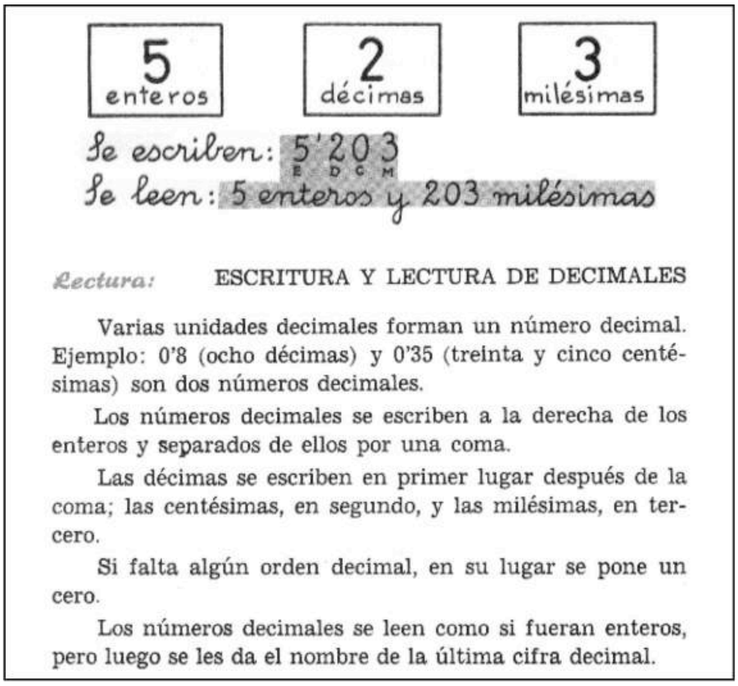
> *Las fracciones son simplemente una extensión del sistema numeral a cantidades menores que la unidad, expresadas en forma de quebrados o de decimales, etc*

Esta recomendación ministerial incide en los aspectos formales del decimal, es decir, en el parecido con la representación simbólica del natural, más que en los aspectos fenomenológicos. En estas condiciones, los manuales escolares se ven abocados a realizar una presentación ostensiva de unos nuevos entes numéricos, como lo hace la enciclopedia Alvárez[23] de Primer Grado (pp. 108) que mostramos en la página siguiente.

Se observa que la enciclopedia no define el número decimal; afirma que “*varias unidades decimales forman un número decimal*” pero no explica en qué modo estas unidades constituyen el número decimal. Es más, en el párrafo siguiente el autor identifica número decimal con su parte decimal cuando escribe:

> *Los números decimales se escriben a la derecha de los enteros.*

[23] Alvárez Pérez, A. (1964). Enciclopedia. Primer Grado. Editorial Miñón. Valladolid



5 enteros	2 décimas	3 milésimas

Se escriben: 5'203
Se leen: 5 enteros y 203 milésimas

Lectura: ESCRITURA Y LECTURA DE DECIMALES

Varias unidades decimales forman un número decimal. Ejemplo: 0'8 (ocho décimas) y 0'35 (treinta y cinco centésimas) son dos números decimales.

Los números decimales se escriben a la derecha de los enteros y separados de ellos por una coma.

Las décimas se escriben en primer lugar después de la coma; las centésimas, en segundo, y las milésimas, en tercero.

Si falta algún orden decimal, en su lugar se pone un cero.

Los números decimales se leen como si fueran enteros, pero luego se les da el nombre de la última cifra decimal.

Texto II.22: Enseñanza del número decimal como extensión del natural

Desde estas consideraciones se perfila el significado del número decimal que perciben los escolares:

- *a'bcd…* es un ente abstracto, un número no medida.
- Cada unidad de un orden equivale a diez unidades del orden inmediato inferior. Este conocimiento ya es conocido por el alumno para números naturales, pero ello no implica la comprensión de estas relaciones con cantidades no enteras.
- El número decimal no se asocia a actividades de medida, antes bien se refuerza la idea de identificar los números naturales y racionales.
- El número decimal, tal y como se presenta, potencia la concepción errónea de ser interpretado como la conjunción de dos números naturales.

II.14.1.2. El número decimal como suma de potencias de 10

En la década de los 70, el Ministerio de Educación y Ciencia aprueba las Orientaciones Pedagógicas para la EGB[24] que promueven la experimentación educativa con la "*introducción de nuevos métodos y modernos medios de enseñanza*" (MEC, 1970; pp. 2). En este nuevo contexto se incorporan modelos de enseñanza que sustituyen el concepto matemático por otro objeto formal que tenga un comportamiento cercano al concepto a enseñar, como las regletas de Cuisenaire, los bloque multibase de Dienes o el minicomputador de Papy.

[24] M.E.C.(1970) Las Orientaciones Pedagógicas para los Planes y Programas de estudios de la Educación General Básica. Madrid

Algunos libros de texto también recurren a la evocación de objetos físicos para presentar el número decimal. Este es el caso del texto *Matemáticas 4*[25] (pp. 36-38):

Números decimales

Otros números con coma

Ahora dispones de fichas redondas y cuadradas. Las redondas valen más que las cuadradas.

Para cambiar fichas haces lo que indica la tabla.

Cambios de fichas redondas	Cambios de fichas cuadradas
10^1 por 10 1	1 por 10 $\boxed{10^{-1}}$
10^2 por 10 10^1	$\boxed{10^{-1}}$ por 10 $\boxed{10^{-2}}$
10^3 por 10 10^2	$\boxed{10^{-2}}$ por 10 $\boxed{10^{-3}}$
10^4 por 10 10^3	$\boxed{10^{-3}}$ por 10 $\boxed{10^{-4}}$
10^5 por 10 10^4	$\boxed{10^{-4}}$ por 10 $\boxed{10^{-5}}$

La barra separa las fichas redondas de las fichas cuadradas. Esto ya lo has visto cuando estudiaste los cambios de fichas que se hacían en el parque de atracciones.

Puedes escribir ese número de fichas de las cuatro formas que ya conoces.

Primera forma

10^4	10^3	10^2	10^1	1	$\boxed{10^{-1}}$	$\boxed{10^{-2}}$	$\boxed{10^{-3}}$
1	4	2	3	5	7	2	4

Segunda forma

$1 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 1 + 7 \times \boxed{10^{-1}} + 2 \times \boxed{10^{-2}} + 4 \times \boxed{10^{-3}}$

Tercera forma

$1 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 1 + 7 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}$

Cuarta forma

14235,724

Texto II.23: Enseñanza del número decimal con materiales estructurados en la década de los 70

Desde el punto de vista matemático la presentación que realiza este texto es incuestionable porque pone de manifiesto la representación polinómica decimal que subyace a la notación decimal. Ahora bien, desde el punto de vista didáctico, cabe cuestionar el modelo utilizado

25 Aizpún, Alberto (1974) *Matemáticas 4* (Libro de consulta). Magisterio Español. Madrid

por situarse lejos del mundo del alumno, y porque recurre al uso de potencias de exponente negativo que es una simbolización desconocida para alumnos de 4º de EGB.

Esta enseñanza del número decimal desde modelos formales, con la ayuda de materiales estructurados, es demasiado abstracta y permite que el alumno construya un significado del número decimal con las siguientes peculiaridades:

- El número decimal es un ente abstracto que surge de relaciones numéricas definidas entre números naturales y entre números de origen desconocido.
- El número decimal se asocia a potencias de 10 de exponente negativo, que son objetos matemáticos inexistentes para el alumno
- El paso de la representación polinómica del número decimal a la representación decimal se hace de forma ostensiva. En estas condiciones, se limita la comprensión de los alumnos porque asocian la parte no entera a las potencias negativas de 10, pero no pueden interpretar el valor posicional de las cifras colocadas a la derecha de la coma decimal.

II.14.1.3. El número decimal como expresión de la medida

Son escasos los libros de texto que introducen el número decimal con el significado de medida. Hemos detectado dos tipos de medida que pasamos a describir: a) la medida con subunidades que se obtienen al fraccionar en potencias decimales la unidad de medida, y b) la medida con unidades del Sistema Métrico Decimal correspondientes a alguna magnitud.

a) Utilizar subunidades fraccionando en potencias decimales la unidad de medida

Los primeros libros de texto que proponen introducir el número decimal desde el significado de medida están publicados en la década de los 70, posiblemente con la intención de presentar los contenidos desde situaciones más próximas al mundo de los objetos físicos y, consecuentemente, más alejadas de las presentaciones formales propias de la matemática moderna. De este modo, la introducción del número decimal desde el significado de medida supone una novedad en el método de enseñanza que rompe con la forma tradicional de presentar estos números como entes evidentes, en virtud a su parecido con los naturales y descontextualizados de las cantidades de magnitud. Un ejemplo de este tipo de presentación del número decimal lo encontramos en el texto *Matemáticas Básicas*[26] para 4º nivel de E.G.B., que mostramos en la página siguiente.

En la presentación que efectúa este texto, el número decimal se introduce desde el significado de medida *evocada* porque el texto no propone realizar la medida con objetos tangibles. El texto tampoco plantea el uso de otras técnica de medida, con las que el resultado de la medida bien pudiera ser una fracción o la suma de fracciones unitarias, porque va dirigido a alumnos que no han recibido enseñanza de la fracción.

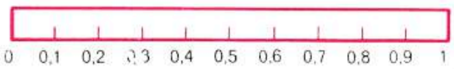
[26] Ramos Sobrino, A. (1977) *Matemáticas Básicas 4º curso de EGB*. Ediciones Anaya. Salamanca

Necesidad de los números decimales.

Tomando como unidad de medida el listón rojo, las medidas aproximadas del segmento AB son:

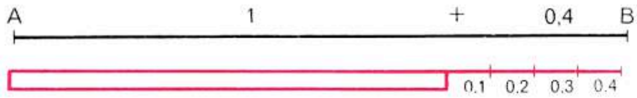
1, **por defecto**
2, **por exceso**

Para aproximarnos más en la medida, dividimos la unidad que hemos tomado en 10 partes iguales:



Cada una de las 10 partes iguales de la unidad es una **décima.**

Una décima se escribe así: 0'1. Tomamos la décima como unidad para medir el trozo de segmento que excede de la medida entera.



El segmento mide:

1 unidad y 4 décimas.

Esto puede escribirse: $\boxed{1'4}$

1'4 es un **número decimal.**

Los números naturales nos servían **para contar.**
Los números decimales nos sirven **para medir** con mayor aproximación.

Texto II.24: Enseñanza del número decimal con el significado de medida en la década de los 70

Esta presentación del concepto introduce un significado con las siguientes características:

- El número decimal expresa el resultado de la medida de una cantidad de magnitud.
- El número decimal se presenta disociado de la descripción de la técnica de medida.

- La notación decimal se introduce a partir de una serie de convenios de carácter simbólico. Así, el texto define *décima* y establece los siguientes convenios:

  Una décima se escribe así: 0´1;

  Una unidad y 4 décimas puede escribirse: 1´4.

  Ahora bien, el hecho de que el alumno conozca estos convenios no garantiza la comprensión de aspectos esenciales como el papel que juega la unidad y la relación de ésta con los submúltiplos suyos; las conversiones entre los diferentes órdenes de unidades.
- Las normas sintácticas del sistema decimal no se han hecho explícitas.
- Se oculta el valor relativo de las cifras en el sistema de numeración decimal.

b) Utilizar unidades del Sistema Métrico Decimal

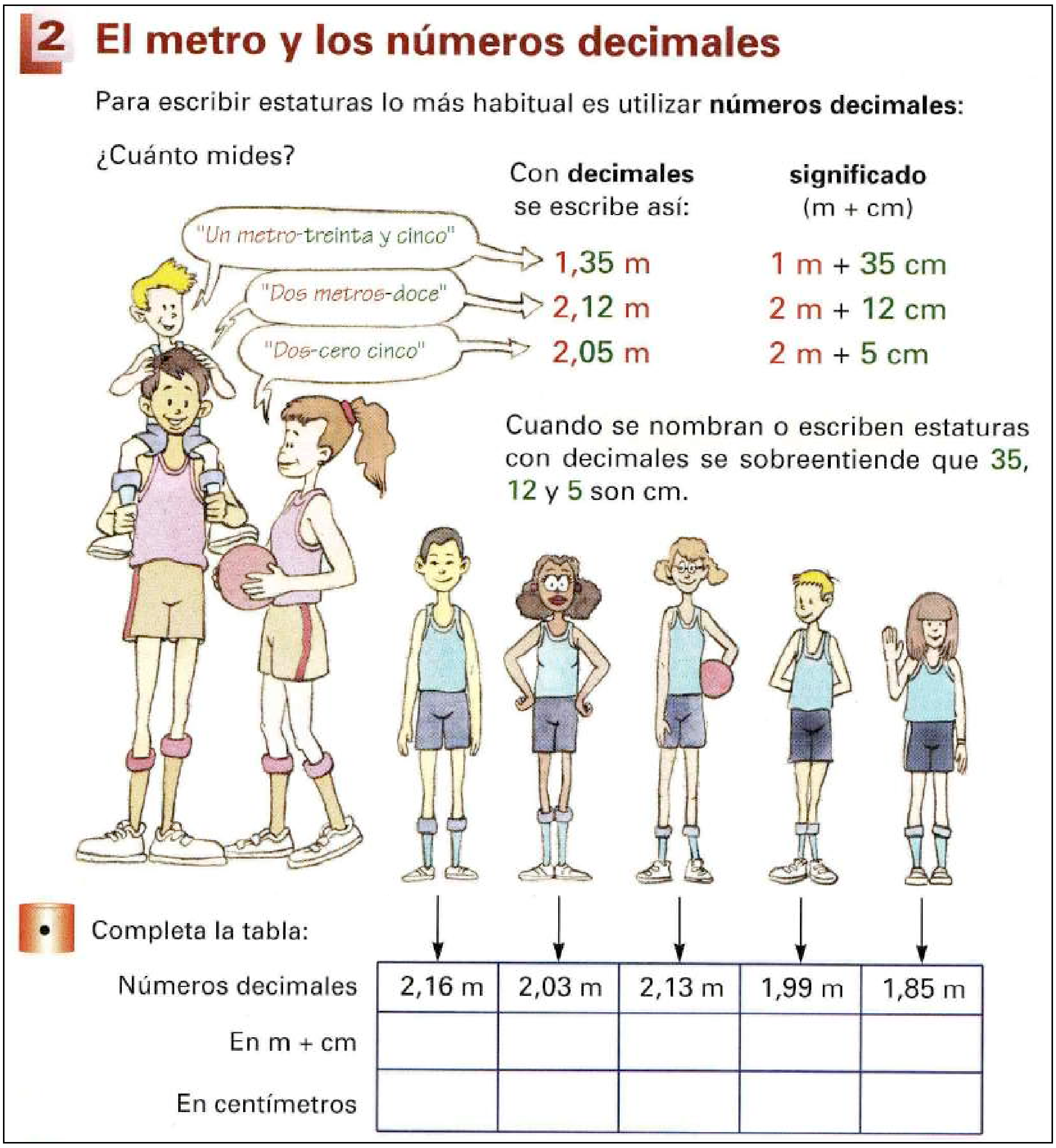
El número decimal aparece como una forma de codificar una medida de modo que el código permite pasar de una expresión de la medida, que está referida a dos o más unidades, a una expresión que sólo esté referida a una unidad (Centeno, 1988).

Se hace una presentación ostensiva del número decimal justificada en la necesidad de trasladar términos usuales del lenguaje oral al lenguaje simbólico. Esta situación puede llevar a los escolares a pensar que los números decimales no son números nuevos, sino "otra forma de escribir" los naturales.

Para ejemplificar esta forma de introducir el número decimal nos servimos, en la página siguiente, del texto Matemáticas 4º curso[27] (pp. 128). A través de esta presentación se configura un significado de número decimal con las siguientes peculiaridades:

- Es un número que expresa el resultado de la medida de cantidades de magnitud referido a una única unidad de medida. Es decir, el número decimal surge como consecuencia de un cambio de unidad y no como resultado de aplicar una técnica de medida determinada.
- El número decimal es la suma de una parte entera, expresada por un número natural, y una parte no entera, también expresada con un número natural, que indica el número de unidades de menor tamaño. De este modo, se refuerza la idea de que el número decimal está formado por dos números naturales; es decir, se trasmite la idea de que los números decimales son como *números con coma* o como *dos partes separadas por una coma: a la izquierda la parte entera, y a la derecha la parte decimal.*
- Los números decimales son prescindibles, pues basta utilizar la unidad de medida más pequeña y trabajar con los números naturales.

[27] Matemáticas 4º Educación Primaria. (1996). Editorial Edelvives. Zaragoza



2 El metro y los números decimales

Para escribir estaturas lo más habitual es utilizar **números decimales**:

¿Cuánto mides?

	Con **decimales** se escribe así:	**significado** (m + cm)
"Un metro-treinta y cinco"	1,35 m	1 m + 35 cm
"Dos metros-doce"	2,12 m	2 m + 12 cm
"Dos-cero cinco"	2,05 m	2 m + 5 cm

Cuando se nombran o escriben estaturas con decimales se sobreentiende que 35, 12 y 5 son cm.

• Completa la tabla:

Números decimales	2,16 m	2,03 m	2,13 m	1,99 m	1,85 m
En m + cm					
En centímetros					

Texto II.25: Enseñanza del número decimal como medida con unidades de Sistema Métrico Decimal

- La relación entre los distintos órdenes de unidades viene determinado por las relaciones entre las distintas unidades de longitud del Sistema Métrico Decimal. Pero esta situación puede ser fuente de errores si dichas relaciones se establecen entre unidades de otras magnitudes como superficie, volumen o capacidad.
- Queda oculta la representación polinómica decimal asociada al número decimal, porque el texto utiliza la igualdad:

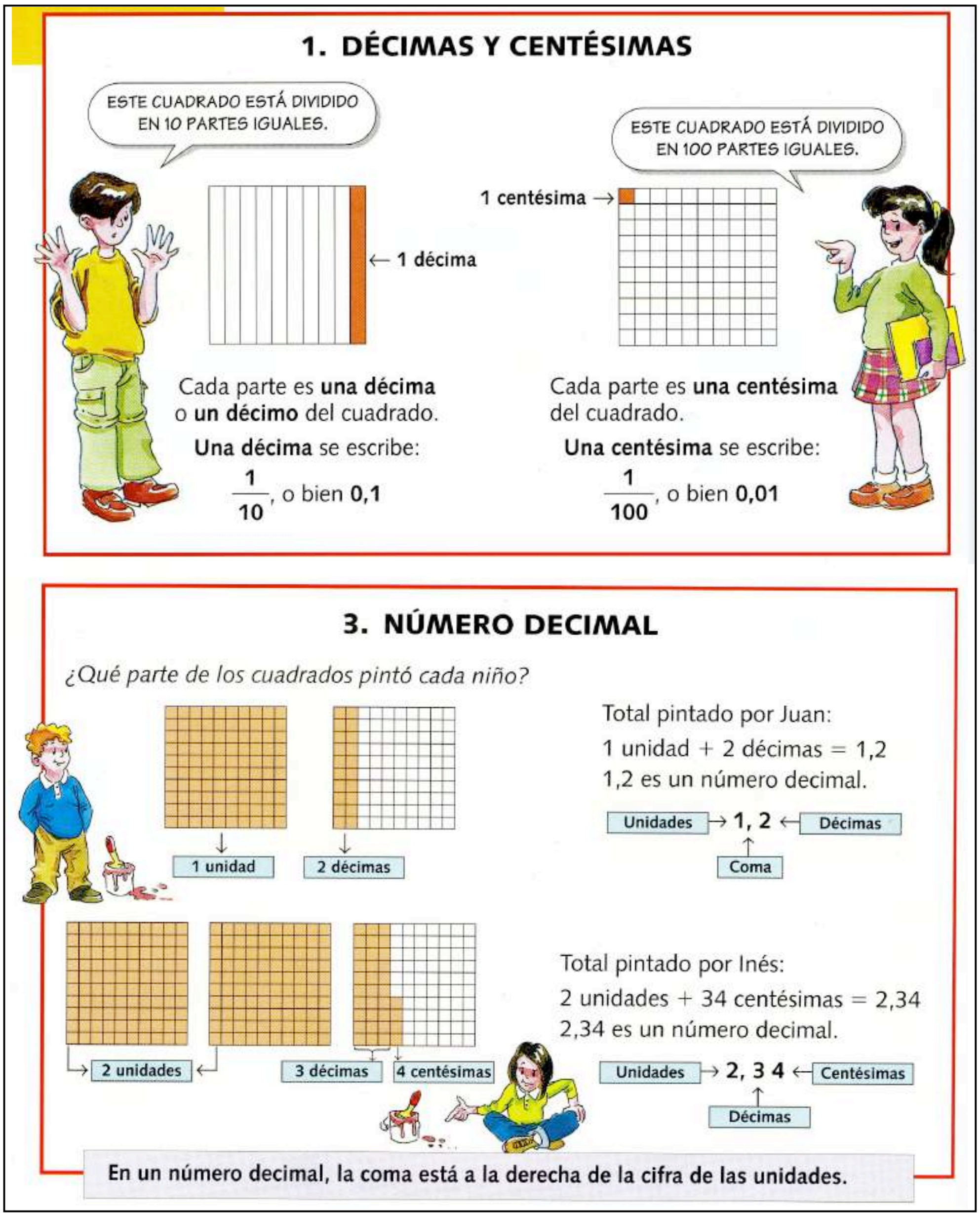
$$1'35 = 1 + 35x\frac{1}{10^2};$$

en lugar de la representación: $1'35 = 1 + 3x\frac{1}{10} + 5x\frac{1}{10^2}$.

- La terminología correspondiente a los distintos órdenes de unidades (décimas, centésimas, etc) se sustituyen por la terminología correspondiente al Sistema Métrico Decimal (decímetros, centímetros, etc).

II.14.2. El número decimal se presenta después que la fracción

La mayoría de los textos escolares, desde los años 90, introducen el número decimal después de haber introducido la fracción como relación parte-todo, como hace el texto de Matemáticas 4º curso[28] de Educación Primaria de la editorial Santillana (pp. 96 y 98):



Texto II.26: Enseñanza del número decimal desde la relación parte-todo

28 García, P. y otros (1998) Matemáticas 4º Primaria. Editorial Santillana. Madrid

Este proceso instructivo origina un significado del número decimal con las siguientes peculiaridades:

- El número decimal es otra forma de escritura de la fracción.
- El número decimal expresa una parte destacada de un gráfico.
- Es un significado distinto al de la medida por cuanto no expresa el resultado de aplicar una técnica de medida a una cantidad de magnitud.
- El número decimal resuelve un problema que solamente tiene cabida en el ámbito escolar.
- El convenio de paso de las fracciones decimales se presenta de forma parcial, tan solo se cita para los casos de una décima y una centésima.
- Las relaciones entre los diferentes órdenes de unidades no son perceptibles.
- Queda oculta la representación polinómica subyacente.

A modo de resumen, mostramos en el cuadro II.11 los significados del número decimal que hemos detectado, en cada uno de los períodos temporales, en los libros de texto destinados a los niveles básicos de enseñanza para introducir el número decimal:

Decimal	***1850/1900***	***1900/1950***	***1950/1970***	***1970/1980***	***1980/1990***	***1990/2006***
Significado del decimal	Modelos formales Sin significado	Modelos formales Sin significado	Modelos formales Sin significado	Modelos formales Medida evocada	Relación parte-todo Medida evocada	Relación parte-todo Medida evocada

Cuadro II.11: Significados del número decimal en cada período temporal

II.15. Resultados del análisis fenomenológico didáctico

El análisis fenomenológico didáctico que hemos realizado, mediante la revisión de libros de texto publicados desde la mitad del XIX hasta el momento actual con el objetivo de detectar qué significados ha utilizado y utiliza el Sistema Educativo Español para introducir la fracción y el número decimal en los niveles básicos de enseñanza aporta los resultados siguientes:

1. Sobre los significados asociados a la fenomenología de la medida

Las propuestas didácticas analizadas no están fundamentadas en ninguno de los tres significados del número racional positivo que pertenecen a la fenomenología histórica del número racional positivo. Indicamos, a continuación, el uso que el Sistema Educativo Español ha hecho y hace de estos significados del número racional positivo: razón, cociente partitivo y medida

- El significado de razón no aparece en los momentos iniciales de la enseñanza de la fracción ni del número decimal. Tradicionalmente, el significado de razón se ha presentado y se sigue presentando en lecciones posteriores a la enseñanza de la fracción, desvinculado de ésta y asociado al concepto de proporcionalidad.
- El significado de cociente partitivo se utiliza en muy pocos textos escolares para introducir la fracción, y ninguno lo utiliza para introducir el número decimal. Además, los escasos libros de texto que presentan la fracción con este significado, después no lo utilizan para justificar las relaciones y operaciones con fracciones.
- El significado de medida directa no se utiliza en la enseñanza de la fracción y del número decimal, y son muy pocos los libros de texto que introducen el número decimal como *medida evocada*, bien utilizando subunidades decimales de la unidad, o bien utilizando las unidades y subunidades del Sistema Métrico Decimal. Los escasos libros de texto que utilizan la medida evocada están publicados con posterioridad a la década de los ochenta. Algunos manuales escolares de la primera mitad de siglo XX describen el proceso de medida de cantidades de longitud para introducir la fracción (*medida evocada*); y otros manuales de la misma época se sirven de gráficos bidimensionales para introducir la fracción como una comparación entre cantidades de magnitud superficie.

2. Sobre los significados asociados a la evolución interna de las matemáticas

Los significados de *operador y cociente indicado* pertenecen a la fenomenología histórica del número racional pero su origen se sitúa en la resolución de problemas internos de las Matemáticas. Los libros de texto optan por trivializar ambos significados de modo que el operador pierde su sentido inicial en favor de la relación parte-todo y el cociente indicado se convierte en un convenio que obstaculiza la comprensión de la fracción. A continuación indicamos como se ha producido la pérdida de estos significados.

- En la década de los setenta, con la reforma de la “Matemática Moderna”, la enseñanza de la fracción se aborda exclusivamente desde el significado de *operador*. La fracción se conceptúa como la composición de funciones, en el contexto de una práctica educativa formal, abstracta y descontextualizada del mundo de los objetos sensibles.

  El significado de la fracción como operador fue desapareciendo de los textos escolares, poco a poco, durante la década de los 80, como consecuencia de la progresiva consolidación de la relación parte-todo: las situaciones que antes se resolvían desde el significado de operador pasan a ser interpretadas y gestionados desde la relación parte-todo.

  En los libros de texto actuales encontramos vestigios de este significado en dos momentos puntuales de las propuestas didácticas: la fracción de un número o de una cantidad, y las situaciones de “parte de parte” que dan sentido a la multiplicación de fracciones. En ambos casos, los autores de los textos gestionan estas situaciones desde la relación parte-todo, a pesar de que los fenómenos que organizan pueden ser abordados, de forma adecuada, desde el significado de medida.

- Todos los libros de texto analizados introducen una versión "débil" del significado de cociente indicado que consiste en establecer el convenio que liga la fracción con la división del numerador entre el denominador de la fracción. La intención de los autores de estos textos no es conceptuar el número racional como una extensión del conjunto de los números naturales; el objetivo es introducir el convenio entre la fracción y la división indicada que les va a permitir, posteriormente, conectar la fracción y el número decimal mediante un procedimiento de cálculo: la extensión del algoritmo de la división de naturales.

  Desde la reforma de los Programas Renovados de la década de los 80, el significado de fracción como cociente indicado se modificó en el sentido de restringir el convenio al caso en el que el resultado de la división sea un número natural, y pasó a llamarse *división exacta*. Desde el punto de vista fenomenológico la enseñanza de la fracción como división exacta no se sostiene; los textos escolares introducen un convenio entre representaciones simbólicas pero no conceptúan la fracción como cociente indicado.

  En estas condiciones, el significado de cociente indicado ha desaparecido de los libros de texto actuales, aunque se mantenga esa denominación con un convenio que se presenta carente de justificación conceptual.

3. Sobre el significado de relación parte-todo

La enseñanza de la fracción como *relación parte-todo* aparece, de manera gradual en algunos textos de la primera mitad del siglo XX, como consecuencia de un proceso gradual de sustitución del significado de *medida directa* por presentaciones a partir de la *medida evocada* y, posteriormente, de *medida aparente*.

Desde la reforma de los Programas Renovados de la década de los ochenta la relación parte-todo ha ido ganando influencia en la enseñanza del número racional positivo mientras que los otros significados del número racional tienen un tratamiento marginal en los libros de textos.

En la actualidad, la enseñanza inicial de la fracción que proponen los libros de texto se ha uniformado fundamentándose, exclusivamente, en la *relación parte-todo;* mientras que otros significados como el de *medida,* de *razón,* de *operador* están ausentes y los significados de *cociente partitivo* y *cociente indicado* están infrautilizados.

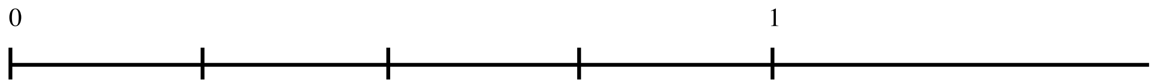
En cuanto a la enseñanza del número decimal, la mayoría de los libros de texto actuales introducen la notación decimal desde la relación parte-todo; y solo un número reducido de textos escolares la introduce mediante actividades de *medida evocada*.

4. Sobre la recta numérica

En los textos escolares analizados aparecen ideas de fracción construidas sobre la recta numérica; son propuestas que, a nuestro entender, siguen pautas similares a las de autores reconocidos en el ámbito de la investigación en Educación Matemática, como Behr, Kieren o Lamon. En estas propuestas los autores eluden el significado de medida directa y, en un lugar, incorporan actividades sobre la recta numérica; de esta forma asocian la recta numérica con el significado de medida.

El análisis de una tarea prototípica formulada en torno a la recta numérica nos va a permitir situar este sistema de representación en el lugar que le corresponde en la enseñanza:

Si consideras como unidad de longitud el segmento comprendido entre los puntos 0 y 1, sitúa sobre la recta numérica el punto 5/4



Esta ampliamente documentado (Carraher, 1993; Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Novillis Larson, 1980) que las tareas de este tipo crean grandes dificultades a los escolares, a pesar de que éstos hayan recibido enseñanza previa de la fracción como relación parte-todo. El conocimiento que, en el mejor de los casos, poseen de la fracción como parte de un “todo” no les ayuda para reinterpretar la fracción como medida de una cantidad descompuesta en 5 subunidades de 1/4 de unidad. Para alcanzar esta idea de la fracción es necesario que los alumnos realicen actividades de medida directa de magnitudes continuas con objetos tangibles.

El problema se complica todavía más si en el enunciado del problema anterior desaparecen del gráfico los puntos que indican el fraccionamiento en partes iguales de la unidad. Las propuestas de enseñanza que utilizan el modelo de la recta numérica sin estar sustentadas en un trabajo previo con el modelo de medida de magnitudes continuas está abocado al fracaso.

La recta numérica no pertenece a la fenomenología histórica del número racional; pertenece a la fenomenología didáctica porque es un recurso didáctico que utiliza el Sistema Educativo para ejemplificar la relación de orden y la densidad de los números racionales, o para evaluar, desde el significado de medida, fracciones y números decimales aunque resulta inadecuado, por complejo, para introducir la fracción o el número decimal.

Por estas razones, entendemos que la recta numérica es un sistema de representación y no un significado del número racional positivo. La recta numérica es la representación gráfica del proceso de medida efectuado con objetos tangibles. En efecto, la representación de la cantidad de longitud 5/4 como un punto de la recta numérica se obtiene al aplicar las siguientes normas:

- Se considera que la unidad de longitud viene dada por la longitud del segmento que parte del punto 0 y acaba en el punto 1
- A cada punto de la recta le corresponde una fracción, la fracción que indica la longitud del segmento que empieza en el punto 0 y termina en dicho punto.

Ahora bien, para aplicar estas normas, para realizar las acciones que llevan a identificar el resultado de la medida como un punto de la recta numérica, se necesitan los mismos conocimientos que para resolver los problemas de *medida directa* con objetos tangibles y, por tanto, la gestión adecuada de la recta numérica precisa del conocimiento del significado del número racional como medida directa.

En consecuencia, resulta oportuno considerar la medida directa como un significado del número racional, mientras que la recta numérica es un sistema de representación del número racional. Es más, entendemos que el sistema de representación de la recta numérica potencia la comprensión del significado de medida del número racional y, en particular, los aspectos geométricos y topológicos de este sistema numérico.

II.16. Conclusiones del estudio de los significados del número racional

Kieren (1994) percibe dos tendencias en la investigación en el dominio de los números racionales: la epistemológica y la psicológica. La tendencia epistemológica se ocupa de clarificar la naturaleza del número racional como ente matemático y los significados que comprende este conjunto matemático, con la intención de diseñar, implementar y evaluar propuestas de enseñanza sustentadas sobre estos significados para mejorar la enseñanza del número racional. La tendencia psicológica se ocupa de identificar los esquemas que los alumnos utilizan en el campo de los números racionales y de cómo evolucionan estos esquemas cuando los alumnos son introducidos en el campo numérico de un modo más formal. Nuestra investigación sigue la tendencia epistemológica puesto que, desde la perspectiva educativa que nos ocupa, esta tendencia nos va a permitir diseñar una propuesta de enseñanza del número racional positivo sustentada en su génesis histórica.

Seguidamente resumimos los hallazgos sobre los significados del número racional y su influencia en la enseñanza:

1. El número racional admite distintos significados. Un significado suele representarse con alguno de los dos sistemas de representación más habituales: notación fraccionaria y notación decimal. Por tanto, entendemos que no tiene sentido hablar de significados de la fracción o del decimal, sino que, como hemos hecho en esta memoria, hay que hablar de significados del número racional y de las perspectivas de dicho significado que se potencian u oscurecen en cada sistema de representación.
2. La fenomenología histórica asociada al problema de la medida proporciona los significados de *medida, cociente partitivo y razón*, mientras que la evolución interna de las Matemáticas proporciona los significados de *operador y cociente indicado*. Estos resultados establecen una clara distinción con las clasificaciones tradicionales;

en efecto, de nuestro estudio se deriva que el cociente partitivo y la división indicada son significados diferenciados, porque tienen distinto origen fenomenológico y porque también es distinta la perspectiva que ofrecen del número racional. En consecuencia, no asumimos el significado de cociente que aparece en las clasificaciones tradicionales, y mantenemos que la fenomenología histórica del número racional proporciona cinco significados diferenciados.

3. El significado parte-todo pertenece a la fenomenología didáctica, no pertenece a la fenomenología histórica del número racional. La relación parte-todo es un recurso didáctico que tiene su origen en unas prácticas de enseñanza que buscan un mecanismo económico para presentar un concepto sin duda complejo. Este mecanismo tiene la finalidad de eludir los procesos de medida directa, posiblemente porque las actividades de medida con objetos tangibles en el aula generan dificultades como la gestión del material, el control de la diversidad de resultados obtenidos o la aparición de interferencias con la enseñanza del Sistema Métrico Decimal. Y para que el mecanismo funcione se evita mencionar la magnitud con la que se trabaja y la unidad de medida; de este modo el número racional resuelve un problema, enunciado con las representaciones gráficas oportunas, que solamente tiene cabida en el ámbito escolar.

4. La fenomenología didáctica ofrece datos significativos sobre el papel que han jugado los diferentes significados en el ámbito educativo a lo largo de los últimos 150 años. Así, el significado de medida va modificándose para facilitar la aparición del significado parte-todo; el significado de razón siempre se ha considerado como un conocimiento estanco separado del número racional; el cociente partitivo no juega ningún papel en la instrucción, tan solo aparecen algunos enunciados de problemas que recurren a este significado y que, curiosamente, se resuelven con el algoritmo extendido de la división de naturales; el significado de operador tuvo un lugar predominante durante la década de los años 1970-80, pero anteriormente y posteriormente su papel se ha limitado a calcular la fracción de una cantidad; y el significado de cociente se convierte en un convenio cómodo para justificar la aplicación de la regla de paso de la notación fraccionaria a la notación decimal.

5. El proceso educativo incorpora ideas del número racional que no tienen cabida en la fenomenología histórica. Son ideas asociadas a la presentación de la notación decimal, siempre que ésta presentación se anteponga a la instrucción sobre la fracción. Estos significados, como la extensión del sistema de numeración decimal o el cambio de unidades, se apoyan en ideas matemáticas subyacentes al concepto, pero no resuelven problemas reales del mundo físico.

6. La recta numérica no es un significado del número racional porque no pertenece a la fenomenología histórica de este conjunto numérico. Se trata de un recurso didáctico que se utiliza para ejemplificar la relación de orden y la densidad de los números racionales, o para evaluar, desde el significado de medida, fracciones y números decimales; sin embargo, resulta inadecuado cuando se utiliza para introducir la fracción o el número decimal. Por estos motivos, entendemos la recta numérica como un sistema de representación: la representación gráfica del proceso medida efectuado con objetos tangibles

7. El estudio fenomenológico proporciona informaciones de gran interés para la elaboración de propuestas didácticas sobre la enseñanza del número racional positivo; de las cuales citamos las más destacadas:

- La enseñanza de la fracción debe preceder a la del número decimal, porque desde el punto de vista fenomenológico la fracción es anterior al número decimal
- Los significados pertenecientes a la fenomenología histórica del número racional positivo surgen al resolver problemas de medida, y este tipo de problemas parecen los más adecuados para hacer emerger las ideas fundamentales del número racional.
- La aparente facilidad, desde el punto de vista docente, que ofrece la enseñanza de la fracción sustentada en la relación parte-todo, ha de contrapesarse con las dificultades de comprensión que provoca en los alumnos.

Capítulo III
La práctica docente

III.1. Introducción

En el capítulo II se han revisado los distintos significados del número racional que han estado presentes en el sistema educativo español en los dos últimos siglos. Cada uno de estos significados ha tenido una presencia más o menos importante por razones de diferente naturaleza: la evolución de la propias matemáticas, el grado de la obligatoriedad de la enseñanza, el contexto sociocultural, las directrices emanadas de las autoridades educativas, etc. En todo caso, es de destacar que el Sistema Educativo ha entendido que hay formas diferentes de organizar y secuenciar la enseñanza del número racional en Educación Primaria, y que estas decisiones condicionan el rendimiento de los escolares.

En la actualidad asistimos, según ya hemos dejado constancia en el capítulo anterior, a una propuesta didáctica sustentada en el significado parte-todo y que no se ha modificado en los últimos 80 años, salvando la década de los 70 en la que se introdujo el número racional con el significado de operador. Y también asistimos a las publicaciones de los resultados de estudios sobre el rendimiento de los escolares españoles que denuncian su bajo nivel de comprensión de esta estructura numérica.

Por otra parte, la intencionalidad de esta investigación es la de ofrecer alternativas didácticas que mejoren la comprensión de los escolares sobre los números racionales positivos y, en consecuencia, que alcancen un mayor grado de competencia en su formación como ciudadanos, como trabajadores y como consumidores, puesto que en estos ámbitos los números racionales cubren un extenso campo de aplicaciones. Ahora bien, para construir una propuesta didáctica alternativa necesitamos conocer el punto de partida, caracterizar la práctica docente que se desarrolla actualmente en los centros escolares; esta información es relevante para determinar en qué modo esta práctica docente afecta al rendimiento de los alumnos.

III.2. Características del estudio

Para caracterizar la práctica docente analizamos una propuesta completa desarrollada por la Editorial Anaya[1], cuyos libros de texto están debidamente autorizados por el Ministerio de Educación, y que tiene una amplia implantación en la Comunidad Autónoma de Aragón y en toda España. Por tanto, se trata de una propuesta didáctica sobre el número racional positivo completa, que se desarrolla a lo largo de los cursos 4º, 5º y 6º de Educación Primaria, que es seguida por un importante número de Maestros y que tiene una larga trayectoria en el mundo educativo español.

Puesto que se trata de textos autorizados por el Sistema Educativo español, entendemos que atiende a las expectativas y recomendaciones de las autoridades educativas y, por tanto, que refleja con fidelidad el currículo oficial. Además, en el ámbito de la Educación Primaria, los Maestros utilizan el libro de texto como elemento básico para la instrucción (Apple, 1989; López Facal, 1997; López y Moreno, 1997; Ramirez, 2003). En consecuencia, el análisis de los libros de texto de esta editorial permite alcanzar nuestro objetivo de caracterizar la instrucción que se desarrolla actualmente en nuestro país. Es más, el hecho de elegir esta editorial viene determinado por tratarse de los libros de texto que, en el área de Matemáticas, utiliza el Centro de Educación Infantil y Primaria "Tío Jorge" de la ciudad de Zaragoza, centro en el que se ha realizado la fase experimental de nuestra investigación.

Las variables que se contemplan en el análisis son las siguientes:

• Secuenciación de los contenidos

El currículo oficial contempla la instrucción sobre dos sistemas de representación habituales: la notación fraccionaria y la notación decimal. La secuenciación de estos contenidos tiene importancia para la comprensión de los números racionales, puesto que las conexiones entre dichos sistemas de representación tienen diferencias cognitivas importantes dependiendo del sentido de las mismas.

• Metodología

En el análisis de los textos no podemos conocer las variables del tetraedro didáctico correspondientes al profesor y al alumno, pero sí que conocemos la variable metodología. Y esta variable es importante para nuestro estudio por cuanto permite un mayor conocimiento de la propuesta editorial y sus repercusiones en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

---

[1] Ferrero, L. y otros (1997). Matemáticas 4. Educación Primaria. Segundo Ciclo. Grupo Anaya. Madrid.
Ferrero, L. y otros (1998). Matemáticas 5. Educación Primaria. Tercer Ciclo. Grupo Anaya. Madrid.
Ferrero, L. y otros (1999). Matemáticas 6. Educación Primaria. Tercer Ciclo. Grupo Anaya. Madrid.

• Modelos de aprendizaje
La construcción de ideas matemáticas, sobre todo en edades tempranas, se debe facilitar desde la manipulación, observación y reflexión sobre las consecuencias de las actuaciones en el mundo físico. Por tanto, el uso que se hace en la propuesta editorial de modelos de aprendizaje es un elemento de nuestro análisis porque incide y caracteriza la instrucción.

• Sistemas de representación
El lenguaje de comunicación es esencial para la comprensión de las ideas matemáticas y, por tanto, el modo en que se introducen, la forma en que se explicitan sus características sintácticas y semánticas, y el modo de establecer relaciones entre ellos son elementos importantes para conocer y delimitar las peculiaridades del proceso instructivo.

• Significados que se construyen
Cada concepto matemático presenta múltiples facetas, cada una de las cuales potencia algunos aspectos del concepto mientras que dificulta u oscurece otros. El análisis de la propuesta editorial debe incluir, por tanto, un estudio sobre las perspectivas de cada uno de los significados que se utilizan.

• Resolución de problemas
Los problemas juegan un papel esencial en la educación matemática, pero ese papel será diferente según el momento y la intencionalidad con que se proponen. Consecuentemente, hay que analizar la utilización que se hace en la propuesta editorial de los problemas.

III.3. Secuenciación de los contenidos

El libro de texto de 4º curso dedica un solo tema a introducir la fracción y el número decimal. Se trata del tema nº 13 que titula Las fracciones. Los conceptos que se trabajan son los siguientes:

√ Definición de medio, tercio y cuarto
√ La fracción y sus términos
√ Lectura y escritura de fracciones
√ Cómo se comparan fracciones con la unidad
√ Cómo se comparan fracciones con el mismo denominador
√ Fracción decimal. Décimas y centésimas.
√ La fracción de una cantidad

El libro de texto de 5º curso dedica tres temas al estudio del número racional positivo que son:

Tema nº 7 titulado *Los números decimales*

√ La décima
√ La centésima

√ La milésima

√ Comparación y ordenación de números decimales

√ Los decimales y la calculadora

Tema nº 8 titulado *Operaciones con decimales*,

√ Suma de números decimales

√ Resta de números decimales

√ Multiplicación de un decimal por un natural

√ Multiplicación de un decimal por 10, por 100, …

√ Utiliza tu calculadora. Buscando el cero

Tema nº 13 titulado *Las fracciones*

√ Términos de una fracción. Lectura y escritura

√ Comparación y ordenación de fracciones

√ Fracciones mayores y menores que la unidad

√ Fracciones equivalentes

√ Fracción decimal y número decimal

√ La fracción de una cantidad

√ Suma y resta de fracciones de igual denominador

El libro de texto de 6º curso dedica cinco temas al estudio del número racional que son:

Tema nº 3 titulado *Los números decimales*

√ Décima, centésima y milésima

√ El valor de las cifras de un número decimal

√ Comparación y ordenación de números decimales

√ Aproximación de números decimales

√ Suma de números decimales

√ Diferencia de números decimales

√ Utiliza tu calculadora

Tema nº 4 titulado *Multiplicación y división de decimales*

√ Multiplicación de números decimales

√ Multiplicación de un número decimal por números terminados en ceros

√ Divisiones con cociente decimal

√ División de un decimal entre un número entero

√ Propiedad fundamental de la división

√ División de números decimales

√ Utiliza tu calculadora. Aproximarse a 100.

Tema nº 7 titulado *Las fracciones*

√ La fracción como parte de la unidad

√ La fracción como el cociente de dos números

√ La fracción de una cantidad

√ Fracciones equivalentes

√ Obtención de fracciones equivalentes

√ Comparación de fracciones con algún término igual

√ Comparación de fracciones con términos distintos

Tema nº 8 titulado *Operaciones con fracciones*.

√ Suma y resta de fracciones de igual denominador

√ Suma y resta de fracciones con distinto denominador

√ Suma y resta de un número entero y una fracción

√ Producto de una fracción por un número entero

√ Producto de fracciones. La fracción de una fracción

√ División de una fracción entre un número entero

√ Utiliza tu calculadora. Unos decimales muy especiales.

Tema nº 13 titulado *El porcentaje*

√ El tanto por ciento o porcentaje

√ Cálculo de porcentaje

√ El tanto por ciento de una cantidad

√ Algunos porcentajes particulares

√ Utiliza tu calculadora.

Comentarios

- Los contenidos, en los tres cursos, tienen un desarrollo cíclico: se revisan los contenidos del curso precedente y se introducen unos nuevos. Así, en los que respecta a las fracciones en 5º se introduce la equivalencia de fracciones y las operaciones de suma y resta; mientras que en 6º curso se añaden los conceptos de producto de fracciones y cociente de una fracción y un número entero. En los decimales se introduce, en 5º curso, el orden y las operaciones de suma, resta, multiplicación de decimal por entero y multiplicación de decimal por potencias de 10; mientras que en 6º curso se introducen la multiplicación y división de decimales.

- En cuarto curso, las fracciones se presentan antes que los decimales, pero esa situación se invierte en los dos cursos posteriores en los que el decimal precede a la fracción

- La construcción del número racional, en Europa, comienza con la representación fraccionaria y, muchos siglos más tarde, se introduce la notación decimal a partir de la publicación de Stevin. Corresponde, por tanto, al proceso histórico que las ideas sobre fracciones precedan a las de los decimales. De lo contrario quedarían algunas preguntas que atañen a la construcción de las ideas sobre el racional que tienen difícil respuesta: ¿cómo se construyen fracciones a partir del decimal?, ¿cómo se actúa sobre los decimales periódicos?

- El porcentaje se ha incluido como contenido propio del número racional. También los autores conectan este significado con las fracciones de denominador 100. Sin embargo, no se establecen conexiones entre el porcentaje y el número decimal.

III.4. Metodología

Los textos de esta editorial mantienen, en los tres cursos estudiados, un formato común. Los contenidos del curso se presentan distribuidos a lo largo de 18 temas. Todos los temas tienen una estructura única siguiendo tres pautas que vamos a indicar:

1º En la primera página del tema aparece el ***título***, debajo del cual enuncia la utilidad del tema que se presentará seguidamente, como se refleja en la página 132 del texto de 4º curso:

> **Para expresar la cantidad de gasolina que queda en el depósito o la cantidad de chocolate que falta en una tableta utilizamos fracciones.**

El cuerpo central se dedica a presentar unos dibujos que hacen referencia al concepto que se va a plantear. Estos dibujos abarcan situaciones variadas con la intención de mostrar al alumno que la idea de fracción está presente en ámbitos de la vida de naturaleza diferenciada; es decir, los autores tratan de abordar parcialmente la fenomenología del concepto:

Y, finalmente, bajo el epígrafe ***Observa y contesta***, plantea tres o cuatro preguntas sobre cuestiones relacionadas con los dibujos, cuya respuesta hace referencia al concepto a presentar, en este caso las fracciones, y con enunciados similares a los siguientes:

> **¿A cuántos botes equivale un litro?¿Qué parte un litro representa cada bote?**
> **¿Cuánto pesa el gatito?¿Qué fracción de un kilogramo representa su peso?**

Es previsible que estas cuestiones las pueda responder el alumno después de haber cubierto una parte de la instrucción sobre fracciones, pues esas respuestas exigen unos conocimientos que el alumno no posee; en consecuencia, sus respuestas se formularán utilizando números enteros, o no llegará a responder a las preguntas.

2º En cada página presenta un concepto o procedimiento distinto. El título que encabeza la página se corresponde con el conocimiento a enseñar. La estructura de cada página es siempre la misma de modo que ésta queda dividida en tres partes. En la primera parte presenta una situación problemática acompañada de un dibujo.

En la segunda parte, bajo el epígrafe **OBSERVA**, resuelve el problema y presenta el concepto.
En la tercera parte propone un pequeño número de ejercicios de aplicación inmediata del concepto enseñado.

3º Dedica las dos últimas páginas del tema a resumir los contenidos presentados y a proponer ejercicios. El resumen de los contenidos viene encabezado por el vocablo **RECUERDA**. Se entiende que en este apartado se recogen los aspectos conceptuales y procedimentales más significativos; es decir, el conocimiento matemático exigible al alumno. En esta figura, que mostramos a modo de ejemplo, aparecen las nociones de fracción, de comparación de fracciones con la unidad y de la fracción de un número, que se corresponden con los contenidos fundamentales que, en opinión de los autores, deben conocer los alumnos de 4º curso sobre las fracciones:

Las actividades propuestas por los autores para consolidar los conocimientos matemáticos que conforman el tema vienen recogidos bajo el enunciado **¿TE LO HAS APRENDIDO?**
Estas actividades se formulan y resuelven de modo similar a cómo se hizo en actividades similares propuestas a lo largo del tema. Puede intuirse que los autores proponen al alumno un trabajo de consolidación de los aprendizajes, a la vez que ofrecen una panorámica global de los contenidos parciales que componen el tema.

Comentarios

- La editorial opta por presentar los contenidos proponiendo inicialmente una situación problemática alusiva al concepto a introducir. En este sentido, el texto escolar intenta seguir los principios psicopedagógicos del constructivismo según los cuales el aprendizaje debe construirse sobre los conocimientos previos del escolar. De acuerdo con este paradigma, la LOGSE recomienda la enseñanza a través de la resolución de problemas. En estas condiciones los libros de texto se sirven de situaciones problemáticas para introducir conceptos y procedimientos. Sin embargo, la propia estructura del libro escolar es incompatible con esta metodología de enseñanza porque la necesidad de exponer los contenidos obliga a presentar inmediatamente la solución de la situación introductoria que plantea como problema. De este modo, el planteamiento constructivista desaparece, pues al alumno se le priva de todo el proceso reflexivo que demanda la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas. Es más, la propia presentación de una respuesta única empobrece el aprendizaje social que se produce cuando un grupo de alumnos busca libremente la respuesta a una situación problemática, pues en este supuesto suelen aparecen enfoques y procesos de resolución que aportan distintas perspectivas del concepto a aprender.
- Bajo la denominación de **OBSERVA** se presentan los contenidos de forma ostensiva, de tal modo que la supuesta nitidez de la presentación de dichos contenidos será suficiente para que el alumno los comprenda y los aprenda. Es más, este mismo esquema se repite

en los tres cursos estudiados (4º, 5º y 6º de Educación Primaria), sin que los autores modifiquen la metodología en función del desarrollo cognitivo de los alumnos. Pero que los conceptos sean trasparentes para el autor no significa que lo sean también para el alumno, en consecuencia, la construcción de conocimientos matemáticos por parte de los alumnos no resulta efectiva desde la observación, aunque ésta sea inducida.

- La metodología propuesta caracterizaría un aprendizaje pasivo; el alumno adquiere los conocimientos solamente desde la percepción visual, mientras que un aprendizaje activo exige que la observación esté precedida de la manipulación de objetos físicos, la reflexión sobre los resultados alcanzados y el contraste de ideas con otros compañeros y con el profesor
- El texto suele enmarcar o destacar las ideas que se consideran más importantes y que corresponden tanto a contenidos conceptuales como a procedimentales; además, al final del texto aparece un resumen de los conocimientos que debe conocer el alumno. De este modo, el alumno puede localizar fácilmente los contenidos que necesite y puede contrastar sus conocimientos con los conocimientos oficiales.

III.5. Modelos de aprendizaje

Entendemos que los modelos de aprendizaje, o simplemente modelos, son entornos físicos que crea el profesor para que los conceptos matemáticos los construya el alumno a partir de reflexiones realizadas después de manipular los objetos del modelo.

En el caso de los números racionales positivos se han estudiado las variables que caracterizan los modelos de aprendizaje (Gairín, 1999, 2004): una magnitud mensurable, unos objetos que contienen cantidades de dicha magnitud, unas acciones realizadas sobre los objetos y unas técnicas para llevar a cabo las acciones.

En la propuesta didáctica que hemos analizado no existe una preocupación por utilizar los modelos de aprendizaje, que es una herramienta conceptual de gran interés en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los números racionales positivos. Esta afirmación se sustenta en los siguientes datos observables en las actividades propuestas en cada uno de los epígrafes que componen los distintos temas:

- Las situaciones problemáticas se presentan en contextos diferentes en los que no hay una persistencia de las magnitudes ni de sus características: unas veces se recurre a magnitudes continuas mientras que otras veces se recurre a magnitudes discretas, hay ocasiones que se considera la magnitud superficie, en otras es la capacidad, en otras es la cardinalidad, etc.
- Teniendo en cuenta que cada magnitud requiere técnicas diferentes de medida, esta dispersión de magnitudes obliga al alumno a dedicar esfuerzos que le permitan situarse en el contexto del problema, pero ese esfuerzo no le servirá para situarse en la actividad del epígrafe siguiente.

- Dada la dispersión de magnitudes, los objetos que se utilizan en los problemas y en los discursos son también de naturaleza diferenciada. A veces son objetos que no admiten el fraccionamiento, mientras que en otros casos son objetos en los que el alumno reconoce como una práctica habitual su fraccionamiento; unas veces son objetos familiares al alumno, mientras que otras veces le resultan desconocidos; en algunos objetos el alumno identifica fácilmente la cantidad de magnitud, mientras que en otros le resulta complicado percibir la cantidad de magnitud a que se refiere el texto; etc. Esta práctica docente no facilita el aprendizaje por cuanto el alumno tiene que dedicar importantes esfuerzos para familiarizarse con los objetos y, en consecuencia, tiene mayores dificultades para comprender y aprender el concepto que está en juego.
- No hay unas acciones claramente explicitadas que permitan al alumno observar en qué modo afectan a variaciones en las cantidades de magnitud. Así, unas veces el alumno debe entender que hay que hacer un recuento, mientras que en otras ocasiones hay que hacer un reparto, o una comparación, o aplicar una concatenación de operaciones, etc.
  Esta situación favorece la pasividad del alumno en su aprendizaje puesto que no sabe lo que hay que hacer dada la variedad de actuaciones que se le han presentado; en consecuencia, el alumno espera que sea el texto, o el profesor, el que señale el camino para realizar la tarea y evita tomar iniciativas propias para no realizar acciones que pueden ser inadecuadas o inconvenientes.
- Dada la despreocupación porque los alumnos realicen acciones sobre los objetos, resulta comprensible que el texto no mencione la técnica que ha utilizado para realizar la acción que se propone. De este modo, los autores se ven obligados a presentar los resultados sin que el alumno pueda conectar dichos resultados con la técnica utilizada para alcanzarlos.

Observamos, en suma, que la práctica docente que se propone en los textos está completamente alejada de la utilización de modelos de aprendizaje. En efecto, en ningún momento los textos analizados proponen, ni tan siquiera sugieren, que los alumnos manipulen objetos físicos, que observen los resultados de sus acciones, que reflexionen sobre lo que ha ocurrido y que construyan ideas abstractas desde su propia experiencia. Por el contrario, la propuesta de aprendizaje de los textos se basa en hacer que los alumnos se limiten a observar lo que relatan los autores acerca de cómo han resuelto las situaciones problemáticas enunciadas; es decir, los autores se constituyen en actores principales del aprendizaje, mientras que los alumnos quedan relegados al papel de espectadores pasivos de la función.

III.6. Sistemas de representación

El currículo de matemáticas en Educación Primaria contempla la enseñanza de dos sistemas de representación principales: la notación fraccionaria y la notación decimal. Además, se propone utilizar sistemas de representación simbólicos de ámbito local, como es el caso del porcentaje o de las escalas. En la propuesta analizada no se contemplan ideas de razón, por lo que hemos limitado el análisis a las notaciones fraccionaria, decimal y porcentual.

Los sistemas de representación tienen una sintaxis muy exigente en el sentido de que el incumplimiento de alguna norma provoca que no se pueda interpretarse su sentido, o que se haga de forma deficiente o errónea. Cumplidas las normas sintácticas, la evaluación semántica de las expresiones simbólicas se hará de forma precisa. En consecuencia, el aprendizaje de los sistemas de representación exige el conocimiento de su sintaxis y la correcta traslación del lenguaje materno al lenguaje simbólico y viceversa.

Por otra parte, cabe señalar que los sistemas de representación están estrechamente relacionados con los modelos de aprendizaje desde los que se construyen; en ausencia de modelos de aprendizaje hay una relación directa entre los sistemas de representación y el contexto en el que se presentan. Y este referente es imprescindible para interpretar los mensajes simbólicos en contextos del mundo físico y, consecuentemente, poder evaluar la veracidad de dichos mensajes aunque se desconozcan las normas de composición del lenguaje simbólico.

Ciertamente los sistemas de representación, al igual que el lenguaje ordinario, están sometidos a cambios producidos por su utilización y por su dilatada existencia. No obstante, desde la perspectiva docente, hay que ser cuidadosos en la presentación de estos sistemas y en la aplicación de las normas sintácticas más habituales. Solo el caso de que los alumnos estén familiarizados con dichos sistemas se podrán admitir alteraciones sintácticas; siempre y cuando los alumnos sean conscientes de lo que hacen y del significado correcto de las expresiones simbólicas que utilizan.

Desde estas consideraciones la revisión de la propuesta didáctica nos lleva a enunciar las siguientes consideraciones:

- La necesidad de garantizar que los alumnos conozcan las normas sintácticas de los sistemas de representación no queda de manifiesto a lo largo de los textos analizados. En efecto, aun cuando las normas sintácticas de la notación fraccionaria y de la notación decimal son muy sencillas, hemos detectado que los autores no se ocupan de hacerlas explícitas. Así, por ejemplo, observamos que en la notación fraccionaria no se hace mención a la norma sintáctica que exige que el denominador sea distinto de 0; y también hemos observado que se presenta la notación decimal mencionando la coma decimal y, sin embargo, en el epígrafe siguiente se presentan números decimales escritos con un punto en lugar de la coma (pp. 31 del texto de 6º curso).
- En la notación fraccionaria los autores proponen actividades de evaluación semántica de la fracción en el doble sentido de escribir la fracción conocida su representación gráfica y hacer la representación gráfica conocido el símbolo de fracción. Pero esta situación no se produce en la notación decimal puesto que las actividades son unidireccionales: el alumno se limita a escribir el número decimal a partir de representaciones gráficas. De este modo, el aprendiz será capaz de describir una fracción en términos de objetos del mundo físico, mientras que no sabrá actuar de

forma similar al describir un número decimal. Por tanto, es posible augurar deficiencias en la comprensión de los alumnos sobre los números decimales, y éstas se producirán como consecuencia de la instrucción.

- Los signos utilizados para representar las operaciones son iguales que los que los alumnos ya conocen para los números naturales, y también son iguales en el caso de operaciones con fracciones y operaciones con números decimales. Pero estos signos, aunque se escriban de la misma forma, no tienen el mismo significado, por lo que conviene dejar constancia de ello a los alumnos; de este modo se sentarán las bases para que los aprendices no se formen ideas erróneas sobre el sentido que tienen las operaciones en conjuntos de diferente naturaleza. Pues bien, este aspecto conceptual importante no lo tienen en cuenta los autores, quienes se limitan a asignar el símbolo de la operación correspondiente y a describir el funcionamiento del oportuno algoritmo de cálculo.
- Aunque no se explicita en los currícula oficiales, en los textos analizados se introduce la recta numérica como sistema de representación de los números racionales. Pero también en este sistema de representación encontramos deficiencias similares a las señaladas para las notaciones fraccionaria y decimal, tanto en los aspectos sintácticos como en los semánticos. De este modo se merma la potencialidad de este sistema de representación en aspectos relacionados con el orden y la densidad de los números racionales.

Puesto que cada sistema de representación favorece algunos aspectos del concepto que representan mientras que oscurece otros, para incrementar la comprensión de los conceptos matemáticos es necesario, como indican Hiebert y Carpenter (1992), fortalecer las conexiones entre distintos sistemas de representación. En los textos analizados hemos detectado una cierta despreocupación por fortalecer esas conexiones, tanto en la presentación de las notaciones fraccionaria y decimal, como en la gestión posterior de estos sistemas de representación. La revisión de los textos nos lleva a pensar que, como consecuencia de la práctica docente, los alumnos percibirán las notaciones fraccionaria y decimal como sistemas casi independientes, con muy débiles relaciones entre ellos.

III.7. Significados

III.7.1. Notación fraccionaria

III.7.1.1. Significado inicial

En cuarto curso se introduce la fracción antes que el decimal y su presentación se hace de acuerdo con el esquema metodológico que hemos reseñado.

En la primera parte se presenta un dibujo de una tableta de chocolate dividida en partes iguales de las que faltan algunas. En respuesta a una pregunta formulada se introduce la idea de fracción:

David se ha comido el chocolate que falta. ¿Qué parte del total se ha comido?

La situación problemática que plantea el texto se corresponde con el significado de medida aparente, pues pregunta por una parte de una magnitud, que no explicita y que se supone es la superficie, respecto a una unidad que viene enunciada como total.

Pero al gestionar la respuesta, en el apartado ***Observa***, se identifican la ideas de fracción y fraccionamiento de objetos y se presenta la notación fraccionaria con una referencia muy velada a la unidad de medida, a la que denomina *el chocolate*.

Finalmente, el texto recuadra los aspectos conceptuales que interesa transmitir, y en este apartado si que se reconoce claramente el significado parte-todo, pues los términos numerador y denominador vienen definidos de acuerdo con las características de este significado:

El denominador de una fracción indica el número de partes iguales en que se divide la unidad.
El numerador de una fracción indica el número de partes que se toman.

Para determinar con más precisión el significado que propone el texto revisamos los ejercicios que propone a los alumnos. Son tres ejercicios que responden a dos tipos de enunciados:

- **Expresa en tu cuaderno la fracción que representa la parte coloreada de cada figura**
- **Representa estas fracciones: 1/5; 3/7; 4/6; ...**

En estos ejercicios queda patente que la intención del texto es presentar la fracción con el significado de parte-todo. En efecto, en los enunciados de los tres ejercicios se utiliza la palabra **representa** que es identificativa del significado parte-todo: el significado de fracción que se trasmite es la de conectar dos sistemas de representación, de conectar representaciones gráficas y expresiones simbólicas. Los autores proponen, por tanto, ejercicios para consolidar la idea de que las fracciones son símbolos que expresan o representan unas figuras específicas, sin hacer mención a ideas de medida de cantidades de magnitud.

III.7.1.2. Otros significados de la fracción

a) La fracción con significado de operador

En cuarto curso se introduce el significado de la fracción como **operador**, bajo el epígrafe de *fracción de una cantidad*, significado que se repite en los cursos 5º y 6º. Se presenta una situación problemática, acompañada de una representación mediante billetes y monedas de 5.525 pesetas, con el siguiente enunciado (4º curso, pp. 139):

Beatriz se ha gastado las tres quintas partes de sus ahorros en comprar un regalo a su madre. ¿Cuánto le costó el regalo?

Este significado aparece en situaciones en las que una fracción, como número no medida, se refiere a una magnitud discreta. Son contextos en los que el “todo” o unidad este formado por unidades básicas. En estas condiciones, el significado parte-todo presenta características diferenciadas respecto a situaciones en las que hay magnitudes continuas.
En primer lugar hay que señalar que en el contexto discreto el fraccionamiento del todo se identifica con la división cuotitiva, las partes iguales se obtienen el dividir el número total de elementos que forman el todo entre el denominador. Evidentemente, el cardinal del todo debe ser un múltiplo del denominador, pues los alumnos solamente conocen la división de naturales.
En segundo lugar, para conocer el cardinal del total de las partes que se toman se utiliza la multiplicación de naturales como suma reiterada. En consecuencia, al aplicar el significado parte-todo en contextos discretos provoca la aparición de un nuevo significado de la fracción, tal y como se enuncia en el libro de 5º curso (pp. 148):

Para calcular la fracción de una cantidad, primero se divide la cantidad entre el denominador y después se multiplica el resultado por el numerador

En 6º curso introduce una ligera variante al enunciar que el orden de las operaciones puede modificarse: hacer primero el producto y después el cociente.

El tratamiento de este contenido no responde a una aportación personal de los autores, sino que *La fracción de una cantidad* es un contenido curricular que forma parte de los programas de enseñanza desde la Ley General de Educación de 1970. En los antiguos manuales de aritmética aparecía bajo el epígrafe *valuar un quebrado,* denominación que cuestiona la entidad numérica del quebrado.

A la vista del tratamiento y consecuencias de la presentación de este contenido se concluye que el alumno ha percibido un nuevo significado de la fracción limitado, eso si, a contextos discretos; además, este significado resulta aplicable solamente si el cardinal del “todo” es múltiplo del denominador.
Cabe suponer que la intencionalidad de los autores del texto no es la de introducir un nuevo significado de la fracción, más bien hay que suponer que se persigue mostrar al alumno una situación particular del significado parte-todo. Pero el proceso instructivo conduce a presentar la fracción como una aplicación racional compuesta de dos aplicaciones naturales definidas por el numerador y el denominador de una fracción. Pensamos que, con la enseñanza de *la fracción de una cantidad*, los autores del texto y las autoridades educativas no pretenden una reconstrucción conceptual del significado de fracción; sino que su objetivo es introducir la regla para calcular *la fracción de una cantidad* y dotar a la fracción de una “utilidad práctica” que no tienen las tareas introductorias de la relación parte-todo.

Entendemos, por tanto, que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones se presenta y utiliza el significado que denominamos operador, aunque el texto utiliza este significado con intenciones alejadas de ofrecer y conectar distintas interpretaciones de la fracción; antes bien, lo introduce por necesidades derivadas de la presentación y secuenciación de los contenidos: en todos los cursos se presenta este significado como caso particular de la idea de fracción en magnitudes discretas, y en 6º curso para introducir el producto de fracciones.

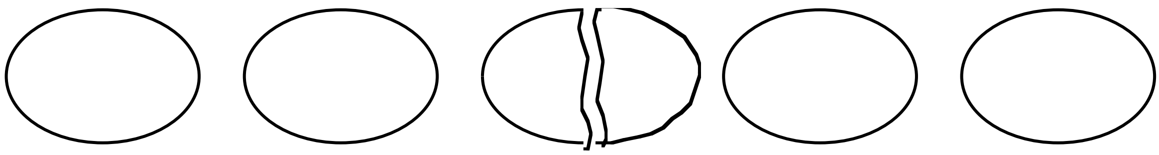
b) La fracción con significado de división indicada

En 6º curso (pp. 78) aparece como significado diferenciado un epígrafe alusivo a este significado: *la fracción como el cociente de dos números*. La situación problemática se enuncia en los siguientes términos:

Entre Valle y Pablo se reparten los cinco bombones. ¿cuántos bombones le corresponde a cada uno?

La situación problemática que plantea el texto es la de reparto igualitario, la de cociente partitivo de 5 bombones entre 2 niños; el modo en que se represente el resultado de este reparto viene condicionado por la técnica que se utilice al efectuar la acción de repartir.

Los autores lo resuelven desde la idea de parte-todo, entendiendo como "todo" los 5 bombones que se fraccionan en 2 partes iguales; y muestran un gráfico similar al siguiente:



Esta técnica favorece la presentación de la igualdad entre la división y la fracción:

$$5 : 2 = \frac{5}{2}$$

según la cual la fracción es el cociente exacto de dos números.

En la secuenciación de los contenidos de 6º curso, las operaciones con números decimales preceden a las fracciones; por tanto, corresponde a los conocimientos previos de los alumnos la igualdad:

$$5 : 2 = 2,5$$

De las dos igualdades anteriores, el texto formula el significado de la fracción como cociente en los siguientes términos:

Para calcular el valor decimal de una fracción se divide el numerador entre el denominador.

Para clarificar las intenciones de los autores sobre el significado que se quiere enseñar, los ejercicios propuestos son ilustrativos, sobre todo en los enunciados de problemas que se presentan a los alumnos:

Expresa cada situación en forma de fracción y calcula su valor decimal: **a) Repartimos 3 kg. de manzanas en cinco bolsas iguales. ¿Cuánto pesa cada bolsa?** **b) Cortamos una cuerda de 15 metros en seis trozos iguales. ¿Cuánto mide cada trozo?**

Nuestra interpretación es que el significado que se presenta no se corresponde con el de cociente, en el sentido de reparto; antes bien, la situación de reparto planteada en el enunciado sirve a los autores para transmitir a los alumnos la idea de que cualquier fracción indica un cociente racional de números naturales; para que el alumno identifique los símbolos de fracción y de división como sinónimos.

Entendemos que la idea de reparto va asociada a una situación problemática que resuelve el alumno de acuerdo con la técnica que considere más oportuna y que, en función de dicha técnica, expresar el resultado del reparto demandará un sistema de representación determinado. Más concretamente, para alcanzar el resultado que pretenden los autores el reparto hay que hacerlo en una fase; es decir, hay que fraccionar cada unidad en tantas partes como personas intervienen en el reparto y entregar a cada una de dichas personas 5 de cada una de las partes en que se ha fraccionado la unidad. De este modo, el resultado del reparto es de 5 partes de tamaño 1/2 de la unidad.

El uso que hace el texto de este significado tiene claras intenciones de cohesionar la propuesta didáctica; a partir de este significado los autores no necesitan hacer más justificaciones para pasar de la notación fraccionaria a la notación decimal.

III.7.1.3. Equivalencia de fracciones

La equivalencia de fracciones se presenta en 5º curso (pp. 146), formulando dos preguntas a partir del gráfico en el que aparecen dos niñas que miran a dos recipientes de la misma forma y sobre los que hay señalados dos fraccionamientos diferentes:

¿Qué fracción del recipiente ha llenado cada niña? **¿Qué recipiente tiene mayor cantidad?**

La cuestión a resolver se formula desde la relación parte-todo con la pregunta *¿qué fracción del recipiente ha llenado cada niña?*. Sin embargo, la segunda cuestión *¿qué recipiente tiene mayor cantidad?* está formulada desde el significado de la fracción como medida de una cantidad de magnitud a pesar de que el texto explicita la magnitud ni la unidad de medida.

En el epígrafe ***Observa*** se introduce la noción de equivalencia en términos muy precisos (pp. 146):

Dos o más fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad.

Debido al carácter cíclico de la propuesta, que hemos comentamos en el apartado correspondiente a la Metodología, este concepto se retoma en 6º curso (pp. 80), presentando a tres personajes sobre los que crea una situación problemática en términos similares a los siguientes:

Antes de comenzar la feria del libro en cada caseta había 200 libros. El dependiente de la primera caseta dice que ha vendido 1/2 de los libros; el de la segunda caseta dice que ha vendido 2/4 de los libros; y el de la tercera caseta dice que ha vendido 4/8 de los libros.
¿Cuántos libros ha vendido cada librero?

Utilizando un contexto discreto, observamos que el texto ya no incide en el significado de las fracciones equivalentes, que es una idea clave porque los alumnos se encuentran por primera vez una idea tan novedosa como es la de que una misma cantidad se pueda representar de formas diferentes. El propósito del texto es el de presentar una técnica de comprobación de fracciones equivalentes, técnica que los autores omiten justificar, posiblemente porque resulta imposible de hacerlo desde el significado parte-todo en que se sitúa el discurso.

Para saber si dos fracciones son equivalentes basta comprobar que el producto del numerador de cada una por el denominador de la otra es el mismo.

A continuación, el propio texto dedica otro epígrafe a presentar una técnica de creación de fracciones equivalentes a una dada. Apoyándose en el significado parte-todo, los autores justifican una técnica que será necesaria en posteriores momentos de la instrucción: comparación de fracciones y suma o resta de fracciones.

De hecho, en 6º curso la equivalencia de fracciones se sitúa entre las nociones de comparación de fracciones con algún término igual y comparación de fracciones con términos distintos. Este hecho produce la impresión de que la noción de equivalencia no tiene una importancia conceptual en si misma, sino que la tiene por su aplicación a otros conceptos.

En todo caso, es de destacar que el proceso instructivo incide más en las técnicas que en el significado; de este modo, y como se ha constatado (Gairín, 1999), el currículo enseñado provoca que los estudiantes sustituyan los conceptos por alguna de las técnicas asociadas al mismo; por ejemplo, el significado de la equivalencia de fracciones es el producto en cruz de numeradores y denominadores.

III.7.1.4. Comparación de fracciones

La idea de fracción con el significado parte-todo que subyace a la propuesta didáctica permite justificar la comparación de fracciones a través de la percepción visual de dibujos para, después, enunciar reglas de actuación. En consecuencia, al alumno se le instruye para que sea capaz de comparar fracciones, sin que ello tenga el sentido de comparar cantidades de magnitud; posiblemente se hace de esta manera porque se presupone que las nociones de números mayores y números menores se extienden de forma natural al tratamiento de cualquier magnitud. Este contenido se presenta en la pp. 144 del texto de 5º curso enunciando una situación problemática con intervención de tres muchachos que miden su capacidad pulmonar cuando soplan:

¿Quién ha conseguido mejor resultado, Pedro o Bruno?
Y entre Bruno y Aitor, ¿quién ha soplado más fuerte?

En 6º curso (pp. 83) se amplia la comparación de fracciones al supuesto en que tienen términos diferentes, para lo que plantea un enunciado sustentado por representaciones gráficas de dos recipientes de leche, de formas diferentes, que están fraccionados:

Óscar consume diariamente 2/3 de litro de leche y Jaime 3/4 de litro. ¿Cuál de los dos bebe más cantidad de leche?

Podemos observar que se plantea una situación problemática de comparación de cantidades de volumen, y también podemos observar que el texto soluciona el problema con la utilización de la idea de fracciones equivalentes. Pero no hay una justificación, ni desde el significado de la medida ni desde el de la parte-todo, de la necesidad de utilizar tal concepto, ni la finalidad con la que se hace.

En resumen, la idea de comparación de fracciones se sustituye por una técnica de determinar el tamaño de dos fracciones, sin que esta idea tenga el soporte de la medida de cantidades de magnitud.

III.7.1.5. Suma y resta de fracciones

Este contenido se aborda en 5º y en 6º curso. En 5º curso se limita a la suma y resta de fracciones de igual denominador, mientras que en 6º curso se añade la suma y resta con fracciones de distinto denominador. En la pp. 90 del texto de 6º curso se aborda la enseñanza de suma y resta de fracciones de distinto denominador enunciando la siguiente situación problemática, acompañada del dibujo de un huerto sobre el que se ha marcado el fraccionamiento de la superficie:

La mitad del huerto está sembrado de ajos, la tercera parte de cebollas y un sexto está en barbecho.
¿Qué fracción del huerto está sembrada?
Qué fracción del huerto representa la diferencia entre los ajos y el barbecho?

La situación problemática que plantea el texto utiliza el significado de suma como agregación de cantidades, mientras que la resta se presenta sin significado puesto que el propio enunciado pregunta por la diferencia de dos cantidades. En todo caso, el texto no utiliza dicho enunciado para conceptualizar las operaciones de suma y resta; antes bien, su intención es la de exponer las técnicas que son propias de estas operaciones; el núcleo de la instrucción se sitúa en el conocimiento procedimental.

En los ejercicios propuestos se muestra más claramente que tanto la suma como la resta atienden a un único significado de agregación de cantidades. Según este texto que la operación que resuelve el problema sea de suma o resta viene determinado por la posición de la incógnita: si se conocen las cantidades parciales y se pregunta por su agregación el problema se resuelve con una suma; y si se conocen una cantidad parcial y la cantidad global el problema se resuelve con una resta.

Vemos, por tanto, que el significado de suma y resta de fracciones queda limitado a unas pocas situaciones problemáticas en las que este significado resulta pertinente; se echa en falta la propuesta de situaciones de transformación, o la de situaciones en las que alguno de los datos venga dado con resultado de la unión de dos cantidades desconocidas, o como la transformación de una cantidad desconocida, o como la comparación de dos cantidades desconocidas.

Estas consideraciones nos llevan a afirmar que el significado de suma y resta de fracciones que presenta el texto se limita a una de las caras que conforman estos conceptos poliédricos, lo que empobrece la comprensión de estos conceptos.

El conocimiento procedimental se presenta de forma ostensiva, el texto explicita la técnica pero no esgrime argumentos para justificarla. En efecto, la presentación de unos gráficos alusivos al significado de fracción como parte-todo sirven para apoyar el discurso sobre la suma o resta de fracciones de distinto denominador, pero ni el texto ni los gráficos sirven para justificar la necesidad de utilizar fracciones equivalentes, que es el aspecto esencial de la técnica de suma o resta de fracciones con distinto denominador.

El libro de 6º curso dedica un epígrafe, en la página siguiente, al caso de la suma de un número entero y una fracción. La presencia de este epígrafe puede justificarse porque no se aborda la noción de número mixto, que estuvo presente en los currícula anteriores a la LGE.

Como muestra el texto, los autores dirigen el núcleo de su discurso a justificar que los números enteros pueden expresarse con la notación fraccionaria. Esta idea, a nuestro entender, debería haberse trabajado en el momento de conceptuar el significado de fracción; y también entendemos que no se hizo por los obstáculos que provoca el significado parte-todo de la fracción para justificar la existencia de fracciones mayores que la unidad.

Las consideraciones realizadas nos inducen a pensar que la enseñanza de las técnicas necesitan de un sustrato firme de conocimientos conceptuales, de lo contrario las técnicas tienen ámbitos restringidos y obligan a presentar nuevas técnicas que cubran la totalidad de la casuística, es decir, de los fenómenos que organiza un determinado concepto.

III.7.1.6. Multiplicación de fracciones

Todos los contenidos referidos a este concepto se presentan en 6º curso, y abordan dos ideas diferenciadas por los autores: el producto de una fracción por un número entero y el producto de dos fracciones. En la página 63 del correspondiente libro de texto presenta la primera idea, en la que se presenta la receta para una pócima (3/4 l. de agua) y se pregunta por las necesidades para varias pócimas:

> **¿Qué cantidad de agua pantanosa necesita Doña Piluca para preparar cinco pócimas?**

Como puede observarse, el producto de una fracción por un número natural se presenta con el significado de suma reiterada, por lo que la fracción se refiere a una cantidad de magnitud, mientras que el número entero indica el número de veces que se reitera dicha cantidad.

En coherencia con el significado otorgado a la suma de fracciones, el producto de una fracción por un número entero se limita a situaciones que implican agregación de cantidades de magnitud, tanto en el discurso como en los ejercicios propuestos; no aparecen situaciones en las que el número natural actúe como factor de comparación (seis veces más, el quíntuplo, etc.).

La justificación de la correspondiente técnica de cálculo se apoya en representaciones de la fracción como relación parte-todo, aunque la explicación se limita a la manipulación de símbolos numéricos.

El producto de fracciones se presenta en la siguiente página, pp. 93, del texto de 6º curso bajo el epígrafe de *Producto de fracciones. La fracción de una fracción.* El enunciado problemático se formula del siguiente modo:

> **En la fiesta de cumpleaños de Doña Piluca, su amiga, la bruja Maruja, se comió media tarta y Doña Piluca los 3/5 de la otra mitad. ¿Qué fracción de la tarta se comió Doña Piluca?**

El significado de la multiplicación de fracciones es el de operador: una de las fracciones expresa una cantidad de magnitud, mientras que la otra fracción indica una modificación de dicha cantidad; el resultado de operarlas es una cantidad de la única magnitud que interviene. Entendemos que el significado que preside esta presentación es el de operador, y así se constata en la argumentación que utiliza el texto en el que se utiliza la expresión "de" para referirse a las cantidades que se mencionan en el enunciado (3/5 de 1/2 de tarta), y que luego los autores convierten en el signo x (3/5 x 1/2) sin ofrecer argumentos sobre tal cambio de nomenclatura.

La justificación de la técnica de cálculo se apoya en el significado parte-todo para constatar que el mismo resultado obtenido de forma gráfica se alcanza con una regla, que se enmarca en el texto. Es decir, no se argumenta sobre el sentido de las operaciones realizadas, sino que se ofrece una certificación de que el mismo resultado se alcanza mediante operaciones numéricas.

Entendemos que, si el significado que se presenta es el de operador, la coherencia del discurso debería justificar la validez del procedimiento de cálculo aplicando ese significado de la fracción. Pensamos que los autores no lo hacen de esta forma porque en la secuenciación de los contenidos la división la sitúan detrás de la multiplicación; en estas condiciones no puede aplicar el significado de operador porque se necesita el conocer el significado del cociente entre una fracción y un número natural.

Aun cuando el significado de operador es el que presenta el texto, entre los ejercicios que se propone figura uno que se resuelve con una multiplicación, aunque el significado de dicha multiplicación es de producto de medidas:

> **Un cuadro mide 6/10 de metro de alto, y 9/10 de metro de ancho. ¿Qué superficie ocupa el cuadro?**

Nos parece muy interesante que los autores aborden el significado del producto de fracciones desde situaciones problemáticas que ofrezcan distintas perspectivas de dicho significado, pues ello favorecerá la comprensión de los alumnos. No obstante, pensamos que el proceso de enseñanza debería incorporar los distintos significados de un mismo concepto en el discurso expositivo, pues ello colocaría a dichos significados con el mismo rango de importancia y habituaría a los alumnos a pensar que los conceptos admiten interpretaciones distintas, pero todas igualmente valiosas.

III.7.1.7. División de fracciones

En la página 94 del texto de 6º curso se abordan ideas acerca de la división, aunque solamente se trata la situación particular de que el divisor sea un número entero:

> **Doña Piluca reparte 3/4 de litro de un bebedizo en dos frascos y 1/2 kg de cenizas en tres bolsas.**
> **¿Qué fracción pone en cada frasco? ¿Y en cada bolsa?**

La situación problemática que plantea el texto es la de reparto, situación que tiene sentido en tanto en cuanto el divisor es un número entero, aunque la cantidad a repartir no esté compuesta por un número entero de unidades; se trata, por tanto, de una ampliación del significado de reparto igualitario.

Sin embargo en la resolución que ofrece el texto, bajo el enunciado de ***Observa***, el significado de reparto se convierte en una división gestionada por gráficos sustentados en el significado parte-todo. De este modo, la idea del reparto, de distribuir una cantidad en un número entero de partes iguales, se convierte en aplicar un operador a una cantidad de magnitud. En consecuencia, el significado que institucionaliza el texto en un recuadro es el multiplicar por el operador inverso del divisor:

Para dividir una fracción entre un número entero basta con multiplicar esa fracción por otra en la que el numerador es la unidad y el denominador es ese número entero.

Es de reseñar que el discurso que plantea el texto no alude a las acciones de reparto que plantea el problema, simplemente se limita a establecer unas igualdades entre resultados gráficos y resultados obtenidos con operaciones numéricas.

III.7.2. Notación decimal

III.7.2.1. Introducción del número decimal

- En cuarto curso solamente se introduce la noción de fracción decimal y aparece después de haber presentado la idea de fracción (pp. 138). Se plantea una situación problemática en un contexto discreto sustentada por representaciones gráficas:

Beatriz y su hermano pequeño juegan con los puzzles.
¿Cuántas piezas tiene el puzzle de David? ¿Qué fracción de las piezas le falta por colocar?

La intencionalidad de los autores es la de presentar a los alumnos unas fracciones con nombre propio, las fracciones decimales que tienen por denominador potencias de 10. Sin embargo, y a partir de un contexto discreto, en el texto aparece la relación entre las fracciones decimales y la notación decimal.

Tres décimos se escribe 3/10 o bien 0,3
Dieciséis centésimas se escribe 16/100 o bien 0,16

La presentación se concibe como un cambio de sistema de representación, como dos formas diferentes de describir una misma situación. La notación fraccionaria es conocida por el alumno debido a la instrucción precedente, pero la notación decimal no se presenta como la medida de una cantidad, puesto que no hay referencia a la magnitud que se considera, ni a la unidad de medida.

Consecuentemente, el significado de la notación decimal es la de un número medida que guarda una relación, no explicita, con la notación fraccionaria: se coloca delante de las cifras del numerador un 0 y una coma. Además, hay una modificación en la forma de nombrar las fracciones del tipo a/10; así, mientras en el apartado ***Observa*** se denominan como *a décimos*, en los ejercicios se enuncia como *a décimas*, sin que haya comentarios al respecto por parte de los autores.

• En quinto curso la notación decimal aparece antes que la notación fraccionaria, se ha invertido el orden de presentación de cuarto curso. Los contenidos aparecen secuenciados en tres páginas de títulos la décima, la centésima y la milésima (pp. 77, 78 y 79).

La situación problemática para introducir la décima se presenta en el contexto de la medida de capacidad, lo que exige de los autores la utilización de una escala adjunta a los recipientes. Además, se mencionan las cantidades utilizando, en un recipiente, la notación decimal y, en otro recipiente, la notación fraccionaria:

Elena y Juan han echado agua en estas probetas
¿Qué cantidad llenó Elena? ¿Y Juan?
Qué cantidad de agua tienen los dos juntos?

Esta presentación hace suponer que los autores consideran que los conocimientos previos de los alumnos (los que adquirieron en el curso anterior), les permiten estar familiarizados con las fracciones decimales, con la escritura decimal, y que saben conectar dichas representaciones.

En el apartado de ***Observa***, y con ayuda de la recta numérica, los autores introducen una idea de fracción que, con los conocimientos que poseen los alumnos, es novedosa: la fracción tiene el significado de cociente de numerador entre denominador. Además, tal cociente debe ser gestionado por los autores (los alumnos no pueden obtenerlo porque no han estudiado las operaciones con decimales).
Posteriormente, se abandona el contexto del problema y se reformulan ideas del decimal sustentadas en la relación parte-todo:

Si se divide una unidad en 10 partes iguales, cada parte es un décima

Desde este significado el texto recuerda que una décima se puede escribir de dos formas diferentes, y apoya la escritura decimal con un gráfico que separa unidades y décimas.
Por último, el concepto que los autores consideran importante en este epígrafe, el que aparece recuadrado, es el que relaciona la unidad y las décimas: una unidad es igual a diez décimas.

Al presentar la centésima (pp. 78), los autores eluden la idea de la fracción como cociente, limitándose a presentar el decimal con el convenio de escritura de fracciones de denominador 100, sin explicitar la sintaxis de esta nueva forma de escritura de las fracciones. El énfasis del contenido lo sitúan los autores en las relaciones entre unidades, décimas y centésimas. En un recuerdo destacado establecen las igualdades:

1 unidad = 10 décimas = 100 centésimas

En la presentación de las milésimas los autores utilizan un cambio de unidad de medida, lo que les permite expresar un número entero de gramos como un número decimal de kilogramos. Los autores vuelven a insistir, como conocimiento destacable, la relación entre unidades, décimas, centésimas y milésimas

Como consecuencia de la instrucción que propone este texto, observamos que la notación decimal se presenta, en quinto curso, con tres significados:

- Como resultado del cociente de dos números naturales, aunque el alumno desconoce la técnica para realizar tal operación
- Como convenio de escritura de las fracciones decimales, sin que se haga explícita la sintaxis de la nueva simbolización.
- Como expresión de la misma cantidad referida a dos unidades distintas, como cambio de unidad de medida.

También es de destacar que, para los autores, el conocimiento más destacable es el de la relación entre los distintos órdenes de unidad. Entendemos que el objetivo que se persigue es el de destacar, aunque no se hace de forma explícita, que las relaciones entre los órdenes de unidad es igual al que ya conocen de la escritura de los números naturales.

• En sexto curso las nociones de décimas, centésima y milésimas se presentan conjuntamente. Se hace con apoyo de la recta numérica incidiendo en el convenio de escritura de las fracciones decimales como números decimales. Por tanto, no se introducen nuevos significados en sexto curso, y los autores siguen incidiendo, como conocimiento más destacado, la relación entre los distintos órdenes de las unidades decimales.

En este sexto curso los autores presentan, en la página 30 y bajo el epígrafe *El valor de las cifras de un número decimal*, la expresión polinómica del número decimal, aun cuando no recurren a las potencias de diez pues deberían ser de exponente negativo. La situación problemática que utilizan los autores es la de un número decimal contextualizado como una medida de longitud. Esta situación permite hacer reflexionar al alumno sobre el valor relativo de las cifras de un número decimal, así como la relación entre los diferentes órdenes de unidades.

El valor de cada cifra decimal depende de su posición en el número.
Cada unidad decimal es diez veces superior a la siguiente y diez veces inferior a la anterior.

Entendemos que no hay un significado del número decimal, sino que los autores tratan de establecer similitudes con el sistema decimal, que los alumnos conocen de los números naturales, con la finalidad de mostrar que el número decimal constituye una extensión del sistema de numeración decimal a cantidades no enteras. Pero esta extensión no se justifica a partir de situaciones problemáticas de medida, se justifica a partir de consideraciones simbólicas que hacen los autores del texto.

III.7.2.2. Orden entre números decimales

• En quinto curso se presenta la noción de comparar números decimales (pp. 80). Se presenta una recta numérica que refleja las marcas de unos atletas que han saltado longitud y se pregunta por la marca de cada uno y por los que hacen mejores saltos.

La situación problemática sirve para enunciar la técnica de comparación de números decimales a partir de dos situaciones diferenciadas que aluden a la parte entera y a la parte decimal. Estas reglas podrían agruparse en una sola que hiciese mención al valor relativo de las cifras, con independencia de su posición en la parte entera o en la parte decimal, teniendo en cuenta el enunciado del problema y la cantidad de magnitud que representa cada una de ellas.
Además, el texto utiliza la recta numérica para expresar cantidades, aunque no se relaciona las peculiaridades de la recta y su relación con el orden que tienen los números en dicha recta.

• En sexto curso la presentación de este contenido se realiza de forma similar a la de quinto curso, por lo que no hay aportaciones diferenciadas respecto a lo que conocen los alumnos del curso anterior. En consecuencia, podemos señalar que los autores dan por supuesto el significado del orden entre decimales, posiblemente porque no los consideran números medida; y la técnica de comparación se enuncia separando la parte entera de la parte decimal.

En este sexto curso el texto añade un epígrafe dedicado a la aproximación de números decimales. Lo que pretenden los autores es educar a los alumnos sobre el modo en que una expresión decimal puede aproximarse a otra expresión decimal que contenga una cifra decimal menos.

III.7.2.3. Suma y resta de números decimales

Este contenido se introduce en quinto curso, aunque se hace en epígrafes separados para la suma y para la resta. En la página 87 presenta la suma de números decimales utilizando un gráfico que indica, por separado, las alturas de un coche y de la plataforma que lo eleva:

¿A qué distancia del suelo se encuentra el casco del piloto?

El enunciado del problema propuesto hará aparecer la suma como agregación de cantidades de la misma magnitud. Es el mismo significado que los autores utilizaron en la suma de fracciones y también es el único significado que aparece en los problemas propuestos a los alumnos. Se trata, por tanto, de una enseñanza que limita la idea de suma de números decimales a uno solo de los significados que tiene este concepto.

La resta se presenta como comparación de cantidades de la magnitud masa. La atención del discurso se centra, tanto para la suma como para la resta, en describir minuciosamente el algoritmo correspondiente, sin justificar los pasos de dicho algoritmo, y sin hacer uso del problema para contextualizar las acciones que permiten dar respuesta al problema:

Se realiza la resta como si fueran números enteros y se pone la coma en el resultado

- En sexto curso los autores reiteran la presentación e intencionalidades de quinto curso: la suma como agregación de cantidades de la misma magnitud, y la resta como comparación de cantidades de la misma magnitud.

III.7.2.4. Multiplicación de un decimal por un natural

Este contenido solamente se presenta en 5º curso (pp. 89). El producto de un número decimal por un número entero se introduce con el significado de suma reiterada, de sumar tantas veces el número decimal como indica el número entero. Aunque hay que dejar constancia que dos de las cuatro actividades propuestas no responden a este significado puesto que el número entero se refiere a una cantidad de magnitud y, por tanto, el producto tiene significado de producto de dos cantidades de magnitud:

Para hacer unas cortinas se necesitan 6,52 metros de tela. El metro de tela cuesta 855 PTA. ¿Cuántos valen las cortinas?

El correspondiente algoritmo de cálculo no se justifica, simplemente se detallan las partes que lo componen y se hace referencia al algoritmo para números enteros.

En el siguiente epígrafe (pp. 90) el texto presenta la multiplicación de un número decimal por 10 y por 100, …. Se vuelve a plantear el producto como suma reiterada, pero estableciendo que la suma ha de reiterarse 10, 100 y 1000 veces. Pero entre las actividades propuestas hay una utilización de este producto en un contexto diferenciado ya que se trata de hacer un cambio de unidades, de pasar una cantidad decimal que indica el peso en kilogramos al peso en gramos.

En el texto se realizan las multiplicaciones correspondientes y se concluye con la técnica que facilita el producto de un decimal por una potencia de 10. Este es el aspecto conceptual que figura destacado en el texto, lo que hace suponer que ese es el núcleo de la instrucción que se pretende.

III.7.2.5. Multiplicación de números decimales

Se trata de un contenido que se presenta solamente en sexto curso (pp. 41), planteando la siguiente situación problemática:

¿Cuántos kilómetros cuadrados de superficie tiene el recinto de los tigres? La superficie del recinto de los leones es 1,7 veces la del recinto de los tigres. ¿Qué superficie ocupa?

El problema propuesto introduce dos significados del producto de fracciones:

- Significado combinatorio: se multiplican dos cantidades de magnitud, en este caso la longitud, y el producto indica una cantidad de una nueva magnitud.

- Factor constante: uno de los factores es un número no medida y el producto, por tanto, expresa una cantidad de la misma magnitud que el otro factor.

En ambos casos los autores se limitan a describir el algoritmo que resuelve el problema, sin utilizar el contexto del mismo para justificar las manipulaciones numéricas que realizan.

El contenido que destaca el texto hace referencia solamente al algoritmo de la multiplicación, mencionando la similitud con el correspondiente algoritmo de números naturales.

III.7.2.6. División de números decimales

En el texto de 6º curso aparecen situaciones diferenciadas, cada una de las cuales se aborda en epígrafes separados y consecutivos:

III.7.2.6.1. Divisiones con cociente decimal

El texto de 6º curso plantea, en la página 43, un problema de cociente tipo razón, para ampliar el algoritmo de la división entera. De forma detallada justifica las sucesivas transformaciones de las unidades restantes en unidades de orden inferior.

III.7.2.6.2. División de un decimal entre un número entero

El texto, en la página 44, plantea un problema de reparto de una cantidad de magnitud, expresada con un número decimal, en un número entero de partes iguales.
Los autores indican que el problema se resuelve con una división, después se limitan a describir el algoritmo de la división, poniendo el énfasis en la colocación de la cifra decimal del cociente.

III.7.2.6.3. División de dos números decimales

Este contenido se presenta en la página 46. El significado que presenta la situación problemática inicial es la de razón, siendo el cociente un número entero; y esta misma situación es la que se plantea en las actividades que se proponen. Este significado no lo utilizaron los autores en el epígrafe de multiplicación de números decimales, lo que hace suponer que los alumnos encontrarán mayores dificultades para conectar las ideas de multiplicación y división de números decimales.

La intencionalidad de los autores es la de incidir en el algoritmo de división de números decimales; y para ello utilizan la que denominan propiedad fundamental de la división, que los autores introducen en la página anterior. Esta propiedad permite reconvertir la división de números decimales en la división de un decimal entre un número entero.

III.7.3. Comentarios

• La fracción se introduce con el significado de parte-todo. Este significado es el que soporta toda la instrucción sobre las fracciones en tanto en cuanto que figura en la mayor parte de las situaciones en que se pone en juego el significado de fracción. También aparecen el significados de operador y el de cociente, pero su presencia tiene como finalidad la de justificar algunos resultados necesarios para cubrir el currículum; en ningún caso se detecta la intencionalidad de ofrecer nuevas perspectivas del significado de la fracción, puesto que no se establecen conexiones entre distintos significados.

• El número decimal se introduce como un sistema de representación de las fracciones decimales mediante un convenio que se explicita para fracciones menores que la unidad. Ahora bien, en los discursos que acompañan la introducción de este nuevo sistema de representación no encontramos referencias a la sintaxis del mismo, ni tampoco se destaca la estructura polinómica de la notación decimal; el texto sí que pone el énfasis en la relación entre unidades de distintos órdenes de magnitud.

También aparecen significados del número decimal como resultado de la división de números naturales, como extensión del sistema de numeración a cantidades no enteras, y como expresión de una misma cantidad de magnitud expresada con unidades diferentes. Pero, al igual que ocurre con las fracciones, no detectamos una intención de conectar diferentes significados del decimal, lo que presupone que los autores confían en que tales conexiones las establecerá el alumno a lo largo del proceso instructivo.

En todo caso, el estudio realizado nos hace suponer que la enseñanza propuesta por el texto posibilitará que el alumno construya una idea abstracta del número decimal, y que en tal idea están débilmente construidas las nociones de valor relativo de las cifras y la estructura aditiva subyacente que sustenta el sistema de numeración decimal.

• La equivalencia de fracciones se enuncia, en 4º curso, como igualdad de cantidades de magnitud; pero esta idea ya no se vuelve a reiterar sino que en el resto de los cursos la enseñanza va dirigida a técnicas asociadas: determinar si dos fracciones son equivalentes y encontrar fracciones equivalentes a una dada.

• En la comparación de fracciones hay ausencia sobre el significado de fracción mayor o menor que otra, lo que detectaría una presunción de los autores sobre la nitidez de este significado. A cambio, sí que hay una preocupación educativa por garantizar el buen uso de las técnicas de comparación por parte de los alumnos, utilizando la equivalencia de fracciones para establecer la comparación a partir de fracciones de igual denominador.

• La comparación de números decimales se aborda sin delimitar el sentido de números mayores o menores que otro; entendemos que los autores presuponen que se trata de un concepto primario que no necesita explicitarse. La técnica de comparación se describe, aunque no se argumenta sobre la validez de la técnica utilizando las cantidades relativas representadas por las diferentes cifras de los números.

• A lo largo de la propuesta didáctica observamos la total ausencia del tratamiento de la densidad de los números racionales respecto al orden. La diferente topología de los números naturales y racionales debería ser un contenido esencial para que los alumnos sepan adaptar la idea de número a estructuras numéricas diferenciadas; sin embargo, los autores no han utilizado la notación fraccionaria ni la notación decimal para formular actividades que pongan en juego la proximidad entre números racionales; no hemos localizado actividades como la búsqueda de números racionales comprendidos entre otros dos dados, u otras similares, sobre las que construir nociones sobre la densidad de los números racionales.

• El significado de las operaciones se construye resolviendo situaciones problemáticas en las que dicha operación tenga significado; por tanto, cuanta mayor sea la variedad de situaciones que afronta el alumno mayor será el grado de significado que construya sobre las operaciones. Este presupuesto no se constata en la propuesta que estamos analizando, ni en las operaciones con números decimales ni en las operaciones con fracciones.

- La suma y resta de fracciones se presenta con un único significado. El significado de combinación o agregación de cantidades de magnitud (en suma y resta) o el de comparación (en la resta). Este modo de actuar se traduce en una reiteración de significados de la suma y resta de naturales, perdiéndose una buena oportunidad de ampliar el grado de significación de estas operaciones.
- La suma y resta de números decimales sigue pautas similares a la de las fracciones. Se presenta un único significado que es el de combinación (en el caso de la suma) y el de comparación (en el caso de la resta).
- La multiplicación de fracciones se presenta con el significado de operador, como un medio para calcular una parte de una parte de cantidad de magnitud. Por tanto, uno de los factores es un número no medida, mientras que el otro factor expresa una cantidad de magnitud sometida a las transformaciones indicadas por la otra fracción.
- La multiplicación de números decimales se presenta son tres significados: como suma reiterada para el producto de un decimal por un número entero, y con los significados, producto de medidas y de factor constante, para el producto de dos números decimales. Es de reseñar que algunos de estos significados no coinciden con los utilizados en el producto de fracciones.
- Solamente se introduce significado para el cociente de una fracción y un número entero, que se hace coincidir con la multiplicación de la fracción por la fracción que resulta de obtener el inverso del número entero. En la propuesta didáctica que hemos analizando no se aborda la división de dos fracciones.
- En los textos aparecen tres situaciones diferenciadas para la división de decimales. En primer lugar se plantea un problema, de tipo razón, para hacer una extensión del algoritmo de la división de números naturales; en segundo lugar utiliza el significado de reparto para dividir un número decimal por uno natural; y, en tercer lugar, la división de dos números decimales se presenta con el significado de la división como razón. Es de reseñar que ninguno de estos significados lo utilizan los autores en la enseñanza de la división con fracciones.

• Los algoritmos de cálculo constituyen la parte más importante de la propuesta didáctica, pues a ellos dedica la mayor parte de los discursos y son destacados en los apartados de ***Recuerda***. Aun cuando entendemos que la justificación de los algoritmos, tanto con la notación fraccionaria como con la notación decimal, es un recurso adecuado para revisar y potenciar los conocimientos conceptuales, en esta propuesta didáctica no aparecen tales justificaciones; antes bien, la presentación de estos algoritmos se hace de forma meramente descriptiva de su funcionamiento y sin aportar argumentos que faciliten su comprensión.

• La conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal es muy débil por cuanto se presenta como un convenio de escritura en algunas fracciones particulares. También nos parece limitado por cuanto el énfasis de la instrucción se limita a establecer relaciones entre los distintos órdenes de unidad de las cifras decimales. De este modo, las representaciones fraccionaria y decimal se constituyen en conocimientos estancos puesto que no se tienden puentes para que el alumno comprenda que son formas diferentes de expresar una misma cantidad; es más, tanto al dotar de significado a las relaciones como al introducir los algoritmos de cálculo, los contextos y los argumentos utilizados en la notación fraccionaria son completamente diferentes de los utilizados en la notación decimal.

III.8. Resolución de problemas

Entendemos que los problemas juegan un doble papel en la educación matemática. De una parte, constituyen la base sobre la que sustentar el aprendizaje de nuevos contenidos matemáticos, por cuanto sirven para plantear situaciones problemáticas cuya resolución exige poner en juego los conocimientos sobre los que se quiere instruir. Por otra parte, porque sirven para modelizar situaciones del mundo físico aplicando los conocimientos, tanto conceptuales como procedimentales, adquiridos en el proceso instructivo.

Respecto a la primera de las utilidades de los problemas, al analizar esta propuesta didáctica hemos observado una clara y constante tendencia a iniciar la exposición de cualquier contenido proponiendo situaciones problemáticas, que consideramos adecuadas porque en su resolución aparece el conocimiento que se pretende enseñar. Pero el texto escrito tiene unas claras limitaciones que invalidan la eficacia del recurso didáctico utilizado. En efecto, el texto escrito no tiene más opción que la de reflejar de inmediato la respuesta al problema propuesto; de este modo, al alumno se le priva realizar por si mismo el proceso de resolución de dicho problema, lo que implica privarle de una construcción personal del conocimiento puesto en juego.

En estas condiciones el alumno realiza un aprendizaje pasivo en tanto en cuanto las ideas matemáticas vienen dadas por el texto, no se derivan de sus propias reflexiones y actuaciones. Es más, el texto ofrece una única respuesta al problema, lo que conlleva que el aprendizaje queda limitado a una sola de las múltiples perspectivas que ofrecen los conceptos matemáticos. Además, este proceso también anula el aprendizaje social, puesto que desaparecen las distintas respuestas que pueden aparecer cuando varios alumnos buscan la respuesta a un mismo problema, y también desaparece la posibilidad de que cada alumno puede argumentar sobre la bondad o falsedad de las respuestas que presentan otros compañeros.

Es posible que el libro de texto tenga que escribirse en la forma en la que está hecho. Ahora bien, teniendo en cuenta las consecuencias negativas que provoca, sería deseable que los autores sustituyesen la solución por una secuencia de preguntas o reflexiones que ayuden al alumno a encontrar dicha solución.

En lo que concierne a la utilización de los problemas para modelizar fenómenos físicos poniendo en juego los conocimientos adquiridos, hay que señalar que los textos analizados conceden un papel secundario a este tipo de actividades. El trabajo de los alumno se dirige fundamentalmente a la realización de ejercicios con la finalidad, se supone, de alcanzar destreza en el manejo de algoritmos. De hecho, de las actividades propuestas en los textos, más del 70% son ejercicios que consisten en una aplicación directa de los contenidos enseñados.

Por otra parte hay que destacar que los problemas propuestos están muy cercanos a la instrucción y, en consecuencia, se limitan a poner en juego los conocimientos recientemente introducidos. De este modo, los problemas no juegan un papel importante en la conexión entre distintos conceptos lo que provoca un aprendizaje de ideas matemáticas parceladas y aisladas. Es más, los problemas propuestos al final de los temas, bajo el epígrafe ***Recuerda***, tienden a formular enunciados del mismo tipo de los que aparecen en cada uno de los epígrafes de que consta cada tema.

No observamos, por tanto, que los problemas propuestos sirvan para profundizar en los aspectos conceptuales utilizados en la presentación de los contenidos, ni para conectar distintos aspectos de un mismo concepto, ni para establecer relaciones entre distintos conceptos, por lo que los problemas planteados no difieren sustancialmente de los ejercicios pues se resuelven utilizando razonamientos análogos a los que utilizan los autores en los problemas que figuran al inicio de cada epígrafe.

Por todo ello, entendemos que la finalidad de los problemas es la de ofrecer al alumno posibilidades para el adiestramiento en las técnicas de cálculo sobre las que se le ha instruido. En apoyo de esta afirmación situaríamos el hecho de que los enunciados de los problemas se formulen con un lenguaje críptico que tiene validez en la escuela pero que no tiene cabida en el mundo real. Así, por ejemplo ocurre en el problema 3 de la página 91 del libro de texto de 6º curso:

Raquel se ha comido un bocadillo y 2/5 de otro, y Javier, dos bocadillos y 3/5 de otro. ¿Qué fracción representa lo que comieron los dos?
Si había 4 bocadillos, ¿qué fracción sobró?

III.8.1. Comentarios

A la vista de las consideraciones realizadas, en la propuesta didáctica de los textos escolares analizados la resolución de problemas juega un papel poco relevante para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los números racionales, tanto para la construcción de los conceptos como para modelizar el mundo físico utilizando los conceptos enseñados.

III.9. La práctica docente

Revisada la propuesta didáctica reseñamos los elementos más destacados de dicha propuesta, que nos van a permitir delimitar las peculiaridades de la práctica docente que se deriva del análisis de los libros de texto de una misma editorial:

1. Los autores, a partir de 4º curso, optan por presentar los números decimales antes que las fracciones. Esta secuenciación de los contenidos altera la génesis histórica de la introducción de los números decimales en Europa. Aun cuando no pretendemos que la enseñanza reproduzca la génesis de los conceptos matemáticos, sí que no parece que en el caso del número racional hay que recurrir a ella por cuanto la notación fraccionaria no exige un dominio profundo del sistema de numeración decimal, como así ocurre en la notación decimal.

En estas condiciones, la instrucción obliga a presentar la notación decimal de forma similar a como se hizo en la presentación del sistema de numeración decimal: hay que priorizar la presentación de los diferentes órdenes de unidades y las relaciones entre ellos. Pero al enfatizar estos aspectos, se desatienden ideas fundamentales para alcanzar un alto grado de comprensión de la notación decimal, cuales son que el origen de estos números está asociado a la medida, la relación de estos entes numéricos con el mundo de los objetos físicos, la medida con subunidades de tamaños diferentes, la estructura aditiva y multiplicativa subyacente a la notación decimal, el significado de las operaciones con números decimales, la justificación de los algoritmos de cálculo con estos números, y la conexión significativamente cognitiva entre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales positivos.

2. Desde la publicación de la LOGSE las autoridades educativas vienen proponiendo un aprendizaje basado en el constructivismo, teoría que demanda una metodología acorde con la abstracción reflexiva y la transformación de estructura cognitivas presentes en el constructivismo.

Del análisis de los textos escolares podemos señalar que la metodología que en ellos se manifiesta está alejada de los presupuestos del constructivismo; que los textos no ofrecen una metodología acorde con el constructivismo cognitivo. En efecto, la metodología que se refleja en los libros de texto prioriza el método expositivo, la presentación de los contenidos mediante disertaciones de los autores; de este modo, el alumno percibe el conocimiento ya terminado y en la forma en que lo conciben los autores. El alumno tiene que asumir los conceptos y procedimientos que, bajo el epígrafe ***Observa***, se le presentan de forma ostensiva como contenidos nítidos.

Ciertamente las exigencias de publicaciones de esta naturaleza favorezcan esta metodología, pero lo que ocurre es que el alumno se convierte en un elemento pasivo del aprendizaje, pues no tiene ocasión para experimentar, manipular, reflexionar y abstraer los contenidos que debe comprender y aprender.

3. La propuesta didáctica analizada muestra una clara tendencia hacia los conocimientos de tipo procedimental. En todos los cursos revisados los conceptos ocupan un lugar secundario, el núcleo de las exposiciones y la mayor parte de los recuadros que destacan los conocimientos se dedican a concretar la técnica utilizada en el epígrafe ***Observa***. En este sentido, cabe mencionar el trabajo de Muñoz-Escolano (2005), en el que se cuantifica la actividad que corresponde al profesor según los textos de la Editorial Santillana, y que concluye que:

> *Se observa una clara preocupación por parte de los autores de que el alumno use y memorice las técnicas y conocimientos procedimentales, por encima de los conocimientos conceptuales. Uno de los indicadores de este hecho es el elevado número de discursos clasificados en la categoría de "sin significado" (47% del total de discursos, es decir, párrafos y/o dibujos que ofrecen explicaciones del contenido).*

Además, los conceptos se muestran; no surgen de la actividad del alumno cuando intenta resolver problemas. Es más, los autores exponen el concepto a enseñar de forma ostensiva, dando por supuesto que el alumno lo comprenderá y lo aprenderá leyendo, u observando, las exposiciones del libro de texto. Esta práctica docente no resulta adecuada para que los alumnos alcancen un alto grado de comprensión de los conceptos matemáticos porque es contraria a los estudios sobre la adquisición del significado de los conceptos matemáticos, en los que se postula la actividad del alumno en la resolución de problemas como motor del aprendizaje.

El trabajo de Muñoz-Escolano (2005) aporta elementos cuantitativos que perfilan la actividad de los alumnos en el aula. Del estudio de todas las actividades que proponen los textos de Educación Primaria sobre el tópico de los número racionales se obtienen los resultados que se recogen en el siguiente gráfico:

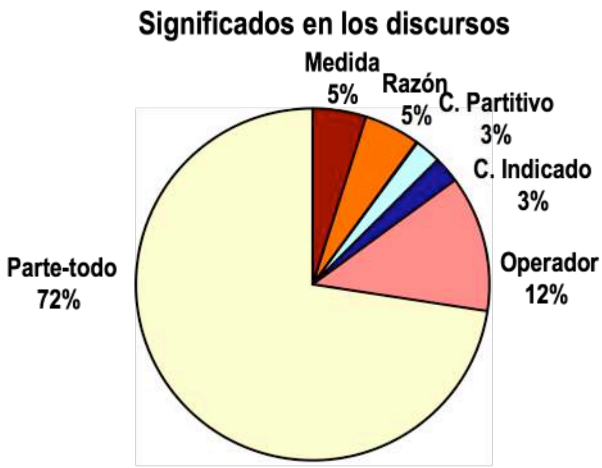
Como puede observarse, el trabajo del alumno está ampliamente dominado por los ejercicios, por la práctica de técnicas que inciden en el conocimiento procedimental.

Como consecuencia del proceso de enseñanza-aprendizaje que se detecta en estos textos escolares resulta plausible que los alumnos se forjen dos ideas contrarias a las finalidades de la educación matemática:

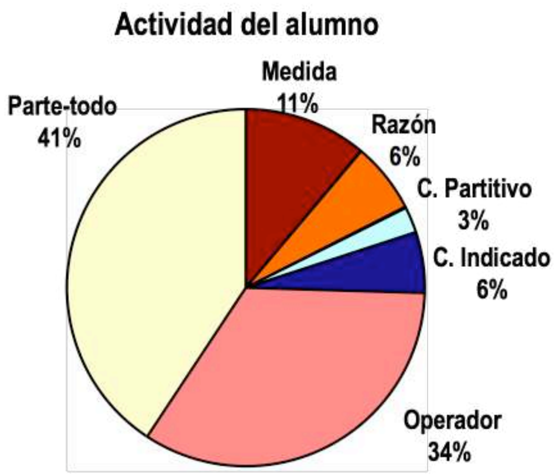
a) Los conceptos son las técnicas asociadas a los mismos.

b) Los contenidos importantes son los procedimentales.

4. La notación fraccionaria se presenta y se utiliza con el significado casi exclusivo de relación parte-todo; es mucho más reducida la presencia de los significados de cociente y de operador, y esta presencia se debe a la necesidad de los autores de introducir unos contenidos concretos, no con la finalidad de incrementar el grado de significado de la fracción.
El mencionado estudio de Muñoz-Escolano (2005) nos permite constatar cualitativamente las observaciones que realizamos en nuestro estudio. En efecto, si atendemos a las explicaciones que corresponden al profesor, si atendemos a la actividad docente, en el siguiente gráfico se puede observar cuáles son los usos que se hacen de los distintos significados de la fracción en los libros de texto de Educación Primaria:



Y, consecuentemente, esta actividad docente delimita y orienta la actividad del alumno. Su trabajo de para asentar los diferentes significados de la fracción vienen reflejados en el siguiente gráfico:



Es de destacar que los resultados que se recogen en estos dos gráficos se corresponden con los discursos y actividades en los que hay presencia de significados. Para ampliar la información conviene reseñar que casi la mitad de los discursos (el 47%) inciden sobre la lectura de fracciones y números decimales y explican meras técnicas o algoritmos para operar fracciones y números decimales.
Además, hay que reseñar que el 79% de los ejercicios propuestos al alumno no se sustentan en ningún significado del número racional: la gran mayoría son ejercicios en donde se presenta a la fracción o número decimal fuera de todo contexto y su propósito es que el alumno practique las técnicas y procedimientos explicados en los discursos.

5. La instrucción sobre el número racional utiliza distintos significados, aunque no a todos se les concede la misma importancia, ni cumplen las mismas finalidades educativas:

- El significado parte-todo tiene una presencia mayoritaria a lo largo de la instrucción en aspectos conceptuales, tanto en lo que se refiere a las ideas de fracción y de número decimal, como en las que se refieren a la justificación de relaciones y operaciones entre números racionales. Constituye, por tanto, el significado que sustenta la instrucción.
- El significado de cociente, aunque se presenta como cociente partitivo, se utiliza como división indicada. Constituye, por tanto, un elemento procedimental en el ámbito concreto de convertir las fracciones en expresiones decimales; su presencia curricular es escasa y de escaso valor conceptual.
- El significado de medida está prácticamente ausente en la propuesta didáctica. Ni en la notación fraccionaria ni en la notación decimal existe la intención de construir o justificar estos lenguajes simbólicos a partir de situaciones problemáticas que impliquen la medida de cantidades de magnitud; su presencia aparece ligada a la necesidad de formular enunciados de problemas contextualizados en el ámbito de las magnitudes mensurables. Curiosamente resulta que un significado que pertenece de pleno a la epistemología del número racional, ha pasado a constituir un significado de nula presencia en el terreno conceptual; su papel queda reducido a cubrir una necesidad de la instrucción tan concreta como la de formular enunciados de problemas, sobre todo en los que se formulan con notación decimal.
- El significado de razón está desconectado, conceptual y físicamente, de otros significados de la fracción. Tiene una presencia importante en el ámbito de la proporcionalidad aritmética, ámbito en que se presenta y utiliza como conocimiento procedimental. Constituye, por tanto, un conocimiento útil para resolver los problemas que aborda el amplio campo de la fenomenología de las magnitudes proporcionales, aun cuando al alumno se le presentan las técnicas de cálculo subyacentes con un escaso soporte conceptual.
- El significado de operador ha perdido la relevancia que tuvo al implantar la denominada Matemática Moderna, y ocupa una posición secundaria en la instrucción. Es un significado que se presenta desconectado de otros significados,

que no se acompaña de un adecuado soporte conceptual y que tiene una finalidad instructiva tan concreta como la de ofrecer técnicas para calcular la fracción de un número o calcular el producto de dos fracciones. Constituye, por tanto, un significado marginal, tanto desde la perspectiva conceptual como desde la procedimental.

6. Como ya se ha reseñado, el significado parte-todo sustenta la enseñanza del número racional en Educación Primaria. Es una elección que tiene consecuencias importantes para que los alumnos realicen una deficiente construcción del número racional, pues dicha elección implica que los alumnos den cabida a ideas como las siguientes:

- Las fracciones impropias no existen, por cuanto resulta difícil de aceptar que se puedan tomar más partes de las que aparecen al fraccionar el todo. El hecho de que se reitere en todos los cursos un epígrafe dedicado a las fracciones impropias constituye la constatación de que este tipo de fracciones son difícilmente comprensibles para los alumnos.
- Se concibe la fracción como un número no medida, como un ente abstracto que relaciona representaciones gráficas y simbólicas. En efecto, en el libro de texto no se explicita el sentido y funciones de la unidad, porque se oculta la medida real de cantidades de magnitud; de este modo los alumnos pueden forjarse la creencia de que solamente han de tener en cuenta dos elementos: el "todo" y las partes destacadas. Esta idea dificulta la resolución de problemas, puesto que los enunciados y las soluciones exigen que las fracciones hagan referencia a una cantidad de magnitud y la unidad con la que se mide.
- El número racional se engloba en la idea de número que los alumnos construyeron con los números naturales. En efecto, el texto no produce en el alumno la ruptura conceptual provocada por la necesidad de utilizar los números para resolver tareas diferenciadas: el número natural resuelve las actividades de recuento, mientras que el racional resuelve las actividades de medida. En consecuencia, las estructuras numéricas se disipan y, por tanto, el alumno identifica los significados de entes numéricos bien diferenciados, así como sus relaciones y sus operaciones.
- El idea de fracción con el significado parte-todo no la percibe el alumno como una idea matemática necesaria, pues las actividades que se proponen se resuelven con un doble recuento. Por tanto, las fracciones se conciben como ideas abstractas de las matemáticas que no surgen al resolver actividades humanas.

7. El número decimal se presenta como un convenio de escritura de las fracciones decimales, pero no hay una preocupación por explicitar al alumno la evaluación sintáctica y semántica que corresponden a este sistema de representación simbólico; en consecuencia, los alumnos conciben el número decimal como un ente abstracto, como un número no medida, y sin referentes en el mundo de los objetos físicos. Es más, el número decimal se configura con una doble identidad: la parte entera, que responde a los cánones conocidos de los números naturales, y la parte decimal, que se concibe como una cantidad de naturaleza similar a la de los números naturales pero situada detrás de la coma decimal.

8. La enseñanza de la fracción y del número decimal se aborda desde contextos aislados y desconectados; así, mientras que las situaciones problemáticas que propone el texto para introducir el número decimal evocan acciones de medida de cantidades de magnitud, la fracción se introduce desde la relación parte-todo sin hacer referencia a cantidades de magnitud. Es más, a lo largo del proceso instructivo son muy escasas las relaciones que se establecen entre las notaciones fraccionaria y decimal, de modo que el alumno no tiene oportunidad de percibir que dichas notaciones son formas diferentes de expresar la misma cantidad de magnitud.

Los autores no utilizan modelos de aprendizaje estables que permitan a los alumnos construir las ideas matemáticas trabajando en el mismo entorno físico. Estas decisiones dificultan el aprendizaje de los alumnos porque las magnitudes presentan peculiaridades diferenciadas en su percepción y utilización, porque las cantidades de magnitud son más o menos fáciles de observar dependiendo de los objetos con los que se trabaje, y porque los resultados de las acciones realizadas sobre los objetos se consiguen con mayor rapidez y eficacia si los alumnos están habituados a trabajar con los mismos objetos y con las mismas magnitudes. Estas consideraciones no se tienen en cuenta en el texto analizado puesto que cada nuevo concepto se le presenta al alumno desde contextos muy diferentes, tanto en el tipo de objetos como en las magnitudes que se utilizan, lo que le obliga a dicho alumno a focalizar su atención en interpretar el contexto que se presenta y, consecuentemente, a desviar su atención del objetivo educativo que se persigue.

9. Los sistemas de representación no alcanzan la relevancia que les corresponde. Entendemos que, en el ámbito escolar, las ideas matemáticas se expresan y transmiten utilizando sistemas de representación bien definidos y de uso universal, por lo que juegan un papel esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Y, por tanto, también entendemos que la explicitación de las características sintácticas y semánticas de los sistemas de representación utilizados, así como el fortalecer las conexiones entre ellos, es uno de los principales objetivos educativos. En consecuencia, la instrucción ha de sustentarse en modelos de aprendizaje que faciliten comprender la necesidad y las características del lenguaje simbólico que permita describir los resultados obtenidos.

En los textos analizados observamos cierta despreocupación por hacer una construcción significativamente cognitiva de las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, porque no se detallan los aspectos sintácticos de dichos sistemas de representación, y porque no se incide en la evaluación semántica de dichos sistemas simbólicos, sobre todo en el caso de la notación decimal. A cambio, hemos observado una cierta proliferación de otros sistemas de representación, con los que los autores intentan facilitar la comprensión de los alumnos; así, por ejemplo, en el epígrafe *la décima* aparecen la recta numérica y la división exacta que no mejoran la comprensión de estos conceptos. En efecto, el texto utiliza la representación de la recta numérica para mostrar las conversiones entre fracciones y números decimales pero no justifica el origen de tales traslaciones; mientras que recurre a la división exacta como un sistema de representación de la fracción pero carente de significado conceptual porque no ha habido enseñanza previa de la fracción como resultado de un cociente partitivo.

10. La resolución de problemas no actúa como motor del aprendizaje. Es cierto que todas las ideas matemáticas que se presentan a los alumnos, según hemos detallado en el apartado de metodología, se inician con el enunciado de un problema, de cuya resolución surgirán las ideas sobre las que se quiere instruir a los alumnos. Sin embargo, bien sea por las exigencias editoriales o por las decisiones de los autores, lo cierto es que tal problema no sirve para movilizar el aprendizaje porque la resolución de dicho problema la efectúan los propios autores, con lo que los alumnos quedan al margen del proceso de resolución y, por tanto, quedan al margen de activar las estructuras cognitivas necesarias para comprender las nuevas ideas matemáticas que están en juego.
Ítem más, los problemas que se proponen en cada uno de los epígrafes se enuncia en un contexto completamente distinto a los otros epígrafes y diferentes de los contextos en los que se presentaron las ideas de fracción y número decimal. En estas condiciones, la instrucción puede favorecer dos ideas no deseadas: que los conocimientos matemáticos no están conectados entre sí y que los conceptos son entes abstractos que deben memorizarse.
Por otra parte, dejamos constancia de que los problemas no juegan un papel importante en la consolidación del conocimiento conceptual puesto que son muy escasos los que se proponen; y se proponen con la idea de que se resuelvan por analogía con los que se ya han resuelto los autores del texto. De este modo, al alumno se le adiestra en el uso de algoritmos, pero encuentra dificultades para resolver problemas puesto que tiene argumentos muy débiles para elegir las operaciones que resuelven los problemas; por ello no resulta extraño que los alumnos demanden una clasificación de los problemas en tipos diferenciados por la forma en que se resuelven.

11. Las relaciones y operaciones entre números racionales son conocimientos procedimentales. En efecto, aunque se presentan al alumno situaciones problemáticas, los aspectos que destacan los textos analizados, mediante recuerdos, son los diferentes aspectos que configuran las técnicas algorítmicas. De este modo, el alumno se forja la idea de que las nociones matemáticas son alguna de las técnicas que están asociadas; es decir, los significados se sustituyen por los algoritmos.

Esta práctica educativa provoca que los significados que surgen de los problemas propuestos se limiten a una sola de las situaciones o perspectivas de dicho concepto; es más los significados de las operaciones, tanto con números fraccionarios como con números decimales, son idénticos a los que se utilizaron para las operaciones con números naturales; lo que viene a confirmar a los alumnos que solamente hay una idea de número y que, por tanto, los significados de las operaciones son independientes del tipo de número con el que se opera.

Estas reflexiones y consideraciones, derivadas del análisis de la propuesta didáctica de una determinada línea editorial, nos llevan a caracterizar la enseñanza del número racional en Educación Primaria como pasiva, memorística y centrada en el adiestramiento en el uso de algoritmos. Estas características permiten entender que parte, o buena parte, de los bajos resultados de los alumnos españoles en las pruebas de matemáticas, como el reciente Informe Pisa 2003, son el resultado de la instrucción recibida.

Ciertamente la comprensión del número racional exige superar importantes obstáculos de tipo epistemológico, pero también es cierto que una práctica docente como la que hemos analizado no favorece la superación de tales obstáculos; antes bien, provoca nuevos obstáculos, de tipo didáctico, como consecuencia de la secuenciación de los contenidos, de los recursos didácticos utilizados y de las estrategias metodológicas empleadas.

Es por ello que nos proponemos elaborar una propuesta didáctica que favorezca la comprensión de los escolares del número racional, propuesta que desarrollaremos completamente en el Capítulo V, dejando constancia de los fundamentos teóricos en los que se sustenta, de los objetivos que se persiguen y de la metodología que debe utilizarse.

III.10. Tipo de estudio que se quiere realizar

Como ya hemos enunciado, la finalidad de nuestra investigación es la de implementar una secuencia didáctica que incremente la comprensión de los alumnos de Educación Primaria sobre números racionales, mediante el fortalecimiento de las conexiones entre las habituales notaciones fraccionaria y decimal. Y dado que la observación del proceso de construcción del conocimiento por parte de los escolares debe realizarse en alguno de los entornos en que se produzca, entendemos que el espacio natural del aula es el marco idóneo para desarrollar nuestra investigación, pues en dicho espacio se produce y se puede analizar la interrelación entre los sujetos y las componentes del objeto de conocimiento, las componentes de la instrucción y las componentes del aprendizaje.

Pero además de fijar las metas a alcanzar y el entorno en el que se desarrolla la investigación, también debemos utilizar la metodología de investigación que resulte más adecuada al tipo de trabajo que queremos desarrollar. Para delimitar tal metodología debemos mirar inicialmente al campo en que se ubica nuestro trabajo, al campo de la educación; y en este campo encontramos que los métodos de investigación educativa cubren un amplio abanico de posibilidades (Jacob, 1988; Bisquerra, 1989; Cassell y Simón, 1994), en el que tienen cabida dos tipos de investigaciones:

- investigaciones que usan metodología cuantitativa, que incluyen aspectos tales como elección de muestras, elección de grupo de control, experimentación, control de variables, análisis estadístico,...
- investigaciones que usan metodología cualitativa, que permiten dotar de significado al estudio del comportamiento de los sujetos sometidos a tratamiento.

Es evidente que la diferencia más significativa entre ambas metodologías de investigación se encuentra en la intencionalidad del trabajo:

> *La distinción más notable entre los paradigmas cuantitativo y cualitativo corresponde a la dimensión de verificación frente a la de descubrimiento. Los métodos cuantitativos han sido desarrollados más directamente para la tarea de verificar y confirmar teorías y, en gran medida, los métodos cualitativos fueron desarrollados, deliberadamente, para la tarea de descubrir o generar teorías.* (Cook y Reichard, 1982, pp. 38).

La concreción de las metas que se pretenden alcanzar en esta investigación nos permiten, como aproximación global, aceptar que la metodología más adecuada es la investigación cualitativa, por cuanto "*la investigación cualitativa es esencialmente un acto de interpretación que valora los múltiples significados que construye la gente desde sus experiencias colectivas e individuales*" (Brotherson, 1994, pp. 17).

Aunque el término cualitativo no es unívoco ni exacto, en lo sucesivo lo vamos a interpretar como acceso a las experiencias personales y a la comprensión de sus comportamientos; y esto es así por cuanto nuestro interés se centra en indagar acerca de la construcción individual de los conocimientos de los alumnos de Educación Primaria, lo que implica explorar los fenómenos aparecidos, hacer una descripción de los mismos y formular una justificación de lo observado. En este sentido, los trabajos de Cook-Reichard (1982) y Taylor-Bogdam (1990) nos han permitido atender a los aspectos metodológicos generales que caracterizan la investigación cualitativa; desde estos principios generales se configura una amplia variedad de opciones, que se distinguen por la intencionalidad perseguida o por variantes de tipo metodológico.

La decisión final sobre la metodología de investigación que vamos a utilizar, como se justificará con amplitud en el Capítulo IV, nos lleva a optar por la conocida como Investigación-Acción (Elliot, 1990; McNiff, 1991; Kemmis y McTaggart, 1988), pues las características de este método de investigación se adaptan a nuestras intenciones, ya que:

- la idea fundamental es la de reflexionar sobre la práctica en general y la práctica educativa en particular,
- su intencionalidad es la de mejorar la calidad educativa,
- se ocupa de hacer una indagación introspectiva colectiva,
- su campo de actuación son los entornos reducidos en los que un equipo pequeño de investigadores tiene la posibilidad de introducir modificaciones y analizar sus consecuencias.

III.11. Racionalidad del estudio y supuestos en que se basa

De lo expuesto en apartados anteriores se deduce la complejidad conceptual inherente al conjunto de los Números Racionales, puesto que en este conjunto numérico se aglutinan una multiplicidad de significados y una variedad de sistemas de representación, que han aparecido durante un largo proceso histórico.

Desde la perspectiva docente, el diseño de la secuencia instructiva sobre los números racionales es una tarea muy compleja porque la variedad de conceptos, relaciones, y operaciones obliga a optar entre varias alternativas. Así, por ejemplo, dotar de significado a la fracción a partir de las acciones sobre magnitudes mensurables, lleva a decidir sobre el tipo de magnitudes que se emplean: las magnitudes extensivas permiten la construcción de la estructura de grupo aditivo considerando la fracción como cociente; las magnitudes intensivas permiten formalizar una estructura de grupo multiplicativo considerando la fracción como razón.

Además, el conocimiento del alumno sobre los números naturales obstaculiza la comprensión del número racional, en tanto en cuanto los alumnos trasladan al conjunto de los números racionales conceptos y procedimientos que son propios de los números naturales, como ocurre en estos casos:

- en los números naturales la multiplicación se puede concebir como una suma repetida ("la multiplicación hace más grande"), mientras que la multiplicación de fracciones es independiente de la suma; se concibe como una función compuesta en la que cada uno de los números de la fracción actúa como operador multiplicativo.
- la comparación entre números naturales se resuelve en muchas ocasiones mediante el recuento de las cifras de cada uno de ellos; mientras que en las expresiones decimales debe hacerse atendiendo al valor posicional de las cifras.
- la unidad constituye el elemento básico del recuento en los números naturales; mientras que en los números racionales tiene dos papeles muy diferenciados: por una parte, es la unidad divisible que constituye el elemento esencial para la comparación de números; y, por otra parte, es la base conceptual para la formación del inverso de la multiplicación y sirve como elemento unidad u operador unidad (Kieren, 1993).

Desde la dimensión de formar ciudadanos competentes en Matemáticas, también debemos atender a la preparación de individuos capacitados para hacer un uso adecuado de esta disciplina: razonar sobre las matemáticas, comunicarse matemáticamente y comprender mejor la naturaleza de las matemáticas. Estos objetivos aparecen explicitados en documentos referidos a las metas de la Educación Matemática, como los Estudios Internacionales de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) (Mullis. I. et al, 2002) o el Informe Pisa (2004)

En el caso que nos ocupa en esta investigación, en formación de escolares sobre el tópico de los números racionales, el diseño de una propuesta didáctica debe contemplar las siguientes intenciones:

- Fomentar el razonamiento sobre este tipo de números y potenciar la comprensión del papel de los números racionales en las matemáticas de la cantidad; es decir, colocar como objetivo prioritario el que los escolares desarrollen el sentido del número (N.C.T.M., 1991).

- Crear oportunidades para que los escolares exploren y razonen sobre sus conocimientos acerca de los conceptos y procedimientos de los números racionales, mediante la propuesta de situaciones problemáticas que les fuercen a poner en juego nuevos conocimientos sobre las relaciones y conexiones que subyacen en este conjunto numérico; reflexionando posteriormente sobre este nuevo conocimiento y la forma en que lo han adquirido (Sowder, Bezuk y Sowder, 1993).
- Potenciar las experiencias de los escolares con diferentes significados de la fracción, de modo que puedan establecer conexiones sólidas entre las distintas perspectivas que subyacen a la idea de número racional.
- Fomentar el trabajo con una amplia variedad de modelos y representaciones de los números racionales, incrementando las conexiones entre los mismos y mostrando las relaciones entre los significados de la fracción y otras partes de la matemática:
    - la medida conecta la aritmética con la geometría y el espacio;
    - los operadores facilitan la comprensión de la existencia del inverso de la multiplicación y también el significado de la composición de aplicaciones;
    - el cociente potencia las conexiones entre los dos sistemas de representación simbólicos que se vienen utilizando habitualmente en los números racionales;
    - la razón permite conectar la lógica del razonamiento proporcional con la lógica de las magnitudes intensivas.
- Reelaborar los conocimientos previos de los escolares sobre las relaciones de orden entre números racionales, así como el sentido de la densidad respecto del orden, pues constituyen conocimientos esenciales para la comprensión de la estructura topológica del conjunto de los números racionales (Giménez, 1991).

Se trata, por tanto, de ofrecer a los alumnos de Educación Primaria oportunidades para explorar, conjeturar, comprobar y reflexionar sobre el sentido de los números racionales contemplados desde distintos significados. De este modo, ayudaremos a superar la actual situación en la que muchos alumnos tienen dificultades con cuestiones conceptuales y procedimentales de los números racionales y no son capaces de resolver problemas más que de modo procedimental (Post, Harel, Behr y Lesh, 1991).

Pensamos, por tanto, que el estudio que se propone en este trabajo tiene una delimitación curricular bien definida: incrementar la comprensión de los alumnos de Educación Primaria sobre el conjunto de los Números Racionales.

III.12. Objetivos Generales e Hipótesis

Las consideraciones realizadas hasta el momento sobre nuestra investigación nos permiten volver a los objetivos generales, que ya se enunciaron en el Capítulo I, apartado I.10, y darles mayor precisión; también nos permiten explicitar las hipótesis que orientan este estudio.

En consecuencia, mantenemos los objetivos que guían la presente investigación: delimitar las características que, para incrementar el conocimiento de los escolares, debe tener una determinada propuesta didáctica; e indagar acerca de las potencialidades y limitaciones que se detectan al implementar dicha propuesta didáctica en un grupo natural de alumnos.

Los dos objetivos que se persiguen con nuestro trabajo de investigación quedan formulados en los siguientes términos:

Objetivo I: ***Diseñar de una Propuesta Didáctica para la enseñanza del Número Racional Positivo en Educación Primaria fundamentada en los modelos de aprendizaje de medida y de cociente partitivo, caracterizada por:***

1.1. Contemplar los objetivos específicos ya señalados en el Capítulo I: delimitar dos modelos para el aprendizaje; priorizar la fracción como medida y como cociente de números naturales; construir un sistema de representación polinómico decimal; y explicitar las características sintácticas y semánticas de este sistema.

1.2. Potenciar las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, poniendo de manifiesto que las fracciones admiten una representación polinómica similar a la que subyace en nuestro sistema de numeración.

1.3. Construir los conocimientos de los alumnos, sobre las relaciones y sobre las operaciones entre números racionales positivos, a partir de situaciones problemáticas situadas en los modelos de aprendizaje definidos.

1.4. Emplear una metodología que prioriza el trabajo personal de los estudiantes y que potencia el aula como espacio natural para la construcción del conocimiento.

Objetivo II: ***Explorar las potencialidades y limitaciones de la Propuesta Didáctica cuando se implementa con grupos naturales de alumnos de cuarto y quinto curso de Educación Primaria.***

Con los supuestos anteriores se configuran las **Hipótesis** que se pretenden contrastar en nuestro estudio:

Sostenemos que:

Uno: **Es viable una propuesta didáctica sobre los números racionales positivos, destinada a alumnos de los cursos 4º y 5º de Educación Primaria, sustentada en los significados de medida y cociente partitivo que, consecuentemente, desatiende las propuestas tradicionales basadas en el significado parte-todo**

Dos: **Esta propuesta permite superar los obstáculos provocados por el significado parte-todo y, en consecuencia, produce una mejora en la comprensión de los alumnos de Educación Primaria sobre los números racionales.**

Capítulo IV

Diseño de la investigación

IV.1. Introducción

En el capítulo anterior se concluyó con la formulación general del objetivo y las hipótesis de nuestro trabajo de investigación. Este capítulo se dedica a explicitar el marco metodológico propio desde el que se aborda el trabajo de investigación.

La estructura general de este marco metodológico se ajusta a las siguientes ideas:

1. Este trabajo es un estudio de tipo exploratorio e interpretativo, que se enmarca en el paradigma cualitativo.
2. El estudio se articula en dos etapas, en cada una de las cuales se desarrolla y evalúa una experiencia de aula sobre una innovación curricular, en la línea de la Investigación-Acción diagnóstica y empírica.

En la primera parte de este capítulo se justifica la conveniencia de las etapas de la investigación, las relaciones entre ellas, sus peculiaridades y la temporalización del proceso global.

El capítulo se completa con la concreción de aspectos relacionados con la metodología de Investigación-Acción que se utiliza en nuestro trabajo: descripción de los participantes y Unidades de Análisis correspondientes a la Organización del Contenido, la Comprensión del Contenido y la Interacción Didáctica.

IV.2. Etapas de este trabajo y su articulación

El diseño metodológico general de esta investigación, que evalúa una propuesta didáctica alternativa y original, se estructura en dos etapas, cuyas finalidades y relaciones vamos a precisar.

Hay una **Primera Etapa** que tiene la clara intencionalidad formativa de incrementar la comprensión de los alumnos de Educación Primaria sobre los números racionales; y para ello, se elabora, implementa y evalúa una determinada propuesta didáctica.

Desde su posición de aprendices, a través de esta propuesta los alumnos construyen los conocimientos matemáticos sobre los tópicos fracciones y decimales, así como la conexión entre estos sistemas de representación. Además, en esta propuesta se contienen aspectos importantes para que los alumnos conozcan la naturaleza de las matemáticas y las peculiaridades de su aprendizaje:

- Para pensar y comunicar ideas matemáticas las personas deben construir códigos y símbolos, que en el caso de los números racionales positivos son los sistemas de representación convencionales.
- Un sistema de representación no está dado a priori, hay que construirlo para poder comunicar los resultados de las acciones realizadas sobre los objetos. Su doble condición de ser un sistema general (es válido para todas las situaciones que se pueden presentar) y de universalidad (debe ser igual para todas las personas), hacen que los sistemas primitivos evolucionen y se modifiquen a lo largo del tiempo. Por tanto, las matemáticas se configuran como una disciplina científica, producto de una evolución histórica, y creada por las personas para solucionar sus problemas.
- Cada sistema de representación tiene unas características sintácticas y semánticas que tienen que respetarse escrupulosamente; de lo contrario, su utilidad como medio de comunicación sería nula.
- Para construir un sistema de representación hay que precisar los objetos sobre los que se actúa, la característica que se estudia de dichos objetos, las acciones que se realizan sobre los objetos y las técnicas empleadas para realizar las acciones; es decir, hay que delimitar el modelo sobre el que se trabaja.
- Un modelo tiene una doble utilidad; de una parte, sirve para construir sistemas de representación, entre los que los simbólicos ocupan un lugar destacado en matemáticas; de otra parte, las relaciones y operaciones establecidas en el lenguaje simbólico pueden contemplarse como acciones sobre los objetos del modelo. En consecuencia, la verdad o falsedad de las afirmaciones expresadas en un lenguaje simbólico pueden certificarse con los sentidos; la verdad o falsedad de tales afirmaciones se pueden verificar en el modelo.
- En un proceso evolutivo, las notaciones fraccionaria y decimal van incorporando los diferentes significados del número racional sin que haya variación de los símbolos utilizados; por tanto, la comprensión del número racional conlleva la conexión entre sus diferentes significados.

Todos estos posicionamientos se ponen de manifiesto a lo largo del proceso instructivo, bien a través de tareas sobre el significado de una expresión simbólica, bien a través de la revisión crítica de las tareas, o bien en los debates colectivos o en pequeño grupo que se celebren y, en menor medida, a través de los discursos del profesor.

La **Segunda Etapa** de esta investigación no está diseñada a priori, sino que surge como consecuencia de la reflexión sobre las potencialidades y limitaciones de la propuesta didáctica una vez implementada. Esta reflexión nos lleva a revisar su diseño para que los alumnos conecten las notaciones fraccionaria y decimal de forma cognitivamente efectiva.

En efecto, la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal se sustenta en la acción de repartir con dos técnicas diferenciadas, pero para que esta conexión sea significativa hay que poner en juego ideas bien construidas sobre la división con significado partitivo. Puesto que hemos detectado dificultades de comprensión de esta idea de división partitiva, consideramos conveniente analizar el modo en que nuestra propuesta didáctica mejora su eficacia instruyendo previamente a los alumnos sobre la división de naturales con sentido partitivo. Hay que tener en cuenta que la acción de medir exige la utilización de técnicas específicas y la realización práctica de la medición, lo que obliga a limitar la medida a dos o tres fases; sin embargo, la idea de repartir es más compleja por cuanto necesita de técnicas propias y, posteriormente, aplicar técnicas de medida. A cambio, la acción de repartir puede realizarse de forma evocada, o con ayuda de gráficos, por lo que no necesita su realización con objetos tangibles y permite, por tanto, realizar repartos en varias fases sin mayores complicaciones que las de controlar los elementos que intervienen.

Con esta finalidad, se diseña una intervención en el tercer curso de Educación Primaria, curso en el que, de acuerdo con el Proyecto curricular del Colegio Tío Jorge en el que se implementa una propuesta didáctica para enseñar la división de naturales con el significado de cociente partitivo. Para esta intervención se elabora un material específico formado por colecciones de billetes, de una moneda imaginaria, compuestas por billetes de 1 unidad, billetes de 10 unidades, billetes de 100 unidades y billetes de 1000 unidades. La situación problemática que se plantea es la de hacer repartos equitativos de cantidades monetarias, con la condición de que todos los participantes reciban la misma cantidad. El énfasis de la instrucción se sitúan en el significado del reparto, el significado del cociente de la división y en la técnica de cambio de billetes de un valor por los de valor inmediatamente inferior.

Con uno de los grupos de alumnos que han recibido instrucción, en los cursos cuarto y quinto de Educación Primaria se implementa por segunda vez la propuesta didáctica que surge como reflexión de los resultados obtenidos en la Primera Etapa de nuestra investigación.

Con los datos obtenidos en esta Segunda Etapa estaremos en disposición de valorar si la propuesta didáctica, desarrollada en la Primera Etapa de la investigación, alcanza mayores cotas de eficacia porque:

- Los escolares entienden el reparto de magnitudes continuas como extensión del reparto de cantidades discretas.

- La relación entre los órdenes de magnitud de las diferentes cantidades resultantes del reparto aparecen muy nítidos al aplicar la técnica de reparto por fases y fraccionamientos en diez partes iguales.
- El número decimal se conforma como agregación de cantidades de una magnitud al aplicar la técnica del reparto en varias fases.
- Se facilita la conexión entre las representaciones polinómica decimal y la fraccionaria.

Las dos etapas que se contemplan en nuestro trabajo se enmarcan en el paradigma cualitativo; y más concretamente en la metodología denominada Investigación-Acción. La metodología de Investigación-Acción ya ha sido utilizada por Castro (1994), Romero (1995), Cubillo (1998) y Gairín (1999), en trabajos en los que cada uno de estos autores elabora, implementa, analiza y reflexiona acerca de una propuesta didáctica experimentada con alumnos de E.G.B., de B.U.P. , de B.U.P. y de Universidad, respectivamente.

El trabajo que se recoge en esta Tesis contiene aspectos diferenciados de los que se contemplan en los de los autores anteriores, tanto por los contenidos que se tratan como por los alumnos objeto de la experimentación. Sin embargo, la similitud de los diseños de investigación empleados en este estudio y en los de los autores citados, nos lleva a considerar esta investigación como parte de un proceso de validación del marco metodológico iniciado en dichos trabajos.

IV.3. Experimentación de la propuesta de innovación curricular

Nuestra investigación está centrada en el desarrollado y evaluación de una Propuesta Didáctica con grupos naturales de escolares de cuarto y quinto de Educación Primaria. El objetivo de esta propuesta es incrementar la comprensión de los escolares sobre las relaciones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales.

Nuestro trabajo sigue las líneas generales del modelo de investigación ya desarrollado con anterioridad por Castro (1995), por Romero (1996) y por Gairín (1999). Las peculiaridades de nuestro trabajo vienen delimitadas por los descriptores principales que se explicitan a continuación: el método de investigación en que se ubica este trabajo, las fases que se siguen, el grupo de alumnos objeto de la experiencia, el papel específico del investigador, las técnicas de recogida y selección de datos, análisis de los datos y el control de la fiabilidad y validez de la experiencia.

IV.3.1. Encuadre en la línea de Investigación-Acción

En una aproximación amplia nuestro trabajo ha sido concebido dentro de la metodología denominada Investigación-Acción. La idea fundamental que encontramos en este método de investigación es la de reflexionar sobre la práctica en general y la práctica educativa en particular. Su intencionalidad es la de mejorar la calidad educativa (McNiff, 1992, pp. 1) y lo hace a través de una indagación introspectiva colectiva (Kemmis y McTaggart, 1988, pp. 9). La Investigación-Acción limita, por tanto, su campo de actuación a entornos reducidos en los que tienen posibilidad de introducir modificaciones y analizar sus consecuencias un equipo pequeño de investigadores.

En este método de trabajo, el investigador no es un observador externo sino que se constituye en componente del equipo que, junto con el director de esta tesis doctoral y un observador externo, lleva a cabo la experimentación de modo que *la división entre prácticos e investigadores se desvanece* (Lewin, citado por Elliot, 1990, pp. 95). Aunque el investigador actúa como profesor de aula los intereses de los agentes que participan en la investigación-acción tienen intereses diferentes: los alumnos quieren ampliar sus conocimientos con mejores métodos de enseñanza, el profesor quiere avanzar en su profesionalidad, mientras que el objetivo del investigador es encontrar respuesta a sus inquietudes científicas.

En orden a delimitar con mayor detalle la metodología de investigación que utilizaremos recurrimos a la clasificación de Arnal et al. (1992). De este modo, nuestro trabajo se encuentra en la intersección de dos de las categorías de la escuela lewiniana:

- Lo consideramos incluido en la categoría de investigación-acción diagnóstica por cuanto está enfocado a la recogida de datos, a la interpretación de los mismos, a realizar un diagnóstico y a enunciar unas medidas de acción.
- Lo consideramos incluido en la categoría de investigación-acción empírica por cuanto estudia un problema social mediante una acción que supone un cambio y, además, trata de valorar de forma sistemática los efectos producidos.

En cuanto a la caracterización del diseño de esta investigación y atendiendo a la tipología de Stake (1994), podemos calificarla como estudio de caso instrumental puesto que se trata de una experiencia curricular: conectar las notaciones fraccionaria y decimal de los Números Racionales Positivos, por medio de la introducción del sistema de representación, que Gairín (1999) denomina Representación Polinómica Decimal, y que ha sido adaptado al nivel educativo en que se implementa la propuesta didáctica.

Por último, y utilizando los trabajos de Arnal et al. (1992), delimitamos nuestro trabajo en los términos siguientes:

- En cuanto a su finalidad, es una investigación aplicada, puesto que trata de dar respuesta a un problema práctico y, en consecuencia, mejorar la calidad educativa mediante la transformación de las condiciones de enseñanza.
- Es un estudio longitudinal en su alcance temporal puesto que utilizamos datos de dos grupos a lo largo de un periodo de sesiones.
- Atendiendo al objeto perseguido nuestra investigación es de tipo descriptivo, pues existe interés en el descubrimiento y la interpretación de fenómenos producidos en el aula.
- Por el marco, nuestra investigación es de campo puesto que se trabaja en el aula con grupos naturales de alumnos.

- Es una investigación evaluativa puesto que pretendemos introducir un cambio en el currículo y valorar los efectos que produce.

IV.3.2. Fases de la Investigación-Acción

El método de trabajo en esta línea de investigación viene delimitado por cuatro fases fundamentales:

Desarrollo de un plan (**planificación**)
Puesta en marcha de un plan (**acción**)
Observación de los efectos de la acción (**observación**)
Reflexión sobre los efectos de la acción (**reflexión**)

Estas fases se suceden de manera cíclica, lo hace que, después de la finalización de una etapa, se esté en disposición de avanzar a una nueva etapa en el que el punto de partida, la pregunta inicial, se ha reformulado como consecuencia de la reflexión sobre la acción emprendida en la etapa anterior (Kemmis y McTaggart, 1988; Elliot, 1990; Castro, 1994).

Nuestro estudio implementa y evalúa una Propuesta curricular sobre el Número Racional Positivo con grupos naturales de alumnos de cuarto y quinto curso de Educación Primaria, y se articula en las cuatro fases mencionadas:

IV.3.2.1. Fase de planificación

- Se hace un primer estudio para indagar sobre los aspectos estructurales y cognitivos del conjunto numérico objeto de nuestra investigación. Se realiza el análisis epistemológico del número racional positivo y el estudio se complementa con la revisión de textos escolares de Educación Primaria, puesto que dichos textos nos proporcionan informaciones acerca de las características de la instrucción que se imparte actualmente en las aulas.
- Con la información obtenida se elabora la propuesta curricular, que se formula en torno a tres aspectos básicos:
  - el primero, contempla la caracterización de un modelo estable de medida sobre el que construir las ideas sobre la notación fraccionaria;
  - el segundo, se amplia el significado de la fracción con el modelo de cociente partitivo. Aparece de este modo el sistema simbólico de representación polinómica decimal, del que se analizan sus características sintácticas y semánticas;
  - el tercero, pone de manifiesto que el sistema de representación polinómica decimal permite mostrar una estructura polinómica de las fracciones similar a la que subyace en la notación decimal de los Números Racionales Positivos.
- De acuerdo con estos aspectos, se conforma la programación de las sesiones de clase que se llevarán a cabo en la fase siguiente; para cada una de las sesiones, dicha programación se organiza en torno a cinco componentes curriculares: objetivos, contenidos, actividades propuestas, metodología y valoración.

- Los tres aspectos que articulan esta propuesta curricular son originales del investigador y han sido elaborados explícitamente para este estudio. Su redacción definitiva se ha llevado a cabo durante seis años, y ha sido contrastada mediante una serie de estudios piloto.

IV.3.2.2. Fase de acción

Se lleva a cabo la programación diseñada, introduciendo las modificaciones que sugieran las observaciones efectuadas en el aula y de acuerdo con las decisiones elaboradas por el Equipo Investigador.

- Los alumnos tienen que dar respuestas a dos tipos de trabajo, que se les presentan en hojas separadas y que han de realizar individualmente o en grupos pequeños:
  - <u>Fichas de trabajo</u>: su intencionalidad es la de enfatizar el significado de las ideas matemáticas; son trabajos cuya resolución exige atender a aspectos conceptuales y procedimentales.
    Se presentan a los alumnos en forma de tareas y algunas de ellas exigen que en su resolución se expliciten los significados de las ideas nuevas. En otras tareas el alumno tiene que intentar formular resultados generales a partir de observaciones particulares.
    La realización de las tareas precede a la exposición del profesor, y permiten la institucionalización de las ideas matemáticas a partir de las aportaciones que los alumnos realizan en discusiones colectivas.
  - <u>Fichas de evaluación</u>: son fichas de trabajo específicas que el Equipo Investigador considera adecuadas para evaluar la comprensión de los alumnos. Habitualmente, son tareas que inciden en aspectos conceptuales que se han introducido previamente y que indagan significados, o bien inciden en aspectos procedimentales, con la finalidad de evaluar la consolidación de determinadas técnicas.

    La planificación inicial de la Propuesta contempla que los alumnos de la Primera Etapa realicen 85 fichas, 62 de Trabajo y 23 de Evaluación, una prueba intermedia en quinto curso, y dos pruebas finales que los alumnos de 4º curso y 5º curso que han participado en la experimentación realizan al incorporarse al Centro después de las vacaciones de verano.
- Aun cuando la metodología de las sesiones hace especial énfasis en el trabajo individual de los alumnos, también se contemplan las exposiciones generales del profesor investigador, los trabajos en pequeño grupo y las discusiones colectivas.

IV.3.2.3. Fase de observación

Como resultado de las dos fases anteriores se tienen datos sobre la puesta en práctica de los contenidos y sobre la comprensión que muestran los estudiantes sobre dichos contenidos. Durante esta fase se hace un vaciado de toda la información obtenida y se organizan los datos resultantes según una serie de categorías.

Una buena parte de los datos de la experimentación se obtienen de las producciones escritas de los alumnos, así como de las grabaciones en audio y en video de algunas de las sesiones.

El profesor, en su calidad de participante, también aporta datos sobre la experimentación de la propuesta didáctica; datos que se reflejan en el Diario de Clase. En este documento se reflejan y valoran todas las incidencias que ocurren en cada una de las sesiones de la fase experimental.

Después de cada una de las sesiones hay un intercambio de información con el profesor de aula, que actúa como observador; las deliberaciones posteriores permiten decidir si la sesión siguiente mantiene o modifica alguno de los aspectos contenidos en la programación.

El Equipo de Investigación está permanentemente informado de la implementación y hace un seguimiento semanal del desarrollo de la experimentación de aula.

IV.3.2.4. Fase de reflexión

En la fase de observación se han recogido y organizado los datos de las fases anteriores. El trabajo último será el de analizar dichos datos, valorarlos, extraer conclusiones y tomar las decisiones oportunas que se deriven.

La reflexión debe encaminarse a determinar aquellos aspectos de la organización del contenido que deben mejorarse; a determinar los grados de comprensión alcanzados por los alumnos y el modo de superarlos; y a determinar aquellos aspectos de la metodología que han de mantenerse o modificarse. Se trata de un proceso de análisis y evaluación.

IV.3.3. Focos de investigación

Nuestro trabajo tiene una clara intencionalidad formativa: incrementar la comprensión de los escolares sobre los números racionales, potenciando las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal. Para ello, la Propuesta Didáctica que experimentamos en el aula se articula en torno a tres núcleos del contenido o focos de investigación.

IV.3.3.1. Primer foco de investigación

El sistema de representación fraccionario. Para concretar y establecer este sistema de representación se delimitan las características, potencialidades y limitaciones de un modelo sobre el que se trabaja. En este modelo, a partir de las acciones de medida de cantidades de magnitudes, principalmente longitud y superficie, se da sentido a la fracción como expresión del resultado de la medida utilizando una subunidad. Posteriormente, se abordan las nociones de equivalencia y orden, así como las operaciones con fracciones.

En este foco se pretende que los escolares construyan las ideas matemáticas a partir de las reflexiones realizadas sobre los resultados que producen sus actuaciones sobre los objetos y las modificaciones que se producen en las cantidades de magnitud.

IV.3.3.2. Segundo foco de investigación

Conexión entre la notación fraccionaria y la notación decimal. Conocida la notación fraccionaria, la notación decimal surge como consecuencia de introducir convenios que nos permitan expresar de forma más económica la representación polinómica decimal. Para alcanzar este propósito hay que introducir la fracción con significado de cociente partitivo con la técnica de repartir en una sola fase. Posteriormente, hay que introducir la técnica del reparto en varias fases obligando a que los fraccionamientos de la unidad o de cualquiera de las partes de la unidad sea siempre en 10 partes iguales.

Los objetivos que se quieren alcanzar en este foco son los de presentar la estructura polinómica de las fracciones como suma de potencias de 1/10, lo que facilita la construcción de la notación decimal. De este modo se persigue conectar las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, dotando de significado a dichos entes numéricos a partir de las manipulaciones realizadas sobre el mismo modelo.

IV.3.3.3. Tercer foco de investigación

La notación decimal. El sistema simbólico que se ha introducido puede evaluarse sintáctica y semánticamente, pero es necesario avanzar en el manejo de este sistema simbólico añadiendo nuevas especificidades relacionales y operatorias.

Los objetivos que se quieren alcanzar en este foco son los de dotar de significado a las relaciones de orden entre expresiones decimales; así como de dar significado a las operaciones de suma, resta, multiplicación de un decimal por un entero y división de un decimal entre un entero. Además, se pretende que los escolares construyan los algoritmos correspondientes a estas relaciones y operaciones.

IV.3.4. Participantes

El diseño de la investigación contempla dos Etapas. En las dos Etapas la implementación de la Propuesta Didáctica desarrollada en este trabajo se lleva a cabo en el Colegio Público Tío Jorge, de la ciudad de Zaragoza.

• Primera Etapa

En la Primera Etapa experimental participan dos grupos naturales de alumnos de cuarto y quinto curso de Educación Primaria. El Primer Ciclo, con alumnos de cuarto, se lleva a cabo durante el curso 1999/2000 y el Segundo Ciclo, con alumnos de quinto, en el curso académico siguiente 2000/2001.

Participan 52 alumnos que son identificados con los códigos A00 a A52 porque, en el Segundo Ciclo, se incorporan al C.E.I.P. “Tío Jorge” cinco alumnos (A48, A49, A50, A51 y A52) que participan en la experimentación, a pesar de que no han seguido la propuesta de cuarto curso. Estos alumnos, junto con cuatro alumnos (A41, A42, A43 y A44) que abandonan el Colegio; otro (A45) que repite cuarto y dos (A46 y A47) que no asisten de manera regular al aula porque se ausentan de las clases de matemáticas para seguir un programa de adaptación curricular específico. En estas condiciones, los datos referidos a las respuestas de los alumnos A41 a A52 al resolver las Fichas de Evaluación no van a ser analizadas.

• Segunda Etapa

En la Segunda Etapa experimental participa un grupos natural de alumnos de tercero, cuarto y quinto curso de Educación Primaria. En esta Etapa participan 20 alumnos que son identificados con los códigos B00 a B20; sin embargo, solo se van a analizar las producciones de 18 alumnos porque un alumno (B19) abandona el Colegio al comenzar 5º curso y otro alumno (B20) repite 4º curso de Educación Primaria.

Hay una intervención, en tercer curso de Educación Primaria, de 20 sesiones de clase, dedicado a desarrollar la instrucción sobre el cociente partitivo de números naturales. Este primer ciclo de nuestra experimentación se lleva a cabo durante el curso 2002/03 y participan 20 alumnos.

En cuarto curso de Educación Primaria se implementa la propuesta didáctica, tal y como se configuró al finalizar la Primera Etapa. Este primer ciclo de nuestra experimentación se lleva a cabo durante el curso 2003/04 y participan 20 alumnos.

En quinto curso de Educación Primaria participan los 18 alumnos que ya habían participado en los dos ciclos anteriores y se les instruye de acuerdo con la propuesta diseñada al finalizar la Primara Etapa. La implementación se lleva a cabo durante el curso 2004/05.

La siguiente tabla resume la participación de alumnos en las dos Etapas de la fase de Experimentación:

Primera Etapa

Curso académico	1999-2000	2000-2001	Sept.2002
40 alumnos	4º E.P.	5º E.P.	Prueba entre Colegios (6º E.P.)

Tabla IV.1.Alumnos participantes en la Primera Etapa

Segunda Etapa

Curso académico	2002-2003	2003-2004	2004-2005
18 alumnos	3º E.P.	4º E.P.	5º E.P.

Tabla IV.2. Alumnos participantes en la Segunda Etapa

IV.3.5. Papel del investigador

El investigador se sitúa como profesor de los grupos en el que se experimenta la propuesta didáctica, acompañado siempre por el maestro del grupo. Con los Maestros participantes se ha detallado la Propuesta, tanto en lo que se refiere a contenidos como lo que afecta a la metodología. Con esta intención se ha formado un Seminario con maestros del C.E.I.P.

"Tío Jorge" que ha celebrado sesiones de trabajo, con periodicidad semanal, durante los cursos académicos en los que se ha realizado la experimentación. A estas sesiones asiste el investigador que presenta este estudio que, de una parte, recaba información de las observaciones de aula que realizan los maestros; y por otra parte, establece pautas de actuación para la implementación de la Propuesta.

Esta posición del responsable de este trabajo le otorga un papel específico dentro del proceso investigador, lo que le permite llevar a cabo actuaciones como las siguientes:

- Introducir modificaciones en los contenidos del programa de la asignatura, por cuanto se ha consensuado con el profesorado del centro y porque dichas modificaciones son compatibles con los objetivos de la asignatura.
- Aplicar las estrategias metodológicas más acordes con la intencionalidad del trabajo, previa justificación ante los profesores y alumnos implicados.
- Obtener datos para la investigación en el lugar y condiciones en que se producen, puesto que su presencia en el aula es un hecho normal.
- Analizar situaciones particulares del desarrollo de la experiencia y tomar decisiones en el momento en que se producen.
- Avanzar en su formación profesional en tanto en cuanto trata de dar respuesta a un problema práctico y, en consecuencia, mejorar la calidad de su actividad docente mediante la transformación de las condiciones de enseñanza.
- Dar respuesta a unas inquietudes científicas al introducir un cambio en el currículo y observar los efectos que produce tal cambio.
- Avanzar en su preparación científica en la disciplina de Didáctica de las Matemáticas, así como en su formación como investigador en dicha disciplina.

El doble papel de investigador y profesor que asumimos en nuestra investigación, nos obliga a realizar una observación participante de la interacción social cotidiana que se produce en el aula. Pero esta posición de profesor y de investigador necesita arbitrar algunas cautelas que garanticen la fiabilidad y validez del estudio que nos proponemos; en este trabajo se han tenido en cuenta las siguientes cautelas:

- Utilizar la técnica de triangulación de investigadores para la obtención, delimitación y objetivación de los datos obtenidos en nuestro trabajo. Esta triangulación implica al Director del trabajo, al profesor Dr. Jesús Murillo que pertenece al Área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Rioja y al propio investigador.
- Aplicar la técnica de triangulación de los datos mediante el empleo de distintas fuentes de información: documentos escritos de los alumnos, diario de campo del investigador y grabaciones en audio y en video.
- Ofrecer toda la información sobre el status de investigador; de los constructos y premisas teóricos que enmarcan este estudio; de los métodos de recogida y análisis de datos; de la selección de los informantes; y de la situación y condiciones sociales en que se desarrolla la experiencia.

- Desarrollar la investigación en el escenario natural del aula, lo que permite reflejar las experiencias y transformaciones de los participantes sin las distorsiones que producirían escenarios más artificiales o laboriosos.
- Mantener un proceso continuo de autovigilancia del investigador, que le ha llevado a un cuestionamiento y a una evaluación permanentes de sus actuaciones.

IV.3.6. Técnicas para recoger información y elaborar los datos

Al observar el desarrollo de las sesiones de clase en la que se está implementando una propuesta didáctica previamente elaborada, se obtienen informaciones relativas a la organización de los contenidos que se imparten, a la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes, y a las interacciones didácticas que se producen. A partir de estas informaciones, debidamente categorizadas, se obtienen una serie de datos y, a partir de éstos y de su interpretación, se obtienen los resultados de la propuesta de innovación en estudio y se elaboran las conclusiones. Por tanto, es importante fijar las fuentes de información que se utilizan, así como los criterios para la selección de los datos obtenidos.

La recogida de información, en el paradigma cualitativo, puede hacerse a través de distintas técnicas, como el estudio de casos, las entrevistas personales, la observación participante, el empleo de medios audiovisuales (fotografía, grabaciones de voz, vídeo,...), etc. Lo que se persigue es, en suma, disponer de información lo más fiable posible de lo que hacen y dicen los sujetos observados.

El doble papel de investigador y profesor que asumimos en nuestra investigación, nos obliga a realizar una observación participante de la interacción social que se produce en el aula. Es por ello que en la recogida de informaciones utilizamos las siguientes técnicas:

- relación intensiva y a largo plazo con los alumnos;
- registro cuidadoso de lo que ocurre en el aula (producciones de los alumnos, grabaciones de voz, anotaciones de sucesos o de comportamientos destacables, ...);
- registro de las reflexiones personales surgidas en el desarrollo de las sesiones;
- descripciones detalladas utilizando procedimientos narrativos; y
- reflexiones surgidas de la documentación obtenida.

Las medios considerados para obtener la información son los naturales; es decir, las comunicaciones interpersonales producidas en las sesiones de clase (detectadas a través del sistema perceptivo), que se realizan en un lenguaje natural. De este modo pretendemos conseguir como un primer objetivo que la observación sea sistemática y, como segundo objetivo, que el grado de inferencia en la observación sea débil, puesto que se enunciarán solamente los hechos que se hayan observado, sin aportar nuestra interpretación en esta fase.

En nuestra investigación los datos constituyen el soporte del que esperamos que aparezcan conceptos y planteamientos teóricos como resultado de su análisis. La construcción, análisis e interpretación de los datos necesita un sistema de categorías que permita codificar la información obtenida; este sistema de categorías, que el investigador desarrolla al inicio del trabajo, se describe con mayor detenimiento en el apartado IV.6 de este capítulo.

El tipo de análisis que utilizaremos será inductivo, pues las categorías, que surgen de las notas de campo, de los documentos de trabajo de los alumnos y de las grabaciones, no son impuestas a priori a los datos; antes bien, el examen de las observaciones realizadas y de las informaciones obtenidas permitirá la reformulación de categorías de fenómenos y de relaciones entre ellas, resultado de la reelaboración o modificación de las clasificaciones iniciales, de acuerdo con los casos que hayan aparecido.

Para llevar a efecto este análisis recurrimos a la técnica de triangulación, que trata de diferenciar entre los datos objetivos de la investigación y los datos subjetivos que se generan si hay una sola observación, puesto que tanto el observador como los sujetos observados contribuyen a la forma de los datos; de este modo se pretende ajustar las observaciones recurriendo al empleo de diferentes técnicas para estructurar los datos y para llevar a cabo su análisis desde distintas perspectivas.

En orden a precisar la técnica de triangulación que utilizaremos en nuestro análisis, atendemos a la tipología que aparece en los trabajos de Janesick (1994):

- Triangulación de datos: la objetivación de los datos se realiza mediante el empleo de distintas fuentes de información.
- Triangulación de investigadores: el análisis de datos se realiza con el trabajo de diferentes investigadores y evaluadores.
- Triangulación teórica: un mismo conjunto de datos se interpreta desde perspectivas diferentes.
- Triangulación metodológica: el problema que se investiga se aborda desde diferentes estrategias metodológicas.

Nuestra elección para este estudio, teniendo en cuenta las condiciones de contexto, ha sido utilizar una doble técnica de triangulación para la obtención, delimitación y objetivación de los datos producidos:

- una triangulación de investigadores en la que se implican el director de este trabajo, el profesor Dr. Jesús Murillo y el profesor-investigador;
- una triangulación de los datos obtenidos a través de fuentes distintas: documentos escritos de los alumnos, diario de campo del investigador y grabaciones en audio y en video.

IV.3.7. Categorías para construir y analizar los datos

La implementación de nuestra propuesta didáctica se desarrolla con unos alumnos determinados y en un contexto concreto y esta consideración es determinante para la organización de las dos etapas de nuestro trabajo. La inserción en el marco curricular es obligada, nuestro trabajo se encuentra delimitado por el entorno sociocultural de las personas cuya formación se estudia; el tipo de formación que se propone; las peculiaridades de las personas, medios y recursos que configuran la institución social en la que se produce esta formación; las necesidades formativas que se quieren cubrir y el control que se realiza de la formación alcanzada (Rico, 1990a).

En la planificación del currículum se consideran al profesor, los alumnos, el contenido y la institución como componentes o dimensiones del sistema curricular (Rico, 1990b; Romberg, 1992). En esta investigación nos situamos dentro de ese nivel de reflexión para centrarnos en el análisis de las componentes del triángulo didáctico, de las interacciones que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Considerando al aula como el marco en que se desarrolla la investigación, se identifican tres componentes interrelacionadas: contenido, alumnos y profesor, tal y como muestra el gráfico:

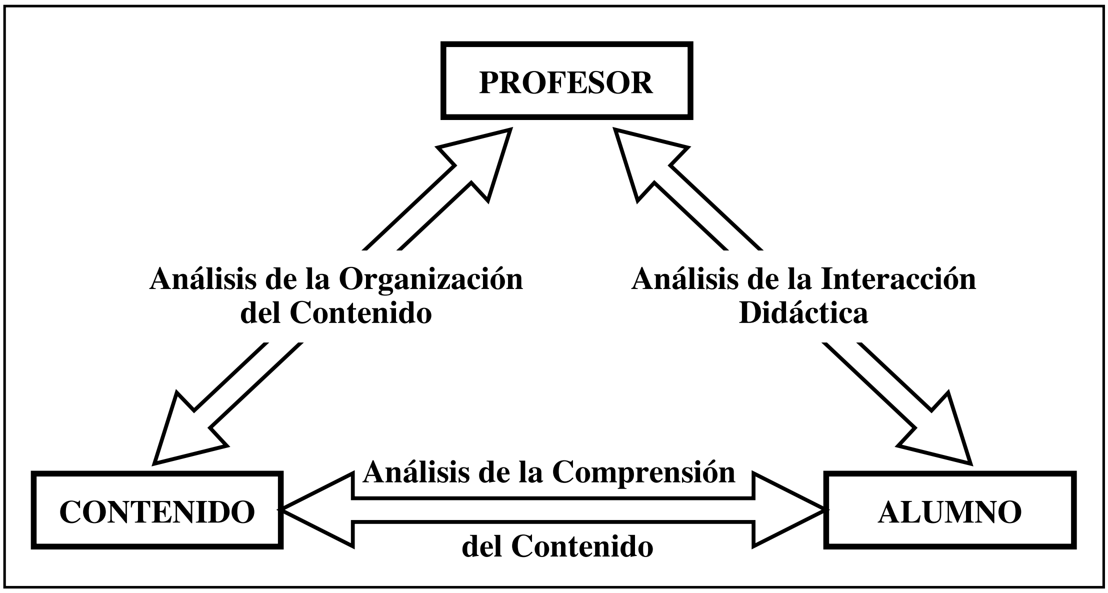


Gráfico IV.1. Relaciones entre las tres componentes del triángulo didáctico

La información que vamos a recoger y los datos que vamos a elaborar están centrados sobre las relaciones entre las tres componentes del triángulo. Como se indica mediante el gráfico, consideramos las relaciones entre cada dos de las componentes. Para estudiar la relación entre profesor y alumnos nos centramos en la interacción en el aula; para estudiar la interacción entre profesor y contenido observamos la organización del contenido; para conocer la relación entre contenido y alumnos estudiamos la comprensión del contenido por parte de los escolares.

La sistematización de la información obtenida aportará datos sobre las relaciones entre las componentes del triángulo didáctico. Para realizar la construcción y el análisis de dichos datos son necesarias unas categorías o unidades de análisis, que sistematizan la información sobre las relaciones entre el contenido, el profesor y los alumnos. Aunque se detallarán con amplitud en el apartado IV.6 de este mismo capítulo, estas unidades son de tres tipos y se sustentan en las ya establecidas por Romero (1995) que, a su vez, eran una adaptación de las que elaboró Castro (1994):

- Unidades de Análisis para la Organización del Contenido: permiten estudiar la organización y secuenciación de los contenidos que se tratan en el proceso didáctico. Estas unidades sistematizan toda la información sobre las interacciones Profesor-Contenido y la analizan; están fijadas antes de la implementación del proceso instructivo, si bien contemplan las observaciones y reflexiones que aporta la experiencia docente del investigador.
- Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido: permiten sistematizar los fenómenos que se presentan de comprensión del contenido matemático por parte de los alumnos, así como analizar los datos resultantes.
- Unidades de análisis de la Interacción Didáctica: permiten abordar el estudio de las interacciones que han tenido lugar entre el profesor y los alumnos a lo largo del proceso didáctico y su relación con la construcción del conocimiento. Estas unidades contemplan aspectos sobre gestión del trabajo en el aula, sobre gestión del desarrollo del contenido y sobre la construcción del conocimiento en el aula.

IV.3.8. Fiabilidad y validez del estudio

En el paradigma metodológico cuantitativo la evaluación de la calidad científica de un trabajo de investigación debe contemplar los criterios de validez y fiabilidad del mismo. Estos criterios siguen siendo válidos en el paradigma metodológico cualitativo (Janesick, 1994). El control sobre la fiabilidad y validez de este trabajo indagatorio sigue la reflexión realizada por Romero (1995), sobre cuyas ideas principales se basa nuestra argumentación.

La fiabilidad es una cualidad de una investigación relativa a la exactitud y constancia de la misma. Se dice que la fiabilidad es alta cuando mide con la misma precisión los resultados; es decir, produce los mismos resultados al aplicar los mismos métodos en sucesivas investigaciones realizadas en condiciones similares. Cuando es posible, la fiabilidad de una prueba puede determinarse mediante técnicas que midan la correlación entre los resultados de dos investigaciones que se obtienen de repetir la misma prueba, de dos pruebas equivalentes o de la partición de la prueba en dos mitades.

La reiteración de los trabajos plantea grandes dificultades en las investigaciones sobre el comportamiento natural o los fenómenos únicos. En estos casos, parece inviable la medida de la fiabilidad de un estudio cualitativo por cuanto la presencia de cualidades como la unicidad y la idiosincrasia imposibilitan la reiteración del proceso, sobre todo, cuando se intentan registrar las transformaciones que se producen.

En el caso de nuestra investigación, en la que se analiza un comportamiento humano que no es estático, no sería posible la replicación exacta del estudio. Por tanto, la fiabilidad de nuestro trabajo vendrá determinada por la generación, perfeccionamiento y validación de constructos y postulados que hagan innecesaria la réplica de las situaciones. Y en este sentido, y siguiendo los trabajos de Goetz y Lecompte (1988), mejoraremos la fiabilidad tanto interna como externa del siguiente modo:

- La fiabilidad interna se mejora con la presencia de diferentes investigadores que actúan sobre un mismo estudio. Las estrategias seguidas en nuestro estudio para incrementar la fiabilidad interna han sido:
  - Utilizar descriptores de bajo nivel inferencial: la transcripción literal de los registros observacionales constituyen la evidencia principal para que los lectores puedan aceptar, rechazar o modificar las conclusiones extraídas por el observador.
  - Facilitar la revisión por otros investigadores: además del director de la tesis y otros colegas que han intervenido en el proceso de construcción y análisis de los datos, la presente memoria, como documento público, constituye un material idóneo para su revisión por otros expertos.
- La fiabilidad externa de esta investigación se fortalece en tanto en cuanto se proporciona toda la información relativa a:
  - el status de investigador;
  - los constructos y premisas analíticos sobre los que se asienta este trabajo;
  - los métodos de recogida y análisis de datos;
  - la selección de los informantes;
  - la situación y condiciones sociales en que se desarrolla la experiencia.

La validez de los métodos de investigación científica es una apreciación del grado de proximidad entre la realidad y los resultados obtenidos. En el paradigma cuantitativo se diferencian la validez interna (o condiciones de control experimental) y la validez externa (o posibilidad de generalización de los datos). En las investigaciones cualitativas, cual es el caso de la que estamos realizando, y siguiendo los trabajos de Goetz y Lecompte (1988), también podemos incrementar el grado de validez interna y de validez externa, en los términos que exponemos seguidamente.

- La **validez interna** está avalada por:
  - La convivencia con los participantes: la dualidad del papel del investigador como profesor de los alumnos, así como la duración temporal de la experimentación han permitido el análisis y comparación permanente de los datos con el fin de perfeccionar los conceptos.
  - La realización de la investigación en un escenario natural ha permitido reflejar las experiencias y transformaciones de los participantes sin las distorsiones que producirían escenarios más artificiales o laboriosos.
  - El proceso de autovigilancia del investigador, subjetividad disciplinada, que ha llevado a un cuestionamiento y evaluación permanentes de su actuación.

- En cuanto a la **validez externa** o generalización de los resultados presenta una gran dificultad, como corresponde a todas las investigaciones cualitativas (Firestone, 1993). En la investigación cuantitativa se emplean tres técnicas para la generalización de los resultados obtenidos: la extrapolación desde una muestra a la población a partir de análisis estadísticos, la generalización analítica y la transferencia de un caso a otro. En la investigación cualitativa se utiliza fundamentalmente la tercera, la transferencia de un caso a otro, aunque también se han hecho esfuerzos para utilizar las otras dos.

  En el caso de nuestra investigación, incrementamos la validez externa mediante una descripción lo más rica, profunda y detallada posible de todo el proceso, pormenorizando la situación real en que se hizo el estudio, así como una información amplia del proceso y de los hallazgos obtenidos. De este modo, el lector que quiera utilizar los resultados de la investigación deberá asumir la responsabilidad de aplicar los mismos a la situación en que quiere hacerse, la responsabilidad del investigador es la de haber proporcionado toda la información que necesita. No es factible una generalización de los resultados desde una muestra hasta la población mediante datos estadísticos porque no se ha trabajado con esa intencionalidad (no ha habido una selección de informantes sino un grupo de alumnos que trabajan en su escenario natural) y por el carácter exploratorio del trabajo. Tampoco parece oportuna la generalización analítica de los resultados dado el carácter exploratorio de la investigación.

IV.4. Esquema general del diseño

Para resumir el diseño de la experimentación en las dos Etapas que se han presentado y comentado detalladamente en los apartados IV.2 y IV.3 anteriores, hemos elaborado un esquema general para las etapas. En el mismo figura nuestro esquema de Investigación-Acción construido a partir del esquema propuesto por Elliot (citado por McNiff, 1988, pp.30), en el que se recogen las ideas básicas de las etapas cíclicas de la metodología de investigación.

En nuestro esquema incorporamos la aportación de Whitehead (citado por McNiff, 1988, pp.44) que considera la posibilidad de dar cuenta de episodios espontáneos a lo largo del proceso de investigación-acción, añadiendo espirales adyacentes al problema general de investigación; estas aportaciones permiten acomodar el tratamiento que se da a problemas subyacentes al problema fundamental de la investigación y cuyo tratamiento se considera necesario para abordar dicho problema principal. En este caso. dicha espiral adyacente se corresponde con la valoración de la Primera Etapa y la correspondiente toma de decisiones para afrontar la Segunda Etapa.

El esquema que se presenta no refleja un plan apriorístico, sino que muestra la síntesis de nuestro proceso de investigación, y que se ha elaborado para facilitar su comprensión y servir de guía para el desarrollo de la exposición. También queremos señalar que hemos optado por describir el proceso de investigación de forma lineal, puesto que ello nos permite ofrecer una mayor claridad expositiva, en la que queda explicitada una estructura que, en determinados aspectos, permaneció implícita a lo largo de la realización del trabajo propio de la investigación.

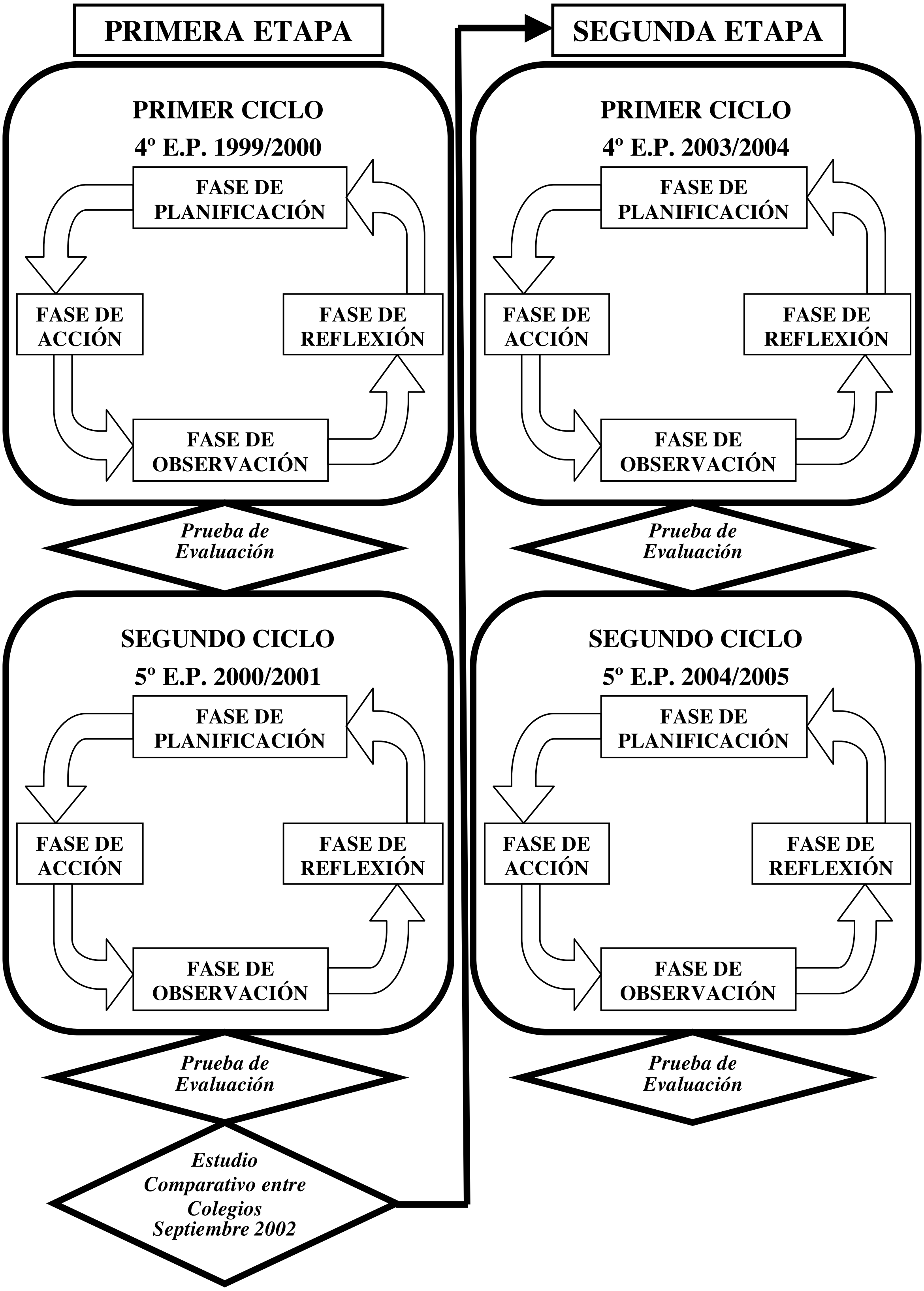


Gráfico IV.2. Esquema general de la metodología de investigación

En los apartados anteriores quedaron marcadas las líneas generales que se van a seguir en las dos etapas de que consta este estudio. En los siguientes apartados nos proponemos detallar algunos elementos relevantes que son específicos de nuestra investigación: temporalización del proceso global, y unidades para la construcción y el análisis de los datos en cada una de las etapas consideradas.

IV.5. Temporalización del proceso global

En la **Primera Etapa** se contempla implementar 21 sesiones, de clase de 50 minutos cada una, con alumnos de cuarto curso de Educación Primaria, y 41 sesiones con alumnos de quinto curso de Educación Primaria. En total, las 62 sesiones se vertebran en torno a los tres focos de investigación establecidos, cada uno de los cuales se divide en temas, y a los que se asigna una temporalización, tal y como puede verse en el Anexo III.1. Se resume en el siguiente cuadro la distribución temporal de sesiones y tareas por cada uno de los tres focos de investigación:

Focos de investigación	*Temporalización*	*Trabajos*
La fracción con el significado de medida	Sesiones 1 a 21 (4º EP) Sesiones 22 a 33 (5º EP)	27 fichas, de ellas, 9 de evaluación 19 Fichas, de ellas 4 son de evaluación
La fracción y el número decimal con el significado de cociente partitivo. Conexión entre la notación fraccionaria y decimal	Sesiones 34 a 49 (5º EP)	23 fichas, de ellas, 4 de evaluación
El número decimal. Relaciones y operaciones	Sesiones 50 a 62 (5º EP)	16 fichas, de ellas, 6 de evaluación

Cuadro IV.1: Distribución temporal y trabajos en los tres focos de investigación

Estas sesiones se celebran en las aulas del C.E.I.P. “Tío Jorge” de Zaragoza. Por tanto, la experiencia se desarrolla en las condiciones habituales de enseñanza.

La fase experimental del Primer Ciclo de esta Etapa comenzó el 25 de enero de 2000 y finalizó el 8 de marzo. El Segundo Ciclo comenzó el 27 de noviembre 2000 y concluyó el 2 de febrero de 2001. En el apartado VI.3.1 del capítulo VI se hace un balance entre la planificación preestablecida y la ejecución del plan.

En la **Segunda Etapa** se desarrollan las sesiones de forma similar a las de la Primera Etapa. Una variación importante radica en la implementación, con alumnos de la Segunda Etapa, de una propuesta de enseñanza de la división de naturales con significado de reparto igualitario, en tercer curso de Educación Primaria. Nos limitamos a dejar constancia de la enseñanza implementada, pero no es nuestra intención valorar los aprendizajes pues es una aspecto que cae fuera de la alcance de nuestra investigación. Nuestro interés reside en observar si esta instrucción previa tiene influencias en el desarrollo de la propuesta didáctica que se elabora e implementa.

IV.6. Unidades de Análisis

En el apartado IV.3.7. se mencionaron las categorías para la construcción, análisis e interpretación de los datos, estructuradas como un sistema para codificar y sistematizar la información obtenida. Presentamos aquí el sistema de categorías, o unidades de análisis, que vamos a utilizar en nuestro trabajo y detallaremos cada una de esas unidades de acuerdo con la tipología preestablecida.

IV.6.1. Unidades de Análisis para la Organización del Contenido

Nuestro objetivo es incrementar la compresión de los Números Racionales Positivos entre los escolares de cuarto y quinto de Educación Primaria; proponemos tres focos de investigación, que corresponden a dos nuevos sistemas de representación y que robustecen las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal. Seguidamente detallamos las Unidades de Análisis de Organización del Contenido que permitirán conocer qué aspectos concretos del contenido se planifican y desarrollan, así como el grado de detalle con el que son propuestos. Mediante estas unidades podemos conocer y valorar la estructura conceptual que se va a implementar.

IV.6.1.1. Unidades para el Primer Foco de Investigación

En este Foco de Investigación nuestro objetivo es introducir un modelo desde el que surge un sistema de representación para cantidades positivas y no enteras. A través de este sistema fraccionario buscamos la reflexión del alumno sobre las exigencias sintácticas y semánticas que demanda esta simbolización matemática. Además, se introducen las relaciones de equivalencia y orden, así como las operaciones de suma y resta de fracciones, multiplicación de una fracción por un número natural y división de una fracción entre un número natural.

El desarrollo completo de este foco de investigación se completa entre los cursos cuarto y quinto de Educación Primaria, pues las exigencias del proyecto curricular del centro nos impide agrupar todos los contenidos de este foco en un solo curso. Presentamos las distintas unidades de análisis sobre este primer foco, desglosadas en seis puntos que lo estructuran.

<u>Punto 1.- Concreción del modelo de medida</u>

La propuesta de trabajo conlleva explicitar el modelo de medida con el que los alumnos van a interactuar y del que surgirán conceptos, relaciones y operaciones por medio de una posterior abstracción. Para ello hay que definir, en detalle y con precisión, los valores que toman las variables del modelo: objetos (cañas, listones de madera, tiras de papel y cartulinas), magnitudes (longitud y superficie), acción de medir cantidades de magnitud y técnica de medida en una fase. La utilización de este modelo exige determinar la subunidad de medida que se utilizará en el proceso, la comparación de tal subunidad con la cantidad a medir, y expresar el resultado con la simbolización adecuada.

> *Con esta unidad se valora si el sistema de representación simbólico utilizado recoge todos los elementos del proceso manipulativo realizado en el modelo: el tamaño de*

las subunidades utilizadas y el número de ellas. Y esta valoración debe contemplar tanto la expresión del resultado de la medida con una fracción, como la evaluación semántica de la notación fraccionaria en términos de medida.

Punto 2.- Equivalencia de fracciones.
En las tareas de expresar el resultado de una medida aparecen, de forma natural, distintas formas de simbolización. Por tanto, la idea de equivalencia de fracciones como las formas diferentes de expresar la misma cantidad de magnitud hay que institucionalizarla, así como formular y construir técnicas que faciliten la búsqueda de fracciones equivalentes.

Con esta unidad se valora si la idea de equivalencia de fracciones alcanza su pleno significado, así como la correcta utilización de la técnica asociada cuando sea necesaria.

Punto 3.- Orden entre fracciones.
La comparación de cantidades de magnitud puede hacerse de forma visual, sobre todo en el caso de la longitud, pero hay que dar sentido y formular las técnicas que permiten la comparación de cantidades de magnitud expresadas de forma simbólica.

Con esta unidad se valora si las representaciones simbólicas que permiten la comparación de fracciones tienen una justificación en el modelo y si son eficaces para dicho propósito.

Punto 4.- La medida de magnitudes discretas.
Las magnitudes discretas encierran una unidad natural que es uno de los elementos que componen el conjunto; sin embargo, y por necesidades sociales, es necesarios extender la medida a conjuntos discretos en los que la unidad está conformada por el cardinal de un conjunto.

Con esta unidad se valora si la idea de medida, y su simbolización, con magnitudes discretas puede inferirse desde el trabajo previo con magnitudes continuas.

Punto 5.- Suma y resta de fracciones.
La agregación o disgregación de cantidades de magnitud da lugar a otra cantidad de la misma magnitud cuya medida viene expresada con respecto a la misma unidad. Evitar todo el proceso manipulativo necesario para resolver situaciones particulares es la finalidad que cumple la técnica de sumar o restar fracciones.

Con esta unidad se valora si las tareas propuestas cubren la fenomenología de situaciones en las que la suma y resta de fracciones tienen sentido, y si es eficaz la construcción de los algoritmos de cálculo desde el modelo de aprendizaje propuesto.

Punto 6.- Multiplicación y división entre fracciones y números naturales.
El producto de una fracción por un número natural tiene el sentido de suma reiterada de cantidades de magnitud iguales; mientras que el cociente entre una fracción y un número natural tiene sentido de repartir una cantidad de magnitud en un número entero de partes

iguales. En ambos casos la manipulación simbólica facilita la generalización de un proceso que resultaría costoso si, en cada situación, tuviese que hacerse con materiales.

> *Con esta unidad se valora si el significado de estas operaciones se deriva de las situaciones problemáticas propuestas, y si la construcción de los correspondientes algoritmos de cálculo se realiza de forma cognitivamente efectiva.*

IV.6.1.2. Unidades para el Segundo Foco de Investigación

En este Foco de Investigación nuestro objetivo es construir el sistema de notación decimal a partir de la notación fraccionaria. Pretendemos que los alumnos perciban el número decimal como número medida y con una estructura polinómica subyacente propia del sistema de numeración decimal. Además, a los escolares se les presenta el algoritmo de paso de la fracción al decimal contextualizado dentro de un modelo de aprendizaje, el cociente partitivo, que ha sido completamente caracterizado.

Nuestra propuesta presenta el número decimal como un nuevo sistema de representar, de forma más económica, el resultado del reparto igualitario realizado con la técnica de fraccionamientos sistemáticos en diez partes iguales. Bajo esta idea se deja constancia del número decimal como suma de fracciones decimales, cada una de las cuales expresa una cantidad de magnitud respecto a una única unidad de medida.

El desarrollo completo de este foco de investigación se realiza en quinto curso de Educación Primaria, y seguidamente presentamos las distintas unidades de análisis sobre este segundo foco, desglosadas en seis puntos que lo estructuran:

Punto 7.- Concreción del modelo de cociente.

Las intenciones de la propuesta didáctica exigen caracterizar un nuevo modelo de aprendizaje con las siguientes características: los objetos son tiras de papel que simulan barras de regaliz, la magnitud que se trabaja es la longitud, la acción es la de repartir de forma igualitaria, y la técnica consiste en hacer el reparto en una sola fase. Desde este modelo el resultado del reparto, la cantidad de magnitud que corresponde a cada uno de los participantes, hay que medirla y expresarla mediante una fracción.

> *Con esta unidad se valora el significado del cociente partitivo y la expresión del resultado del mismo con la notación fraccionaria. Además, se valora si la evaluación semántica de estas fracciones tiene una acepción doble: condiciones iniciales del reparto y medida del resultado del reparto igualitario.*

Punto 8.- Relaciones de orden entre fracciones.

La notación fraccionaria ya aparece, en el primer foco de investigación, asociada al resultado de la medida realizada con fraccionamientos arbitrarios. La intencionalidad de la propuesta es la de poner en juego un nuevo significado para un sistema simbólico conocido; de este modo, se amplia la perspectiva sobre la idea de fracción al ponerla en juego en una situación problemática que demanda una actividad diferente y, por tanto, una interpretación distinta de los símbolos utilizados. Con la finalidad de alcanzar nuestros propósitos se pretende definir y caracterizar las relaciones de orden entre fracciones que tienen el significado de cociente.

Con esta unidad se conocen y valoran los argumentos utilizados para comparar fracciones, con significado de cociente, y se hace una construcción significativa del algoritmo de comparación de fracciones.

Punto 9.- Modificar el modelo de cociente.

La acción de reparto igualitario admite distintas técnicas, cada una de las cuales da lugar a sistemas de representación diferentes. Los sistemas de representación tienen unas exigencias sintácticas y semánticas que tienen su origen en una descripción de los resultados obtenidos como consecuencia de una técnica, aunque posteriormente evolucionen a formas de representación más económicas y, en consecuencia, más alejadas del modelo.

La elección de la técnica del fraccionamiento sistemático en diez partes iguales posibilita forjar la idea de que una cantidad de magnitud también se puede interpretar como la agregación de cantidades, de tamaños diferentes de la misma magnitud; es más cada una de estas cantidades está formada por un número menor de nueve partes de tamaños que son potencias de 1/10 de la unidad de medida.

Con esta unidad se quiere valorar las potencialidades y limitaciones de un modelo que permite expresar la cantidad de magnitud mediante una representación polinómica decimal que es suma de partes de diferente tamaño, así como su relación con la misma cantidad de magnitud expresada con la notación fraccionaria.

Punto 10. La notación decimal

La necesidad de simplificar las expresiones polinómicas decimales justifica la introducción de un sistema de representación más económico, la notación decimal, que mantiene todas sus características. De este modo, se consigue expresar la cantidad de magnitud teniendo en cuenta que las cifras del número expresan las partes del mismo tamaño que se consideran, que el tamaño de dichas partes viene determinado por la posición de dicha cifra, que cada unidad de un orden equivale a diez unidades del orden inmediatamente inferior, y que la parte entera se separa con la coma decimal. En consecuencia, el número decimal se conforma como un número medida en el que quedan ocultas las fracciones decimales y la suma del valor relativo de las cifras.

Con esta unidad se pretende valorar si quedan explícitas las características sintácticas y semánticas de la notación decimal, y si fortalece las conexiones entre los sistemas de representación notación fraccionaria, polinómico decimal y notación decimal.

Punto 11. Algoritmo de paso de la notación fraccionaria a la notación decimal

La técnica tradicional para obtener la expresión decimal de una fracción es la de dividir el numerador entre el denominador, haciendo uso del algoritmo extendido de la división entre números naturales. Justificar esta técnica desde el significado de la fracción como medida carece de sentido por cuanto no se puede interpretar el cociente de dividir el número de subunidades entre el tamaño de las mismas. Por tanto, hay que dar sentido a esa división y ello es posible desde el significado de la fracción como cociente partitivo, pues el numerador expresa las unidades a repartir y el denominador el número de personas que participan en el reparto. Además, el reparto hay que hacerlo aplicando la técnica del fraccionamiento en diez partes iguales.

Con esta unidad se quiere valorar la adecuación del algoritmo de la división al modelo de aprendizaje utilizado, que viene caracterizado por la acción de repartir con la técnica del fraccionamiento en diez partes iguales y aplicando el criterio de entregar en cada fase del reparto la mayor cantidad posible de partes de cada tamaño.

Punto 12.- El número decimal como resultado de la medida. La recta numérica

El número decimal se ha construido como un número medida, pero se ha contextualizado como resultado de un reparto igualitario. Interesa también que el número decimal aparezca asociado a la medida directa porque así aparece en múltiples situaciones de su fenomenología. Entendemos que la recta numérica es el sistema de representación que favorece la conexión entre el número decimal y la medida directa de cantidades de la magnitud longitud.

Con esta unidad se valora la oportunidad de utilizar la recta numérica para expresar cantidades de longitud, así como para expresar con un número decimal la longitud de un segmento o la distancia entre dos puntos de la recta.

IV.6.1.3. Unidades para el Tercer Foco de Investigación

Los objetivos a cubrir en este Foco de Investigación son la de establecer relaciones y operaciones entre expresiones decimales, dando sentido a éstas y justificando los algoritmos asociados. Se trata, por tanto, de hacer uso del significado del número decimal en situaciones que den sentido a nuevas relaciones y operaciones entre estos entes numéricos.

El desarrollo completo de este foco de investigación se realiza en quinto curso de Educación Primaria, y seguidamente presentamos las distintas unidades de análisis sobre este tercer foco, desglosadas en cuatro puntos que lo estructuran.

Punto 13.- Algoritmo de paso de la notación decimal a la notación fraccionaria

De una parte los alumnos de quinto curso conocen que la notación decimal se ha introducido como una forma más económica de expresar la representación polinómica decimal que surge al realizar un reparto igualitario; y también conocen que la misma acción de reparto igualitario realizada en una sola fase da lugar a la representación fraccionaria. La conexión entre la representación fraccionaria y la notación decimal se establece a través del modelo de cociente partitivo. Ahora bien, habitualmente, el número decimal aparece asociado a contextos de medida directa. Interesa que los alumnos de quinto curso relacionen la notación decimal y la notación fraccionaria en contextos socialmente útiles como los de medida directa.

Con esta unidad se valora el significado del número decimal como medida de una cantidad de magnitud, y la percepción del número decimal como suma de fracciones decimales. Y si el conocimiento de la representación polinómica que subyace al número decimal es suficiente para conectar la notación decimal con la notación fraccionaria.

Punto 14.- Orden entre números decimales.

La comparación entre números decimales tiene el sentido de comparar cantidades de la misma magnitud expresadas respecto a la misma unidad de medida. Esta comparación se sustenta en la comparación parcial de las diferentes cantidades expresadas por las cifras que componen los números decimales y, por tanto, la técnica asociada ha de justificarse desde el valor relativo de las cifras.

Con esta unidad se valora las tareas de comparación de números decimales hacen explícitas las características sintácticas y semánticas de la notación decimal y, si estas tareas son adecuadas para que los alumnos pongan en juego estrategias eficaces para ordenar números decimales.

Punto 15.- Suma y resta de números decimales.

El significado de la suma y resta de números decimales hay que sustentarlo en ideas similares a las utilizadas para estas operaciones con fracciones: la agregación o disgregación de cantidades de magnitud da lugar a otra cantidad de la misma magnitud cuya medida viene expresada con respecto a la misma unidad. Los algoritmos de cálculo correspondientes han de justificarse desde el sistema polinómico decimal que sirvió para construir la representación de los números decimales.

Con esta unidad se valora si las tareas propuestas cubren la fenomenología de situaciones en las que la suma y resta de números decimales tienen sentido, si es eficaz la búsqueda del resultado utilizando la representación polinómica decimal, y si ello permite la construcción de los tradicionales algoritmos de cálculo desde el modelo de aprendizaje propuesto.

Punto 16.- Multiplicación y división entre números decimales y números naturales.

De forma similar a como se actuó en las operaciones con la notación fraccionaria, el producto de un número decimal por un número natural tiene el sentido de suma reiterada de cantidades de magnitud iguales; mientras que el cociente entre un número decimal y un número natural tiene sentido de repartir o distribuir una cantidad de magnitud en un número entero de partes iguales. En ambos casos la obtención del resultado se justifica mediante la representación polinómica decimal, desde la cual se pueden formular los algoritmos de cálculo habituales.

Con esta unidad se valora si el significado de estas operaciones se deriva de las situaciones problemáticas propuestas, y si la construcción de los correspondientes algoritmos de cálculo se realiza de forma cognitivamente efectiva.

De este modo, quedan definidas 16 Unidades de Análisis para la Organización del Contenido, que se resumen en el cuadro siguiente:

Primer Foco de Investigación	OC.I	Concreción del modelo de medida
	OC.II	Equivalencia de fracciones
	OC.III	Orden entre fracciones
	OC.IV	La medida de magnitudes discretas
	OC.V	Suma y resta de fracciones.
	OC.VI	Producto y cociente entre fracciones y números naturales
Segundo Foco de Investigación	OC.VII	Concreción del modelo cociente
	OC.VIII	Relaciones de orden entre fracciones
	OC.IX	Modificar el modelo cociente
	OC.X	La notación decimal
	OC.XI	Algoritmo de paso de la notación fraccionaria a la decimal
	OC.XII	El número decimal como resultado de la medida. La recta numérica
Tercer Foco de Investigación	OC.XIII	El paso de la notación decimal a la notación fraccionaria
	OC.XIV	Orden entre números decimales
	OC.XV	Suma y resta de números decimales.
	OC.XVI	Producto y cociente entre números decimales y naturales.

Cuadro IV.2. Unidades de Análisis para la Organización del Contenido

IV.6.2. Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido

A lo largo de este trabajo venimos utilizando el término comprensión en el sentido de Hiebert y Carpenter (1992), que se interpreta como ligar los nuevos conocimientos a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes. Estas Unidades de Análisis se han elaborado para indagar sobre la compresión de los estudiantes sobre los contenidos matemáticos, que se han enumerado anteriormente y cuya concreción ha quedado detallada mediante las Unidades de Análisis para la Organización del Contenido. A continuación describimos estas unidades de Análisis de Comprensión del Contenido, desglosadas en tres apartados, que se corresponden con los tres Focos de Investigación.

IV.6.2.1. Unidades para el Primer Foco de Investigación

En este foco de investigación se explicita un modelo físico que pretende inducir al alumno hacia el razonamiento abstracto a partir de la ejercitación con objetos tangibles. Se considera que la construcción de un sistema de representación simbólico está fuertemente vinculado al desarrollo de un proceso manipulativo bien definido; además, y debido a una necesidad de universalidad y generalidad, este sistema de representación tiene unas exigencias sintácticas y semánticas muy precisas. Otro aspecto contemplado es la necesaria conceptualización de la fracción como forma de simbolizar el resultado de la medida de una cantidad de magnitud realizada con una parte de la unidad. El sistema de representación fraccionario proporciona una visión concreta de la misma, pues aparece como la creación de una subunidad que permita medir la cantidad aplicando un número entero de veces dicha subunidad.

Para indagar sobre la comprensión de nuestros estudiantes sobre todos estos aspectos se elaboran unas Unidades de Análisis de Comprensión del Contenido, que denominaremos genéricamente con las siglas CC, que detallamos a continuación.

1. Concreción del modelo de medida.

El punto de partida de nuestro trabajo es *concretar un modelo, con variables bien definidas, en el que la fracción surja como resultado de la medida de una cantidad*. Ahora bien, la definición del modelo exige precisar la magnitud a utilizar, la acción a realizar, así como la técnica con que se efectúa, y los objetos con los que se trabaja. Los siguientes puntos resumen nuestros propósitos:

a) Queremos explorar cómo gestionan los alumnos un modelo asociado a acciones de medida con la técnica de crear una subunidad mediante fraccionamientos arbitrarios, en el que las son necesarias las manipulaciones de los objetos.
b) Pretendemos conocer cómo gestionan los alumnos la representación simbólica de acciones físicas y viceversa.

Para ello, indicamos las Unidades de Comprensión del Contenido correspondientes a este apartado mediante el cuadro IV.3 siguiente:

Criterios de valoración / Unidades de Comprensión	Argumentaciones sobre el significado de	Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para	Razonamientos empleados para
Interpretaciones en el modelo con magnitudes continuas **CC.I**	el resultado de la medida y los términos de la fracción **CC.I.1**	expresar el resultado de la medida **CC.I.2**	
Evaluación semántica de la fracción en contextos continuos. **CC.II**	el numerador y denominador de la fracción **CC.II.1**		construir la cantidad de magnitud **CC.II.2**
Interpretaciones en el modelo con magnitudes discretas **CC.III**	el resultado de la medida y los términos de la fracción **CC.III.1**	expresar el resultado de la medida **CC.III.2**	
Evaluación semántica de la fracción en contextos discretos **CC.IV**	el numerador y denominador de la fracción **CC.IV.1**		construir la cantidad de magnitud **CC.IV.2**

Cuadro IV.3. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido: concreción del modelo

2. Relaciones y operaciones con fracciones

Nuestras intenciones se centran en analizar el modo en que los escolares gestionan los signos de fracción en situaciones problemáticas en las que hay que poner en juego conceptos y técnicas asociados a las relaciones y operaciones con fracciones. Por ello, nuestras inquietudes se enuncian con las siguientes intencionalidades:

a) Queremos explorar cómo interpretan y gestionan los alumnos las relaciones de equivalencia y orden entre fracciones.
b) Pretendemos conocer el significado que los alumnos confieren a las operaciones entre fracciones y como gestionan el cálculo del resultado de las operaciones.

Una vez que se han familiarizado con los significados y la forma de la representación, haremos indagaciones para conocer su grado de comprensión, a través de las Unidades de Análisis recogidas en el cuadro IV.4 siguiente:

Criterios de valoración / Unidades de Comprensión	Argumentaciones utilizadas sobre el significado de:	Razonamientos empleados para:
Interpretación del significado y cálculo de la equivalencia de fracciones **CC.V**	la equivalencia de fracciones **CC.V.1**	construir fracciones equivalentes a otra dada **CC.V.2**
Interpretación del significado y cálculo del orden entre fracciones **CC.VI**	la comparación de fracciones **CC.VI.1**	establecer relaciones de orden entre fracciones **CC.VI.2**
Interpretación del significado y cálculo de operaciones con fracciones **CC.VII**	la suma de fracciones **CC.VII.1.1**	calcular el resultado de la suma de fracciones **CC.VII.2.1**
	la resta de fracciones **CC.VII.1.2**	calcular el resultado de la resta de fracciones **CC.VII.2.2**
	el producto de un número natural por una fracción **CC.VII.1.3**	calcular el resultado del producto de una fracción por un número natural **CC.VII.3.2**
	el cociente entre una fracción y un número natural **CC.VII.1.4**	calcular el resultado del cociente de una fracción por un número natural **CC.VII.4.2**

Cuadro IV.4. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido: relaciones y operaciones entre fracciones

IV.6.2.2. Unidades para el Segundo Foco de Investigación

En este foco de investigación se pretende conceptuar la notación decimal a partir de la notación fraccionaria. Para ello, se pone en juego un nuevo modelo de aprendizaje, el modelo cociente partitivo, con características diferenciadas del modelo de medida.

La búsqueda de sistemas de representación más económicos permite establecer, a partir de las expresiones polinómicas decimales, la notación decimal habitual como un sistema simbólico paralelo al de la notación fraccionaria. De este modo, pretendemos que los alumnos comprendan el aspecto continuo de los decimales, que resulta especialmente difícil de comprender (Wearne et al. 1991); y mostrar dos sistemas simbólicos como formas alternativas para un mismo concepto subyacente, con la intención de que los alumnos perciban las fracciones comunes y las fracciones decimales como pertenecientes al mismo sistema de los números racionales (Owens y Super, 1993).

Atendiendo a su desarrollo histórico, la notación decimal aparece como recurso técnico para economizar un sistema de representación simbólico, pero su construcción a través de un modelo permitirá que los alumnos construyan de forma significativa la noción de número decimal. Además, dispondrán de una nueva vía para fortalecer las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal mediante la extensión justificada del algoritmo de la división de números naturales.

1.- Concreción del modelo de cociente.

Se dispone de un entorno físico desde el que los alumnos construyen un nuevo significado de la fracción como expresión del resultado de repartir *a* unidades entre *b* personas, y aplican la técnica de reparto en una sola fase. Los siguientes puntos resumen nuestros propósitos:

a) Queremos explorar cómo gestionan los alumnos un modelo, asociado a la acción de repartir en una sola fase cantidades de longitud, en que las manipulaciones de objetos reales no son necesarias.
b) Pretendemos conocer cómo gestionan los alumnos la representación simbólica de acciones físicas de reparto, y viceversa, es decir, como encuentran las condiciones iniciales del reparto si conocen la fracción que expresa el resultado del reparto igualitario.

Una vez que se han familiarizado con los significados y la forma de la representación, haremos indagaciones para conocer su grado de comprensión, a través de las Unidades de Análisis recogidas en el cuadro IV.5 siguiente:

Criterios de valoración / Unidades de Comprensión	Argumentaciones sobre el significado de	Utilización de las notaciones gráficas y simbólicas adecuadas para
Interpretaciones en el modelo cociente **CC.VIII**	el resultado del reparto y de los términos de la fracción **CC.VIII.1**	expresar el resultado del reparto **CC.VIII.2**
Interpretaciones de las relaciones de orden **CC.IX**	fracción mayor o menor que otra **CC.IX.1**	comparar dos fracciones. **CC.IX.2**

Cuadro IV.5. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido: concreción del modelo cociente

2. Representación polinómica decimal.

Nuestras intenciones se centran en analizar las variaciones que se producen en las relaciones sintácticas y semánticas de un nuevo sistema de representación, que surge como consecuencia de una modificación en el procedimiento de realizar la acción en el modelo. Por ello, nuestras inquietudes se enuncian con las siguientes intencionalidades:

a) Queremos explorar cómo simbolizan los alumnos las acciones realizadas con una nueva técnica de reparto.

b) Pretendemos conocer si son conscientes de las exigencias sintácticas y semánticas del nuevo sistema de representación.

La simbolización de acciones de reparto, ya conocida por los alumnos, sufre modificaciones significativas en cuanto a la expresión del resultado como una suma finita de cantidades de magnitud de tamaños que son potencias de 1/10.

Una vez que se han familiarizado con los significados y la forma de la representación, haremos indagaciones para conocer su grado de comprensión, a través de las Unidades de Análisis recogidas en el cuadro IV.6 siguiente:

Criterios de valoración / Unidades de Comprensión	Argumentaciones sobre el significado de	Utilización de las notaciones gráficas y simbólicas adecuadas para
Interpretaciones en el modelo cociente modificado **CC.X**	el resultado del reparto que se efectúa en varias fases y con fraccionamientos en 10 partes iguales **CC.X.1**	el resultado del reparto que se efectúa en varias fases y con fraccionamientos en 10 partes iguales **CC.X.2**

Cuadro IV.6. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido: concreción del modelo de cociente modificado

3. Expresiones polinómicas decimales y notación decimal

La posibilidad de economizar la escritura de expresiones polinómicas decimales y el conocimiento de un sistema de numeración posicional, permitirá arbitrar criterios generales para la introducción de la notación decimal, sin que ello afecte a las ideas asociadas con la representación polinómica decimal. Además, la extensión del algoritmo de la división entera facilitará la escritura de las fracciones con la notación decimal.

Puesto que el número decimal se conforma como un número medida, interesa que los escolares relacionen el número decimal con la medida directa de cantidades de longitud, relación que se facilita utilizando la recta numérica para representar números decimales.

Nos interesa comprobar si los alumnos conectan las notaciones fraccionaria y decimal desde los significados de medida y de reparto de cantidades de longitud. Las Unidades de Análisis definidas se recogen en el siguiente cuadro siguiente:

Criterios de valoración / Unidades de Comprensión	Argumentaciones sobre el significado de	Utilización de las notaciones
Interpretaciones de la notación decimal que proviene de un reparto **CC.XI**	el número decimal y de las cifras que lo componen **CC.XI.1**	simbólicas adecuadas para expresar, con un número decimal, el resultado del reparto **CC.XI.2**
Interpretación en la recta numérica **CC.XII**	el número decimal como medida de una cantidad de longitud, y de las cifras que lo componen **CC.XII.1**	gráficas adecuadas para representar sobre la recta el número decimal **CC.XI.2**

Cuadro IV.7. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido: la notación decimal

IV.6.2.3. Unidades para el Tercer Foco de Investigación

En este foco de investigación se pretende dotar de significado a las relaciones de orden y a las operaciones entre expresiones decimales; y conectar la notación decimal con la notación fraccionaria.

Nuestras intenciones se centran en analizar el modo en que los escolares gestionan los números decimales en situaciones problemáticas en las que hay que poner en juego conceptos y técnicas asociados a las relaciones y operaciones con decimales. Por ello, nuestras inquietudes se enuncian con las siguientes intencionalidades:

a) Indagar si los alumnos perciben la representación polinómica decimal que subyace al número decimal para obtener la fracción decimal correspondiente al número decimal.

b) Explorar cómo interpretan y gestionan los alumnos las relaciones orden entre números decimales.

c) Analizar qué significados asignan a las operaciones entre números decimales y cómo gestionan el cálculo del resultado de estas operaciones.

Una vez que se han familiarizado con los significados y la forma de la representación, haremos indagaciones para conocer su grado de comprensión, a través de las Unidades de Análisis recogidas en el cuadro IV.8 siguiente:

Criterios de valoración / Unidades de Comprensión	Argumentaciones sobre el significado de	Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para
Conexión del número decimal con la fracción **CC.XIII**	el número decimal como suma de fracciones decimales **CC.XIII.1**	Expresar el número decimal con una fracción **CC.XIII.2**
Interpretación del significado del orden entre números decimales **CC.XIV**	la comparación de números decimales **CC.XIV.1**	ordenar series de números decimales **CC.XIV.2**
Interpretación del significado y cálculo de operaciones con números decimales **CC.XV**	la suma de decimales **CC.XV.1.1**	calcular el resultado de la suma de decimales **CC.XV.1.2**
	la resta de decimales **CC.XV.2.2**	calcular el resultado de la resta de decimales **CC.XV.2.2**
	el producto un número decimal por un número natural **CC.XV.3.1**	calcular el resultado del producto de un número decimal por un natural **CC.XV.3.2**
	el cociente entre un número decimal y un número natural **CC.XV.4.1**	calcular el resultado del cociente entre un decimal y un número natural **CC.XV.4.2**

Cuadro IV.8. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido: relaciones y operaciones entre números decimales

En total se han definido 15 Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido. De ellas, 7 corresponden a la conceptualización de las expresiones fraccionarias en el modelo de medida; otras 5 unidades corresponden a la construcción e interpretación de un sistema de representación simbólico asociado a una técnica de reparto igualitario, que denominamos sistema de Representación Polinómico Decimal, que facilita la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal del número racional; y hay otras 3 unidades que indagan la estructura subyacente del número decimal; y el significado y cálculo de las relaciones de orden y operaciones entre números decimales.

IV.6.3. Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica

Las Unidades de Análisis de la Interacción Didáctica se elaboran para sistematizar, estructurar y analizar las interacciones que se producen en el aula. En el trabajo de Romero (1995) hay una completa y detallada descripción de estas unidades de análisis; pero dadas las características peculiares de nuestra investigación, vamos a considerar las categorías en su enunciado general, tal y como figuran en el estudio de Gairín (1999).

Las Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica que utilizaremos en esta investigación son de tres tipos:

- Para que los estudiantes realicen las tareas que propone el profesor se necesita una estructura organizativa que forma parte del contrato didáctico establecido; además, hay que desarrollar los trabajos en condiciones adecuadas para favorecer el trabajo individual, así como la discusión colectiva o individual. Por ello se contemplan la unidades relativas a la **gestión del trabajo en el aula**.
- Ahora bien, la construcción del conocimiento precisa de actuaciones dirigidas a la gestión de las discusiones del aula en los momentos de evaluación conjunta de las tareas. Estas actuaciones, que agrupamos bajo la denominación de Unidades de Análisis para la **gestión del desarrollo del contenido**, contemplan los contenidos que se van a tratar, la secuenciación de las tareas que desarrollan los contenidos, las intervenciones del profesor para presentar las tareas y de los alumnos que recaban información para resolver las tareas, y otras intervenciones de los alumnos y del profesor referidas al desarrollo del contenido.
- No hay que olvidar que el objetivo final de los intercambio de opiniones, que se planifican en los momentos de evaluación conjunta de las tareas, es el de elaborar significados del concepto que se desea enseñar. Con esta finalidad, se definen Unidades de Análisis de **construcción del conocimiento**.

IV.6.3.1. Unidades relativas a la gestión del trabajo en el aula

Con independencia de la materia o del contenido, el profesor tiene a su cargo la gestión del trabajo de los alumnos en el aula, así como la de su comportamiento. Esta gestión se produce al proponer tareas y actuaciones, al marcar pautas para su realización, al organizar las acciones en el aula, al resolver las dudas que planteen los alumnos; asimismo se muestra en las actuaciones para la creación de un clima de trabajo apropiado: establece normas para el comportamiento, asume su control, amonesta y sanciona a quien no respeta las normas establecidas.

Por su parte los alumnos participan en la gestión manifestando acuerdo o desacuerdo con las actuaciones del profesor, piden justificaciones de dicha actuación, hacen propuestas alternativas, valoran el acierto o desacierto de las propuestas realizadas y, en su caso, proponen su modificación. También los alumnos, en determinadas ocasiones, asumen la responsabilidad de gestionar el trabajo del aula o mantener la disciplina, y así se considera cuando se produce.

1.P. <u>Relativas a la actuación del Profesor:</u>

- **1.PO**: El profesor ORGANIZA. Para cumplir con su responsabilidad como gestor en el aula tiene que llevar a cabo diferentes tipos de actuaciones: dirigir la gestión, reclamar la atención de los estudiantes, ...
- **1.PP**: El profesor PREGUNTA. Necesita conocer la opinión del alumnado respecto a la gestión de la clase.

1.PE: El profesor EXPLICA. Tiene que transmitir a los alumnos sus decisiones sobre la gestión.

1.PV: El profesor VALORA. Las actuaciones que se producen en el aula pueden ser cuestionadas por los alumnos y, en consecuencia, el profesor debe atender a sus razones.

1.PA: El profesor AMONESTA. Tiene que juzgar las actuaciones de los alumnos y tomar decisiones al respecto.

1.A. Relativas a la actuación de los Alumnos:

1.AS: Los alumnos SUGIEREN. Hacen Indicaciones o propuestas alternativas sobre las actuaciones producidas en la gestión de la clase.

1.AP: Los alumnos PREGUNTAN. Quieren disponer de informaciones más amplias o concretas sobre la gestión de la clase.

1.AE: Los alumnos EXPLICAN. Dan información sobre sus actuaciones o sus propuestas sobre la gestión de la clase.

1.AV: Los alumnos VALORAN. Toman decisiones sobre las propuestas que aparecen en el aula.

1.AR: Los alumnos REACCIONAN. Las amonestaciones o sanciones que se produzcan en el aula producirán modificaciones en el comportamiento de los alumnos, tanto si les afecta directamente como si es un compañero el afectado.

IV.6.3.2. Unidades relativas a la gestión del desarrollo del contenido

El profesor conduce la presentación y desarrollo de los contenidos que se trabajan en el aula, lo que le obliga a decidir sobre las actuaciones que se produzcan, como establecer prioridades en los contenidos; promover, fomentar, reconducir o finalizar las discusiones entre alumnos, o entre alumnos y profesor; modificar las estrategias metodológicas cuando lo considere oportuno; resolver dudas de los alumnos respecto a la organización y desarrollo de los contenidos; y delimitando la importancia que corresponde a los diferentes contenidos que han aparecido en la realización de las tareas.

Los alumnos participan en el desarrollo del contenido e influyen en las decisiones del profesor a través de sugerencias, de preguntas sobre aspectos que tienen confusos o con intervenciones que pongan de manifiesto sus dificultades de comprensión del contenido en el momento de realizar las tareas propuestas por el profesor.

2.P. Relativas a la actuación del Profesor:

2.PO: El profesor ORGANIZA. Tiene que atender a la forma en que se presentan los contenidos y a la gestión sobre su oportunidad.

2.PP: El profesor PREGUNTA. Necesita información de los alumnos sobre las propuestas realizadas.

2.PE: El profesor EXPLICA. Tiene que explicitar a los estudiantes los trabajos a realizar.

2.PV: El profesor VALORA. Emite juicios sobre las sugerencias que recibe de los alumnos acerca de la presentación de los contenidos o sobre la discusión sobre el mismo.

2.PI: El profesor INTERVIENE. En la interacción con los alumnos toma decisiones y actúa en consecuencia.

2.A. Relativas a la actuación de los Alumnos:

2.AS: Los alumnos SUGIEREN. Hacen propuestas sobre los contenidos a tratar, sobre la organización de los contenidos, sobre la gestión de las tareas, etc...

2.AP: Los alumnos PREGUNTAN. Demandan que se explicite alguna información recibida sobre las tareas a realizar.

2.AE: Los alumnos EXPLICAN. Exponen sus puntos de vista sobre las tareas que resuelven y sobre la presentación y desarrollo de contenidos en el aula.

2.AV: Los alumnos VALORAN. Toman decisiones ante las propuestas formuladas por el profesor o por un compañero sobre la resolución de la tarea.

2.AI: Los alumnos INTERVIENEN. Interaccionan con el profesor y con otros compañeros.

IV.6.3.3. Unidades relativas a la construcción del conocimiento en el aula

Una vez que han finalizado las tareas propuestas se establece una discusión colectiva sobre los contenidos trabajados por los alumnos de forma individual. En ese debate, el profesor promueve la comprensión de los alumnos sobre los tópicos tratados, fomentando las explicaciones de los alumnos y contrastándolas con las de otros compañeros y con el propio profesor. Además, favorece un proceso dialéctico mediante el cual se comparten los conocimientos con la colectividad y se cuestionan las concepciones de los participantes, favoreciendo su comprensión.

Los alumnos tienen que exponer sus ideas, bien a propuesta del profesor, bien por iniciativa propia o bien por alusiones de algún compañero. Además, deben cuestionar su propio aprendizaje defendiendo sus puntos de vista o rebatiendo los de otras personas.

En el trabajo de Romero (1995) figura una descripción más detallada de los parámetros que caracterizan cada una de las Unidades de Análisis o categorías.

3.P. Relativas a la actuación del Profesor:

3.POC: El profesor ORGANIZA LOS CONTENIDOS. La preocupación se centra en el desarrollo de la comprensión y la construcción del conocimiento.

3.PIS: El profesor INDAGA SIGNIFICADOS. Las percepciones y concepciones de los alumnos deben ser conocidas.

3.PDC: El profesor DESARROLLA LA COMPRENSION. Tiene que arbitrar actuaciones que le faciliten la comprensión de los contenidos.

3.PVI: El profesor VALORA LAS IDEAS. Toma decisiones sobre el interés de las propuestas de los alumnos y sobre la gestión de las mismas en aras de facilitar la comprensión.

3.PSC: El profesor SISTEMATIZA CONOCIMIENTOS. Como resultado de los trabajo debe institucionalizar los contenidos tratados.

3.A. Relativas a la actuación de los Alumnos:

3.AAI: Los alumnos APORTAN INFORMACION. Ponen de manifiesto su comprensión de los contenidos o hacen propuestas en ese sentido.

3.AIS: Los alumnos INDAGAN SIGNIFICADOS. Quieren que se les facilite la comprensión del contenido.

3.AMC: Los alumnos MUESTRAN COMPRENSION. Hacen signos externos que manifiestan su comprensión de los contenidos.

3.AVI: Los alumnos VALORAN IDEAS. Enjuician los argumentos propuestos y toman posiciones al respecto

3.AEC: Los alumnos ELABORAN CONOCIMIENTO. Establecen conclusiones sobre lo tratado, conectan las nuevas ideas con otras anteriores, expresan de modo organizado su dominio del contenido, hacen propuestas para avanzar en el contenido o para aplicarlo a situaciones problemáticas, ...

IV.6.3.4. Resumen global de las Unidades de Análisis de la Interacción Didáctica

Hemos definido 30 unidades de análisis o categorías de la Interacción Didáctica. Atendiendo a los agentes (profesor o alumno), finalidad y actuación, las unidades se resumen en los dos cuadros que mostramos a continuación.

- Hay 15 unidades para analizar la actuación del profesor, tal y como se refleja en el cuadro IV.9:

Finalidad / Actuación	1. GESTIÓN DEL TRABAJO EN EL AULA	2. GESTIÓN DEL DESARROLLO DEL CONTENIDO	3. CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO EN EL AULA
FIJAR NORMAS	ORGANIZA P O	ORGANIZA P O	ORGANIZA CONOCIMIENTO P O C
ESTABLECER SIGNIFICADOS	PREGUNTA P P	PREGUNTA P P	INDAGA SIGNIFICADOS P I S
	EXPLICA P E	EXPLICA P E	DESARROLLA COMPRENSIÓN P D C
ENJUICIAR	VALORA Propuestas e intervenciones P V	VALORA Propuestas e intervenciones P V	VALORA IDEAS P V I
INTERVENIR	AMONESTA Comportamientos P A	INTERVIENE en la Interacción P I	SISTEMATIZA CONOCIMIENTO P S C

Cuadro IV.9. Unidades de Análisis de la Didáctica de la actuación del profesor según la finalidad

- Y se han definido otras 15 unidades para analizar la actuación del alumno, que quedan reflejadas en el cuadro IV.10:

Finalidad / Actuación	1. GESTIÓN DEL TRABAJO EN EL AULA	2. GESTIÓN DEL DESARROLLO DEL CONTENIDO	3. CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO EN EL AULA
FIJAR NORMAS	SUGIERE A S	SUGIERE A S	APORTA INFORMACIÓN A A I
ESTABLECER SIGNIFICADOS	PREGUNTA A P	PREGUNTA A P	INDAGA SIGNIFICADOS A I S
	EXPLICA A E	EXPLICA A E	MUESTRA COMPRENSIÓN A M C
ENJUICIAR	VALORA Propuestas e intervenciones A V	VALORA Propuestas e intervenciones A V	VALORA IDEAS A V I
INTERVENIR	REACCIONA a la amonestación A R	INTERVIENE en la Interacción A I	ELABORA CONOCIMIENTO A E C

Cuadro IV.10. Unidades de Análisis de la Didáctica de la actuación del alumno según la finalidad

- En conjunto se definen 10 unidades para la gestión del trabajo en el aula; otras 10 para la gestión del desarrollo del contenido y otras 10 para la construcción del conocimiento en el aula.
- Atendiendo al tipo de actuación se definen 6 unidades relativas a normas y comportamientos, 12 unidades para estudiar el establecimiento de significados, 6 unidades para estudiar las actuaciones de valoración y otras 6 unidades para estudiar las acciones de intervención.

La extensión de la fase experimental obliga a limitar el uso de estas unidades de análisis a momentos concretos de la implementación. En este sentido, el estudio de las interacciones en el aula se concretarán en las grabaciones, de audio y video, realizadas en momentos en los que los alumnos construyen conceptos referidos al número racional positivo.

IV.7. Organización de la información

Con este Capítulo IV se cierra la primera parte del trabajo de investigación en la que se han especificado los objetivos que se persiguen, así como la metodología que se va a utilizar en las cada una de las dos etapas que se contemplan en esta Tesis.

Se abre, por tanto, una segunda parte del trabajo que abarca la información sobre el desarrollo de la experimentación, y sobre la obtención de datos y análisis de los mismos; posición desde la que se afronta la elaboración de las conclusiones y perspectivas futuras.

La descripción del proceso seguido, las observaciones realizadas y las informaciones recogidas, los datos obtenidos y su posterior análisis, así como la reflexión sobre los mismos para llegar a los resultados, han producido un importante volumen de documentación, que hemos decidido organizar de acuerdo con las dos Etapas que comprenden nuestro trabajo. De esta forma, la documentación se organiza siguiendo la secuencia de las cuatro fases de la Investigación-Acción, y se distribuye en los Capítulos V, VI y VII de la forma siguiente:

- Los Capítulos V y VI contienen los documentos correspondientes a las fases de Planificación y de Acción, respectivamente.
  - En la Fase de Planificación se detalla el proceso seguido desde la propuesta didáctica inicial hasta la propuesta definitiva, incluyendo las observaciones y reflexiones del equipo investigador sobre una experiencia piloto.
  - En la Fase de Acción se da cuenta del balance entre lo planificado y lo ejecutado, se detallan las observaciones realizadas acerca del comportamiento de los estudiantes en la realización de las diferentes tareas propuestas, se analiza la Interacción Didáctica producida en las sesiones de clase, y se concluye con una reflexión sobre la totalidad del proceso seguido en esta Fase.
- El Capítulo VII contiene la documentación correspondientes a las fases de Observación y de Reflexión.
  - En la Fase de Observación se analizan las producciones escritas de los alumnos sobre la comprensión de los conocimientos matemáticos sobre los que se instruye. En su valoración se tienen en cuenta las Unidades de Análisis correspondientes, que se han detallado en el apartado IV.6.
  - La Fase de Reflexión permite hacer una balance de la comprensión de los alumnos sobre los diferentes temas que se abordan en la propuesta didáctica: concreción del modelo de medida, relaciones y operaciones entre fracciones, la fracción como cociente partitivo, sistema de representación polinómico decimal y la notación decimal, y relaciones y operaciones con números decimales.

Capítulo V
Fase de Planificación

V.1. Introducción

En el Capítulo II se estudió la presencia de los diferentes significados del número racional en nuestro Sistema Educativo, poniendo de manifiesto el modo en que surge el significado parte-todo en el ámbito de la instrucción. En la actualidad, tal y como se recoge en el Capítulo III, la enseñanza del número racional en Educación Primaria presenta una peculiaridades que son susceptibles de crítica a la vista de los resultados que provocan en los alumnos.

En nuestra intención de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del número racional, nos proponemos en este Capítulo abordar el diseño de una propuesta didáctica alternativa que mejore la comprensión de los alumnos sobre una estructura numérica tan importante como es la del número racional. En este sentido, trabajamos con la premisa de que la propuesta didáctica que se elabore debe priorizar la superación de los obstáculos didácticos que produce la enseñanza tradicional, así como delimitar las potencialidades y limitaciones que aparecen con la propuesta didáctica alternativa que se quiere elaborar.

En consecuencia, antes de formular la propuesta que hemos elaborado, queremos dejar constancia de los principios sobre los que se fundamenta, justificamos la elección de los modelos de aprendizaje utilizados, y analizamos las consecuencias que conllevan nuestros posicionamientos.

V.2. Diseño de la Fase de Planificación

El proceso de elaborar la propuesta didáctica que se implementa en el aula es determinante para un estudio curricular. Es por ello que, en esta fase, se ha seguido un proceso acorde con el esquema de Investigación-Acción, ya reseñado en el Capítulo IV, pues esta metodología posibilita realizar modificaciones después de concluir cada ciclo experimental, y potencia el carácter dinámico de la fase de planificación.

Esta fase de Planificación consta de dos Etapas, que corresponden a los dos momentos en los que se experimentó la propuesta didáctica. En el gráfico V.1. se reflejan las tareas realizadas en la Fase de Planificación de las dos Etapas, así como las relaciones entre ellas.

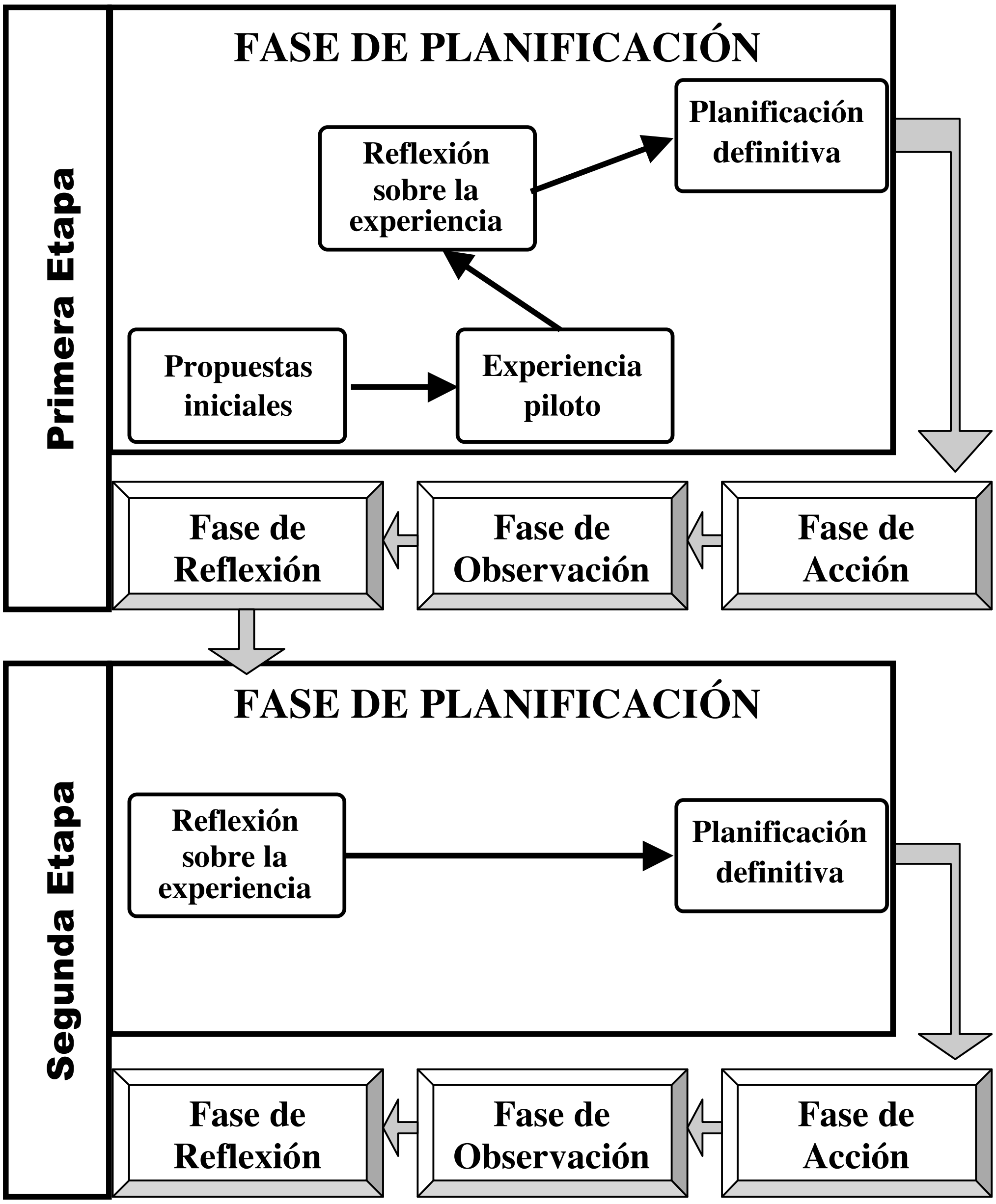


Gráfico V.1. Diseño de la fase de Planificación

En la **Primera Etapa** se cubrieron las siguientes tareas: propuestas iniciales, experiencia piloto, reflexiones sobre la experiencia piloto y propuesta definitiva. En la Fase de Planificación correspondiente a la **Segunda Etapa** se trasladan a la Propuesta Didáctica las conclusiones obtenidas en la experimentación de la Primera Etapa y se realizan las modificaciones pertinentes, lo que conlleva la formulación de una nueva Propuesta Didáctica que se implementa por segunda vez. En los siguientes apartados se reseñan los aspectos más destacables del trabajo realizado.

V.2.1. Propuestas iniciales

Desde nuestro observatorio de formadores de Maestros hemos constatado a lo largo de los últimos años las dificultades de comprensión que muestran los estudiantes cuando estudian la estructura numérica de los números racionales. Como puede constatarse en Gairín (1999), tras una experiencia de más de 15 años, los futuros Maestros de Educación Primaria tienen dificultades en el trabajo con fracciones impropias, sustituyen los conceptos por alguna de las técnicas asociadas, identifican la estructura topológica de los números racionales con la de los números naturales, etc.
Por otra parte, los resultados de las pruebas nacionales sobre el rendimiento de los escolares en matemáticas (INCE, 2002), vienen a confirmar que las dificultades de los estudiantes para Maestro refleja una parte tan sólo de las dificultades, conceptuales y procedimentales, que se detectan en alumnos de enseñanza obligatoria sobre los números racionales. Y también resulta preocupante que los recientes estudios internacionales sobre las competencias matemáticas de los adolescentes, tal y como se recoge en el informe PISA (INECSE; 2004a,2004b), sitúen a los escolares españoles por debajo de los resultados de muchos países.

Ciertamente hay dificultades de comprensión derivadas de las peculiaridades de la estructura conceptual de los números racionales, como hemos señalado con anterioridad. Pero también es cierto que la práctica docente habitual es inadecuada. En efecto, tal y como pusimos de manifiesto en el Capítulo III, el proceso de enseñanza-aprendizaje de este tópico matemático, tal y como se desprende de los libros de texto analizados provoca obstáculos didácticos ocasionados por priorizar el conocimiento procedimental sobre el conocimiento conceptual, por no hacer uso de modelos de aprendizaje estables, por desatender la importancia que ha de prestarse a la introducción en el aprendizaje de los sistemas de representación novedosos, por priorizar el significado parte-todo que no corresponde a la epistemología histórica, por no sustentar el proceso instructivo en la resolución de situaciones problemáticas que pongan en juego los conocimientos que se pretende abordar, y por utilizar una metodología basada en la exposición del profesor y en la presentación ostensiva de los conceptos y procedimientos.

Desde estas consideraciones, y con la finalidad de elaborar una Propuesta Didáctica, la fase de planificación se inició con un estudio fenomenológico de los significados del número racional positivo, del que se da cuenta en el Capítulo II, con el objetivo de cubrir todas las posibles vías de abordaje de la instrucción de los números racionales.

En un trabajo posterior, nuestro objetivo de potenciar el aprendizaje significativo, nos llevó a profundizar en el estudio de modelos de aprendizaje del número racional, modelos que deben caracterizarse por ser estables y adecuarse a las capacidades de los alumnos y a las necesidades educativas señaladas en el currículo vigente.
Estos aspectos se complementaron con el análisis de los sistemas de representación que surgen desde los modelos de aprendizaje, así como las formas en que los sistemas de representación habituales (notaciones fraccionaria y decimal), pueden conectarse a través de modelos de aprendizaje.

Con los estudios previos realizados se elabora una propuesta didáctica inicial, que es el resultado de una reflexión continuada y profunda sobre la forma más adecuada de alcanzar los objetivos propuestos. La extensa trayectoria profesional de los integrantes del equipo investigador, Dr. Jesús Murillo Ramón, Dr. José Mª Gairín Sallán y el doctorando que presenta esta Memoria como profesores dedicados a la Formación Inicial y Permanente de los maestros de Educación Primaria y de los profesores de matemáticas de Educación Secundaria, ha permitido una formulación teórica de una propuesta didáctica sustentada en criterios científicos, dispuesta para ser testada en condiciones reales de aula.

V.2.2. Experiencia piloto

La primera versión de la propuesta correspondiente a 4º y 5º curso de Educación Primaria se formuló en el curso 1998-99 y, en ese mismo, año académico se experimentaron algunos aspectos concretos de la propuesta con un grupo natural de escolares de 4º curso del Colegio Público "Tío Jorge" de la ciudad de Zaragoza; se trata del mismo Centro dónde se llevará a cabo la fase experimental.
En particular, se comprobó que los modelos de medida resultaban comprensibles por los alumnos y que con estos modelos los alumnos no tienen especiales dificultades en la manipulación de los objetos. Se testaron determinados modelos de medida en función de la magnitud utilizada; más concretamente las observaciones se realizaron con las magnitudes longitud, superficie, masa y cardinalidad.

La experiencia piloto puso de manifiesto que, como consecuencia del desarrollo curricular de los cursos anteriores, los escolares mostraban su competencia en la manipulación de unidades del sistema métrico decimal y en la medida de longitudes utilizando la regla graduada. Sin embargo, también puso de manifiesto las dificultades de trabajar con unidades de medida no convencionales, el manejo de aparatos de medida de capacidad y masa, y la medida directa de cantidades de superficie.
Como consecuencia de las observaciones realizadas, en el curso 1999-00 y antes de implementar la propuesta de la fracción en 4º curso, se desarrollaron nueve sesiones de clase sobre contenidos de medida de magnitudes continuas como longitud, superficie, masa, y capacidad que permitieron adecuar el formato de las tareas escritas a partir de los observaciones de aula realizadas y de algunas indicaciones de los maestros que participan en la experiencia de aula.

V.2.3. Reflexión del equipo investigador y planificación definitiva

En el año académico 1999/2000 se constituyó un Seminario formado inicialmente por siete profesores del CEIP "Tío Jorge" y el doctorando que realiza esta investigación, al que se han ido incorporando otros profesores del Centro. Este Seminario denominado "*Planificación, implementación y evaluación de una propuesta didáctica para la enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria*" ha trabajado ininterrumpidamente durante los años académicos en los que se ha implementado la experimentación. El Seminario se ha reunido de manera regular una vez por semana y ha permitido al investigador recabar información de diversos aspectos del desarrollo de la fase experimental desde la perspectiva del profesor de aula.

Los datos obtenidos en la experiencia piloto y las sugerencias de los profesores de aula ayudaron al Equipo Investigador a realizar una primera versión definitiva de las propuestas didácticas para 4º y 5º curso de Educación Primaria, sobre los que nos vamos a extender en los siguientes apartados de este Capítulo.

V.3. Premisas que sustentan la propuesta didáctica

El estudio teórico que hemos descrito anteriormente permitió elaborar una propuesta inicial de innovación curricular, de carácter original y que fue específicamente diseñada para su evaluación en esta investigación. La Propuesta Didáctica se fundamenta en los supuestos básicos que explicitamos a continuación:

1. Solo hace referencia a los números racionales positivos. El estudio de los números racionales negativos no debe abordarse en la etapa de Educación Primaria porque la negatividad aparece en contextos algebraicos que son más abstractos que los contextos numéricos.

2. Los números racionales periódicos caen fuera de este trabajo porque el estudio de las expresiones decimales periódicas no es un contenido curricular de Educación Primaria.

3. La propuesta didáctica elude el significado de parte-todo. La enseñanza actual del número racional positivo en Educación Primaria se fundamenta, básicamente, en el significado de la relación parte-todo y presenta obstáculos didácticos que hemos descrito en el Capítulo III. Además, este significado no pertenece a la epistemología histórica del número racional tal como se ha estudiado en el Capítulo II.

4. No estudia el significado del número racional como razón a pesar de que se trata de uno de los significados que pertenecen a la fenomenología histórica del número racional. Nuestro estudio aborda los momentos iniciales de la enseñanza del número racional positivo en 4º y 5º curso de Educación Primaria a partir de los significados de medida y de cociente partitivo y pospone hasta 6º curso el estudio de otros significados como el operador o la razón. Por otra parte, el significado de razón es conceptualmente más complejo para los escolares de Educación Primaria que los restantes significados del número racional porque la idea de proporcionalidad que subyace en la razón es un constructo mental mientras que, desde los otros significados, los alumnos pueden construir el conocimiento con la ayuda de procesos manipulativos. En este sentido, el trabajo de Kieren (1995) aporta pautas para la secuenciación de contenidos por cuanto sostiene que los significados de operador y de razón poseen un carácter eminentemente multiplicativo que contrasta con la naturaleza aditiva de los significados de medida y de cociente partitivo.

5. Utilizar modelos de aprendizaje estables. En el capítulo III hemos constatado con preocupación que los libros de texto utilizan modelos de aprendizaje de muy variadas características, por lo que los alumnos difícilmente pueden construir ideas matemáticas trabajando desde entornos físicos totalmente inconexos. En particular, resulta imposible la conexión conceptual entre las notaciones fraccionaria y decimal si la enseñanza se aborda desde distintos entornos físicos. Desde esta perspectiva, consideramos esencial la construcción de *modelos de aprendizaje estables* en el proceso de enseñanza.

6. Fortalecer las conexiones entre los sistemas de representación fraccionario y decimal. Los sistemas de representación del número racional deben surgir como consecuencia de la interacción del alumno con los modelos de aprendizaje. En los niveles básicos de enseñanza se pretende que los sistemas de representación estén muy próximos al modelo de modo que el alumno encuentre en el símbolo matemático la representación más económica con la que expresar las ideas matemáticas que ha puesto en juego durante la resolución de la situación problemática.

7. Respetar la programación del área de matemáticas del Centro educativo donde se ha implementado; es decir, la propuesta didáctica se adapta al currículo escolar vigente y a la secuenciación y temporalización de aula prevista para las asignaturas de matemáticas en el Centro en el que se ha implementado.

8. La enseñanza de la fracción precede a la enseñanza del número decimal. Posicionados en el paradigma del constructivismo asumimos que el alumno que aprende reproduce, en cierta manera, los avances y obstáculos que tuvo que afrontar y resolver la humanidad hasta generar el conocimiento actual. En consecuencia la enseñanza de la fracción debe ser anterior a la del número decimal porque en el caso contrario se debería construir la fracción como suma de fracciones decimales lo que exige un conocimiento previo de la fracción vía fracciones decimales. Además, desde el punto de vista cognitivo, la comprensión del sistema de numeración decimal precisa reconocer la representación polinómica fraccionaria subyacente que resulta más compleja que la representación fraccionaria.

9. Anteponer la enseñanza de la fracción a la del Sistema Métrico Decimal. Si se adelanta la enseñanza del Sistema Métrico Decimal respecto de la fracción con significado de medida se puede inducir en los alumnos concepciones erróneas como sugerir que los números racionales no son imprescindibles para resolver el problema de la medida, porque la notación compleja de la cantidad invita a pensar que los números naturales, separados por comas, resuelven el problema de la medida. De hecho, el Sistema Métrico Decimal se ideó para evitar las expresiones complejas o decimales dado que la medida de cualquier cantidad se puede expresar mediante un natural si se toma una unidad "suficientemente pequeña".

Sería deseable que los escolares no realicen actividades de medida con unidades del Sistema Métrico Decimal antes de conocer y utilizar los números decimales. De esta forma se respetaría la génesis de este concepto matemático y se conectarían las notaciones decimal y compleja que expresan una misma cantidad de magnitud con técnicas diferentes. Somos concientes de que la decisión de posponer la enseñanza de las unidades del Sistema Métrico Decimal hasta 5º curso de Educación Primaria supone un profundo cambio curricular que, además, puede suscitar rechazo social por cuanto el manejo de los procesos de medida con unidades universales se considera un conocimiento socialmente útil y, en consecuencia, la escuela se siente presionada para que enseñe pronto estos conocimientos. Por lo tanto, adoptamos un conjunto de decisiones menos drásticas que se concretan en:

a) Estudiar conceptos referidos al significado, conservación y comparación de las magnitudes escolares (longitud, superficie, masa y capacidad) y realizar actividades de medidas con unidades no convencionales y en las que el resultado de la medida es un número natural o por un múltiplo de media unidad. Antes de implementar la propuesta didáctica, los escolares de 4º curso de Educación Primaria han recibido enseñanza de la medida de las magnitudes que se estudian en la escuela: longitud, superficie, masa y capacidad. Durante nueve sesiones los alumnos han realizado tareas de conservación, de comparación directa e indirecta de cantidades y de medida con unidades no convencionales.

b) Posponer la enseñanza de las unidades del Sistema Métrico Decimal asociadas a la medida de cantidades de magnitud hasta concluir la experimentación de la propuesta de enseñanza en 4º curso de Educación Primaria. Después de este momento se pueden proponen actividades de medida con unidades del Sistema Métrico Decimal pero sin que el resultado se exprese con un número decimal

10. La propuesta didáctica se adapta a la incorporación del euro y a las consecuencias didácticas que provoca el uso social del número decimal para expresar la medida del valor económico.

Nuestra propuesta didáctica sitúa en 5º curso de Educación Primaria la enseñanza del número decimal. La llegada de la nueva moneda ha supuesto una mayor utilización de los números decimales. Los niños perciben desde edades muy tempranas los números decimales asociados a la medida del valor monetario o precio de los objetos. En estas condiciones, parece conveniente que los alumnos de 4º curso reconozcan la notación decimal asociada a esta magnitud de manera que dispongan de un conocimiento instrumental del número decimal, hasta que, en el siguiente año, reciban enseñanza formal del número decimal de acuerdo con la propuesta curricular inicial.

En efecto, a partir del año académico 2001-02 se acuerda implementar 10 sesiones de aula para introducir la representación simbólica del número decimal asociada a la magnitud valor monetario, en 4º curso de Educación Primaria. Somos conscientes de que la introducción prematura de la notación decimal puede crear obstáculos didácticos dado que los alumnos perciben el número decimal como un número complejo compuesto por dos naturales: el número entero de euros y el número de céntimos de euros; y, además, el número decimal en este contexto de medida aparece desconectado de la fracción. El diseño de propuestas de enseñanza está sometido a múltiples condicionantes; en este caso, hay razones de interés social y de respeto a la planificación del Centro que aconsejan tomar esta decisión. No obstante, el conocimiento instrumental del número decimal no impide introducir, en quinto curso, este concepto desde los modelos de cociente partitivo, asociado a la medida de magnitudes continuas y conectado conceptualmente con la fracción.
Esta intervención de aula no va a ser evaluada en este trabajo porque no se ha implementado en todos los grupos experimentales y porque pensamos que apenas interfiere con la secuencia de enseñanza planificada inicialmente.

V.4. Modelos de aprendizaje

Como ya hemos manifestado, el propósito de este trabajo es el de analizar la viabilidad de una propuesta didáctica alternativa para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. Más concretamente nuestros objetivos son los de diseñar un proceso instructivo que permita:

1º dotar de significado a la fracción y al número decimal,

2º dotar de significado a las relaciones y operaciones de números racionales positivos, y

3º conectar los sistemas de representación fraccionario y decimal del número racional positivo.

Por otra parte, y como hemos manifestado en el apartado V.3, nuestra intención es la de acercar al aprendiz a la génesis histórica del concepto de número racional; es decir, eludir a lo largo del proceso el significado parte-todo, que es el significado que sustenta la práctica docente habitual, y abordar tareas relacionadas con la medida de cantidades de magnitud que no contengan un número entero de veces a la unidad de medida.

También hemos manifestado, como premisa de nuestra propuesta didáctica, que la resolución de problemas constituye el núcleo de la actividad de alumno. Los problemas han de servir, por una parte, para construir los conocimientos y, por otra parte, para aplicar dichos conocimientos a resolver situaciones problemáticas relacionadas con la fenomenología del número racional. Con esta finalidad, apostamos por utilizar modelos estables sobre los que construir ideas del número racional, así como los sistemas de representación más habituales: notación fraccionaria y notación decimal.

Desde estas consideraciones, nuestra propuesta didáctica se articula alrededor de los siguientes modelos de aprendizaje:

- **Modelos de medida para construir la representación fraccionaria**
  Los modelos de medida hacen surgir la idea de fracción; la representación fraccionaria surge de la necesidad de comunicar el resultado de una acción de medida de una cantidad de magnitud. Los números naturales se muestran ineficaces para expresar el resultado de la medida de cantidades si la unidad de medida no está contenida un número entero de veces en la cantidad a medir y es, en esta situación, cuando la fracción adquiere pleno sentido.

- **Modelos de cociente partitivo para construir y conectar las notaciones fraccionaria y decimal**
  Los modelos de cociente partitivo, basados en la medida del resultado de un reparto igualitario, permiten introducir la fracción y, más tarde, la notación decimal del número racional como consecuencia de modificar la técnica del reparto. La acción de reparto realizada con técnicas distintas permite conectar la representación fraccionaria y la representación decimal.

V.5. Modelos de medida

Proponemos comenzar la enseñanza de la fracción a partir de la acción de medir que es una actividad universal e importante para el desarrollo de ideas matemáticas y que se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia (Bishop, 1999). Ahora bien, desde la perspectiva de la planificación necesitamos delimitar un modelo de aprendizaje que se ajuste a nuestros propósitos. En este sentido, y como ya se manifestó en el Capítulo I, es necesario concretar los valores de las variables que delimitan el modelo, y que comentamos seguidamente:

V.5.1. Medir con magnitudes continuas

La génesis histórica de la fracción se sitúa en la medida de cantidades de magnitud continuas. Dentro de las magnitudes continuas proponemos priorizar el uso de la longitud frente a otras magnitudes mensurables, y ello porque la sencillez de la técnica de medida -desplazar la unidad sobre la longitud a medir-, permite al escolar dirigir sus esfuerzos a expresar el resultado de la medida; mientras que en el trabajo con otras magnitudes, como la capacidad o la masa, las dificultades técnicas de la medida acapararían toda la atención del escolar. Además, para que los niños trabajen con la longitud se pueden utilizar objetos como listones de madera y tiras de papel como unidad de medida que se manipulan con facilidad, que no crean problemas de limpieza, y que tienen un tacto agradable; mientras que el trabajo con otras magnitudes exige la manipulación de aparatos más complejos (como la balanza de dos platillos), o provocan problemas de limpieza (como en la medición de líquidos).

Una idea esencial para la comprensión de los números racionales es la del fraccionamiento o partición de la unidad en un número finito de partes iguales, por lo tanto, al elegir una magnitud para iniciar la enseñanza de las fracciones conviene aplicar el criterio de facilitar el fraccionamiento. En este sentido cabe decir que resulta sencillo el fraccionamiento de cualquier segmento en partes de igual longitud mientras que resulta más complejo el fraccionamiento de cantidades de capacidad o de masa.

Además de trabajar con la magnitud longitud proponemos tareas de medida con la magnitud superficie después de que los escolares hayan tenido abundantes experiencias con la magnitud longitud. Conviene guardar esta cautela porque el uso inicial de la magnitud superficie podría obstaculizar el proceso instructivo en aspectos esenciales como el fraccionamiento en partes que contienen igual cantidad de magnitud dado que la igualdad de las partes significa igualdad de superficie, no igualdad de formas; y este hecho puede focalizar la atención de los escolares en la comprobación de la igualdad de superficie de diferentes figuras, desviando la atención de la propia idea de fracción.

V.5.2. Características de los objetos

Conviene que los objetos que vayan a utilizar los escolares posean una cantidad de magnitud continua que posibilite el fraccionamiento en partes iguales y que, además, facilite la percepción visual de la cantidad de magnitud que poseen los objetos. En el caso de la magnitud longitud proponemos medir la cantidad de longitud que poseen diversos listones de madera y considerar como unidad de medida tiras de papel. Los listones que vamos a utilizar tienen diversas cantidades de longitud: 1/2 u, 3/4u, 4/5u, 5/6u, 1u, 6/5u, 5/4u, 4/3u, 3/2u y 2 unidades.

Para facilitar el fraccionamiento en partes iguales de la unidad de medida de longitud utilizamos un tablero con segmentos paralelos equidistantes entre sí. Los alumnos de 4º curso han utilizado “el Fraccionador” para dividir la unidad en un determinado número de partes iguales. En la foto vemos como dos alumnos de la Segunda Etapa fraccionan la unidad de longitud en 5 partes iguales:

Gráfico V.2. Alumnos de 4º curso de la Segunda Etapa utilizando el Fraccionador

Este artilugio, que constituye una aplicación práctica del teorema de Thales, está colgado en las paredes de las aulas para facilitar a los alumnos el fraccionamiento de la unidad de longitud al colocar los extremos de la tira-unidad sobre determinadas líneas marcadas del "Fraccionador".

En el modelo de medida de superficie los objetos que van a ser medidos son cartulinas de diferentes cantidades de magnitud y consideraremos como unidad cuadrados de papel reciclado cuyo fraccionamiento, en partes iguales, se realiza con facilidad. Los escolares miden cartulinas que tienen una cantidad de superficie de 1/2u, 5/2u, 1/3u, 1/4u, 1/6u, 3/8u, 9/16u, 15/16u, 7/32u y 9/4 de unidad.

En el modelo de medida de masa utilizaremos balanzas de dos platillos y como unidad de medida la masa de una plastilla de plastilina. Estas pastillas pesan 50 gramos, se comercializan en forma de ortoedro de modo que se facilita el fraccionamiento en partes iguales de la unidad. Durante la fase experimental los alumnos pesan diversos objetos como estira-cordones (de 5/4 de unidad), bisagras (de 7/8 de unidad), etc.

V.5.3. Concreción de la técnica de medir

La última variable que vamos a considerar es la técnica de realización de la medida. En nuestra propuesta didáctica nos decantamos por técnicas de medición directa y desechamos los métodos indirectos de medida porque exceden las capacidades cognitivas de los escolares a los que se dirige la propuesta de enseñanza, puesto que se precisan instrumentos de medida específicos, como el termómetro, el velocímetro, la balanza, el amperímetro, etc.; o el uso de fórmulas; o bien, se requiere la intervención de otra magnitud para efectuar la medida.

Sin ánimo de ser exhaustivos detectamos, a lo largo de la historia, dos técnicas de medida directa: medir por conmensurabilidad y medir creando subunidades. Dentro de la técnica de crear subunidades aparecen otras dos técnicas de medida según sea el modo de fraccionar la unidad:

- Crear subunidades sistemáticas que tengan distinta cantidad de magnitud.
- Crear subunidades arbitrarias que tengan la misma cantidad de magnitud.

• ***Medir por conmensurabilidad***

Desechamos la técnica de medida por conmensurabilidad porque la fracción aparece como la razón o comparación entre cantidades de magnitud y aún, en el caso más elemental de la magnitud longitud, la idea de razón entre cantidades de longitud es conceptualmente más compleja para los escolares que la idea de medir creando subunidades.

• ***Medir creando subunidades sistemáticas que tengan distinta cantidad de magnitud***

También desaconsejamos utilizar la técnica de crear subunidades sistemáticas en los momentos iniciales de la enseñanza del número racional positivo por las siguientes razones:

1º Esta técnica lleva a la aparición de la notación decimal antes que la representación fraccionaria que es una opción desechada.

2º La técnica de medida es compleja: el proceso de medida se realiza en fases, en la primera de las cuales la unidad se fracciona en diez partes iguales, pero si con esa subunidad no se logra realizar la medida hay que efectuar un nuevo fraccionamiento, en diez partes iguales, de la subunidad considerada en la primera fase; y así se prosiguen realizando sucesivas fases hasta efectuar la medida. La simbolización de esta técnica presenta dificultades a los escolares que se inician en la enseñanza del número racional positivo porque se hace intervenir aspectos esenciales del sistema de numeración como el principio del valor relativo de las cifras que indican las cantidades de cada subunidad involucradas en el proceso de medida.

3º La introducción de la notación decimal en los momentos iniciales de la enseñanza del número racional positivo puede crear obstáculos didácticos a los escolares al identificar las estructuras numéricas del racional y del natural. En efecto, la enseñanza del número decimal asociada al Sistema Métrico Decimal, justificada por razones de utilidad social, y en la que se exaltan las analogías con los procedimientos de cálculo de naturales propicia en los alumnos concepciones erróneas como pensar que los números decimales no son necesarios si se realiza un cambio de unidad adecuado, o interpretar que los números decimales indican otra forma de simbolizar los números naturales.

4º La introducción del número decimal antes que la fracción crea obstáculos didácticos en los escolares al suponer que todos los números racionales pueden ser expresados por números decimales. En efecto, la utilización de material y el fenómeno de aproximación que conlleva todo proceso de medida puede inducir en los alumnos errores conceptuales como negar, en el futuro, la existencia de los números periódicos al considerar isomorfos los conjuntos numéricos de los números racionales y de los números decimales.

Así, pues, por todas estas razones expuestas desaconsejan introducir el número decimal como agregación de subunidades decimales a partir de un proceso de medida en el momento inicial de la enseñanza del número racional. Sin embargo, consideramos importante utilizar esta técnica en una fase de enseñanza posterior cuando los escolares conozcan la fracción y el número decimal como el resultado de un reparto igualitario. En ese momento, conviene que los alumnos utilicen esta técnica de medida, no para cuantificar la medida de una cantidad, sino para evaluar semánticamente la representación simbólica del número decimal que se ha obtenido como resultado de un reparto igualitario.

En resumen, desaconsejamos utilizar la técnica de medida con unidades sistemáticas en el momento de introducir el número decimal, pero proponemos utilizar esta técnica en momentos posteriores de la secuencia de enseñanza para reforzar la comprensión del número decimal que aparece inicialmente como cociente partitivo y que incorpora posteriormente el significado de medida que se realiza en varias fases.

- ***Medir creando subunidades arbitrarias que tengan la misma cantidad de magnitud***

En consecuencia, una vez que hemos desechado o pospuesto otras técnicas de medida, optamos por la técnica de medir creando subunidades arbitrarias de la unidad que consiste en buscar un fraccionamiento de la unidad, es decir una subunidad, que posibilite la composición de la cantidad a medir mediante un determinado número de subunidades iguales creadas por dicho fraccionamiento.

Mediante esta técnica de medida la persona que mide se enfrenta ante un problema real, no escolar, que consiste en encontrar la subunidad que le permita cuantificar la cantidad de magnitud de un determinado objeto. Cuando la unidad de medida es mayor que la cantidad a medir deberá proceder por ensayo y error hasta encontrar un fraccionamiento adecuado de la unidad (subunidad).

En estas condiciones la fracción aparece como el sistema de representación que resuelve el problema de la medida: la fracción indica el resultado de la medida de una cantidad de magnitud. En efecto, el tamaño de la subunidad, que depende del número de partes iguales en que se ha fraccionado la unidad, viene reflejado en el denominador de la fracción; mientras que el número entero de subunidades que contiene la cantidad a medir se indica en el numerador de la fracción.

Una vez que hemos optamos por la técnica de medir creando subunidades arbitrarias de la unidad para facilitar la gestión de los modelos de medida decidimos que las cantidades de magnitud que vayan a medir los escolares se elijan de modo que no sea necesario la realización de fraccionamientos muy finos de la unidad, porque la utilización de material manipulativo se torna compleja y porque el fenómeno de aproximación que comporta todo proceso de medida de magnitudes continuas puede dar lugar a medidas diferentes de una misma cantidad de magnitud.

V.5.4. Especificidades del modelo de medida de cantidades discretas

Dados dos conjuntos A y B que tienen n y m elementos, respectivamente, decimos que la medida de contar o de la cardinalidad de los conjuntos A y B es n y m elementos, respectivamente. Ahora bien, si consideramos como unidad de la medida de contar el cardinal de A, en lugar del cardinal del elemento básico, la medida de la cardinalidad del conjunto B vendrá dada por la fracción $\frac{m}{n}$ de la unidad.

La fracción expresa la medida del cardinal de un conjunto cuando consideramos como un unidad de medida el cardinal de otro conjunto. El resultado de la medida puede ser una fracción propia o impropia.

Por ejemplo, si consideramos como unidad de medida una docena de pasteles, podemos formular la cuestión:

¿cuánto mide una bandeja de 30 pasteles?,

o dicho, de otro modo:

¿cuántas docenas hay en 30 pasteles?

En este caso, la fracción impropia *5/2 de docena* expresa la cardinalidad de una colección de 30 pasteles.
El número natural 30 pasteles y la fracción *5/2 de docena* informan del cardinal de la misma colección cuando se utiliza como unidad de medida un pastel o una docena de pasteles, respectivamente. En estas condiciones, la fracción aparece como otra forma diferente de expresar la medida de la cardinalidad; que puede eludirse si se considera como unidad de medida el elemento básico.

El número natural resuelve el problema de la medida de la cardinalidad de objetos discretos y, por lo tanto, la fracción no es imprescindible para resolver este problema porque la medida de objetos discretos no pertenece a la fenomenología histórica del número racional positivo.

La fracción en contextos discretos tiene un uso social que potencia el significado de relación entre la parte y el todo frente al significado de medida. Según este uso social la fracción describe una comparación multiplicativa entre una parte de la colección y el total de la colección. Ilustramos este uso con la ayuda del siguiente ejemplo:

Compras una docena de pasteles y tres de ellos son de hojaldre.

Desde el significado de medida una pregunta pertinente sería:

¿cuántas docenas miden los pasteles de hojaldre?

Sin embargo, la pregunta habitual es:

¿qué parte de la docena de pasteles son de hojaldre?

En este caso, la representación fraccionaria 3/12 ó 1/4 *de docena* aparece como otra forma de describir la situación que informa de la comparación multiplicativa entre el número de pasteles de hojaldre y la docena de pasteles. En cualquier caso, la fracción no es imprescindible para describir esta situación porque los números naturales 3 y 12 dan completa información de la situación.

A pesar de que la génesis del número racional no se encuentra en la resolución de la medida de cantidades discretas, la fracción como medida de la magnitud de la cardinalidad en un contenido de los currícula de Matemáticas en la Educación Primaria. Los libros de texto de 4º, 5º y 6º curso de Educación Primaria proponen la enseñanza de este contenido bajo el epígrafe “fracción de una cantidad”. En sus propuestas didácticas eluden las tareas de medida directa, e introducen y ejercitan la regla para calcular la fracción de una cantidad porque la intención educativa es enseñar el significado de la fracción como operador. De esta forma, la fracción aplicada sobre un número consiste en dividir el número por el denominador, y el resultado multiplicarlo por el numerador. Las tareas que proponen los libros de texto son del tipo:

¿Cuántos pasteles son $\frac{1}{4}$ *de 12 pasteles?*

La práctica escolar, tanto en contextos continuos como en contextos discretos, mantiene el criterio de eludir las actividades de medida directa. Por otra parte, las tareas de evaluación semántica de la fracción tampoco se formulan ni se resuelven desde el significado de medida porque la enseñanza potencia los significados de relación parte-todo y de operador al restringir las situaciones de comparación multiplicativa al caso particular de relación entre una parte y el todo, es decir, a la comparación entre los cardinales de un conjunto y de un subconjunto suyo.

A pesar, de que la fracción como resultado de la medida de cantidades discretas no pertenece a la fenomenología histórica del número racional proponemos su enseñanza porque:

1º Refuerza el trabajo realizado con los modelos de medida de cantidades continuas implementado en sesiones anteriores.

2º Se trata de un contenido que proponen los currícula estatales y autonómicos de Matemáticas en la Educación Primaria.

3º Tiene un uso social vinculado a la descripción de la comparación multiplicativa entre el cardinal de un conjunto y el de un subconjunto suyo.

En la Propuesta Didáctica que implementamos con alumnos de 4º curso proponemos tareas de la medida de la cardinalidad y de evaluación semántica de la fracción como resultado de la medida de la cardinalidad. Teniendo en cuenta las características específicas de la medida de la cardinalidad y el uso social de las situaciones descriptivas de comparación entre la parte y un todo, el equipo investigador tomó la decisión de modificar el enunciado de las tareas de medida, proponiendo una redacción más convencional y más familiar para los alumnos. Por ejemplo, la redacción del enunciado de la Ficha de Evaluación Nº 8:

Considerando como unidad de medida una bolsa de 16 bombones,
¿cuánto mide una bolsa de 12 bombones?

se modificó según se indica a continuación:

Has comprado una bolsa que contiene 16 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 12 bombones. ¿Qué parte de la bolsa has comido?

La enseñanza desde el modelo de medida de cantidades discretas tiene como objetivo ampliar y reforzar el significado de fracción. Pretendemos que los alumnos aprendan sobre la base del trabajo realizado con los modelos de medida de cantidades continuas. Por este motivo, las tareas de nuestra propuesta están diseñadas para que las acciones de medida con cantidades discretas, que realicen los alumnos, sigan las mismas pautas de actuación que las utilizadas en las actividades de medida de cantidades de magnitud continuas. Tales pautas de actuación consisten en:

1º buscar un fraccionamiento adecuado de la unidad de medida de modo que el cardinal de uno o varios fraccionamientos de la unidad coincide con el cardinal del subconjunto a medir.

2º interpretar que el denominador de la fracción es el número de fraccionamientos realizados sobre la unidad y que el numerador es el números de veces que hay que reiterar el fraccionamiento hallado para completar el cardinal del subconjunto.

De acuerdo con estas consideraciones, proponemos la enseñanza desde el modelo de medida de cantidades discretas siguiendo la técnica de medida utilizada en el caso de las cantidades de magnitud continuas y restringiendo las situaciones problemáticas al caso de la medida de cardinales de subconjuntos de un conjunto cuyo cardinal se considera como unidad. Al asumir esta restricción se imposibilita la aparición de la fracción impropia pero, a cambio, las tareas que se proponen desde el modelo de medida tienen una formulación más elemental y más cercana a las propuestas convencionales de enseñanza basadas en los significados de parte-todo y de operador.

V.5.5. Limitaciones de los modelos de medida

A pesar de que la propuesta de enseñanza se fundamenta y articula sobre modelos de medida, conviene tener en cuenta las siguientes limitaciones detectadas en esta fase de planificación:

1º) ***Los modelos de medida de cantidades continuas crean obstáculos didácticos.***
La enseñanza desde los modelos de medida utilizados puede obstaculizar, en niveles educativos superiores, la comprensión del número real por cuanto los escolares de Educación Primaria pueden pensar que, fijada una unidad de medida, la medida de cualquier cantidad de magnitud continua puede ser expresada mediante una fracción. Estamos potenciando, a largo plazo, la creencia errónea de la no existencia de los números irracionales. Asumimos esta limitación como un obstáculo didáctico que deberá plantearse y resolverse en los currícula de la Enseñanza Secundaria cuando los alumnos estén capacitados para entender los procesos infinitos de aproximación en la recta real y la densidad de los números racionales en los números reales.

2º) ***El modelo de medida de cardinalidad presenta características muy diferentes de los otros modelos con magnitudes continuas.***
La acción de medida en contextos discretos presenta dificultades específicas porque la técnica de medida resulta menos natural que la realizada en contextos continuos debido a la imposibilidad del fraccionamiento de la unidad en un número cualquiera de partes iguales.
En estas condiciones, se espera que el trabajo con el modelo de medida de la cardinalidad plantee a los alumnos dificultades para:

- identificar la unidad de magnitud (cardinal de la colección) que tiende a confundirse con la unidad básica (objeto discreto). La unidad se percibe mejor en el caso de las magnitudes continuas.
- distinguir entre el fraccionamiento de la unidad y el tamaño de las subunidades. Es posible que los alumnos opten por hacer grupos de tantos objetos como indica el denominador.

- elegir el fraccionamiento adecuado de la unidad que permita expresar la medida con la fracción más simplificada posible.

No obstante, a pesar de reconocer las limitaciones de este modelo, aconsejamos su inclusión en nuestra propuesta didáctica porque:

i) Refuerza el significado de la fracción como medida de magnitudes continuas; y, por lo tanto, posponemos la enseñanza de los modelos de medida discretos hasta después de haber estudiado los modelos de medida continuos.
ii) Las tareas de evaluación semántica de la fracción constituyen un contenido curricular que los libros de texto denominan "fracción de una cantidad" y que aparece vinculado al significado de operador. En este momento inicial de la enseñanza del número racional no deseamos introducir el significado de la fracción como operador, nuestra intención es que los alumnos de 4º curso refuercen la idea de fracción como medida y lleguen a conjeturar la regla de obtención de "la fracción de una cantidad".

V.5.6. Características de los modelos de medida utilizados

En resumen, proponemos tres modelos de medida de magnitudes continuas y uno para la magnitud discreta cardinalidad. Todos los modelos utilizan la misma técnica de medida: crear subunidades arbitrarias de la unidad.

ML (modelo medida de longitud)
Objetos a medir: listones de madera.
Unidad no convencional: cañas de plástico y tiras de papel (que tienen una longitud de un metro, aproximadamente)
Magnitud: longitud

MS (modelo medida de superficie)
Objetos a medir: folios y cartulinas
Unidad no convencional: folio cuadrado (que tiene de lado una longitud de 20 cm.)
Magnitud: superficie

MM (modelo medida de masa)
Objetos a medir: diversos objetos susceptibles de ser pesados en una balanza de dos brazos.
Unidad no convencional: estuche de plastilina que pesa 50 gramos, aproximadamente
Magnitud: masa

MC (modelo medida de cardinalidad)
Objetos a medir: objetos discretos (policubos) que no pueden ser fraccionados
Unidad no convencional: el cardinal de un conjunto de policubos
Magnitud: cardinalidad

V.6. Modelos de cociente partitivo

En nuestra propuesta didáctica vamos a utilizar modelos de aprendizaje definidos a partir de la acción de reparto igualitario en el que la cantidad de magnitud de los objetos que se reparten sea continua. La acción de reparto igualitario exige que cada uno de los individuos participantes reciba igual cantidad de magnitud y, en consecuencia, para indicar el resultado del reparto basta con especificar la cantidad de magnitud que recibe uno cualquiera de los participantes.

V.6.1. Repartir magnitudes continuas

La acción de reparto igualitario pertenece a la fenomenología histórica del número racional positivo siempre y cuando esta acción se realice sobre cantidades de magnitud continuas. El hecho de que las unidades sean fraccionables obliga a proseguir el reparto aún cuando el número de unidades sea menor que el de individuos participantes. De este modo, los individuos pueden recibir partes de la unidad porque, en general, esta cantidad de magnitud no puede ser expresada con números naturales. En estas condiciones, tiene sentido la aparición del número racional positivo.

V.6.2. Características de los objetos

Para simplificar el trabajo con los modelos de reparto consideramos varias restricciones:

1º La magnitud que destacamos en los objetos (barras de regaliz) es la longitud que es la que presenta menos dificultades cognitivas. Los objetos son cañas de plástico o tiras de papel que representan barras de regaliz.

2º Los objetos o unidades sobre los que se va a realizar la acción de reparto deben tener la misma cantidad de longitud.

3º Además, del número de objetos a repartir es necesario considerar el número de participantes o personas que intervienen en el reparto.

Así, las condiciones iniciales de un reparto igualitario vienen dadas por dos parámetros: un número entero a de objetos o unidades a repartir y un número entero b de individuos que participan en el reparto igualitario. El resultado del reparto es la cantidad de magnitud longitud que recibe cada uno de los participantes. Esta cantidad de magnitud longitud se mide con la unidad que es la cantidad de magnitud longitud que posee cada objeto.

V.6.3. Técnicas del reparto igualitario

Vamos a describir diferentes técnicas del reparto igualitario y a analizar los diversos sistemas de representación que surgen como consecuencia de la aplicación de esta técnica.

- ***Reparto en una sola fase***

La técnica del reparto en una sola fase consiste en fraccionar todas las unidades en tantas partes iguales como individuos participan en el reparto y, después, proceder a realizar el reparto. La representación fraccionaria que aparece como consecuencia de esta técnica indica la medida de la cantidad de magnitud que recibe cada uno de los individuos que participan en el reparto igualitario, considerando como unidad de medida la cantidad de magnitud de uno de los objetos. La fracción también tiene otra interpretación: indica las condiciones iniciales del reparto, es decir, el numerador expresa el número de unidades a repartir y el denominador expresa el número de personas que participan en el reparto igualitario.

En cualquier caso, se observa que para culminar el proceso de reparto es necesario medir la cantidad de magnitud que recibe cada participante. Por lo tanto, los escolares deben recibir enseñanza del significado de la fracción como resultado de una medida antes de que reciban enseñanza de la representación fraccionaria con significado de reparto igualitario. En nuestra propuesta didáctica los alumnos de 4º curso reciben enseñanza de la fracción desde el modelo medida y en 5º curso amplían el significado de la fracción como resultado de un cociente partitivo.

- ***Reparto en varias fases***

Se trata de otra técnica de reparto en la que los individuos recibe la cantidad de magnitud que resulta de la agregación de las partes de unidad recibidas en sucesivas fases del proceso de reparto. Las partes de unidad que reciben en cada fase son de tamaños diferentes. Con este técnica se pondrá de manifiesto una estructura polinómica del resultado del reparto que no aparece con la técnica descrita en el reparto de una sola fase. Vamos a considerar dos casos particulares de esta técnica que comentamos a continuación.

Caso 1º.- Realizar repartos igualitarios por fases aplicando el procedimiento "de la mayor parte" (Gairín, 1999) que consiste en que, en cada fase del reparto, se da a cada individuo la mayor parte de unidad posible.

La comunicación del resultado del reparto efectuado con esta técnica propicia la aparición del sistema de **representación polinómico unitario** porque el resultado del reparto viene simbolizado por una suma de fracciones unitarias:

$$c + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_1 n_2 n_3} + \ldots.. + \frac{1}{n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots n_p}$$

donde $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \ldots\ldots. \leq n_p$ siendo n_i el número del fraccionamiento, en partes iguales, realizado sobre cada una de las partes que han sobrado en la fase i-1 del reparto.

La primera técnica del reparto plantea dificultades a la persona que realiza el reparto en el momento de elegir el fraccionamiento de la unidad (o partes de la unidad) en cada fase del reparto. Esta técnica es compleja e inadecuada para escolares de Educación Primaria y por lo tanto no va a ser objeto de enseñanza.

Caso 2º.- Realizar repartos igualitarios por fases aplicando el procedimiento "de la mayor parte" pero teniendo en cuenta que las unidades (o partes de la unidad) se fraccionan siempre en diez partes iguales.

La comunicación del resultado del reparto efectuado con esta técnica propicia la aparición de los sistemas de representación polinómico decimal y notación decimal.

La dificultad de la técnica descrita en el caso 1º disminuye si se modifica y se realizan los fraccionamientos, en cualquiera de las distintas fases del reparto, en diez partes iguales. La elección del fraccionamiento de las unidades según las potencias de diez se fundamenta en la base decimal de nuestro sistema de numeración. En nuestra propuesta didáctica utilizaremos la técnica del fraccionamiento decimal porque, por un lado, facilita la tarea a los escolares que deben realizar el reparto y, por otro lado, es la técnica que posibilita la aparición de la representación simbólica del número decimal.

Si aplicamos procedimiento del reparto realizado en fases sucesivas en las que los individuos reciben la mayor cantidad de unidad posible (criterio de "la mayor parte"), pero con la exigencia de que la unidad, o cualquier parte de ella solo puede ser dividida o fraccionada en diez partes iguales, se consigue representar el resultado de forma única. El resultado del reparto recibe el nombre de **representación polinómica decimal** que, en el caso de representaciones finitas, que competen a esta investigación, son del tipo:

$$a_0 + a_1 \left[\frac{1}{10}\right] + a_2 \left\lfloor\frac{1}{10^2}\right\rfloor + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_s \left\lfloor\frac{1}{10^r}\right\rfloor$$

donde $0 \le a_1, a_2, .., a_r \le 9$

Un aspecto importante de la representación polinómica decimal es la analogía con la representación polinómica del número natural porque en ambos sistemas las unidades de los diferentes órdenes van jerarquizadas de diez en diez. Siguiendo con las semejanzas entre ambos sistemas, nos interesa estudiar la posibilidad de simplificar la simbolización polinómica de un reparto aplicando el principio del valor posicional de las cantidades que reciben en cada fase del reparto. Los escolares hacen el tránsito de la representación polinómica decimal al **número decimal** al aplicar el criterio de economía en la escritura de símbolos:

$$a_0 + a_1 \left[\frac{1}{10}\right] + a_2 \left\lfloor\frac{1}{10^2}\right\rfloor + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_s \left\lfloor\frac{1}{10^r}\right\rfloor = a_0 \text{`} a_1 \ldots\ldots a_r \;;;\; 0 \le a_i \le 9$$

V.6.4. Elección de los modelos de reparto utilizados

En nuestra propuesta didáctica utilizados dos modelos de reparto que se corresponden con dos técnicas diferentes. El modelo de reparto en una sola fase (MR1F) queda definido del siguiente modo:

MR1F
Objetos a repartir: barras de regaliz que se representan por tiras de papel, todas de la misma longitud.
Unidad no convencional: la longitud de una de las barras de regaliz.
Magnitud: longitud.
Técnica: realizar repartos igualitarios en una sola fase.

El modelo de reparto en varias fases (MRVF) queda definido del siguiente modo:

MRVF

Objetos a repartir: barras de regaliz que se representan por tiras de papel, todas de la misma longitud.

Unidad no convencional: la longitud de una de las barras de regaliz.

Magnitud: longitud.

Técnica: realizar repartos igualitarios por fases aplicando el procedimiento “de la mayor parte” pero teniendo en cuenta que las unidades (o partes de la unidad) se fraccionan siempre en diez partes iguales.

V.6.5. Justificación de la elección de los modelos de reparto utilizados

Desde los modelos de medida hemos introducido la representación fraccionaria. El número decimal también podría ser enseñado desde este mismo modelo aunque hemos desechado, de forma justificada, esta opción. Como además de utilizar los modelos de medida proponemos utilizar los modelos de cociente parece sensato plantearnos la siguiente cuestión: ¿qué aportan los modelos de cociente frente a los modelos de medida?

Los modelos de cociente presentan una gran ventaja sobre los modelos de medida, a saber, el proceso de reparto puede efectuarse mediante reflexiones mentales, sin necesidad de manipular físicamente los objetos, mientras que la acción de medida no puede ser evocado porque exige la manipulación física del objeto a medir y de la unidad de medida.

Mediante las acciones de reparto los escolares construyen su conocimiento personal de la fracción y del número decimal manipulando con objetos físicos o bien mediante representaciones gráficas o bien a través de reflexiones mentales. Inicialmente los alumnos realizan el reparto utilizando material manipulativo para, después, sustituir los objetos reales por representaciones iconográficas sobre las que actúan y, finalmente, utilizar representaciones simbólicas sobre los objetos evocados dado que el proceso de reparto es algoritmizable.

En efecto, la representación simbólica del reparto es algoritmizable, tanto si se realiza con la técnica del reparto en una sola fase o en varias fases, y este hecho tiene consecuencias importantes en el proceso de enseñanza porque los alumnos pueden desprenderse, poco a poco, de los objetos físicos hasta expresar sus ideas matemáticas con expresiones simbólicas.

Por ejemplo, si los escolares reparten "3 barras de regaliz (unidades) entre 4 personas" con la técnica del reparto en una sola fase, se espera que utilicen la representaciones simbólicas del siguiente tipo:

Situación problema	***Fraccionamiento de las barras***	***Resultado del reparto***
Repartir 3 barras para 4 personas	12 trozos de longitud $\frac{1}{4}$ de barra	3 trozos de tamaño $\frac{1}{4}$
3 : 4	12 de $\frac{1}{4}$: 4	$\frac{3}{4}$ de barra

Este mismo reparto realizado con la técnica del reparto por fases aplicando el procedimiento "de la mayor parte" pero teniendo en cuenta que las unidades (o partes de la unidad) se fraccionan siempre en diez partes iguales también es algoritmizable:

Fase del reparto	***Acción***	***Cantidad que recibe cada persona***	***Cantidad que queda por repartir***
Primera	Repartir	0 barras	3 barras
Segunda	Fraccionar en 10 partes iguales las 3 barras y después repartir	$\frac{7}{10}$ de barra	$\frac{2}{10}$ de barra
Tercera	Fraccionar en 10 partes iguales $\frac{2}{10}$ de barra y después repartir	$\frac{5}{10^2}$ de barra	No sobra cantidad

La representación polinómica decimal de este reparto igualitario es $0+\frac{7}{10}+\frac{5}{10^2}$ barras.

Sin embargo, no es necesario que los escolares realicen esta tabla, bastará que evoquen mentalmente las acciones realizadas con el material manipulativo y simbolicen el reparto siguiendo un procedimiento análogo al del algoritmo escrito de la división de números naturales:

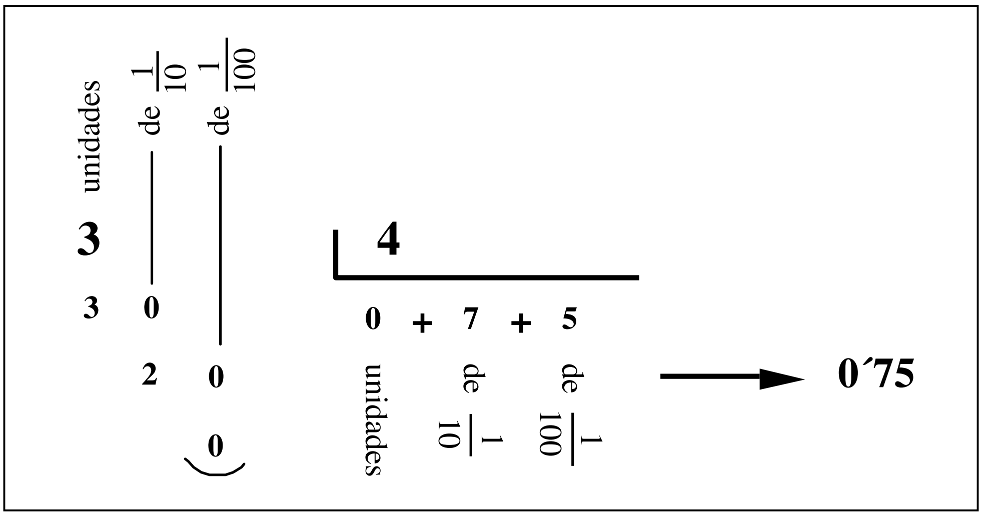


Gráfico V.3. Simbolización del proceso de reparto igualitario de 3 unidades para 4 personas

El criterio de economía en la representación escrita del resultado del reparto lleva a introducir la notación decimal del reparto. En nuestro ejemplo, el número decimal 0´75 barras de regaliz expresa el resultado del reparto porque la aplicación del principio del valor relativo de las cifras hace que éstas informen de las cantidades que se han repartido en cada fase.

V.6.6. Conexión entre la fracción y el número decimal

La notación fraccionaria y la notación decimal tienen el mismo significado y surgen de simbolizar una misma acción, el reparto igualitario, con técnicas diferenciadas. Ambas representaciones admiten una misma evaluación semántica como cocientes partitivos, y poseen la misma estructura numérica subyacente, de la que informa la representación polinómica decimal asociada al reparto.

En el modelo de cociente partitivo las fracciones pueden concebirse como repartos igualitarios. Las representaciones polinómicas decimales serán, por lo tanto, otro modo de simbolizar las fracciones ordinarias, de modo que tiene sentido establecer la igualdad:

$$\frac{a}{b} = a_0 + a_1 \left[\frac{1}{10}\right] + a_2 \left\lfloor\frac{1}{10^2}\right\rfloor + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_s \left\lfloor\frac{1}{10^r}\right\rfloor ;; \quad 0 \le a_1, a_2, \ldots, a_s \le 9$$

Establecida la identificación entre fracciones y representaciones polinómicas decimales para relacionar las fracciones y la notación decimal se introducen argumentos basados en la economía de símbolos con el objeto de reducir las representaciones polinómicas decimales mediante la notación decimal:

$$\frac{a}{b} = a_{0,}\, a_1 \ldots\ldots a_s \;\; ;; \quad 0 \le a_1, a_2, \ldots, a_s \le 9$$

V.7. Secuenciación de los modelos de aprendizaje

Las razones que hemos expuesto nos llevan a proponer en 4º curso la enseñanza de la fracción desde los modelos de medida, El siguiente gráfico indica las conexiones entre el modelo y el sistema de representación fraccionario sobre los que se pretende instruir:

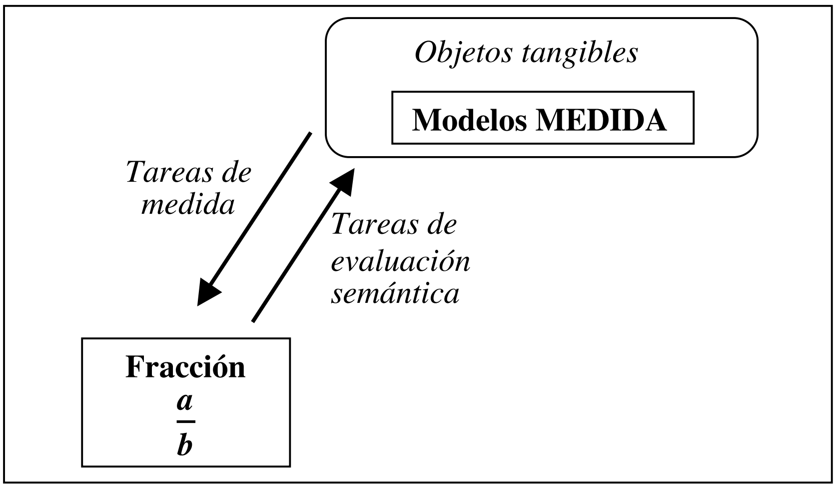


Gráfico V.4. Modelos de aprendizaje en 4º curso

En 5º curso de Educación Primaria utilizaremos los modelos de cociente partitivo para introducir la notación fraccionaria. De este modo, los alumnos conectan dos significados de la fracción que, aunque están sustentados en la medida, proceden de realizar acciones bien diferenciadas como son la medida directa y la medida del resultado del reparto. Por otra parte, las tareas de evaluación semántica de la fracción obligan a los escolares a ver un mismo símbolo desde dos perspectivas diferenciadas.

Además, los escolares pueden constatar que la fracción utilizada con el significado de reparto admite una doble interpretación. De una parte describe las condiciones del reparto, en tanto en cuanto el numerador indica las unidades a repartir y el denominador indica el número de participantes. Y, por otra parte, expresa el resultado del reparto, lo que fortalece el sentido de la división partitiva, pues expresa la cantidad de magnitud que corresponde a cualquiera de los participantes, la cantidad de magnitud que han recibido todos y cada uno de los participantes, la cantidad de magnitud que resulta de distribuir una cierta cantidad de esa magnitud en un número entero de partes iguales.

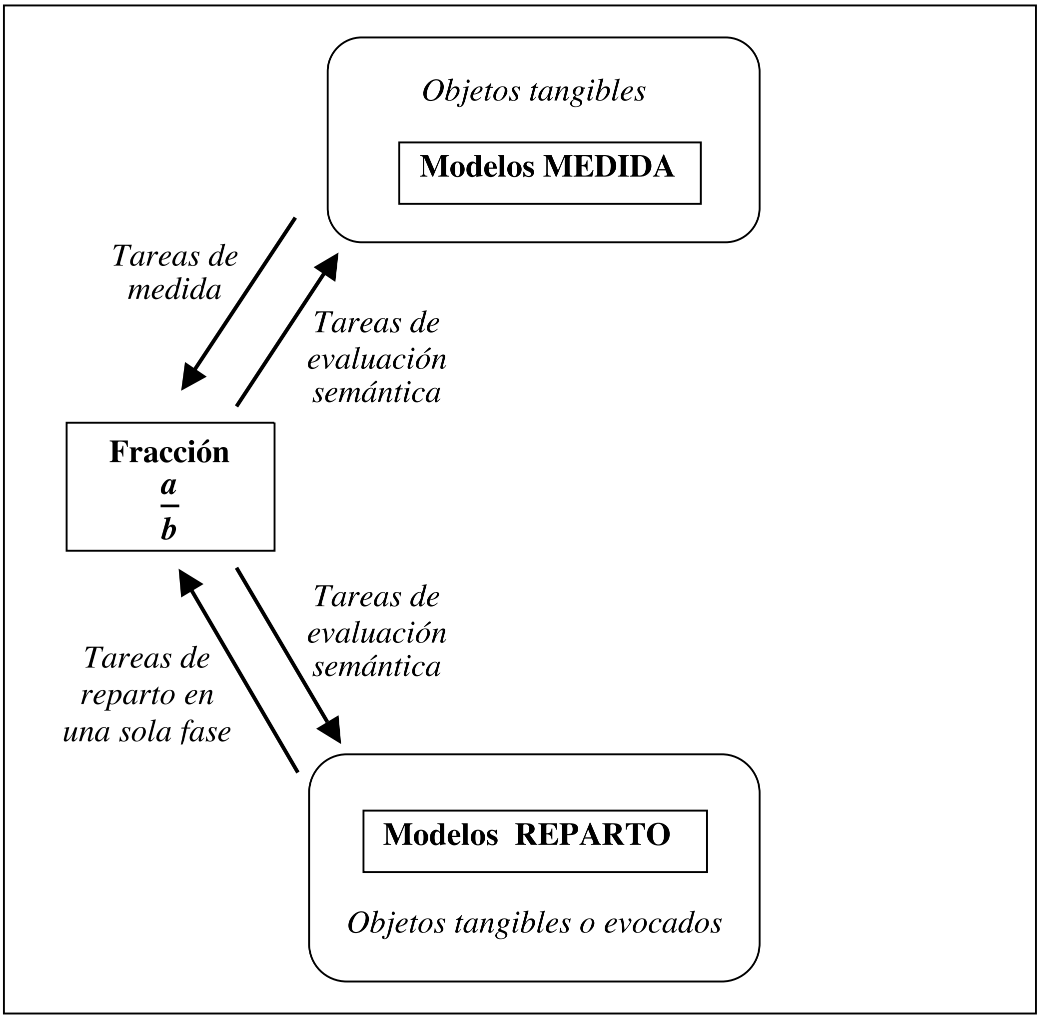


Gráfico V.5. Conexiones entre los modelos de medida y de reparto

Posteriormente, en 5º curso, utilizaremos los modelos de cociente partitivo para introducir la notación decimal a través de la representación polinómica decimal (R. P. D.). El empleo del modelo permite establecer, de forma natural, la igualdad del resultado de un reparto con independencia de la técnica utilizada para realizarlo. Este aspecto resulta esencial para establecer conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal, tal y como queda sintetizado en el siguiente gráfico:

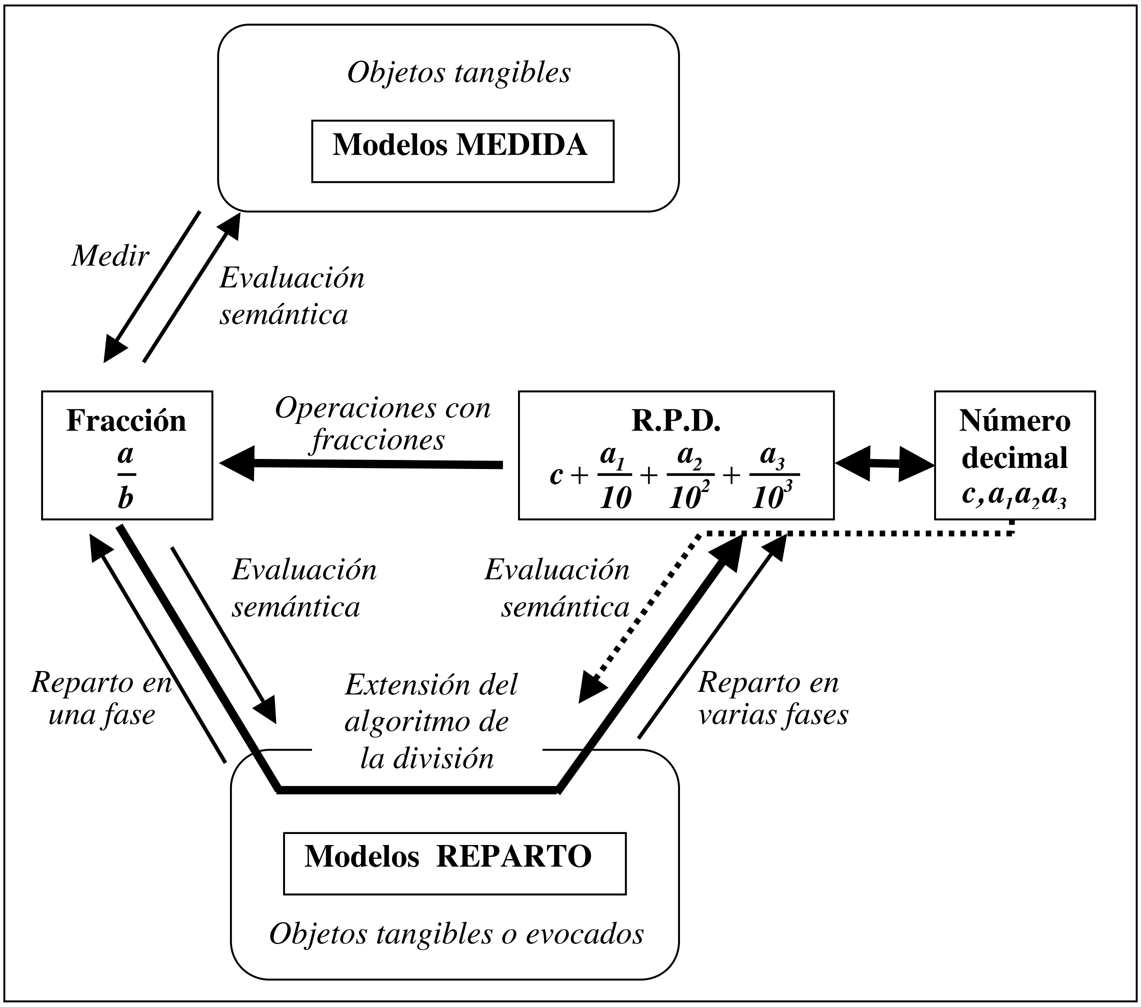


Gráfico V.6. Conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal

En el modelo de cociente partitivo la representación fraccionaria y la representación polinómica decimal surgen de modo natural. La extensión del principio del valor relativo de las cifras que sustenta el sistema de escritura de los números naturales permite establecer el convenio de paso entre la representación polinómica decimal y el número decimal. En este momento, el sistema de representación fraccionario y el decimal quedan conectados semánticamente porque es posible realizar traslaciones entre ambos sistemas de representación a través del significado de reparto igualitario.

Por ejemplo, dada una fracción determinada, los términos de ésta indican las condiciones iniciales de un reparto, y si se efectúa el reparto por fases aparece el número decimal a través de su representación polinómica decimal asociada. Y, al revés, dado un número decimal determinado su evaluación semántica permite expresar su representación polinómica decimal como suma de fracciones decimales que los escolares pueden operar para obtener la representación fraccionaria.

La propuesta didáctica contempla actividades de evaluación semántica que consisten en encontrar las condiciones iniciales de los repartos a partir del conocimiento de la fracción cuando el reparto se realiza en una sola fase, o a partir del conocimiento de la representación polinómica decimal cuando el reparto se realiza en varias fases.

V.7.1. El número decimal como la medida de una cantidad de magnitud

Los alumnos obtienen la representación simbólica del número decimal cuando realizan repartos igualitario en varias fases. De este modo, conceptúan el número decimal como agregación de fracciones decimales como consecuencia de la acción de reparto, que primero realizan físicamente y que, poco a poco, según avanza la propuesta de enseñanza, realizan de forma simbólica mediante la extensión del algoritmo de la división entera.

El número decimal se introduce en contextos de reparto igualitario; sin embargo, interesa que el número decimal aparezca asociado a la medida directa porque así aparece en múltiples situaciones de su fenomenología. Pretendemos que los alumnos de 5º curso amplíen los significados de este concepto de modo que interpreten el número decimal como la medida de una cantidad de longitud en un momento posterior de la secuencia de enseñanza, en concreto, cuando hayan estudiado el decimal desde el modelo de cociente partitivo.

Con esta intención, planteamos actividades de evaluación semántica del número decimal que refuerzan el significado de éste como agregación de la medida de cantidades de magnitud: se trata de que los escolares utilicen material manipulativo y la recta numérica para construir físicamente o dibujar cantidades de longitud cuya medidas vengan expresadas con números decimales.

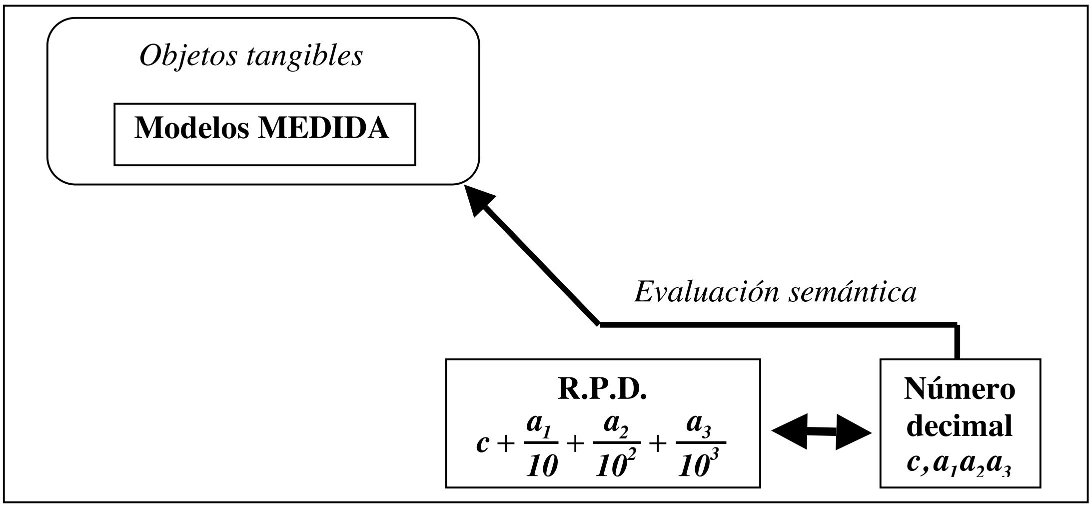
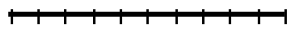


Gráfico V.7. El número decimal como expresión de la medida

El sistema de representación de la recta numérica resulta adecuado para percibir visualmente la cantidad de longitud asociada al número decimal. Por ejemplo, en la Ficha de trabajo nº 29 los alumnos representan sobre la recta numérica una cantidad de longitud cuya medida viene expresada por un número decimal:

Sabiendo que el resultado reparto de "15 barras de regaliz entre 4 niños" es 3´75 barras, y si la longitud de una barra de regaliz es:



Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, el número decimal que indica la longitud de barra de regaliz que recibe cada niño:

O

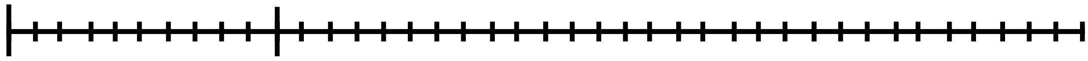


Gráfico V.8. Un apartado de la Ficha nº 29 que trabaja el sistema de representación de la recta numérica

Inicialmente, en las tareas de evaluación semántica del número decimal se utiliza la magnitud longitud porque les resulta familiar a los escolares y facilita el trabajo de éstos. A pesar de que la magnitud longitud juega un papel importante en nuestra propuesta didáctica, proponemos utilizar otros contextos familiares para los escolares en los que intervienen cantidades de otras magnitudes como la capacidad, masa, superficie o tiempo. Además de la longitud, estas otras magnitudes se incorporan en las situaciones problemáticas que resuelven los alumnos y que tienen como objetivo conectar la representaciones fraccionaria y decimal, estudiar el orden de los números decimales, e introducir y justificar los operaciones con números decimales.

V.8. Sistemas de representación derivados de los modelos utilizados

Los sistemas de representación constituyen una importante herramienta conceptual del marco teórico del Pensamiento Numérico. Los sistemas de representación surgen para comunicar las ideas matemáticas que los alumnos construyen cuando interaccionan con modelos de aprendizaje: son el modo de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas mediante unos signos, unas reglas y unos enunciados (Castro, Rico, Romero, 1997). Ahora bien, los objetos matemáticos no deben confundirse con la representación que se hace de ellos; lo que importa conceptualmente es tanto el objeto matemático como sus representaciones. En nuestro caso nos interesa determinar las características semánticas y sintácticas de los sistemas de representación de los números racionales positivos que vamos a utilizar en este trabajo.

Por otra parte, entendemos que el uso y gestión de los sistemas de representación desempeña un papel central en la comprensión de las ideas matemáticas. En nuestra investigación la comprensión de los escolares puede ser evaluada a través de la utilización que éstos hacen de los sistemas de representación. Los escolares que resuelven las actividades propuestas desde los modelos de medida y de cociente partitivo utilizan diversos sistemas de representación para comunicar ideas matemáticas. Así, las acciones de medida y de cociente partitivo posibilitan la aparición de tres sistemas de representación del número racional positivo: la representación fraccionaria, la representación polinómica decimal y la notación decimal. Además, proponemos la enseñanza del sistemas de representación de la recta numérica que refuerza la idea de la fracción y de número decimal como la medida de una cantidad de longitud.

Vamos a analizar el papel que juegan estos sistemas de representación en nuestra propuesta didáctica y las características semánticas y sintácticas que los caracterizan, así como su relación con los modelos desde los que surgen.

V.8.1. La representación fraccionaria desde los modelos de medida

La representación fraccionaria aparece al resolver tareas de medida desde los modelos de longitud (ML), de superficie (MS), de masa (MM) y de cardinalidad (MC). La exigencia de realizar la medida en una sola fase lleva a los alumnos de 4º curso a buscar un fraccionamiento de la unidad de modo que reiterando un número entero veces este fraccionamiento de la unidad (subunidad) consigan completar la cantidad a medir. Por ejemplo, si para medir una determinada cantidad se ha necesitado fraccionar la unidad en b partes iguales y reiterar cada una de estas subunidades a veces, la expresión

$$\frac{a}{b} \text{ unidad}$$

indica el resultado de la medida de la cantidad de magnitud. Cuando se utiliza esta técnica de medida, la fracción indica la medida de una cantidad de magnitud que se construye reiterando a subunidades de cantidad $\frac{1}{b}$ de la unidad.

La evaluación semántica de términos de la fracción se ajusta fielmente a los lexemas de los palabras que los definen. Así, el numerador *numera* porque indica el número de subunidades que cubren o completan la cantidad a medir; y el denominador *denomina* porque indica qué medida tienen las subunidades que resuelven el problema de la medida.

La fracción, junto con la notación decimal, son los dos sistemas de representación habituales del número racional positivo. La representación simbólica de la fracción constituye un convenio socialmente admitido que los escolares de 4º curso desconocen y que, por lo tanto, el profesor debe institucionalizar. A pesar de que es el profesor quien fija el símbolo escrito y oral de la fracción, el concepto de fracción surge a partir del trabajo de escolares en los modelos de medida porque éstos conceptúan la fracción como resultado de una medida al tener que buscar un fraccionamiento adecuado de la unidad que cumpla determinados requisitos. En resumen, el profesor fija la sintaxis de la fracción pero corresponde a los escolares apropiarse del contenido semántico del concepto a partir del trabajo en el modelo.

- ***Características del sistema de representación fraccionario***

1º La equivalencia de fracciones se establece en términos de igualdades de cantidades de magnitud. El significado que tienen dos fracciones equivalentes es que expresan la medida de la misma cantidad cuando la técnica de la medida se realiza con fraccionamientos diferentes de la unidad. En consecuencia, dos fracciones son equivalentes si el numerador y el denominador de una de ellas se obtiene multiplicando, respectivamente, el numerador y el denominador de la otra fracción por el mismo número; por tanto, con este significado no se puede justificar la equivalencia de fracciones utilizando la conocida regla de igualdad de productos cruzados.

2º La representación fraccionaria asociada a la medida de la cantidad no es única, porque aparecen fracciones equivalentes dependiendo del fraccionamiento, en partes iguales, que se realice de la unidad. Este hecho es esencial para que los alumnos entiendan que una misma cantidad se puede expresar de muchas formas diferentes. Y es esencial para que entiendan que el resolver problemas de medida ofrece perspectivas diferentes de la idea de número construida sobre problemas de recuento. Es un momento adecuado para potenciar la ruptura conceptual de la idea de número sustituyéndola por las ideas de número natural y número fraccionario.

3º La expresión $\frac{0}{b}$ tiene el significado de una cantidad de magnitud cuya medida es cero.

4º La expresión $\frac{a}{a}$ tiene el significado de la medida de la cantidad de magnitud que es la unidad.

5º La expresión $\frac{a}{1}$ tiene el significado de la medida de la cantidad cuya medida es a unidades porque la unidad no se ha fraccionado.

6º El orden en la representación fraccionaria es compatible con el orden de las cantidades de magnitud en virtud del isomorfismo de la función medida.

7º Las operaciones de suma y resta de fracciones, y multiplicación y división de una fracción por un número natural tienen significado en este modelo. Así, cuando la magnitud es extensiva, la operación de fracciones indica la medida de la cantidad construida a partir de las acciones que modelizan la operación, y su resultado coincide con la operación efectuada sobre las medidas de las cantidades involucradas en dicha operación.

V.8.2. La representación fraccionaria desde el modelo de cociente partitivo

Cuando los alumnos de 5º curso realizan repartos igualitarios desde el modelo de cociente con la técnica del reparto en una sola fase (MR1F) aparece la representación fraccionaria para indicar el resultado del reparto igualitario: la cantidad de magnitud que recibe cada uno de los participantes en el reparto de a objetos (unidades), susceptibles de ser fraccionados, y en el que participan b individuos.

La fracción admite dos interpretaciones: como resultado del reparto y como proceso del reparto. Desde la primera interpretación la fracción es un caso particular de medida de una cantidad de magnitud: la medida de la cantidad que recibe cada individuo después de hacer hecho el reparto, que es a subunidades de medida $\frac{1}{b}$ de unidad. Desde la segunda interpretación, la fracción $\frac{a}{b}$ describe el proceso de reparto a realizar: el *numerador* de la fracción indica el número de unidades que van a ser repartidas; y el *denominador* de la fracción indica el número de individuos que van a participar en el reparto igualitario.

Situados en la primera interpretación, es evidente que la necesidad de cuantificar el resultado de reparto lleva implícita una acción de medir, y que esto obliga a enseñar antes las acciones de medida que las acciones de reparto. Desde esta perspectiva, cuando los alumnos resuelven tareas de repartos efectuados en una sola fase no consideramos imprescindible la intervención del profesor para fijar la sintaxis de la fracción porque los escolares de 5º curso conocen la fracción como resultado de la medida de cantidades de magnitud.

Situados en la segunda interpretación, consideramos oportuno introducir un nuevo sistema de representación $a{:}b$ para indicar el proceso de reparto igualitario de a unidades entre b individuos porque facilita la simbolización de la obtención del resultado del reparto y porque es la misma escritura que se utiliza para los repartos entre números naturales. Este sistema de representación lo utilizamos para indicar la acción de reparto, mientras que la fracción indica el resultado del reparto una vez que éste se ha efectuado. La utilización de la fracción para indicar el proceso de reparto no nos parece pertinente porque se trata de que los escolares obtengan la representación fraccionaria asociada a un reparto y, en tal caso, partirían del conocimiento de este sistema de representación.

- ***Características del sistema de representación fraccionario.***

El sistema de representación fraccionario y la representación “con dos puntos” posee las misma características semánticas que describimos a continuación:

1º El significado que tienen dos fracciones equivalentes o repartos equivalentes es que en ambos repartos los individuos reciben igual cantidad de magnitud.

2º La representación fraccionaria asociada al cociente partitivo no es única. La representación de repartos equivalentes tampoco lo es, porque existen repartos equivalentes que tienen distintas condiciones iniciales porque en ellos se mantiene una relación multiplicativa tanto en las unidades a repartir como en el número de individuos que participan.

3º La expresión $0{:}b$ ó $\frac{0}{b}$ tiene el significado de un reparto en el que no hay unidades para repartir entre b individuos y, por lo tanto, cada persona recibe 0 unidades.

4º La expresión $a{:}a$ ó $\frac{a}{a}$ tiene el significado de un reparto en el que hay a unidades para repartir entre a individuos y, por lo tanto, cada persona recibe *1* unidad.

5º La expresión $a{:}0$ ó $\frac{a}{0}$ no tiene el significado en el modelo de cociente partitivo porque no hay individuos para realizar el reparto.

6º El orden en la representación fraccionaria es compatible con el orden de las cantidades de magnitud en virtud del isomorfismo de la función medida. En concreto, un reparto es mayor que otro reparto si a los participantes en el reparto primero les corresponde mayor cantidad de magnitud que en el otro reparto.

7º La representación fraccionaria verifica las siguientes relaciones:

a) Si $a : b < c : d$ *entonces* $a : b < \frac{a+c}{b+d} < c : d$

Si un reparto es mayor que otro, al hacer un reparto de todas las unidades entre todas las personas se igualará la situación; es decir, el nuevo reparto está situado entre los dos dados inicialmente, porque los que recibían más cantidad pasan a recibir menos, mientras que los individuos que recibían menor cantidad pasan a recibir una cantidad mayor.

b) Si $a : b < c : d$*, entonces* $a : b < \frac{(a : b) + (c : d)}{2} < c : d$

Si dos individuos, que han recibido diferentes cantidades de magnitud, reparten equitativamente los que han recibido entre ambos, la cantidad de magnitud ahora recibida estará comprendida entre las cantidades que reciben en los repartos iniciales.

8º Las operaciones de suma y resta de fracciones, y multiplicación y división de una fracción por un número natural poseen significado en el modelo de cociente partitivo. Así, la suma y resta de repartos se conceptúa como la agregación de cantidades de magnitud, la resta como disgregación o comparación entre cantidades de magnitud, la multiplicación de un reparto por un número natural como una suma reiterada de repartos, y la división de un reparto por un número natural como un reparto de reparto, es decir, que lo que recibe una de los individuos en el primer reparto lo reparte, a su vez, entre tantos individuos como indica el número natural que actúa de divisor.

9º El reparto inverso de uno dado no tiene sentido en el modelo de cociente partitivo. Tampoco tiene sentido la multiplicación y división de repartos. Para que tengan sentido estas operaciones es necesario modificar el modelo de cociente partitivo de manera que una fracción sea el resultado de un reparto igualitario y la otra fracción tenga el significado de operador que transforma el reparto inicial.

V.8.3. La representación polinómica decimal desde el modelo de cociente

Los alumnos de 5º curso de Educación Primaria han recibido enseñanza de la fracción desde el modelo de cociente partitivo con la técnica de reparto en una fase. Si realizamos un reparto concreto *a : b* vemos que su resultado viene dado por la fracción *a/b u* que se trata de la cantidad de magnitud que recibe cada participante y que permanece invariante aunque se modifique la técnica de realización del reparto. Pues bien, vamos a realizar el reparto con otra técnica diferente que hemos definido el en modelo de cociente partitivo realizado en varias fases (MRVF).

Recordamos que la técnica del reparto en varias fases se realiza en fases sucesivas y, en cada una de esas fases los individuos reciben la mayor cantidad posible de unidad, pero con la exigencia de que la unidad, o cualquier parte de ella, solo puede ser dividida o fraccionada en 10 partes iguales.

Hay dos razones que nos impulsan a tomar esta decisión. Una primera tiene en cuenta que la finalidad de nuestro trabajo es la de relacionar las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, por lo que pretendemos mostrar que cualquier fracción admite una escritura como suma de productos de naturales por fracciones de denominadores las sucesivas potencias de 10; escritura que rememora ciertas similitudes con la de los polinomios. La otra razón está sustentada en el hecho de que los repartos conllevan un proceso de medida de magnitudes del Sistema Métrico Decimal, y que en este sistema las unidades y sus múltiplos o submúltiplos están relacionados mediante potencias de diez.

La técnica del reparto por fases que hemos utilizado hace que el resultado del reparto se simbolice mediante una *representación polinómica decimal* que se escribe como suma de productos de naturales por fracciones de denominadores las sucesivas potencias de 10. Las sucesivas potencias de fracciones decimales indican las fases del reparto que se han realizado, y los coeficientes que acompañan a éstas expresan el número de subunidades que se han dado en cada fase. Las representaciones polinómicas decimales permiten conectar la representación fraccionaria y esta representación polinómica decimal:

$$\frac{a}{b} = a_0 + a_1\left\lfloor\frac{1}{10}\right\rfloor + a_2\left\lfloor\frac{1}{10^2}\right\rfloor + \ldots + a_s\left\lfloor\frac{1}{10^s}\right\rfloor + (d:e)\left\lfloor\frac{1}{10^s}\right\rfloor \qquad a_i \in \mathrm{N},, 0 \le a_1,..,a_s \le 9$$

Con la expresión $(d{:}e)\left\lfloor\frac{1}{10^s}\right\rfloor$ se quiere indicar que el reparto (*d:e*) ya ha aparecido en alguna de las fases anteriores del reparto y que, en consecuencia, volverá a aparecer indefinidamente a lo largo del proceso del reparto; por tanto, el reparto no concluye en un número finito de fases.

Vemos, por tanto, que la representación polinómica decimal aparece vinculada a acciones de reparto igualitario. Se trata de un sistema de representación del número racional positivo que no tiene un uso social; sin embargo, es un sistema de representación muy valioso y que juega un papel fundamental en nuestra propuesta didáctica porque presenta dos potencialidades:

1º Constituye el fundamento de la notación decimal. La comprensión del número decimal exige su interpretación en términos de su representación polinómica decimal asociada.

2º Permite conectar semánticamente la fracción y el número decimal. Esta conexión se establece porque tanto la fracción como la representación polinómica decimal provienen de una misma acción de reparto realizada con diferentes técnicas.

- ***Características del sistema de representación polinómico decimal***

Exponemos seguidamente las características de este sistema de representación:

1º La representación polinómica decimal de un reparto puede ser finita o infinita. En este sistema de representación a todo par de números naturales se le asocia una representación finita o infinita.

La representación es finita si la fracción o reparto que indica el resto es equivalente a una fracción decimal. Para que la representación polinómica decimal de un reparto *(a,b)* sea finita es necesario que el número de individuos de algún reparto igual a *(a,b)* sea 10 o un potencia de 10, y esto ocurre cuando la descomposición factorial de *b* sólo tiene factores 2 ó 5. Y la representación es infinita si tal situación no se produce, porque a partir de una determinada fase del reparto existe un resto que se repite y que ocasiona que las cantidades que se reparten en varias fases se repiten indefinidamente.

En nuestra propuesta restringimos el uso de representaciones polinómicas decimales al caso en el que el número de sumandos sea finito y desaconsejamos utilizar representaciones con infinitos sumandos porque su comprensión excede las capacidades cognitivas de los escolares a los que se dirige la propuesta.

2º Después de realizar la primera fase del reparto el resultado se simboliza por:

$$a : b = a_1\left[\frac{1}{10}\right] + \{(10a - ba_1) : b\}\left[\frac{1}{10}\right]$$

dado que, sin pérdida de generalidad, siempre podemos suponer que $a < b$, es decir, que el número de unidades a repartir (*a*) es menor que el número de participantes (*b*)

Además,

a_1 son el número de partes de unidad (de tamaño 1/10 de unidad) que recibe cada uno de los individuos en la primera fase del reparto.

$10a\text{-}ba_1$ son las partes que han sobrado en la primera fase del reparto y que hay que repartir igualitariamente entre los b individuos.

$\left[\frac{1}{10}\right]u$ es el tamaño, respecto a la unidad inicial, que tienen las partes que recibe cada uno de los individuos y las sobrantes en la primera fase del reparto.

Y, como en todas las fases repartimos la mayor cantidad posible, se cumple que:

$$b(a_1 + 1) > 10a \geq ba_1$$

3º En la representación polinómica decimal los coeficientes (a_i) que multiplican a las partes que corresponden en cada fase han de ser menores que 10.
En efecto, dado que se cumple que:

$$b(a_1 + 1) > 10a \geq ba_1$$

Y, como $a < b$, se cumple que: $10b > 10a \geq ba_1$, y por lo tanto, $a_1 < 10$

4º La representación polinómica decimal es única por cuanto los valores de a_i se han encontrado con la condición de cumplir una doble desigualdad que los convierte en únicos.

5º La comparación de representaciones polinómicas decimales se establece en términos de comparación de sumandos que tienen igual tamaño, que van acompañados de una misma fracción decimal. Y este resultado queda justificado por la técnica del reparto que consiste en dar la mayor parte en cada fase. De este modo, las representaciones polinómicas decimales ponen de manifiesto sus ventajas, con respecto a las fracciones, para determinar el orden y, también, para facilitar la comprensión de la densidad de los números racionales.

6º En una representación polinómica decimal una unidad de cualquier tamaño es mayor que la suma de todos los sumandos siguientes; es decir, que en cualquier expresión polinómica decimal con un número finito o infinito de sumandos se cumple que:

para todo i ;; $1\left\lfloor \frac{1}{10^i} \right\rfloor > \sum_{k=i+1}^{p} a_k \left\lfloor \frac{1}{10^k} \right\rfloor$,, a_i no nulo y p finito o infinito

7º La equivalencia de fracciones o de repartos se traduce en la igualdad de las representaciones polinómicas decimales correspondientes.

8º Las operaciones de suma y resta de representaciones polinómicas decimales, y multiplicación y división de una representación polinómica decimal por un número natural tienen significado desde el modelo de cociente partitivo. Los significados de las operaciones con representaciones polinómicas decimales coinciden con los significados que poseen las operaciones con fracciones en el modelo de cociente partitivo en una fase.
Así, la suma de representaciones polinómicas decimales es la cantidad de magnitud, referida a la unidad de medida, que recibe un individuo que participa en dos repartos diferentes. La multiplicación de un número natural por una representación polinómica decimal se conceptúa como el resultado de la participación en un número natural de repartos iguales o equivalentes. Y la división de una representación polinómica decimal por un número natural tiene el significado de reparto de reparto.
En cuanto al cálculo del resultado de estas operaciones con representaciones polinómicas decimales que tienen un número finito de sumandos se aconseja adaptar los algoritmos escritos de números, pero haciendo las oportunas modificaciones en función de la operación a realizar, y teniendo en cuenta que las transformaciones entre diversos

órdenes de unidades siguen la base decimal. Por ejemplo, en el caso, de la resta es habitual transformar una unidad de un determinado tamaño del minuendo en 10 unidades del tamaño inmediatamente inferior.

9º El modelo utilizado no admite dar significado al producto y división de representaciones polinómicas decimales. Para dotar de significado a la multiplicación y a la división de dos representaciones polinómicas decimales habría que modificar el modelo de cociente, y conceptuar una representación como un operador que transforma a un reparto, es decir, como una aplicación racional de un reparto.

V.8.4. La notación decimal desde el modelo de cociente

En nuestra propuesta didáctica la notación decimal es un sistema de representación del número racional que surge para simplificar los símbolos de las representaciones polinómicas decimales. Se trata de un cambio de notación que recuerda al ideado por Stevin (1585) para relacionar las fracciones y los números decimales.
Desde siglo XVI la humanidad viene utilizando los números decimales, pero es a partir de la consolidación del Sistema Métrico Decimal cuando estos números son universalmente aceptados y utilizados para realizar todo tipo de cálculos aritméticos. Sin embargo, el uso extendido y cotidiano que se hace del número decimal no debería llevarnos a minimizar las dificultades cognitivas que presenta este sistema de representación. En efecto, el número decimal no surge, de modo inmediato, de la manipulación de objetos desde un modelo de aprendizaje; se trata de un constructo mental que es conciso, abstracto y complejo.

En nuestra propuesta didáctica los alumnos construyen el número decimal a partir del conocimiento de la representación polinómica decimal asociada a un reparto siguiendo un criterio en la economía de los símbolos. Un aspecto esencial de la representación polinómica decimal es la analogía con la representación polinómica del número natural porque en ambos sistemas las unidades de los diferentes órdenes van jerarquizadas de diez en diez. Las semejanzas entre ambos sistemas permite reducir la simbolización de la representación polinómica decimal de un reparto aplicando el principio del valor posicional de las cantidades que reciben en cada fase del reparto de modo que llamamos a la nueva representación notación decimal:

$$\frac{a}{b} = a_0 + a_1\left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor + a_2\left\lfloor \frac{1}{10^2} \right\rfloor + \ldots + a_s\left\lfloor \frac{1}{10^s} \right\rfloor + (d : e)\left\lfloor \frac{1}{10^s} \right\rfloor \qquad a_i \in \mathrm{N} ,, 0 \le a_1, .., a_s \le 9$$

- ***Características de la notación decimal***

Situados en el modelo de cociente partitivo, la notación decimal presenta la mismas características semánticas que la representación polinómica decimal porque ambas representaciones provienen de una misma acción de reparto realizado en varias fases. En cambio, la notación decimal presenta características diferenciadas frente a la representación polinómica decimal.

Nos queda hacer el traslado de los resultados obtenidos en el sistema de representación polinómica decimal al nuevo sistema simbólico, a la notación decimal. Así, podemos enunciar:

1º La notación decimal de un reparto puede ser finita o infinita. Hay representaciones polinómicas decimales con un número finito de sumandos. La notación decimal para el caso particular de representaciones polinómicas finitas recibe el nombre de *número decimal* que son las representaciones que estudiamos en esta investigación.
Otras representaciones polinómicas decimales poseen un número infinito de sumandos porque las unidades de los diferentes órdenes se van repitiendo de forma indefinida pero manteniendo una cadencia. Para escribirlas utilizamos la notación decimal y empleamos una raya o arco, de este modo:

$$a_0\,,\overline{a_1 a_2 \ldots . a_s}\;\;;;\; a_0\,, b_1 b_2 \ldots . b_p\,\overline{a_1 a_2 \ldots . a_s}$$

Estas representaciones reciben el nombre de expresiones decimales periódicas. Los número decimales constituyen un caso particular de las expresiones decimales: aquellas cuyo período es cero.

2º La notación decimal de un reparto es única porque también lo es su representación polinómica decimal asociada.

3º Las fracciones equivalentes tienen una única expresión polinómica decimal y, por tanto, una sola notación decimal.

4º Para simbolizar números mayores (menores) utilizando la notación decimal bastará aumentar (disminuir) el número de cifras o bien aumentar (disminuir) el valor de alguna de las cifras. Para comparar dos notaciones decimales basta ir comparando las cifras que ocupan el mismo lugar.

5º Cualquier cifra de una notación decimal representa una cantidad mayor que la suma de todas las situadas a su derecha.

6º Puesto que entre dos expresiones polinómicas decimales hay otras infinitas, podemos afirmar que entre dos notaciones decimales hay infinitas. En consecuencia, dada una cantidad indicada en notación decimal no tiene sentido buscar la siguiente.

7º Las operaciones de suma y resta de notaciones decimales, y multiplicación y división de una notación decimal por un número natural tienen significado como cocientes partitivos.
El cálculo del resultado de estas operaciones con notaciones decimales es algoritmizable la realización de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números escritos con notación decimal para el caso de un número finito de cifras (los denominados números decimales). Los algoritmos de cálculo se deben adaptar a los algoritmos escritos de números naturales.
En cambio, para números escritos con notaciones decimales de infinitas cifras no son aplicables los algoritmos de cálculo. En tal caso, el trabajo en el modelo de cociente

requiere buscar los repartos de los que proceden las notaciones decimales y operar con las fracciones correspondientes.

8º El modelo de cociente partitivo no permite dar significado al producto y división de notaciones decimales como ocurre con las representaciones decimales polinómicas.

Hemos descrito las características sintácticas y semánticas de los sistemas de representación que surgen cuando los alumnos interaccionan con los modelos de medida y de cociente partitivo. Los escolares de Educación Primaria construyen los sistemas de representación que hemos estudiado como consecuencia de las acciones de medida o de reparto igualitario que realizan. Nuestra propuesta didáctica incorpora el sistema de representación de la recta numérica que pasamos a describir.

V.8.5. La recta numérica

En el diseño de la propuesta de didáctica hemos desechado la posibilidad de introducir la notación fraccionaria y decimal mediante la acción de medir con la técnica de utilizar subunidades sistemáticas basadas en el fraccionamiento decimal de la unidad. Los escolares no construyen los sistemas de representación fraccionaria y decimal a partir de esta técnica de medida. Sin embargo, proponemos que se sirvan de esta técnica para realizar una evaluación semántica de ambos sistemas de representación en un momento posterior de la secuencia de enseñanza, cuando los escolares conocen la fracción, la representación polinómica decimal y el número decimal como resultado del reparto igualitario. Se trata de que los escolares interpreten las expresiones simbólicas, ya sea una fracción o un número decimal, obtenidas en el modelo de cociente partitivo como el resultado de la medida de cantidades de magnitud, es decir, como agregación de cantidades de la magnitud.

Conocida una determinada representación fraccionaria la tarea de evaluación semántica de la fracción consiste en construir, con material manipulativo, la cantidad de longitud que expresa la fracción. Lo mismo puede decirse de las tareas de evaluación semántica del número decimal; consisten en construir la cantidad de longitud que expresa el número decimal colocando tiras de papel de tamaño las sucesivas potencias de 1/10 de unidad, unas a continuación de las otras, hasta completar la cantidad de longitud.

En nuestra propuesta didáctica utilizamos el sistema de representación de la recta numérica en las tareas de evaluación semántica de la fracción y del número decimal porque la representación gráfica sobre la que dibujamos la cantidad de longitud evita el uso de material manipulativo en un momento avanzado de la secuencia de enseñanza en el que se considera necesaria la transición de las representaciones físicas, con objetos tangibles, a las representaciones gráficas.

Las tareas de evaluación semántica que proponemos desde este sistema de representación consisten en asociar a una determinada expresión simbólica del número racional positivo un punto de la recta numérica, en dos situaciones concretas:

1º determinar un punto de la recta cuando se conoce la fracción que expresa el resultado de un reparto o de la medida de una cantidad.

2º determinar un punto de esta recta cuando se conoce el número decimal que expresa el resultado de un reparto o de la medida de una cantidad.

El sistema de representación de la recta numérica se fundamenta en la biyección entre punto y número real. Coriat y Scaglia (2000, pp. 25) describen el uso didáctico que el Sistema Educativo hace de este sistema de representación del siguiente modo:

> *Desde el punto de vista escolar, la recta numérica viene a ser como un soporte de números que progresivamente se va "completando". En primaria se comienza "poniendo" naturales y en bachillerato se acaba situando reales, que ya no dejarían "huecos" en ella: fijados dos puntos distintos, que representan respectivamente el cero y la unidad, se establece una aplicación biyectiva entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de la recta.*

Estos investigadores conjeturan que la representación en la recta numérica es más compleja que otras de las representaciones de los números reales. Entre los argumentos que exponen, señalan que la aceptación de la biyección entre punto de la recta y número real es de naturaleza axiomática y plantean la cuestión abierta sobre si la recta numérica refleja o no la estructura de los números reales. La representación de números racionales en la recta numérica plantea menores dificultades conceptuales dado que el conjunto de los racionales es numerable. Sin embargo, esto no quiere decir que situar números racionales sobre la recta sea una tarea elemental porque en este conjunto numérico la asignación punto-número también presenta dificultades conceptuales y procedimentales como consecuencia del fenómeno de aproximación que conlleva todo proceso de medida. Por esta razón proponemos una utilización parcial de este sistema de representación, en concreto, realizar tareas de evaluación semántica que consisten en dibujar números racionales positivos sobre este sistema de representación.

- ***Características del sistema de representación de la recta numérica.***

Exponemos seguidamente algunas características de este sistema de representación:

1º La consideración axiomática de la biyección entre punto y número, propuesta por Cantor, permite establecer para cada número real la existencia de un único punto sobre la recta numérica. En particular, cada número racional positivo se puede identificar con un solo punto de la recta numérica.

2º Las fracciones admiten expresiones simbólicas equivalentes, sin embargo los puntos sobre la recta son idénticos, no se diferencian entre si. En consecuencia, para identificar sobre la recta el número racional es necesario señalar sobre el punto alguna representación simbólica del número porque, en otro caso, resulta imposible interpretar el punto.

3º El orden y la densidad de números raciones positivos se intuyen con facilidad en este sistema de representación. La colocación de un número a la derecha de otro permite la comparación visual e inmediata de los números. Por otra parte, la continuidad intuitiva de la recta permite expresar la densidad entre números racionales. En este sentido, aunque no haya puntos señalados sobre la recta, pensamos que potencialmente puede representarse sobre ella cualquier número racional.

4º Dado que se trata de un sistema de representación gráfico no podemos asegurar la exactitud de la representación del número racional como punto sobre la recta numérica.

5º Las operaciones que tienen sentido desde los modelos de medida y de cociente partitivo pueden ser reinterpretadas como operaciones de segmentos (o de puntos) sobre la recta numérica. En efecto, si las expresiones simbólicas que se representan como puntos de la recta numérica son números medida, es decir, números contextualizados que provienen de los modelos de medida o de cociente, tiene sentido establecer las operaciones aritméticas con segmentos (o puntos) validas en los modelos de modo que el resultado de las operaciones dan lugar a nuevos puntos sobre la recta numérica.

La planificación de propuestas de enseñanza obliga a estudiar, previamente y en profundidad, los modelos de aprendizaje que se pretenden utilizar. Esta parte del estudio, nos ha permitido constatar que los modelos de medida y de cociente informan de la estructura de semimódulo del conjunto de los Números Racionales y permiten conectar las notaciones fraccionaria y decimal de este conjunto numérico. Por otra parte, constatamos que estos modelos se muestran insuficientes para dotar de significado a la estructura multiplicativa de los Racionales Positivos mientras no se amplíen estos modelos con la incorporación de otros significados como el de operador o el de razón. El Equipo de Investigación ha realizado este estudio parcial para incorporar a la Propuesta de Enseñanza los significados de operador y de razón; sin embargo no se informa de él en esta Memoria porque la ampliación de nuevos significados del número racional positivo se prevé implementar en niveles de enseñanza superiores a 5º curso de Educación Primaria y su experimentación cae fuera de esta investigación.

V.9. Planificación según el modelo curricular

Como resultado de las observaciones y reflexiones realizadas surge la propuesta didáctica que se estructura según diseño curricular en:

V.9.1. Objetivos
V.9.2. Contenidos
V.9.3. Metodología
V.9.4. Evaluación
V.9.5. Criterios para la actuación en el aula

Seguidamente comentamos cada uno de estos aspectos. Ahora bien, puesto que la experimentación se desarrolló en dos Etapas, y con la finalidad de no ser reiterativos en la exposición, vamos a tomar como eje central del discurso la Propuesta Didáctica tal y como quedó definitivamente completada en la fase de planificación de la Primera Etapa; en los casos en que resulte necesario indicaremos las variaciones que se introdujeron en la fase de planificación de la Segunda Etapa.

V.9.1. Objetivos

La propuesta didáctica que se implementa en este trabajo de investigación persigue incrementar la comprensión sobre números racionales de los alumnos de los cursos 4º y 5º de Educación Primaria del C.E.I.P. "Tío Jorge" de la ciudad de Zaragoza. En este sentido, los siguientes objetivos explicitan las intenciones de la mencionada propuesta:

1. Concretar los modelos de aprendizaje sobre el que va a basarse la enseñanza, delimitando sus potencialidades y limitaciones.
2. Conceptualizar la fracción con los significados de medida y de cociente partitivo.
3. Construir el sistema de representación fraccionario al representar el resultado de la medida de cantidades de magnitud y al representar el resultado de un reparto igualitario realizado en una sola fase: analizar sus características sintácticas y semánticas.
4. Construir el sistema de representación polinómico decimal al representar el resultado del reparto realizado por fases y utilizando el criterio de la mayor parte: analizar sus características sintácticas y semánticas.
5. Introducir la notación decimal para economizar la escritura de las expresiones polinómicas decimales.
6. Potenciar las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, poniendo de manifiesto ambos sistemas de representación admiten una misma evaluación semántica como cociente partitivo.
7. Ampliar el significado del número decimal como medida de cantidades de magnitud.
8. Construir los conocimientos de los alumnos, sobre las relaciones y sobre las operaciones entre números racionales positivos, a partir de situaciones problemáticas situadas en los modelos de aprendizaje definidos.
9. Emplear una metodología que prioriza el trabajo personal de los estudiantes y que potencia el aula como espacio natural para la construcción del conocimiento.
10. Potenciar la comunicación de las ideas matemática entre los alumnos y el profesor, y entre los propios alumnos.

V.9.2. Contenidos

Los contenidos de la propuesta didáctica se agrupan por temas, en cada uno de los cuales se señalan las tareas que deben realizar los estudiantes. A título de ejemplo incluimos el plan de trabajo de la primera sesión de 4º curso de Educación Primaria. Una versión detallada de las 21 sesiones de 4º curso y las 41 sesiones de 5º curso se encuentra en el Anexo I.

SESIÓN 1ª

I. Objetivo general

Introducir la fracción como resultado de una medida de longitud.

Objetivos específicos

1. Percibir que los números sirven para comunicar información
2. Comprender que para medir se necesita una unidad socialmente compartida.
3. Comprender la necesidad de fraccionar la unidad.
4. Manejar las técnicas de fraccionamiento de la unidad
5. Aplicar técnicas de medida de longitud.
6. Comunicar de forma oral y escrita el resultado de la medida

II. Contenidos

- Elección de la magnitud a medir
- Elección de la unidad de medida
- Técnica de medida en una fase
- Expresión del resultado de la medida

III. Actividades

Tarea 1: "Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared). Queréis que la barra tenga la misma longitud que la largura de la cortina. ¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda la barra de la cortina que tenga la longitud deseada?"

Material

En el aula se cuelgan varias cortinas, todas de papel y de las mismas dimensiones que se sostienen mediante una barra cuya longitud deben averiguar los escolares (se trata de 3/4 de una unidad que no se ha definido todavía). Cada grupo de dos alumnos recibe un listón de la misma longitud que la barra de cortina que tienen que medir y una tira de papel que es la unidad de medida.

Modelo de carta para ser cumplimentado por los alumnos:

A la atención del Sr. vendedor de barras de cortinas.

Zaragoza,

Estimado Sr. Vendedor:
Deseo recibir en mi domicilio una barra de cortina que mida una longitud de ____________________________ de unidad.

Atentamente:
Firmado: __________________________ y __________________________

P.D. Le voy a decir cómo he realizado la medida de la longitud de la barra

IV. Metodología
Intervenciones del profesor. Cumplen tres finalidades: explicitar las tareas a realizar, describir las técnicas de medida, e institucionalizar los contenidos.
Debates en pequeño grupo de los alumnos.
Debate en gran grupo, moderado por el profesor, sobre los resultados obtenidos por los alumnos y la forma de alcanzarlo.

Gráfico V.9. Esquema del plan de trabajo de la primera sesión en 4º curso de Educación Primaria

Seguidamente hacemos una breve descripción del contenido y reseñamos las sesiones de clase que se utilizan, así como los trabajos que se proponen a los alumnos. Por tanto, describimos la secuencia didáctica de los dos cursos en que se lleva a cabo la fase experimental, y cuyo resumen global es el siguiente:

- Cuarto Curso de Educación Primaria: se desarrollan 21 sesiones, de clase de 50 minutos cada una, a lo largo de las cuales se realizan 27 fichas o trabajos de aula.
- Quinto Curso de Educación Primaria: la propuesta se articula en 41 sesiones de clase de 50 minutos cada una, y se realizan de 51 fichas o trabajos de aula.

Las tareas que realizan los escolares se agrupan en *Fichas de Trabajo*. Cada ficha recoge la expresión escrita de las manipulaciones que, previamente, han realizado los alumnos siguiendo las consignas del profesor. De entre las fichas resueltas vamos a elegir aquellas que nos aportan mayor información acerca de la comprensión de los escolares. A estas fichas les llamamos *Fichas de Evaluación* (F.E.) y las hemos numerado en orden correlativo con independencia de que las resuelvan los alumnos de 4º ó 5º curso de Educación Primaria.

V.9.2.1. Cuarto curso

Tema 1.- La fracción con significado de medida de cantidades de longitud

En la primera ficha se plantea a los alumnos una situación problemática cuya resolución exige la medida de una cantidad de longitud menor que la unidad de medida, lo que exige realizar un fraccionamiento de dicha unidad y expresar el resultado de la medida con una fracción. El siguiente cuadro muestra el número sesiones y el de fichas a realizar:

Fichas	1	2	Concluir 1 y 2	3 F.E. nº 1	4	5 F.E. nº 2
Sesiones	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª

En la **Segunda Etapa** se contempla la inclusión de nuevas fichas de trabajo con el objetivo de que los alumnos realicen mayor número de actividades de medida y de evaluación semántica de la fracción. Sin embargo, no hay aumento del número de sesiones porque se decide suprimir la ficha de trabajo nº 4 que propone una situación de comunicación que resulta cuya implementación en el aula resulta compleja.

Tema 2.- La fracción con significado de medida de cantidades de masa

Los alumnos disponen de bloques de plastilina y de balanzas de dos platillos. Las tareas que se les proponen es la expresar la masa de diferentes bloques de plastilina utilizando como unidad de masa una pastilla estándar de dicho material.

Fichas	6	7
Sesiones	7ª	8ª

En la **Segunda Etapa** se suprimen estas sesiones porque el Equipo Investigador entiende que la medida de cantidades de la magnitud masa requiere de técnicas muy costosas para el alumno.

Tema 3.- La fracción con significado de medida de cantidades de superficie

Los escolares disponen de una unidad de superficie, una cuartilla en forma de cuadrado, y deben obtener el resultado de la medida de la superficie de diferentes cartulinas de forma rectangular.

Fichas	8	9	10	11 F.E nº 3	12
Sesiones	9ª	10ª	11ª	11ª	12ª

En la **Segunda Etapa** se prevé la inclusión de dos nuevas sesiones para que los alumnos realicen tareas de medida de cantidades de superficie a partir de objetos que se representan de forma gráfica; así como que evalúen semánticamente expresiones fraccionarias y que representen gráficamente figuras cuya cantidad de superficie viene dada por dichas fracciones. Los apartados III y IV de las Fichas de Trabajo nº 14 y nº 15 de la Segunda Etapa constituyen la Fichas de Evaluación nº 2BIS y nº 4, respectivamente. En ambas tareas se propone a los alumnos evaluar semánticamente la fracción desde los modelos de medida de longitud y de superficie, respectivamente.

Tema 4.- La equivalencia de fracciones

Se trata de que los escolares comprendan que la medida de una misma cantidad de magnitud puede expresarse con fracciones diferentes. Además, se pretende que avancen hacia la formulación de una regla que facilite la búsqueda de fracciones equivalentes a una dada.

Fichas	13	14 y 15
Sesiones	13ª	14ª

En la **Segunda Etapa** se incorporan dos nuevas sesiones para que los alumnos consoliden la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada. La técnica que se trabaja es la de multiplicar (o dividir) numerador y denominador por el mismo número.

Tema 5.- Relaciones de orden entre fracciones

Los alumnos han de determinar cuál de las dos fracciones dadas es mayor que la otra, sin que la comparación exija utilizar la equivalencia de fracciones. Además, se quiere avanzar en ideas de densidad respecto del orden intercalando varias fracciones entre dos dadas.

Fichas	16	17	18	19 F.E nº 6	20	21
Sesiones	15ª	15ª	16ª	16ª	17ª	18ª

En la **Segunda Etapa** se implementan dos sesiones, en lugar de las cuatro previstas en la Primera Etapa, dado que el Equipo de Investigación observó que en la Primera Etapa los alumnos habían tenido un nivel de éxito aceptable y se podían reducir los tiempos de la experimentación.

Tema 6.- La fracción con significado de medida de cantidades discretas

Las magnitudes discretas presentan peculiaridades que aconsejan hacer un tratamiento específico. Los alumnos han de medir cantidades de magnitudes discretas y han de aplicar la técnica que facilita el cálculo de la fracción de una cantidad.

Fichas	22	23	24 F.E nº 8	25	26 F.E nº 9	27
Sesiones	19ª	19ª	20ª	20ª	21ª	21ª

En la **Segunda Etapa** se mantiene el número de sesiones propuestas para la Primera Etapa y se introduce una nuevas ficha de trabajo con el objetivo de que los alumnos conjeturen la regla para calcular la fracción de una cantidad discreta.

En resumen, la **Segunda Etapa** contempla la implementación de 21 sesiones de clase. Este número sesiones previstas coincide con el número de previstas en la fase de Planificación de la Primera Etapa.

V.9.2.2. Quinto curso

Tema 1.- La fracción con significado de medida

Dedicamos unas tareas, que denominamos *Fichas previas*, para profundizar en el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente. A continuación se aborda el significado y cálculo de las operaciones de suma de fracciones, resta de fracciones, producto de una fracción por un número natural y división de una fracción entre un número natural.

Fichas	Previa 1	Previa 2 FE nº 5	Previa 3	Previa 4	Previa 5	Previa 6 F.E nº 7
Sesiones	1ª	1ª	2ª	2ª	3ª	3ª

La Ficha de Evaluación nº 7 es análoga a la Ficha de Evaluación nº 6 que los alumnos han resuelto unos meses antes cuando estudiaban 4º curso. El análisis de los resultados de las Fichas de Evaluación nº 5 y nº 7, que los alumnos resuelven al comenzar la secuencia de enseñanza en 5º curso, nos permitirá estudiar la evolución de la comprensión de los escolares referida al concepto de equivalencia de fracciones.

Fichas	1	2	3 FE 10	4	5	6 FE 11	7	8 F.E 12	9	10	11	12	13 FE 13
Sesiones	4ª	4ª	5ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	9ª	10ª	10ª	11ª	12ª

En la **Segunda Etapa** se incrementan en dos el número de sesiones, porque en la Primera Etapa de la fase experimental se constató la necesidad de introducir nuevas tareas para dotar de significado a las operaciones y para consolidar las técnicas de cálculo operatorio.

<u>Tema 2.- La fracción con significado de cociente partitivo</u>
Se presenta un nuevo significado de la fracción como expresión del resultado de repartir *a* unidades entre *b* individuos, reparto que se realiza con la técnica de hacerlo en una sola fase. Con este significado se dan significado a la comparación de fracciones. También proponemos tareas de evaluación semántica de la fracción de modo que, a partir del conocimiento de la fracción, se pide encontrar las condiciones iniciales del reparto.

Fichas	14	15	16 FE nº 14	17	18	19	20	21	22	23 FE nº 15
Sesiones	13ª	14ª	15ª	15ª	16ª	17ª	18ª	18ª	19ª	20ª

En la **Segunda Etapa** se suprime una sesión que corresponde a la que en la Primera Etapa se dedicaba a encontrar las condiciones iniciales de un reparto conocido el resultado del mismo. Esta decisión se toma a la vista de las dificultades que encontraron los alumnos de la Primera Etapa; dificultades que provienen de las exigencias de la tarea.

<u>Tema 3.- La Representación Polinómica Decimal</u>
Se modifica la técnica del reparto de forma que se haga en varias fases y que en cada una de ellas el fraccionamiento sea en 10 partes iguales. De este modo, el resultado del reparto viene expresado como suma de fracciones decimales cuyos denominadores son las sucesivas potencias de 1/10.

Fichas	24	25	26	26BIS	27 FE nº 16
Sesiones	21ª	22ª	23ª	23ª	24ª

<u>Tema 4.- La notación decimal</u>
Se introduce el convenio de economía en la escritura de las expresiones polinómicas decimales. De este modo, el número decimal aparece como un número medida que oculta

una estructura polinómica decimal. Además, se justifica el algoritmo de paso de la fracción al número decimal. Finalmente, y utilizando el recurso de la recta numérica, el número decimal se configura también como el resultado de la medida efectuada en varias fases y con fraccionamientos sistemáticos en 10 partes iguales

Fichas	28	29	30 FE nº 17	30BIS	31	32	33	34
Sesiones	25ª	25ª	26ª	26ª	27ª	27ª	28ª	28ª

En la **Segunda Etapa** se mantiene el número de sesiones, 4, aunque se modifican algunas tareas con la intención de que los alumnos representen en la recta numérica tanto las expresiones fraccionarias como las decimales; de este modo, se incrementa la relación entre las notaciones fraccionaria y decimal en el sentido de expresar una misma cantidad de longitud, igualdad que se hace visualmente patente al comprobar que les corresponde un mismo punto de la recta numérica. Es más, en las fichas modificadas se propone hacer el mismo reparto con dos técnicas diferentes, con la intención de incidir en la idea de que la misma cantidad de magnitud se puede expresar con dos sistemas de representación diferentes.

Tema 5.- Conexión entre el número decimal y la fracción

Después de introducir la notación decimal se conecta ésta con la fracción mediante la representación polinómica decimal.

Fichas	35 FE nº 18	36
Sesiones	29ª	30ª

Tema 6.- Relaciones de orden entre números decimales

A partir de los modelos de medida y de cociente, y teniendo en cuenta la representación polinómica decimal, se estudia el orden entre números decimales a partir del valor relativo de sus cifras.

Fichas	37	38 FE nº 19
Sesiones	31ª	32ª

Tema 7.- Operaciones entre números decimales

Partiendo de situaciones problemáticas contextualizadas en los modelos utilizados, se dota de significado a las operaciones de suma de números decimales, resta de números decimales, multiplicación de un número decimal por un número natural y división de un número decimal entre un número natural. Además, y utilizando los modelos definidos, se justifican y hacen operativos los correspondientes algoritmos de cálculo.

Fichas	39	40 FE 20	41 FE 21	42	43	44	45 FE 22	46	47 FE 23	48	49 y 50
Sesiones	33ª	33ª	34ª	35ª	36ª	36ª	37ª	38ª	39ª	40ª	41ª

En la **Segunda Etapa** se prevé dedicar el mismo numero de sesiones pero implementando tres tareas más dado que, en la Primera Etapa, se observó que los tiempos de resolución de algunas tareas se pueden acortar.

Incluimos un cuadro que resume las variaciones en la Planificación de la Propuesta Didáctica que se produjeron en la Segunda Etapa:

	PRIMERA ETAPA	SEGUNDA ETAPA
Cuarto Curso		
Tema 1	6 sesiones / 5 fichas	6 sesiones / 8 fichas
Tema 2	2 sesiones / 2 fichas	Se suprime
Tema 3	4 sesiones / 5 fichas	6 sesiones / 8 fichas
Tema 4	2 sesiones / 3 fichas	4 sesiones / 5 fichas
Tema 5	4 sesiones / 6 fichas	2 sesiones / 4 fichas
Tema 6	3 sesiones / 6 fichas	3 sesiones / 7 fichas
		Mismo número de sesiones: 21 sesiones
Quinto Curso		
Tareas previas	3 sesiones / 6 fichas	Sin modificaciones
Tema 1	9 sesiones / 13 fichas	11 sesiones / 15 fichas
Tema 2	8 sesiones / 10 fichas	7 sesiones / 10 fichas
Tema 3	4 sesiones / 5 fichas	Sin modificaciones
Tema 4	4 sesiones / 8 fichas	Se modifica el contenido de las fichas
Tema 5	2 sesiones / 2 fichas	Sin modificaciones
Tema 6	2 sesiones / 2 fichas	Sin modificaciones
Tema 7	9 sesiones / 12 fichas	8 sesiones / 11 fichas
		Mismo número de sesiones: 41 sesiones

V.9.3. Metodología

Lo que persigue esta propuesta es incrementar la comprensión de los escolares de Educación Primaria sobre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales positivos. En este sentido, nos proponemos potenciar que los alumnos sean los autores de su propio aprendizaje, que la formación de conceptos se desarrolle a través de la resolución de las situaciones problemáticas que se propongan.

La metodología de la propuesta toma como referente el paradigma constructivista del aprendizaje: prioriza el trabajo personal y en grupo de los alumnos, y potencia el aula como espacio natural para la construcción del conocimiento.

El proceso de instrucción parte del trabajo de los alumnos, de sus respuestas a las situaciones problemáticas que se les proponen y que han sido elaboradas, organizadas y secuenciadas de acuerdo con los modelos de aprendizaje elegidos. Una vez finalizada la tarea (en el aula o en sus casas) hay un proceso de reflexión colectiva en el que los alumnos discuten las respuestas incorrectas y exponen distintas estrategias utilizadas en la resolución de la tarea, siendo el profesor quien institucionaliza el conocimiento matemático.

Queda así caracterizado un modo de actuación: el profesor entrega las tareas, los alumnos las resuelven y las entregan al profesor, el profesor las revisa y organiza la discusión para fijar los elementos esenciales del conocimiento matemático que se sustenta en las tareas; una vez institucionalizado el conocimiento el profesor propone nuevas tareas y el ciclo se reinicia.

Esta metodología exige que se favorezca una atmósfera de libertad en el aula para que los alumnos puedan expresar sus ideas; asimismo, se fomenta la idea de que los errores son consustanciales al aprendizaje, con lo que se favorece la participación de todos los alumnos en las discusiones y, en particular, se potencia la actuación pública de los escolares que presentan mayores dificultades de aprendizaje.

Todos los alumnos disponen, una vez terminado el tema, de un pequeño texto encuadernado en el que figuran los conceptos y procedimientos objeto de la instrucción, así como actividades resueltas y propuestas.

Estas pautas metodológicas pueden ser observadas a lo largo de toda la propuesta didáctica. En particular, esta metodología queda ejemplificada en la primera sesión de 4º curso de Educación Primaria que hemos descrito porque:

1º El profesor presenta y ambienta la tarea a resolver

2º Los alumnos comparten impresiones para acordar la magnitud a medir y la necesidad de disponer de una unidad de medida de la longitud

3º Los alumnos realizan actividades de medida, en grupos de dos alumnos, con objetos tangibles porque tienen en sus manos el listón, que representa la barra de la cortina y unidades de medida que son tiras de papel.

4º Cuando el profesor recoge las cartas procede a realizar una evaluación conjunta de la tarea: pregunta a los alumnos qué soluciones han obtenido y qué fraccionamientos han realizado sobre la unidad.

5º Se establece una discusión colectiva a partir de las respuestas que aportan los escolares y de la consigna tercera que obliga a que la medida se realice con una sola subunidad.

6º Finalmente, el profesor introduce la representación simbólica de la fracción.

V.9.4. Evaluación

Las tareas resueltas por los escolares constituyen el principal elemento para valorar su trabajo; además, también se tiene en cuenta las intervenciones en el aulas y la actitud que muestran a lo largo del proceso de aprendizaje.

Con estos datos se puede hacer una valoración de tipo local, una valoración de aspectos parciales del contenido. Para disponer de información sobre la comprensión global del contenido de la Propuesta Didáctica se somete a los alumnos a una prueba que se realiza al principio del siguiente año académico y sin que los alumnos reciban enseñanza de los contenidos a evaluar. El objetivo de esta prueba, que se realiza en el mes de septiembre, es evaluar los aprendizajes realizados por los alumnos que en año académico anterior participaron en la implementación de las propuestas de 4º y 5º curso y que valora los siguientes aspectos:

- Construcción del sistema de representación fraccionario como resultado de la medida de cantidades de longitud, superficie y cardinalidad.
- Evaluación semántica de la representación fraccionaria: construcción de una cantidad de longitud, de superficie o del cardinal de un conjunto a partir del conocimiento de la fracción.
- Interpretación de la equivalencia y las relaciones de orden entre representaciones fraccionarias.
- Interpretación de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de una fracción por un número natural.
- Construcción del sistema de representación fraccionario y de la representación polinómica como resultado de un reparto igualitario de cantidad de longitud realizado en una sola fase.
- Construcción de la representación polinómica decimal como resultado de un reparto igualitario de cantidad de longitud realizado en varias fases.
- Construcción de la notación decimal a partir de la representación polinómica decimal asociada a un reparto.
- Evaluación semántica de la notación decimal: el número decimal aparece como cantidad de longitud en la recta numérica.
- Transformaciones entre la notación fraccionaria y la notación decimal.
- Interpretaciones de las relaciones de orden entre números decimales.
- Interpretación de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de un número decimal por un número natural.

V.9.5. Criterios para la actuación en el aula

Se recordará a los alumnos, cuantas veces sea necesario, que las tareas deben hacerse individualmente; solamente se fomentará la discusión con sus compañeros más próximos si con ello se facilita la comprensión del conocimiento en juego.

Ante las preguntas que formulen los alumnos el profesor tratará de evitar que las respuestas sean directas, antes bien tratará de orientar el trabajo del alumno reformulando nuevas preguntas o haciendo sugerencias sobre una nueva lectura del enunciado o sobre alguno de los conceptos estudiados con anterioridad.

Después de las discusiones colectivas sobre las tareas ya realizadas, el profesor deberá sintetizar los resultados obtenidos, recalcar aquellos aspectos del contenido que tienen mayor importancia y conectar los nuevos contenidos con otros ya trabajados con anterioridad.

V.10. Comparación entre la práctica docente habitual y la que se propone

En el Capítulo III se realizó un estudio sobre la práctica docente que propone una línea editorial sobre el número racional y limitado al ámbito de actuación de la Propuesta Didáctica tal y como se indicó en el punto V.3. Por otra parte, venimos enunciando nuestro propósito de elaborar una propuesta didáctica que posibilite incrementar los conocimientos de los alumnos sobre los números racionales. Una vez detallada la propuesta objeto de esta investigación procede sintetizar los elementos diferenciadores respecto a la práctica docente habitual, así como los aspectos que se supone van a favorecer la comprensión de los escolares.

1	PRÁCTICA DOCENTE HABITUAL	PRÁCTICA DOCENTE PROPUESTA
	El número decimal precede a la fracción	La fracción precede al número decimal

La propuesta que hacemos atiende a la génesis histórica de la introducción de los números decimales en Europa. Entendemos que hay que recurrir a esta génesis por cuanto la notación fraccionaria no exige un dominio profundo del sistema de numeración decimal, como así ocurre en la notación decimal. Además, nos parece que resultaría muy artificial definir un modelo eficaz que hiciese surgir la representación decimal en tareas de medida con magnitudes diferentes de la longitud, trabajando con alumnos de 10-11 años.

2	PRÁCTICA DOCENTE HABITUAL	PRÁCTICA DOCENTE PROPUESTA
	Los contenidos se presentan de forma ostensiva	Los contenidos surgen de la resolución de situaciones problemáticas y de la interacción entre el profesor y los alumnos y entre los propios alumnos

Aun cuando las intenciones legislativas vigentes auspician el paradigma constructivista, lo cierto es que los textos analizados se limitan a utilizar la ostensión para introducir los conceptos y los procedimientos. La propuesta alternativa que se formula modifica los roles de profesor y de alumno: el profesor propone las tareas, orienta el trabajo de los alumnos e institucionaliza los conceptos y procedimientos aparecidos; mientras que el alumno es el que afronta la resolución de las tareas manipulando los objetos y reflexionando sobre lo que observa.

3	PRÁCTICA DOCENTE HABITUAL	PRÁCTICA DOCENTE PROPUESTA
	El énfasis se sitúa en los contenidos procedimentales.	El núcleo de la enseñanza lo constituyen los contenidos de tipo conceptual. Las técnicas surgen en situaciones problemáticas y las formulan los escolares.

Como consecuencia de la práctica docente habitual se crean falsas concepciones en los alumnos, como el sustituir los conceptos por alguna de las técnicas asociadas. En nuestra propuesta los conceptos constituyen el eje de la instrucción: surgen de propuestas problemáticas que se formulan a los escolares cuya resolución exige poner en juego el contenido que se pretende enseñar. Evidentemente el proceso exige de una práctica docente muy distinta a la habitual, pues el profesor no sintetiza los contenidos hasta el final del proceso.

4	PRÁCTICA DOCENTE HABITUAL	PRÁCTICA DOCENTE PROPUESTA
	La fracción se utiliza con el significado casi exclusivo de parte-todo.	La fracción tiene significado de medida y de reparto igualitario. El significado parte-todo no se contempla.

Como se puso de manifiesto en el Capítulo III, la práctica docente habitual se caracteriza porque la notación fraccionaria se presenta y utiliza con el significado casi exclusivo de relación parte-todo; es mucho más reducida la presencia de los significados de cociente indicado y de operador.

Sin embargo, la propuesta que realizamos se sustenta en la epistemología histórica, porque entendemos que desde esta posición se facilita un aprendizaje de los escolares basado en la realización de manipulaciones con objetos físicos que prepara, en un paso posterior, la formación de ideas abstractas. Además, se soslaya el significado de relación parte-todo por cuanto crea dificultades de comprensión que se superan utilizando el significado de medida.

5	PRÁCTICA DOCENTE HABITUAL	PRÁCTICA DOCENTE PROPUESTA
	El número decimal se presenta, de forma ostensiva, como un convenio de escritura.	La fracción y el decimal se presentan como dos formas diferentes de expresar la misma cantidad de magnitud. El número decimal aparece como medio más económico de escritura de la representación polinómica decimal.

En la práctica docente, que se deriva de los libros de texto analizados, el número decimal se presenta como un ente abstracto, como un número no medida, y sin referentes en el mundo de los objetos físicos. La propuesta alternativa utiliza la representación polinómica decimal para mostrar que la medida, resultante de un reparto, presenta una estructura sustentada en la suma de partes de tamaño las sucesivas potencias de 10; por tanto, el alumno puede construir una estructura cognitiva compleja desde la manipulación de objetos físicos situados en un modelo de aprendizaje.

6	PRÁCTICA DOCENTE HABITUAL	PRÁCTICA DOCENTE PROPUESTA
	La instrucción no se sustenta en modelos de aprendizaje.	El proceso de enseñanza-aprendizaje del número racional se sustenta en el uso de modelos de aprendizaje estables.

En la práctica docente usual la enseñanza de la fracción y del número decimal los contenidos se sitúan en el mundo físico, pero los contextos que se utilizan son diferentes e inconexos para cada uno de los contenidos; de este modo, ante cada nuevo contenido el alumno tiene que delimitar el contexto en el que se propone, lo que distrae el proceso instructivo.

En la propuesta que se experimenta ubica cada contenido nuevo en el mismo contexto en el que se han trabajado los contenidos estudiados con anterioridad; ello permite focalizar el trabajo en los contenidos objeto de la instrucción, pues el alumno ya está familiarizado con el contexto en el que se sitúan las tareas, dado que se trabaja con los mismos objetos y con las mismas magnitudes.

7	PRÁCTICA DOCENTE HABITUAL	PRÁCTICA DOCENTE PROPUESTA
	Los contenidos no surgen de la resolución de situaciones problemáticas.	La resolución de problemas constituye el motor del aprendizaje.

Cada nuevo contenido se presenta, en la práctica docente habitual, a partir de una situación problemática; sin embargo, los propios autores dan la respuesta al problema planteado marginando el trabajo del alumno.

La introducción de nuevos contenidos, en la propuesta que hacemos, comienza con el enunciado de una tarea problemática que el alumno debe responder, recibiendo las oportunas ayudas del profesor; de este modo, las ideas surgen desde la reflexión del alumno sobre el trabajo realizado y se institucionalizan con la intervención posterior del profesor.

8	PRÁCTICA DOCENTE HABITUAL	PRÁCTICA DOCENTE PROPUESTA
	En núcleo del trabajo docente se sitúa en uso de las técnicas	Los conceptos constituyen el núcleo del proceso instructivo.

En la práctica docente habitual en énfasis de la resolución de situaciones problemáticas se coloca en la descripción de los algoritmos implicados en la resolución de las mismas. Después se proponen tareas que los alumnos deben resolver de forma análoga a cómo las han resuelto los autores de los textos escolares.
En la práctica docente que se propone hay una prioridad por los contenidos conceptuales; más tarde aparecen algoritmos asociados a estos conceptos que formulan los propios alumnos buscando la respuesta a tareas específicas que se proponen. Por tanto, las técnicas algorítmicas no se presentan de forma ostensiva, sino que van precedidas de las razones que las justifican. Posteriormente, la evaluación de las distintas ideas surgidas en el aula permite al profesor institucionalizar la formulación de aquella técnica algorítmica que mejor se ajusta a la que ya estaba prevista en la Propuesta Didáctica; la instrucción concluye con el enunciado de nuevas tareas que sirvan para que los alumnos se adiestren en el manejo de las técnicas algorítmicas.

Con la elaboración de la Propuesta Didáctica, el Equipo Investigador valora que se han cubierto las etapas previstas para la Fase de Planificación, y que están sintetizadas en el gráfico V.1. En consecuencia, el Equipo Investigador decide pasar a la siguiente fase de la Primera Etapa de Investigación-Acción, para lo que se fija la fecha del 25 de Enero de 2000 como inicio de la implementación de la propuesta didáctica con dos grupo naturales de alumnos de 4º curso de Educación Primaria del C.E.I.P. "Tío Jorge" de la ciudad de Zaragoza.

En la Segunda Etapa se fijó la fecha del 8 de Marzo de 2004 para implementar la propuesta didáctica elaborada a partir de las reflexiones y conclusiones obtenidas en la Primera Etapa de la fase experimental.

En los capítulos siguientes se recogen las fases de Acción, Observación y Reflexión de cada una de las dos Etapas que componen nuestro diseño de investigación.

Capítulo VI

Fase de Acción

VI.1. Introducción

Una vez que se ha concluido la Fase de Planificación de la propuesta didáctica, comienza la fase siguiente, la de desarrollar en el aula lo planificado, la Fase de Acción.

En esta fase de Acción, el investigador se constituye en profesor de aula; dicho profesor es el que presenta las tareas, responde a las preguntas que formulan los alumnos, orienta el trabajo de los escolares, valora las respuestas de los aprendices resaltando las que interesan para la progresión del aprendizaje y reorienta las respuestas que disipan esta progresión y, finalmente, institucionaliza los conceptos y procedimientos objeto de la instrucción.

Los Maestros tutores de cada curso asisten a las sesiones previas en las que el investigador detalla el contenido y objetivo de cada una de las tareas, valoran y sugieren posibles modificaciones, colaboran en todas las sesiones de clase atendiendo a los alumnos que lo necesiten y ejercen la función de observador. Al finalizar cada sesión de clase se reúnen con el profesor investigador y aportan todos los datos que ha extraído desde su observación participativa.

Para describir esta Fase de Acción se utiliza de manera recursiva, las cuatro fases de la Investigación-Acción del modo siguiente:

- Planificación de la Fase de Acción, en la que se especifica la distribución temporal de la secuencia didáctica según el diseño de la propuesta didáctica.
- Desarrollo de las sesiones, que constituye la Fase de Acción propiamente dicha.
- Observación o recogida de datos de la Fase de Acción, referidos a la comprensión de los contenidos y a la interacción didáctica.
- Reflexión sobre la Fase de Acción en la que se valora críticamente el trabajo realizado y, en consecuencia, se toman decisiones sobre el modo de continuar el trabajo

En esta descripción se toma como núcleo de la información aquellos aspectos que merecen ser destacados en la Primera Etapa de la investigación. En cada uno de los apartados que se contemplan se incluyen los aspectos relevantes de la Segunda Etapa. De este modo evitamos las repeticiones que hacen el discurso prolijo, y sintetizamos los elementos más interesantes para nuestro análisis posterior.
La información sobre las 62 sesiones que conforman esta parte de nuestro estudio se organiza de acuerdo con el esquema de Investigación-Acción que venimos utilizando y que se resume en el siguiente gráfico:

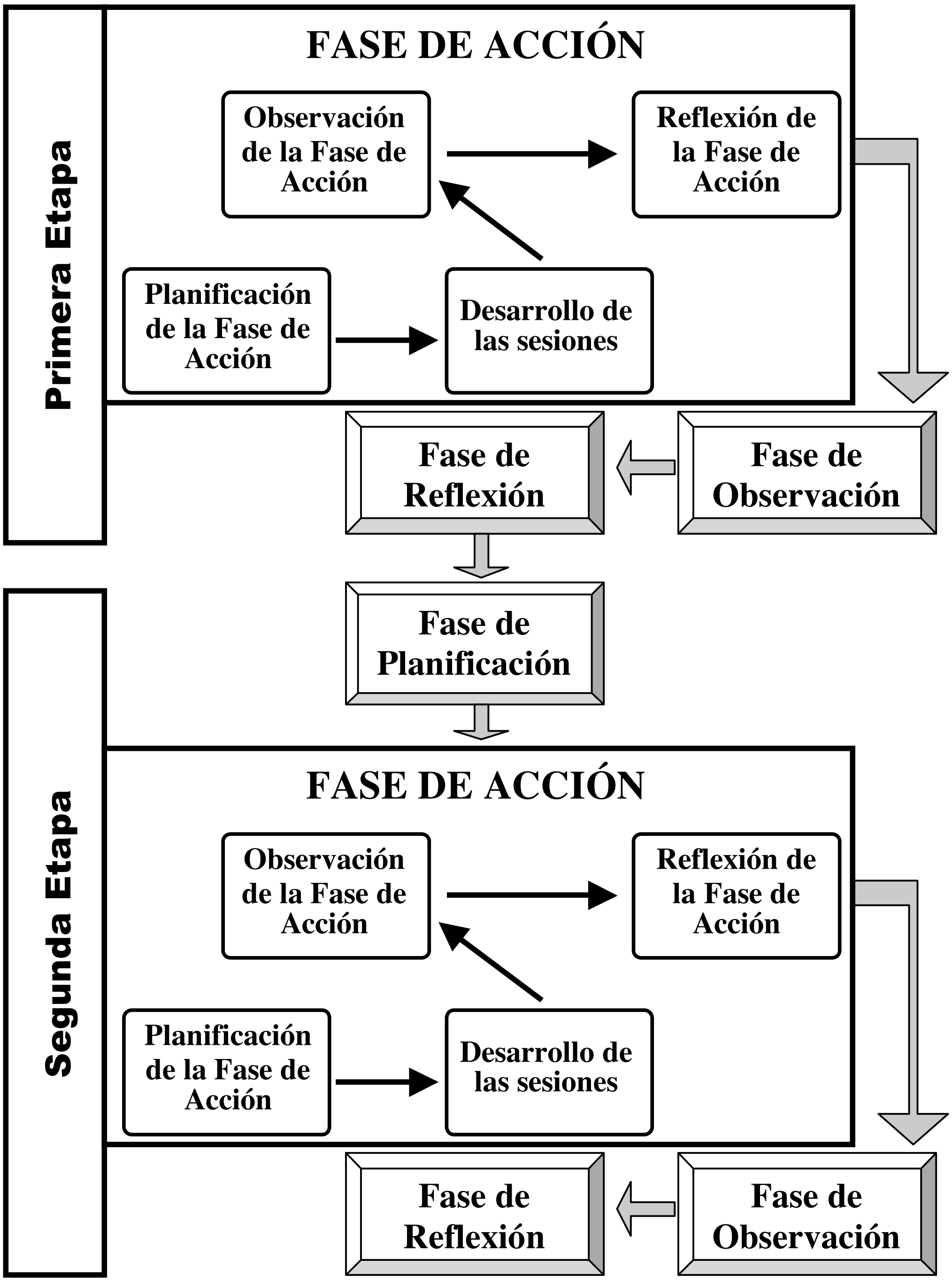


Gráfico VI.1. Diseño de la Fase de Acción

VI.2. Planificación de la fase de Acción

Al concluir la fase de planificación se contempló una Propuesta curricular cuyo desarrollo abarca dos cursos escolares, 4º y 5º de Educación Primaria. En total la Propuesta contempla 62 sesiones de 50 minutos cada una. De ellas, 21 se desarrollan en 4º curso y 41 en 5º curso. Estas sesiones se vertebran en torno a los tres focos de investigación, cada uno de los cuales se divide en temas, en los que los alumnos realizan trabajos específicos: Fichas de Trabajo (FT), algunas de las cuales son de Evaluación (FE); tal y como se detalla en la Propuesta Didáctica que se muestra en el Anexo I. Los cuadros siguientes resumen la distribución temporal de temas y tareas por cada uno de los tres focos de investigación:

Primer foco de investigación:

Curso	*Contenido*	*Temporalización*	*Trabajos*
Cuarto	La fracción como resultado de la medida de cantidades de longitud	Sesiones 1 a 4	FT nº 1, 2 y 3 FE nº 1= FT nº 3
Cuarto	Evaluación semántica de la fracción que expresa la medida de cantidades de longitud	Sesiones 5 y 6	FT nº 4 y 5 FE nº 2= FT nº 5
Cuarto	La fracción como resultado de la medida de cantidades de masa	Sesiones 7 y 8	FT nº 6 y nº 7
Cuarto	La fracción como resultado de la medida de cantidades de superficie	Sesiones 9, 10, 11 y 12	FT nº 8,9,10,11y 12 FE nº 3 = F T nº11 FE 4=FT 15 (2ª Etapa)
Cuarto	Equivalencia de fracciones	Sesiones 13 y 14	FT nº 13, 14 y 15
Cuarto	Orden entre fracciones	Sesiones 15, 16 17 y 18	FT nº 16 a 21 FE nº 6 = F 19
Cuarto	La fracción como resultado de la medida de cantidades discretas	Sesiones 19, 20 y 21	FT nº 22 a 27 FE nº 8 = FT nº 24 FE nº 9 = FT nº 26
Quinto	Tareas previas para reforzar las relaciones de equivalencia y de orden	Sesiones 1, 2 y 3	FT previa nº 1 a nº 6 FE nº 5 = FTP nº 2 FE nº 7 = FTP nº 6
Quinto	Operaciones con fracciones	Sesiones 4 a 12	FT nº 1 a nº 13 FE nº 10 = FT nº 3 FE nº 11 = FT nº 5 FE nº 12 = FT nº 8 FE nº 13 = FT nº13

Cuadro VI.1: Distribución temporal y trabajos para el primer foco de investigación

A este primer foco de investigación se dedican 21 sesiones de clase en 4º curso y 12 sesiones en 5º curso. En estas sesiones se estudia el sistema de representación fraccionario con el significado de medida.

En la **Segunda Etapa**, tal y como se manifestó en el Capítulo V, se aumenta en dos el número de sesiones, para reforzar la enseñanza de las operaciones con fracciones. En cuarto curso, se mantiene el mismo número de sesiones porque aunque se suprimen las tareas de medida desde el modelo masa se implementan nuevas fichas de trabajo de medida y evaluación semántica de cantidades de longitud y superficie.

Segundo foco de investigación:

Curso	*Contenido*	*Temporalización*	*Trabajos*
Quinto	La fracción como resultado de un reparto igualitario realizado en una sola fase	Sesiones 13 a 16	FT nº 14 a nº 18 FE nº 14 = FT nº 16
Quinto	Evaluación semántica de la fracción. Búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto	Sesiones 17 y 18	FT nº 19 a nº 21
Quinto	Comparación de fracciones en el modelo de cociente partitivo	Sesiones 19 y 20	FT nº 22 y nº 23 FE nº 15 = FT nº 23
Quinto	La representación polinómica decimal en el modelo de cociente partitivo	Sesiones 21 a 24	FT nº 24 a nº 27 FE nº 16 = FT nº 27
Quinto	El número decimal en el modelo cociente partitivo	Sesiones 25 y 26	FT nº 28 a nº 30BIS FE nº 17 = FT nº30
Quinto	Evaluación semántica del número decimal en el modelo de cociente.	Sesiones 27 y 28	FT nº 31 a nº 34

Cuadro VI.2: Distribución temporal y trabajos para el segundo foco de investigación

En este foco de investigación se introducen sistemas de representación del número racional positivo desde el modelo de cociente partitivo. Así, la fracción expresa el resultado de un reparto realizado en una sola fase; la Representación Polinómica Decimal cuando el reparto se realiza en varias fases, y la Notación Decimal que economiza la escritura de las expresiones polinómicas decimales. Además, una vez que los alumnos conocen la notación decimal como expresión del resultado de un reparto igualitario, conviene que también vinculen esta notación con la medida directa de cantidades de magnitud.

Las modificaciones de la **Segunda Etapa** se concretan en la eliminación de las tareas de evaluación semántica de la fracción como cociente partitivo; es decir, se suprimen las tareas en las que los alumnos debían encontrar las condiciones iniciales del reparto sabiendo el resultado del mismo. La resolución de estas tareas presenta dificultades a alumnos de la Primera Etapa porque se les solicita justificar un conocimiento que poseen: que el numerador de la fracción coincide con el número de barras de regaliz y el denominador con el número de participantes en el reparto. En consecuencia, se reduce en una el número de sesiones previstas en la planificación de la Segunda Etapa.

Tercer foco de investigación:

Curso	*Contenido*	*Temporalización*	*Trabajos*
Quinto	Transformaciones entre números decimales y fracciones	Sesiones 29 y 30	FT nº 35 y nº 36 FE nº 18 = FT nº 35
Quinto	Relación de orden entre números decimales	Sesiones 31 y 32	FT nº 37 y nº 38 FE nº 19 = FT nº 38
Quinto	Operaciones entre números decimales	Sesiones 33 a 41	FT nº 39 a nº 50 FE nº 20 = FT nº 40 FE nº 21 = FT nº 41 FE nº 22 = FT nº 45 FE nº 23 = FT nº 47

Cuadro VI.3: Distribución temporal y trabajos para el tercer foco de investigación

Los últimos tres temas de la Propuesta Didáctica tienen como objetivo conectar los dos sistemas de representación habituales del número racional positivo y, además, dotar de significado a las relaciones y operaciones entre números decimales, así como justificar los correspondientes algoritmos de cálculo con números decimales.

En la **Segunda Etapa** se suprimió una de las sesiones debido a que los alumnos de la Primera Etapa mostraron eficacia en el uso de técnicas de cálculo con números decimales a pesar de que tienen dificultades para justificar los algoritmos de cálculo con decimales.

VI.3. Desarrollo de la fase de Acción

Una vez que se ha realizado la implementación de la Propuesta Curricular interesa determinar las desviaciones que se han producido respecto a la planificación inicial, así como las causas que las han provocado.

Para hacer un seguimiento exhaustivo del desarrollo completo de las sesiones de clase se debe consultar el Anexo II, en el que se recoge el Diario de Clase. En este Diario figuran todas las incidencias ocurridas en cada una de las sesiones de clase. La información consignada para cada una de las sesiones se organiza según los siguientes aspectos:

1.- Plan previsto
2.- Ejecución
3.- Asistencia a clase y aspectos actitudinales
4.- Aspectos relacionados con la comprensión
5.- Valoración
6.- Toma de decisiones

Presentamos en este apartado algunos aspectos del desarrollo de las sesiones de clase que consideramos importante para nuestra investigación: establecer una comparación entre la planificación y la ejecución de la secuencia instructiva, en su desarrollo temporal.

VI.3.1. Balance entre la planificación y la ejecución

A partir de las informaciones recogidas en el antes mencionado Diario de Clase vamos a elaborar un cuadro-resumen por cada uno de los Focos de Investigación, en el que figuran las fechas de las sesiones, el número de sesiones implementadas, el trabajo previsto y el balance entre la planificación y la ejecución y la causa de que se hayan producido desfases entre lo planificado y lo implementado. Ello nos permitirá hacer un balance entre lo planificado en la etapa correspondiente de nuestro modelo de Investigación-Acción, y lo ejecutado en la correspondiente etapa de la implementación:

Primer foco de investigación:

a) Cuarto curso

Fecha	***Sesión***	***Trabajos previstos***	***Balance entre planificación y ejecución Causas de los desfases***
25-01-00	1	Ficha 1. Enseñanza de la fracción desde el modelo longitud	Sin variación
26-01-00	2	Ficha 1	Sin variación
27-01-00	3	Ficha 1 y ficha 2	No se realiza la ficha 2 porque se necesita consolidar las técnicas de fraccionamiento de la unidad
31-01-00	4	Ficha 2	Desfase de una sesión
01-02-00	5	Ficha 3 o FE nº 1	Solo se realiza la primera tarea. Los alumnos tienen dificultades para expresar el significado del numerador y del denominador
02-02-00	6	Ficha 3 o FE nº 1	Desfase de una sesión
03-02-00	7	Ficha 4	Sin variación
04-02-00	8	Ficha 5 o FE nº 2	Sin variación
07-02-00	9	Ficha 6. Enseñanza de la fracción desde el modelo masa	Sin variación
08-02-00	10	Ficha 7	Los alumnos tienen dificultades para fraccionar en partes iguales cantidades de masa

09-02-00	11	Ficha 7BIS	Se introduce una nueva tarea (ficha 7BIS). Desfase de una sesión
10-02-00	12	Ficha 7	Persisten las dificultades de los alumnos con el modelo masa
11-02-00	13	Ficha 7	Desfase de una sesión
14-02-00	14	Ficha 8. Enseñanza de la fracción desde el modelo superficie	Se amplía el número de tareas de medida de cantidades de superficie. No hay aumento del número de sesiones
15-02-00	15	Ficha 8 ampliada y ficha 9	Se realizan más tareas de medida pero sin aumentar el número de sesiones
16-02-00	16	Ficha 10 y 11.	Solo se resuelve la ficha 10 porque se detectan dificultades para expresar el significado del numerador y denominador
17-02-00	17	Ficha 11 o FE nº 3	Desfase de una sesión. Se decide no realizar la ficha 12 que es una situación de comunicación
18-02-00	18	Ficha 13 Equivalencia de fracciones	Sin variación
22-02-00	19	Ficha 14 y 15	Solo se resuelve la ficha 15 y se propone una nueva ficha 15BIS para reforzar la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada
23-02-00	20	Ficha 15BIS	Desfase de una sesión
24-02-00	21	Fichas 16 y 17. Enseñanza del orden entre fracciones	Sin variación
28-02-00	22	Fichas 18 y 19. La ficha 19 es FE nº 6	Sin variación
29-02-00	23	Ficha 20. Encontrar fracciones intermedias entre dos dadas.	Esta tarea presenta grandes dificultades a los escolares. No hay aumento del número de sesiones
06-03-00	24	Fichas 21 y 22. Enseñanza desde el modelo de cardinalidad	La ficha 21 presenta grandes dificultades a los escolares. No hay aumento del número de sesiones
07-03-00	25	Fichas 23, 24 y 25. La ficha 24 es FE nº 8	Sin variación
08-03-00	26	Ficha 26 y 27. La ficha 26 es FE nº 9	Sin variación

Cuadro VI.4: Balance entre planificación y ejecución del primer foco de investigación en cuarto curso

b) Quinto curso

Fecha	*Sesión*	*Trabajos previstos*	*Balance entre planificación y ejecución Causas de los desfases*
02-11-00	1	Ficha Previa 1 y 2 La Ficha Previa 2 es FE nº 5	Sin variación
03-11-00	2	Ficha previa 3 y 4	Sin variación
06-11-00	3	Ficha Previa 5 y 6 La Ficha Previa 6 es FE nº 7	Se incrementa una sesión para reforzar la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada.
07-11-00	4	Ficha Previa 5 y 6	Desfase de una sesión
09-11-00	5	Ficha 1 y 2. Comienzo de enseñanza de operaciones con fracciones	Sin variación
10-11-00	6	Ficha 3 y 4. La ficha 3 es FE nº 10	Solo se resuelve la ficha 3
13-11-00	7	Ficha 4	Desfase de una sesión
14-11-00	8	Ficha 5 y ficha 5BIS	Se introduce la ficha 5BIS para ampliar los significado a la resta de fracciones
15-11-00	9	Fichas 6 y 6BIS. La ficha 6 es FE nº 11	Sin variación
16-11-00	10	Fichas 7 y 7BIS	Sin variación
17-11-00	11	Fichas 8 y 9 La ficha 8 es FE nº 12	Sin variación
20-11-00	12	Ficha 10 y 11	Sin variación
21-11-00	13	Ficha 12	Se propone una nueva ficha 12BIS para reforzar la estrategia basada en la equivalencia para la división
22-11-00	14	Ficha 12BIS	Desfase de una sesión.
23-11-00	15	Fichas de refuerzo de operaciones con fracciones	Se proponen nuevas tareas de refuerzo. Desfase de una sesión.
24-11-00	16	Fichas 13 o FE nº 13	Sin variación

Cuadro VI.5: Balance entre planificación y ejecución del primer foco de investigación en quinto curso

Estos cuadros muestran que en el Primer foco de Investigación se utilizaron 42 sesiones en lugar de las 33 previstas en la planificación. Las previsiones sufren un incremento del 27%, debido a las siguientes razones:

1. La implementación de la propuesta desde el modelo de longitud ha necesitado dos sesiones más de las inicialmente previstas porque se necesita reforzar la técnica del fraccionamiento en partes iguales de la unidad y porque hemos detectado, en los escolares, dificultades para expresar el significado del numerador y del denominador de la fracción cuando cumplimentan las fichas de trabajo y de evaluación.
2. El modelo masa crea grandes dificultades a los escolares de modo que las dos sesiones previstas se han convertido en 5 sesiones y, a pesar de ello, los alumnos no alcanzan resultados aceptables debido a la deficiente percepción de las cantidades de masa.
3. Para trabajar el modelo de medida de superficie no ha sido necesario aumentar el número de sesiones implementadas porque, aunque se ha dedicado una sesión para realizar nuevas tareas de medida de cantidades de superficie, también se ha suprimido la situación de comunicación (ficha 12) dado que los resultados eran satisfactorios y porque, además, las experiencias anteriores en las que se realizaron dos actividades de comunicación demostraron que hacía falta asignarles mucho más tiempo del previsto.
4. Se ha considerado oportuno introducir una nueva sesión para reforzar la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada porque los escolares de 4º curso tienen dificultades para gestionar la equivalencia de fracciones a nivel simbólico. Cuando estos mismos alumnos, en 5º curso, reciben enseñanza de la equivalencia de fracciones hemos considerado necesario dedicar una sesión más para reforzar la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada. La gestión simbólica de la equivalencia de fracciones plantea serias dificultades a los escolares de estas edades.
5. Se ha reducido en una sesión la implementación de la propuesta didáctica referida al concepto de orden de fracciones al suprimir las tareas de densidad de fracciones porque el conocimiento de la fracción que poseen los escolares de 4º curso no les permite todavía comparar las representaciones fraccionarias en función de las cantidades de magnitud que expresan. Y, por otra parte, la gestión simbólica de la equivalencia de fracciones para encontrar fracciones intermedias entre dos dadas se ha observado inviable para casi todos los alumnos de 4º curso de Educación Primaria.
6. La enseñanza de la fracción desde el modelo de cardinalidad se ha implementado según el plan previsto a pesar de las dificultades detectadas al construir subunidades de la unidad en las tareas de medida.
7. Se ha aumentado en una sesión, de las tres sesiones previstas inicialmente, las dedicadas a repasar y reforzar la equivalencia de fracciones porque se trata de un concepto fundamental para gestionar las operaciones con fracciones.
8. Las 9 sesiones de aula previstas para la enseñanza de las operaciones con fracciones en 5º curso se han convertido en 12 sesiones porque ha sido necesario introducir nuevos problemas para dotar de significado a la resta y a la división de una fracción entre un número natural, y porque se ha constatado que la propuesta inicial precisa de un mayor número de situaciones problemáticas para dotar de significado a las operaciones y para consolidar las técnicas de cálculo operatorio.

Estas razones explican la incorporación de nueve sesiones que se han aumentado a las inicialmente planificadas para el primer foco de investigación.

Segundo foco de investigación

Quinto curso

Fecha	***Sesión***	***Trabajos previstos***	***Balance entre planificación y ejecución Causas de los desfases***
27-11-00	17	Ficha 14. Fracción desde el modelo cociente	Sin variación
28-11-00	18	Ficha 15	Sin variación
29-11-00	19	Fichas 16 y 17 La Ficha 16 es FE nº 14	Sin variación
30-11-00	20	Ficha 18	Sin variación
01-12-00	21	Prueba de evaluación sobre operaciones con fracciones	No se computa esta sesión
04-12-00	22	Ficha 19	Sin variación
05-12-00	23	Fichas 20 y 21	No se resuelve la Ficha 21. Dificultades para encontrar las condiciones iniciales de los repartos
11-12-00	24	Evaluación conjunta de la prueba de evaluación sobre operaciones con fracciones	No se computa esta sesión
12-12-00	25	Ficha 21	Desfase de una sesión. Dificultades al resolver la ficha 21
13-12-00	26	Evaluar la Ficha 21	Desfase de una sesión
14-12-00	27	Fichas 22 y 23. La Ficha 23 es FE nº 15	Buena comprensión del orden. Se adelanta una sesión.
15-12-00	28	Ficha 24. Comienzo de la enseñanza del reparto en varias fases	Sin variación
18-12-00	29	Ficha 25	Sin variación
19-12-00	30	Ficha 26 y 26BIS	Sin variación
20-12-00	31	Fichas 27 y 28 La Ficha 27 es FE nº 16	Buena comprensión de la técnica del reparto en varias fases orden. Se adelanta una sesión
21-12-00	32	Fichas 29 y 30. La Ficha 30 es FE nº 17	Sin variación

09-01-01	33	Fichas 30BIS, 31 y 32	Dificultades para encontrar las condiciones iniciales de los repartos expresados por un número decimal.
10-01-01	34	Ficha 32	Desfase de una sesión
11-01-01	35	Fichas 33 y 34	Dificultades para encontrar las condiciones iniciales de los repartos expresados por un número decimal
15-01-01	36	Ficha 34	Desfase de una sesión

Cuadro VI.6: Balance entre planificación y ejecución del segundo foco de investigación en quinto curso

En el segundo foco de Investigación se utiliza el modelo de cociente partitivo para introducir la Representación Fraccionaria, la Representación Polinómica Decimal y la Notación Decimal. En este foco de Investigación se utilizaron 18 sesiones en lugar de las 16 previstas en la planificación. Las previsiones sufren un incremento del 12,5%, debido a las siguientes razones:

1. La secuencia de enseñanza para introducir la representación fraccionaria como resultado de un reparto igualitario se ha desarrollado según la planificación prevista. Los alumnos de 5º curso no tienen dificultad para simbolizar con una fracción el resultado de repartos que efectúan previamente con materiales manipulativos.
2. La resolución de las tareas de evaluación semántica de la fracción como resultado de un reparto igualitario han necesitado dos sesiones más de las inicialmente previstas debido a la mayor dificultad cognitiva de la tarea de búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto, conocida la fracción que expresa el resultado del mismo.

   La regla para encontrar las condiciones iniciales de un reparto del que se conoce la fracción que expresa su resultado tiene una formulación sencilla. Se podría haber tomado la decisión de informar a los escolares que el numerador de la fracción indica el número de barras de regaliz y que el denominador el número de personas. Sin embargo, nuestra propuesta persigue que los alumnos conjeturen esta regla a partir de la interacción con el modelo de cociente partitivo. Este objetivo es más ambicioso y de mayor riqueza conceptual que la mera memorización de reglas pero también exige de los alumnos poner en juego estrategias que éstos desconocen como la idea de proporcionalidad y es, en ese momento, cuando se manifiestan las dificultades observadas en estas tareas.
3. Las tareas de evaluación semántica de la notación decimal crean dificultades a los escolares, de modo que se han necesitado dos sesiones más de las inicialmente previstas. Como en el caso anterior, las dificultades de los escolares tienen su origen en el desconocimiento de estrategias basadas en la idea de proporcionalidad.
4. La gestión del sistema de representación de la recta numérica para representar gráficamente sobre la recta no resulta fácil a los alumnos. Sin embargo, no ha sido necesario aumentar el número de sesiones para fortalecer esta técnica porque los

alumnos han realizado las fichas de trabajo en sus casas, como la ficha 30BIS, y porque la evaluación conjunta de esta tarea se ha realizado durante varias sesiones de clase posteriores en las que se han aprovechado diversos espacios temporales.

5. Otros contenidos como los procedimientos para obtener la Representación Fraccionaria, la Representación Polinómica Decimal o la Notación Decimal se han enseñado de acuerdo con la planificación y, en algún caso, hemos dedicado menos tiempo del previsto inicialmente. Así:
   a) Los alumnos han aprendido las técnicas del reparto en una fase y en varias fases con facilidad de modo que ha sido posible adelantar en una sesión la planificación inicial referida a la obtención de la Representación Polinómica Decimal.
   b) Los alumnos saben comparar fracciones en el modelo de reparto y esto ha permitido adelantar en una sesión las dos que se habían planificado inicialmente para trabajar la relación de orden de fracciones.

<u>Tercer foco de investigación</u>

Quinto curso

Fecha	*Sesión*	*Trabajos previstos*	*Balance entre planificación y ejecución Causas de los desfases*
16-01-01	37	Ficha 35 o FE nº18. Paso del número decimal a la fracción	Sin variación
17-01-01	38	Ficha 36	Sin variación
18-01-01	39	Fichas 37. Orden entre números decimales	Sin variación
19-01-01	40	Fichas 38 o FE nº 19	Sin variación
22-01-01	41	Fichas 39 y 40 Operaciones con decimales La Ficha 40 es FE nº 20	Sin variación
23-01-01	42	Ficha 41 o FE nº 21	Sin variación
24-01-01	43	Fichas 42 y 43	Sin variación
25-01-01	44	Fichas 44 y 45. La Ficha 45 es FE nº 22	Se adelanta una sesión
26-01-01	45	Fichas 46 y Ficha 47 La Ficha 47 es FE nº 23	Se adelanta una sesión
30-01-01	46	Ficha 48	Sin variación
31-01-01	47	Fichas 49 y 50	Sin variación

Cuadro VI.7: Balance entre planificación y ejecución del tercer foco de investigación en quinto curso

En el tercer foco de Investigación se estudia la Notación Decimal. Desde los modelos de medida y de cociente partitivo se conecta el número decimal con la fracción, y se estudian las relaciones y operaciones con números decimales. En este foco de Investigación se implementaron 11 sesiones en lugar de las 13 previstas en la planificación inicial, debido a las siguientes razones:

1. Los buenos resultados de los alumnos en las tareas de ordenación de decimales.
2. La secuencia de enseñanza para dotar de significado a las operaciones con números decimales ha funcionado bien en la implementación de aula. El objetivo de justificar los algoritmos de cálculo de dichas operaciones no se ha alcanzado en su totalidad, a pesar de que los alumnos aprenden a manejar con rapidez los procedimientos de cálculo con decimales debido a que se asemejan a los de los números naturales.
3. Cumplir los plazos temporales fijados en la programación del Centro para el área de Matemáticas, a pesar de las dificultades observadas en las tareas de conversión entre las notaciones decimales y fraccionarias, principalmente, cuando el número decimal posee más de una cifra decimal. Hemos detectado dificultades en los alumnos para gestionar de forma simbólica las Representaciones Polinómicas Decimales y para simplificar fracciones. No obstante, se ha decido no reforzar la gestión simbólica que permite convertir en fracciones números decimales con tres o más cifras decimales porque abordar este objetivo precisaría períodos de instrucción más dilatados en el tiempo que nuestra implementación de aula no contempla porque nos hemos comprometido a respetar la programación del Centro.

VI.3.2. Tareas diseñadas para recoger información

Las tareas diseñadas para recoger información y obtener datos relacionados con la comprensión del contenido por parte de los alumnos se denominan Fichas de Evaluación, y cuyos resultados se recogen en el Anexo III.1. Cada Ficha está subdividida en varios trabajos parciales, que se denominan tareas. En total son 23 Fichas de Evaluación propuestas en el transcurso de esta Fase de Acción de la Primera Etapa de nuestro trabajo, que permiten estudiar la comprensión de los alumnos sobre cada uno de los contenidos planteados.

Además, se realizan dos pruebas de evaluación final que están pensadas para recoger información sobre la comprensión global de los conceptos presentados en nuestra propuesta. La primera de estas Pruebas, se denomina Prueba del Primer Ciclo, y se aplica a los alumnos que participaron en la experimentación de 4º curso, cuando éstos se incorporan al Colegio como alumnos de 5º curso después de las vacaciones de verano. La segunda Prueba, que se denomina Prueba del Segundo Ciclo, la realizan, un año más tarde, los alumnos que participaron en la experimentación de 5º curso.

VI.3.3. Participación de los alumnos

En la Fase de Planificación de la propuesta curricular que desarrolla nuestra investigación, se señalaba que las estrategias metódicas a utilizar se basan en la realización de tareas individuales, en las exposiciones del profesor y en las discusiones en la clase. Por tanto, la participación de los alumnos en las sesiones de clase juega un importante papel en la construcción de los conocimientos.

La participación de los estudiantes se determina a partir de las actividades o tareas que conforman las Fichas de Trabajo y las Fichas de Evaluación, que realizan a lo largo de las sesiones de clase. En total, son 85 los trabajos de aula controlados en la Primera Etapa y, además, una prueba al concluir el primer ciclo (4º curso) y otra al terminar el segundo ciclo (5º curso). En la Segunda Etapa el número de trabajos controlados es, aproximadamente, el mismo. En el Anexo III se recogen los resultados de las Fichas de Evaluación realizadas por cada uno de los alumnos que participaron en la Experimentación.

En la Primera Etapa de la Experimentación participan 47 alumnos de 4º curso (24 de 4º A y 23 de 4º B), no obstante en nuestro estudio se estudiarán las tareas realizadas por 40 alumnos debido a los siguientes motivos:

1º Las Etapas de la Experimentación se desarrollan con los mismos escolares en dos cursos consecutivos y acontece que 4 alumnos (A41, A42, A43 y A44) abandonan el Centro de Enseñanza antes de comenzar 5º curso, y un alumno (A45) repite 4º curso. En consecuencia, decidimos no evaluar la comprensión de estos cinco alumnos.

2º Dos alumnas (A46 y A47) no asisten de manera regular al aula porque se ausentan de las clases de matemáticas y de algunas otras asignaturas para seguir un programa de adaptación curricular específico. En estas condiciones, estas dos alumnas no participan en el estudio.

3º Al comenzar 5º curso se incorporan al C.E.I.P. "Tío Jorge" cinco alumnos (A48, A49, A50, A51 y A52) que participan en la experimentación. Estos alumnos no han seguido la propuesta de enseñanza implementada 4º curso y, por lo tanto, son excluidos del estudio a pesar de comprenden pronto el significado de la fracción como medida y son capaces de seguir la propuesta didáctica implementada en 5º curso.

En la **Segunda Etapa** de la experimentación participan 20 alumnos del grupo 5º B si bien solo se van a estudiar las producciones de 18 alumnos porque un alumno (B19) cambia de Centro de Enseñanza al comenzar 5º curso y otro alumno (B20) repite 4º curso.

VI.4. Observación de la fase de Acción

En cada una de las sesiones se hace un seguimiento de las actitudes de los alumnos así como de la comprensión que manifiestan sobre los contenidos presentados. Dichas observaciones se recogen en el Diario de Clase que se detalla en el Anexo II. La mayor parte de la información se ha recogido a partir de las tareas propuestas a los alumnos, que están clasificadas en dos tipos: Fichas de Trabajo y Fichas de Evaluación.

Cada una de las Fichas de Evaluación se presentan y se comentan singularmente en el Capítulo VII. Ahora procedemos a realizar una reflexión global sobre la comprensión que muestran los escolares, tomamos como punto de partida las observaciones y comentarios surgidos en la Primera Etapa de la Investigación. Además, en los casos que se consideren relevantes, se incluyen aportaciones de la fase de Acción de la Segunda Etapa.

Además de las tareas realizadas por los escolares valoramos las interacciones didácticas observadas durante las sesiones que fueron grabadas en audio y vídeo. Para estructurar esta información se utilizarán las correspondientes Unidades de Análisis que fueron definidas en el Capítulo IV. Esta información está expuesta en el apartado VI.4.2.

VI.4.1. Sobre las tareas realizadas

Seguidamente presentamos las diferentes tareas realizadas junto con las observaciones más significativas que han surgido durante el proceso de su realización por los escolares. Estas observaciones proporcionan indicaciones de algunas de las cuestiones más relevantes detectadas en el proceso de construcción del conocimiento sobre el número racional positivo por parte de los alumnos, y que se analizarán con mayor detalle en el próximo capítulo.

Para describir el desarrollo de las actividades realizadas al implementar la Propuesta Didáctica hemos decidido agrupar en un solo epígrafe todas las Fichas de Trabajo que se refieren a un mismo contenido, haciendo una valoración global de todas las Fichas y mencionando los aspectos concretos más interesantes referidos a la comprensión que muestran los alumnos al realizar las Fichas.

VI.4.1.1. Observación sobre las Fichas de Trabajo del Primer Foco de Investigación (cuarto curso)

Fichas 1, 2, 3 , 4 y 5

• Los modelos de aprendizaje que proponemos inicialmente para la enseñanza de la fracción se basan en la acción de medida. Sin embargo, la actividad de medir es desconocida para los escolares y necesita ser enseñada. Por este motivo, hemos destinado nueve sesiones para realizar actividades de medida que se concretan en el reconocimiento de las magnitudes implicadas y estudio de las fases que comporta todo proceso de medida.

• La situación de comunicación que se plantea en la Ficha nº 1 funciona bien y permite introducir la fracción como resultado de la medida de una cantidad de longitud en un contexto problemático y socialmente útil. Esta Ficha plantea el problema de la medida de una cantidad de longitud que no puede ser resuelto con la estructura numérica del natural: la fracción surge en el aula como solución de un problema de la medida que, en cierto modo, reproduce la génesis histórica del número racional.

En este momento incipiente del proceso de enseñanza los alumnos desconocen la representación simbólica de la fracción; sin embargo, son capaces de medir la longitud de la barra. Por ejemplo, la alumna B18, de la Segunda Etapa mide correctamente la barra y, a pesar de que no utiliza la representación simbólica escrita de la fracción, comprende la idea de fracción porque escribe:

Deseo recibir en mi domicilio una barra de cortina que mida una longitud de "3 cuartos" de unidad.

Esta alumna argumenta del siguiente modo:

P.D. Le voy a decir cómo he realizado la medida de la longitud de la barra:

1º He doblado la unidad en 4 partes.
2º He colocado la barra encima de
la unidad 3º Me he fijado en que
la barra media 3 partes de las que
habia doblado 4º Por lo que la barra
mide 3cuartos de unidad

Gráfico VI.2. Parte de la Ficha de Trabajo Nº 1 del Primer Foco de Investigación

• Los alumnos no intuyen un aspecto previo y fundamental para la construcción de la fracción: *la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad de medida*. Los alumnos no sugieren fraccionar, en partes iguales, la unidad a pesar de que comprenden la importancia de la unidad de longitud en las acciones de medida. Son muy pocos los alumnos que proponer fraccionar la unidad en partes iguales cuando reciben la siguiente ayuda del profesor: "recordad que lo único que tienen en común el comprador y el vendedor, para ponerse de acuerdo, es la unidad de medida".
Dado que los escolares no intuyen la necesidad del fraccionamiento en partes iguales de la unidad el Equipo Investigador propone modificar, en la Segunda Etapa, el enunciado de la ficha de modo que los alumnos miden un listón de cantidad de longitud 1/2 unidad antes que abordar la medida de otro listón de longitud 3/4 de unidad.

• La decisión de comenzar la enseñanza con el modelo de medida de longitud (ML) ha sido acertada porque los objetos que se utilizan desde este modelo facilitan la percepción visual de la cantidad de magnitud. En efecto, se miden listones de madera y los objetos que consideramos como unidad son cañas de plástico y tiras de papel de, aproximadamente, un metro de longitud porque su carácter unidimensional facilita la percepción de la cantidad.

• Los alumnos utilizan, con facilidad, el fraccionador para fraccionar la unidad en partes iguales. Sin embargo, hemos constatado que el manejo de las técnicas de fraccionamiento de la unidad y la construcción de subunidades requiere un período temporal más prolongado del previsto inicialmente, y que obligaría a ampliar en una sesión de clase el período de implementación de la Propuesta Didáctica.

• En relación con la gestión del material, los alumnos disponen de subunidades de plástico de diferentes longitudes, que están roturadas y agrupadas por tamaños. Esta disposición del material facilita la actividad de medida pero plantea obstáculos didácticos porque ocasiona una desconexión conceptual entre las subunidades roturadas y separadas en cajas y la unidad de medida. Para evitar este obstáculo el Equipo Investigador propone, en la Segunda Etapa, abandonar las cañas de plástico y utilizar, como unidad, tiras de papel que los escolares deben fraccionar para construir nuevas subunidades en cada actividad de medida. De esta manera, se espera reforzar la relación entre el tamaño de las subunidades y el tamaño de la unidad de medida.

• La idea de la equivalencia de fracciones aparece, de modo natural, en las primeras tareas de medida realizadas desde el modelo de longitud, ML. Los alumnos aceptan, sin ninguna reticencia, que la medida de una misma cantidad de longitud se puede efectuar con distintas subunidades. Por ejemplo, en la ficha nº 3, cuando los alumnos miden un listón de longitud 5/4 unidades, una tercera parte de los alumnos de la Primera Etapa aportan como resultado de la medida la fracción 10/8 unidades.

• El modelo de medida de longitud, ML, favorece la construcción de ideas abstractas porque los alumnos disponen de una herramienta que, mediante la interacción con el mundo de los objetos, les facilita la construcción mental de conceptos matemáticos como el de la equivalencia de fracciones. Así lo sugiere la explicación dada por una alumna A09 cuando justifica que 5/4 y 10/8 expresan la misma cantidad de longitud:

"*son iguales porque un subunidad de* $\frac{1}{4}$ *es lo mismo que 2 subunidades de* $\frac{1}{8}$*, y que por lo tanto si el listón mide 5 de un cuarto también mide el doble (10) de un octavo*"

• Desde el modelo sustentado por la magnitud longitud, ML, el hecho de que la cantidad a medir sea mayor o menor que la unidad de medida apenas modifica las acciones de medida y, por lo tanto, las fracciones propias e impropias aparecen en el mismo contexto y poseen el mismo significado.

• Los alumnos encuentran con facilidad la fracción que expresa la cantidad longitud en las tareas de medida. Sin embargo, los alumnos tienen dificultades para expresar, con palabras adecuadas, los significados del numerador y denominador de la fracción. Era previsible que estas dificultades aparecieran en los momentos iniciales de la secuencia de enseñanza dado que, además, la metodología de la propuesta no prevé la memorización de determinadas frases para que los alumnos las reciten cuando sean preguntados por los significados del numerador y denominador. La metodología que se sigue en esta propuesta es incompatible con tal proceder: resulta más enriquecedor para los alumnos, aunque también más complejo, que sean éstos los que realicen una interpretación personal del papel que juegan los términos de la fracción.

Así, podemos observar la variedad de respuestas que dan los alumnos de la Primera Etapa para expresar el significado del denominador:

"*veces en las que se corta la caña, paja, ... o sea cualquier material*" (A09)
"*número de trozos que se han partido de la unidad*" (A10)
"*el denominador indica de que tamaño son las subunidades*" (A11)
"*la medida de las pajitas (subunidades)*" (A15)

• En la Ficha nº 5 proponemos tareas de evaluación semántica que consisten en construir una cantidad de longitud a partir del conocimiento de la representación simbólica de la fracción. Al resolver esta ficha, se detectan dificultades en los alumnos al interpretar los términos de la fracción, pero también observa una evolución favorable en las respuestas que aportan, de modo que los porcentajes de éxito mejoran conforme van resolviendo tareas.

• Los alumnos saben construir la cantidad de magnitud longitud a partir del conocimiento de la representación simbólica de la fracción, aunque el porcentaje de acierto desciende si se compara con los de las tareas de medida.

Fichas 6, 6BIS y 7

Estas fichas se proponen a los alumnos después de que la idea de fracción se haya trabajado en el modelo, ML, sustentado en la magnitud longitud. La intencionalidad de las tareas propuestas es promover la transferencia de significados entre el modelo longitud (ML) y el modelo masa (MM). Por este motivo, la formulación de las Fichas es similar a los enunciados de las tareas del modelo ML, tal y como puede observarse en el enunciado de la Ficha 6BIS:

La bisagra pesa ________ de unidad

¿Qué indica el numerador de la fracción? ___________________________________

¿Qué indica el denominador de la fracción? __________________________________

Gráfico VI.3. Tarjeta de la Ficha de Trabajo Nº 6BIS del Primer Foco de Investigación

• En la Ficha 6, la que inicia el trabajo en el modelo MM, los alumnos se han sentido inicialmente desconcertados porque no perciben la necesidad de fraccionar la unidad de medida, la pastilla de plastilina, en partes iguales. Cuando se les ha sugerido aplicar el fraccionamiento en partes iguales la tarea se ha desarrollado sin mayores dificultades. En las Fichas siguientes los alumnos se sienten más identificados con el modelo y, en consecuencia, comprenden mejor los enunciados de las tareas.

• En el modelo masa MM los objetos utilizados influyen notablemente en la realización de la tarea. En efecto, el hecho de pesar objetos compactos, como la bisagra, obliga a los alumnos a fraccionar la unidad, la pastilla de plastilina; mientras que la tarea de pesar una objeto fraccionable, como una bola de plastilina, induce a muchos alumnos a fraccionar el objeto a pesar, en lugar de la unidad de medida.

• La magnitud masa resulta más compleja de gestionar por parte de los alumnos porque las percepciones visuales, que les resultaban muy útiles en el caso de la longitud, se muestran ahora ineficaces. La forma de la unidad de medida condiciona fuertemente el rendimiento de los alumnos: cuando la unidad de medida tiene forma rectangular los alumnos obtienen mayores porcentajes de éxito porque son capaces de realizar sobre la superficie de la pastilla de plastilina fraccionamiento adecuados siguiendo pautas visuales; pero si la unidad tiene formas irregulares el fraccionamiento se torna complejo.

• El trabajo con el modelo MM establece diferencias entre las fracciones propias e impropias en el momento de resolver las tareas. Hemos constatado que en el caso de las fracciones impropias los alumnos aplican estrategias aditivas que les facilitan la tarea; así para pesar el tira-cordón (5/4 de unidad) lo hacen con dos bolas de plastilina: una es la unidad y la otra es parte de la unidad, que pesan correctamente. También hemos constatado que en el caso de fracciones propias, como es el caso de la bisagra (7/8 de unidad), los alumnos aplican una estrategia sustractiva que les crea mayores dificultades: consiste en pesar la bola de plastilina que añadida a la bisagra pesa lo mismo que la unidad.

• En el modelo MM, del mismo modo que ocurría en el modelo ML, el rendimiento de los alumnos desciende en las tareas de evaluación semántica de la fracción si se comparan con las tareas de medida directa. Las dificultades observadas en las tareas de evaluación semántica de la fracción, desde el modelo MM, se ven agravadas debido a las peculiaridades de la magnitud masa; sirva de ejemplo el caso de la alumna A15, que había contestado correctamente a las preguntas sobre el significado de los términos de la fracción para la magnitud longitud, y que ahora muestra escasa comprensión con el modelo MM:

Profesor:	"*¿en cuántas partes fraccionaríais la unidad para obtener una bola que pesara 7/6?*"
Alumna A15:	"*fraccionaría la unidad en 7 partes iguales, porque hay que fraccionarla en tantas partes como indica el número mayor*"

• Contrariamente a los presupuestos iniciales que alentaron la propuesta didáctica, no se ha constatado que los conocimientos adquiridos por los alumnos mediante las experiencias con la magnitud longitud se transfieran al modelo en el que se trabaja con la magnitud masa. O, dicho de otra parte, cabe el presupuesto de que las experiencias previas con la longitud sean insuficientes para que los alumnos puedan hacer la transferencia de significados de la fracción como resultado de la medida de la masa. O bien, hay que suponer que las capacidades cognitivas de los alumnos de 4º curso desaconsejan utilizar el modelo MM en la introducción de las fracciones porque crea más obstáculos que beneficios para el aprendizaje.

• Como consecuencia de las reflexiones derivadas de la experimentación, en la **Segunda Etapa**, el Equipo Investigador decidió suprimir el modelo MM, sustentado en la magnitud masa, e incrementar las tareas en los modelos que utilizan las magnitudes longitud y superficie.

Fichas 8, 9, 10, 11 y 12

Las tareas que se propone a los alumnos a través de estas Fichas se dirigen a consolidar el significado de la fracción como medida para la magnitud superficie. Se trata, por tanto, de ampliar el significado que los alumnos conocen en el caso de los modelos de longitud y de masa a un nuevo modelo en el que se ponen en juego peculiaridades de una magnitud diferente, pero en el que permanecen los aspectos conceptuales de la notación fraccionaria.

Corresponde al profesor enunciar las tareas y proporcionar a los alumnos tanto la unidad de medida, un cuadrado de papel blanco, como la cantidad a medir, unas cartulinas de colores. El trabajo del alumno es similar al desarrollado en los modelos anteriores, como se pone de manifiesto en la siguiente tarjeta de la Ficha 10:

1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

________ de unidad

2º. ¿Cómo se lee la fracción? ____

3º. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ______________________________

4º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? ____________________________

Gráfico VI.4. Tarjeta de la Ficha de Trabajo Nº 10 del Primer Foco de Investigación

• El modelo de medida con la magnitud superficie, MS, se ha mostrado de más fácil gestión por parte de los alumnos que el modelo de masa MM. Pensamos que para estos alumnos las percepciones visuales y la facilidad de manipulación de los objetos son elementos que facilitan el trabajo en este modelo; es, por tanto, un modelo acorde con las capacidades de los alumnos de 4º de Educación Primaria.

• Los alumnos admiten, con cierta naturalidad, el hecho de que la misma cantidad de superficie tenga formas diferentes. Pensamos, por tanto, que el modelo MS ofrece mayores posibilidades que el modelo ML para asociar la fracción al resultado de la medida, por cuanto el alumno puede percibir que lo esencial de la medida es la cantidad y no la forma. En este sentido cabe destacar la riqueza que aportó la Ficha 9 por cuanto aparecieron resultados muy variados y de una gran creatividad cuando los escolares construyeron libremente figuras geométricas, denominadas manteles, de superficie 1/4 de unidad.

• En este modelo aparecen de forma natural ideas sobre la equivalencia de fracciones en tanto en cuanto el resultado de la medida de una misma cantidad de superficie la expresan los alumnos de formas diferentes; sin que ello cree dificultades de comprensión entre sus compañeros, quienes aceptan sin ninguna reticencia que la medida se puede efectuar con distintas subunidades.

• El modelo MS aporta algunas ventajas, relativas a la comprensión, respecto a la forma en que se gestionó el modelo ML. En el modelo ML los alumnos disponían de subunidades ya construidas, en el caso de las pajas de refresco, o bien disponían de un instrumento que facilitaba la construcción de subunidades; mientras que en el modelo MS los alumnos tienen que construir las subunidades que van a emplear, lo que refuerza la relación entre el tamaño de éstas y el tamaño de la unidad de medida; además, los alumnos obtienen subunidades de igual tamaño y formas diferentes, lo que les permite constatar que la manera de cubrir la cantidad a medir depende de la forma de las subunidades, aunque el número de ellas que se necesitan sea independiente de la forma que tienen.

• El trabajo en el modelo sustentado por la magnitud superficie, MS, coloca en plano de igualdad los resultados de tareas referidas a fracciones propias e impropias, pues los alumnos obtienen la medida de cualquier cantidad de superficie con independencia de que sea mayor o menor que la unidad de medida.

• Aún cuando la mayor parte de los alumnos utilizan estrategias aditivas para determinar la medida de una cantidad de superficie, aparecen también estrategias sustractivas. Así ocurre en la tarea 3 de la Ficha nº 8 en cuya resolución hay alumnos que dan respuestas del tipo

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

mientras que otros alumnos aportan la solución

$$\frac{4}{4}-\frac{1}{4}$$

• Los alumnos, como demostraron al trabajar con el modelo de longitud, resuelven más fácilmente las tareas de expresar con una fracción el resultado de la medida de cantidades de superficie, que las de construir una cantidad de superficie a partir del conocimiento de la fracción. Este hecho hay que tomarlo en consideración en el momento de valorar la propuesta didáctica y tomar decisiones sobre la cantidad y contenido de las tareas de evaluación semántica de la fracción.

• La notación simbólica tiene mayores dificultades para los alumnos de las que se presuponían al diseñar la Propuesta Didáctica. En efecto, los alumnos son capaces de medir una cantidad de superficie y de expresar oralmente el resultado de la medida; sin embargo, no muestran seguridad en el momento de simbolizar tal resultado con una fracción:

Profesor: *¿cuánto mide el mantel?*
Alumno A37: *tres subunidades de tamaño media unidad.*
Profesor: *¿cómo se escribe ese resultado?*
Alumno A37: *se pone 2/3 de unidad.*

Ante la reiteración de respuestas de este tipo nos preguntamos si el origen de las dificultades de los alumnos en la simbolización de las acciones radica en una comprensión incompleta o escasa, o si se debe a obstáculos epistemológicos ocasionados por la consideración conjunta de los tres objetos que intervienen y de la relación que se ha convenido establecer entre ello: la unidad, la subunidad que se construye y el objeto a medir.

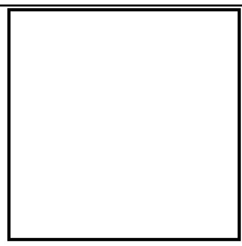
• Inicialmente se contemplaba en la Propuesta Didáctica una actividad de comunicación para que los alumnos realizasen conjuntamente las tareas de expresar el resultado de la medida mediante una fracción y de evaluar semánticamente una expresión fraccionaria. Sin embargo, el Equipo Investigador decidió suprimir la Ficha de trabajo nº 12 por tres razones principales:

1. La experiencia anterior en la que se realizaron dos actividades de comunicación demostraron que su implementación requería asignar mucho más tiempo del previsto.
2. Los resultados obtenidos en las tareas relativas al modelo MS se pueden calificar de satisfactorios, por lo que no resulta imprescindible realizar la prevista Ficha 12 con la magnitud superficie.
3. La temporalización de la secuencia de enseñanza lleva un retraso considerable debido fundamentalmente a las dificultades que los alumnos han tenido con la magnitud masa.

• En la **Segunda Etapa**, y como consecuencia de que el Equipo Investigador decidió suprimir el modelo sustentado en la magnitud masa, se realizaron nuevas tareas en el modelo de superficie. Los resultados obtenidos en las nuevas tareas fueron superiores a los obtenidos en las tareas anteriores, lo que pondría de manifiesto que el grado de comprensión de los alumnos se incrementa con la resolución de un mayor número de tareas, pues ello favorece la familiarización con el modelo de aprendizaje y favorece la correcta utilización del lenguaje simbólico. Se pone de manifiesto, en suma, que el concepto de fracción tiene dificultades de comprensión y que la adquisición de este concepto exige una dilatada experiencia de hacer abstracciones a partir de la manipulación de objetos.

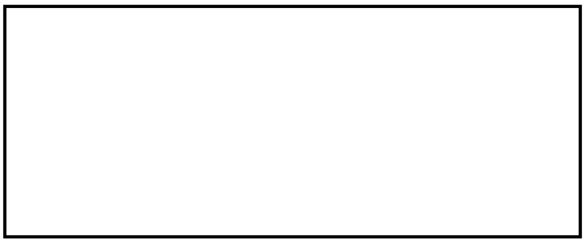
La supresión de las sesiones dedicadas a la magnitud masa permite introducir nuevas tareas y, en particular, proponer dos nuevas Fichas de Trabajo que combinan tareas de medida y de evaluación semántica de la fracción y que, además, fomentan la utilización de las representaciones gráficas por parte de los alumnos. Mostramos la primera y tercera pregunta de la Ficha que utiliza la magnitud superficie:

Si la unidad de superficie es:



PRIMERA PREGUNTA:

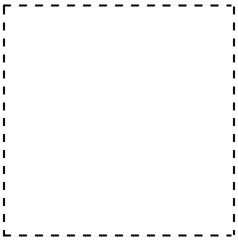
Expresa, con una fracción, la superficie de la siguiente figura:



SOLUCIÓN: *Mide* ___ *de la unidad*

TERCERA PREGUNTA:

Dibuja una figura cuya superficie sea $\frac{5}{4}$ de unidad



Explica que has hecho para dibujar la figura: ____________________

Gráfico VI.5. Parte de la Tarjeta de la Ficha de Trabajo Nº 12 del Primer Foco de Investigación

En efecto, para resolver esta ficha los alumnos pueden utilizar, si lo desean, papeles que tengan forma cuadrada y cuya cantidad de superficie sea la unidad; pero también pueden realizar fraccionamientos de la unidad sobre el soporte gráfico de la figura cuadrada que expresa la unidad de superficie.

Fichas 13, 14 y 15

En este conjunto de Fichas quedan recogidas todas las tareas propuestas a los alumnos sobre el concepto de equivalencia de fracciones y sobre la formulación de una regla que facilite la tarea de encontrar fracciones equivalentes a una dada.

El profesor, de acuerdo con la metodología establecida, enuncia a los alumnos las tareas que deben realizar y facilita los materiales que demanden éstos. Desde el punto de vista de la investigación preocupa tanto la formulación del resultado, como el modo en que se ha logrado; en consecuencia, las Fichas de trabajo tienen una estructura similar a la Ficha de Trabajo nº 13 que mostramos a continuación:

Una fracción equivalente a $\frac{6}{4}$ de unidad es: ___________ de unidad.

A) *Si has utilizado materiales* contesta las siguientes preguntas:

1. He construido un objeto de medida $\frac{6}{4}$ de unidad.

La unidad que utilizo es: ____

2. He fraccionado la unidad en _________________________________ subunidades

3. He completado la medida del objeto con ________________________ subunidades

B) *Si has obtenido la fracción equivalente de otra forma, sin utilizar materiales*, explica como lo has hecho: ____

Gráfico VI.6. Parte de la Tarjeta de la Ficha de Trabajo Nº 13 del Primer Foco de Investigación

• La formulación de la tarea ha tenido mayores dificultades de interpretación que los enunciados de tareas precedentes debido, principalmente, a la existencia de mayor cantidad de texto. Esta situación ha exigido que el profesor se extendiese en las explicaciones con la finalidad de clarificar el enunciado de la tarea.

• Los escolares han encontrado fracciones equivalentes a la dada: 3/2, 9/6 y 12/8, que son fracciones cuyos numeradores y denominadores son menores y mayores que los de la fracción dada; lo que hace presuponer que los alumnos admiten, de forma natural, que se puedan utilizar subunidades menores o mayores que las utilizadas en el enunciado, 1/4. El alumno A28 da como respuesta 48/32, pero al pedirle el profesor que justifique su respuesta en el modelo no sabe hacerlo, simplemente dice que conoce una forma de hacerlo. También es destacable la respuesta de la alumna A31 que señala como equivalente 15/10, respuesta en la que no ha seguido la pauta de sus compañeros de buscar subunidades de tamaño la mitad de las anteriores.

• Los alumnos encuentran de forma muy mayoritaria, sus respuestas utilizando los materiales de los modelos de medida. Sin embargo, el uso que hacen de los mismos es muy distinto: el más utilizado ha sido el modelo ML posiblemente porque encuentren más facilidades en la gestión de la longitud; mucho menos utilizado ha sido el modelo MS; y el modelo menos utilizado por los alumnos ha sido el MM, presumiblemente porque este modelo les resulte el más difícil de gestionar.

• El éxito obtenido con la gestión de los modelos ha sido muy dispar, constatándose que los alumnos que utilizan el modelo de masa no concluyen las tareas, y que los alumnos que utilizan el modelo de superficie obtienen resultados iguales o mejores que los que utilizan el modelo de longitud.

• Es de reseñar que tan solo 3 alumnos, que representa el 7,5% de los participantes, han llegado a enunciar fracciones equivalentes utilizando razonamientos basados en la relación entre el tamaño de las subunidades utilizadas y el número de ellas que se necesitan para alcanzar la misma cantidad de magnitud. Que sea tan pequeño el número de alumnos capaces de buscar argumentos abstractos indica que estamos en una posición fronteriza en las exigencias de este tipo de tareas; es decir, aun son muy escasos los alumnos que no dependen de las manipulaciones con los objetos, pero sus compañeros están muy cercanos a este tipo de argumentación.

• La tarea de encontrar fracciones equivalentes a una dada sin utilizar objetos físicos resulta compleja a los alumnos de 4º curso. Aun cuando es pequeño el número de alumnos que resuelven a nivel simbólico la búsqueda de fracciones equivalentes a una dada, los alumnos que lo logran tienden a utilizar estrategias aditivas, estrategias que son asumidas y establecidas como normas formales:

Profesor: *dime una fracción equivalente a 4/6.*
Alumno A36: *(escribe) 10/12*
Profesor: *¿cómo la has obtenido?*
Alumna A36: *he añadido 6 al numerador y al denominador*

• Era propósito de la investigación que todos los participantes llegasen a enunciar alguna regla para la búsqueda de fracciones equivalentes a una dada como la que se propone en la Ficha 15. Sin embargo, tal exigencia se ha mostrado inadecuada para las capacidades de estos alumnos, es una exigencia que desborda su desarrollo cognitivo. En efecto, los alumnos no entienden la exigencia de la tarea y piden explicaciones al profesor sobre el término "regla". Pero una vez que el profesor ha explicitado el sentido de la tarea, la mayoría de los alumnos no comprenden la necesidad de enunciar una regla de carácter simbólico porque entienden la tarea como una explicación de las manipulaciones que hay que realizar en el modelo para encontrar fracciones equivalentes.

• Determinadas habilidades, como observar coincidencias y diferencias, buscar regularidades, formular conjeturas, someter a prueba las conjeturas, etc., son inexistentes o de baja calidad en la mayor parte de los alumnos de 4º curso.

• En el trabajo de formulación de una regla para encontrar fracciones equivalentes se sugiere que el razonamiento, basado en las experiencias manipulativas de los alumnos, se sustente en los modelos ML y MS, pues las magnitudes implicadas en ellos se han mostrado de más fácil manejo por parte de los alumnos.

• Queda por estudiar la influencia que la introducción de estrategias de representación gráfica en el proceso de enseñanza de fracciones equivalentes ejerce en el desarrollo conceptual de los alumnos, en el sentido de propiciar el salto hacia estrategias de resolución más abstractas y, por lo tanto, más alejadas de los modelos manipulativos. En orden a facilitar el tránsito de las manipulaciones con objetos tangibles a la gestión de símbolos nos parece oportuno proponer a los alumnos el uso de representaciones gráficas similares a la siguiente:

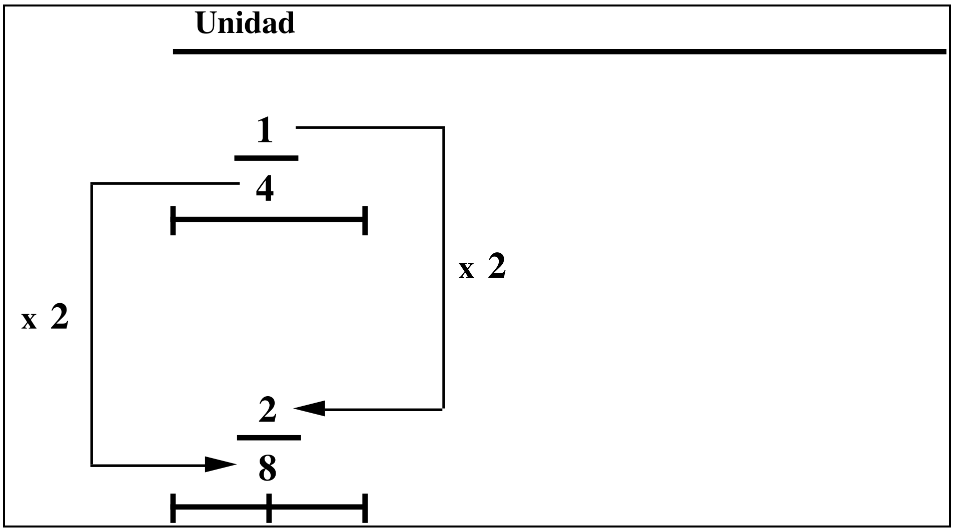


Gráfico VI.7. Representaciones gráficas para ejemplificar la equivalencia de fracciones

Y, además, se recomienda una intervención del profesor en términos similares a los siguientes:

> *Hemos visto que algunas fracciones equivalentes a* $\frac{1}{4}$ *son:*
>
> $$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{8}{32} = \frac{16}{64}$$
>
> *Recuerda que* $\frac{2}{8}$ *de unidad es equivalente a* $\frac{1}{4}$ *de unidad, porque si partes por la mitad una subunidad de longitud* $\frac{1}{4}$ *de unidad tienes el DOBLE de subunidades que ahora son la MITAD de pequeñas, es decir, de longitud* $\frac{1}{8}$ *de unidad.*

• En la **Segunda Etapa**, y como consecuencia de la reflexión sobre las observaciones realizadas en la fase de Acción, el equipo investigador incorpora a las tareas de los alumnos actividades relacionadas con la búsqueda de fracciones equivalentes, actividades que se presentan con el soporte gráfico de las características indicadas en el epígrafe anterior.

En consecuencia, se introducen nuevas Fichas para reforzar la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada que contienen tareas como las que se indican:

Encuentra el numerador o el denominador de la fracción para que sean equivalentes las siguientes fracciones:

a)

$$\frac{1}{3} \underset{\times 2}{=} \frac{\square}{6}$$

b)

$$\frac{3}{9} \overset{:\ 3}{=} \frac{1}{\square}$$

Gráfico VI.8. Nuevas tareas sobre la equivalencia de fracciones en la Segunda Etapa

Fichas 16, 17, 18, 19, 20 y 21

Las tareas que se proponen en este grupo de Fichas tienen la finalidad de introducir la comparación de fracciones como comparación de cantidades de longitud o de superficie, y gestionar el orden entre fracciones a nivel simbólico. Asimismo, se contemplan tareas de intercalar fracciones entre otras dos dadas, con la intencionalidad de que los alumnos avancen en el conocimiento de la estructura topológica del número racional, claramente diferenciada de la del número natural.

En las Fichas de trabajo 16, 17, 18 y 19 se plantean tareas de comparación de fracciones. Todas ellas tienen una estructura similar, por lo que mostramos la tarjeta de la Ficha nº 18:

He comprado dos tuercas: una tiene un diámetro $\frac{3}{8}$ de pulgada y otra es de $\frac{1}{2}$ pulgada.

¿Qué tuerca es la que tiene menor diámetro?

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para ordenar las fracciones.

- ☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ______________________
- ☐ He utilizado el siguiente dibujo:
- ☐ He realizado el siguiente razonamiento: __________________________

Gráfico VI.9. Tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 18 de la Primera Etapa

Las tareas de localizar fracciones entre dos dadas se proponen en las Fichas nº 20 y nº 21. Mostramos las preguntas de la Ficha nº 21:

PRIMERA PREGUNTA:

Ordena las fracciones $\frac{3}{2}$ *y* $\frac{7}{8}$ *de unidad*

SOLUCIÓN: La fracción $\frac{7}{8}$ es _______________ que $\frac{3}{2}$, porque:

SEGUNDA PREGUNTA:

Encuentra OCHO fracciones que estén comprendidas entre $\frac{7}{8}$ *y* $\frac{3}{2}$ *de unidad.*

Fracción

1º____________ porque ____

Gráfico VI.10. Tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 21 de la Primera Etapa

• Las tareas de comparación de fracciones que tienen iguales los denominador o los numeradores no presentan excesivas dificultades a los alumnos. Es de destacar que en la comparación de estas fracciones los alumnos que recurren al uso de materiales es significativamente menor que quienes utilizan representaciones gráficas o argumentan sobre el tamaño de las fracciones sin necesidad de soportes físicos. Se pone de manifiesto que la economía de tiempo para resolver las tareas, es un potente motor que los alumnos utilizan para sustituir las manipulaciones de objetos físicos por el uso de argumentos lógicos. Y también se pone de manifiesto que las capacidades de los alumnos presentan grados de desarrollo muy diferente: mientras hay alumnos que necesitan la manipulación, hay otros que trabajan con objetos evocados a través de representaciones gráficas, hay otros alumnos que son capaces de construir razonamientos basados en el significado de las representaciones simbólicas.

• Conviene destacar el éxito de los alumnos y la gran variedad de estrategias utilizadas cuando comparan fracciones de igual denominador o igual numerador. Es llamativo el hecho de que los alumnos que utilizan los objetos físicos tengan un éxito menor que quienes recurren a utilizar representaciones gráficas o razonamientos lógicos. Estas observaciones nos permiten avanzar en el modo en que los alumnos alcanzan niveles más altos de comprensión de las ideas matemáticas: los alumnos que tienen nivel de comprensión bajo necesitan alcanzar sus resultados mediante percepciones visuales, aunque el éxito alcanzado sea muy bajo porque existen lagunas en la formación de sus ideas; mientras que los alumnos con comprensión alta no necesitan las percepciones visuales para resolver con éxito las tareas.

• Las representaciones gráficas juegan un papel intermedio entre el mundo físico y el mundo de las ideas matemáticas. Pero como representaciones gráficas cumplen las condiciones exigibles a los sistemas de representación; por lo tanto, una buena gestión de las mismas exige un buen dominio de las características sintácticas y semánticas de este sistema de representación. De este modo se explica que los alumnos que utilizan como estrategia las representaciones gráficas tengan menor éxito que quienes utilizan las argumentaciones lógicas. Sirva esta reflexión para alertar sobre la conveniencia de hacer un tratamiento educativo adecuado de las representaciones gráficas; es decir, la gestión de las representaciones gráficas no es tan nítido para el alumno como el profesor presupone y, en consecuencia, el uso de las representaciones gráficas debe abordarse desde el mismo plano instructivo que se hace con otros sistemas de representación.

• El enunciado de la Ficha nº18 hizo reflexionar al Equipo Investigador sobre la necesidad de adaptar el contexto de los enunciados a entornos con los que esté familiarizado el alumno; de lo contrario estamos suponiendo que hacen trasferencias en el mundo de la medida que no son tan sencillas como se presupone y que desvían la atención del alumno. En el enunciado de esta Ficha se menciona las palabras tuerca, diámetro y pulgada y, ante el desconcierto de los alumnos, el profesor tuvo que hacer una intervención pública mostrando un dibujo de una tuerca y la medida que indicaba el diámetro. Pero, a pesar de estas aclaraciones, algunos alumnos tuvieron dificultades ocasionadas por el contexto en el que se estaba formulado el problema.

• En la tarea de comparación de fracciones que tienen distintos los numeradores y los denominadores los alumnos obtienen tasas de éxito superiores al 50%. La estrategia mayoritaria consiste en utilizar la idea de fracción con la ayuda de representaciones gráficas. Otra estrategia más minoritaria consiste en descomponer cada una de las fracciones que tienen que comparar en dos fracciones que le faciliten la tarea; así, en el caso de comparar 5/4 y 4/3 las descomponen, respectivamente, en 1+ 1/4 y 1+1/3, lo que permite reducir la tarea a la comparación de las fracciones 1/4 y 1/3.

• Es de destacar que ninguno de los alumnos haya utilizado la equivalencia de fracciones para comparar fracciones con numeradores y denominadores diferentes. De nuevo se pone de manifiesto que para estos alumnos es comprensible la idea de fracción, pero les resulta muy dificultoso utilizar las fracciones equivalentes conectadas a otros conocimientos sobre fracciones.

• Estaba prevista, en la propuesta inicial, realizar algunas tareas de localizar fracciones entre dos dadas, con la intención de que los alumnos se iniciasen en la estructura topológica del número racional, que difiere sustancialmente de la del número natural. El enunciado de la tarea supuso un cierto desconcierto entre los alumnos porque no alcanzaban a entender las exigencias de dicha tarea y, en consecuencia, el profesor se vio en la necesidad de intervenir para explicar el contenido de la propuesta de trabajo.
A pesar de las intervenciones del profesor, el éxito alcanzado por los alumnos es muy bajo, lo que indica que la tarea supera las capacidades cognitivas de los alumnos, debido a las siguientes razones:

1º Las tareas que tratan la densidad respecto al orden de fracciones se presentan descontextualizadas, lo que aleja a los alumnos de los modelos de aprendizaje.

2º Los alumnos no asocian la tarea con la utilización de fracciones equivalentes a las dadas con denominadores (o numeradores) iguales.

3º El nivel de exigencia de las tareas implica capacidades cognitivas que no están al alcance de la mayor parte de los alumnos de 4º curso.

• En la **Segunda Etapa**, y como consecuencia de la reflexión sobre las observaciones realizadas en la fase de Acción, el Equipo Investigador decide suprimir de la Propuesta las tareas relacionadas con la densidad respecto del orden de los números racionales.

Fichas 22, 23, 24, 25, 26 y 27

El significado de medida de la fracción ofrece perspectivas diferenciadas si se utilizan magnitudes continuas o discretas. Este grupo de Fichas se refieren a la medida de cantidades de magnitudes discretas. Las Fichas de trabajo son de dos tipos: de construcción de la representación fraccionaria y de evaluación semántica de la representación fraccionaria.

Un ejemplo del primer tipo de trabajo es la Ficha de trabajo nº 24:

Has comprado una bolsa que contiene 16 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 12 bombones. ¿Qué parte de la bolsa has comido?

Vas a resolver el problema de diferentes maneras:

La unidad es el número de bombones que hay en la bolsa

1º Si fraccionas la unidad en 16 partes iguales, cada subunidad (es un bombón) es de medida $\frac{1}{16}$ de la unidad. Y la solución es:

He comido ________ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa.

Gráfico VI.11. Tarea de construcción de la fracción en el modelo de medida de la cardinalidad

Otras tareas requieren realizar una evaluación semántica de la fracción. Este es el caso de la Ficha 27 que mostramos a continuación:

Tienes una bolsa con 245 canicas, y das a un amigo los $\frac{3}{7}$ de las canicas.

¿Cuántas canicas le has dado?

SOLUCIÓN: Le has dado ________ canicas.

*Explica como has obtenido la solución:*____

Después de resolver el problema, contesta las preguntas:

1º ¿Cuál es la unidad de medida? ____

2º ¿Qué indica el denominador de la fracción $\frac{3}{7}$? ________________________________

3º ¿Qué indica el numerador de la fracción $\frac{3}{7}$?________________________________

Gráfico VI.12. Tarea de evaluación semántica de la fracción en el modelo de medida de la cardinalidad

• En estas Fichas la unidad de medida viene dada por una colección de objetos que, por su carácter discreto, los alumnos la confunden con uno de dichos objetos. Aparece un obstáculo provocado por la naturaleza de la magnitud considerada: la unidad de medida está formada por un conjunto de objetos indistinguibles, cada uno de los cuales constituye la unidad al realizar actividades de recuento.

• La técnica de medida con magnitudes discretas se ha mostrado más compleja que en el caso de las magnitudes continuas. De nuevo hay que situar a la unidad de medida como causante de esta dificultad. En efecto, aunque los alumnos disponen de policubos con los que representar los objetos del enunciado, la tendencia natural es a considerar un policubo como unidad de medida y a resolver la tarea con números naturales. Por tanto, el profesor ha tenido que realizar más intervenciones de las previstas inicialmente para familiarizar al alumno con la medida de magnitudes discretas.

• Los alumnos, de forma mayoritaria, son capaces de encontrar la fracción de una cantidad discreta antes de que se haya enunciado la técnica correspondiente. Este hecho nos vendría a confirmar la potencia del significado de la fracción como medida porque detectamos que existe transferencia de significados de los modelos de medida de longitud y de superficie al modelo de cardinalidad.

• Se observa que aquellos alumnos que tuvieron dificultades para describir el significado del numerador y denominador, en los modelos de longitud y superficie, siguen mostrando dificultades con el modelo de medida de la cardinalidad. Y los alumnos que valoran correctamente el sentido del numerador y del denominador en los modelos anteriores, también muestran una buena comprensión en el caso de la magnitud discreta. Parece, por tanto, que la comprensión de los términos numerador y denominador es costosa, pero una vez alcanzada dicha comprensión resulta fácilmente exportable a cualquier contexto de medida.

• En la **Segunda Etapa** se introdujeron dos nuevas Fichas de trabajo. La primera Ficha contiene dos tareas: una de medida directa y otra de evaluación semántica de la fracción, y cuyo enunciado es:

PRIMER PROBLEMA
Has comprado una caja de quesitos que contiene 24 quesitos. Si has comido 16 quesitos, ¿qué parte de la caja has comido?
Solución: He comido ____________________ de la caja.
*Explica como has obtenido la solución:*______________________________________

SEGUNDO PROBLEMA
Has comprado una caja de quesitos que contiene 24 quesitos. Si has comido los 5/6 de la caja, ¿cuántos quesitos has comido?
Solución: He comido ____
*Explica como has obtenido la solución:*______________________________________

Gráfico VI.13. Tarea de construcción y evaluación semántica de la fracción propuesta en la Segunda Etapa

Con la segunda Ficha, que presentamos a continuación, pretendemos que los alumnos conjeturen la regla de la "fracción de una cantidad":

Tienes una bolsa con 12 caramelos, y $\frac{1}{4}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa.*

¿Cuántas caramelos son de fresa? ______________________________

Tienes una bolsa con 16 caramelos, y $\frac{3}{4}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa.*

¿Cuántas caramelos son de fresa? ______________________________

Tienes una bolsa con 15 caramelos, y $\frac{3}{5}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa.*

¿Cuántas caramelos son de fresa? ______________________________

Tienes una bolsa con 21 caramelos, y $\frac{2}{3}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa.*

¿Cuántas caramelos son de fresa? ______________________________

Tienes una bolsa con 24 caramelos, y $\frac{6}{6}$ de los caramelos de la bolsa son de fresa.

¿Cuántas caramelos son de fresa? ______________________________

Gráfico VI.14. Tarea para conjeturar la regla de la fracción de una cantidad propuesta en la Segunda Etapa

La implementación de esta nueva Ficha de Trabajo va acompañada de una modificación metodológica, a saber, el profesor no enuncia la regla para calcular "la fracción de una cantidad" porque espera que algunos alumnos puedan conjeturar la regla. A pesar de que la tarea de conjeturar reglas resulta particularmente compleja a los escolares de estas edades, hemos observado que un tercio de los alumnos de la Segunda Etapa han enunciado correctamente la regla. A nuestro juicio, este hecho constituye una potencialidad de la Propuesta Didáctica implementada y muestra la importancia de que los alumnos realicen abundantes acciones interactuando con el modelo de aprendizaje antes de que operen con representaciones simbólicas.

VI.4.1.2. Observaciones sobre las Fichas de Trabajo del Primer Foco de Investigación (quinto curso)

Fichas Previas 1, 2, 3, 4, 5 y 6

Los alumnos de quinto curso ya tienen nociones, estudiadas en 4º curso, sobre las fracciones. Estas fichas cumplen el objetivo de revisar las relaciones, de equivalencia y de orden, entre fracciones, pues constituyen elementos fundamentales para avanzar en la Propuesta Didáctica. Consideramos necesario realizar estas tareas antes de continuar la secuencia de enseñanza para 5º curso después de constatar que los alumnos de 4º curso no saben gestionar, mediante razonamientos simbólicos, la equivalencia de fracciones.

En consecuencia, los alumnos realizan Fichas de trabajo para reforzar el concepto de equivalencia de fracciones. Se proponen dos tipos de Fichas. En las del primer tipo, se trabaja directamente la equivalencia de fracciones como en la Ficha de Evaluación 4BIS:

Debes construir un listón de longitud $\frac{2}{3}$ de la caña unidad.

Sin deshacer el listón que has hecho, construye un listón de la misma longitud utilizando subunidades de $\frac{1}{6}$ de la caña unidad

Pregunta 1: Expresa con otra fracción la longitud del listón que has construido

Pregunta 2: ¿Porqué la fracción que has construido es equivalente a $\frac{2}{3}$?

Pregunta 3: ¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a la fracción $\frac{2}{3}$?

Explica cómo la has obtenido.

Gráfico VI.15. Tarea de obtención de fracciones equivalentes a una dada al comienzo del Segundo Ciclo

El otro tipo de tareas exigen ordenar fracciones utilizando la estrategia de la equivalencia de fracciones, como en la Ficha Previa nº 6:

Dados dos listones: uno de longitud $\frac{4}{5}$ y otro de longitud $\frac{5}{6}$ de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?

Consigna: No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$ que tengan el mismo denominador.

Gráfico VI.16. Tarea de aplicación de la equivalente de fracciones al comienzo del Segundo Ciclo

• Los alumnos comprenden la idea de la equivalencia de fracciones en el sentido de que una misma cantidad de magnitud puede ser expresada con diferentes fracciones. Sin embargo, la gestión simbólica de la equivalencia de fracciones resulta muy compleja a los escolares y está muy alejada de sus intuiciones primitivas.

• La realización de operaciones simbólicas como la búsqueda de un denominador común a dos o más fracciones exige capacidades cognitivas que superan el desarrollo evolutivo de algunos escolares de 5º curso. Estos alumnos comprenden la estrategia basada en la equivalencia de fracciones durante la evaluación conjunta de las fichas de ordenación de fracciones, pero cuando resuelven la tarea en solitario se muestran inseguros con esta estrategia y prefieren representar gráficamente las fracciones y proceder a una comparación visual de las cantidades dibujadas. En resumen, los alumnos de 5º curso han realizado avances importantes si se compara con las capacidades que tenían en el curso anterior; sin embargo, la gestión simbólica de la equivalencia es todavía inestable.

• La acción de enseñanza favorece la mejora del rendimiento de los alumnos en la gestión de la equivalencia de fracciones a nivel simbólico. En efecto, los dos tercios de los alumnos de la Primera Etapa saben utilizar esta estrategia para comparar las fracciones implicadas en la Ficha Previa nº 6.

• Las dificultades observadas por los escolares de 5º curso a la hora de manejar con símbolos la equivalencia de fracciones aportan datos para el diseño de las propuestas de enseñanza. Así, queda patente la necesidad de respetar el desarrollo evolutivo de los escolares a los que va dirigida la propuesta. En concreto, los alumnos de 4º curso deberían trabajar la idea de equivalencia de fracciones con la ayuda de materiales manipulativos y de representaciones gráficas, y dejar para 5º curso el manejo simbólico de este concepto y su utilización como estrategia para comparar y operar con fracciones.

• Se ha considerado necesario dedicar una sesión de aula más de las tres previstas inicialmente. En la **Segunda Etapa**, también se han empleado 4 sesiones para mejorar la operatividad del concepto de equivalencia de fracciones y no se introdujo ninguna modificación a la propuesta inicial, pues el Equipo Investigador consideró aceptables los resultados alcanzados por los alumnos.

Fichas 1, 2, 3, 4, 5 y 6

En este conjunto de Fichas quedan recogidas todas las tareas propuestas a los alumnos sobre las operaciones de suma y resta de fracciones. Las Fichas de trabajo tienen una estructura similar a la siguiente Ficha de Evaluación Nº 10 o Ficha Nº 3:

Tienes un listón que mide $\frac{1}{2}$ de la caña unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud $\frac{1}{3}$ de la caña unidad. ¿Cuál es la longitud del nuevo listón que has construido?

Si necesitas utilizar material puedes solicitarlo.

La longitud del listón es ______________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He medido el nuevo listón	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________

Gráfico VI.17. Tarjeta de evaluación de una Ficha para enseñar la suma de fracciones

• Los escolares identifican la suma y resta de fracciones como las operaciones que resuelven los problemas enunciados en las Fichas porque los significado de estas operaciones se corresponden con los que ya conocen de la suma y resta de números naturales.

• Los alumnos tienden a utilizar material manipulativo y a desatender otras estrategias más avanzadas como el uso de representaciones gráficas o la gestión simbólica de la equivalencia de fracciones, a pesar durante las cuatro sesiones previas se ha incidido particularmente en la estrategia de la equivalencia de fracciones.

• Se detectan prácticas inadecuadas en la utilización del material cuando los alumnos han resuelto la Ficha de Evaluación Nº 10. El hecho de que las subunidades estén separadas en cajas diferentes y sean los alumnos quienes soliciten a los profesores el tipo de subunidad crea obstáculos didácticos. En concreto, hemos detectado que algunos escolares solicitan subunidades de $\frac{1}{6}$ para realizar la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ porque oyen pedirlas a otros compañeros suyos y no como resultado de un proceso de reflexión personal.

Para evitar este tipo de inferencias y, además, para reforzar la conexión entre la unidad y sus respectivas subunidades proponemos en la Segunda Etapa de la Experimentación suprimir las cañas y las subunidades previamente fraccionadas, y utilizar tiras de papel como unidad de modo que los escolares se vean obligados a fraccionar, en el momento de resolver la tarea, para obtener las subunidades que precisen.

• Los alumnos han tenido más dificultades al resolver problemas de resta que los de suma. Una de las causas de las deficiencias observadas radica en que los escolares no realizan una evaluación previa de la cantidad que expresa cada una de las fracciones implicadas. Por este motivo el Equipo Investigador consideró oportuno introducir la ficha nº 5BIS cuyo enunciado mostramos a continuación:

Tengo una caña de pescar que mide $\frac{7}{5}$ metros y se ha partido en dos partes: una mide $\frac{9}{10}$ de metro. ¿Cuánto mide la otra parte de la caña?

• Los profesores han recomendado a los escolares utilizar representaciones gráficas para disponer de referencias visuales de las cantidades de magnitud que indican las fracciones del enunciado de los problemas. La escasa utilización de gráficos hace que los alumnos afronten la resolución de las fichas directamente con razonamientos simbólicos de modo que se sitúan en un nivel de abstracción que no es adecuado a sus capacidades cognitivas y que provoca la aparición de errores como restar en el orden equivocado. Por ejemplo, al resolver la ficha 5BIS algunos alumnos plantean, de modo erróneo, la resta: $\frac{9}{10}-\frac{7}{5}$.

Para evitar estos errores los profesores recomiendan a los escolares que contextualicen el problema de acuerdo con las siguientes pautas de actuación: que dibujen las cantidades que expresan las fracciones, que comparen las fracciones, que realicen una estimación de la cantidad del resultado y, finalmente, que evalúen la solución en el contexto del modelo de aprendizaje.

Las representaciones gráficas basadas en las magnitudes longitud y superficie son especialmente adecuadas para visualizar cantidades de otras magnitudes como la capacidad o masa que no evocan imágenes mentales tan nítidas como las de aquellas magnitudes.

• Los alumnos van utilizando con éxito la estrategia basada en la equivalencia de fracciones para operar con fracciones según van resolviendo nuevas fichas. Además, el rendimiento de los alumnos que utilizan esta estrategia aumenta conforme van realizando nuevas tareas.

• Los alumnos resuelven con mayor dificultad los problemas sobre la magnitud peso o capacidad. Estas magnitudes no evocan a los alumnos imágenes mentales tan claras como la magnitud longitud o superficie. En estos casos el profesor aconseja a los alumnos que piensen en la magnitud longitud o superficie para representar gráficamente las fracciones y evaluar la cantidad de magnitud que representa.

• Los alumnos tienen dificultades para simplificar fracciones. Esta dificultad era previsible porque la propuesta de enseñanza ha priorizado la técnica de obtención de fracciones equivalentes "amplificando" los numeradores y denominadores.
La técnica de "simplificación" sigue el proceso contrario porque consiste en agrupar fraccionamientos y número de subunidades. En este momento de la secuencia de enseñanza, asumimos esta limitación como inevitable porque la técnica de "simplificación" requiere conocimientos de divisibilidad que los alumnos estudian en 6º curso.

• En la **Segunda Etapa**, no se han implementado nuevas fichas pues el Equipo Investigador considera aceptables los resultados alcanzados por los alumnos en la Primera Etapa de Experimentación.

Fichas 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13

En este conjunto de Fichas quedan recogidas todas las tareas propuestas a los alumnos sobre las operaciones de multiplicación y división de una fracción por un número natural.
Desde el punto de vista de la investigación preocupa tanto la formulación del resultado, como el modo en que se ha logrado; en consecuencia, las Fichas de trabajo tienen una estructura similar a la siguiente Ficha de Trabajo Nº 7:

Compras 12 latas de conserva. Cada lata de conserva pesa $\frac{2}{3}$ *Kgrs.*

¿Cuánto pesan las 12 latas?

Las doce latas pesan ____________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

*Si has realizado alguna operación, escríbela:*____________________

Indica cómo has resuelto el problema: ____________________

Gráfico VI.18. Ficha nº 7 para dar dotar de significado a la multiplicación de una fracción por un natural

• Los alumnos comprenden el significado de la operación multiplicación de una fracción por un número natural porque la identifican como una suma reiterada de una cantidad de magnitud que viene expresada por una fracción.

• La técnica de cálculo de la multiplicación de una fracción por un número natural tampoco crea dificultades a los alumnos. Sin embargo, en al resolver la primera ficha referida a esta operación confunden la multiplicación con la técnica de encontrar fracciones equivalentes a una dada, y que consiste en multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número natural.
Los alumnos han escrito de modo natural la simbolización usual de la operación:

$$\frac{2}{3} \text{ x } 12$$

pero algunos alumnos confunden el cálculo de esta operación con la técnica para encontrar fracciones equivalentes a una dada, y escriben:

$$\frac{2x12}{3x12}$$

Las interferencias entre la simbolización utilizada para trabajar la equivalencia y la de operación multiplicación se han visto minimizadas en la Segunda Etapa gracias a la nueva simbolización de la técnica de obtención de fracciones equivalentes que utilizan los escolares:

$$\begin{array}{c} \text{x } 12 \\ \dfrac{2}{3} = \dfrac{24}{36} \\ \text{x } 12 \end{array}$$

• Los alumnos saben realizar las fichas que se resuelven con la operación división de una fracción por un número natural a pesar de que no identifican la operación. Las primeras fichas plantean el fraccionamiento o reparto de una fracción unitaria en un número determinado de partes iguales. En este caso, la estrategia mayoritaria utilizada por los alumnos consiste en fraccionar la cantidad de magnitud en tantas partes iguales como indica el número natural y, después medir la cantidad de magnitud resultante. Los alumnos utilizan con éxito esta estrategia porque recuerdan las experiencias de fraccionamientos en partes iguales que realizaron durante el curso anterior.

• Los alumnos utilizan representaciones gráficas para resolver problemas de división de una fracción por un número natural pero se muestran reacios a utilizar razonamientos basados en la equivalencia de fracciones. Para favorecer la utilización de esta estrategia el Equipo Investigador propone resolver nuevas fichas de trabajo y aumentar en dos el número de sesiones de aula dedicadas a enseñar esta operación. Consideramos muy importante que los alumnos utilicen la estrategia basada en la equivalencia de fracciones porque les va a servir, en un futuro muy próximo, para resolver problemas de repartos cuando en la secuencia de enseñanza se introduzca la fracción con el significado de cociente partitivo.

• Los alumnos, poco a poco, conforme van realizando las fichas de trabajo utilizan la estrategia basada en la equivalencia de fracciones de modo que perciben la cantidad de magnitud a fraccionar o repartir como compuesta por un número de subunidades que es igual (o un múltiplo) del número que actúa como factor divisor.

• La simbolización del cálculo de la división presenta mayores dificultades que en el caso de la multiplicación. Cuando los alumnos utilizan la estrategia que consiste en buscar una fracción equivalente que tenga como numerador una cantidad igual o múltiplo entero del divisor, detectamos claramente la influencia, en este caso perniciosa, de la división entera de números naturales. Algunos alumnos proceden del siguiente modo:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3:2}{4} = \frac{1}{4}$$

En efecto, dividen 3 entre 2, como saben hacerlo con números naturales, pero dejan sin repartir una subunidad de $\frac{1}{4}$. Queda patente que el trabajo con representaciones simbólicas presenta grandes dificultades conceptuales a los escolares.

• Los alumnos cuando resuelven estas Fichas de trabajo ponen en juego diversas estrategias que poseen un gran valor formativo. De hecho, del estudio de las tarjetas de las fichas de los alumnos que dan respuestas incorrectas observamos que éstos no se quedan paralizados y son capaces de poner en juego alguna estrategia para resolver la tarea aunque yerren la respuesta.

• La propuesta de enseñanza referida a la división de una fracción entre un número natural pretende, y lo consigue, que adquieran estrategias eficaces para resolver problemas que se resuelven con esta operación. Este tipo de enseñanza no potencia la memorización de la regla de cómputo de la división de una fracción entre un número natural; por el contrario, persigue que los escolares justifiquen los procedimientos de cálculo algorítmico de las operaciones desde el modelo de aprendizaje. La estrategia de resolución que ha aparecido en el aula, en las tareas de división partitiva, aconseja que los alumnos no reciban enseñanza del algoritmo tradicional de la división de una fracción entre un número natural. Los alumnos utilizan, de forma razonada, el siguiente procedimiento:

Para dividir una fracción por un número natural debes hallar una fracción equivalente a la dada que tenga como numerador un número de subunidades que pueda ser repartido por completo en tantas partes como indica el número natural, y después debes realizar la división recordando la nueva medida de las subunidades.

• En la **Segunda Etapa**, se han implementado las nuevas fichas que fueron introducidas en la Primera Etapa, junto con la nueva simbolización de la equivalencia de fracciones, pues el Equipo Investigador consideró aceptables los resultados alcanzados por los alumnos.

VI.4.1.3. Observaciones sobre las Fichas de Trabajo del Segundo Foco de Investigación

Fichas 14, 15, 16, 17 y 18

En este conjunto de Fichas quedan recogidas todas las tareas propuestas a los alumnos cuyo objetivo es introducir la fracción que expresa el resultado del reparto igualitario realizado en una sola fase.

El profesor, de acuerdo con la metodología establecida, enuncia a los alumnos las tareas que deben realizar y les facilita los materiales para éstos realicen físicamente el reparto, representen gráficamente el proceso de reparto y, finalmente, expresen con símbolos el proceso y el resultado del reparto. Las Fichas de trabajo están diseñadas para recoger la actividad de los alumnos cuando realizan las fases del proceso de reparto; en consecuencia, las Fichas de trabajo tienen una estructura similar a la siguiente Ficha de Trabajo Nº 14:

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 4 niños.
¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?
SOLUCIÓN: ______________________________

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:

2. Utilizad símbolos:

3 |4

3. Indicad el significado de la fracción, del numerador y del denominador de la FRACCIóN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ______________________________

El denominador indica ______________________________

Gráfico VI.19. Ficha nº 14 para introducir la fracción como resultado de un reparto igualitario

• Desde la primera tarea los escolares dan muestras de comprender el proceso de reparto igualitario: saben realizar con materiales el reparto y dibujar el proceso. Ahora, contrariamente a lo que les ocurría en el curso pasado, comprenden la necesidad de fraccionar las barras (tiras de papel) en partes iguales.

• El conocimiento que poseen los alumnos de la división entera de naturales obstaculiza la comprensión de la fracción como resultado del reparto igualitario porque algunos niegan que el reparto de "3 barras para 4 personas" pueda realizarse, y que se simboliza por

3 |4

Otros alumnos, al realizar el reparto de 5 barras para 3 personas, escriben:

$$\begin{array}{l|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$$

La simbolización del reparto mediante “la caja de la división entera” no es adecuada porque a los alumnos les sugiere realizar el algoritmo de la división de naturales. Para evitar este obstáculo, el equipo investigador ha decidido cambiarla simbolización de “la caja” por la de “los dos puntos” y, además, distinguir con nitidez tres momentos en la simbolización del reparto, a saber:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO
3 : 4	$\frac{1}{4}$ de $\begin{array}{l\|l} 12 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$ de $\frac{1}{4}$	Cada niño recibe $\frac{3}{4}$ de barra

En la **Segunda Etapa** se suprime la simbolización de la caja para representar el proceso de realización del reparto, y pasa a simbolizarse del siguiente modo:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO
3 : 4	$3 : 4 = \frac{3}{1} : 4 = \frac{12}{4} : 4 = \frac{3}{4}$	Cada niño recibe $\frac{3}{4}$ de barra

Justificamos la decisión de introducir la notación de “los dos puntos” por las siguientes razones:

a) Deslindar la acción de reparto con magnitudes continuas de la que se realiza con magnitudes discretas y que los alumnos resuelven mediante el algoritmo de la división entera de números naturales.

b) Por coherencia con la división entera de naturales, porque la notación de la caja la utilizamos para realizar repartos de objetos discretos en *varias* fases.

c) La notación de los dos puntos se ha utilizado, en sesiones anteriores de la Primera Etapa, para simbolizar la operación división de una fracción por un número natural que, en ocasiones, modeliza acciones de repartos igualitarios.

d) La notación de los dos puntos es compatible con la simbolización de la equivalencia de fracciones y refuerza el trabajo realizado con fracciones equivalentes.

• El modelo de cociente partitivo y la metodología puesta en práctica en el aula posibilita la aparición de estrategias de gran riqueza conceptual. Por ejemplo, algunos alumnos utilizan de modo natural la técnica del reparto en dos fases. Así, al resolver la ficha 14 realizan el reparto en dos fases y escriben: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ de barra.

• Las representaciones gráficas han jugado un papel importante en la transición de las acciones manipulativas a las representaciones simbólicas. Además, permiten valorar el nivel de comprensión de los escolares: la mayoría de los alumnos que realizan representaciones gráficas adecuadas para encontrar la representación fraccionaria del reparto también saben escribir correctamente la simbolización del proceso de reparto.
Los profesores de aula han recomendado a los escolares que realicen las representaciones gráficas con mayor precisión y esmero. Y, para ello, se propone asignar letras (A, B, C, …) a cada uno de los participantes en los repartos para que los alumnos visualicen de forma gráfica la cantidad que recibe cada participante.

• Los alumnos, poco a poco, expresan con mayor precisión los significados de los términos de la fracción y realizan una doble evaluación semántica de la fracción: como cociente partitivo y como medida. Esta tarea no es sencilla porque la Propuesta Didáctica no contempla la memorización de los significados del numerador y del denominador; al contrario, se pretende que sean los alumnos los que realicen una interpretación personal de la fracción y de sus términos.
Inicialmente, los alumnos realizan la evaluación semántica de los términos de fracción desde el modelo medida porque es el que conocen mejor. Por ejemplo A07 afirma en la ficha 15 que el denominador indica "cuantas veces has fraccionado la unidad" y A28 dice que el numerador indica "cuantos trozos de regaliz le damos a cada niño". Después, conforme la secuencia de enseñanza va avanzando y realizan mayor número de tareas, los alumnos incorporan a la fracción y a los términos de ésta el significado de cociente partitivo.

• En general, los alumnos se muestran reticentes a admitir que una misma expresión simbólica pueda poseer dos significados diferentes.

• La propuesta de enseñanza ha funcionado bien en el momento de resolver estas fichas porque se ha implementado en el tiempo previsto y porque los alumnos obtienen con facilidad la fracción que expresa el resultado de un reparto igualitario. Tan solo la representación simbólica del reparto y la evaluación semántica de los términos de la fracción ha causado dificultades a algunos escolares.

• En la **Segundo Etapa**, la Propuesta Didáctica ha funcionado bien y se ha desarrollado siguiendo las mismas pautas que en la Primera Etapa. Tan solo se consideró oportuno introducir dos nuevas fichas con la intención de mejorar la comprensión de los escolares relativa a la representación simbólica del reparto y a la evaluación semántica de los términos de la fracción. Una de las fichas propone realizar el reparto de “3 barras para 5 personas”; y otra tarea análoga a la ficha nº 18 cuyo enunciado escribimos a continuación:

a) "Vais a repartir 6 barras de regaliz entre 4 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?". Realiza el reparto con gráficos y con símbolos.

b) "Vais a repartir 9 barras de regaliz entre 6 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?". Realiza el reparto con gráficos y con símbolos.

Fichas 19, 20, 21 y 22

En este conjunto de Fichas quedan recogidas todas las tareas propuestas a los alumnos cuyo objetivo es realizar una evaluación semántica de la fracción que expresa el resultado del reparto igualitario realizado en una sola fase. La tarea consiste en buscar las condiciones iniciales de un reparto cuando se conoce la fracción que expresa su resultado. Las Fichas de trabajo tienen una estructura similar a la siguiente Ficha de trabajo Nº 19:

Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe $\frac{2}{3}$ de barra. ¿Cuántas personas han participado en el reparto y cuántas barras de regaliz se han repartido?

SOLUCIÓN:

Si participan 3 personas en el reparto, el nº de barras de regaliz que se reparten es ____

Escribe el reparto: $\boxed{}$ $\boxed{}$

Si participan 6 personas en el reparto, el nº de barras de regaliz que se reparten es ____

Escribe el reparto: $\boxed{}$ $\boxed{}$

Si participan 9 personas en el reparto, el nº de barras de regaliz que se reparten es ____

Escribe el reparto: $\boxed{}$ $\boxed{}$

Si participan 12 personas en el reparto, el nº de barras de regaliz que se reparten es ___

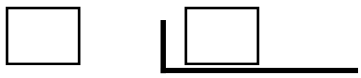
Escribe el reparto: $\boxed{}$ $\boxed{}$

Gráfico VI.20. Ficha nº 19 de evaluación semántica de la fracción como cociente partitivo

• Los alumnos de la Primera Etapa han tenido grandes dificultades para resolver este tipo de tareas. Las dos sesiones previstas inicialmente para resolver estas fichas han necesitado duplicarse.

• Apuntamos cuatro causas que, en nuestra opinión, justifican las dificultades de los alumnos. En primer lugar la tarjeta de la ficha tiene más texto que otras anteriores y ello ha exigido que el profesor se extendiese en las explicaciones con la finalidad de clarificar el enunciado de la tarea.

• En segundo lugar, los alumnos no entienden que la simbolización del reparto mediante "la caja" como la descripción de las condiciones iniciales de un reparto. Los alumnos están acostumbrados a utilizar el símbolo de la caja para realizar el algoritmo de la división entera de números naturales y entienden la simbolización:



como la invitación a utilizar una técnica o procedimiento para calcular el resultado de un reparto pero no le asignan otra interpretación, más estática, como la de fijar las condiciones iniciales de un reparto.
Para minimizar las dos primeras causas el Equipo Investigador modificó la tarjeta de esta ficha que ahora se presenta del siguiente modo:

Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe $\frac{2}{3}$ de barra.
Completa las frases siguientes:

Si participan 2 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que tienen antes de hacer el reparto es ______ .

Y se reparten ______ barras de regaliz entre 2 personas
porque:____

Si participan 4 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que tienen antes de hacer el reparto es ______ .

Y se reparten ______ barras de regaliz entre 4 personas
porque:____

Escribe otros TRES repartos en los que cada persona reciba $\frac{2}{3}$ de barra.

Gráfico VI.21. Modificación de la Ficha de trabajo Nº 19 en la Primera Etapa

• En tercer lugar, hemos detectado dificultades de comprensión asociadas a la propia idea de reparto que tienen su origen en la confusión entre las tres cantidades que intervienen el reparto y en la ubicación temporal de estas cantidades: antes y después del reparto.

• En cuarto lugar, aparecen las dificultades asociadas a la estructura multiplicativa del número racional. En general, los alumnos de 5º curso gestionan con dificultad las estrategias directamente multiplicativas como las basadas en la idea de proporcionalidad de repartos o en la multiplicación de la fracción que indica el resultado de un reparto por el número de participantes. En efecto, tan solo la alumna A10 utiliza la idea de proporcionalidad al resolver la ficha nº 21 cuando afirma que los repartos "5 barras entre 4 personas" y "10 barras entre 8 personas" son equivalentes porque he multiplicado las barras y las personas por 2 y explica:

“si haces el doble de todo obtienes lo mismo".

El profesor que desea que los restantes alumnos comprendan este razonamiento valioso pregunta: "¿entendéis lo que dice vuestra compañera?"; y los alumnos afirman que no.

• Es inevitable que la acción de enseñanza lleve a ponderar determinadas estrategias. En particular, se pretende que aparezcan en el aula las estrategias de carácter simbólico porque son más avanzadas y potentes. Sin embargo, conviene tener en cuenta que la utilización correcta de este tipo de estrategias presenta grandes dificultades cognitivas a los escolares de 5º curso y requiere alargar en el tiempo los periodos de instrucción.
Es más, la utilización prematura de este tipo de estrategias no garantiza la comprensión conceptual de los escolares. Este fenómeno se observa cuando los escolares resuelven la ficha 21 que es la última que se dedica a este contenido. Para resolver esta ficha los alumnos utilizan como estrategia mayoritaria la de multiplicar la fracción por el número de participantes; y hemos detectado que los alumnos de mayor nivel de comprensión utilizan estrategias más rudimentarias, pero que manejan con soltura, como el uso de representaciones gráficas o la sumas reiterada de la fracción. Este es el caso del alumno A01 que prefiere sumar la fracción tantas veces como indica el número de participantes.

• En la **Segunda Etapa** persisten las dificultades de los alumnos en las tareas de búsqueda de las condiciones de un reparto efectuado en una fase. En estas condiciones, el equipo investigador propuso suprimir estas fichas de trabajo y ganar tiempo para reforzar otros contenidos porque la búsqueda de las condiciones iniciales no constituye un conocimiento esencial para el desarrollo posterior de la secuencia de enseñanza.

Fichas 22 y 23

En este conjunto de Fichas quedan recogidas cuatro tareas para que los alumnos comparen las fracciones que expresan los resultados de repartos igualitarios realizados en una sola fase. Con la resolución de estas fichas pretendemos que los alumnos mejoren la comprensión de la fracción y pongan en juego el mayor número posible de estrategias. Se espera que estas estrategias lleven a los alumnos a conjeturar reglas para comparar las fracciones que expresan resultados de repartos. Las dos Fichas de trabajo tienen una estructura similar; mostramos la Ficha de trabajo Nº 23:

a) Imagina que participas en el reparto

" 2 barras de regaliz entre 3 personas";

y en el reparto

" 3 barras de regaliz entre 4 personas";

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?. Explica la respuesta.

b) Imagina que participas en el reparto

" 3 barras de regaliz entre 2 personas";

y en el reparto

" 5 barras de regaliz entre 4 personas";

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?. Explica la respuesta.

Gráfico VI.22. Ficha de trabajo Nº 23 de comparación de repartos

• Los alumnos saben comparar repartos. El rendimiento ha mejorado considerablemente cuando se compara con el de las tareas precedentes. Además, los alumnos de la Primera Etapa han resuelto las cuatro tareas en una sola sesión de las dos previstas inicialmente.

• Consideramos importante reseñar la riqueza conceptual que supone la aparición, en el aula, de un número importante de estrategias. Así en la tarea que consistía en comparar los repartos "2 barras de regaliz entre 3 personas" y "2 barras de regaliz entre 5 personas" los escolares de nivel de comprensión bajo dibujan las cantidades de longitud antes de comparar; otros alumnos utilizan una estrategia más abstracta que consiste en aplicar la equivalencia de fracciones para expresar los resultados de los repartos referidos a una misma subunidad; y los alumnos de nivel de comprensión alto utilizan directamente la idea de reparto, como la alumna A04 que escribe:

> *"el reparto 2 barras entre 3 personas es mayor porque hay las mismas barras pero el número de personas es menor y entonces les toca más cantidad a cada uno*".

• Los repartos que se comparan en la Ficha nº 22 poseen el mismo número de personas o de barras de regaliz, y esto permite que aparezca como estrategia la idea de reparto. Sin embargo, esta estrategia no saben gestionarla cuando los repartos que se comparan poseen diferente número de personas y de barras de regaliz. En efecto, para comparar los repartos los repartos "3 barras para 4 personas" y "2 barras para 3 personas" con la idea de reparto los alumnos podrían utilizar la estrategia de "socializar o compartir repartos". Sin embargo, hemos detectado que la aplicación de esta estrategia excede las capacidades cognitivas de los escolares de estas edades.

• La estrategia mayoritaria para comparar los repartos que poseen diferente número de personas y de barras de regaliz consiste en comparar las fracciones que expresan sus resultados utilizando previamente el concepto de equivalencia. Los alumnos gestionan con éxito esta estrategia de modo que saben encontrar fracciones equivalentes con el mismo denominador. En este sentido se constatan progresos porque, al comienzo de las secuencia de enseñanza, los alumnos de 5º curso no tenían operativo el concepto de equivalencia de fracciones.

• En la **Segunda Etapa** se mantiene la Propuesta Didáctica referida a la comparación de repartos según se ha implementado en la Primera Etapa; tan solo se ha considerado oportuno introducir una nueva tarea para reforzar la técnica del reparto efectuado en una fase y la búsqueda de fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Mostramos a continuación la nueva Ficha de trabajo que se incorpora a la Propuesta:

Imagina que participas en el reparto de
" *3 barras de regaliz entre 5 personas*"
y en el reparto de
" *4 barras de regaliz entre 7 personas*"
¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?
SOLUCIÓN: ____
porque: ____

Imagina que participas en el reparto de
" 2 barras de regaliz entre 5 personas"
y en el reparto de
" 3 barras de regaliz entre 8 personas"
¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?
SOLUCIÓN: ____
porque: ____

Gráfico VI.23. Ficha de trabajo de comparación de repartos que se introduce en la Segunda Etapa

Fichas 24, 25, 26, 26BIS y 27

En este conjunto de Fichas quedan recogidas todas las tareas propuestas a los alumnos cuyo objetivo es introducir la Representación Polinómica Decimal que expresa el resultado de un reparto igualitario efectuado en varias fases.

El profesor, de acuerdo con la metodología establecida, enuncia a los alumnos las tareas que deben realizar y les facilita los materiales para éstos realicen físicamente el reparto, representen gráficamente el proceso de reparto y, finalmente, expresen con símbolos el proceso y el resultado del reparto. Las Fichas de trabajo están diseñadas para recoger la actividad de los alumnos cuando realizan el proceso de reparto. Las Fichas tienen una estructura similar a la siguiente Ficha de trabajo nº 27:

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto " 5 barras de regaliz entre 4 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:

2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

5 |4

Gráfico VI.24. Ficha de trabajo Nº 27 para introducir la Representación Polinómica Decimal

• Los alumnos aprenden la técnica del reparto en varias fases con facilidad. Inicialmente realizan repartos en dos fases y encuentran más fácilmente el resultado de los repartos que tienen el número de barras mayor que el número de personas porque, en este caso, pueden repartir alguna cantidad entera en la primera fase.

• La representación simbólica del reparto en varias fases crea menos dificultades a los alumnos que la representación del reparto en una fase. Esto es debido, posiblemente, a que la técnica del reparto en varias fases tiene similitudes con el algoritmo de la división de naturales que conocen los alumnos.

• Los alumnos tienen una escasa comprensión del papel que juegan los agrupamientos decimales en nuestro sistema de numeración escrito. La deficiente comprensión del sistema de escritura de los números se manifiesta con mayor crudeza en los reparto realizados que precisa el fraccionamiento de décimas. En este caso, muchos escolares dudan cuando el profesor les pregunta: "¿cuál es la longitud del trozo de caña que se obtiene cuando se fracciona, en diez partes iguales, un trozo de tamaño 1/10 de la caña?

• Las representaciones gráficas, como todo sistema de representación, poseen una sintaxis que debe ser respetada. Los alumnos, para eludir esfuerzos, tienden a simplificar las representaciones gráficas, y ello les lleva a cometer errores a pesar de que comprenden el significado del reparto por fases. En estas condiciones, el profesor recomienda a los alumnos que expresen con letras los participantes implicados en el reparto y que asignen dichas letras a las subunidades que recibe cada participante. También exige a los escolares que escriban el tamaño de cada una de las subunidades que aparecen en el proceso del reparto.

• La Propuesta Didáctica ha funcionado bien en el momento de resolver estas fichas porque los alumnos saben obtener la Representación Polinómica Decimal de un reparto. Además, las Fichas se han implementado en menos tiempo del previsto inicialmente de manera que se acorta en una sesión la temporalización de la secuencia de enseñanza.

• En la **Segunda Etapa**, la Propuesta Didáctica ha funcionado bien y se ha desarrollado siguiendo las mismas pautas que la implementada en la Primera Etapa de Experimentación. En estas condiciones, no se producen modificaciones de la Propuesta Didáctica.

Fichas 28, 29, 30 y 30BIS

En este conjunto de Fichas se presentan las tareas propuestas a los alumnos sobre la Notación Decimal desde el modelo de cociente partitivo. Para introducir la Notación Decimal los alumnos resuelven la Ficha nº 28 que contiene varias tareas que se refieren a repartos cuya Representación Polinómica Decimal se ha obtenido en las fichas precedentes. Mostramos la primera de estas tareas:

Cuando has realizado repartos por fases y has fraccionado los trozos que sobran en 10 partes iguales, en el reparto " 3 barras de regaliz entre 2 personas"   *cada persona recibe* $1 + \frac{5}{10}$ *de barra,*   *y el número decimal que indica esta cantidad es ____*

Gráfico VI.25. Parte de la Ficha de trabajo Nº 28 para introducir la Notación Decimal

Las restantes Fichas de este bloque poseen una estructura común. Mostramos la Ficha de Evaluación Nº 17 o Ficha de trabajo Nº 30:

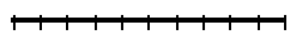
Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño en el reparto "17 barras de regaliz entre 8 niños"

a) Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

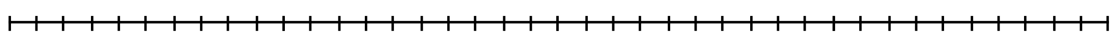
$$17 \,\underline{|\; 8 \qquad\qquad}$$

b) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal.

c) Si la longitud de una barra de regaliz es:



dibuja sobre la línea:



la longitud que indica la cantidad de regaliz que recibe cada niño.

Gráfico VI.26. Ficha de trabajo Nº 30 de evaluación semántica del número decimal como medida de longitud

• La actividad de los alumnos cuando realizan la Ficha nº 28 ha estado dirigida por el profesor. No obstante, los alumnos dan muestras de comprender el convenio por el que la Representación Polinómica Decimal de un reparto se convierte en un Número Decimal y la economía que signos que conlleva. El hecho de que este convenio, basado en criterio posicional, se aplique a repartos que los alumnos han realizado previamente ha facilitado la comprensión del paso de la Representación Polinómica Decimal a la Notación Decimal. Esta decisión constituye una potencialidad de la propuesta de enseñanza.

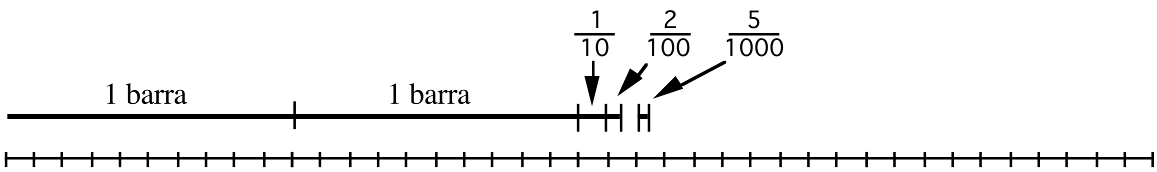
• En nuestra Propuesta Didáctica la Notación Decimal aparece asociada al resultado de un reparto igualitario de objetos que poseen determinada cantidad de longitud. El resultado del reparto es una cantidad de longitud que viene expresada por un número decimal. Por lo tanto, dotar de significado al número decimal exige percibir la cantidad que expresa el número, es decir, representar la cantidad, ya sea con objetos físicos o bien con dibujos como se propone en el apartado c) de la Ficha de Evaluación nº 17.

Con esta intención los alumnos han construido físicamente, con tiras de papel, las cantidades de longitud que expresan los números decimales que aparecen en la Ficha 28 y representan sobre la recta numérica las cantidades de longitud dadas por los números decimales que obtienen en las siguientes fichas.

• Inicialmente, los alumnos no han entendido la pregunta en la que les pide que expresen el significado de las cifras del número decimal que obtienen como resultado del reparto. En las siguientes fichas el rendimiento en esta tarea mejora sustancialmente lo que vendría a confirmar que el desconcierto inicial de los escolares se debe a la falta de costumbre en la justificación de los significados de los conceptos matemáticos que estudian. La decisión de proponer a los alumnos que profundicen en los significados de los conceptos y representaciones matemáticas constituye una potencialidad de la Propuesta Didáctica.

• La representación gráfica del decimal como cantidad de longitud sobre la recta numérica no es una tarea elemental. Esta tarea plantea a los alumnos serias dificultades conceptuales porque éstos deben realizar una evaluación semántica de las cifras del número decimal. Hemos detectado dificultades en los alumnos que habitualmente resuelven con éxito las tareas. Este es el caso de la alumna A35 que para representar 3´75 barras añade a las 3 unidades y las 7 décimas, 5 subunidades de longitud 1/2 décima; es decir, confunde la centésima con 1/2 décima.

• La mayoría de los errores que cometen los escolares al realizar la representación gráfica del decimal sobre la recta numérica se deben a una escasa comprensión de la base decimal y, en concreto, de las conversiones decimales entre los submúltiplos de la unidad.
Otros errores indican que los alumnos que los cometen no reconocen en el número decimal la medida de una cantidad de longitud. Así, el alumno A29 representa gráficamente el número decimal 2´125 dejando "huecos" en la recta numérica:

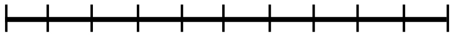


• Las técnicas de obtención del número decimal como resultado de un reparto efectuado por fases y la de representar gráficamente cantidades de longitud expresadas mediante decimales sobre la recta numérica requieren períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo. El Equipo Investigador toma la decisión de continuar con la implementación de la propuesta para no crear más desfases temporales; no obstante recomienda proponer a los alumnos la resolución de la Ficha 30BIS como trabajo para que ejerciten estas técnicas en sus hogares durante las vacaciones de Navidad. Mostramos la última de las siete tareas que se proponen en esta ficha:

1º. Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada persona en los siguientes repartos:

g) " 401 barras de regaliz entre 200 personas".

2º. Si la longitud de una barra de regaliz es:



Dibuja sobre las líneas, la longitud de las cantidades de regaliz que reciben las personas que participan en los repartos.

g)

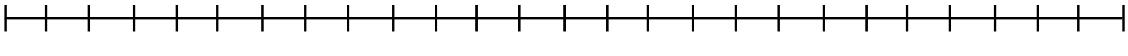


Gráfico VI.27. Parte de la Ficha de trabajo Nº 30BIS de refuerzo de obtención del número decimal como cociente partitivo y de evaluación semántica del número decimal como medida de longitud

• Los buenos resultados obtenidos por los alumnos de Primera Etapa en estas Fichas aconsejan mantener la propuesta de enseñanza implementada en la **Segunda Etapa**. En esta Etapa de Experimentación hemos detectado una mayor calidad de las representaciones gráficas que realizan los alumnos porque la secuencia de enseñanza ha incidido particularmente en este aspecto, sin necesidad de aumentar el número de sesiones previstas inicialmente.

Fichas 31, 32, 33 y 34

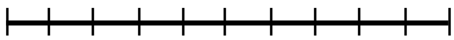
En este conjunto de Fichas se presentan las tareas propuestas a los alumnos cuyo objetivo es evaluar semánticamente la Notación Decimal desde el modelo de cociente partitivo. Las Fichas de trabajo tienen una estructura similar a la siguiente Ficha de trabajo nº 34:

Cada una de las personas que participan en un reparto reciben 2´50 barras de regaliz.

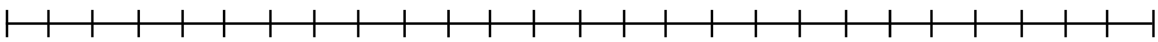
Responde y justifica tu respuesta:

1º Expresa el significado de las cifras que forman el número decimal.

2º Si la longitud de una barra de regaliz es:



Dibuja sobre la línea:



la longitud 2´50 barras.

3º ¿Qué fracción expresa la cantidad de regaliz que recibe cada una de las personas que participan en el reparto?

4º ¿Cuántas barras había antes de hacer el reparto y cuántas personas han participado en el reparto?

Gráfico VI.28. Ficha de trabajo Nº 34 de evaluación semántica del número decimal como cociente partitivo

Los dos primeros apartados de la Ficha plantean preguntas del mismo tipo que las de las fichas precedentes. El tercer apartado indaga la conexión entre el número decimal y la fracción, y el cuarto apartado exige la búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto cuando se conoce el número decimal que expresa su resultado.

• Los alumnos obtienen un rendimiento alto en los dos primeros apartados de estas fichas porque comprenden el significado de las cifras del número decimal y saben representar gráficamente la longitud que indica el decimal. Los alumnos han realizado progresos considerables que se manifiestan en la mejora de resultados al compararlos con los obtenidos en las fichas 29 y 30.

• Los alumnos tienen dificultades para resolver el tercer y cuarto apartado. El rendimiento de los escolares en estas tareas es bajo a pesar de haber dedicado dos sesiones de aula más que las previstas inicialmente.

• Las dificultades detectadas cuando los alumnos intentan expresar el número decimal mediante una fracción se deben a diferentes causas. Unas son conceptuales como la incapacidad para expresar el número decimal mediante su representación polinómica decimal. Y otras se deben a aspectos procedimentales como:

- cometer errores al operar con fracciones,
- no simplificar la fracción.

• Cuando los alumnos intentan encontrar la condiciones iniciales del reparto expresado por el número decimal predominan los errores conceptuales como:

- no disponer de estrategias aditivas o multiplicativas para encontrar el número de barras que había antes de ser repartidas.
- no recordar que los términos de la fracción indican directamente las condiciones iniciales del reparto, a pesar de conocer la fracción que equivale al número decimal.
- no reconocer las cantidades que intervienen antes y después de realizar un reparto, es decir, desconocer el significado del reparto igualitario.

Por ejemplo, cuando en la ficha Nº 32 se pide encontrar las condiciones iniciales del reparto cuyo resultado son 2´5 barras de regaliz el alumno A06 escribe:

"*El 2 significa las dos barras que tenemos para repartir. Y el 5 significa que un* $\frac{1}{2}$ *para repartir mas*"

porque piensa que 2´5 es la cantidad de regaliz que hay antes de hacer el reparto.

La alumna A20 muestra tener una mala comprensión del reparto cuando escribe:

"*El 2 significa el número de barras. El 5 el número de personas*"

posiblemente porque también piensa de modo erróneo que 2´5 = $\frac{5}{2}$

Estos y otros errores análogos apuntan a que el origen de las dificultades de los escolares cuando resuelven el apartado cuarto de estas Fichas radica en la mala comprensión del significado del número decimal como resultado de un reparto igualitario.

• El Equipo de Investigación toma la decisión de suprimir estas fichas en la **Segunda Etapa** y sustituirlas por otras que inciden sobre conceptos básicos como la conexión entre las dos técnicas del reparto que introducen la fracción y el número decimal. Mostramos a continuación una de esta fichas:

Realiza el reparto de "9 barras de regaliz entre 4 niños" de dos formas diferentes:
1º) Cuando fraccionas todas las barras en tantas partes iguales como el número de niños:
Expresa, con una fracción, el número de barras de regaliz que recibe cada niño.
SOLUCIÓN: *Cada niño recibe barras de regaliz*

2º) Cuando repartes barras enteras y fraccionas las barras o partes de barras sobrantes en diez:

7 | 2

Expresa, con un número decimal, el número de barras de regaliz que recibe cada niño.

SOLUCIÓN: *Cada niño recibe barras de regaliz*

3º) La longitud de una barra de regaliz es:

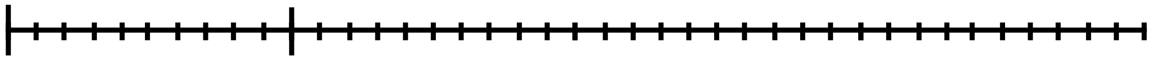
Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, la fracción que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

O

4º) La longitud de una barra de regaliz es:

Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, el número decimal que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

O



5º) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal

La parte entera es _____ e indica que ____

La cifra de las décimas es _____ e indica que ________________________________

La cifra de las centésimas es _____ e indica que ______________________________

La cifra de las milésimas es _____ e indica que _______________________________

Gráfico VI.29. Ficha de trabajo para conectar la fracción y el número decimal en la Segunda Etapa

• El Equipo Investigador valoró el hecho de que la Propuesta Didáctica para 5º curso es demasiada densa en cuanto a contenidos de modo que con la supresión de las Fichas que indagan por las condiciones iniciales del reparto se gana tiempo para reforzar los conceptos básicos, y optó por posponer hasta 6º curso la enseñanza de estrategias, como la basadas en la idea de proporcionalidad, y de procedimientos simbólicos de paso entre las notaciones decimal y fraccionaria, que son útiles para resolver esta Fichas de trabajo de este bloque, pero que exigen capacidades cognitivas que carecen la mayoría de los alumnos de 5º curso.

VI.4.1.4. Observaciones sobre las Fichas de Trabajo del Tercer Foco de Investigación

Fichas 35 y 36

La fracción y el número decimal se han introducido y conectado desde el modelo de cociente partitivo. Se trata ahora de establecer la conexión entre el número decimal y la fracción desde el modelo de medida. El profesor, de acuerdo con la metodología establecida, propone a los alumnos la resolución de dos Fichas de trabajo que contienen dos apartados cada una. Estas Fichas de trabajo tienen una estructura similar. Mostramos los enunciados de la Ficha nº 36:

1º La capacidad de una botella de batido es 0´25 litros. Expresa con una fracción (la más simplificada posible) la capacidad de esta botella.

SOLUCIÓN: $\boxed{}$ *de*

*He obtenido la fracción del siguiente modo:*______________________________________

2º En la carnicería has comprado 0´375 Kgrs. de carne picada. Expresa con una fracción (la más simplificada posible) el peso de carne picada que has comprado.

SOLUCIÓN: $\boxed{}$ *de*

*He obtenido la fracción del siguiente modo:*______________________________________

Gráfico VI.30. Ficha de trabajo Nº 36 para convertir el número decimal en fracción

• Los alumnos obtienen porcentajes de éxito altos al convertir los números decimales: 1´5, 1´2 y 0´25 en fracciones. El porcentaje de acierto desciende cuando convierten en fracción el número 0´375, como consecuencia de errores en la simplificación de fracciones.

• Hemos detectado dificultades en la simplificación de fracciones. Ya hemos indicado con anterioridad que los alumnos están más familiarizados con la técnica de obtención de fracciones equivalentes por amplificación porque se trata de una técnica que posee una justificación más sencilla que la de la simplificación.

• Los alumnos apenas han cometido errores conceptuales. Por ejemplo, los alumnos no cometen errores graves como cambiar la coma del decimal por la barra de la fracción.

• Los alumnos dan muestras de comprender el significado del número decimal como resultado de una medida de cantidad de magnitud y saben expresar un número decimal, que no tenga más de tres cifras decimales, con una fracción

• La estrategia que utiliza la mayoría de los alumnos consiste en expresar el decimal mediante la Representación Polinómica Decimal, después, operar las fracciones decimales y, finalmente, simplificar.

Otra estrategia consiste en expresar el número decimal mediante alguna fracción conocida por el escolar. Este es el caso del alumno A02, que al resolver la primera tarea de la ficha 36 afirma que 0´25 es $\frac{1}{4}$ de litro porque "*es la mitad de medio litro*".

• Los alumnos en las dos Etapas de Experimentación obtienen resultados aceptables al resolver estas Fichas de trabajo; lo que permite conjeturar que los alumnos han realizado aprendizajes conceptualmente valiosos.
Sin embargo, la gestión adecuada de los procedimientos simbólicos de paso de un sistema de representación a otro precisa de períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo, que nuestra implementación de aula no contempla porque estamos comprometidos a respetar la programación del Centro. En consecuencia, estas técnicas deberán ser reforzadas en 6º curso de Educación Primaria a partir de la buena comprensión conceptual que muestran los escolares de 5º curso relativa a la conexión entre la representación fraccionaria y decimal.

Fichas 37 y 38

En estas dos Fichas quedan recogidas todas las tareas propuestas a los alumnos para estudiar el orden entre números decimales. El objetivo de estas Fichas es ordenar cantidades de magnitud expresadas con números decimales y, además, conjeturar reglas que permitan ordenar números decimales. Las dos Fichas de trabajo tienen una estructura similar. Mostramos la primera de estas dos; la Ficha de trabajo nº 37:

Ordena de menor a mayor, la estatura de los siguientes niños:

Manuel	*1´6*	*metros*
Oscar	*1´495*	*metros*
Luís	*1´510*	*metros*
Enrique	*1´5*	*metros*
Antonio	*1´51*	*metros*
César	*1´59*	*metros*

SOLUCIÓN:

El niño de menor estatura es: ______________________________

____

____

____

____

El niño de mayor estatura es: ______________________________

Inventa una regla que sirva para ordenar números decimales: ___________________

Gráfico VI.31. Ficha de trabajo Nº 37 de ordenación de números decimales

• La tarea de ordenar números decimales no plantea dificultades a los alumnos porque éstos obtienen resultados aceptables desde la primera ficha.

• Otro indicador del nivel de comprensión alto que muestran los alumnos es la variedad de estrategias que ponen en juego. Así, en la Ficha Nº 37 hemos detectado tres estrategias correctas que indicamos a continuación:

1ª La estrategia mayoritaria consiste en ordenar por fases. La respuesta del alumno A48 ejemplifica esta estrategia:

Primero se mira las barras enteras, si son iguales se miran las décimas, si son iguales las centésimas y así sucesivamente

2ª Una estrategia menos utilizada consiste en "añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras". La alumna A34 modifica la estrategia anterior y coloca los números en columna, alineados por la coma aunque no iguala las partes decimales con ceros.

3ª La alumna A35 escribe la Representación Polinómica Decimal asociada a los números decimales y, después, compara las fracciones utilizando la equivalencia de fracciones. Esta alumna explica la estrategia del siguiente modo:

Primero se pasa cada número decimal a una fracción, luego se compara los denominadores y si no están iguales se buscan fracciones equivalentes y se busca cuál es mayor o menor

• Los alumnos dan muestras de poseer un nivel de comprensión alto referido a la comparación de números decimales. Entre las respuestas de los alumnos apenas se detecta la estrategia errónea que consiste en ordenar según el número de cifras decimales que contengan los números decimales. No obstante, hemos detectado este error en la Ficha de trabajo Nº 38 cuando los alumnos tienen que comparar los decimales 10´3 y 10´21.

• Los alumnos, según han realizado tareas de ordenación de decimales, han optado por unificar sus estrategias de modo que casi todos los alumnos deciden ordenar por fases.

• La tarea de enunciar reglas resulta compleja a los escolares debido, fundamentalmente, a las dificultades que les plantea expresar por escrito sus ideas. Sin embargo, se trata de una actividad asequible para los escolares que presenta importantes potencialidades en el proceso de enseñanza y aprendizaje porque favorece la aparición de diversas estrategias que refuerzan la representación polinómica decimal que subyace al número decimal.

• Como consecuencia de la acción de enseñanza los alumnos han adquirido un mayor dominio de la técnica de ordenación de decimales que se manifiesta en la mayor celeridad y seguridad con que los alumnos ordenan números decimales en las tareas posteriores.

• Los buenos resultados obtenidos por los alumnos de la Primera Etapa en estas Fichas aconsejan mantenerlas, sin cambios, en la **Segunda Etapa**. Los resultados obtenidos en las dos Etapas confirman que las tareas propuestas están bien diseñadas y sirven para alcanzar los objetivos previstos sin que se considere necesario aumentar el número de sesiones previstas inicialmente.

Fichas 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49 y 50

En este conjunto de Fichas quedan recogidas todas las tareas propuestas a los alumnos cuyo objetivo es dotar de significado a las operaciones de suma y resta de números decimales, y multiplicación y división de un decimal por un número natural. También se introducen y justifican los algoritmos de cálculo de dichas operaciones aritméticas. Las

Fichas tienen una estructura similar a la Ficha de Trabajo nº 45 o de Evaluación nº 22:

La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas consecutivas es de 2´75 metros?

SOLUCIÓN: La altura del edificio es ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado alguna operación	SI ☐	NO ☐

*Indica cómo has resuelto el problema:*____

Gráfico VI.32. Ficha de trabajo Nº 45 para dotar de significado a las operaciones con números decimales

En la **Segunda Etapa** se optó por modificar las tarjetas de evaluación de las Fichas con la intención de que los alumnos vinculen el número decimal como su Representación Polinómica Decimal y que puedan utilizar la representación fraccionaria para justificar el funcionamiento de los algoritmos con números decimales. Mostramos la modificación introducida en la Ficha de Evaluación Nº 22:

La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas consecutivas es de 2´75 metros?

SOLUCIÓN: La altura del edificio es ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

2´75 =

*Indica cómo has resuelto el problema:*____

Gráfico VI.33. Modificación de la Ficha de trabajo Nº 45 en la Segunda Etapa de la Experimentación

• Los alumnos reconocen la operación aritmética que resuelven los problemas que contienen números decimales porque el conocimiento que poseen de las operaciones con números naturales les permite transferir los significados de una estructura numérica a la otra. Es más, los alumnos tienden a identificar ambos conjuntos numéricos de modo que esto que aparece, inicialmente, como una ventaja se convierte en un obstáculo didáctico importante.

• La analogía que hay entre los algoritmos de cálculo de decimales y los de naturales constituye un obstáculo didáctico. Por ejemplo, en el caso de la suma, los alumnos conocen el algoritmo escrito usual de la suma antes de ser presentado en el aula. Cabe pensar que han recibido enseñanza previa o que han aprendido el manejo de estos procedimientos de cálculo por enculturación, debido a que se trata de un conocimiento socialmente útil. En estas condiciones, los alumnos no reconocen la necesidad de justificar el algoritmo de la suma de decimales y les parece superfluo recibir explicaciones sobre la justificación de un procedimiento de cálculo del que conocen su manejo. Por ejemplo, cuando los alumnos resuelven la Ficha de Evaluación nº 20 y realizan la suma *4,5 + 3,75* evitan expresar los decimales mediante sus Representaciones Polinómicas Decimales, a pesar de que los procedimientos usuales de cálculo les crean conflictos. De esta forma, algunos alumnos cometen errores en la colocación de la coma al utilizar de forma prematura el algoritmo vertical de la suma. Y, sin embargo, no utilizan las Representaciones Polinómicas Decimales asociadas a los números decimales:

$$4'5 = 4 + \frac{5}{10}$$

$$3'75 = 3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$$

$$4,5 + 3,75 = 4 + \frac{5}{10} + 3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} = 7 + \frac{12}{10} + \frac{5}{100} = 7 + \frac{10}{10} + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 8 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 8'25$$

• La práctica docente tradicional propone la enseñanza de los procedimientos de cálculo con números decimales como si se tratase de números naturales y, después, la aplicación de reglas, sin justificación conceptual, como la de "situar la coma" en el resultado obtenido. Estos procedimientos de cálculo funcionan bien porque los números decimales se inventaron para realizar con mayor facilidad las operaciones aprovechando su parecido con los números naturales. Sin embargo, esta enseñanza de los algoritmos de cálculo crea a la larga dificultades y conflictos porque la aparente sencillez de las técnicas de cálculo "análogas a las de naturales" impide a los alumnos que aplican las reglas "para situar la coma", sin comprensión, evaluar sus producciones matemáticas porque carecen de mecanismos conceptuales de control.

• Los alumnos aprenden a manejar con rapidez los procedimientos de cálculo con decimales. No obstante, los conocimientos que poseen de las técnicas operatorias con números naturales no debería considerarse como garantía de comprensión conceptual. Por ejemplo, a pesar de que los alumnos saben restar números decimales, no son capaces de justificar el algoritmo de la resta de decimales con llevadas porque tampoco saben justificar la llevada en el algoritmo tradicional de la resta de naturales.

• La propuesta de enseñanza persigue que los alumnos justifiquen el algoritmo de la multiplicación utilizando la Representación Polinómica Decimal asociada al número decimal antes de introducir la regla para "situar la coma". Sin embargo este objetivo no se ha alcanzado porque los alumnos eluden utilizar las Representaciones Polinómicas Decimales, y prefieren utilizar el algoritmo usual de la multiplicación. Así, cuando los escolares resuelven la Ficha de Evaluación 22 realizan correctamente la multiplicación 2´75 x 8 pero solo la mitad de éstos utilizan la Representación Polinómica Decimal:

$$2'75 \text{ x } 8 = 8 \text{ x } (2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}) = 16 + 8 \text{ x } \frac{7}{10} + 8 \text{ x } \frac{5}{100} = 16 + 5 + \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = 21 + \frac{10}{10} = 22$$

• En la Primera Etapa la regla para "situar la coma" ha sido enseñada demasiado pronto. El Equipo Investigador acuerda en la **Segunda Etapa** posponer la resolución de las Fichas de nº 43 y nº 44 que tienen como objetivo introducción de esta regla, y adelantar la resolución de las Fichas nº 45 y nº 46 con la intención de que los alumnos justifiquen el procedimiento de cálculo de la multiplicación mediante las Representaciones Polinómicas Decimales asociadas a los números decimales. Mostramos el enunciado de la Ficha de trabajo Nº 44:

PRIMERA PREGUNTA:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 10 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

*Indica cómo has resuelto el problema:*____________________________________

SEGUNDA PREGUNTA:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 100 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

*Indica cómo has resuelto el problema:*____________________________________

TERCERA PREGUNTA:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 1000 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

*Indica cómo has resuelto el problema:*____________________________________

CUARTA PREGUNTA:

Completa la siguiente tabla:

	: 10	: 100	: 1000
125			

Inventa una regla para dividir un decimal por 10, 100 y 1000 ____________________

Gráfico VI.34. Ficha de trabajo Nº 44 para conjeturar la regla de “situar la coma”

• La enseñanza de los cálculos computacionales desde la comprensión reporta muchas más ventajas que inconvenientes. Como puntos fuertes destacamos que los alumnos reciben una enseñanza más crítica, de mayor riqueza conceptual, donde los algoritmos realizados con lápiz y papel asumen una nueva función: la de reforzar la comprensión de las estructuras numéricas y del sistema de numeración. Pero también presenta inconvenientes porque alarga considerablemente el proceso de instrucción y porque los cálculos con fracciones decimales resultan muy tediosos a los escolares dado que su sintaxis es más compleja. Estos dos factores han influido poderosamente en la **Segunda Etapa** de modo que no se ha conseguido que los escolares realicen las operaciones de resta y multiplicación por un natural utilizando Representaciones Polinómicas Decimales.

• La enseñanza de la división de un número decimal entre un número natural presenta la misma problemática que el resto de operaciones: los alumnos comprenden el significado de la operación pero tienen dificultades para comprender el funcionamiento del algoritmo de cálculo. En principio, los alumnos realizan las divisiones sin evocar el proceso de reparto, del que han recibido enseñanza durante el curso, y escriben representaciones simbólicas del reparto realizado por fases poco precisas en las que eluden indicar los órdenes de unidades de las cifras del dividendo y de las cifras del cociente.

• Cuando los alumnos aplican el algoritmo de la división utilizan dos estrategias:

1º Suprimir las cifras decimales del dividendo, multiplicando el dividendo y el divisor por una potencia adecuada de diez y, después, realizar el reparto por fases, y

2º Realizar directamente el reparto por fases, controlando el orden de unidades que se reparte en cada fase

El conocimiento de la primera estrategia tiene la ventaja de que, posteriormente, va a ser utilizada por los alumnos cuando realicen divisiones cuyo dividendo y divisor sean, a la vez, números decimales. Sin embargo, los alumnos no perciben la necesidad de multiplicar el dividendo y el divisor por una potencia de diez para suprimir las cifras decimales del dividendo porque esta estrategia comporta ideas de proporcionalidad que resultan complejas a los escolares de estas edades.

La mayoría de los alumnos de la Segunda Etapa utilizan, con éxito, la segunda estrategia.

• Los alumnos, con independencia de la estrategia utilizada, han cometido numerosos errores en las primeras tareas en la que han realizado cálculos de divisiones con números decimales. Conforme ha ido avanzando la secuencia de enseñanza el rendimiento ha mejorado porque los alumnos evocan el proceso de reparto y cuidan la simbolización en el algoritmo al indicar el tamaño de las cantidades que van a repartir, y el número y el tamaño de las partes que resultan en cada fase del reparto.

• La implementación de estas Fichas permiten cumplir parcialmente los objetivos previstos. Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación saben dotar de significado a las operaciones con decimales y saben aplicar los procedimientos de cálculo de dichas operaciones. Quedan dos aspectos susceptibles de mejora:

1º Reforzar las técnicas de cálculo. Esta actuación obligaría a alargar la fase experimental y no podemos tomar esta decisión porque se ha agotado el tiempo previsto para implementar la secuencia de enseñanza.

2º La justificación de los procedimientos de cálculo. Esta actuación requiere una revisión, en profundidad, de la enseñanza de los algoritmos escritos de números naturales que se realiza en todos los cursos de la Educación Primaria.

Un equipo de profesores del Centro donde se desarrolla la implementación asesorados por el doctorando que presenta esta Memoria están trabajando en este sentido. Como consecuencia de este trabajo los alumnos de la **Segunda Etapa** recibieron una enseñanza alternativa de la división de naturales en el tercer curso de Educación Primaria durante 20 sesiones de clase siguiendo el modelo de aprendizaje del cociente partitivo con objetos discretos. Posteriormente estos alumnos han entendido mejor las tareas basadas en el modelo de cociente partitivo con objetos continuos que se ha implementado en 5º curso de Educación Primaria.

VI.4.2. Sobre la Interacción Didáctica

En este apartado estudiamos las interacciones didácticas producidas en el aula con la intención de informar de la metodología que acompaña a la Propuesta de Enseñanza. Este estudio presenta la dificultad derivada del exceso de información a procesar. En estas condiciones y dado que el desarrollo de las sesiones sigue un diseño común: el profesor propone un trabajo que los alumnos resuelven individualmente o en pequeño grupo y, después, se procede a evaluar la tarea mediante un debate colectivo con intervenciones de los alumnos y del profesor-investigador; focalizamos nuestra atención en el momento de evaluación de las tareas. Se trata de un momento adecuado para el análisis de las interacciones porque los escolares intervienen al verbalizar los aprendizajes adquiridos como consecuencia de la reflexión sobre el trabajo efectuado al resolver la tarea.

Con esta intención vamos a analizar las interacciones didácticas que se producen entre los alumnos de cuarto curso, grupo A, de la Primera Etapa y el profesor-Investigador cuando estudian el concepto de equivalencia de fracciones en cuatro momentos puntuales:

Episodio 1. Aparece por primera vez, en el aula, el concepto de equivalencia de fracciones. En la Ficha de Trabajo nº 3 los alumnos miden la longitud de un listón de madera: 14 alumnos dan como respuesta 5/4 de unidad y 6 responden 10/8 de unidad. Se va a analizar las interacciones en el debate que se produce en el aula al contrastar los dos tipos de respuestas. El material a analizar es una grabación de vídeo de 4 minutos y 30 segundos, que se realizó el día 2-2-2000, y que está registrada en el DVD que se adjunta en el Anexo IV de esta Memoria de Investigación.

Episodio 2. El profesor rememora el trabajo de los alumnos después de haber resuelto la situación de comunicación propuesta en la Ficha de Trabajo nº 4 que consiste en que un grupo de alumnos van a cortar un listón de madera de una longitud determinada y que alumnos de otro grupo deben medir, posteriormente. Para evaluar el trabajo realizado por los alumnos en la situación de comunicación el profesor propone construir, con cañas, una cantidad de longitud 4/8 de unidad y, después, da indicaciones para que los alumnos construyan la misma cantidad de longitud con subunidades diferentes. De esta forma aparece la equivalencia de fracciones como invariante de la cantidad de longitud. El material a analizar es una grabación de vídeo de 9 minutos, que se realizó el día 4-2-2000, y que está registrada en el DVD que se adjunta en el Anexo IV de esta Memoria.

Episodio 3. Los alumnos resuelven la Ficha de Trabajo nº 13 que plantea la búsqueda de fracciones equivalentes a 6/4 de unidad. Los alumnos utilizan diversos tipos de materiales con las magnitudes longitud, superficie o masa. Cuando han cumplimentado la tarjeta de evaluación se procede a evaluar, de modo conjunto, la tarea. El material a analizar es una grabación de vídeo de 13 minutos, que se realizó el día 18-2-2000, que está registrada en el DVD que se adjunta en el Anexo IV de esta Memoria y que recoge el trabajo de los alumnos y los debates que se suscitan al evaluar la tarea.

Episodio 4. Se realiza la puesta en común de las respuestas de los alumnos cuando resuelven la primera parte de la Ficha de Trabajo nº 15BIS que propone encontrar el denominador de la fracción para que se cumpla la igualdad:

$$\frac{4}{6} = \frac{10}{\square}$$

Se trata de una tarea compleja para los alumnos de cuarto curso porque mientras unos pocos utilizan estrategias multiplicativas, la mayoría tiende a utilizar estrategias aditivas. De esta manera surge el debate entre los escolares y se pone de manifiesto la dificultad que tienen los alumnos de estas edades para convencer a sus compañeros de la validez de sus afirmaciones. El material a analizar es una grabación de vídeo de 12 minutos y 30 segundos, que se realizó el día 23-2-2000, y que está registrada en el DVD que se adjunta en el Anexo IV de esta Memoria de Investigación.

Para sistematizar, estructurar y estudiar las interacciones que se producen a lo largo de estos debates entre el profesor y los alumnos y de los alumnos entre sí, en relación a los contenidos seleccionados, se elaboraron unas Unidades de Análisis de la Interacción Didáctica que están descritas en el Capítulo IV.

En los siguientes cuadros se recogen las 180 intervenciones registradas a lo largo de las cuatro sesiones, ordenadas de acuerdo con las finalidades y clasificadas de acuerdo con las Unidades de Análisis:

a) Sobre la gestión del trabajo en el aula:

Categorías	Intervención	Porcentaje	Categorías	Intervención	Porcentaje
1.PO	7	3,9	**1.AS**	0	0
1.PP	0	0,0	**1.AP**	0	0
1.PE	0	0,0	**1.AE**	0	0
1.PV	0	0,0	**1.AV**	0	0
1.PA	3	1,7	**1.AR**	0	0
Totales	**10**	**5,1**	**Totales**	**0**	**0**

Cuadro VI.8: Datos de la Interacción Didáctica referida a la gestión del trabajo en el aula

b) Sobre la gestión del desarrollo del contenido:

Categorías	Intervención	Porcentaje	Categorías	Intervención	Porcentaje
2.PO	5	2,8	**2.AS**	2	1,1
2.PP	7	3,9	**2.AP**	5	2,8
2.PE	8	4,4	**2.AE**	0	0,0
2.PV	5	2,8	**2.AV**	3	1,7
2.PI	1	0,6	**2.AI**	1	0,6
Totales	**26**	**14,4**	**Totales**	**11**	**6,1**

Cuadro VI.9: Datos de la Interacción Didáctica referida a la gestión del desarrollo del contenido

c) Sobre la construcción del conocimiento:

Categorías	Intervención	Porcentaje	Categorías	Intervención	Porcentaje
3.POC	6	3,9	**3.AAI**	29	16,1
3.PIS	32	17,8	**3.AIS**	3	1,7
3.PDC	15	8,3	**3.AMC**	15	8,3
3.PVI	15	7,8	**3.AVI**	9	5,0
3.PSC	4	2,2	**3.AEC**	5	2,8
Totales	**72**	**40,0**	**Totales**	**61**	**33,9**

Cuadro VI.10: Datos de la Interacción Didáctica referida a la construcción del conocimiento

En resumen, los datos globales quedan reflejados en el siguiente cuadro:

	Intervenciones del Profesor			Intervenciones de Alumnos	
	Frec. absol	Porcentaje		Frec. absol	Porcentaje
Totales	**108**	**60**	**Totales**	**72**	**40**

Cuadro VI.11: Datos globales de la Interacción Didáctica por agentes

La lectura de los cuadros anteriores ofrece una panorámica global del desarrollo de las interacciones entre los alumnos, y entre el profesor y los alumnos. En primer lugar se observa que el número de intervenciones del profesor supera al número de intervenciones de los alumnos. Los alumnos de 9 ó 10 años tienen grandes dificultades para llevar de forma autónoma un debate con la intención de exponer y rebatir las respuestas que aportan cada uno de ellos. En estas condiciones, el profesor se ve obligado a dirigir los momentos de evaluación conjunta de las tareas, y esto hace que aumente el número de intervenciones del profesor.

En segundo lugar, detectamos que el mayor número de interacciones se producen en el momento de construcción del conocimiento. Este resultado era esperado por dos razones:

1º En los registros analizados primaban los momentos de evaluación de las tareas, a pesar de que también se han estudiado otros momentos en los que los alumnos resuelven tareas, y

2º El número de interacciones relativas a la gestión del trabajo en el aula es escaso, y también lo es el número de interacciones referidas a la gestión del desarrollo del contenido porque, en general, los alumnos entienden las tareas que deben realizar.

En tercer lugar, se observa que el número de intervenciones de los alumnos crece, y se acerca al del profesor, en el momento de la construcción del conocimiento. En ese momento, el profesor y los alumnos interactúan de modo frecuente porque:

1º La metodología de la Propuesta propicia una atmósfera de libertad en el aula para que los alumnos puedan expresar sus ideas; asimismo, se fomenta la idea de que los errores son consustanciales al aprendizaje, con lo que se favorece la participación de todos los alumnos en las discusiones y, en particular, se potencia la actuación pública de los escolares que presentan mayores dificultades de aprendizaje, y

2º El profesor está obligado a intervenir de modo frecuente para canalizar los debates o interpelaciones entre alumnos, para asegurar la participación de alumnos que muestran escasa comprensión, para clarificar los argumentos que esgrimen los alumnos, para resaltar los aspectos conceptuales que pueden pasar desapercibidos, para reconducir el proceso de enseñanza y para institucionalizar los conocimientos.

En efecto, los alumnos se muestran muy proclives a participar en los debates y a responder a los preguntas que formula el profesor. Este hecho facilita la evaluación de la comprensión del grupo porque la falta de respuesta de los alumnos se convierte en un indicio claro de falta de comprensión.
Por otra parte, el profesor interviene en más ocasiones de las que desearía dado que se ve obligado a moderar las interacciones entre los alumnos y a clarificar las ideas que desean expresar, dado que los alumnos de cuarto curso tienen dificultades para argumentar a partir de los razonamientos formulados por otro compañero.

En los dos epígrafes que siguen nos proponemos analizar las intervenciones de los estudiantes y las del profesor desde la doble perspectiva de atender a la finalidad de dichas intervenciones y la de estudiar el tipo de actuación producido.

VI.4.2.1. Interacciones según finalidades

1) Sobre la gestión del trabajo en el aula

El porcentaje de interacciones que tienen la finalidad de gestionar el trabajo del aula representan solamente el 5,1% del total de actuaciones; y de ellas, todas corresponden a intervenciones del profesor para organizar el trabajo. No hay intervenciones del profesor preguntando a los alumnos sobre la gestión, ni tiene que dar explicaciones o valorar las opiniones de los alumnos sobre la gestión; tampoco los alumnos sugieren, preguntan o valoran decisiones relativas a la gestión del trabajo.

Los alumnos no cuestionan la planificación de la Propuesta y tampoco el desarrollo metodológico que la acompaña, dado que no hay intervenciones de los alumnos relativas a la gestión del trabajo en el aula.

Además, los alumnos aceptan de buen grado la Propuesta Didáctica que se manifiesta en una buena actitud hacia el trabajo y en un buen comportamiento en el aula. En este sentido, es interesante resaltar que tan sólo hubo tres intervenciones para recabar la atención de los alumnos, y en todas ellas se aceptaron de forma inmediata las sugerencias del profesor.

2) Sobre la gestión del desarrollo del contenido

Con la finalidad de gestionar el desarrollo del contenido se produjeron 37 intervenciones (el 20,5% del total), de las que 26 correspondieron al profesor y 11 a los alumnos.

Las intervenciones del profesor se refieren a la organización, a establecer prioridades en el tratamiento de la información que surge en el momento de evaluar las tareas (5 intervenciones); también hay el mismo número de intervenciones del profesor para emitir juicios sobre las sugerencias o valoraciones de los alumnos referidas a la resolución de las tareas; pero las intervenciones más numerosas, 8, fueron para explicitar a los alumnos el trabajo a realizar; y 7 intervenciones para cerciorarse de que los alumnos habían comprendido el tipo de trabajo a realizar.

Por otra parte, la mayoría de las intervenciones de los alumnos demandaron precisiones sobre los enunciados de las tareas (5 intervenciones) o realizaron comentarios sobre la valoración del grado de dificultad de la tarea que iban a resolver (3 intervenciones). Sin embargo, apenas hubo intervenciones en el sentido de hacer sugerencias sobre los contenidos a tratar o sobre su organización; y, además, las intervenciones que realizaron fueron poco relevantes.

Los alumnos asumen la gestión del desarrollo de los contenidos que sustenta la Propuesta Didáctica; las intervenciones que realizan se limitan a aclarar las dudas surgidas en la realización de la tarea; y las valoraciones que realizan obedecen más a impulsos emocionales que a razonamientos efectuados de forma reflexiva. Es más, hemos detectado que la gran mayoría de las preguntas que formularon eran capaces de respondérselas ellos mismos.

3) Sobre la construcción del conocimiento

El 75% de las intervenciones totales estuvieron encaminadas a la construcción del conocimiento. De ellas, el 40% corresponden a actuaciones del profesor y el 35% a intervenciones de los alumnos.

La principal intervención del profesor corresponde a la formulación de preguntas a alumnos particulares, o a la totalidad de la clase, para indagar sobre los significados que aparecen en la discusión, lo que supone el 18% de las intervenciones totales. Destacan otros dos tipos de actuaciones del profesor, con 15 intervenciones cada una: representar en la pizarra, de forma gráfica y simbólica, los razonamientos de los alumnos para facilitar la comprensión de los contenidos; y valorar las intervenciones de los alumnos con la intención de reconducir la discusión colectiva y de establecer debates provechosos entre iguales.

En cuanto a los alumnos hay que señalar que sus intervenciones tienen como foco principal la de aportar información, lo que supone el 16% de las intervenciones totales. También es reseñable la existencia de 15 ocasiones en la que alumnos particulares manifiestan comprensión del contenido y 5 ocasiones en la que se observa que determinados alumnos expresan de modo organizado su dominio del contenido. Los alumnos de estas edades reaccionan con rapidez ante las respuestas que aportan sus compañeros. En efecto, en 9 ocasiones enjuician las respuestas que aportan sus compañeros; sin embargo, las valoraciones que realizan no suelen venir acompañadas de razonamientos que justifiquen la adhesión o rechazo de la respuesta dada por el compañero y, en estas condiciones, resulta complicado gestionar el debate y la confrontación provechosa de ideas.

La descripción de las intervenciones dibuja unas sesiones de trabajo en el aula ricas en interacciones entre el profesor y los alumnos. A pesar de las limitaciones propias de alumnos de edades tan tempranas para establecer debates entre iguales cabe indicar que las discusiones colectivas en los momentos de evaluación de las tareas no se han desviado de sus objetivos. El profesor ha canalizado la gestión de la construcción del conocimiento mediante la descripción de las informaciones aportadas por los alumnos, la exposición razonada de las posiciones sometidas a discusión y la permanente valoración de las ideas que los alumnos desean transmitir. De este modo, a lo largo de las cuatro sesiones el profesor comprobó que se dieron las condiciones adecuadas para sistematizar los siguientes conocimientos referidos a la equivalencia de fracciones:

- El significado de equivalencia como invariante de la cantidad de la magnitud longitud, en la sesión del día 2-2-2000,
- La obtención de fracciones equivalentes a una dada al modificar el tamaño de la subunidad, lo que obliga a modificar convenientemente el número de subunidades que completan la misma cantidad de magnitud que la de la fracción dada. y suficientes para que los conocimientos no necesiten ser sistematizados, en la sesión del día 4-2-2000, y
- La regla simbólica de obtención de fracciones equivalentes a una dada, en la sesión del día 23-2-2000.

VI.4.2.2. Interacciones según actuaciones

a) Fijar normas

El profesor fija normas o convenios				
1.PO	**2.PO**	**3.POC**	**Total**	**Porcentaje**
7	5	6	**18**	**10**

Cuadro VI.12: Datos de la Interacción Didáctica en el que el profesor fija normas

El 10% de las intervenciones que realiza el profesor son para fijar normas; esto indica que el trabajo de aula se han desarrollado con un número pequeño de normas, que no ha sido necesario ni la exhaustividad en la formulación de reglas de actuación, ni tampoco ha sido necesario reiterar los acuerdos anteriormente establecidos; los alumnos aceptan pronto y de buen grado la metodología de la Propuesta Didáctica.

b) Establecer significados

El profesor establece significados				
1.PP	**2.PP**	**3.PIS**	**Total**	**Porcentaje**
0	7	32	39	21,7
1.PE	**2.PE**	**3.PDC**		
0	8	15	23	12,8
		3.PSC		
		4	4	2,2
Totales			**66**	**36,7**

Cuadro VI.13: Datos de la Interacción Didáctica en el que el profesor establece significados

El alumno establece significados				
1.AP	**2.AP**	**3.AIS**	**Total**	**Porcentaje**
0	5	3	8	4,4
1.AE	**2.AE**	**3.AMC**		
0	0	15	15	8,3
	3.AAI	**3.AEC**		
	29	5	34	18,9
Totales			**57**	**31,7**

Cuadro VI.14: Datos de la Interacción Didáctica en el que el alumno establece significados

Casi los tres cuartos del número total de intervenciones, el 74,4%, han servido para establecer significados. De ellas, corresponden al profesor el 36,7% y a los alumnos el 31,7%. Estos datos configuran una práctica docente en el que el profesor y los alumnos se implican profundamente en la búsqueda del significado conceptual; el profesor indaga e intenta generar conocimiento conceptual, y los alumnos aceptan este tipo de trabajo formulando ideas y argumentos para construir conocimiento. Ahora bien, para alcanzar el objetivo la función del profesor es diferente de la de los alumnos, porque las características cognitivas y evolutivas de los alumnos obliga a que sea el profesor el que guíe y lleve la iniciativa en el proceso de enseñanza.

c) Emitir juicios

El profesor enjuicia				
1.PV	**2.PV**	**3.PVI**	**Total**	**Porcentaje**
0	5	15	**20**	**11,1**

Cuadro VI.15: Datos de la Interacción Didáctica en el que el profesor emite juicios

Los alumnos enjuician				
1.AV	**2.AV**	**3.AVI**	**Total**	**Porcentaje**
0	3	9	**12**	**6,7**

Cuadro VI.16: Datos de la Interacción Didáctica en el que el alumno emite juicios

Casi el 20% del número de intervenciones se producen con esta intención, el 11,1% de las actuaciones totales corresponden al profesor, mientras que el 6,7% corresponden a juicios que realizan los alumnos. Las valoraciones que realiza el profesor tienen como finalidad potenciar, en el aula, el proceso dialéctico mediante el cual se comparten conocimientos en una atmósfera de libertad. Este clima de libertad propicia que los alumnos enjuicien profusamente las ideas y respuestas que aportan otros compañeros. La actitud participativa de los alumnos ha contribuido a potenciar el aula como espacio natural para la construcción del conocimiento, a pesar de que muchas de las valoraciones que realizan los alumnos están escasamente meditadas y no van acompañadas de razonamientos que las justifiquen.

El análisis del tipo de actuaciones que realiza el profesor y los alumnos confirman los resultados obtenidos en el análisis de la Interacción Didáctica según la finalidad y que básicamente describen una metodología de aula preocupada por el significado conceptual del número racional positivo, y de las relaciones y operaciones con estos números. El profesor y los alumnos, a pesar de tener funciones diferentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, asumen una metodología común que se apoya en el paradigma constructivista del aprendizaje al priorizar el trabajo personal y en grupo de los alumnos, el intercambio de opiniones entre los alumnos para elaborar significados, y que potencia el aula como espacio natural para la construcción del conocimiento.

VI.5. Reflexión sobre la Fase de Acción

La propuesta didáctica que se experimenta en este trabajo, se articula en torno a tres Focos de Investigación sobre los que vamos a organizar las reflexiones suscitadas tras la experiencia del aula.

VI.5.1. Primer foco de Investigación

Las principales reflexiones al concluir la Fase de Acción en relación con el primer Foco de Investigación son las siguientes:

- El 60% del tiempo dedicado a la fase de Acción han correspondido a este foco. En ello ha influido que los contenidos (7 temas) eran más amplios que los de los otros focos, que los alumnos han sido los principales autores de la construcción de su propio conocimiento, y que en este foco se asientan elementos conceptuales tan importantes para nuestra propuesta cuales son la concreción de un modelo de medida, la construcción del sistema de representación fraccionario asociado al mismo y el estudio de las relaciones y operaciones entre fracciones.

- Los modelos de aprendizaje han funcionado bien en la secuencia de enseñanza. Inicialmente, los alumnos deben utilizar materiales físicos para realizar diferentes fraccionamientos de la unidad pero, posteriormente, se detecta la utilidad del modelo porque los alumnos son capaces de construir ideas abstractas evocando las acciones realizadas en el modelo, y certificar la validez o falsedad de las expresiones simbólicas.
- La decisión de comenzar la enseñanza con el modelo de medida de longitud (ML) ha sido acertada porque los objetos que se utilizan desde este modelo facilitan la percepción visual de la cantidad de magnitud. El modelo de medida de superficie también ha propiciado el aprendizaje de los escolares y, además, refuerza la comprensión de éstos porque ahora las subunidades pueden ser del mismo tamaño pero tener diferentes formas.
- El modelo de medida masa plantea serias dificultades a los alumnos. Contrariamente a los presupuestos iniciales que alentaron la propuesta didáctica, no se ha constatado que los conocimientos adquiridos por los alumnos mediante las experiencias tenidas con la magnitud longitud se transfieran al modelo en el que se trabaja con la magnitud masa. En consecuencia, el equipo investigador decidió suprimir el modelo sustentado en la magnitud masa, e incrementar las tareas en los modelos que utilizan las magnitudes longitud y superficie, en la Segunda Etapa.
- El modelo de medida de la cardinalidad presenta características diferentes a los modelos de medida de cantidades continuas. En este caso, la fracción tiene un uso social, más cercano a la actividad de describir la parte de una colección que a la acción de medir. La naturaleza de la magnitud considerada crea dificultades a los escolares que confunden la unidad de medida que suele ser una colección de objetos indistinguibles con la unidad básica que es uno de esos objetos. A pesar de estos obstáculos, el equipo investigador mantiene la enseñanza de este modelo porque los alumnos obtienen resultados aceptables, porque refuerza el trabajo realizado con los otros modelos y porque el cálculo de la "fracción de una cantidad discreta" es un contenido curricular en Educación Primaria. De hecho, detectamos como potencialidad de los modelos de medida el hecho de que los alumnos de la Segunda Etapa de la experimentación, de forma mayoritaria, son capaces de encontrar la fracción de una cantidad discreta antes de que se haya enunciado la técnica correspondiente.
- El trabajo en los modelos sustentados por las magnitudes longitud y superficie coloca en plano de igualdad los resultados de tareas referidas a fracciones propias e impropias, pues los alumnos obtienen la medida de cualquier cantidad de longitud o de superficie con independencia de que sea mayor o menor que la unidad de medida. Esto no ocurre con el modelo basado en la magnitud cardinalidad.
- En cualquiera de los modelos, las tareas de evaluación semántica, que consisten en construir una cantidad de magnitud a partir del conocimiento de la representación simbólica de la fracción, resultan más complejas que las tareas de medida directa.

- Desde las primeras tareas de medida realizadas desde los modelos de longitud y de superficie la idea de equivalencia de fracciones aparece de manera natural porque los alumnos observan que la medida de una cantidad de longitud se puede realizar con distintas subunidades.
- Los alumnos saben encontrar, de forma muy mayoritaria, fracciones equivalentes a una dada utilizando los materiales de los modelos de medida. Sin embargo, la búsqueda simbólica de fracciones equivalentes a una dada se torna una tarea muy compleja para los alumnos de cuarto curso de Educación Primaria porque tan solo un número pequeño de alumnos son capaces aportar argumentos para justificar la regla de obtención de fracciones equivalentes; lo que indica que se trata de una tarea que está en el límite de las capacidades cognitivas de los alumnos de cuarto curso.
- Era propósito de la investigación que todos los participantes llegasen a enunciar alguna regla para la búsqueda de fracciones equivalentes a una dada. Sin embargo, tal exigencia se ha mostrado inadecuada porque plantea a los alumnos de cuarto curso exigencias que desbordan su desarrollo cognitivo.
- La ordenación de fracciones que tienen iguales el denominador o el numerador las resuelven un elevado porcentaje de alumnos. Es de destacar que el número de alumnos que recurren al uso de materiales es significativamente menor que los que utilizan representaciones gráficas o argumentan sobre el tamaño de las fracciones sin necesidad de soportes físicos. Se pone de manifiesto que la economía de tiempo para resolver las tareas condiciona la actividad de los alumnos de modo que tienden a sustituir las manipulaciones de objetos físicos por el uso de argumentos lógicos.
- Conviene destacar el éxito de los alumnos y la gran variedad de estrategias utilizadas cuando comparan fracciones de igual denominador o igual numerador. Es llamativo el hecho de que los alumnos que utilizan los objetos físicos tengan un éxito menor que quienes recurren a las representaciones gráficas; y estos resultados son significativamente menores que el éxito alcanzado por quienes utilizan razonamientos lógicos. Estas observaciones nos permiten avanzar en el modo en que los alumnos alcanzan niveles más altos de comprensión de las ideas matemáticas: los alumnos que tienen un bajo nivel de comprensión necesitan alcanzar sus resultados mediante percepciones visuales, aunque el éxito alcanzado sea muy bajo, porque existen lagunas en la formación de sus ideas; mientras que los alumnos que tienen un grado alto de comprensión no necesitan las percepciones visuales, y son más eficaces al alcanzar el éxito debido a que gestionan bien sus conocimientos.
- Es de destacar que ninguno de los alumnos haya utilizado la equivalencia de fracciones para comparar fracciones con numeradores y denominadores diferentes. De nuevo se pone de manifiesto que para estos alumnos es comprensible la idea de fracción equivalente, pero les resulta muy dificultoso utilizar las fracciones equivalentes conectadas a otros conocimientos sobre fracciones.

- Las dificultades observadas por los escolares de cuarto curso de Educación Primaria a la hora de manejar con símbolos la equivalencia de fracciones aportan datos para el diseño de las propuestas de enseñanza. Así, queda patente la necesidad de respetar el desarrollo evolutivo de los escolares a los que va dirigida la propuesta. En concreto, los alumnos de cuarto curso deberían trabajar la idea de equivalencia de fracciones con la ayuda de materiales manipulativos y de representaciones gráficas, y dejar para quinto curso el manejo simbólico de este concepto y su utilización como estrategia para comparar y operar con fracciones.
- Los alumnos comprenden los significados de las operaciones de suma y resta de fracciones, y de multiplicación y división de una fracción por un número natural porque reconocen estas operaciones cuando resuelven los enunciados de los problemas que se les proponen desde el modelo de medida.
- La secuencia de enseñanza parece bien planificada porque los alumnos dan muestras de manejar con eficacia el concepto de equivalencia según van resolviendo nuevas tareas. Este concepto que es fundamental para operar con fracciones es utilizado de forma aceptable para calcular sumas y restas de fracciones. En el caso de la resta hemos detectado errores asociados, no al cálculo operatorio, sino a una inadecuada evaluación de las cantidad que intervienen en la resta.
- La simbolización de los procesos de cálculo resulta compleja a los alumnos a los que se dirige esta propuesta de enseñanza. Estas dificultades se manifiestan cuando los alumnos de quinto curso confunden la representación simbólica de la multiplicación de una fracción por un número natural con la simbolización de la técnica de obtención de la equivalencia de fracciones "por ampliación". En el caso de la división, la propuesta de enseñanza no contempla la memorización de determinadas reglas y opta por la estrategia que consiste en buscar una fracción equivalente cuyo numerador sea un múltiplo del natural que actúa como divisor. La simbolización de esta estrategia crea, inicialmente, dificultades a los escolares que, posteriormente, se mitigan cuando los alumnos de reciben enseñanza de la fracción desde el modelo de cociente partitivo en temas posteriores de este curso.

VI.5.2. Segundo foco de Investigación

Las principales reflexiones al concluir la Fase de Acción en relación con el segundo Foco de Investigación son las siguientes:

- En este foco se invierte la cuarta parte del tiempo total. Se ha dedicado menos tiempo que al Primer Foco porque la construcción del modelo de cociente partitivo se establece sobre la base del modelo de medida de longitud y porque se introduce la Representación Polinómica Decimal y la Notación Decimal sin estudiar las relaciones y operaciones con la Notación Decimal que se realiza en el Tercer Foco de Investigación.
- Desde la primera tarea los escolares dan muestras de comprender el proceso de reparto igualitario porque saben realizar con materiales el reparto y dibujar el proceso. Ahora

bien, en las tareas de evaluación semántica que son más exigentes porque los alumnos deben encontrar las condiciones iniciales del reparto, hemos detectado dificultades de comprensión en la ubicación temporal de las tres cantidades que intervienen en el reparto, es decir, si intervienen antes o después de realizar el reparto.

- En las tareas de evaluación semántica de las representaciones simbólicas que aparecen en los modelos de cociente se percibe con nitidez la estructura multiplicativa del número racional positivo. Los alumnos deben poner en juego estrategias multiplicativas, a través de la operación multiplicación o de la idea de proporcionalidad, para resolver con éxito la tarea de encontrar las condiciones iniciales reparto a partir del conocimiento de la fracción o de la Representación Polinómica Decimal que expresa el resultado del reparto igualitario.
  Los alumnos de estas edades tienden a utilizar estrategias aditivas antes que las multiplicativas; y en consecuencia, poseen escaso éxito al realizar estas tareas, a pesar de que se han implementado cuatro sesiones más de las inicialmente previstas en la Primera Etapa de la Experimentación. En estas condiciones, el Equipo Investigador decidió suprimir estas tareas y ganar tiempo para reforzar otros contenidos en la Segunda Etapa.
- Los procesos de simbolización matemática presentan dificultades a los alumnos de estas edades y, particularmente, en el modelo de cociente partitivo porque una misma acción de reparto se va a realizar con dos técnicas diferentes dando lugar a dos representaciones distintas: la Representación Fraccionaria y la Representación Polinómica Decimal. No obstante, la acción de enseñanza ha conseguido superar estas dificultades porque los alumnos han construido ambos sistemas de representación en los tiempos previstos inicialmente.
- Las representaciones gráficas han jugado un papel importante en la transición de las acciones manipulativas a las representaciones simbólicas.
- El trabajo de ordenación de fracciones desde el modelo de cociente partitivo permite la aparición de una gran variedad de estrategias que aumenta la riqueza conceptual de la propuesta de enseñanza.
- Los alumnos admiten la notación decimal como recurso para economizar la escritura de unas expresiones polinómicas decimales, que tienen un significado preciso como medida de la cantidad de magnitud que corresponde a cada uno de los participantes en un reparto igualitario.
- En la Propuesta de enseñanza la Notación Decimal aparece asociada al resultado de un reparto igualitario de objetos que poseen determinada cantidad de longitud. El resultado del reparto viene expresado por un número decimal que es la medida de una cantidad de longitud. Por lo tanto, dotar de significado al número decimal exige percibir la cantidad que expresa el número, es decir, representar la cantidad, ya sea con objetos físicos o bien con representaciones gráficas de cantidades de longitud sobre la recta numérica.

- La representación del número decimal sobre la recta numérica no es una tarea elemental para los escolares. Consideramos muy acertada su inclusión en la propuesta didáctica porque se trata de una tarea de alto valor formativo y porque posibilita la evaluación semántica del número decimal en términos de la medida de cantidades de longitud.
- Las técnicas de obtención del número decimal como resultado de un reparto efectuado por fases y la de representar gráficamente cantidades de longitud expresadas mediante números decimales sobre la recta numérica requieren períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo que los previstos en la Primera Etapa de la Experimentación.

VI.5.3. Tercer foco de Investigación

Las principales reflexiones al concluir la Fase de Acción en relación con el tercer Foco de Investigación son las siguientes:

- El 15% del tiempo dedicado a la fase de Acción han correspondido a este foco. Es el de menor duración temporal porque aborda tres temas referidos al número decimal: su conexión con la representación fraccionaria, la relación de orden y las operaciones aritméticas entre números decimales.
- El trabajo con Representaciones Polinómicas Decimales se ha mostrado eficaz para realizar el paso de la Notación Decimal con la Notación Fraccionaria. Los alumnos obtienen buenos resultados cuando el número decimal posee una cifra decimal. Ahora bien, los alumnos de quinto curso obtienen resultados pobres cuando expresan con una fracción números de dos o más cifras decimales. Esta tarea se sitúa de lleno en el terreno simbólico y, por este motivo, pone de manifiesto las dificultades de los alumnos en la gestión simbólica de las operaciones con fracciones y de la simplificación de fracciones.

  La enseñanza de los procedimientos simbólicos de paso de un sistema de representación a otro requiere períodos de instrucción más dilatados en el tiempo, que nuestra implementación de aula no contempla porque estamos comprometidos a respetar la programación del Centro. En consecuencia, estas técnicas deberán ser reforzadas en sexto curso a partir de la buena comprensión conceptual que muestran los escolares de quinto curso de Educación Primaria.
- Los alumnos obtienen buenos resultados en las tareas de ordenación de números decimales. Además su inclusión en la propuesta de enseñanza posibilita que los alumnos pongan en juego una amplia variedad de estrategias correctas. Posteriormente, como consecuencia de la acción de enseñanza que se caracteriza por la construcción social del conocimiento, los alumnos se han decantado mayoritariamente por la estrategia de ordenar por fases.
- La tarea de enunciar reglas resulta compleja a los escolares debido, fundamentalmente, a las dificultades que les plantea expresar por escrito sus ideas. A pesar de esto, podemos afirmar que la mayoría de los alumnos poseen una buena comprensión de las estrategias de comparación de fracciones, lo que les permite conjeturar reglas adecuadas

para ordenar fracciones.

- Los alumnos han recibido enseñanza del significado de las operaciones con números decimales y de los procedimientos de cálculo de éstas mediante la resolución de problemas que modelizan dichas operaciones. La secuencia de enseñanza ha funcionado bien porque cumple el objetivo de dotar de significado a las operaciones con números decimales.

- La enseñanza de los algoritmos de cálculo de las operaciones con decimales plantea el siguiente problema didáctico: los alumnos aprenden a manejar con rapidez los procedimientos de cálculo con decimales debido a su parecido con las técnicas de cálculo con números naturales. Los procedimientos de cálculo con decimales consisten en operar con los números “sin coma”, como si se tratasen de números naturales y, después, aplicar la regla de "situar la coma" en el resultado obtenido.
La aparente sencillez de estas técnicas de cálculo con decimales constituye un obstáculo didáctico porque los alumnos no entienden la necesidad de justificar tales procedimientos de cálculo que conocen por ser "análogos a los de naturales". La enseñanza de los algoritmos de cálculo basada en la aplicación de las reglas "para situar la coma", sin ser justificadas previamente, crea a la larga dificultades y conflictos porque los alumnos carecen de mecanismos conceptuales de control para evaluar sus producciones matemáticas. Nuestra propuesta de enseñanza pretende que los alumnos conjeturen y justifiquen las reglas para "situar la coma" de los algoritmos de las operaciones con decimales utilizando la Representación Polinómica Decimal asociada al número decimal.

- En el caso del algoritmo de la suma de decimales nuestra propuesta didáctica ha funcionado bien porque los escolares expresan mediante Representaciones Polinómicas Decimales los decimales que intervienen como sumandos y son capaces de obtener el resultado de la suma y, además, comprenden la necesidad de sumar las cifras del mismo orden.

- El objetivo de justificar la regla de “situar la coma” en el algoritmo de la multiplicación de un decimal por un número natural no se ha alcanzado en ninguno de las dos Etapas de Experimentación; los alumnos eluden las Representaciones Polinómicas Decimales porque poseen una sintaxis es más compleja que la Notación Decimal y, además, los cálculos resultan particularmente tediosos. En estas condiciones, alcanzar este objetivo precisaría alargar considerablemente la implementación de aula, y esto resulta inviable.

- La justificación de los algoritmos de cálculo debería ser un objetivo de la enseñanza de las matemáticas escolares cuyo estudio se iniciaría con las operaciones de números naturales. Hemos detectado que los alumnos no saben justificar el algoritmo de la resta de decimales con llevadas porque tampoco saben justificar la llevada en el algoritmo tradicional de la resta de naturales, a pesar de que restan con facilidad números decimales.

- El modelo de cociente partitivo ha permitido justificar el algoritmo de la división de un decimal por un natural. Los alumnos dan muestras de comprender el funcionamiento de dicho procedimiento de cálculo a pesar de ser el más complejo porque exige controlar el orden de las unidades que se van repartiendo en cada una de las fases del proceso de reparto.

VI.6. Valoración de la Fase de Acción

Al concluir la Fase de Acción el Equipo Investigador valora que se han cubierto los objetivos propuestos y se ha desarrollado en toda su extensión y complejidad la propuesta didáctica planteada.

Las tareas propuestas a los alumnos han tenido en cuenta todos los conceptos y procedimientos de los sistemas de representación fraccionario y decimal de los números racionales positivos que tienen sentido en los modelos de aprendizaje de medida y de reparto igualitario.

Como hemos ido viendo en los apartados anteriores, las fuentes de información han sido variadas y han permitido recoger la gran riqueza de interpretaciones de los alumnos sobre los significados de los conceptos y procedimientos involucrados, mostrando el conocimiento personal de estos alumnos, sus errores y la comprensión alcanzada por cada uno de ellos.

El estudio de las interacciones didácticas producidas entre el profesor y los alumnos participantes en la Experiencia de aula ha permitido informar de la metodología de aula que sustenta la Propuesta de Enseñanza implementada.

En este momento del desarrollo de la investigación el Equipo Investigador adopta la siguiente decisión basada en los trabajos realizados y en las observaciones y evidencias obtenidas:

Considera que se han cubierto las condiciones establecidas para el trabajo en el aula y, por ello, resulta adecuado continuar el estudio y pasar a la fase siguiente de la metodología de Investigación-Acción.

Damos aquí por concluida la fase de Acción. En el próximo capítulo, Capítulo VII, presentamos y desarrollamos las dos fases restantes, Fase de Observación y Fase de Reflexión de la metodología de Investigación-Acción de este estudio.

Capítulo VII
Observación y Reflexión

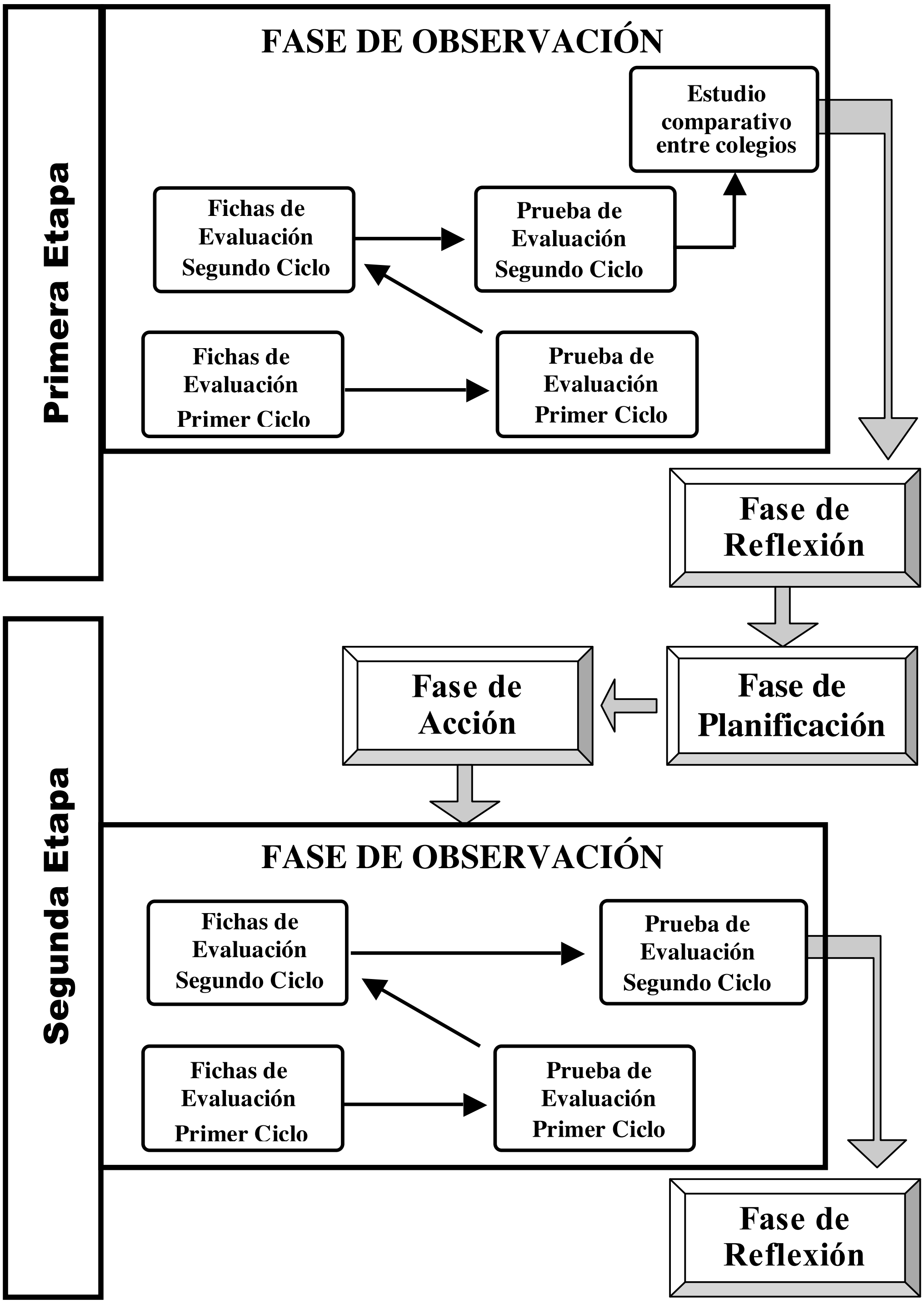
VII.1. Introducción

En el capítulo V hemos presentado y justificado una Propuesta Didáctica original que hemos diseñado para contribuir a la mejora de la enseñanza del Número Racional Positivo en Educación Primaria; y en el capítulo VI hemos descrito su implementación en el aula. Ahora, en este capítulo, nos proponemos analizar los datos obtenidos en la fase experimental y reflexionar sobre las observaciones realizadas, al entender que los resultados de la investigación son las explicaciones de las observaciones realizadas y de los datos obtenidos dentro del marco interpretativo de la metodología de Investigación-Acción que guía este estudio.

La obtención y selección de datos que realizamos en la Fase de Observación se hace de acuerdo con el tipo de trabajo propuesto a los alumnos y con las categorías e instrumentos de análisis diseñados al efecto que están descritos en el Capítulo IV de esta Memoria.

Nuestras principales fuentes de información en la Fase de Observación son las producciones escritas que los alumnos realizan durante *la Fase Experimental de la Propuesta Didáctica*. Pero además, disponemos de dos Pruebas que aportan información complementaria sobre la comprensión de los alumnos en momentos puntuales. Así, los alumnos de las dos Etapas de Experimentación han realizado dos *Pruebas de Evaluación*, seis meses después de concluir los dos Ciclos de Enseñanza; e informan de los conocimientos que perduran en la mente de los alumnos a pesar del paso del tiempo, es decir, de los aprendizajes han consolidado como consecuencia de la enseñanza recibida en curso anterior.

Además, disponemos de los datos que aporta un segundo estudio, que denominamos *Estudio Comparativo entre Colegios,* y que compara la comprensión de los alumnos del C.E.I.P. Tío Jorge que siguieron la implementación de la Primera Etapa y la de los alumnos procedentes de diversos Colegios que están ubicados en la misma zona geográfica que la del Centro donde hemos experimentado la Propuesta Didáctica.
La fase de Observación, en nuestro marco interpretativo de Investigación-Acción, se resume en el siguiente gráfico:



Cuadro VII.1. Diseño de la fase de Observación

La fase de Observación queda articulada en tres grandes apartados:

- Observación y Reflexión de la Fase Experimental de la Propuesta Didáctica.
- Observación y Reflexión de las Pruebas de Evaluación realizadas después de concluir el 1º y 2º Ciclo de cada Etapa Experimental.
- Observación y Reflexión del Estudio Comparativo entre Colegios.

Para simplificar la exposición de los datos y de las reflexiones que éstos suscitan hemos optado por aportar, a la vez, informaciones referidas a los dos Etapas de Experimentación. La aplicación del mismo criterio de intentar simplificar la transmisión de la información recomienda adelantar la Fase de Reflexión y exponer, a la vez, los resultados de la fase de Observación junto con las reflexiones que nos suscita la interpretación de los datos obtenidos.

VII.2. Observación y Reflexión de la Fase Experimental

Los alumnos realizan numerosas tareas durante la fase de acción de modo que resultaría escasamente eficaz gestionar la información que emana de todas ellas. Hemos optado por elegir 23 tareas, que denominados *Fichas de Evaluación,* que son representativas de la enseñanza implementada y cuyo estudio nos permitirá extraer datos y reflexionar sobre la comprensión mostrada por los escolares.

Puesto que la Propuesta Didáctica se articula en tres Focos de Investigación hemos mantenido esta estructura para organizar la información. De acuerdo con la organización de contenidos, hay tres focos de investigación que se subdividen en temas, y cada uno de los temas tiene asignadas unas tareas o trabajos específicos. Por tanto, la información que aquí se presenta se describe según los siguientes niveles:

- Sobre cada foco de investigación.
- Sobre cada Unidad de Análisis de Organización del Contenido.
- Sobre cada tarea o Ficha de Evaluación.

En el análisis de cada tarea o Ficha de Evaluación consideramos los siguientes apartados:

a) Propósitos de la indagación.
b) Trabajo propuesto.
c) Resultados.
e) Valoración.

El estudio de las respuestas escritas que aportan los alumnos cuando resuelven las tareas nos permite reflexionar sobre la compresión de éstos a partir de la valoración de las Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido. En paralelo, los datos que nos suministran los alumnos son analizados a partir de las Unidades de Análisis de Organización del Contenido que nos permiten obtener conclusiones sobre las potencialidades y limitaciones de los modelos de aprendizaje implicados en la Propuesta de Enseñanza. Por este motivo, para cada Unidad de Análisis de Organización del

Contenido (OC) reflexionamos sobre la:

I. Comprensión del Contenido.
II. Organización del Contenido.

VII.2.1. Observación y Reflexión del Primer Foco de Investigación

En esta Fase de Observación las producciones de los escolares al realizar las Fichas de Evaluación aportarán información de la comprensión alcanzada por éstos. También nos permitirá observar las potencialidades y limitaciones de la Propuesta de Enseñanza a partir de la valoración de las Unidades de Organización del Contenido (OC). Se van analizar 13 Fichas de Evaluación que se indican a continuación junto con las Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido y las Unidades de Organización del Contenido que hacen referencia a los temas implementados en la Fase de Acción:

Unidades de Análisis de Comprensión del Contenido	*Unidades de Análisis de Organización del Contenido*	*Fichas de Evaluación (FE)*
CC.I: Interpretaciones en el modelo con magnitudes continuas	OC.I: Concreción del modelo de medida de magnitudes continuas	FE nº 1 y 3
CC.II: Evaluación semántica de la fracción en contextos continuos		FE nº 2 y 4
CC.III: Interpretaciones en el modelo con magnitudes discretas	OC.IV: La medida de magnitudes discretas	FE nº 8
CC.IV: Evaluación semántica de la fracción en contextos discretos		FE nº 9
CC.V: Interpretación del significado y cálculo de la equivalencia de fracciones	OC.II: Equivalencia de fracciones	FE nº 5
CC.VI: Interpretación del significado y cálculo del orden entre fracciones	OC.III: Orden entre fracciones	FE nº 6 y nº 7
CC.VII.1 y CC.VII.2: Interpretación del significado y cálculo de operaciones de suma y resta con fracciones	OC.V: Suma y resta de fracciones	FE nº 10 y nº 11
CC.VII.3 y CC.VII.4: Interpretación del significado y cálculo de operaciones de producto y cociente entre fracciones y números naturales	OC.VI: Producto y cociente entre fracciones y números naturales	FE nº 12 y nº 13

Cuadro VII.2. Unidades de Análisis de Comprensión del Contenido y Fichas de Evaluación en el Primer Foco de Investigación

VII.2.1.1. Modelos de medida de magnitudes continuas

Las ideas sobre la fracción se construyen desde dos modelos de medida de cantidades de magnitud continuas; en primer lugar se miden cantidades de longitud, y en segundo lugar cantidades de superficie. En apartado *Comprensión del Contenido* nos ocupamos de analizar la comprensión que alcanzan los escolares, y en el apartado *Organización del Contenido* reflexionamos sobre las potencialidades y limitaciones de estos modelos utilizados en la Propuesta Didáctica después de observar los datos obtenidos sobre el aprendizaje de los alumnos.

I. Comprensión del contenido

Se analizan los resultados de las Fichas de Evaluación nº 1, 2, 3 y 4. En cada una de las fichas se señalan los objetivos de la indagación, los contenidos de las fichas, los resultados y la valoración de los mismos.

• ***Ficha de Evaluación Nº 1***

a) Propósitos de la indagación

Se trata de evaluar la comprensión que los alumnos poseen de la representación fraccionaria cuando expresan el resultado de la medida de cantidades de longitud.

b) Trabajo propuesto

FICHA DE EVALUACIÓN Nº 1.1

MEDIDA DEL LISTÓN:

1º. Escribe la fracción que expresa longitud del listón: __________ de unidad

2º. Escribe como se lee la longitud del listón: __________________

3ª. Has fraccionado la unidad en _________ partes iguales.

4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ___________________________________

5º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? _________________________________

c) Resultados

Se utilizan las Unidades de Comprensión siguientes que est definidas en el Capítulo IV:

CC.I.1.1: Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida de un listón de longitud 5/4 de unidad.

CC.I.1.2: Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida de un listón de longitud 5/6 de unidad.

CC.I.2.1: Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida de un listón de longitud 5/4 de unidad.

CC.I.2.2: Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida de un listón de longitud 5/6 de unidad.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Los datos obtenidos de los alumnos, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales correspondientes a los dos Etapas experimentales, se recogen en el siguiente cuadro, indicando para cada Unidad de Análisis de la Comprensión las frecuencias absolutas y, entre paréntesis, los porcentajes de respuestas para cada uno de los criterios utilizados:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CC.I.1.1	5 (**12**) // 0 (**0**)	15 (**38**) // 1 (**6**)	7 (**17**) // 5 (**28**)	13 (**33**) // 12 (**67**)
CC.I.1.2	4 (**10**) // 2 (**11**)	19 (**47**) // 1 (**6**)	4 (**10**) // 2 (**11**)	13 (**33**) // 13 (**72**)
CC.I.2.1	5 (**12**) // 0 (**0**)	1 (**3**) // 0 (**0**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	34 (**85**) // 18 (**100**)
CC.I.2.2	4 (**10**) // 2 (**11**)	5 (**13**) // 0 (**0**)	1 (**3**) // 0 (**0**)	30 (**75**) // 16 (**89**)

Tabla VII.1. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 1

d) Valoración

CC.I.1: Sobre los significados del numerador y del denominador de la fracción

- Los alumnos de la Primera Etapa tienen dificultades para expresar, con palabras adecuadas, los significados del numerador y denominador de la fracción. Era previsible que estas dificultades aparecieran en los momentos iniciales de la secuencia de enseñanza dado que, además, la metodología de la propuesta no prevé la memorización de determinadas frases para que los alumnos las reciten cuando sean preguntados por los significados del numerador y denominador: resulta más enriquecedor para los alumnos que sean éstos los que realicen una interpretación personal del papel que juegan los términos de la fracción.
- Los resultados mejoran en la **Segunda Etapa** como consecuencia de modificaciones en la metodología de enseñanza, puesto que los alumnos utilizan sus cuadernos donde guardan la información referida a los significados del numerador y denominador de la fracción que han sido institucionalizados en tareas precedentes.

CC.I.2: Sobre la utilización de la representación simbólica fraccionaria para medir

- Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación encuentran con facilidad la representación fraccionaria que expresa la medida de cantidades de longitud.
- En la Segunda Etapa se ha modificado parte del tangible que utilizan los alumnos de cuarto curso: las unidades de longitud que antes eran cañas de plástico pasan a ser tiras de papel de modo que, ahora, los alumnos tienen que fraccionar la unidad en cada tarea de medida y no disponen de subunidades previamente fraccionadas. Esta modificación mejora la comprensión de los alumnos de la Segunda Etapa porque éstos vinculan, en todo momento, la longitud de la subunidad con la de la unidad de medida.

- Las fracciones propias e impropias se consideran de la misma naturaleza y poseen el mismo significado. Los alumnos no encuentran dificultades conceptuales en el hecho de que la cantidad a medir sea mayor o menor que la unidad de medida.
- Desde las primera tareas de medida los alumnos de la Primera Etapa reconocen la idea de equivalencia de fracciones porque la tercera parte de los alumnos de 4º curso que miden correctamente utilizan la fracción $\frac{10}{8}$ de unidad, mientras que el resto de los alumnos escriben $\frac{5}{4}$ de unidad. En la tarea de medida del listón de longitud $\frac{5}{6}$ de unidad los alumnos de la Primera Etapa no aportan como resultado ninguna fracción equivalente porque, en este momento, no disponen de subunidades de longitud $\frac{1}{12}$ de la unidad.
- Las modificaciones introducidas, en la **Segunda Etapa**, que afectan al material utilizado como unidad de medida retrasa la aparición de la fracción equivalente en las tareas de medida directa. En efecto, mientras que los alumnos de la Primera Etapa utilizan como subunidades cañas de plástico que han fraccionado en sesiones anteriores y que guardan en cajas, los de la Segunda Etapa utilizan tiras de papel para construir la subunidad adecuada mediante fraccionamientos de la unidad que éstos deben realizar físicamente. Este uso del material les obliga a ser sistemáticos en la búsqueda de la subunidad adecuada, de modo que comienzan probando con unidades enteras y después con fraccionamientos cada vez más pequeños de la unidad de medida.

• ***Ficha de Evaluación Nº 2***

a) Propósitos de la indagación

Se trata de indagar si los alumnos comprenden el significado del numerador y del denominador de una fracción propia y de otra impropia que expresan el resultado de la medida de una cantidad de longitud.

b) Trabajo propuesto

Se proponen cuatro tareas cortas de evaluación semántica de la fracción para cada una de las siguientes fracciones: $\frac{6}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{8}$. Los enunciados de las tareas tienen el siguiente formato:

Quieres construir un listón de longitud $\frac{6}{5}$ de unidad
¿Cuántas subunidades necesitas? ________________________________
¿De qué longitud son las subunidades que necesitas? ______________________

Los alumnos de las dos Etapas de Experimentación no han resuelto las tareas con las misma fracciones. Así, los alumnos de la Primera Etapa resuelven la ficha de modo que medio grupo evalúa la fracción $\frac{6}{5}$ de unidad y el otro medio grupo la fracción $\frac{4}{7}$ de unidad; mientras que los alumnos de la Segunda Etapa han realizado dos tareas: una para evaluar la fracción $\frac{5}{3}$ de unidad y otra para evaluar la fracción $\frac{7}{8}$ de unidad.

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CC.II.1.Fr. propia: Evaluación semántica de las notaciones simbólicas para construir la cantidad de magnitud expresada por una fracción propia.

CC.II.1.Fr. impropia: Evaluación semántica de las notaciones simbólicas para construir la cantidad de magnitud expresada por una fracción impropia.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 2, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. El siguiente cuadro recoge los resultados globales:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CC.II.1 Fr pro	2 (**10**) // 0 (**0**)	6 (**29**) // 7 (**39**)	2 (**10**) // 0 (**0**)	11 (**52**) // 11 (**61**)
CC.II.1 Fr imp	2 (**10**) // 0 (**0**)	8 (**42**) // 12 (**67**)	0 (**0**) // 1 (**6**)	9 (**47**) // 5 (**28**)

Tabla VII.2. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 2

d) Valoración

- Las tareas de evaluación semántica de la fracción presentan a los alumnos mayores dificultades conceptuales que las tareas de medida directa de cantidades de magnitud porque las primeras exigen del alumno realizar una interpretación de la representación simbólica de la fracción a través de un proceso mental sin la ayuda de un soporte físico concreto. En efecto, los alumnos inicialmente deben interpretar los términos de la fracción para resolver la tarea.
- Aproximadamente la mitad de los alumnos de las dos Etapas evalúan de forma adecuada el contenido semántico de la fracción y de los términos de ésta.
- En las primeras tareas de evaluación semántica de la fracción, los alumnos interpretan con mayor dificultad las fracciones impropias que las fracciones propias. Parece razonable que la evaluación semántica de una fracción impropia sea una tarea más

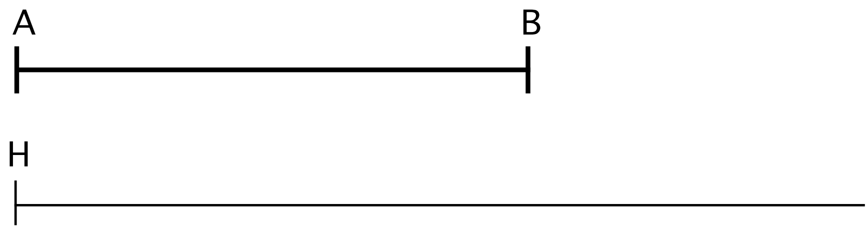
compleja que la de evaluar una fracción propia porque resulta obligado discriminar las unidades enteras y, después, proceder a la evaluación semántica de la fracción propia; sin embargo, los resultados hallados no aportan evidencias contundentes de este hecho.

• ***Ficha de Evaluación Nº 2 BIS***

a) Propósitos de la indagación
El mismo de la Ficha de Evaluación Nº 2 al que se le añade indagar si los alumnos saben construir gráficamente la cantidad de longitud a partir del conocimiento de la notación fraccionaria que expresa la medida de su cantidad de longitud.

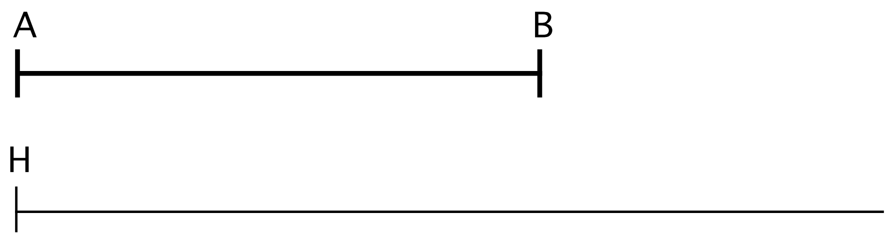
b) Trabajo propuesto
En la **Segunda Etapa**, se han introducido dos nuevas tareas de evaluación semántica de la fracción como medida de cantidades de longitud, que se muestran a continuación:

Dibuja, a partir del punto H, un segmento que mida una longitud de $\frac{5}{4}$ *de AB*



Explica que has hecho para dibujar el segmento: ______________________________

Dibuja, a partir del punto H, un segmento que mida una longitud de $\frac{4}{3}$ *de AB*



Explica que has hecho para dibujar el segmento: ______________________________

Se utilizan la siguiente Unidad de Comprensión:
CC.II.2: Razonamientos empleados para construir gráficamente una cantidad de magnitud longitud.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 2BIS, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.1. y se muestran a continuación:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CC.II.2 (Fr. 5/4)	--- // 1 (**6**)	--- // 3 (**17**)	--- // 2 (**11**)	--- // 12 (**67**)
CC.II.2 (Fr. 4/3)	--- // 1 (**6**)	--- // 4 (**22**)	--- // 1 (**6**)	--- // 12 (**67**)

Tabla VII.3. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 2BIS en la Segunda Etapa

d) Valoración

- Las tareas de evaluación semántica de la fracción presentan a los alumnos mayores dificultades conceptuales que las tareas de medida directa de cantidades de magnitud porque, inicialmente, los alumnos deben interpretar los términos de la fracción para resolver la tarea. Después, cuando reconocen el fraccionamiento de la unidad, pueden construir la cantidad de longitud. Esto es lo hace el alumno B13 cuando al resolver la segunda tarea de la Ficha de Evaluación Nº 2BIS escribe:

  Hice tercios y me puse a medir hasta tener un segmento de cuatro tercios

- El porcentaje de éxito de los alumnos de la Segunda Etapa se eleva hasta el 67%. La mejora en el rendimiento se debe a que los alumnos han resuelto estas tareas en un momento posterior de la secuencia de enseñanza correspondiente a cuarto curso en el que los alumnos han estudiado la fracción como resultado de la medida de cantidades de superficie. La experimentación de aula nos ha permitido constatar que existe transferencia de significados de un modelo a otro modelo de medida; que hace que los escolares mejoren su rendimiento conforme va avanzando la secuencia de enseñanza.
- La inclusión de dos nuevas Fichas de Trabajo en la Segunda Etapa Experimental, donde las tareas de medida y de evaluación semántica se realizan sobre un soporte gráfico, han supuesto una mejora en el rendimiento de los alumnos de cuarto curso.
- Las respuestas de los alumnos en las Fichas de evaluación semántica que se introducen en la Segunda Etapa ponen de manifiesto la conveniencia de utilizar representaciones gráficas porque:
  a) favorecen la formación de ideas abstractas al enfatizar el carácter arbitrario de la unidad de medida, dado que en las tareas textuales ésta sufre cambia de tamaño, y
  b) invitan al alumno a abandonar, de forma gradual, las acciones con objetos tangibles.

• *Ficha de Evaluación Nº 3:*

a) Propósitos de la indagación

Se quiere indagar sobre dos tipos de tareas: la primera consiste en medir con la ayuda de materiales manipulativos, y la segunda consiste en dotar de significado al numerador y denominador de la fracción.

b) Trabajo propuesto

1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel: ——— de unidad
2º. Escribe como se lee la fracción: ______________________________
3ª. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ______________________
4º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? _____________________

En la Segunda Etapa se incorpora a esta Ficha una nueva pregunta:

Has fraccionado la unidad en _____ partes iguales

que se intercala entre la 2ª y 3ª pregunta del enunciado de la Ficha inicial.

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CC.I.1: Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida.

CC.I.2: Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 3, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.1. El siguiente cuadro recoge los resultados globales:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CC.I.1	4 (**10**) // 0 (**0**)	15 (**37**) // 4 (**22**)	7 (**18**) // 1 (**6**)	14 (**35**) // 13 (**72**)
CC.I.2	4 (**10**) // 0 (**0**)	5 (**12**) // 0 (**0**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	31 (**78**) // 18 (**100**)

Tabla VII.4. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 3

d) Valoración

CC.I.1: Sobre los significados del numerador y del denominador de la fracción

- Los alumnos de la Primera Etapa de Experimentación siguen teniendo dificultades para expresar, con palabras adecuadas, los significados del numerador y denominador de la fracción. Sin embargo, los alumnos de la Segunda Etapa obtienen mejores resultados como consecuencia de modificaciones en la metodología de enseñanza introducidas en esta Etapa. En efecto, estos últimos alumnos han recibido enseñanza explícita de los significados del numerador y del denominador de la fracción de modo que tienen escrita esta información en sus cuadernos y pueden disponer de ella en el momento de resolver las tareas. Los alumnos de la Primera Etapa no disponían de esta información porque se deseaba que realizasen una interpretación personal del papel que juegan los términos de la fracción. La experiencia de aula nos alerta que la metodología seguida en la Primera Etapa de la Experimentación no se adecua a las capacidades cognitivas de los alumnos de cuarto curso de Educación Primaria y, por lo tanto, se ha modificado en la Etapa posterior, en el sentido de que el profesor institucionaliza los significados del numerador y del denominador de la fracción al recoger y sintetizar las interpretaciones que realizan los escolares cuando resuelven las primeras tareas de medida.

- En las dos Etapas de Experimentación se observan diferencias importantes entre la unidad de comprensión que informa del significado de los términos de la fracción (CCI.1) y la que evalúa la capacidad para expresar el resultado de la medida (CCI.2).
  Los alumnos obtienen un rendimiento muy alto en tareas de medida directa y, sin embargo, el rendimiento desciende cuando expresan los significados de los términos de la fracción. Se concluye que explicitar los significados del numerador y denominador de una fracción no es una tarea sencilla dado que los alumnos tienen que coordinar los tres objetos intervienen simultáneamente en los procesos de medida: la unidad, la subunidad que se construye y el objeto a medir.

CC.I.2: Sobre la utilización de la representación simbólica

- Los alumnos de las dos Etapas de Experimentación encuentran con facilidad la representación fraccionaria que expresa la medida de la cantidad de superficie que posee la cartulina que se les entrega. En la Segunda Etapa la tasa de éxito es del 100%.
- La gestión del material con el modelo de superficie ha sido común en las dos Etapas de Experimentación de modo que los alumnos han necesitado construir, en cada tarea de medida, sus propias subunidades. Esta decisión posibilita una mayor comprensión de la idea de unidad de medida porque los alumnos relacionan en todo momento la cantidad de la unidad de medida y la de las subunidades que construyen. En este sentido se recuerda que los alumnos de la Primera Etapa utilizaron, en el modelo de longitud, cañas que estaban previamente fraccionadas en partes iguales.
- Según avanza la secuencia de enseñanza aparece, de forma nítida, el concepto de equivalencia de fracciones. En efecto, en la siguiente tabla se muestran el número de alumnos y, entre paréntesis, los porcentajes de los alumnos de las dos Etapas de Experimentación que aportan una u otra fracción equivalente:

Etapas de la Experimentación Fracciones equivalentes	**1ª Etapa**	**2ª Etapa**
15/8 de unidad	25 (**63**)	15 (**83**)
30/16 de unidad	6 (**15**)	3 (**17**)

Tabla VII.5. Equivalencia de fracciones en la Ficha de Evaluación nº 3

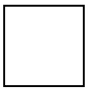
• *Ficha de Evaluación Nº 4:*

a) Propósitos de la indagación

Se indaga sobre la comprensión que los alumnos poseen de la fracción que expresa el resultado de la medida de cantidades de superficie. Esta Ficha solo se implementó en la Segunda Etapa y se pretende que los alumnos de cuarto curso representen de modo gráfico cantidades de superficie cuya medida viene dada por una fracción.

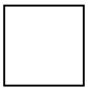
b) Trabajo propuesto

1º. Dibuja una figura cuya superficie sea 5/4 de unidad



Explica qué has hecho para dibujar la figura

2º. Dibuja una figura cuya superficie sea 4/3 de unidad



Explica qué has hecho para dibujar la figura.

c) Resultados

Se utiliza la siguiente Unidad de Análisis de la Comprensión:

CCII.2: Razonamientos empleados para construir gráficamente cantidades de superficie.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 4, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CC.II.2 (Fr. 5/4)	--- // 0 (**0**)	--- // 4 (**22**))	--- // 1 (**6**)	--- // 13 (**72**)
CC.II.2 (Fr. 4/3)	--- // 0 (**0**)	--- // 4 (**22**)	--- // 2 (**11**)	--- // 12 (**67**)

Tabla VII.6. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 4 en la Segunda Etapa

d) Valoración

- Los alumnos entienden la tarea y dan muestras de comprender el carácter arbitrario de la unidad de medida. En la Ficha de Evaluación nº 4 la unidad de superficie viene dada mediante un gráfico mientras que en las tareas precedentes de medida directa la unidad tiene como soporte concreto una hoja cuadrada de papel.
- Los resultados obtenidos por los alumnos en las tareas de evaluación semántica de la fracción desde el modelo de superficie son análogos a los obtenidos por los mismos escolares desde el modelo de longitud: los dos tercios de los alumnos saben construir las cantidades de magnitud de superficie $\frac{5}{4}$ y $\frac{4}{3}$ de unidad.
- Los porcentajes de éxito de los alumnos en tareas de evaluación semántica de la fracción como resultado de la medida de cantidades de magnitud superficie bajan con respecto a las tareas de medida directa lo que induce a pensar que las tareas de evaluación semántica son conceptualmente más complejas que las de medida directa.

II. Organización del contenido

• La decisión de comenzar la enseñanza con el modelo de medida de longitud (ML) ha sido acertada porque los objetos que se utilizan, y la magnitud que se mide, facilitan a los alumnos la percepción visual de la cantidad de magnitud y, en consecuencia, la construcción de ideas abstractas sobre la fracción.

• El modelo de medida con la magnitud longitud ha funcionado bien en la propuesta de enseñanza porque los resultados obtenidos son aceptables: casi todos los alumnos saben expresar, con una fracción, el resultado de la medida de cantidades de longitud; dan muestras de comprender los significados del numerador y del denominador de la fracción; y saben construir la cantidad de longitud que viene expresada por una fracción.

• Las tareas de evaluación semántica de la fracción como resultado de la medida de cantidades de magnitud longitud resultan adecuadas para aumentar la comprensión del concepto de fracción a pesar de que se tratan de tareas conceptualmente más complejas que las de medida directa.

• Los modelos de medida respetan la fenomenología de la fracción de manera que la fracción propia e impropia surgen de modo natural y poseen el mismo significado. Los alumnos no encuentran dificultades conceptuales en el hecho de que la cantidad a medir sea mayor o menor que la unidad de medida.

• La decisión de implementar el modelo de medida de superficie (MS) con posterioridad al de longitud se muestra acertada. El trabajo previo que realizan los escolares en la tareas de medida de cantidades de longitud ha posibilitado la mejora los resultados en la tareas de medida de cantidades de superficie.

• El modelo de medida con la magnitud superficie ha funcionado bien en la propuesta de enseñanza porque los alumnos saben expresar, con una fracción, el resultado de la medida de cantidades de longitud y dan muestras de comprender los significados del numerador y del denominador de la fracción a pesar de que los alumnos siguen teniendo dificultades para expresar, oralmente y por escrito, estas ideas.

• Los alumnos han admitido con cierta naturalidad el hecho de que la misma cantidad de superficie tenga formas diferentes. Pensamos, por tanto, que el modelo superficie ofrece mayores posibilidades que el modelo longitud para asociar la fracción al resultado de la medida, por cuanto el alumno puede percibir que lo esencial de la medida es la cantidad y no la forma.

• En el modelo de superficie, al igual que el modelo de longitud, aparecen de forma natural ideas sobre equivalencia de fracciones en tanto en cuanto el resultado de la medida de una misma cantidad de superficie puede ser expresada con diferentes numeradores y denominadores.

• En la **Segunda Etapa,** como resultado de la reflexión sobre los resultados de la Primera Etapa, se han introducido las siguientes modificaciones en la propuesta didáctica:

- Se permite que los alumnos utilicen, cuando resuelven la tarea, sus cuadernos de clase donde tienen escritos los significados del numerador y denominador de la fracción. De esta forma, los alumnos de la Segunda Etapa obtienen mejores resultados que los de la Primera Etapa.
- Los alumnos utilizan como unidad de longitud tiras de papel y no disponen de subunidades previamente fraccionadas para encontrar la subunidad adecuada que resuelve el problema de la medida. De esta forma, los alumnos se ven obligados a fraccionar la unidad al realizar cada tarea de medida. Esta forma diferente de gestionar el material hace que los escolares de la Segunda Etapa tiendan a aportar como solución de la medida una única fracción, la que se construye con la subunidad de mayor longitud, y que se retrase la aparición de la equivalencia de fracciones. Consideramos prioritario que los alumnos comprendan la conexión entre la subunidad que han encontrado y la unidad de magnitud, es decir, comprendan el proceso de medida a pesar de que el concepto de equivalencia surja posteriormente y de que los períodos de enseñanza se dilaten en el tiempo.
- La utilización de representaciones gráficas constituye una potencialidad de la propuesta de enseñanza que se detecta en la mejora del rendimiento de los alumnos, porque favorecen el tránsito de las acciones con materiales tangibles a la representación simbólica de la fracción.
- El uso de representaciones gráficas obliga a modificar el tamaño de la unidad. Este hecho pone de manifiesto el carácter arbitrario, pero a la vez fundamental, de la unidad de medida: los alumnos comprenden que lo importante son las acciones de fraccionamiento que realizan sobre la unidad de medida con independencia de la cantidad de magnitud que ésta posea.

VII.2.1.2. Modelo de medida de la magnitud cardinalidad

Las magnitudes discretas presentan aspectos diferenciados de las magnitudes continuas, por lo que interesa abordar la construcción de ideas sobre el número racional desde el modelo sustentado por la magnitud cardinalidad.

<u>I. Comprensión del contenido</u>

Se analizan los resultados de las Fichas de Evaluación nº 8 y nº 9. En cada una de las fichas se señalan los objetivos de la indagación, los contenidos de las fichas, los resultados y la valoración de los mismos.

• ***Ficha de Evaluación Nº 8***

a) Propósitos de la indagación

Se estudian los resultados de los alumnos al resolver una tarea de medida de una parte de una colección de objetos discretos. La colección de objetos se considera como unidad de media y se propone medir tres subconjuntos la colección. Se pretende indagar si los alumnos utilizar la representación fraccionaria para expresar la medida de un subconjunto de la colección cuando se considera el cardinal de la colección como unidad de medida.

b) Trabajo propuesto

" *Has comprado una bolsa que contiene 16 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 12 bombones. ¿Qué parte de la bolsa has comido?"*

Vas a resolver el problema de diferentes maneras:

La unidad es el número de bombones que hay en la bolsa.

1º Si fraccionas la unidad en 16 partes iguales, cada subunidad (es un bombón) es de medida $\frac{1}{16}$ *de la unidad.*

Y la solución es: He comido ——— *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa*

2º Si fraccionas la unidad en 8 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 2 bombones) es de medida $\frac{1}{8}$ *de la unidad*

Y la solución es: He comido ——— *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa*

3º Si fraccionas la unidad en 4 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 4 bombones) es de medida $\frac{1}{4}$ *de la unidad*

Y la solución es: He comido ——— *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa.*

En la Segunda Etapa se presentó a los alumnos una ficha de evaluación similar a la presentada, pero se introdujeron preguntas sobre el significado del numerador y el denominador en cada una de los tres apartados del enunciado de la tarea.

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión:

CCIII.1: Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida.

CCIII.2: Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase

1.- Interpretación errónea o inadecuada

2.- Interpretación dudosa o incompleta

3.- Interpretación correcta o bastante probable

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 8, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro haciendo notar que la unidad CCIII.1 solamente se puede evaluar en la Segunda Etapa, pues aquí si se incluían preguntas concretas sobre el significado del numerador y el denominador:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCIII.1	// 2 (**11**)	// 4 (**22**)	// 0 (**0**)	// 12 (**67**)
CCIII.2	6 (**15**) // 2 (**11**)	8 (**20**) // 0 (**0**)	3 (**7**) // 0 (**0**)	23 (**58**) // 16 (**89**)

Tabla VII.7. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 8

e) Valoración

- La técnica de medida, con magnitudes discretas, se ha mostrado más compleja que en el caso de magnitudes continuas. Esto es debido a la naturaleza de la magnitud considerada: la unidad de medida está formada por un conjunto de objetos indistinguibles, cada uno de los cuales constituye la unidad básica en las actividades de recuento. Los alumnos disponen de policubos con los que representar los objetos de los enunciados de las tareas y, en estas condiciones, tienden a considerar el policubo como unidad de medida en lugar de la colección de policubos. En estas condiciones, los alumnos intentan resolver las tareas con números naturales y se reafirman en la idea de que con estos números sirven para resolver todos los problemas. El profesor ha tenido que realizar más intervenciones de las inicialmente previstas para familiarizar al alumno con la medida de magnitudes discretas.

- Los resultados de la unidad de comprensión CCIII.2 indican que los alumnos saben expresar, con una fracción, la cantidad de una parte de una colección (unidad) formada por objetos discretos. Los datos de la Segunda Etapa de Experimentación muestran que todos los alumnos que realizan la tarea utilizan correctamente la fracción para expresar la cardinalidad de una parte de la colección.

- La Unidad de Comprensión CCIII.1 indaga el significado que los alumnos otorgan a los términos de la fracción que expresa la medida de la cardinalidad de un subconjunto de una colección de objetos. El rendimiento de los alumnos de la Segunda Etapa de Experimentación en esta unidad de Comprensión baja hasta el 67%.

  Hemos detectado dificultades en la comprensión de la fracción como resultado de la medida de la magnitud cardinalidad como consecuencia de:

  a) la escasa relevancia que conceden los alumnos a la unidad de medida (caja, paquete o bolsa de objetos) dado que la confunden con la unidad básica (el objeto)

  b) la confusión entre el fraccionamiento de la unidad y el tamaño de las subunidades.

  Algunos alumnos optan por hacer grupos de tantos objetos como indica el denominador.

  Por ejemplo, el alumno B04 responde correctamente a la tercera pregunta de la Ficha porque afirma que 1/4 de la caja es la fracción que expresa la parte de caja que queda después de haber comido 12 de los 16 bombones que contenía inicialmente la caja. Sin embargo, cuando se le pregunta por el significado del numerador yerra al escribir:

  "*que no me he comido 1 unidad*"

  Por otra parte, la alumna B12 muestra un buen nivel de comprensión cuando afirma que el significado del numerador es:

  "*el grupo de 4 bombones que no te has comido*"

• *Ficha de Evaluación Nº 9*

a) Propósitos de la indagación

Se estudian los resultados con la intención de indagar si los alumnos encuentran el cardinal de una parte de la colección cuando disponen de dos datos: el cardinal de la colección y la fracción que expresa la medida del cardinal de una parte de la colección. Ahora bien, cuando los alumnos realizan esta Ficha no conocen la regla para calcular la "fracción de una cantidad" y, por lo tanto, no deseamos evaluar este procedimiento; lo que queremos es indagar la comprensión que poseen los alumnos de la fracción como resultado de la medida de la cardinalidad cuando:

1º Construyen el cardinal de la colección cuya medida expresa la fracción, y
2º Argumentan sobre los significados del numerador y denominador de la fracción.

b) Trabajo propuesto

En mi clase estamos 25 alumnos en total entre niños y niñas. Si sabemos que los $\frac{4}{5}$ de los alumnos de la clase son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase?. ¿Cuántos niños hay en la clase?
Solución: En la clase hay ________ niñas. En la clase hay ________ niños.
Explica como has obtenido la solución:____

Después de resolver el problema, contesta las preguntas:

1º ¿Cuál es la unidad de medida? ____

2º ¿Qué indica el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$*?*________________________________

3º ¿Qué indica el numerador de la fracción $\frac{4}{5}$*?*__________________________________

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCIV.1: Argumentaciones sobre el significado del numerador y denominador de la fracción.

CCIV.2: Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para construir la cantidad de magnitud de cardinalidad.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 9, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCIV.1	1 (**3**) // 1 (**6**)	19 (**48**) // 1 (**6**)	7 (**18**) // 0 (**0**)	13 (**33**) // 16 (**89**)
CCIV.2	1 (**3**) // 1 (**6**)	6 (**15**) // 0 (**0**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	33 (**83**) // 17 (**94**)

Tabla VII.8. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 9

e) Valoración

- Los datos obtenidos en esta Ficha de Evaluación confirman los obtenidos en la Ficha de Evaluación nº 8 en el sentido de que los alumnos interpretan la fracción con más dificultad en el modelo de la cardinalidad que en los modelos de magnitudes continuos.
- Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación saben construir la cantidad de magnitud (Unidad de Comprensión CCIV.2) a partir de la evaluación semántica de la fracción, como muestran los buenos resultados obtenidos. Las modificaciones metodológicas introducidas en la Segunda Etapa explican la mejora de los resultados: mientras los alumnos de la Primera Etapa utilizan representaciones gráficas, los alumnos de la Segunda Etapa disponen, si lo desean, de policubos como material manipulativo para resolver las tareas de evaluación semántica.

- El resultado de los alumnos de la Segunda Etapa de Experimentación en la Unidad de Comprensión CCIV.1 es superior al obtenido por los alumnos de la Primera Etapa. La mejora en la comprensión se debe a los cambios metodológicos introducidos, que se concretan, principalmente, en potenciar el uso de material manipulativo y evitar el abandono prematuro de estrategias cercanas al modelo.
- Los alumnos de la Segunda Etapa razonan a partir del significado de la fracción como resultado de la medida de la cardinalidad. Casi todos los alumnos aportan argumentos valiosos, como el de la alumna B12 que en la ficha nº 29 escribe:

  He hecho grupos de 5 con 5 niños y e quitado 4 grupos que son las niñas osea 20 chicas y 5 chicos (sic)

- Los alumnos de la **Segunda Etapa** no reciben enseñanza de la regla para calcular “la fracción de una cantidad” porque se desea que sean ellos quienes la conjeturen. Esta modificación en la metodología de aula ha resultado satisfactoria porque un tercio de los alumnos de la Segunda Etapa han sido capaces de enunciar correctamente dicha regla. Este hecho constituye una potencialidad de la propuesta didáctica implementada y nos reafirma en la idea de que los alumnos deben realizar abundantes acciones interactuando con el modelo de aprendizaje como paso previo al trabajo simbólico que es propio de las matemáticas.

II. Organización del contenido

• Las dificultades que muestran los alumnos para dotar de significado a los términos de la fracción que expresa la medida de una colección de objetos, cuando el atributo que se considera es la cardinalidad, son de origen epistemológico y guardan una estrecha relación con las característica específicas de la medida de cantidades discretas. En efecto, el número natural resuelve el problema de la medida de cualquier colección de objetos cuando se considera como unidad uno de los objetos. Sin embargo, la fracción como medida de la cardinalidad no pertenece a la génesis histórica del número racional positivo.

En la actualidad, este significado de la fracción posee un uso social para describir la comparación multiplicativa entre una parte y el total de la colección de objetos discretos. Desde una perspectiva docente se trata de un contenido curricular relevante que se enseña desde el significado parte-todo y no desde el modelo de medida. Nuestra propuesta didáctica estudia la fracción como resultado de la medida de cantidades discretas teniendo en cuenta las características peculiares que presenta con respecto a la medida de cantidades de magnitud continuas.

• Los alumnos comprenden el significado de la fracción como resultado de la medida de la cardinalidad y saben construir una cantidad de magnitud a partir del conocimiento de la fracción que se suele denominar “cálculo de la fracción de una cantidad”. No obstante, hemos detectado en los escolares dificultades para argumentar sobre el significado de la fracción desde el modelo cardinalidad dada las características específicas que presenta este modelo de aprendizaje.

• Los alumnos de cuarto curso, de nivel de comprensión medio-alto, son capaces de conjeturar la regla para calcular "la fracción de una cantidad" cuando el diseño de la secuencia de enseñanza se ajusta a los tiempos de aprendizaje de los escolares y se mantiene la metodología empleada en la Segunda Etapa de Experimentación.

• El Equipo Investigador introduce dos restricciones en el momento de plantear las tareas de medida de cantidades discretas con la intención de facilitar la interpretación y la resolución de las tareas de medida, y que son:

1º sugerir fraccionamientos adecuados de la unidad de medida en los enunciados de las tareas, y
2º interrogar por el cardinal de una colección que es un subconjunto de otra colección cuyo cardinal es la unidad de medida.

Con la primera restricción, además de facilitar a los alumnos la resolución de la tarea, se pretende reforzar el significado de la equivalencia de fracciones. Con la segunda restricción la pregunta que se formula en la tareas de medida admite una expresión más cercana a las propuestas tradicionales de enseñanza, más sencilla de entender y cuya expresión es: "¿Qué parte de la unidad es …?"
Queda por indagar, en futuras fases experimentales, los efectos que produciría implementar tareas de medida de cardinalidad no sometidas a la segunda restricción, y que admiten enunciados como el siguiente:

"Si las cajas de bombones tienen 12 bombones,
¿cuántas cajas puedes llenar con 16 bombones?"

En nuestra investigación hemos eludido plantear problemas de este tipo porque pueden ocasionar interferencias entre la representación fraccionaria y la división de números naturales. Los alumnos de cuarto curso utilizan la división de números naturales para resolver problemas del tipo división-agrupamiento como el que hemos enunciado. Pero, en estas condiciones, es muy difícil que los alumnos perciban la representación fraccionaria como respuesta adaptada a este problema y que la solución dada por medio del número natural aparezca como insuficiente. Es decir, los problemas de división-agrupamiento que los alumnos resuelven con la división entera de números naturales no aportan las condiciones de necesidad que hacen surgir la representación fraccionaria.

VII.2.1.3. Equivalencia de fracciones

Interesa conocer el modo en que los alumnos comprenden, y asumen, la idea de expresar una misma cantidad de magnitud de formas diferentes. Además, interesa conocer cómo utilizan la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes.

I. Comprensión del contenido

Se analizan los resultados de la Ficha de Evaluación Nº 5. En esta ficha se señalan los objetivos de la indagación, los contenidos de las fichas, los resultados y la valoración de los mismos.

• *Ficha de Evaluación Nº 5*

a) Propósitos de la indagación

Se estudian los resultados de la Ficha de Evaluación nº 5 que indaga la comprensión de los escolares del concepto de equivalencia de fracciones sobre la base de dos actividades:

1º la obtención de fracciones equivalentes a una dada, y

2º la justificación razonada del porqué dos fracciones son equivalentes.

b) Trabajo propuesto

"Debes construir con las cañas, un listón de longitud $\frac{2}{3}$ de la caña unidad.

Sin deshacer el listón que has hecho, construye un listón de la misma longitud utilizando subunidades de $\frac{1}{6}$ de la caña unidad"

Pregunta 1: "Expresa con otra fracción diferente la longitud del listón que has construido"

Pregunta 2: "¿Por qué la fracción que has escrito es equivalente a $\frac{2}{3}$?"

Pregunta 3: ¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a la fracción $\frac{2}{3}$? Explica cómo la has obtenido"

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCV.1: Argumentaciones sobre el significado de la equivalencia de fracciones.

CCV.2: Razonamientos empleados para construir fracciones equivalentes a otra dada.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 5, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCV.1	3 (**8**) // 0 (**0**)	10 (**25**) // 1 (**6**)	19 (**48**) // 15 (**83**)	8 (**20**) // 2 (**11**)
CCV.2	3 (**8**) // 0 (**0**)	2 (**5**) // 1 (**6**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	35 (**88**) // 17 (**94**)

Tabla VII.9. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 5

d) Valoración

CCV.1: Argumentaciones sobre el significado de la equivalencia de fracciones

- Los alumnos de las dos Etapas de Experimentación comprenden el significado de equivalencia de fracciones porque saben encontrar fracciones equivalentes a una con la ayuda de material manipulativo. Este resultado era previsible porque la secuencia de enseñanza implementada en cuarto curso contempla abundantes experiencias de búsqueda de fracciones equivalentes a una dada utilizando objetos que poseen cantidades de magnitud longitud y de superficie.

- Los alumnos tienen dificultades para justificar, desde el modelo de aprendizaje, por qué la fracción que han encontrado es equivalente. La mayoría de los alumnos aportan argumentos basados en la regla de obtención de fracciones equivalentes de este tipo:

  $\frac{4}{6}$ *es equivalente a* $\frac{2}{3}$ *porque si multiplicas por 2 el numerador y denominador de* $\frac{2}{3}$ *te da* $\frac{4}{6}$ (A01)

  Es decir, los alumnos se muestran reticentes a realizar argumentaciones basadas en el modelo de medida y, por lo tanto, optan por enunciar la regla de obtención de fracciones equivalentes. Si observamos los datos de la Unidad de Comprensión CCV.1 vemos que, aproximadamente, el 50% de los alumnos de la Primera Etapa y el 80% de los de la Segunda Etapa intentan justificar el hallazgo de una fracción equivalente mediante la regla que conocen.

CCV.2: Razonamientos empleados para construir fracciones equivalentes a otra dada

- Una tercera parte de los alumnos de la Primera Etapa aportan argumentos basados en el modelo para justificar que dos fracciones son equivalentes. Las justificaciones de los alumnos se basan en razonamientos como el que aporta la alumna A10 cuando escribe:

  La fracción $\frac{4}{6}$ *es equivalente a* $\frac{2}{3}$ *porque si coges un tercio, la mitad es un sexto y si coges dos sextos es un tercio. Por lo tanto dos tercios es igual a cuatro sextos*

  Otros alumnos utilizan representaciones gráficas de cantidades de longitud, como el alumno A21 que argumenta que las fracciones son equivalentes

  "porque miden la misma longitud"

- La práctica totalidad de los alumnos de la Segunda Etapa intentan justificar que la fracción $\frac{4}{6}$ es equivalente a $\frac{2}{3}$ mediante la formulación de la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada. Los alumnos recurren a la concisión y comodidad del lenguaje simbólico porque les resulta más complejo, utilizar el lenguaje natural, para argumentar sobre las acciones realizadas en el modelo de medida.

La respuesta de la alumna B12 es la única que ofrece explicaciones basadas en el modelo de medida:

porque hemos multiplicado x2 el numerador y el denominador a la vez que hemos vuelto a doblar la cinta y nos a salido $\frac{4}{6}$

- Los alumnos de las dos Etapas conocen y saben aplicar la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada. La mayoría utiliza como estrategia la técnica de multiplicar el numerador y el denominador por 2, sin embargo pocos alumnos proponen multiplicar los términos de la fracción por otro número distinto de 2.

  El hecho de que los alumnos sepan encontrar una fracción equivalente a una dada utilizando la técnica de multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número no debe hacernos pensar que los alumnos de cuarto curso tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones: ninguno de los alumnos las dos Etapas de Experimentación utiliza la equivalencia de fracciones en las fichas de comparación de fracciones.

II. Organización del contenido

• La equivalencia de fracciones contradice la creencia de los alumnos, forjada en el estudio de los números naturales, de que hay una única forma de simbolizar la cantidad. En nuestro estudio hemos observado que combatir esta creencia exige un tiempo dilatado de comprobación experimental sobre las distintas formas de expresar el resultado de una misma cantidad. La propuesta de enseñanza implementada incide en el significado de la equivalencia antes de presentar las técnicas de búsqueda de fracciones equivalentes. De este modo se consigue que los alumnos vean con naturalidad que una misma cantidad de magnitud puede venir expresada por diferentes fracciones.

• Los alumnos saben construir fracciones equivalentes a una dada utilizando como recurso didáctico materiales manipulativos. Sin embargo, tienen dificultades para expresar, oralmente y por escrito, las acciones que han realizado para obtener la fracción equivalente a una dada. En estas condiciones, evitan dar argumentos basados en el modelo de medida y optan por el lenguaje simbólico, mediante la formulación de la regla de obtención de fracciones equivalentes, para justificar la equivalencia.

• Es importante tener en cuenta que las fracciones representan un sistema numérico sustentado por una estructura multiplicativa, mientras que los alumnos conocen y usan el sistema de los números naturales que se sustenta en una estructura aditiva. Esta situación produce que los escolares tiendan a usar estrategias aditivas en tareas que exigen estrategias multiplicativas, y así lo hemos podido constatar la tendencia de los escolares, cuando trabajan en el sistema simbólico, a buscar fracciones equivalentes a una dada sumando la misma cantidad al numerador y denominador.

• El concepto de equivalencia es básico para una buena comprensión del número racional porque sobre esta idea se fundamenta el cálculo simbólico con fracciones. Los objetivos referidos a la enseñanza de la equivalencia en cuarto curso se han alcanzado parcialmente porque los alumnos tienen dificultades para hacer operativo el significado de la equivalencia de fracciones en las tareas de ordenación de fracciones. Concluimos que la utilización de esta estrategia de carácter simbólico excede las capacidades cognitivas de la mayoría de los alumnos de diez años.

• La propuesta de enseñanza implementada en cuarto curso incorpora abundantes experiencias concretas con los modelos de medida de longitud y de superficie, de modo que sienta las bases para retomar, en quinto curso, la enseñanza de la equivalencia a nivel simbólico. El trabajo realizado con los alumnos, en cuarto curso, ha sido provechoso porque constatamos que los mismos alumnos, un año después, en quinto curso de Educación Primaria, han ido gradualmente utilizando la estrategia basada en la equivalencia de fracciones para resolver situaciones problemáticas sobre relaciones y operaciones con fracciones.

• La importancia de la equivalencia de fracciones aconseja que las primeras sesiones de la secuencia de enseñanza en quinto curso se dediquen a reforzar la operatividad de este concepto. Posteriormente, el estudio del modelo de cociente partitivo, posibilitará ampliar el significado de la equivalencia de fracciones y vincularlo con la idea de reparto igualitario cuyas condiciones iniciales (cantidades de magnitud y número de participantes) varían de forma proporcional.

VII.2.1.4. Relación de orden entre fracciones

La comparación de fracciones constituye un elemento de capital importancia para entender que la topología de los naturales y de los racionales son completamente distintas.

<u>I. Comprensión del contenido</u>

Se analizan los resultados de las Fichas de Evaluación nº 6 y nº 7. En cada una de las fichas se señalan los objetivos de la indagación, los contenidos de las fichas, los resultados y la valoración de los mismos.

• Ficha de Evaluación Nº 6

a) Propósitos de la indagación

Se analiza la comprensión de los escolares de cuarto curso del concepto de orden de fracciones. Los escolares han de determinar cuál de las dos fracciones dadas es mayor que la otra, sin que la comparación exija utilizar la equivalencia de fracciones.

No vamos a evaluar el concepto de densidad respecto del orden porque los resultados de los alumnos al resolver la Ficha nº 20 muestran que la tarea de intercalar varias fracciones entre dos dadas les resulta muy compleja pues exige la utilización del concepto de equivalencia de fracciones, y la gestión de esta estrategia supera las capacidades cognitivas de los escolares de cuarto curso.

b) Trabajo propuesto

Has comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de $\frac{5}{4}$ *unidades y otra tiene una superficie de* $\frac{4}{3}$ *unidades. ¿Qué cartulina tiene menor superficie?*

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para ordenar las fracciones.

- ☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ____________________________
- ☐ He realizado el siguiente dibujo:
- ☐ He realizado el siguiente razonamiento: ____________________________________

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCVI.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la comparación de fracciones.
CCVI.2: Razonamientos empleados para comparar las fracciones.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 6, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCVI.1	1 (**3**) // 1 (**6**)	9 (**23**) // 1 (**6**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	30 (**75**) // 16 (**89**)
CCVI.2	1 (**3**) // 1 (**6**)	16 (**40**) // 3 (**17**)	2 (**5**) // 3 (**17**)	21 (**53**) // 11 (**61**)

Tabla VII.10. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 6

d) Valoración

CCVI.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la comparación de fracciones

- Los alumnos de las dos Etapas de Experimentación comprenden el significado de la comparación de fracciones que lo asocian a la comparación de cantidades de magnitud, porque obtienen porcentajes de éxito altos en la Unidad de Comprensión CCVI.1.

CCVI.2: Razonamientos empleados para comparar las fracciones

- La Unidad de Comprensión CCVI.2 evalúa la calidad de las respuestas de los alumnos. Aproximadamente, el 60% de los alumnos de las dos Etapas aportan argumentos válidos.

- Además, de las Unidades de Comprensión procedemos a estudiar las estrategias que utilizan los alumnos para comparar fracciones. Estas estrategias las clasificamos en los siguientes tipos:

  NI.- No indica la estrategia
  M.- Utilizando materiales
  G.- Utilizando gráficos
  RM.- Utilizando razonamientos basados en la idea de medida
  RE.- Utilizando razonamientos basados en el concepto de equivalencia

  Los siguientes cuadros indican, en la primera fila, las estrategia utilizadas por los alumnos de las dos Etapas de Experimentación y, en la segunda fila, el éxito obtenido por los alumnos que utilizan una determinada estrategia:

	NI	**M**	**G**	**RM**
Estrategia utilizada	5 (**13**)	5 (**13**)	21 (**53**)	8 (**20**)
Éxito en la estrategia	-	5 (**100**)	13 (**62**)	5 (**62**)

Tabla VII.11. Calidad de las estrategias utilizadas en la Ficha de Evaluación nº 6 en el **Primera Etapa**

	NI	**M**	**G**	**RM**
Estrategia utilizada	0 (**0**)	0 (**0**)	6 (**33**)	11 (**61**)
Éxito en la estrategia	-	-	4 (**66**)	10 (**90**)

Tabla VII.12. Calidad de las estrategias utilizadas en la Ficha de Evaluación nº 6 en el **Segunda Etapa**

- Del estudio de las estrategias que utilizan los alumnos al resolver esta tarea constatamos, como aspecto más relevante, que ninguno de los alumnos de las dos Etapas utilizan la equivalencia de fracciones para comparar las fracciones implicadas en la tarea. El 90% de los alumnos de estas dos Etapas expresan ideas construidas sobre el modelo de medida utilizando alguna de las siguientes técnicas: construir las cantidades de magnitud a comparar, dibujar las cantidades y descomponer las cantidades de magnitud como suma de la unidad y una fracción unitaria. Sirva de ejemplo la respuesta del alumno A16:

  E utilizado los folios y he echo lo siguiente: he puesto los 4/3 encima de 5/4 y ha salido menor 5/4 (sic)

- Los cinco alumnos de la Primera Etapa que construyen las cantidades de magnitud longitud o superficie que expresan las fracciones a comparar resuelven con éxito la tarea. Ninguno de los alumnos de la Segunda Etapa se sirve de esta estrategia. Los alumnos, cuando conocen otras estrategias, abandonan la estrategia basada en la utilización de materiales porque:

  1º comprueban que otras estrategias como las representaciones gráficas o los razonamientos centrados acortan los tiempos de resolución de las tareas, y

2º atienden las sugerencias de los profesores de aula para que utilicen otras estrategias de mayor riqueza conceptual y recurrir al uso de materiales solo en el caso de que tengan dificultades para resolver de otro modo la tarea.

- La estrategia mayoritaria de los alumnos de la Primera Etapa consiste en la utilización de representaciones gráficas para comparar las cantidades de magnitud. El 62% de los alumnos de la Primera Etapa y un tercio de los alumnos de la Segunda Etapa utilizan esta estrategia; y los dos tercios de los alumnos de las dos Etapas que utilizan esta estrategia resuelven con éxito la tarea.

  Las representaciones gráficas aportan un elemento novedoso y muy útil en el proceso de enseñanza, por cuanto potencia en los alumnos la adquisición de estrategias intermedias entre la utilización de recursos manipulativos y los razonamientos basados en la idea de fracción. Sirva de ejemplo la respuesta de la alumna A10, que realiza una buena representación gráfica dado que dibuja, con precisión, la unidad de medida:

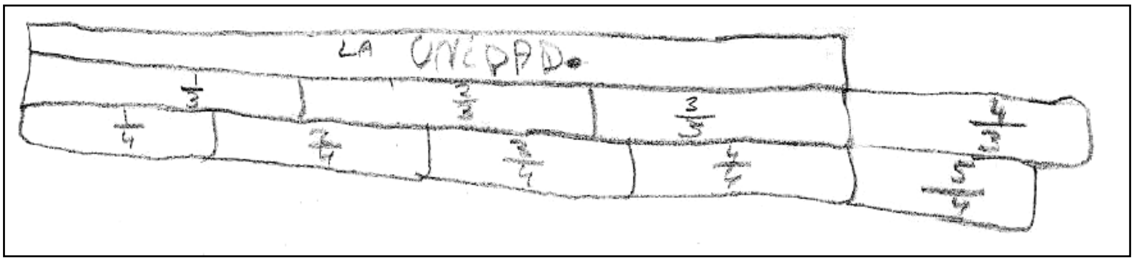


Gráfico VII.1. Respuesta de A10 en la Ficha de Evaluación nº 6

- En cuanto al uso de razonamientos para ordenar fracciones, el 20% de los alumnos de la Primera Etapa y el 60% de los de la Segunda Etapa utilizan esta estrategia, que se concreta en la descomposición de las fracciones como suma de la unidad y de una fracción unitaria. Los dos tercios de los alumnos de la Primera Etapa y el 90% de los alumnos de la Segunda Etapa que utilizan esta estrategia resuelven con éxito la tarea. Mostramos el razonamiento qua aporta el alumno B06 que ofrece los siguientes argumentos:

  Es menor la de cinco cuartos porque cuatro tercios es una unidad y un tercio más, pero cinco cuartos es una unidad y un cuarto. Y por eso es más pequeño cinco cuartos. (los cuartos son más pequeños que los tercios) (sic)

• *Ficha de Evaluación Nº 7*

a) Propósitos de la indagación

Hemos indicado con anterioridad que los alumnos de cuarto curso no utilizan el concepto de equivalencia de fracciones en las tareas de ordenación de fracciones y hemos conjeturado que la aplicación de esta estrategia de carácter simbólico excede las capacidades cognitivas de la mayoría de los alumnos de 10 años. Queremos indagar si los mismos alumnos, unos meses más tarde, en quinto curso, son capaces gestionar la equivalencia en las tareas de comparación de fracciones. Esta indagación se realiza en los momentos iniciales de la secuencia de enseñanza en 5º curso, concretamente en la tercera sesión de clase, seis meses después de que los alumnos recibieran enseñanza de la equivalencia de fracciones en 4º curso de Educación Primaria.

b) Trabajo propuesto

Dados dos listones: uno de longitud $\frac{4}{5}$ y otro de longitud $\frac{5}{6}$ de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?
Consigna:
No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$ que tengan el mismo denominador.
SOLUCIÓN: El listón más largo mide ____
Para comparar los listones he hecho lo siguiente: ________________________________

c) Resultados

Se utiliza la siguiente Unidad de Comprensión

CCV.1: Argumentaciones utilizadas sobre el uso de fracciones equivalentes en tareas de la comparación de fracciones.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 7, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCV.1	2 (**5**) // 1 (**6**)	12 (**30**) // 4 (**22**)	0 (**0**) // 1 (**6**)	26 (**65**) // 12 (**67**)

Tabla VII.13. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 7

d) Valoración

- Los alumnos de las dos Etapas de Experimentación utilizan de forma adecuada la equivalencia de fracciones en los momentos iniciales de la secuencia de enseñanza correspondiente a quinto curso de Educación Primaria. Los dos tercios de los alumnos de las dos Etapas de Experimentación resuelven con éxito la tarea.
- La mayoría de los escolares utilizan la equivalencia de fracciones para comparar las fracciones porque el enunciado de la tarea recomienda la aplicación de dicha estrategia. Todos los alumnos de la Segunda Etapa utilizan la equivalencia y tan solo el 13% de alumnos de la Primera Etapa usan gráficos para representar las cantidades a comparar.

- Aproximadamente, el 75% de los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación que utilizan la equivalencia de fracciones resuelven correctamente esta tarea.
  Hemos detectado dos formas diferentes de concretar la aplicación de la equivalencia. Un método consiste en obtener fracciones equivalentes a las que se desean comparar hasta encontrar dos expresiones fraccionarias que tengan el mismo denominador. El alumno A06 procede de este modo:

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \frac{24}{30}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30}$$

Gráfico VII.2. Respuesta de A06 en la Ficha de Evaluación nº 7

  Otro método consiste en determinar previamente un denominador común de las fracciones que se desea comparar y, después, expresar ambas fracciones con ese denominador común. El alumno B17 conjetura una regla basada en esta estrategia:

He multiplicado la primera fracción por el segundo denominador y la segunda fracción por el primer denominador y he comparado.

$$\frac{4}{5} \xrightarrow{\times 6} \frac{24}{30}$$

$$\frac{5}{6} \xrightarrow{\times 5} \frac{25}{30}$$

$\frac{25}{30}$ es mayor

Gráfico VII.3. Respuesta de B17 en la Ficha de Evaluación nº 7

II. Organización del contenido

• La propuesta de enseñanza implementada en cuarto curso posee abundantes experiencias de medida sobre los que los alumnos dotan de significado a la fracción y a las relaciones de equivalencia y de orden entre fracciones. Esta componente experimental de la enseñanza ha propiciado la comprensión del significado de la noción de equivalencia y del orden de fracciones.

• Cuando los alumnos resuelven tareas de comparación utilizan las diversas estrategias que se sustentan en la idea de la fracción como resultado de la medida de cantidades de magnitud. Con carácter general, los alumnos saben construir con materiales manipulativos cantidades de magnitud que vienen expresadas por una fracción, saben representar gráficamente cantidades de magnitud y saben percibir la cantidad como suma o resta de fracciones más elementales.

• La propuesta de enseñanza de las relaciones de orden de fracciones en cuarto curso permite mejorar la comprensión de la fracción asociada al significado de medida. Además, la secuencia de enseñanza posibilita la aparición de estrategias basadas en la construcción de cantidades con objetos concretos, en el uso de representaciones gráficas y en la utilización de razonamientos sobre representaciones simbólicas.

• Los escolares de cuarto curso de Educación Primaria no tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones porque no son capaces de utilizar esta estrategia en las tareas de comparación de fracciones. Sin embargo, seis meses más tarde, los dos tercios de los alumnos de quinto curso son capaces de gestionar correctamente esta estrategia, después de haber reforzado el concepto de equivalencia de fracciones durante dos sesiones de clase. La interpretación de estos resultados nos lleva a concluir que la gestión, con símbolos, de la equivalencia de fracciones es una competencia difícil y que se sitúa en el límite de las capacidades cognitivas de los alumnos de cuarto curso de Educación Primaria; y que tan solo es necesario dejar transcurrir unos meses en la vida de los alumnos para que esta competencia de carácter simbólico se adecue a la etapa de desarrollo evolutivo en la que se sitúan los escolares de estas edades.

Estos resultados aportan recomendaciones para la enseñanza del concepto de equivalencia de fracciones que aconsejan introducir leves modificaciones en la Propuesta de Enseñanza. En concreto, proponemos realizar, en cuarto curso, un mayor número de experiencias con materiales concretos para intentar que los alumnos conjeturen la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada; y posponer hasta quinto curso el manejo simbólico de la equivalencia de fracciones para tener operativo este concepto.

VII.2.1.5. Suma y resta de fracciones

Las relaciones operatorias con fracciones se inician con la estructura aditiva, sin hacer separación entre las operaciones de suma y resta de fracciones

I. Comprensión del contenido

Se analizan los resultados de las Fichas de Evaluación nº 10 y nº 11. En cada una de las fichas se señalan los objetivos de la indagación, los contenidos de las fichas, los resultados y la valoración de los mismos.

• *Ficha de Evaluación Nº 10*

a) Propósitos de la indagación

Se trata de evaluar si los alumnos dotan de significado a la operación suma de fracciones y encuentran procedimientos de cálculo de la suma de fracciones con distinto denominador. Nuestra apuesta por la enseñanza de los algoritmos desde la comprensión nos lleva a proponer la enseñanza de versiones "débiles" o no formalizadas de los algoritmos computacionales con la intención de sean los propios alumnos quienes conjeturen los procedimientos de cálculo. Pretendemos que los alumnos de quinto curso identifiquen la operación y, después, utilicen la equivalencia de fracciones para calcular con símbolos el resultado de la operación. Y posponemos, para sexto curso, el objetivo de consolidar y robustecer las técnicas algorítmicas de las operaciones.

b) Trabajo propuesto

Tienes un listón que mide $\frac{1}{2}$ de la caña unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud $\frac{1}{3}$ de la caña unidad. ¿Cuál es la longitud del nuevo listón que has construido? Si necesitas utilizar material puedes solicitarlo.

La longitud del listón es ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela:

Indica cómo has resuelto el problema: ___________________________________

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión:

CCVII.1.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de suma de fracciones.

CCVII.1.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado de la suma de fracciones.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Asignamos el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CC.VII.1.1 cuando el alumno indica que la operación realizada es una suma o bien escribe, con símbolos, la operación.

Asignamos el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CC.VII.1.2 cuando el alumno aporta, de forma justificada, la solución correcta aunque la resolución la realice mediante procedimientos informales, sin utilizar las reglas convencionales de cálculo simbólico.

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 10, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCVII.1.1	2 (**5**) // 0 (**6**)	23 (**58**) // 6 (**33**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	15 (**38**) // 12 (**67**)
CCVII.1.2	2 (**5**) // 0 (**6**)	8 (**20**) // 6 (**33**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	30 (**75**) // 12 (**67**)

Tabla VII.14. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 10

c) Valoración

CCVII.1.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de suma de fracciones

- Los resultados obtenidos por los alumnos de las dos Etapas de Experimentación en la Unidad de Comprensión CC.VII.1.1 que evalúa si éstos identifican la operación suma de fracciones son dispares: el 67% de los alumnos de la Segunda Etapa identifican la suma de fracciones como la operación que resuelve la tarea frente al 38% de los alumnos de la Primera Etapa.
- Los cambios metodológicos introducidos en la implementación de la Segunda Etapa explican la diferencia entre los resultados de las dos Etapas. El Equipo Investigador, en la fase de acción de la Segunda Etapa, toma la decisión de recomendar a los alumnos que no utilicen materiales manipulativos para evitar el fenómeno pernicioso observado en la implementación de la Primera Etapa que consiste en que algunos alumnos que son capaces de gestionar con cálculos simbólicos la equivalencia de fracciones prefieren utilizar materiales con la consiguiente limitación en sus procesos de aprendizaje.
  Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el de la alumna A10 que posee un nivel de comprensión alto que le capacita para operar con símbolos y, sin embargo, prefiere utilizar representaciones gráficas como la siguiente:

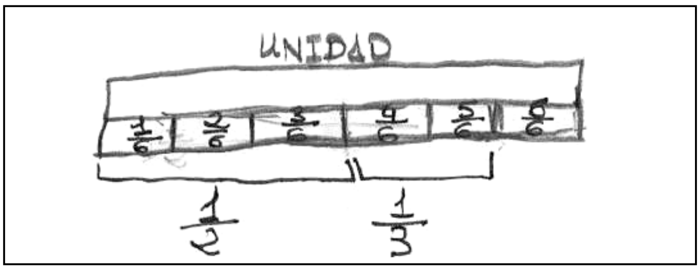


Gráfico VII.4. Respuesta de A10 en la Ficha de Evaluación nº 10

- Los resultados obtenidos por los alumnos de la Primera Etapa Experimental, en la Unidad de Comprensión CC.VII.1.1, son inferiores a los de la Segunda Etapa. La metodología de aula que se ha implementado en la Primera Etapa potencia que los alumnos necesiten realizar más tareas para identificar la operación suma. Sin embargo, no consideramos preocupante que los alumnos de la Primera Etapa no identifiquen la suma de fracciones en las primeras tareas que se resuelven con esta operación porque el 61% de los alumnos que no reconocen la operación formal obtienen la respuesta correcta del problema, es decir, encuentran la solución correcta sin utilizar cálculos simbólicos (criterio 3 de la Unidad CC.VII.1.2).

CCVII.1.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado de la suma de fracciones.

- Los alumnos de las dos Etapas de Experimentación obtienen resultados aceptables en la Unidad de Comprensión CC.VII.1.2 que se acercan al 75% de éxito.
- Los alumnos de las dos Etapas utilizan diferentes estrategias. Mientras que los dos tercios de los alumnos de la Segunda Etapa utilizan procedimientos simbólicos basados en la equivalencia de fracciones, los alumnos de la Primera Etapa utilizan diversas estrategias: el 50% realiza cálculos simbólicos y el 40% mide después de construir, físicamente, la cantidad suma con objetos o con representaciones gráficas.

  En la tabla siguiente se detallan las estrategias utilizadas por los alumnos y, entre paréntesis, el porcentaje de alumnos que utiliza una determinada estrategia, como:

  M.- *Utilizar materiales y medir;*
  G.- *Utilizar gráficos y medir;*
  RE.- *Cálculo simbólico basado en el concepto de equivalencia*

  Consideramos que un alumno tiene "éxito con la estrategia" si cuando la utiliza encuentra la solución correcta del problema, es decir, obtiene el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CCVII.1.2.

	M **Etapa 1//Etapa 2**	***G*** **Etapa 1//Etapa 2**	***RE*** **Etapa 1//Etapa 2**
Estrategia utilizada	12 (**30**) // 4 (**22**)	4 (**10**) / / 1 (**6**)	20 (**50**) // 12 (**67**)
Éxito en la estrategia	7 (**58**) // 0 (**0**)	4 (**100**) // 1 (**100**)	19 (**95**) // 11 (**92**)

Tabla VII.15. Calidad de las estrategias utilizadas en la Ficha de Evaluación nº 10

- Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación que utilizan como estrategia cálculos simbólicos o representaciones gráficas tienen porcentajes de éxito altos, cercanos al 100%, en la Unidad de Comprensión CC.VII.1.2 que evalúa si encuentran la solución correcta del problema.
- Mientras que los alumnos que utilizan representaciones simbólicas obtienen porcentajes de éxito altos, los alumnos que utilizan objetos tangibles obtienen resultados peores. Esto quiere decir que los alumnos que tienen menor nivel de comprensión necesitan

apoyarse en el material manipulativo y, aún así, esto no les garantiza el éxito en la tarea. Estos resultados sugieren pautas metodológicas para la gestión del material en el aula: el profesor debe vigilar el proceso de aprendizaje de cada alumno y tomar decisiones sobre el momento adecuado en el que el alumno debe abandonar el uso de materiales tangibles para forzar la aparición de estrategias conveniencia más avanzadas, dado que mientras que unos alumnos necesitan sustentar sus ideas a partir de la manipulación con objetos tangibles, para otros alumnos este tipo de actividad puede obstaculizar el aprendizaje de estrategias carácter simbólico.

• ***Ficha de Evaluación Nº 11***

a) Propósitos de la indagación
Se trata de evaluar si los alumnos dotan de significado a la resta de fracciones y encuentran procedimientos de cálculo de la resta de fracciones con distinto denominador.

b) Trabajo propuesto

Quieres comprar aceitunas. La tendera te sirve $\frac{6}{5}$ Kgrs. de aceitunas. Expresa, con una fracción, el peso de aceitunas que debe añadir para servirte dos kilogramos de aceitunas. Si necesitas utilizar material puedes solicitarlo.

Debe añadir ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela:

*Indica cómo has resuelto el problema:*________________________________

c) Resultados
Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión:
CCVII.2.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de resta de fracciones.
CCVII.2.2.: Razonamientos empleados para calcular el resultado de la resta de fracciones.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Asignamos el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CC.VII.2.1 cuando el alumno indica que la operación realizada es una resta o bien escribe, con símbolos, la operación.

Asignamos el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CC.VII.2.2 cuando el alumno aporta, de forma justificada, la solución correcta aunque resuelva el problema mediante procedimientos informales, sin utilizar cálculos simbólicos.

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 11, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCVII.2.1	0 (**0**) // 0 (**0**)	21 (**52**) // 5 (**28**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	19 (**48**) // 13 (**72**)
CCVII.2.2	0 (**0**) // 0 (**0**)	15 (**38**) // 6 (**33**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	25 (**63**) // 12 (**67**)

Tabla VII.16. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 11

d) Valoración

CCVII.2.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de resta de fracciones

- Los resultados obtenidos por los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación en la Unidad de Comprensión CC.VII.2.1 que evalúa si los alumnos identifican la operación resta de fracciones son dispares: mientras que el 72% de los alumnos de la Segunda Etapa identifican la resta, o la suma, de fracciones como la operación que resuelve la tarea, tan solo el 48% de los de la Primera Etapa identifican la operación.
  Los cambios metodológicos introducidos en la Segunda Etapa explican la diferencia entre los resultados de las dos Etapas en esta Unidad de Comprensión. Los alumnos de la Segunda Etapa reciben la consigna de evitar, si esto es posible, la utilización de materiales manipulativos para forzar la aparición de estrategias de carácter simbólico.

CCVII.2.2.: Razonamientos empleados para calcular el resultado de la resta de fracciones

- Los dos tercios de los alumnos de los dos Etapas de la Experimentación encuentran la solución correcta del problema, es decir, obtienen el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CCVII.2.2. También se observa que el 85% de los alumnos que utilizan la idea de equivalencia con representaciones simbólicas resuelven con éxito el problema.

- Para analizar los efectos de la acción de enseñanza se estudian las estrategias que utilizan los alumnos para resolver este problema y el éxito alcanzado al aplicarlas en la resolución del problema. Consideramos que un alumno tiene "éxito con la estrategia" si cuando la utiliza encuentra la solución correcta del problema, es decir, obtiene el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CCVII.2.2. En la tabla siguiente se detallan las estrategias utilizadas por los alumnos y, entre paréntesis, el porcentaje de alumnos que utiliza una determinada estrategia, como:

M.- *Utilizar materiales y medir;*
G.- *Utilizar gráficos y medir;*
RE.- *Cálculo simbólico basado en el concepto de equivalencia*

	M **Etapa 1//Etapa 2**	***G*** **Etapa 1//Etapa 2**	***RE*** **Etapa 1//Etapa 2**
Estrategia utilizada	2 (**5**) // 1 (**6**)	15 (**38**) // 1 (**6**)	19 (**48**) // 13 (**72**)
Éxito en la estrategia	2 (**100**) // 0 (**0**)	7 (**47**) // 1 (**100**)	16 (**84**) // 11 (**85**)

Tabla VII.17. Calidad de las estrategias utilizadas en la Ficha de Evaluación nº 11

- Los alumnos de la Primera Etapa utilizan indistintamente estrategias basadas en representaciones gráficas y en representaciones simbólicas. En cambio, los alumnos de la Segunda Etapa optan por el uso de representaciones simbólicas. En las respuestas de los alumnos de la Primera Etapa observamos que el porcentaje de éxito cuando utilizan gráficos es menor que cuando operan con símbolos.
- En los problemas de resta observamos una variación con respecto a los problemas de suma que a nuestro juicio supone una mejora de la comprensión de los escolares: los alumnos de la Primera Etapa tienden a abandonar el uso de materiales tangibles y a sustituirlos por representaciones gráficas y simbólicas. Conforme avanza la secuencia de enseñanza los alumnos tienden a utilizar sistemas de representación simbólicos.
- El rendimiento de los alumnos de la Primera Etapa en la resolución del problema de resta ha descendido levemente con respecto al del problema de suma. Esto se debe, posiblemente, a las dificultades que tienen los alumnos para convertir la cantidad expresada por el natural 2 Kgrs. en la representación fraccionaria $\frac{10}{5}$ Kgrs.
- La mayoría de los alumnos que utilizan la estrategia basada en la equivalencia de fracciones identifican la operación resta y, del mismo modo que la mayor parte de los alumnos que utilizan representaciones gráficas no identifican la operación. Sin embargo, el 50% de los escolares que utilizan representaciones gráficas saben resolver el problema aunque no escriben, con símbolos, la operación resta. Este es el caso del alumno A29 que no identifica la operación pero muestra una comprensión aceptable de la operación cuando realiza el siguiente gráfico:

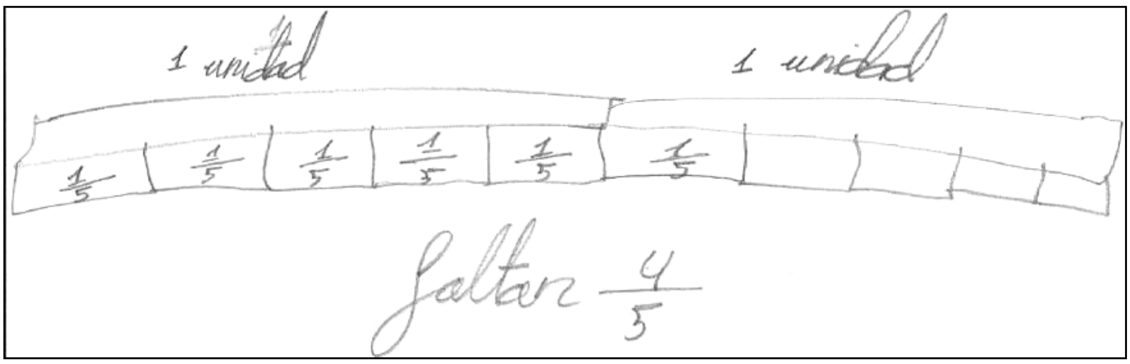


Gráfico VII.5. Respuesta de A10 en la Ficha de Evaluación nº 11

II. Organización del contenido

• Los modelos de medida se muestran apropiados para introducir el significado y cálculo de las operaciones suma y resta de fracciones.

• En nuestra propuesta didáctica la enseñanza de las operaciones con fracciones se fundamenta a partir de la resolución de problemas. Los alumnos dotan de significado a la operación aritmética cuando reconocen que tal operación modeliza la situación problemática que se les ha planteado. Los alumnos comprenden las acciones básicas que formalizan la suma y resta de fracciones porque se corresponden con las de la suma y resta de naturales.

• Los resultados obtenidos por los alumnos de las dos Etapas Experimentales en las dos Unidades de Comprensión CCVII.1.1 y CCVII.2.1, que indagan si los alumnos identifican y escriben con símbolos las operaciones, descienden si se comparan con las Unidades de Comprensión CCVII.1.2 y CCVII.2.2 que evalúan la solución de los problemas. Esto es así, porque identificar la operación que resuelve el problema es una habilidad compleja que exige del alumno interpretar la situación problemática y reconocer en ella la acción que es modelizada por la operación aritmética. Para identificar con éxito una operación el alumno debe rescatar de su memoria otras situaciones problemáticas análogas a las que plantea el enunciado del problema en cuestión; y dado que estamos en los momentos iniciales de la secuencia de enseñanza los alumnos todavía no se han enfrentado a la resolución de un número suficiente de problemas.

• La utilización de materiales manipulativos para resolver las tareas, en la Primera Etapa de la Experimentación, potencia las estrategias de resolución mediante la acción de medir y dificulta la aparición de respuestas con cálculos con símbolos. Los cambios metodológicos introducidos en el Segunda Etapa producen respuestas más uniformes de los alumnos y favorecen la utilización de la estrategia basada en la equivalencia de fracciones.

• La metodología de enseñanza que sustenta la Propuesta Didáctica propugna que los alumnos utilicen representaciones simbólicas después de que, durante un determinado período temporal, realicen experiencias de medida con materiales tangibles y con el apoyo de representaciones gráficas. Posiblemente, estas actuaciones retrasan la utilización de cálculos simbólicos por parte de los alumnos, pero resultan particularmente provechosas porque hemos constatado que los alumnos apenas cometen errores conceptuales en el manejo de las representaciones simbólicas como sumar numeradores y denominadores. Esto es así porque el cálculo simbólico que gestionan los alumnos tiene un referente concreto en las acciones físicas que previamente han realizado en el modelo de aprendizaje.

• Los buenos resultados obtenidos por los alumnos de las dos Etapas y, en particular, los alumnos de la Segunda Etapa, aconsejan mantener la propuesta didáctica inicial y recomendar a los alumnos que intenten resolver las situaciones problemáticas sin la ayuda de materiales manipulativos. Ahora bien, conviene alertar sobre los efectos que puede producir tal recomendación que se realiza para favorecer la aparición de estrategias de carácter simbólico y para acortar los períodos de instrucción; porque se corre el riesgo de que los alumnos se vean avocados a realizar cálculos simbólicos sin haber tenido suficientes experiencias previas con los objetos del modelo.

VII.2.1.6. Multiplicación de una fracción por un número natural

Las relaciones multiplicativas con fracciones se limitan al significado de suma reiterada, de producto de una fracción por un natural.

I. Comprensión del contenido

Se analizan los resultados de la Ficha de Evaluación nº 12. En ella se señalan los objetivos de la indagación, los contenidos de las fichas, los resultados y la valoración de los mismos.

• ***Ficha de Evaluación Nº 12***

a) Propósitos de la indagación

Se trata de evaluar si los alumnos dotan de significado a la multiplicación de una fracción por un número natural y encuentran procedimientos de cálculo de esta operación.

b) Trabajo propuesto

Quieres colocar el rodapié en un pasillo que mide 8 metros. Para ello has comprado 25 losetas de longitud $\frac{3}{10}$ de metro. Las losetas se colocan una a continuación de las otra. Con las losetas que has comprado, ¿qué longitud del rodapié puedes colocar?

Puedo colocar una longitud de ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela:

Indica cómo has resuelto el problema: ____________________________________

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCVII.3.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado del producto de un número natural por una fracción.

CCVII.3.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado del producto de un número natural por una fracción.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Asignamos el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CC.VII.3.1 cuando el alumno indica que operación es la multiplicación de una fracción por un natural o bien escribe el símbolo de la operación.

Asignamos el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CC.VII.3.2 cuando el alumno aporta, de forma justificada, la solución correcta aunque resuelva el problema mediante procedimientos informales, y no indique la operación multiplicación.

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 12, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCVII.3.1	0 (**0**) // 0 (**0**)	10 (**25**) // 3 (**17**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	30 (**75**) // 15 (**83**)
CCVII.3.2	0 (**0**) // 0 (**0**)	11 (**28**) // 5 (**28**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	28 (**73**) // 13 (**72**)

Tabla VI.18. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 12

d) Valoración

CCVII.3.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado del producto de un número natural por una fracción

- Los resultados obtenidos en la Unidad de Comprensión CC.VII.3.1 ponen de manifiesto que los alumnos identifican con facilidad el significado de la multiplicación de una fracción por un número natural como suma reiterada de la fracción. Aproximadamente, el 80% de los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación identifican la operación y escriben la representación simbólica de la misma.
- Los alumnos identifican con facilidad el significado de suma reiterada de una cantidad con la operación multiplicación de una fracción por un número natural. Se trata de la operación aritmética que mejor identifican los alumnos.

CCVII.3.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado del producto de un número natural por una fracción

- Los alumnos utilizan, de forma mayoritaria, representaciones simbólicas para calcular la solución del problema. El 72% de los alumnos son capaces de conjeturar y aplicar correctamente la regla de cálculo computacional de esta operación a pesar de no recibir enseñanza explícita de esta regla.

- Para analizar los efectos de la acción de enseñanza se estudian las estrategias que utilizan los alumnos para resolver este problema y el éxito alcanzado al aplicarlas en la resolución del problema. Consideramos que un alumno tiene "éxito con la estrategia" si cuando la utiliza encuentra la solución correcta del problema, es decir, obtiene el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CCVII.3.2. En la tabla siguiente se detallan las estrategias utilizadas por los alumnos y, entre paréntesis, el porcentaje de alumnos que utiliza una determinada estrategia, como:

  ***M**.- Utilizar materiales y medir;*
  ***G**.- Utilizar gráficos y medir;*
  ***RE**.- Cálculo simbólico basado en el concepto de equivalencia.*

	M **Etapa 1//Etapa 2**	***G*** **Etapa 1//Etapa 2**	***RE*** **Etapa 1//Etapa 2**
Estrategia utilizada	0 (**0**) // 0 (**0**)	2 (**5**) // 0 (**0**)	32 (**80**) // 15 (**83**)
Éxito en la estrategia	-- // --	1 (**50**) // --	28 (**87**) // 13 (**87**)

Tabla VII.19. Calidad de las estrategias utilizadas en la Ficha de Evaluación nº 12

Como puede observarse, para resolver este tipo de problemas los alumnos prefieren utilizar representaciones simbólicas en lugar de otras estrategias porque representar gráficamente la cantidad a medir resulta una tarea costosa y, por lo tanto, inadecuada.

- Los resultados, en esta Unidad de Comprensión, mejoran con respecto a los obtenidos en las operaciones de suma y resta de fracciones porque la gestión simbólica de la multiplicación de una fracción por un natural no precisa utilizar el concepto de equivalencia de fracciones. El procedimiento de cálculo simbólico de esta operación se justifica y se sostiene, únicamente, a través de la operación suma de fracciones.

- Los alumnos, para operar con símbolos, se sirven de su conocimiento de la multiplicación de naturales. Así, hemos constatado de los alumnos multiplican las subunidades que tiene cada loseta por el número de losetas y, después, escriben en su respuesta que el número total de subunidades que obtienen son de longitud $\frac{1}{10}$ de metro. La alumna A31 utiliza este procedimiento de cálculo:

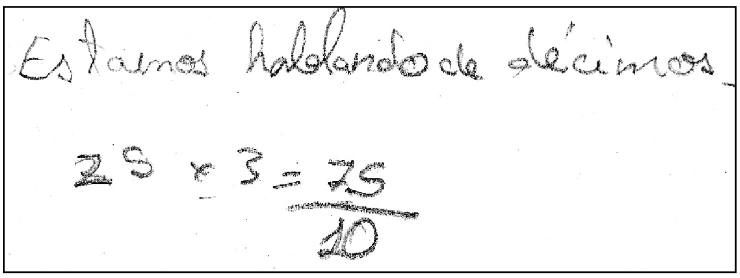


Gráfico VII.6. Respuesta de A31 en la Ficha de Evaluación nº 12

II. Organización del contenido

• Los modelos de medida se muestran apropiados para introducir el significado y cálculo de la operación producto de una fracción por un número natural.

• La pauta metodológica adoptada en la implementación de esta propuesta y que consiste en que los alumnos resuelven los problemas sin conocer previamente los algoritmos de cálculo de las operaciones se ha mostrado eficaz en las dos Etapas de la Experimentación porque obliga a los escolares a poner en juego estrategias de resolución de problemas que pueden afrontar gracias al conocimiento que poseen de la suma de fracciones.

VII.2.1.7. División de una fracción por un número natural

El sentido de la división que se trabaja en esta propuesta es la de cociente partitivo o disgregación de una cantidad de magnitud en un número natural de partes de igual tamaño.

I. Comprensión del contenido

Se analizan los resultados de la Ficha de Evaluación nº 13. En ella se señalan los objetivos de la indagación, los contenidos de las fichas, los resultados y la valoración de los mismos.

• ***Ficha de Evaluación Nº 13***

a) Propósitos de la indagación

Se trata de evaluar si los alumnos dotan de significado a la división de una fracción entre un número natural y encuentran procedimientos de cálculo de esta operación. El sentido de la división que se trabaja en esta propuesta es la de cociente partitivo o disgregación de una cantidad de magnitud en un número natural de partes de igual tamaño.

b) Trabajo propuesto

Tienes una masa de pan de $\frac{5}{4}$ de Kgrs. Con esta masa quieres hacer 10 panecillos iguales de modo que gastes toda la masa. ¿Cuánto pesará cada panecillo?

Consigna: No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

Cada panecillo pesa ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela:

*Indica cómo has resuelto el problema:*_________________________________

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCVII.4.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de cociente entre una fracción y un número natural.

CCVII.4.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado del cociente entre una fracción y un número natural.

Para organizar las respuestas de los alumnos se utilizan los criterios siguientes:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Asignamos el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CC.VII.4.1 cuando el alumno indica que operación es la división de una fracción por un natural o bien escribe el símbolo de la operación.

Asignamos el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CC.VII.4.2 cuando el alumno aporta, de forma justificada, la solución correcta aunque resuelva el problema mediante procedimientos informales, y no indique la operación división.

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 13, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCVII.4.1	2 (**5**) // 0 (**0**)	25 (**63**) // 6 (**33**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	13 (**33**) // 12 (**67**)
CCVII.4.2	2 (**5**) // 0 (**0**)	9 (**23**) // 6 (**33**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	29 (**73**) // 12 (**67**)

Tabla VII.20. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 13

d) Valoración

CCVII.4.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de cociente entre una fracción y un número natural

- Los resultados obtenidos en la Unidad de Comprensión CC.VII.4.1 ponen de manifiesto que los alumnos tienen dificultades para identifican la división de una fracción entre un número natural como la operación que resuelve el problema porque tan solo la tercera parte de los alumnos de la Primera Etapa identifican la operación. El porcentaje de alumnos de la Segunda Etapa que reconocen la operación sube hasta el 67% porque, en esta Etapa, se han introducido nuevas tareas para reforzar el significado de la división de una fracción entre un número natural.

CCVII.4.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado del cociente entre una fracción y un número natural

- Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación saben resolver el problema porque, aproximadamente, el 70% de los alumnos de las dos Etapas obtienen la valoración más alta en la Unidad de Comprensión CC.VII.4.2. A pesar de que los dos tercios de los alumnos la Primera Etapa no identifican la división como la operación que modeliza la situación problemática, el 75% de estos alumnos son capaces de resolver el problema porque utilizan representaciones gráficas y la idea de fracción como medida para modelizar las situaciones de reparto. Este es el caso de la alumna A10 que no identifica la operación pero utiliza representaciones gráficas adecuadas:

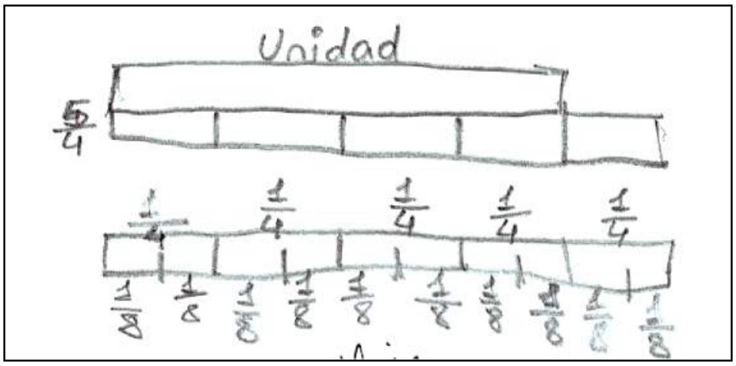


Gráfico VII.7. Respuesta de A10 en la Ficha de Evaluación nº 13

Al observar las respuestas que aportan estos alumnos se percibe la importancia que conceden la unidad de medida. La unidad de medida juega un papel fundamental en los modelos de medida que articulan y sostienen la propuesta didáctica, y así lo entienden los escolares que siguen la experimentación. Estas respuestas ofrecen una visión muy diferente de la práctica escolar que se deriva de la enseñanza desde la relación parte-todo y que se caracteriza por la indefinición del "todo" o unidad.

- Para analizar los efectos de la acción de enseñanza se estudian las estrategias que utilizan los alumnos para resolver este problema y el éxito alcanzado al aplicarlas en la resolución del problema. Consideramos que un alumno tiene "éxito con la estrategia" si obtiene el criterio 3 en la Unidad de Comprensión CCVII.4.2. En la tabla siguiente se detallan las estrategias utilizadas por los alumnos y, entre paréntesis, el porcentaje de alumnos que utiliza una determinada estrategia, como:

  M.- *Utilizar materiales y medir;*
  G.- *Utilizar gráficos y medir;*
  RE.- *Cálculo simbólico basado en el concepto de equivalencia*

	M Etapa 1//Etapa 2	***G*** Etapa 1//Etapa 2	***RE*** Etapa 1//Etapa 2
Estrategia utilizada	0 (**0**) // 0 (**0**)	18 (**45**) // 0 (**0**)	18 (**45**) // 14 (**78**)
Éxito en la estrategia	-- // --	11 (**61**) // --	18 (**100**) // 12 (**86**)

Tabla VII.21. Calidad de las estrategias utilizadas en la Ficha de Evaluación nº 13

- Los alumnos de la Primera Etapa han utilizado dos tipos de estrategias: realizar representaciones gráficas y gestionar la equivalencia de fracciones por medio de representaciones simbólicas. Aproximadamente la mitad de los escolares utilizan una estrategia y la otra mitad la otra. En general, los alumnos que utilizan representaciones simbólicas obtienen mejores resultados que los que se sirven de representaciones gráficas.
- El rendimiento de los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación que utilizan el concepto de equivalencia es alto en la Unidad de Comprensión CCVII.4.2.
- La gestión simbólica de la equivalencia de fracciones que realizan los escolares es un buen indicador para determinar la comprensión que poseen del concepto de fracción. En efecto, si estudiamos las respuestas de los alumnos que utilizan, de forma adecuada, la equivalencia de fracciones detectamos que los dos tercios de los alumnos de la Primera Etapa y casi todos los alumnos de la Segunda Etapa identifican la operación división de una fracción entre un número natural. Los alumnos que gestionan de forma adecuada las representaciones simbólicas están más preparados para identificar la operación que resuelve el problema.
- Los alumnos de la Segunda Etapa utilizan representaciones simbólicas para expresar la idea de equivalencia de fracciones y para indicar la operación división. Mostramos la respuesta del alumno B01 que se ayuda de gráficos y que, a la vez, utiliza la equivalencia de fracciones:

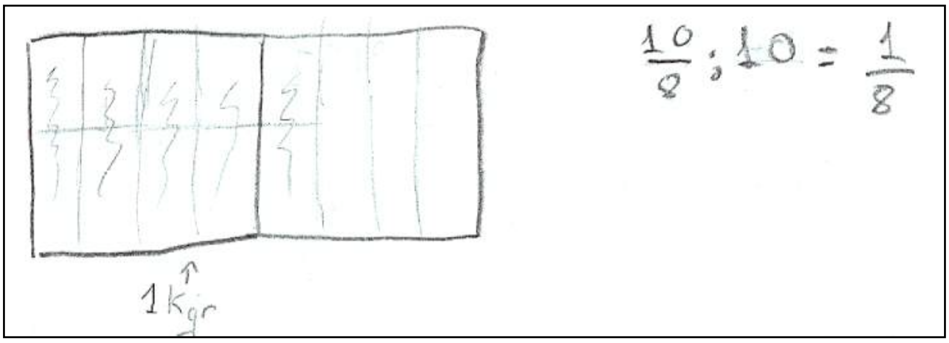


Gráfico VII.8. Respuesta de B01 en la Ficha de Evaluación nº 13

- Conforme los escolares de las dos Etapas de la Experimentación han ido resolviendo las tareas observamos una mejor utilización de las representaciones simbólicas en la gestión de la equivalencia de fracciones y en la identificación de la operación división.
- Los resultados dispares obtenidos en las dos Unidades de Comprensión son coherentes con el diseño de la propuesta de enseñanza: los alumnos deben resolver ciertos tipos de problemas utilizando las estrategias que deseen, sin recibir indicación de la operación que lo resuelve ni de la regla del algoritmo de cálculo de ésta operación. Es más, somos conscientes de la opción metodológica que hemos tomado, y que se concreta en retrasar hasta el próximo curso la institucionalización de la regla de cálculo de esta operación, dificulta la identificación de la operación. Sin embargo, como contrapartida favorece la puesta en juego de estrategias de resolución de problemas.

- En la siguiente tabla indicamos los porcentajes de respuestas correctas (criterio 3 de las Unidades de Comprensión CCVII.i.2, con i = 1, 2, 3 y 4) y que, a la vez, utilizan técnicas de cálculo simbólico para resolver los problemas propuestos en las Fichas de Evaluación Nº 10, 11, 12 y 13:

Suma	***Resta***	***Multiplicación***	**División**
Etapa 1//Etapa 2	**Etapa 1//Etapa 2**	**Etapa 1//Etapa 2**	**Etapa 1//Etapa 2**
48 // 62	**40 // 61**	**70 // 72**	**45 // 67**

Tabla VII.22. Tasas de éxito cuando utilizan cálculo simbólico en las Fichas nº 10, 11, 12 y 13

Los alumnos de la Segunda Etapa saben gestionar aceptablemente las técnicas de cálculo simbólico porque obtienen tasas de próximas al 70% en todas las operaciones. Sin embargo, los resultados de los alumnos de la Primera Etapa descienden hasta porcentajes próximos al 50%, salvo en el caso de la multiplicación de la fracción por un número natural cuya técnica de cálculo efectúan con mayor facilidad.

II. Organización del contenido

• Los modelos de medida se muestran apropiados para introducir el significado y cálculo de la operación división de una fracción entre un número natural. Conviene tener en cuenta que las situaciones problemáticas planteadas son de cociente partitivo y que esta operación se ha enseñado, conjuntamente, desde los significados de medida y de cociente partitivo.

• La pauta metodológica adoptada en la implementación de esta propuesta y que consiste en que los alumnos resuelven los problemas sin conocer previamente los algoritmos de cálculo de las operaciones se ha mostrado eficaz en las dos Etapas de la Experimentación porque los alumnos son capaces de poner en juego, con éxito, estrategias de resolución de problemas.

• El manejo de las representaciones simbólicas crea dificultades a los escolares. En particular, se detectan errores en la simbolización de la equivalencia de fracciones porque los alumnos confunden la técnica de obtención de fracciones equivalentes con la multiplicación de una fracción por un número natural. Este es el caso de la alumna B11, que comete este tipo de error y, sin embargo, sabe resolver el problema:

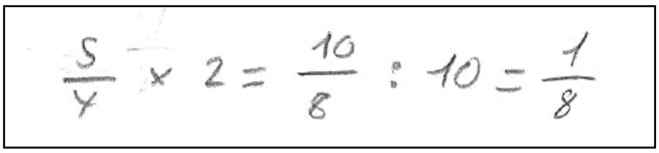


Gráfico VII.9. Respuesta de B11 en la Ficha de Evaluación nº 13

• No se ha alcanzado plenamente el objetivo de que los alumnos de quinto curso de Educación Primaria efectúen representaciones simbólicas adecuadas, con fracciones, para resolver los problemas de división de una fracción por un natural. Se trata de un objetivo que precisa períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo y que hay que retomar en sexto curso de Educación Primaria.

• La implementación del bloque temático “operaciones con fracciones” contribuye a la mejora de las representaciones simbólicas que realizan los escolares, sin que esto suponga que los alumnos tengan automatizados los algoritmo de cálculo de las operaciones. En consecuencia, proponemos abordar en sexto curso de Educación Primaria los objetivos de institucionalizar los algoritmos de cálculo con fracciones y de reforzar las técnicas de cálculo de los algoritmos habituales.

VII.2.2. Observación y Reflexión del Segundo Foco de Investigación

En esta Fase de Observación las producciones de los escolares al realizar las Fichas de Evaluación aportarán información de la comprensión alcanzada por éstos. También nos permitirá observar las potencialidades y limitaciones de la Propuesta de Enseñanza a partir de la valoración de las Unidades de Organización del Contenido (OC). Se van analizar cuatro Fichas de Evaluación que se indican a continuación junto con las Unidades de Organización del Contenido y los temas que han sido implementados en la Fase de Acción:

Unidades de Análisis de Comprensión del Contenido	*Unidades de Análisis de Organización del Contenido*	*Fichas de Evaluación (FE)*
CCVIII: La fracción con significado de cociente partitivo	OCVII: Concreción del modelo de cociente partitivo	FE nº 14
CCIX: Interpretación de las relaciones de orden entre fracciones	OCVIII: Relaciones de orden entre fracciones	FE nº 15
CCX: La representación polinómica decimal	OCIX: Modificación del modelo de cociente partitivo	FE nº 16
	OCX: La notación decimal	FE nº 1 7
CCXI: Interpretación del número decimal que expresa el resultado de un reparto	OCXI: Algoritmo de paso de la notación fraccionaria a la notación decimal	
CCXII: El número decimal como resultado de la medida	OCXII: Sistema de representación de la recta numérica	

Cuadro VII.2. Fichas de Evaluación y Unidades de Organización del Contenido en el Segundo Foco de Investigación

VII.2.2.1. Concreción del modelo cociente partitivo

En la propuesta didáctica hemos introducido el modelo de cociente partitivo desde el que los alumnos construyan un nuevo significado de la fracción: el resultado de repartir *a* unidades entre *b* personas, al aplicar la técnica de reparto en una sola fase.

I. Comprensión del contenido

Se analizan los resultados de las Fichas de Evaluación nº 14 y nº 15. La primera indaga la comprensión de la técnica del reparto, y la segunda evalúa la comprensión de la fracción en contextos de comparación de repartos. Ambas se presentan a continuación, y en cada una de las fichas, se señalan los objetivos de la indagación, los contenidos de las fichas, los resultados y la valoración de los mismos.

• *Ficha de Evaluación Nº 14*

a) Propósitos de la indagación

Nuestro propósito es explorar cómo gestionan los alumnos un modelo asociado a la acción de repartir en una sola fase de cantidades de longitud, en el cual las manipulaciones de objetos reales no son necesarias. También pretendemos conocer cómo gestionan la representación simbólica de las acciones físicas que realizan.

b) Trabajo propuesto

"Vais a repartir 5 barras de regaliz entre 3 niños.
¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?"

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:

2. Utilizad símbolos:

$5 \ \underline{|\ 3\quad}$

3. Indicad el significado de la fracción, del numerador y del denominador de la FRACCIóN que expresa el resultado del reparto:

La fracción indica ____

El numerador indica ______________________________________

El denominador indica _____________________________________

El segundo apartado de la tarea se modifica en la **Segunda Etapa** de Experimentación y queda formulado del siguiente modo:

2. Completad la tabla siguiente:

ANTES DE HACER EL REPARTO	*COMO SE HACE EL REPARTO*	*DESPUÉS DE HACER EL REPARTO*
Repartir 5 barras para 3 personas		RESULTADO DEL REPARTO
5 : 3		

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión:

CCVIII.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la fracción que expresa el resultado del reparto igualitario y de los términos de la fracción.

CCVIII.2: Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto.

En la Unidad de Análisis de la Comprensión del Contenido CC.VIII.1 consideramos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada de las componentes del reparto
2.- Interpretación errónea o inadecuada de una de las componentes del reparto
3.- Interpretación correcta o bastante adecuada de las componentes del reparto.

En la Unidad de Análisis de la Comprensión del Contenido CC.VIII.2 consideramos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- No encuentra la fracción, escribe una fracción incorrecta o es correcta pero no la justifica.
2.- Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas adecuadas y no utiliza representaciones simbólicas o son inadecuadas.
3.- Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas y representaciones simbólicas adecuadas.

Las Unidades de Análisis de la Comprensión evalúan dos aspectos complejos en la gestión del modelo de reparto: la formulación de los significados de los términos de la fracción y la simbolización del proceso del reparto. Estas actuaciones presentan mayores dificultades conceptuales que la búsqueda de la fracción que expresa el resultado del reparto efectuado mediante acciones físicas. La gestión adecuada de estas dos Unidades de Comprensión exige de los alumnos capacidades cognitivas elevadas, de manera que aquellos que tienen éxito en estas dos Unidades de Análisis dan sobradas muestras de comprensión.

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 14, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCVIII.1	4 (**10**) // 0 (**0**)	5 (**13**) // 0 (**0**)	8 (**20**) // 6 (**33**)	23 (**58**) // 12 (**67**)
CCVIII.2	4 (**10**) // 0 (**0**)	8 (**20**) // 5 (**28**)	14 (**35**) // 1 (**6**)	14 (**35**) // 12 (**67**)

Tabla VII.22. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 14

d) Valoración

CCVIII.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la fracción que expresa el resultado del reparto igualitario y de los términos de la fracción

- Los alumnos de quinto curso de las dos Etapas dan muestras de comprender el proceso de reparto igualitario porque entienden que necesitan medir la cantidad de magnitud longitud que recibe cada persona y reconocen la necesidad de fraccionar las barras (tiras de papel) en partes iguales como una actividad previa a las acciones de repartir y medir.
- En cuanto al significado de la fracción y de los términos de la fracción que expresa el resultado del reparto, los resultados obtenidos por los alumnos de las dos Etapas indican que, en general, saben interpretar de forma adecuada las componentes de la representación fraccionaria. No obstante, hemos detectado dos tipos de deficiencias en las respuestas de los alumnos, a saber:
  - incorrecciones en la formulación del significado de los términos de la fracción como resultado de una medida, y
  - escasa presencia de formulaciones de los significados de los términos de la fracción a partir de las condiciones iniciales del reparto.
- Con respecto a la primera de estas deficiencias, cabe indicar que la tarea de expresar los significados de conceptos matemáticos resulta muy compleja a los escolares de quinto curso de Educación Primaria. Gran parte de las incorrecciones que cometen los escolares tienen su origen en dificultades lingüísticas más que en limitaciones conceptuales. Por ejemplo, en las formulaciones que realiza el alumno B05:

  "El numerador indica los trozos que tocan a cada uno"
  "El denominador indica las partes que hemos fraccionado la unidad"

  Es muy probable que este alumno esté pensando en el "número de trozos" o en el "número de partes" y, seguramente, comprenda los significados de la fracción a pesar de las imprecisiones lingüísticas que comete.
- Como segunda deficiencia detectamos que los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación no conjeturan la formulación de los significados de los términos de la

fracción en función de las condiciones iniciales del reparto.

En la Primera Etapa, los alumnos conocen los significados del numerador como el número de barras de regaliz y el del denominador como el número de niños que participan en el reparto porque durante la evaluación de las tareas precedentes se ha institucionalizado, en el aula, estos conocimientos. En estas condiciones, los dos tercios de los escolares escriben estos significados; mientras que solo el 15% de los alumnos expresan los términos de la fracción con la idea de medida. Además, los alumnos de la Primera Etapa que han recibido enseñanza de los significados de los términos de la fracción como cociente partitivo optan por interpretaciones desde este significado, porque la formulación desde el modelo de medida les resulta más compleja, a pesar de que estas expresiones escritas hacen referencia a las acciones realizadas con objetos tangibles. El alumno A28 se sirve del significado de medida y realiza una interpretación confusa del numerador cuando escribe:

"El numerador indica los trozos que repartes"

En la implementación de la Segunda Etapa se tomó la decisión de que los profesores de aula no institucionalicen los significados de los términos de la fracción hasta que algunos alumnos consigan interpretar los términos desde los significados de medida y de cociente partitivo. Los alumnos de la Segunda Etapa no se percatan de que el numerador indica el número de barras y el denominador el número de personas. Todos los alumnos utilizan el significado de medida de la fracción. La alumna B16 es la única del grupo que se percata de que el numerador indica "*el número de barras de regaliz*". Sin embargo, esta alumna interpreta el denominador desde el significado de medida cuando escribe:

"El denominador indica el número de partes en que se divide la unidad"

- Las dificultades que se observan en los escolares para expresar los términos de la fracción en función de las condiciones iniciales del reparto tienen su origen en el trabajo que realizan en el modelo de aprendizaje. En efecto, el proceso de reparto que realizan los escolares les lleva a interpretar la fracción como la medida del resultado del reparto; es decir, los alumnos fijan su atención en el producto final y se olvidan de las condiciones iniciales existentes en el momento anterior a la realización del reparto.
- Dado que los alumnos de las dos Etapas asocian con dificultad la fracción que expresa el resultado del reparto con las condiciones iniciales del mismo, el equipo investigador ha recomendado a los profesores de aula que incidan en la secuencia temporal que conlleva la acción de reparto.

CCVIII.2: Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto.

- El modelo de cociente partitivo con la magnitud longitud y la técnica de reparto en una sola fase ha funcionado bien en la experimentación de aula. La mayoría de los alumnos de las dos Etapas resuelven las tareas de reparto con éxito y son capaces de encontrar la representación fraccionaria que indica el resultado de un reparto igualitario cuando se ayudan de materiales manipulativos.

- En cuanto a la Unidad de Análisis de la Comprensión CC.VIII.2 que evalúa la calidad de las representaciones simbólicas que realizan los alumnos para efectuar el reparto y cuantificar su resultado, el 35% de los alumnos de la Primera Etapa y el 67% de los alumnos de la Segunda Etapa utilizan correctamente representaciones simbólicas para justificar el proceso de reparto. Además, el 35% de los alumnos de la Primera Etapa realizan representaciones gráficas adecuadas pero no realizan representaciones simbólicas o bien éstas son inadecuadas.
- En la Primera Etapa de la Experimentación la simbolización del reparto mediante "la caja de la división entera" no es adecuada porque a los alumnos les recuerda el algoritmo de la división de naturales. El conocimiento que poseen los alumnos de la división entera de naturales obstaculiza la comprensión de la fracción como resultado del reparto igualitario porque algunos alumnos escriben:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$$

Para evitar este obstáculo, el equipo investigador toma la decisión, en la Segunda Etapa, de cambiarla simbolización de "la caja" por la de "los dos puntos" y, además, distinguir con nitidez tres momentos en la simbolización del reparto, a saber, antes de hacer el reparto, durante el proceso de realización del reparto y, finalmente, después de realizar el reparto:

ANTES DE HACER EL REPARTO	*COMO SE HACE EL REPARTO*	*DESPUÉS DE HACER EL REPARTO*
$5 : 3$	$5 : 3 = \frac{15}{3} : 3 = \frac{15:3}{3} = \frac{5}{3}$	Cada niño recibe $\frac{5}{3}$ de barra

- La simbolización del proceso de reparto es una actividad compleja para escolares de edades tan tempranas. Sin embargo, como consecuencia de los cambio metodológicos introducidos en la Segunda Etapa vemos que los dos tercios de los alumnos de esta Etapa son capaces de simbolizar correctamente el proceso del reparto.

II. Organización del contenido

• El modelo de cociente partitivo ha funcionado bien en la propuesta didáctica porque los alumnos son capaces de encontrar la representación fraccionaria que expresa el resultado del reparto.

• La enseñanza de la fracción como resultado del reparto igualitario realizado en una sola fase ha sido eficaz porque los escolares dotan a la representación fraccionaria de un nuevo significado.

• La gestión del reparto igualitario exige que los escolares pongan en juego capacidades cognitivas superiores a las que obliga la acción de medida, porque para cuantificar el resultado del reparto los alumnos deben realizar una acción de medida.

• Al estudiar las respuestas de los escolares en la Ficha de Evaluación Nº 14 hemos indagado la comprensión que del cociente partitivo poseen los alumnos en dos conocimientos complejos como son la formulación de los significados que asocian a los términos de la fracción, y la simbolización con la que expresan el proceso del reparto igualitario.

• La tarea de interpretar el significado de los términos de la fracción que expresa el resultado del reparto resulta compleja a los alumnos de quinto curso de Educación Primaria. El conocimiento que poseen de la fracción como resultado de la medida de cantidades de magnitud les anima a realizar interpretaciones desde el modelo de medida y a desestimar las formulaciones de los significados de los términos de la fracción en función de las condiciones iniciales del reparto.

En efecto, la modificación metodológica introducida en la Segunda Etapa que aconseja no institucionalizar en el aula los significados de los términos hasta que los alumnos realicen una interpretación personal de la fracción desde la doble perspectiva de los modelos de medida y cociente, ha puesto de manifiesto que los alumnos no interpretan los términos de la fracción desde el modelo de cociente partitivo. Los alumnos no identifican el numerador de la fracción con el número de barras de regaliz a repartir ni el denominador como el número de personas que participan en el reparto.

• Las resultados obtenidos en las dos Etapas sugieren atender tres aspectos en futuras experimentaciones de la propuesta didáctica, que indicamos a continuación:

a) Cambiar la simbolización del cociente partitivo de modo que en lugar de “la caja de la división” se denote por “dos puntos”.

b) Establecer, con nitidez, las cantidades que intervienen en el reparto igualitario y la secuencia temporal que afecta a dichas cantidades.

c) Potenciar el uso de representaciones gráficas y, en particular, recomendar a los escolares que realicen las representaciones gráficas con mayor precisión y esmero. Para ello, se aconseja asignar letras (A, B, C, ….) a cada uno de los participantes en los repartos de modo que los alumnos visualizan de forma gráfica la cantidad que recibe cada participante.

• *Ficha de Evaluación Nº 15*

a) Propósitos de la indagación

Nuestro propósito es explorar cómo los alumnos gestionan la representación fraccionaria que surge de la acción de reparto en una sola fase de cantidades de longitud cuando la tarea exige comparar repartos igualitarios.

b) Trabajo propuesto

a) Imagina que participas en el reparto de "2 barras de regaliz entre 3 personas"
y en el reparto de "3 barras de regaliz entre 4 personas"
¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ______________________________

porque: ______________________________

b) Imagina que participas en el reparto de "3 barras de regaliz entre 2 personas"
y en el reparto de"5 barras de regaliz entre 4 personas"
¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ______________________________

porque: ______________________________

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCIX.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de fracción mayor o menor que otra.

CCIX.2: Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para comparar dos fracciones.

En ambas Unidades de Análisis consideramos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante adecuada

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 15, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. En el siguiente cuadro se recogen los resultados globales de las Unidades de Comprensión:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CC.IX.1	6 (**15**) // 0 (**0**)	3 (**8**) // 0 (**0**)	3 (**8**) // 0 (**0**)	28 (**70**) //18 (**100**)
CC.IX.2a	3 (**8**) // 0 (**0**)	7 (**18**) // 0 (**0**)	4 (**10**) // 2 (**11**)	26 (**65**) // 16 (**89**)
CC.IX.2b	3 (**8**) // 0 (**0**)	11 (**28**) // 4 (**14**)	3 (**8**) // 0 (**0**)	23 (**58**) // 14 (**78**)

Tabla VII.23. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 15

d) Valoración

CCIX.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de fracción mayor o menor que otra.

- Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación comprenden que la fracción expresa la medida de la cantidad de longitud que recibe cada participante de un reparto.
- La enseñanza del concepto de orden de fracciones realizada desde los modelos de medida, implementada en cuarto curso de Educación Primaria, ha contribuido a la mejora de la Unidad de Comprensión del Contenido CC.IX.1 porque para cuantificar el resultado de acción de reparto es necesario realizar primero una acción de medida. El 70% de los alumnos de la Primera Etapa y todos los alumnos de la Segunda Etapa obtienen éxito en esta Unidad de Comprensión.

CCIX.2: Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para comparar dos fracciones.

- Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación obtienen resultados aceptables en la Unidad de Comprensión del Contenido CC.IX.2 que evalúa las representaciones gráficas y simbólicas que los escolares efectúan en las tareas de comparación de repartos.
- El éxito en la Unidad de Comprensión del Contenido CC.IX.1 no garantiza el éxito en la Unidad de Comprensión del Contenido CC.IX.2 porque la gestión simbólica o gráfica de las representaciones fraccionarias en las tareas de comparación es una actividad más compleja que la de expresar el significado del orden entre fracciones. Este es el caso del alumno B13 que da muestras de comprender cuando un reparto es mayor que otro pero responde de manera errónea, cuando compara "*3 barras de regaliz entre 2 personas*" con "*5 barras de regaliz entre 4 personas*" porque utiliza unidades de distinto tamaño:

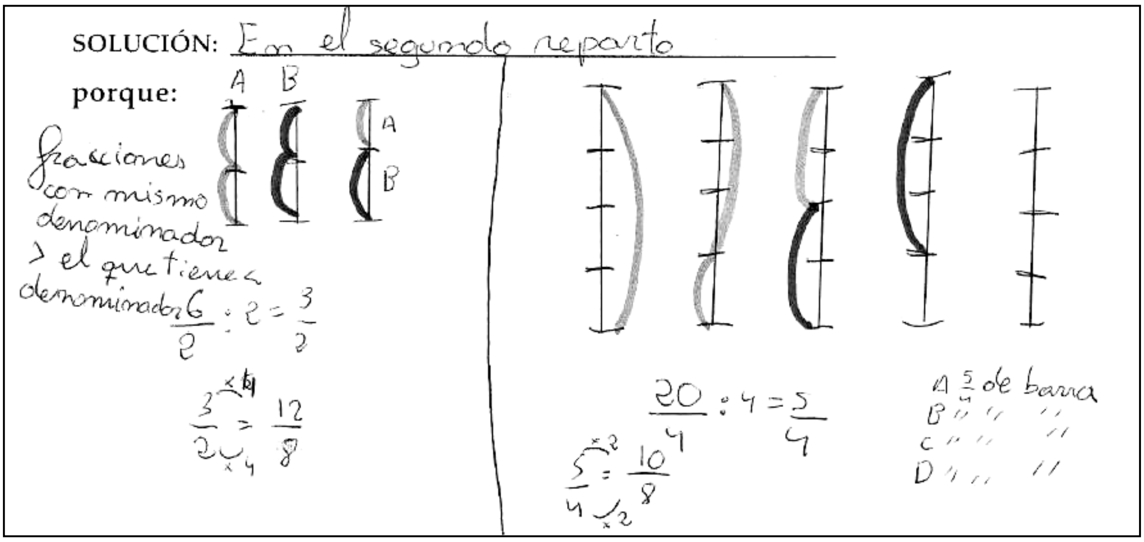


Gráfico VII.10. Respuesta de B13 en la Ficha de Evaluación nº 15

Este alumno tiene éxito en la Unidad de Comprensión del Contenido CC.IX.1 pero yerra en la Unidad CC.IX.2 porque las representaciones gráficas le inducen a error al considerar que las barras de regaliz, en los dos repartos, poseen distinta cantidad de longitud. El alumno responde atendiendo a la percepción visual de la cantidad que se da en cada reparto. Sin embargo, desatiende las representaciones simbólicas de las fracciones (10/8 y 12/8 barras) que encuentra de manera adecuada; llegando a enunciar una regla falsa para ordenar fracciones.

- Los alumnos las dos Etapas utilizan, fundamentalmente, dos estrategias. La estrategia mayoritaria consiste en escribir las representaciones fraccionarias que expresan los resultados de los repartos y comparar las fracciones utilizando el concepto de equivalencia o razonamientos basados en la fracción con el significado de medida. La otra estrategia consiste en representar gráficamente las cantidades de longitud que reciben cada una de las personas que participan en los repartos y, después, comparar visualmente las cantidades de longitud.

- La estrategia mayoritaria consiste en escribir las representaciones fraccionarias que expresan los resultados de los repartos y comparar las fracciones utilizando el concepto de equivalencia o razonamientos basados en la fracción con el significado de medida. El 60% de los alumnos de la Primera Etapa y todos los alumnos de la Segunda Etapa utilizan esta estrategia. La mayoría de los alumnos que utilizan la equivalencia de fracciones resuelven con éxito las dos tareas de comparación de repartos.

  Una de las pocas respuestas que utiliza un razonamiento basado en el significado de la fracción como medida de la cantidad de magnitud la aporta la alumna A33 para resolver la segunda tarea de la Ficha de Evaluación:

  Los cuartos son más pequeños que los medios y si 3/2 es un medio más de la unidad, 5/4 es 1/4 más

  Los alumnos de la Segunda Etapa utilizan la equivalencia de fracciones para comparar las fracciones que expresan los resultados de los repartos. Mostramos la respuesta que aporta la alumna B18 al resolver la segunda tarea de la Ficha de Evaluación:

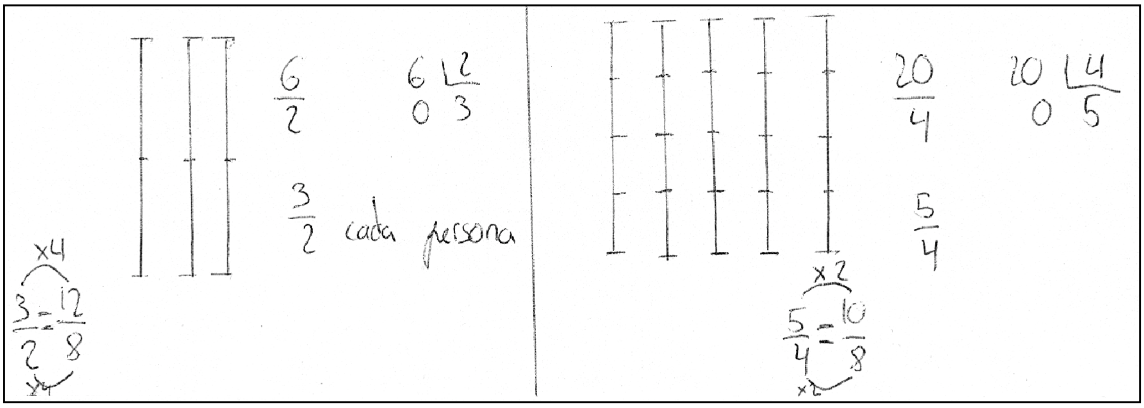


Gráfico VII.11. Respuesta de B18 en la Ficha de Evaluación nº 15

- Diez alumnos de la Primera Etapa (A04, A05, A18, A19, A20, A21, A23, A28, A29 y A32), es decir, un cuarto de los alumnos de esta Etapa utilizan exclusivamente representaciones gráficas. La mitad de los alumnos que utilizan representaciones gráficas yerran en una de las dos tareas que se proponen en la Ficha. Este es el caso de la alumna A18, que realiza representaciones gráficas adecuadas pero yerra al evaluar las cantidades resultantes de los repartos"*3 barras de regaliz entre 2 personas"* y "*5 barras* *de regaliz entre 4 personas*:

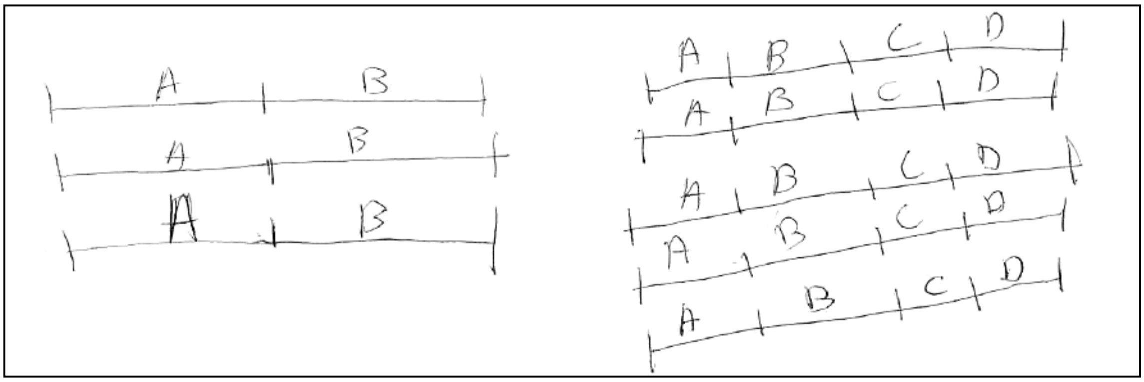


Gráfico VII.12. Respuesta de A18 en la Ficha de Evaluación nº 15

- El modelo de cociente partitivo posee potencialidades que han pasado desapercibidas en la implementación de aula realizada con los escolares de quinto curso de Educación Primaria. En efecto, este modelo potencia la aparición de estrategias de gran riqueza conceptual como la de "compartir o socializar repartos" o utilizar el concepto de equivalencia de repartos. Los alumnos no son capaces de aplicar estas estrategias aún después de que los profesores de aula las han ejemplificado durante la evaluación conjunta de las fichas precedentes y han aconsejado su uso a los escolares. La gestión de estas estrategias exige de los alumnos ideas de proporcionalidad o de razón entre las cantidades que intervienen en el reparto: número de barras y número de personas; y todo parece indicar que estas ideas están muy alejadas de las capacidades cognitivas de los escolares de quinto curso de Educación Primaria.

II. Organización del contenido

• La resolución de las tareas de comparación de repartos mejora la comprensión de la fracción porque refuerza el trabajo realizado en las fichas anteriores de construcción de la representación fraccionaria como resultado de un reparto igualitario, y posibilita evaluar semánticamente la fracción desde los significado de cociente partitivo y de medida de cantidades de longitud.
En efecto, la tarea de comparar repartos refuerza la enseñanza de la fracción con el significado de cociente partitivo. Así, si analizamos las resultados de esta Ficha considerando la Unidad de Comprensión del Contenido CC.VIII.2 observamos que los alumnos de las dos Etapas saben expresar con una fracción el resultado del reparto igualitario efectuado en una fase, porque éstos obtienen tasas de éxito del 78% en la Primera Etapa y próximas al 100% en la Segunda Etapa.

• La enseñanza de la fracción desde el modelo de cociente partitivo se sustenta en la enseñanza de la fracción como resultado de la medida de cantidades de magnitud que reciben los alumnos de cuarto curso de Educación Primaria, porque para cuantificar el resultado de un reparto igualitario es preciso efectuar una acción de medida.

• Hemos detectado que los alumnos transfieren el significado de la relación de orden de fracciones en los modelos de medida a la relación de orden de fracciones en el modelo de cociente partitivo. Este hecho justifica que la mayoría de los escolares de las dos Etapas de Experimentación vinculan el orden de fracciones con la comparación entre las medidas de las cantidades de magnitud que expresan el resultado de un reparto igualitario.

• Los alumnos de las dos Etapas han progresado en la gestión gráfica y simbólica de las fracciones cuando resuelven tareas de comparación de repartos. La utilización de la equivalencia de fracciones resulta ser la estrategia más frecuente y con la que alcanzan porcentajes de éxito elevados.

• Otras estrategias de gran riqueza conceptual como la de “compartir o socializar repartos” o utilizar el concepto de equivalencia de repartos resultan muy complejas para los alumnos porque tales estrategias incorporan el significado de razón que se estudia en cursos posteriores y que involucra ideas de proporcionalidad que caen fuera de las capacidades cognitivas de la mayoría de los escolares de quinto curso de Educación Primaria.

VII.2.2.2. Representación polinómica decimal

El modelo de cociente partitivo con la técnica de reparto en una sola fase ha permitido introducir la representación fraccionaria. Ahora una modificación de la técnica de realización del reparto hace aparecer un nuevo sistema de representación del resultado del reparto: la representación polinómica decimal.

I. Comprensión del contenido

Los alumnos de quinto curso de Educación Primaria realizan repartos igualitarios en los que el número que indica las personas participantes admita una descomposición factorial con, los factores primos 2 ó 5, exclusivamente. De este modo nos aseguramos que la representación polinómica decimal que surgen como consecuencia del reparto efectuado en varias fases es una suma finita de cantidades de longitud que son potencias de 1/10 de la longitud de la barra de regaliz.

• *Ficha de Evaluación Nº 16*

a) Propósitos de la indagación

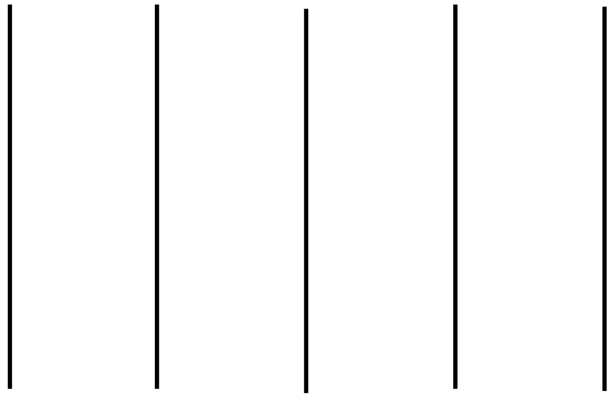
Nuestro propósito es indagar la comprensión que poseen los alumnos de la nueva técnica del reparto y explorar cómo simbolizan las acciones de reparto.

b) Trabajo propuesto

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: __________________________________

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

5 |4

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCX.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado del reparto igualitario que se efectúa en varias fases y con fraccionamientos en 10 partes iguales.

CCX.2: Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto en varias fases y con fraccionamientos en 10 partes iguales.

En ambas Unidades de Análisis consideramos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante adecuada

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 16, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCX.1	5 (**13**) // 0 (**0**)	9 (**23**) // 0 (**0**)	11 (**28**) // 4 (**22**)	15 (**38**) // 14 (**78**)
CCX.2	5 (**13**) // 0 (**0**)	3 (**8**) // 2 (**11**)	6 (**15**) // 1 (**6**)	26 (**65**) // 15 (**83**)

Tabla VII.24. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 16

d) Valoración

CCX.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado del reparto igualitario que se efectúa en varias fases y con fraccionamientos en 10 partes iguales.

- Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación comprenden la técnica del reparto en varias fases porque tan solo la cuarta parte de los alumnos de la Primera Etapa y ninguno de los alumnos de la Segunda Etapa efectúan representaciones gráficas incorrectas.
- Los alumnos de la Primera Etapa realizan representaciones gráficas poco precisas y, en algunos casos, descuidadas. Aproximadamente, una cuarta parte de los alumnos, realizan gráficas incompletas que resultan ineficaces para evaluar la comprensión de la técnica del reparto y que valoramos con el criterio 2 en la Unidad de Análisis CC.X.1. Para mejorar la calidad de las representaciones gráficas los profesores de aula recomiendan a los alumnos que expresen con letras los participantes implicados en el reparto y que asignen dichas letras a las subunidades que reciben cada participante. También les sugieren que escriban el tamaño de cada una de las subunidades que aparecen en el proceso del reparto.
- Otra causa de los errores detectados en las respuestas de los alumnos de la Primera Etapa radica en la escasa comprensión del papel que juegan los agrupamientos decimales en nuestro sistema de numeración escrito. Hemos detectado dificultades en los escolares para comprender que la décima parte de un décimo de barra es una centésima parte de la barra. Observamos que tan solo un tercio de los alumnos de la Primera Etapa dibujan el fraccionamiento en diez partes iguales de las subunidades de longitud un décimo de barra.
- Los alumnos de la Segunda Etapa Experimental obtienen mejores resultados en la Unidad de Análisis de la Comprensión CCX.1 porque han seguido las indicaciones de los profesores y han realizado las representaciones gráficas con bastante precisión y esmero.
- Otra razón que puede explicar el mejor rendimiento obtenido en la Segunda Etapa es que estos alumnos, en tercer curso de Educación Primaria, recibieron enseñanza de la división entera desde el significado de cociente partitivo con magnitudes discretas. Aquella secuencia de enseñanza se fundamentó en el modelo de reparto de objetos discretos con la técnica del reparto en varias fases y con la exigencia del agrupamiento decimal. Por lo tanto, no resulta extraño que los alumnos de la Segunda Etapa obtengan mejores resultados que los de la Primera Etapa porque los alumnos de quinto curso, dos años después, retoman el trabajo realizado sobre el modelo cociente partitivo pero ahora con magnitudes continuas.

CCX.2: Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto en varias fases y con fraccionamientos en 10 partes iguales.

- Los alumnos utilizan, de forma adecuada, representaciones simbólicas para cuantificar el resultado del reparto efectuado en varias fases. El 80% de los alumnos de la Primera Etapa y el 90% de los alumnos de la Segunda Etapa saben encontrar la representación polinómica decimal del reparto.

- Las representaciones gráficas que realizan los alumnos ponen de manifiesto limitaciones en la comprensión mientras que tales deficiencias pasan desapercibidas en las representaciones simbólicas que efectúan los escolares. Los alumnos obtienen mejores tasas de éxito en la simbolización de los repartos que en las representaciones gráficas que describen el proceso de reparto. Este es el caso de la alumna A09 que yerra al representar gráficamente el reparto pero efectúa representaciones simbólicas adecuadas, que mostramos a continuación:

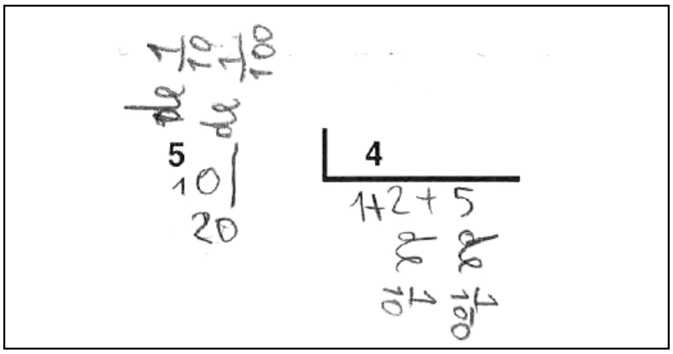


Gráfico VII.13. Respuesta de A09 en la Ficha de Evaluación nº 16

- A pesar de que la representación simbólica del proceso de reparto en varias fases es compleja, los alumnos la aprenden con facilidad de modo que, en las dos Etapas de la Experimentación, la propuesta didáctica se ha implementado en los plazos previstos. El cumplimiento en la temporalización de la secuencia de enseñanza es un indicador que informa de la buena comprensión que muestran los escolares de la técnica del reparto en varias fases.

II. Organización del contenido

• Los alumnos perciben con naturalidad que la acción de reparto puede ser efectuada con otra técnica diferente de la que conocen, y aprenden pronto cuales son las exigencias de la nueva técnica: el fraccionamiento decimal y de la asignación del mayor número posible de subunidades en cada fase del reparto.

• Las representaciones gráficas se muestran muy eficaces en la secuencia de enseñanza porque evitan la utilización de material concreto que, en el caso del fraccionamiento en 100 partes iguales de la unidad, se gestiona con lentitud. Las representaciones gráficas favorecen la transición hacia las representaciones simbólicas y facilitan la evaluación de la comprensión que poseen los escolares de la técnica del reparto en varias fases.

• Las representaciones gráficas que realizan los escolares tienden a ser descuidadas. Dada la riqueza conceptual que aportan las representaciones gráficas conviene que los profesores den consignas para que los alumnos efectúen los gráficos con mayor precisión y esmero.

• Los alumnos no suelen escribir la unidad de medida a continuación de la expresión simbólica de la representación polinómica decimal. Esta mala práctica está muy consolidada entre los escolares de modo que la implementación de la propuesta didáctica no ha hecho posible corregirla. Se hace necesario redoblar esfuerzos para convencer a los alumnos que la medida de cantidades de magnitud exige precisar con que unidad se ha efectuado y modificar esta práctica inadecuada.

• El modelo de cociente partitivo con esta nueva técnica de reparto se ha mostrado válido para introducir la representación polinómica decimal asociada al reparto realizado en varias fases.

• La utilización de modelos estables contribuye a la mejora de la comprensión de los alumnos. Conjeturamos, aunque no confirmamos, que los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación han obtenido mejores resultados que los alumnos de la Primera Etapa porque, en el tercer curso de Educación Primaria, han recibido enseñanza de la división de números naturales desde el modelo de cociente partitivo modificado para el caso de magnitudes discretas. Los alumnos de la Segunda Etapa dan muestras de percibir la representación polinómica decimal como extensión de la división entera en el caso de la magnitud continua de longitud.

VII.2.2.3. Notación decimal

La necesidad de simplificar las expresiones polinómicas decimales justifica la introducción de un sistema de representación más económico, la notación decimal, que mantiene todas sus características semánticas.

La técnica tradicional para obtener la expresión decimal de una fracción es la de dividir el numerador entre el denominador, haciendo uso del algoritmo extendido de la división entre números naturales. Justificar esta técnica desde el significado de la fracción como medida carece de sentido por cuanto no se puede interpretar el cociente de dividir el número de subunidades entre el tamaño de las mismas. Por tanto, para dar sentido a esa división utilizamos el significado de la fracción como cociente, pues el numerador expresa las unidades a repartir y el denominador el número de personas entre las que se reparte.

El número decimal se ha construido como un número medida, pero se ha contextualizado como resultado de un reparto igualitario. Interesa también que el número decimal aparezca asociado a la medida directa porque así aparece en múltiples situaciones de su fenomenología. Entendemos que la recta numérica es el sistema de representación que favorece la conexión entre el número decimal y la medida directa de cantidades de la magnitud longitud.

I. Comprensión del contenido

Vamos estudiar la comprensión del número decimal referida a tres aspectos: el algoritmo simbólico de paso de la representación polinómica decimal asociada a un reparto a la notación decimal (unidad de comprensión CC.XI.2); el significado del número decimal como medida de cantidades de longitud y de las cifras que lo componen (unidad de comprensión CC.XII.1); y el sistema de representación de la recta numérica que facilita la percepción gráfica del número decimal como agregación de fracciones decimales (unidad de comprensión CC.XII.2).

• *Ficha de Evaluación Nº 17*

a) Propósitos de la indagación

Evaluar la comprensión de los alumnos cuando aplican la extensión del algoritmo de la división de números naturales en un contexto de reparto igualitario, expresan significado de las cifras que componen el número decimal y representan gráficamente el número decimal como cantidad de longitud sobre la recta numérica.

b) Trabajo propuesto

Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño en el reparto "17 barras de regaliz entre 8 niños"

a) Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

17 | 8

b) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal

c) Si la longitud de una barra de regaliz es:

Dibuja sobre la línea:

la longitud que indica la cantidad de regaliz que recibe cada niño.

En **la Segunda Etapa** se amplía esta tarea con la intención de que los escolares se percaten de que una misma acción de reparto efectuada con técnicas diferentes lleva a obtener dos representaciones simbólicas diferentes pero que indican la misma cantidad de longitud. Mostramos el enunciado de la Ficha modificada:

Realiza el reparto de "17 barras de regaliz entre 8 niños" de dos formas diferentes:

1º) Cuando fraccionas todas las barras en tantas partes iguales como el número de niños: Expresa, con una fracción, el número de barras de regaliz que recibe cada niño.

SOLUCIÓN: *Cada niño recibe barras de regaliz*

2º) Cuando repartes barras enteras y fraccionas las barras o partes de barras sobrantes en diez:

17 | 8

Expresa, con un número decimal, el número de barras de regaliz que recibe cada niño.

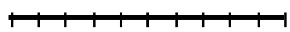
SOLUCIÓN: *Cada niño recibe barras de regaliz*

3º) La longitud de una barra de regaliz es:

Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, la fracción que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

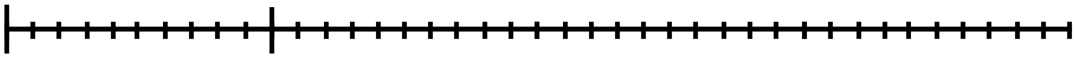
O

4º) La longitud de una barra de regaliz es:



Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, el número decimal que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

O



5º) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal:
La parte entera es _____ e indica que ____
La cifra de las décimas es _____ e indica que ___________________________________
La cifra de las centésimas es _____ e indica que ________________________________
La cifra de las milésimas es _____ e indica que _________________________________

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCXI.2: Utilización de representaciones simbólicas adecuadas para expresar, con un número decimal, el resultado del reparto.

CCXII.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado del número decimal y de las cifras que lo componen.

CCXII.2: Utilización de representaciones gráficas adecuadas para expresar, con un número decimal, la cantidad de longitud que recibe cada participante del reparto.

En todas estas Unidades de Análisis aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante adecuada

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 17, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** Etapa 1//Etapa 2	**1** Etapa 1//Etapa 2	**2** Etapa 1//Etapa 2	**3** Etapa 1//Etapa 2
CCXI.2	7 (**18**) // 1 (**6**)	3 (**8**) // 0 (**0**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	29 (**73**) // 17 (**94**)
CCXII.1	7 (**18**) // 1 (**6**)	8 (**20**) // 4 (**22**)	1 (**3**) // 0 (**0**)	24 (**60**) // 13 (**72**)
CCXII.2	7 (**18**) // 1 (**6**)	17 (**43**) // 6 (**33**)	4 (**10**) // 0 (**0**)	12 (**30**) // 11 (**61**)

Tabla VII.25. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 17

d) Valoración

CCXI.2: Utilización de representaciones simbólicas adecuadas para expresar, con un número decimal, el resultado del reparto

- Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación aplican correctamente el algoritmo extendido de la división para encontrar el número decimal que expresa el resultado del reparto efectuado en varias fases. La Unidad de Análisis CCXI.2 informa que el 73% de los alumnos de la Primera Etapa y 94% de los alumnos de la Segunda Etapa encuentran el número decimal que expresa el resultado del reparto.

CCXII.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado del número decimal y de las cifras que lo componen

- Los dos tercios de los alumnos de las dos Etapas comprenden el significado de las cifras que componen el número decimal.
- Los alumnos comprenden el significado de las cifras del número decimal a pesar de que cometen incorrecciones e imprecisiones cuando responden a las cuestiones sobre la semántica de las cifras del número decimal. Hemos detectado que algunos alumnos no responden a las preguntas que formula la Ficha en relación con esta Unidad de Comprensión, posiblemente porque la práctica docente habitual en el aula de matemáticas no plantea a los alumnos cuestiones que indagan sobre el significado de los conceptos matemáticos.

CCXII.2: Utilización de representaciones gráficas adecuadas para expresar, con un número decimal, la cantidad de longitud que recibe cada participante del reparto

- Los resultados de la Unidad de Análisis de la Comprensión CCXII.2 muestran que los alumnos de las dos Etapas tienen dificultades para representar gráficamente un número decimal que posee tres cifras decimales. En efecto, el 40% de los alumnos de la Primera Etapa y el 60% de los de la Segunda Etapa representan gráficamente sobre la recta numérica el decimal 2´125 barras.
- La mayoría de los alumnos que realizan una representación gráfica correcta proceden dibujando los diferentes órdenes de unidades comenzando por las unidades de mayor tamaño. Y son muy pocos los alumnos que utilizan traslaciones entre representaciones simbólicas del número decimal y de la fracción para representar gráficamente la cantidad de magnitud.
- Los alumnos perciben el número decimal como agregación de fracciones decimales y son capaces de expresar gráficamente la cantidad de longitud que se compone de partes enteras (unidades) y de décimas de unidad. En efecto, un porcentaje elevado de alumnos de las dos Etapas, cercano al 80%, es capaz de representar gráficamente el decimal 2´1 barras.
- Las representaciones gráficas sobre la recta numérica que efectúan los alumnos ponen al descubierto dificultades en la gestión de los órdenes de unidades del número decimal inferiores a la décima como consecuencia de limitaciones de comprensión en tres aspectos:
  a) las conversiones entre diferentes órdenes del sistema de numeración decimal,
  b) las traslaciones entre las representaciones simbólicas del decimal y de la fracción

decimal,

c) las características sintácticas y semánticas del sistema de representación de la recta numérica.

- Entre las limitaciones de comprensión del sistema de numeración decimal detectamos respuestas erróneas en los alumnos al considerar que diferentes órdenes de unidades de las centésimas y milésimas poseen la misma cantidad de magnitud.
- Hemos detectado errores en las traslaciones simbólicas que realizan algunos alumnos entre números decimales y fracciones para representar gráficamente la cantidad de magnitud. Este es el caso de la alumna A27 que confunde 2 centésimas con media décima cuando desea dibujar 2´125 barras:

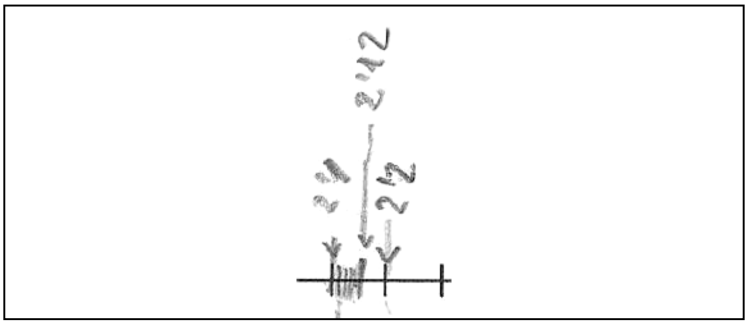


Gráfico VII.14. Respuesta de A27 en la Ficha de Evaluación nº 17

- La recta numérica es un sistema de representación complejo para los escolares que requiere ser ejercitado durante periodos de enseñanza más amplios. El diseño inicial de la propuesta didáctica tenía en cuenta este hecho de modo que los escolares de las dos Etapas han seguido trabajando con la recta numérica después de cumplimentar esta Ficha de Evaluación. Posteriormente, los alumnos mejoran su comprensión de este sistema de representación como consecuencia de la enseñanza recibida pero se mantienen bastantes de las dificultades observadas.

II. Organización del Contenido

• Las preguntas que se formulan a los alumnos sobre el significado de las cifras del número decimal aportan poca información del grado de comprensión que éstos poseen. Los alumnos suelen dar respuestas muy escuetas porque no están acostumbrados a que se les interrogue sobre el significado de los conceptos. En cambio, la Unidad de Análisis de la Comprensión CCXII.2 aporta más información sobre la comprensión de los escolares a partir de las representaciones gráficas del número decimal que efectúan sobre la recta numérica.

• La recta numérica es un sistema de representación que permite percibir el número decimal con una nueva sintaxis: es un punto sobre un segmento orientado. El dominio de este sistema de representación precisa una secuencia de enseñanza más larga que la implementada hasta el momento de resolver la Ficha, dado que los resultados obtenidos indican un conocimiento inestable de la recta numérica: la mayoría de los alumnos sabe representar números decimales con una sola cifra decimal, pero el porcentaje desciende hasta el 60% cuando han representado un número de tres cifras decimales.

• El grado de comprensión que muestran los alumnos del número decimal como medida de una cantidad de longitud está condicionado por el número de cifras decimales que posee el número. Los errores que cometen los alumnos al representar gráficamente un número decimal aumentan cuando crece el número de cifras decimales que componen dicho número.

• A pesar de que la recta numérica presenta dificultades de gestión a los escolares proponemos reforzar su presencia en la propuesta didáctica porque posee dos claras potencialidades. De una parte, facilita la percepción del número decimal como medida de la cantidad de longitud e incide en las conversiones decimales que subyacen entre las cifras del decimal; y, por otro lado, es un indicador bastante fiable del grado de comprensión que poseen los escolares sobre el significado del número decimal.

VII.2.3. Observación y Reflexión del Tercer Foco de Investigación

En esta Fase de Observación las producciones de los escolares al realizar las Fichas de Evaluación aportarán información de la comprensión alcanzada por éstos. También nos permitirá observar las potencialidades y limitaciones de la Propuesta de Enseñanza a partir de la valoración de las Unidades de Organización del Contenido (OC). Se van analizar seis Fichas de Evaluación junto con las Unidades de Análisis de la Organización del Contenido referidas a los temas que se indican a continuación:

Unidades de Análisis de Comprensión del Contenido	*Unidades de Análisis de Organización del Contenido*	*Fichas de Evaluación (FE)*
CCXIII: Conexión entre la notación decimal y la notación fraccionaria	OCXIII: Algoritmo de paso de la notación decimal a la notación fraccionaria	FE nº 18
CCXIV: Interpretación del significado y cálculo del orden entre números decimales	OCXIV: Orden entre números decimales	FE nº 19
CCXV.1 y CCXV.2: Interpretación del significado y cálculo de operaciones de suma y resta con números decimales	OCXV: Suma y resta de números decimales	FE nº 20 y 21
CCXV.3 y CCXV.4: Interpretación del significado y cálculo de operaciones de producto y cociente entre números decimales y números naturales	OCXVI: Producto y cociente de un número decimal por un número natural	FE nº 22 y 23

Cuadro VII.3. Fichas de Evaluación y Unidades de Organización del Contenido en el Tercer Foco de Investigación

VII.2.3.1. Conexión entre la notación decimal y representación fraccionaria

Los alumnos de quinto curso han conectado la representación fraccionaria con la notación decimal a través del modelo de cociente partitivo. Estudiamos, ahora, el paso inverso: de la notación decimal y la notación fraccionaria en contextos socialmente útiles como los de medida directa.

<u>I. Comprensión del contenido</u>

Se analizan los resultados de la Ficha de Evaluación nº 18. Nuestro propósito es indagar si los escolares conectan el número decimal con la fracción en situaciones de medida directa. Para ello estudiaremos si los alumnos conceptúan el número decimal como suma de fracciones decimales (unidad de comprensión CCXIII.1) y si utilizan representaciones simbólicas adecuadas para obtener la fracción a partir del número decimal (unidad de comprensión CCXIII.2).

• *Ficha de Evaluación Nº 18*

a) Propósitos de la indagación

Dado que el número decimal aparezca asociado a la medida directa en múltiples situaciones cotidianas, queremos valorar si los alumnos comprenden su representación polinómica subyacente y, a partir de ella, conectan el número decimal con la notación fraccionaria.

b) Trabajo propuesto

Expresa con una fracción las cantidades de magnitud que están escritas con números decimales:

1º.

SOLUCIÓN: de

He obtenido la fracción del siguiente modo:

2º

SOLUCIÓN: de

He obtenido la fracción del siguiente modo:

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCXIII.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado del número decimal como suma de fracciones decimales.

CCXIII.2: Utilización de representaciones simbólicas adecuadas para obtener la fracción decimal de un número decimal.

En todas estas Unidades de Análisis aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 18, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCXIII.1.1º	2 (**5**) // 1 (**6**)	6 (**15**) // 0 (**0**)	1 (**3**) // 0 (**0**)	31 (**78**) // 17 (**94**)
CCXIII.1.2º	2 (**5**) // 1 (**6**)	7 (**18**) // 0 (**0**)	2 (**5**) // 0 (**0**)	29 (**73**) // 17 (**94**)
CCXIII.2.1º	2 (**5**) // 1 (**6**)	7 (**18**) // 3 (**17**)	7 (**18**) // 0 (**0**)	24 (**60**) // 14 (**78**)
CCXIII.2.2º	2 (**5**) // 1 (**6**)	12 (**30**) // 3 (**17**)	6 (**15**) // 0 (**0**)	20 (**50**) // 14 (**78**)

Tabla VII.26. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 18

d) Valoración

CCXIII.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado del número decimal como suma de fracciones decimales

- Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación comprenden el significado del número decimal asociado a la medida de cantidades de magnitud. La Unidad de Análisis de Comprensión CCXIII.1 muestra que el 75% de los alumnos de la Primera Etapa y casi todos los alumnos de la Segunda Etapa saben expresar el número decimal como suma de fracciones decimales.

CCXIII.2: Utilización de representaciones simbólicas adecuadas para obtener la fracción decimal de un número decimal

- Los alumnos de la Primera Etapa han utilizado, básicamente, dos estrategias. Una estrategia, de carácter informal y de ámbito local, consiste en recordar la representación fraccionaria de los números decimales más comunes; este es el caso del alumno A28 que en la primera tarea utiliza la conversión $0´5 = \frac{1}{2}$.

La segunda estrategia es de carácter formal y de ámbito general. Consiste en expresar el número decimal por medio de su Representación Polinómica Decimal y, después, operar la suma de fracciones decimales. Los alumnos tienden a utilizar la segunda estrategia cuando los decimales implicados les resultan desconocidos. Esto ocurre cuando los alumnos resuelven la segunda tarea de la ficha: como no recuerdan que 0´2 es $\frac{1}{5}$ optan por escribir la correspondiente Representación Polinómica Decimal. La respuesta del alumno A28 ejemplifica esta estrategia de resolución:

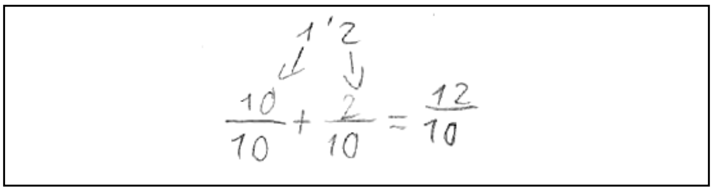


Gráfico VII.15. Respuesta de A28 en la Ficha de Evaluación nº 18

- Los alumnos de la Segunda Etapa utilizan, de forma mayoritaria, la estrategia de carácter formal porque la secuencia de enseñanza ha propiciado su uso. Los porcentajes de éxito obtenidos por los alumnos de la Primera Etapa, ligeramente superiores al 50%, pusieron de manifiesto dificultades en el manejo de la técnica simbólica de conversión entre representaciones decimales y fraccionarias, por lo que se consideró conveniente reforzar esta técnica durante la implementación de la Segunda Etapa de la Experimentación.

II. Organización del contenido

• La conversión del número decimal en fracción presenta dificultades a los escolares quinto curso de Educación Primaria que se manifiestan, fundamentalmente, en errores en la simbolización de las operaciones con fracciones decimales. Los resultados obtenidos por los escolares de las dos Etapas de la Experimentación son aceptables pero debemos tener en cuenta que los números decimales implicados en la Ficha de Evaluación son muy elementales dado que poseen tan solo una cifra decimal.

• La gestión adecuada de los procedimientos simbólicos de paso de un sistema de representación a otro precisa de períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo y que nuestra implementación de aula no contempla porque respeta la temporalización de la programación del Centro. En consecuencia, se aconseja retomar, en el curso siguiente, tareas de conversión entre notaciones decimales y fraccionarias para afianzar la simbolización de las técnica de paso entre ambos sistemas de representación.

• La conexión entre notación fraccionaria y decimal se ha llevado a cabo mediante situaciones contextualizadas de medida. En estas condiciones, no nos sorprende la ausencia de una estrategia que, de forma minoritaria, apareció en las tareas de búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto expresado por una fracción. Si las situaciones problemáticas hubieran sido de reparto los alumnos tal vez hubieran optado por la estrategia que consiste en percibir el resultado del reparto, que viene dado por un número decimal, como una razón y, haciendo uso de la idea de proporcionalidad, encontrar las condiciones iniciales del reparto que informan de los términos de fracción: número entero de barras de regaliz y número de participantes en el reparto. Queda para futuras investigaciones estudiar qué efectos produciría introducir tareas de conversión entre la notación decimal y fraccionaria en contextos de reparto igualitario. Estas tareas deberían ser propuestas a escolares de 6º curso de Educación Primaria para que estén en condiciones de gestionar con éxito las ideas de proporcionalidad aritmética.

VII.2.3.2. Orden entre números decimales

La comparación entre números decimales tiene el sentido de comparar cantidades de la misma magnitud expresadas respecto a la misma unidad de medida. Esta comparación se sustenta en la comparación parcial de las diferentes cantidades expresadas por las cifras que componen los números decimales y, por tanto, la técnica asociada ha de justificarse desde el valor relativo de las cifras.

I. Comprensión del contenido

Se analizan los resultados de la Ficha de Evaluación nº 19. Sobre ella se señalan los objetivos de la indagación, los contenidos de las fichas, los resultados y la valoración de los mismos.

• ***Ficha de Evaluación Nº 19***

a) Propósitos de la indagación

Con esta unidad queremos explorar cómo interpretan y gestionan los alumnos la comparación de números decimales. También queremos valorar la capacidad de los alumnos para conjeturar reglas válidas de comparación de números decimales.

b) Trabajo propuesto

Ordena de menor a mayor, los siguientes números decimales:

10,21 10,3 1,031 10,30 100,01 0,975

SOLUCIÓN:

El número decimal menor es: ______________________________

El número decimal mayor es: ______________________________

Inventa una regla que sirva para ordenar los números decimales:

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCXIV.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la comparación de números decimales.

CCXIV.2: Conjetura y justificación de reglas adecuadas para ordenar números decimales.

Para la Unidad de Análisis CCXIV.1 aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Para la Unidad de Análisis CCXIV.2 aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Justificación errónea o inadecuada de alguna estrategia de ordenación
2.- Justificación dudosa o incompleta de alguna estrategia de ordenación
3.- Justificación correcta o bastante probable de alguna estrategia

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 19, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCXIV.1	0 (**0**) // 0 (**0**)	2 (**5**) // 1 (**6**)	3 (**8**) // 2 (**11**)	35 (**88**) // 15 (**83**)
CCXIV.2	0 (**0**) // 0 (**0**)	11 (**28**) // 3 (**17**)	9 (**23**) // 1 (**6**)	20 (**50**) // 14 (**78**)

Tabla VII.27. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 19

d) Valoración

CCXIV.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la comparación de números decimales

- Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación obtienen niveles de éxito altos, cercanos al 90%, en la tareas de ordenación de números decimales, lo que pone de manifiesto una elevada comprensión del número decimal.
- Otro indicador del nivel de comprensión alto que muestran los alumnos lo aporta la escasa frecuencia con que aparece la estrategia errónea que consiste en ordenar según el número de cifras decimales que contengan los números decimales. Era previsible detectar este error al comparar los decimales 10´3 y 10´21; sin embargo, son pocas las respuestas erróneas de este tipo.

CCXIV.2: Conjetura y justificación de reglas adecuadas para ordenar números decimales

- La mitad de los alumnos de la Primera Etapa y los tres cuartos de los alumnos de la Segunda Etapa han sabido enunciar enunciado una regla correcta para ordenar números decimales.
- La tarea de inventar una regla para ordenar números decimales resulta compleja a los escolares. Sin embargo, las causas del descenso en el éxito en la Unidad CCXIV.2 si se compara con la Unidad CCXIV.1 se deben a las dificultades de los alumnos para expresar por escrito sus ideas antes que a la falta de comprensión del número decimal.

- La Unidad CCXIV.2 aporta información valiosa de las estrategias que utilizan los alumnos para ordenar números decimales. Hemos detectado tres estrategias correctas que indicamos a continuación:

  1ª Comparar cifra a cifra, comenzando por las unidades de mayor orden. Se trata del procedimiento utilizado por la mayoría de los alumnos. Un ejemplo de utilización de esta estrategia lo aporta el alumno A11 cuando escribe:

  Mira primero si tienen unidades enteras, si las tienen iguales, mira en las décimas y haz lo mismo con todas las cifras hasta que lo sepas ordenar

  2ª Colocar los números en columna alineados por la coma. Esta estrategia solo la utiliza la alumna A33 de la Primera Etapa que escribe:

  Ponerlas en columna. Y mirar por las unidades, décimas. Centésimas, milésimas, …

  3ª Añadir ceros a la parte decimal para que todos tengan el mismo número de cifras decimales. Esta estrategia ha sido utilizada por el alumno B10 de la Segunda Etapa y por la alumna A35 de la Primera Etapa. Esta última alumna convierte los decimales en fracciones del mismo denominador y enuncia la siguiente regla:

  Pasar los decimales a fracción y hacer fracciones equivalentes hasta que te salga el mismo denominador igual y comparar

- Como consecuencia de la acción de enseñanza los alumnos, conforme van realizando tareas de ordenación de decimales, optan por unificar sus estrategias de modo que la estrategia más frecuente consiste en comparar, cifra a cifra, los números decimales comenzando por las unidades de mayor orden.

II. Organización del contenido

• Los resultados obtenidos en las dos Etapas de la Experimentación confirman que las tareas propuestas para la enseñanza del orden de números decimales están bien diseñadas y sirven para alcanzar los objetivos previstos.

• La tarea de conjeturar reglas válidas para ordenar números decimales presenta importantes potencialidades en el proceso de enseñanza y aprendizaje porque se trata de una actividad asequible para los escolares que, además, favorece la aparición de diversas estrategias que refuerzan la representación polinómica decimal que subyace al número decimal.

• El criterio metodológico de intervención en el aula que consiste en proponer que los alumnos inventen reglas para ordenar números decimales se ha mostrado eficaz porque favorece la creatividad de los alumnos, mejora la capacidad para comunicar de forma coherente sus ideas, posibilita una reflexión de los procesos mentales que han puesto en juego para resolver la tarea y, lo que es más importante, da la oportunidad al alumno de modificar su percepción de las matemáticas: una regla deja de ser un principio inmutable y pasa a ser un procedimiento que conjetura algún alumno de la clase y que el grupo admite como adecuado.

VII.2.3.3. Suma y resta de números decimales

El significado de la suma y resta de números decimales hay que sustentarlo en ideas similares a las utilizadas para estas operaciones con fracciones: la agregación o disgregación de cantidades de magnitud da lugar a otra cantidad de la misma magnitud cuya medida viene expresada con respecto a la misma unidad. Los algoritmos de cálculo correspondientes han de justificarse desde el sistema polinómico decimal que sirvió para construir la representación de los números decimales.

I. Comprensión del contenido

Se analizan los resultados de la Fichas de Evaluación nº 20 y 21. En cada una de las fichas se señalan los objetivos de la indagación, los contenidos de las fichas, los resultados y la valoración de los mismos.

• ***Ficha de Evaluación Nº 20***

a) Propósitos de la indagación

El objetivo de enseñanza que se persigue es que los alumnos identifiquen la operación y que utilicen el cálculo simbólico para cuantificar el resultado de la operación. En cuanto a la gestión del algoritmo de la suma de números decimales deseamos valorar si los alumnos saben aplicar el procedimiento de cálculo y, además, si son capaces de justificar el algoritmo a partir de las representaciones polinómicas decimales asociadas a los números decimales.

b) Trabajo propuesto

Un grupo de amigas quedan para caminar dos veces al día. Por la mañana andan 4,5Km. y por la tarde 3,75Km. ¿Cuantos kilómetros caminan cada día?

SOLUCIÓN: Cada día caminan ________________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

*Si has realizado alguna operación, escríbela:*_____________________________

*Indica cómo has resuelto el problema:*_________________________________

En la **Segunda Etapa** de la Experimentación se ha modificado una parte del enunciado para que los alumnos vinculen la notación decimal con su Representación Polinómica Decimal asociada con la intención de que justifiquen los procedimientos de cálculo.

La Ficha de Evaluación se presenta del siguiente modo:

Un grupo de amigas quedan para caminar dos veces al día. Por la mañana andan 4,5Km. y por la tarde 3,75Km. ¿Cuantos kilómetros caminan cada día?
SOLUCIÓN: Cada día caminan ______________________________
Escribe los datos como suma de fracciones decimales:
4´5 =
3´75 =
I*ndica cómo has resuelto el problema:*______________________________

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCXV.1.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de suma de decimales.

CCXV.1.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado de la suma de decimales.

Para la Unidad de Análisis CCXV.1.1 aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Para la Unidad de Análisis CCXV.1.2 aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- No aplican correctamente el algoritmo
2.- Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica
3.- Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 20, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCXV.1.1	1 (**3**) // 0 (**0**)	3 (**3**) // 1 (**6**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	38 (**95**) // 17 (**94**)
CCXV.1.2	1 (**3**) // 0 (**0**)	5 (**13**) // 1 (**6**)	31 (**78**) // 6 (**33**)	3 (**8**) // 11 (**61**)

Tabla VII.28. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 20

d) Valoración

CCXV.1.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de suma de números decimales

- El porcentaje de éxito en la Unidad CC.XV.1.1 en las dos Etapas de la Experimentación se acerca al 100%. Los alumnos de las dos Etapas identifican la suma de decimales como la operación que resuelve la situación problemática. Este resultado es previsible porque el significado de la suma de números decimales se sustenta en ideas similares a las utilizadas para estas operaciones con fracciones y números naturales que han sido estudiadas por los escolares.

CCXV.1.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado de la suma de números decimales

- El 90% de los alumnos de las dos Etapas saben aplicar el algoritmo usual de la suma de números decimales que consiste en escribir los sumandos en vertical, alineados por la coma decimal, y sumar como en el caso de número naturales.
- Nuestra propuesta de enseñanza pretende que los alumnos conjeturen y justifiquen los algoritmos de las operaciones con decimales utilizando la Representación Polinómica Decimal asociada al número decimal porque de esta forma mejora la comprensión de los alumnos al disponer de mecanismos conceptuales de control de las manipulaciones simbólicas que efectúan en el algoritmo. Sin embargo, tan solo el 8% de los alumnos de Primera Etapa justifican el algoritmo. Un ejemplo de respuesta que no utiliza el algoritmo usual de la suma de decimales lo aporta la alumna A10 que da como solución 8´25 Km., y escribe:

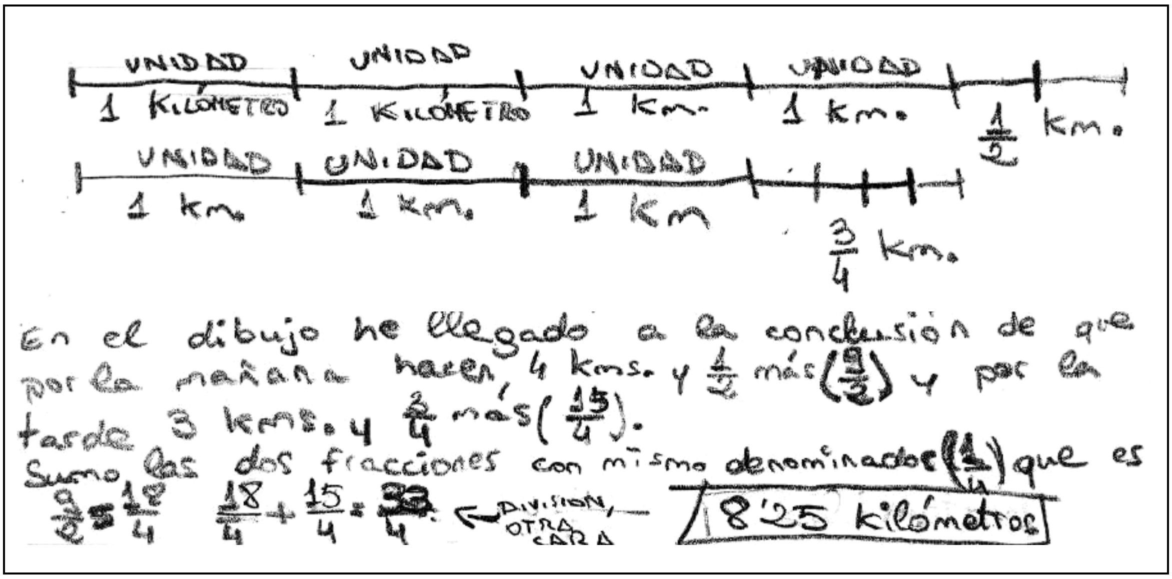


Gráfico VII.16. Respuesta de A10 en la Ficha de Evaluación nº 20

El 61% de los alumnos de la Segunda Etapa justifican el algoritmo de la suma de números decimales mientras que solo el 8% de los alumnos de la Primera Etapa lo justifican. Estas diferencias entre los alumnos de las dos Etapas se deben a la modificación introducida en la Ficha de Evaluación y a las recomendaciones de los profesores de aula, durante la implementación de la Segunda Etapa, para que los alumnos afronten la justificación del algoritmo de cálculo de la suma de decimales.

- Los dos tercios de los alumnos de la Segunda Etapa son capaces de justificar el algoritmo de la suma de números decimales. Mostramos la respuesta del alumno B01:

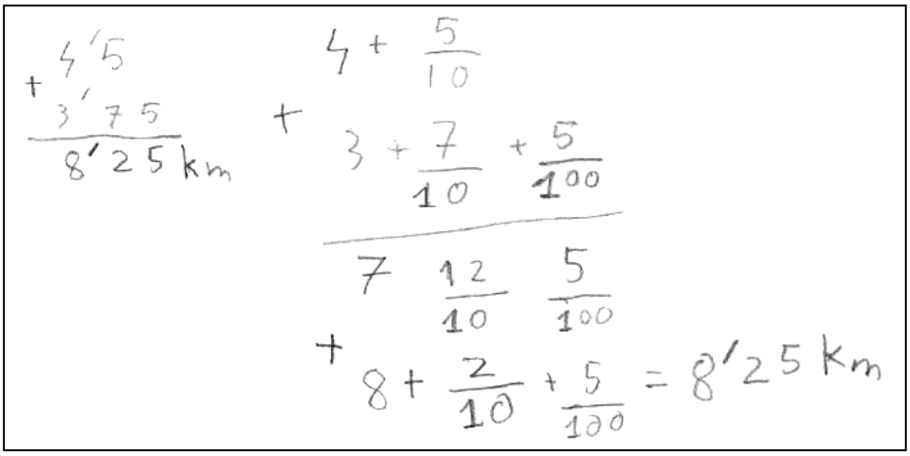


Gráfico VII.17. Respuesta de B01 en la Ficha de Evaluación nº 20

- El parecido entre los algoritmos de cálculo de números decimales y los de números naturales constituye un obstáculo didáctico porque los alumnos se niegan a justificar, con fracciones decimales, el funcionamiento de los algoritmos con números decimales. Los alumnos, si no reciben consignas explícitas de actuación, tienden a aplicar los algoritmos usuales y no afrontan la justificación de los procedimientos de cálculo.

• *Ficha de Evaluación nº 21*

a) Propósitos de la indagación

Deseamos evaluar si los alumnos identifican la operación resta de números decimales cuando se enfrentan a la resolución de situaciones problemáticas, y valorar si éstos aplican el procedimiento de cálculo y, además, si justifican el algoritmo a partir de las representaciones polinómicas decimales asociadas a los números decimales.

b) Trabajo propuesto

Un carnicero vende una pieza de ternasco de 20 Kgrs. A los tres primeros clientes les vende 3,75 Kgrs.; 5,8 Kgrs. y 6,5 Kgrs. ¿Cuántos Kgrs. de la pieza de ternasco le queda por vender?

Le queda para vender ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

¿Habéis realizado un gráfico? SI ☐ NO ☐

¿Habéis utilizado alguna operación? SI ☐ NO ☐

*Indica cómo has resuelto el problema:*___________________________________

En la **Segunda Etapa** de la Experimentación se ha modificado una parte del enunciado para que los alumnos vinculen la notación decimal con su Representación Polinómica Decimal asociada con la intención de que justifiquen los procedimientos de cálculo.

La Ficha de Evaluación se presenta del siguiente modo:

Un carnicero vende una pieza de ternasco de 20 Kgrs. A los tres primeros clientes les vende 3,75 Kgrs.; 5,8 Kgrs. y 6,5 Kgrs. ¿Cuántos Kgrs. de la pieza de ternasco le queda por vender?

Le queda para vender ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

3´75 =

5´8 =

6´5 =

Indica cómo has resuelto el problema: ____

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCXV.2.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de resta de decimales.

CCXV.2.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado de la resta de decimales.

Para la Unidad de Análisis CCXV.2.1 aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase

1.- Interpretación errónea o inadecuada

2.- Interpretación dudosa o incompleta

3.- Interpretación correcta o bastante probable

Para la Unidad de Análisis CCXV.2.2 aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase

1.- No aplican correctamente el algoritmo

2.- Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica

3.- Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 21, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCXV.2.1	0 (**0**) // 1 (**6**)	1 (**3**) // 0 (**0**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	39 (**98**) // 17 (**94**)
CCXV.2.2	0 (**0**) // 1 (**6**)	5 (**13**) // 0 (**0**)	34 (**85**) // 13 (**72**)	1 (**3**) // 4 (**22**)

Tabla VII.29. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 21

d) Valoración

CCXV.2.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de resta de decimales.

- El porcentaje de éxito en la Unidad CC.XV.2.1 en las dos Etapas de la Experimentación se acerca al 100%. Los alumnos de ambos Etapas identifican la resta de decimales como la operación que resuelve la situación problemática que pertenece a la fenomenología de esta operación.

CCXV.2.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado de la resta de decimales.

- El 85% de los alumnos de la Primera Etapa y todos los alumnos de la Segunda Etapa saben aplicar el algoritmo usual de la resta de números decimales.
- Nuestra propuesta de enseñanza pretende que los alumnos, además de que apliquen el algoritmo usual de la resta de decimales, conjeturen y justifiquen el algoritmo utilizando la Representación Polinómica Decimal asociada al número decimal porque de esta forma mejora la comprensión de los alumnos al disponer de mecanismos conceptuales de control de las manipulaciones simbólicas que efectúan en el algoritmo.
  Tan solo la alumna de la Primera Etapa y cuatro alumnos de la Segunda Etapa siguen las consignas de los profesores y utilizan la representación fraccionaria para realizar la resta de decimales. Estos alumnos muestran una buena comprensión del número racional porque conectan mediante transformaciones simbólicas la representación fraccionaria y decimal. El alumno B10 que ejemplifica el trabajo de este reducido grupo de alumnos, escribe:

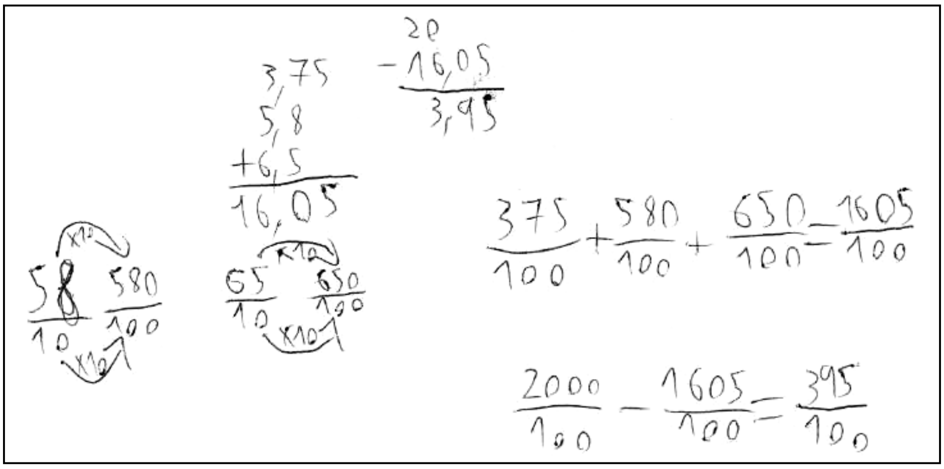


Gráfico VII.18. Respuesta de B10 en la Ficha de Evaluación nº 21

- Ninguno de esos alumnos de las dos Etapas consigue justificar el algoritmo usual de la resta de números decimales porque desconocen la justificación del algoritmo de la resta de números naturales. En efecto, los alumnos de la Segunda Etapa son incapaces de justificar el algoritmo de la resta de decimales mientras que el 61% de éstos mismos alumnos tenían éxito con la operación suma.
- Los alumnos conocen y aplican el algoritmo tradicional de la resta de naturales pero desconocen su justificación matemática. En estas condiciones, los alumnos carecen de recursos para justificar el algoritmo usual de la resta de decimales.

II. Organización del contenido

• El modelo de medida funciona bien para dar sentido a la suma y a la resta de números decimales y para introducir el algoritmo usual de la suma y resta de números decimales como un procedimiento de cálculo más económico que el de la suma y resta de fracciones.

• Los alumnos saben aplicar los algoritmos usuales de la suma y de la resta de números decimales porque conocen que funciona de modo parecido al de los números naturales.

• Los alumnos se resisten a justificar los algoritmos usuales de la suma y de la resta de números decimales a partir de las representaciones fraccionarias porque las manipulaciones simbólicas con fracciones decimales les resultan más costosas que las que efectúan cuando aplican el algoritmo usual de la suma de decimales. No obstante, proponemos a los alumnos que justifiquen los algoritmos de cálculo porque esta actividad mejora la comprensión del número racional al conectar la representación fraccionaria y la notación decimal, y al reforzar la estructura numérica de base diez que caracteriza a los números decimales.

VII.2.3.4. Multiplicación y división de un número decimal por un número natural

De forma similar a como se actuó en las operaciones con la notación fraccionaria, el producto de un número decimal por un número natural tiene el sentido de suma reiterada de cantidades de magnitud iguales; mientras que el cociente entre un número decimal y un número natural tiene sentido de repartir una cantidad de magnitud en un número entero de partes iguales. En ambos casos la obtención del resultado se justifica mediante la representación polinómica decimal, desde la cual se pueden formular los algoritmos de cálculo habituales.

<u>I. Comprensión del contenido</u>

Se analizan los resultados de la Ficha de Evaluación nº 22 y nº 23. En cada una de las fichas se señalan los objetivos de la indagación, los contenidos de las fichas, los resultados y la valoración de los mismos.

• *Ficha de Evaluación Nº 22*

a) Propósitos de la indagación

Evaluar la capacidad de los alumnos para identificar la operación multiplicación de un número decimal por un natural; así como valorar si los alumnos saben aplicar el procedimiento de cálculo y si son capaces de justificarlo a partir de las representaciones polinómicas decimales asociadas a los números decimales.

b) Trabajo propuesto

La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas consecutivas es de 2´75 metros?

SOLUCIÓN: La altura del edificio es ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

¿Habéis realizado un gráfico? SI ☐ NO ☐

¿Habéis utilizado alguna operación? SI ☐ NO ☐

*Indica cómo has resuelto el problema:*____

En la **Segunda Etapa** de la Experimentación se ha modificado una parte del enunciado para que los alumnos vinculen la notación decimal con su Representación Polinómica Decimal asociada; con la intención de que justifiquen el procedimientos de cálculo. La Ficha de Evaluación se presenta del siguiente modo:

La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas consecutivas es de 2´75 metros?

SOLUCIÓN: La altura del edificio es ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

2´75 =

*Indica cómo has resuelto el problema:*____

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCXVI.1.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado del producto de un número decimal por un número natural.

CCXVI.1.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado del producto de un número decimal por un número natural.

Para la Unidad de Análisis CCXVI.1.1 aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Para la Unidad de Análisis CCXVI.1.2 aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- No aplican correctamente el algoritmo
2.- Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica
3.- Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 22, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCXVI.1.1	0 (**0**) // 0 (**0**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	40 (**100**) // 18 (**100**)
CCXVI.1.2	0 (**0**) // 0 (**0**)	3 (**8**) // 0 (**0**)	28 (**70**) // 10 (**56**)	9 (**23**) // 8 (**44**)

Tabla VII.30. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 22

d) Valoración

CCXVI.1.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado del producto de un número decimal por un número natural

- El porcentaje de éxito en la Unidad CC.XVI.1.1 en las dos Etapas de la Experimentación es del 100%. Los alumnos identifican la multiplicación de un decimal por un natural al resolver problemas que modelizan situaciones problemáticas en las que tiene sentido medir una determinada cantidad de magnitud que se reitera un número entero veces.
- Todos los alumnos de las dos Etapas modelizan la situación mediante la multiplicación. Además, algunos alumnos inciden en el significado de la multiplicación como suma reitera; este es el caso de la alumna A15 que escribe:

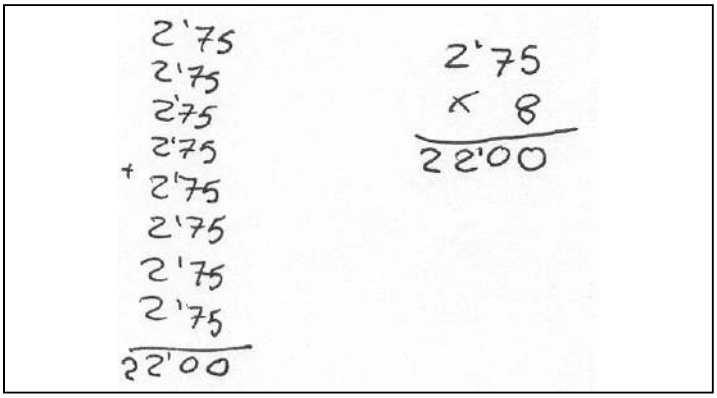


Gráfico VII.19. Respuesta de A15 en la Ficha de Evaluación nº 22

CCXVI.1.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado del producto de un número decimal por un número natural

- Los alumnos de las dos Etapas saben aplicar el algoritmo usual de la multiplicación de un número decimal por un natural.
- La mitad de los alumnos de la Primera Etapa y el 40% de la Segunda Etapa aplican el algoritmo usual sin intentar justificarlo. Las respuestas de los alumnos que no justifican el algoritmo son muy uniformes: efectúan el cálculo como si se tratara de números naturales y, después, sitúan la coma sobre el resultado realizado con naturales. Esta práctica, sin ser errónea, pone de manifiesto limitaciones en la gestión de las conversiones entre las representaciones simbólicas de los decimales y los naturales.
- Los alumnos que intentan justificar el algoritmo de cálculo de la multiplicación utilizan dos estrategias:

  a) Expresar el número decimal mediante su Representación Polinómica Decimal y multiplicar cada uno de las sumandos de la Representación Polinómica Decimal. La mitad de los alumnos de la Primera Etapa y la quinta parte de los de la Segunda Etapa utilizan esta estrategia. La respuesta de la alumna B14 que deja sin explicitar las conversiones entre los diferentes órdenes de unidades ejemplifica esta estrategia:

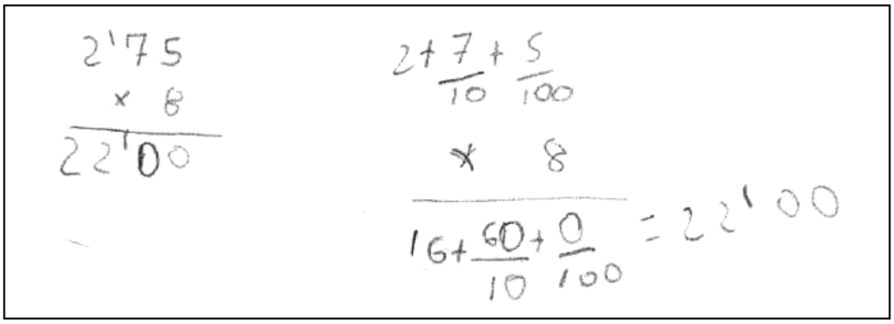


Gráfico VII.20. Respuesta de B14 en la Ficha de Evaluación nº 22

b) Expresar el número decimal mediante su Representación Fraccionaria y multiplicar la fracción. La mitad de los alumnos de la Segunda Etapa utilizan esta estrategia, mientras que ninguno de la Primera Etapa la utiliza. Además, todos los alumnos de la Segunda Etapa que operan con la fracción realizan la multiplicación correctamente. A modo de ejemplo mostramos la respuesta que aporta el alumno B03:

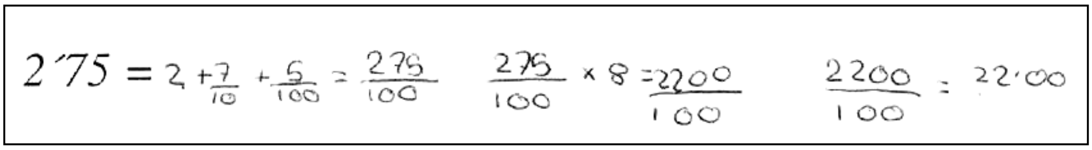


Gráfico VII.21. Respuesta de B03 en la Ficha de Evaluación nº 22

Estos alumnos justifican la regla para "situar la coma" que consiste en multiplicar el decimal, que actúa como multiplicando, como si se tratase de un natural y, sobre el resultado de la multiplicación, desplazar la coma hacia la izquierda tantos lugares como cifras decimales tenga el multiplicando.

- El equipo de investigación conjeturó, tras la fase de acción de la Primera Etapa, que la ausencia de respuestas dirigidas a justificar el algoritmo tenían su origen en la enseñanza prematura de la regla para "situar la coma". Esta conjetura no se confirma, en la Segunda Etapa, porque en esta Etapa se pospone la institucionalización de la regla para "situar la coma" y tan apenas aumenta el porcentaje de alumnos que intentan justificar el algoritmo de la multiplicación.
- Los alumnos de la Segunda Etapa obtienen porcentajes de éxito superiores a los de la Primera Etapa cuando intentan justificar el algoritmo de la multiplicación de un decimal por un natural: el 44% de los alumnos la Segunda Etapa justifican, de forma adecuada, los procedimientos de cálculo frente al 23% de los alumnos de la Primera Etapa. El desfase en el rendimiento de los alumnos de una y otra Etapa se debe a que los alumnos de la Segunda Etapa tienen un dominio más robusto de las técnicas de cálculo simbólico con fracciones que los alumnos de la Primera Etapa.
- Se alcanza parcialmente el objetivo de que los alumnos justifiquen el algoritmo de la multiplicación utilizando la Representación Fraccionaria o la Representación

Polinómica Decimal asociada al número decimal porque, aproximadamente, la mitad de los alumnos de las dos Etapas optan por la multiplicación de naturales y, después, aplicar la regla para "situar la coma" que conocen aunque no se haya institucionalizado en el aula.

• ***Ficha de Evaluación Nº 23***

a) Propósitos de la indagación

Indagar la capacidad de los alumnos para identificar la operación división de un número decimal por un natural y valorar si los alumnos saben aplicar el procedimiento de cálculo y si son capaces de justificarlo.

b) Trabajo propuesto

Con 0´375 Kgrs. de carne picada haces 5 hamburguesas iguales. ¿Cuánto pesa cada una de las cinco hamburguesas?
SOLUCIÓN: Cada hamburguesa pesa ____
Indica cómo has resuelto el problema:

En la **Segunda Etapa** se ha modificado una parte del enunciado para que los alumnos vinculen la notación decimal con su Representación Polinómica Decimal asociada con la intención de que justifiquen los procedimientos de cálculo. La Ficha de Evaluación se presenta del siguiente modo:

Con 0´375 Kgrs. de carne picada haces 5 hamburguesas iguales. ¿Cuánto pesa cada una de las cinco hamburguesas?
SOLUCIÓN: Cada hamburguesa pesa ____
Escribe los datos como suma de fracciones decimales:
0´375 =
Indica cómo has resuelto el problema:

c) Resultados

Se utilizan las siguientes Unidades de Comprensión

CCXVI.2.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de cociente de un número decimal entre un número natural.

CCXVI.2.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado del cociente de un número decimal entre un número natural.

Para la Unidad de Análisis CCXVI.2.1 aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Interpretación errónea o inadecuada
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación correcta o bastante probable

Para la Unidad de Análisis CCXVI.2.2 aplicamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase

1.- No aplican correctamente el algoritmo

2.- Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica

3.- Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica

Los datos obtenidos de los alumnos en la Ficha de Evaluación Nº 23, según los criterios considerados, se detallan en el Anexo III.1. El siguiente cuadro recoge los resultados globales:

	Criterios de valoración			
Unidades de Análisis	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
CCXVI.2.1	0 (**0**) // 3 (**17**)	8 (**20**) // 1 (**6**)	0 (**0**) // 0 (**0**)	32 (**80**) // 14 (**78**)
CCXVI.2.2	0 (**0**) // 3 (**17**)	14 (**35**) // 2 (**11**)	13 (**33**) // 9 (**50**)	13 (**33**) // 4 (**22**)

Tabla VII.31. Resultados de la Ficha de Evaluación nº 23

d) Valoración

CCXVI.2.1: Argumentaciones utilizadas sobre el significado de cociente de un número decimal entre un número natural

- El 80% de los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación identifican la división de un número decimal entre un natural como la operación que modeliza las situaciones de reparto igualitario de una determinada cantidad de magnitud.

CCXVI.2.2: Razonamientos empleados para calcular el resultado del cociente de un número decimal entre un número natural

- Los alumnos de las dos Etapas obtienen porcentajes de éxito aceptables en la gestión del algoritmo escrito de la división. El 66% de los alumnos de la Primera Etapa y el 72% de los de la Segunda Etapa aplican correctamente el algoritmo de la división de un decimal entre un natural.

- En la Primera Etapa hemos detectado dos estrategias al aplicar el algoritmo de la división, a saber:

  a) utilizar la noción de equivalencia de repartos para suprimir las cifras decimales del dividendo, al multiplicar el dividendo y el divisor por una potencia adecuada de diez y, después, aplicar el algoritmo controlando el orden de unidades que se reparte en cada fase; y

  b) aplicar directamente el algoritmo, controlando el orden de unidades que se reparte en cada fase.

  La mitad de los alumnos la Primera Etapa transforman los decimales del dividendo y del divisor en naturales; y el 30% de estos alumnos aplican directamente el algoritmo. Mostramos a continuación la respuesta de la alumna A09 que utiliza la primera estrategia:

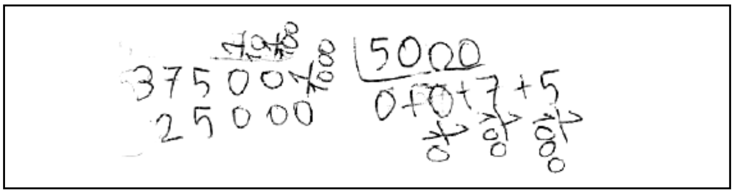


Gráfico VII.22. Respuesta de A09 en la Ficha de Evaluación nº 23

- Los alumnos de la Primera Etapa se han decantado por la estrategia basada en la equivalencia de repartos porque los profesores de aula han sugerido su utilización con la intención de anticipar la estrategia, que se enseña posteriormente y que consiste en suprimir la coma decimal en las divisiones entre dos números decimales.

  Los alumnos de la Primera Etapa que suprimen la coma decimal obtienen mejores resultados que los alumnos que aplican directamente el algoritmo: el 90% de alumnos que aplican la primera estrategia realizan correctamente el algoritmo, mientras que el rendimiento de los que aplican la segunda estrategia baja hasta el 75%. Los alumnos que aplican directamente el algoritmo no explicitan los tamaños de los órdenes de unidades, de modo que cometen más errores porque dejan de evocar el proceso de reparto. Este es el caso de la alumna A20 que yerra porque pierde el control del tamaño de los órdenes de unidades que se reparten en cada fase:

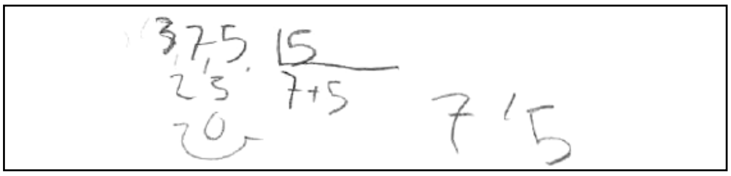


Gráfico VII.23. Respuesta de A20 en la Ficha de Evaluación nº 23

- En la Segunda Etapa se realiza una modificación que afecta a la metodología de la propuesta didáctica y que se concreta en el que los alumnos no reciben indicaciones para que supriman las cifras decimales del dividendo. Con esta adaptación pretendemos observar dos aspectos relacionados con la gestión simbólica de este algoritmo, a saber:
  a) si los alumnos utilizan la estrategia basada en la equivalencia de repartos; y
  b) si los alumnos aplican directamente el algoritmo usual de la división de un decimal entre un natural y cómo gestionan dicho algoritmo.

- Los alumnos de la Segunda Etapa no utilizan la estrategia basada en la equivalencia de repartos para calcular la división de un decimal entre un natural. Los alumnos optan por operar directamente con el número decimal. Tan solo dos alumnos (B10 y B18) utilizan una estrategia alternativa que consiste en realizar la división como si el dividendo fuera un natural y, posteriormente, dividir el resultado por la potencia de diez adecuada. Mostramos a continuación la respuesta que aporta el alumno B10:

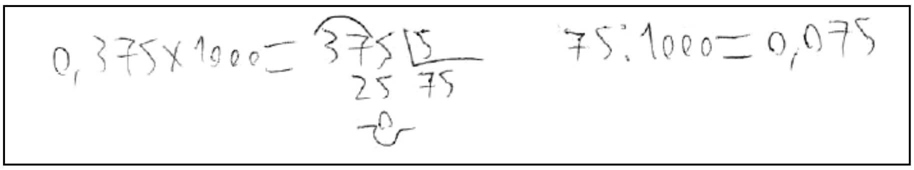


Gráfico VII.24. Respuesta de B10 en la Ficha de Evaluación nº 23

- El 72% de los alumnos de la Segunda Etapa aplican correctamente el algoritmo de la división (criterio 2 ó 3 de la Unidad de Comprensión CCXVI.2.2) a pesar de que apenas utilizan representaciones polinómicas decimales para justificar el procedimiento de cálculo.
- Los datos obtenidos en la Segunda Etapa, en relación con la modificación metodológica que postula no sugerir a los escolares la supresión de las cifras decimales, aportan la siguiente información:
  a) Los alumnos no conjeturan la regla de la supresión de las cifras decimales del dividendo.
  b) Los alumnos saben aplicar el algoritmo usual de la división sin necesidad de utilizar la regla de la supresión de las cifras decimales del dividendo.
  c) Los alumnos aplican correctamente el algoritmo usual de la división pero descuidan la simbolización del tamaño de las cantidades que van a repartir, y del número y del tamaño de las partes que obtienen en cada fase del reparto.

  En estas condiciones la supresión o mantenimiento de la modificación introducida en la Segunda Etapa apenas produce variaciones entre los resultados obtenidos por los alumnos de las dos Etapas en la Unidad de Comprensión CCXVI.2.2. Este aspecto deberá ser estudiado en futuras implementaciones de la Propuesta de Enseñanza.

II. Organización del contenido

• El modelo de medida funciona bien para dar sentido a la multiplicación de un número decimal por un natural y para enseñar el algoritmo usual de esta operación como un procedimiento de cálculo más económico que la suma reiterada de números decimales. Los alumnos de las dos Etapas alcanzan ambos objetivos.

• El objetivo de justificar el algoritmo usual de la multiplicación de un número decimal por un natural no se ha alcanzado en ninguno de las dos Etapas de la Experimentación. Los alumnos siguen teniendo dificultades para justificar los procedimientos de cálculo con decimales porque:

a) no perciben la necesidad de justificar los algoritmos de cálculo que conocen, y

b) la tarea de justificar es compleja porque exige utilizar representaciones fraccionarias cuya gestión simbólica resulta más compleja a los escolares que la notación decimal.

• El modelo de cociente partitivo funciona bien para dar sentido a la división de un número decimal entre un natural y para enseñar el algoritmo usual de esta operación. Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación alcanzan ambos objetivos.

• El porcentaje de alumnos de las dos Etapas que justifican el algoritmo usual de la división de un número decimal entre un natural es bajo: el 33% en la Primera Etapa y el 22% en la Segunda Etapa. Los alumnos tienen dificultades para justificar este procedimiento de cálculo con decimales porque:

a) no perciben la necesidad de justificar los algoritmos de cálculo que conocen,
b) cuando efectúan el algoritmo de la división descuidan la simbolización del tamaño de las cantidades que van a repartir, y del número y del tamaño de las partes que obtienen en cada fase del reparto, y
c) el conocimiento que tienen los alumnos del algoritmo de la división de naturales y la semejanza entre este algoritmo y el de decimales constituye un obstáculo didáctico porque los alumnos centran su atención en las manipulaciones simbólicas y tienden a obviar el proceso de un reparto, o si lo evocan, no simbolizan los elementos del reparto realizado por fases.

• Los alumnos de la Segunda Etapa obtienen mejores resultados que los alumnos de la Primera Etapa. Conjeturamos que la secuencia de enseñanza sobre la división de números naturales implementada, en el tercer curso de Educación Primaria, con los alumnos de la Segundo Etapa propicia la mejora en el rendimiento. Sin embargo, no disponemos de datos suficientes para concluir que esta diferencia entre los resultados de las dos Etapas de Experimentación se deba exclusivamente a la implementación, en tercer curso, de aquella secuencia de enseñanza sobre la división de números naturales.

• La enseñanza de los cálculos computacionales desde la comprensión reporta muchas más ventajas que inconvenientes porque los alumnos reciben una enseñanza más crítica, de mayor riqueza conceptual, donde los algoritmos realizados con lápiz y papel asumen una nueva función: la de reforzar la comprensión de las estructuras numéricas y del sistema de numeración. En consecuencia, mantenemos la exigencia de justificar los algoritmos de cálculo con números decimales, a pesar de que esta tarea resulta compleja a los escolares y que, por lo tanto, alarga considerablemente los períodos de instrucción.

VII.3. Pruebas de Evaluación

A lo largo de las dos Etapas de Experimentación hemos realizado cuatro pruebas: dos con los alumnos de la Primera Etapa y dos con los alumnos de la Segunda Etapa. Los alumnos de cuarto curso de Educación Primaria de las dos Etapa realizan una Prueba de Evaluación de los aprendizajes. Esta prueba se realiza al comienzo del siguiente año académico porque queremos indagar qué conocimientos de la fracción poseen los alumnos de quinto curso cuando se reincorporan al Colegio después de que haya transcurrido un plazo temporal extenso que comprende las vacaciones de verano. El diseño de la prueba es común para las dos Etapas y la denominamos *Prueba de Evaluación del Primer Ciclo de la Experimentación*.

Del mismo modo, en los dos Etapas de Experimentación los alumnos de quinto curso de Educación Primaria realizan una Prueba de Evaluación de los aprendizajes. Esta prueba se implementa a principios del siguiente año académico cuando se reincorporan al Colegio, como alumnos de sexto curso, tras el periodo de vacaciones estivales; y la denominamos *Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación*.

En los apartados siguientes VII.3.1. y VII.3.2. de este capítulo vamos a describir ambas Pruebas de Evaluación y los resultados obtenidos en ellas.

VII.3.1. Prueba de Evaluación del Primer Ciclo de la Experimentación

VII.3.1.1. Objetivo de la Prueba

Los alumnos que, en cuarto curso participan en la Primera Etapa de la Experimentación, realizan una Prueba de Evaluación de los aprendizajes al comienzo del siguiente año académico cuando se reincorporan al Colegio después de las vacaciones de verano como alumnos de quinto curso de Educación Primaria. El momento de realización de la Prueba, después de las vacaciones estivales, permite al Equipo Investigador valorar qué aspectos del conocimiento de la fracción saben gestionar los escolares después de un período temporal largo, próximo al semestre, en el que no han recibido enseñanza de estos conceptos. Los alumnos que realizan la Prueba no reciben enseñanza previa de la fracción ni la ayuda de los profesores de aula.

El objetivo de la Prueba es evaluar los aprendizajes realizados por los alumnos después de la recibir enseñanza de la fracción desde los modelos de medida. Deseamos observar qué ideas de la fracción han perdurado en la mente de los escolares, es decir, qué aprendizajes han consolidado como consecuencia de la enseñanza recibida en cuarto curso.

VII.3.1.2. Cuestionario

La Prueba se compone de tres preguntas. Se presentan dos versiones de cada una de las preguntas para que la mitad de los alumnos del grupo respondan a una cuestión determinada y la otra mitad a otra cuestión análoga pero con los datos modificados de modo que éstos respondan sin recibir ayuda del compañero más próximo.

Los contenidos de las preguntas que componen la Prueba se corresponden con los estudiados en el Primer Foco de Investigación y se indican en la siguiente tabla:

Preguntas	*Contenido a evaluar*
1-a	Medida de la cantidad de longitud que posee un listón
1-b	Medida de la cantidad de superficie que posee una cartulina
2-a	Evaluación semántica de una fracción que expresa el resultado de la medida de una cantidad de longitud
2-b	Evaluación semántica de una fracción que expresa el resultado de la medida de una cantidad de superficie
3-a; 3-b	Comparación de dos fracciones impropias

Cuadro VII.4. Contenidos de la Prueba de Evaluación del Primer Ciclo de la Experimentación

Hemos aprovechado las versiones de las preguntas nº 1 y nº 2 para formular tareas con las magnitudes superficie y longitud con la intención de observar si los alumnos encuentran diferencias sustanciales al trabajar con una u otra magnitud en las tareas de medida y de evaluación semántica de la fracción.
Pasamos a mostrar los enunciados de las preguntas y las unidades de evaluación para cada una de ellas.

Pregunta nº 1
La mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 1-a: *Cada alumno recibe dos tiras de longitud la unidad y debe medir la longitud de listón de madera (5/4 de unidad). Además, debe escribir la respuesta en la siguiente hoja:*

La medida de la longitud del listón es: ________

El numerador de la fracción es _____ y significa que ______________________________

El denominador de la fracción es _____ y significa que ____________________________

La otra mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la pregunta 1-b siguiente: *Cada alumno recibe varias hojas cuadradas que son unidades de superficie y debe medir la superficie de una cartulina (9/4 de unidad). Además, debe escribir la respuesta en la siguiente hoja:*

La medida de la superficie del mantel es: ________

El numerador de la fracción es _____ y significa que ______________________________

El denominador de la fracción es _____ y significa que ____________________________

Con esta pregunta deseamos evaluar:

- la competencia de los alumnos para hacer uso del sistema de representación fraccionario en situaciones de medida de cantidades de longitud y de superficie, y
- la comprensión de la fracción a partir de los significados que asignan a los términos de la fracción.

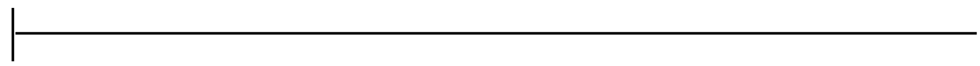
También deseamos valorar si la medida de cantidades de la magnitud superficie crea más dificultades que la medida de cantidades de longitud.

Pregunta nº 2
La mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 2-a:

Si la unidad de longitud es:

Dibuja, a partir del punto A, un segmento cuya longitud sea $\frac{3}{8}$ de unidad.

A

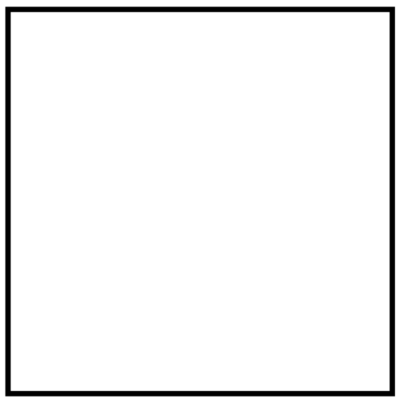


Explica que has hecho para dibujar el segmento:

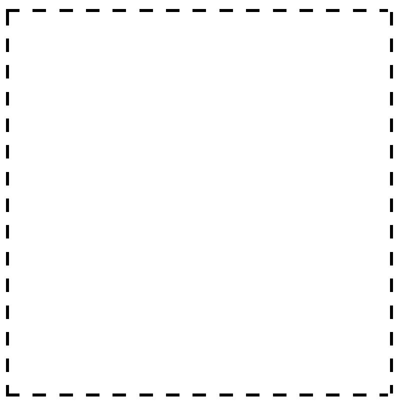
Aunque la tarea se formula de modo gráfico, los alumnos reciben alumnos varias tiras de papel de la misma cantidad de longitud que la unidad.

La otra mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 2-b:

Si la unidad de superficie es:



Dibuja una figura cuya superficie sea $\frac{5}{8}$ de unidad.



Explica que has hecho para dibujar la figura:

Cada alumno recibe alumnos recibe varias hojas de papel de la misma cantidad de superficie y forma que la unidad.

Con esta pregunta de evaluación semántica de la fracción deseamos indagar sobre la comprensión de los alumnos a partir que representaciones gráficas que éstos efectúan.

Pregunta nº 3

La mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 4-a:

Rodea con un círculo lo que sea cierto y después explica tu respuesta: es menor que $\frac{4}{3}$ es equivalente a $\frac{5}{4}$ es mayor que porque:

La otra mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 4-b:

Rodea con un círculo lo que sea cierto y después explica tu respuesta: es menor que $\frac{4}{3}$ es equivalente a $\frac{6}{5}$ es mayor que porque:

Con esta pregunta deseamos indagar si los alumnos saben comparar fracciones. En particular, la observación de las estrategias que utilizan nos informa del nivel de comprensión en dos aspectos fundamentales: la idea de fracción como medida y la gestión simbólica de la equivalencia de fracciones. En efecto, para resolver esta tarea se espera que utilicen alguna de las siguientes estrategias: descomponer las fracciones impropias y, después, comparar las fracciones propias, o bien, hallar fracciones equivalentes a las dadas con el mismo denominador o numerador.

VII.3.1.3. Implementación de la Prueba

Los dos grupos de docencia de quinto curso de la Primera Etapa de la Experimentación responden al cuestionario durante una sesión de clase, el día 13 septiembre de 2000. Los alumnos del grupo de docencia de quinto curso de la Segunda Etapa, responden al cuestionario durante una sesión de clase, el día 21 septiembre de 2004.

Los alumnos de los dos Etapas realizan la Prueba los primeros días que se incorporan al Centro para cursar quinto curso, y no reciben enseñanza previa de los contenidos que indaga la Prueba. Los alumnos disponen de un plazo temporal de 50 minutos, que coincide con la duración de una sesión de clase, para responder al cuestionario. Los alumnos lo cumplimentan individualmente, sin recibir ayuda de los profesores ni de sus compañeros.

VII.3.1.4. Resultados y conclusiones parciales

R.1) Resultados de la pregunta nº 1

Para analizar los resultados de las pregunta nº 1 utilizamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Mide mal
2.- Mide bien pero yerra al interpretar los términos de la fracción
3.- Mide bien e interpreta correctamente los términos de la fracción

Los datos obtenidos de los alumnos, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.2. Los resultados globales correspondientes a las dos Etapas se muestran en la siguiente tabla, indicando las frecuencias y, entre paréntesis, los porcentajes de respuestas para cada uno de los criterios utilizados:

	Criterios de valoración			
Pregunta	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
Nº 1	0 (**0**) // 2 (**11**)	10 (**25**) // 3 (**19**)	11 (**28**) // 7 (**44**)	19 (**48**) // 6 (**38**)

Tabla VII.32. Resultados de la Pregunta nº 1 de la Prueba de Evaluación del Primer Ciclo

C.1) Conclusiones parciales de la pregunta nº 1

1º Los alumnos de las dos Etapas de Experimentación reconocen y saben utilizar el sistema de representación fraccionario en situaciones de medida de longitud y de superficie. Los alumnos recuerdan la técnica de medida y utilizan la fracción para expresar el resultado de la medida de una cantidad de magnitud, a pesar de que ha trascurrido un semestre sin que los alumnos hayan realizado actividades de medida.

2º Un porcentaje importante de alumnos (28% de la Primera Etapa y 44% de la Segunda Etapa) tienen dificultades para expresar por escrito los significados del numerador y denominador de la fracción a pesar de que miden correctamente las cantidades de magnitud. Este resultado indica que la tarea de interpretar los términos de la fracción es es más compleja que la actividad de medida.

3º No se observan diferencias importantes en los resultados obtenidos por los alumnos de las dos Etapas cuando miden cantidades de longitud y de superficie.

R.2) Resultados de la pregunta nº 2

Para analizar los resultados de las pregunta nº 2 utilizamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Realiza una evaluación semántica errónea de la fracción
2.- Dibuja correctamente la cantidad de magnitud pero no aporta explicaciones
3.-Dibuja correctamente la cantidad de magnitud y aporta explicaciones adecuadas

Los datos obtenidos de los alumnos, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.2. Los resultados globales correspondientes a las dos Etapas se muestran la siguiente tabla, indicando las frecuencias y, entre paréntesis, los porcentajes de respuestas para cada uno de los criterios utilizados:

	Criterios de valoración			
Pregunta	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
Nº 2	0 (**0**) // 2 (**11**)	12 (**30**) // 7 (**44**)	10 (**25**) // 2 (**12**)	18 (**45**) // 7 (**44**)

Tabla VII.33. Resultados de la Pregunta nº 2 de la Prueba de Evaluación del Primer Ciclo

C.2) Conclusiones parciales de la pregunta nº 2

1º El 70% de los alumnos de la Primera Etapa y el 56% de los de la Segunda Etapa de la Experimentación realizan una evaluación semántica adecuada de la fracción que expresa la medida de cantidades de longitud o de superficie.

2º La tasa de éxito en esta pregunta ha descendido si se compara con la tarea de medida que se propone en la pregunta nº 1. Se confirma la conclusión obtenida en la fase de reflexión de la metodología de Investigación-Acción: los alumnos resuelven con mayor facilidad las tareas de construcción del sistema de representación fraccionario que las que precisan una evaluación semántica del sistema de representación.

3º A pesar de que la tasa de éxito desciende respecto a los resultados obtenidos en las tareas de medida, los alumnos de las dos Etapas interpretan de forma razonable la representación simbólica de la fracción, después de un lapso temporal cercano al semestre.

R.3) Resultados de la pregunta nº 3

Para analizar los resultados de las pregunta nº 3 utilizamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Comete errores al comparar dos fracciones impropias
2.- Sabe comparar las fracciones impropias pero no justifica la respuesta
3.- Sabe comparar las fracciones impropias y justificar la respuesta

Los datos obtenidos de los alumnos, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.2. Los resultados globales correspondientes a las dos Etapas se muestran en la siguiente tabla, indicando las frecuencias y, entre paréntesis, los porcentajes de respuestas para cada uno de los criterios utilizados:

	Criterios de valoración			
Pregunta	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
Nº 3	0 (**0**) // 2 (**11**)	20 (**50**) // 5 (**31**)	8 (**20**) // 4 (**25**)	12 (**30**) // 7 (**44**)

Tabla VII.34. Resultados de la Pregunta nº 3 de la Prueba de Evaluación del Primer Ciclo

Utilizamos los siguientes códigos para observar las estrategias que ponen en juego los alumnos:

NI: no indica la estrategia
G: representa gráficamente las cantidades
R: razona sobre el significado de la fracción como medida
E: utiliza la equivalencia de fracciones

La siguiente tabla indica las frecuencias absolutas y relativas de las estrategia utilizadas por los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación:

Estrategias	**NI** **Etapa 1//Etapa 2**	**G** **Etapa 1//Etapa 2**	**R** **Etapa 1//Etapa 2**	**E** **Etapa 1//Etapa 2**
Frecuencias abs. y relativas	13 (**32**) // 8 (**50**)	12 (**30**) // 2 (**12**)	15 (**38**) // 6 (**38**)	0 (**0**) // 0 (**0**)

Tabla VII.35. Estrategias en la Pregunta nº 3 de la Prueba de Evaluación del Primer Ciclo

C.3) Conclusiones parciales de la pregunta nº 3

1º El 50% de los alumnos de la Primera Etapa y el 70% de los de la Segunda Etapa saben comparar las fracciones impropias que aparecen en el enunciado de la pregunta. Sin embargo, los porcentajes de respuestas que aportan justificaciones adecuadas bajan hasta el 30% y el 45%, respectivamente.

2º En este momento de la secuencia de enseñanza, los alumnos se sirven de razonamientos o de representaciones gráficas para comparar fracciones desde el modelo medida. La estrategia más utilizada consiste en razonar que las cantidades implicadas se pueden descomponer como la unidad y una fracción propia y, después, comparar las fracciones propias. Otros alumnos utilizan representaciones gráficas para construir las dos cantidades de magnitud y, después, comparar visualmente dichas cantidades.

3º Los alumnos, al comienzo de quinto curso de Educación Primaria, no tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones porque no son capaces de aplicar esta estrategia para resolver situaciones problemáticas. En efecto, ningún alumno utiliza el concepto de equivalencia para comparar fracciones, a pesar de que los alumnos conocen la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada.

VII.3.2. Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación

VII.3.2.1. Objetivo de la Prueba

Los alumnos de las dos Etapas que, en quinto curso participaron en el Segundo Ciclo de la Experimentación, realizan una prueba de evaluación de los aprendizajes al comienzo del siguiente año académico, cuando se reincorporan al Colegio después de las vacaciones de verano, como alumnos de sexto curso de Educación Primaria.

El objetivo de la Prueba es evaluar los aprendizajes realizados por los alumnos después de la enseñanza recibida en quinto curso de la fracción y del número decimal desde los modelos de medida y de cociente partitivo.

VII.3.2.2. Cuestionario

La Prueba se compone de cinco preguntas. Se proponen dos versiones para cada una de las preguntas con la intención de que los alumnos respondan sin recibir ayuda del compañero más próximo.

Los contenidos de las preguntas que componen la Prueba se corresponden con los conceptos estudiados en el Segundo y Tercer Foco de Investigación, que se indican en la siguiente tabla:

Preguntas	***Contenido a evaluar***
1-a; 1-b	Obtención de fracciones equivalentes a una dada
2-a; 2-b	La representación fraccionaria en una situación de reparto igualitario efectuado en una sola fase
3-a; 3-b	La notación decimal en una situación de reparto igualitario efectuado en varias fases
4-a; 4-b	Paso de la representación fraccionaria a la notación decimal
5-a; 5-b	Paso de la notación decimal a la representación fraccionaria

Cuadro VII.5. Contenidos de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación

Pasamos a mostrar los enunciados de las preguntas y las unidades de evaluación para cada una de ellas.

Pregunta nº 1

La mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 1-a:

> Encuentra una fracción equivalente a $\frac{3}{8}$
>
> SOLUCIÓN:
>
> Una fracción equivalente es _________
>
> Explica cómo has encontrado la fracción:

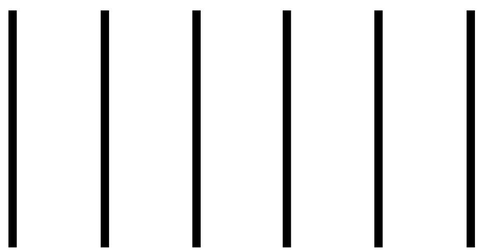
La otra mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 1-b:

> Encuentra una fracción equivalente a $\frac{5}{8}$
>
> SOLUCIÓN:
>
> Una fracción equivalente es _________
>
> Explica cómo has encontrado la fracción:

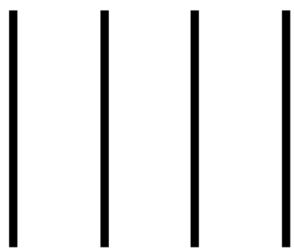
Con esta pregunta evaluamos si los alumnos son capaces de encontrar una fracción equivalente a una dada. También podemos observar las estrategias que utilizan: rememorar las acciones propias del modelo de medida, o bien, recordar la regla de obtención de fracciones equivalentes.

Preguntas nº 2 y nº 3

La mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 2-a:

> *Si repartes 6 barras de regaliz entre 5 personas, expresa con UNA FRACCIÓN la cantidad de regaliz que recibe cada persona.*
>
> *Cada persona recibe* ☐ *de* ☐
>
> EXPLICA COMO HAS OBTENIDO LA FRACCIÓN. SI LO DESEAS, PUEDES REALIZAR GRÁFICOS:
>
> 

La otra mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 2-b

> *Si repartes 4 barras de regaliz entre 5 personas, expresa con UNA FRACCIÓN la cantidad de regaliz que recibe cada persona.*
>
> *Cada persona recibe* ☐ *de* ☐
>
> EXPLICA COMO HAS OBTENIDO LA FRACCIÓN. SI LO DESEAS, PUEDES REALIZAR GRÁFICOS:
>
> 

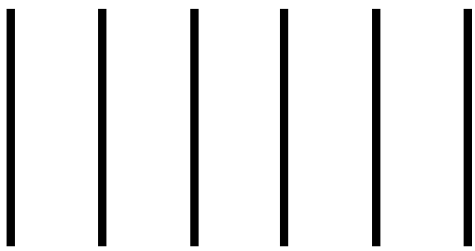
Con la pregunta nº 2 deseamos evaluar el uso que los alumnos hacen del sistema de representación fraccionario para medir la cantidad de magnitud que recibe cada uno de los participantes en un reparto igualitario de cantidades iguales de magnitud longitud.

La mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 3-a:

Si repartes 6 barras de regaliz entre 5 personas, expresa CON UN NÚMERO DECIMAL la cantidad de regaliz recibe cada persona.

Cada persona recibe ☐ *de* ☐

EXPLICA COMO HAS OBTENIDO LA FRACCIÓN. SI LO DESEAS, PUEDES REALIZAR GRÁFICOS:

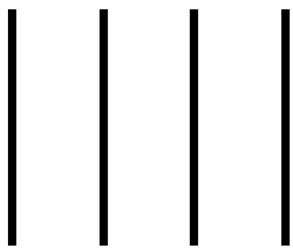


La otra mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 3-b

Si repartes 4 barras de regaliz entre 5 personas, expresa CON UN NÚMERO DECIMAL la cantidad de regaliz recibe cada persona.

Cada persona recibe ☐ *de* ☐

EXPLICA COMO HAS OBTENIDO LA FRACCIÓN. SI LO DESEAS, PUEDES REALIZAR GRÁFICOS:



Con la pregunta nº 3 deseamos indagar el uso que los alumnos hacen de la notación decimal para medir la cantidad de magnitud que recibe cada uno de los participantes en un reparto igualitario de cantidades iguales de magnitud longitud. La formulación de la tarea invita a que los alumnos realicen representaciones gráficas para escenificar la técnica del reparto. El uso de representaciones gráficas posee una doble potencialidad porque desde la perspectiva del alumno ayuda a éste cuando aplica la técnica de reparto; y porque, desde la perspectiva del investigador, facilita la observación del comportamiento del alumno.

Pregunta nº 4 y nº 5

La mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 4-a:

> Expresa con un número decimal la fracción $\frac{9}{20}$
>
> *El número decimal es* $\boxed{}$
>
> EXPLICA COMO HAS OBTENIDO LA RESPUESTA:

La otra mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 4-b:

> Expresa con un número decimal la fracción $\frac{7}{20}$
>
> *El número decimal es* $\boxed{}$
>
> EXPLICA COMO HAS OBTENIDO LA RESPUESTA:

La mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 5-a:

> Expresa con una fracción el número decimal 1´9
>
> *La fracción es* $\boxed{}$
>
> EXPLICA COMO HAS OBTENIDO LA RESPUESTA:

La otra mitad de los alumnos de los grupos de docencia resuelven la siguiente pregunta 5-b:

> Expresa con una fracción el número decimal 2´4
>
> *La fracción es* $\boxed{}$
>
> EXPLICA COMO HAS OBTENIDO LA RESPUESTA:

Con estas preguntas deseamos evaluar la capacidad de los alumnos para conectar los sistemas de representación habituales del número racional positivo. En particular, pretendemos indagar si los alumnos utilizan las ideas de reparto al realizar conversiones entre los sistemas de representación fraccionario y decimal. Obsérvese que las expresiones simbólicas que aparecen en los enunciados de las preguntas están descontextualizadas y que son los alumnos los que deben contextualizar estas expresiones si optan por poner en juego ideas de reparto.

VII.3.2.3. Implementación de la Prueba

Los dos grupos de docencia de sexto curso, que participan en el Primer Ciclo, responden al cuestionario durante una sesión de clase del día 12 septiembre de 2001. Los alumnos del grupo de docencia que participan en el Segundo Ciclo de la Experimentación, responden al cuestionario durante una sesión de clase del día 15 septiembre de 2005.
Los alumnos de las dos Etapas realizan la Prueba los primeros días que se incorporan al Centro para cursar sexto curso, y no reciben enseñanza previa de los contenidos que indaga la Prueba. El período temporal destinado a cumplimentar el cuestionario es de una hora, que coincide con la duración aproximada de una sesión de clase. Los alumnos realizaron la Prueba individualmente, sin recibir ayuda externa de los profesores o de sus compañeros.

VII.3.2.4. Resultados y conclusiones parciales

R.1) Resultados de la pregunta nº 1

Para analizar los resultados de las pregunta nº 1 utilizamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- No encuentra una fracción equivalente a la dada
2.- Encuentra una fracción equivalente pero no aporta explicaciones
3.- Encuentra una fracción equivalente y aporta explicaciones adecuadas

Los datos obtenidos de los alumnos, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.3. Los resultados globales correspondientes a las dos Etapas se muestran en la siguiente tabla, indicando las frecuencias y, entre paréntesis, los porcentajes de respuestas para cada uno de los criterios utilizados:

	Criterios de valoración			
	0	**1**	**2**	**3**
Pregunta	**Etapa 1//Etapa 2**	**Etapa 1//Etapa 2**	**Etapa 1//Etapa 2**	**Etapa 1//Etapa 2**
Nº 1	0 (**0**) // 0 (**0**)	17 (**43**) // 5 (**28**)	6 (**15**) // 0 (**0**)	17 (**43**) // 13 (**72**)

Tabla VII.36. Resultados de la Pregunta nº 1 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo

C.1) Conclusiones parciales de la pregunta nº 1

1º La pregunta plantea la búsqueda de una fracción equivalente a otra que se presenta descontextualizada. Este hecho, junto con el momento en el que se realiza la Prueba, crea dificultades a los escolares al no disponer de materiales concretos para interactuar con la intención de que responder a esta cuestión.
Los alumnos de la Segunda Etapa reciben una ayuda que no tuvieron los alumnos de la Primera Etapa y que consiste en que reciben una tira de papel, para materializar la unidad

de longitud. Con esta unidad los alumnos construyen cantidades de la misma longitud utilizando diferentes fraccionamientos.
El hecho de que los alumnos de la Segunda Etapa utilicen materiales durante la realización de la Prueba explica que éstos obtengan porcentajes de éxito superiores a los de la Primera Etapa, y pone de manifiesto la importancia que tiene la manipulación de objetos en la construcción de ideas matemáticas.

2º Todos los alumnos de la Primera Etapa que justifican el modo en que han encontrado una fracción equivalente utilizan una regla de carácter simbólico. Dado que los alumnos de la Segunda Etapa dispone de materiales manipulativos, un grupo reducido de éstos justifican su respuesta rememorando las acciones realizadas desde el modelo de medida; sin embargo, son mayoría los que escriben la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada.
Las explicaciones que aportan la mayoría de los alumnos se basan en el recuerdo de reglas de obtención de fracciones equivalentes, y son del tipo "he multiplicado por 2 el numerador y el denominador de la fracción". Los alumnos optan por la concisión del lenguaje simbólico y eluden el lenguaje natural para justificar el hallazgo de otra expresión fraccionaria de igual cantidad de medida pero descompuesta de diferente forma.

R.2-3) Resultados de las preguntas nº 2 y nº 3

Para analizar los resultados de las pregunta nº 2 utilizamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Yerra al hallar la fracción que expresa el resultado del reparto
2.- Encuentra una fracción adecuada pero no la justifica o la justificación es errónea
3.- Encuentra una fracción adecuada y aporta una justificación correcta

Los datos obtenidos de los alumnos, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.3. Los resultados globales correspondientes a las dos Etapas se muestran en la siguiente tabla, indicando las frecuencias y, entre paréntesis, los porcentajes de respuestas para cada uno de los criterios utilizados:

	Criterios de valoración			
	0	**1**	**2**	**3**
Pregunta	**Etapa 1//Etapa 2**	**Etapa 1//Etapa 2**	**Etapa 1//Etapa 2**	**Etapa 1//Etapa 2**
Nº 2	0 (**0**) // 0 (**0**)	8 (**20**) // 2 (**11**)	9 (**23**) // 2 (**11**)	23 (**58**) // 14 (**78**)

Tabla VII.37. Resultados de la Pregunta nº 2 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo

Para analizar los resultados de las pregunta nº 3 utilizamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Yerra al hallar el número decimal que expresa el resultado del reparto
2.- Encuentra el número decimal adecuado pero no lo justifica o la justificación es errónea
3.- Encuentra el número decimal adecuado y aporta una justificación correcta

Los datos obtenidos de los alumnos, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.3. Los resultados globales correspondientes a las dos Etapas se muestran en la siguiente tabla, indicando las frecuencias y, entre paréntesis, los porcentajes de respuestas para cada uno de los criterios utilizados:

	Criterios de valoración			
Pregunta	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
Nº 3	0 (**0**) // 0 (**0**)	15 (**38**) // 4 (**22**)	3 (**8**) // 1 (**6**)	22 (**55**) // 13 (**72**)

Tabla VII.38. Resultados de la Pregunta nº 3 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo

C.2-3) Conclusiones parciales de las preguntas nº 2 y nº 3

1º Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación recuerdan las técnicas del reparto efectuado en una fase y el efectuado en varias fases, a pesar de que no han ejercitado estas técnicas desde el curso anterior.

2º Los alumnos no han utilizado materiales manipulativos. En su lugar han utilizado representaciones gráficas para ejemplificar las acciones de reparto. El uso de representaciones gráficas conlleva una pérdida de referentes concretos que es vital para la construcción de ideas matemáticas de los escolares de edades tan tempranas. No obstante, detectamos que las representaciones gráficas constituyen un recurso muy eficaz en el modelo de cociente partitivo porque, de un parte, acorta los períodos de instrucción a la vez que facilita la interacción del alumno con el modelo de aprendizaje.

3º Si comparamos los resultados obtenidos por los alumnos de las dos Etapas en la construcción de la fracción a partir de la acción de reparto con los obtenidos por los mismos alumnos un año antes, en la evaluación de los aprendizajes realizados en cuarto curso, cuando construyen la representación fraccionaria a partir de la acción de medida, observamos que las ideas de medida se han fijado con más persistencia en la mente de los alumnos de quinto curso que las ideas de reparto igualitario, un año más tarde, en los alumnos de sexto curso de Educación Primaria. Los escolares han realizado aprendizajes más perdurables en el tiempo con los modelos de medida que con los modelos de reparto.

4º Los resultados por obtenidos por los alumnos de la Segunda Etapa son superiores a los obtenidos por los alumnos de la Primera Etapa porque éstos últimos realizan, durante la fase experimental, un mayor número de actividades de reparto con el objeto de reforzar estas técnicas.

5º Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación gestionan de forma adecuada las representaciones simbólicas asociadas al reparto realizado en varias fases para obtener el número decimal que expresa el resultado del reparto.

R.4-5) Resultados de las preguntas nº 4 y nº 5

Para analizar los resultados de las pregunta nº 4 utilizamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Yerra al convertir la fracción en el número decimal asociado
2.- Convierte la fracción en el número decimal adecuado pero no justifica la respuesta o la justificación es errónea
3.- Convierte la fracción en el número decimal adecuado y justifica la respuesta

Los datos obtenidos de los alumnos, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.3. Los resultados globales correspondientes a las dos Etapas se muestran en la siguiente tabla, indicando las frecuencias y, entre paréntesis, los porcentajes de respuestas para cada uno de los criterios utilizados:

	Criterios de valoración			
Pregunta	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
Nº 4	0 (**0**) // 0 (**0**)	8 (**20**) // 4 (**22**)	4 (**10**) // 0 (**0**)	28 (**70**) // 14 (**78**)

Tabla VII.39. Resultados de la Pregunta nº 4 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo

Para analizar los resultados de las pregunta nº 5 utilizamos los siguientes criterios:

0.- Falta a clase
1.- Yerra al convertir el número decimal en una fracción adecuada
2.- Convierte el número decimal en la fracción adecuada pero no justifica la respuesta o la justificación es errónea
3.- Convierte el número decimal en la fracción adecuada y justifica la respuesta

Los datos obtenidos de los alumnos, según los criterios considerados, se recogen en el Anexo III.3. Los resultados globales correspondientes a las dos Etapas se muestran en la siguiente tabla, indicando las frecuencias y, entre paréntesis, los porcentajes de respuestas para cada uno de los criterios utilizados:

	Criterios de valoración			
Pregunta	**0** **Etapa 1//Etapa 2**	**1** **Etapa 1//Etapa 2**	**2** **Etapa 1//Etapa 2**	**3** **Etapa 1//Etapa 2**
Nº 5	0 (**0**) // 0 (**0**)	16 (**40**) // 5 (**28**)	4 (**10**) // 1 (**6**)	20 (**50**) // 12 (**67**)

Tabla VII.40. Resultados de la Pregunta nº 5 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo

C.4-5) Conclusiones parciales de las preguntas nº 4 y nº 5

1º El 75% de los alumnos de las dos Etapas saben convertir una fracción decimal en un número decimal. La tasa de éxito desciende hasta el 50% para los alumnos de la Primera Etapa y hasta el 67% en la Segunda Etapa cuando intentan convertir un decimal en una fracción.

2º Las tareas de conversión entre representaciones fraccionarias y notaciones decimales resultan complejas a los alumnos de quinto curso porque exige gestionar de modo simbólico expresiones numéricas descontextualizadas.

3º Los alumnos convierten las fracciones decimales en números decimales dividiendo el numerador entre el denominador pero no tenemos constancia de que los alumnos asocien la división con las ideas del modelo de cociente partitivo porque son muy pocos los que explícitamente afirman utilizar este modelo de aprendizaje.

4º La mayoría de los alumnos de las dos Etapas que saben convertir un número decimal en fracción se sirven de la Representación Polinómica Decimal asociada al número decimal. Sin embargo, al igual que ocurría en la pregunta nº 4, no podemos asegurar que las ideas de reparto guíen las representaciones simbólicas que los alumnos efectúan.

VII.3.3. Conclusiones de las dos Pruebas de Evaluación

1º Al concluir el Primer Ciclo de la Experimentación los alumnos de cuarto curso de las dos Etapas han construido ideas adecuadas y perdurables en el tiempo de la fracción como resultado de la medida de cantidades de longitud y de superficie, porque saben expresar con una fracción el resultado de la medida de cantidades de magnitud. Además, los escolares realizan una evaluación semántica de la fracción desde los modelos de medida a pesar de que algunos escolares tienen dificultades para expresar por escrito los significados del numerador y del denominador.

2º Los modelos de medida han funcionado bien en la secuencia de enseñanza. La introducción de los conceptos matemáticos en base a la manipulación física de los alumnos, con materiales tangibles, ha tenido efectos muy beneficiosos en la Propuesta Didáctica que hemos implementado en cuarto curso. La manipulación física de materiales tangibles alarga los períodos de enseñanza pero facilita el aprendizaje de los alumnos porque favorece, en los alumnos, la aparición y la persistencia de las ideas matemáticas.

3º Los alumnos se forjan ideas adecuadas de la fracción porque son capaces de evaluar las cantidades de magnitud que indican las expresiones fraccionarias en tareas de comparación de fracciones. En efecto, los alumnos utilizan representaciones gráficas para construir las dos cantidades de magnitud y, después, comparar visualmente, o bien, optan por descomponer eficazmente las cantidades a comparar.

No obstante, los alumnos que comienzan quinto curso de Educación Primaria no tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones porque no son capaces de aplicar esta estrategia en las tareas de comparación de fracciones. En efecto, ningún alumno utiliza el concepto de equivalencia para comparar fracciones, a pesar de que los alumnos conocen la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada. Se confirman los resultados obtenidos en la fase de Reflexión de la metodología de Investigación-Acción en el sentido de que la complejidad conceptual del concepto de equivalencia de fracciones excede las capacidades cognitivas de los alumnos de cuarto curso de Educación Primaria.

4º Posteriormente estos mismos alumnos, unos meses más tarde, son capaces de gestionar la equivalencia de fracciones en la resolución de problemas al confluir dos factores: la acción de enseñanza desarrollada en cuarto y quinto curso, y la evolución natural del desarrollo cognitivo de los escolares. El progreso en la comprensión de la equivalencia de fracciones se constata en la Prueba de Evaluación de los aprendizajes realizados en el Segundo Ciclo de la Experimentación.

5º Los alumnos que realizan la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo utilizan de forma adecuada representaciones gráficas para expresar, con una fracción, el resultado de un reparto igualitario. Sin embargo, hemos detectado que las ideas de la fracción que construyen los alumnos, en quinto curso, desde el modelo de cociente partitivo son menos nítidas que las que construyen los alumnos de cuarto curso cuando interactúan con los modelos de medida. En este sentido, confirmamos que los alumnos construyen ideas perdurables en el tiempo si éstas se han forjado a partir de la manipulación de objetos tangibles. En consecuencia, aconsejamos que, en la implementación de la propuesta de quinto curso, se realicen un mayor número de tareas de reparto igualitario con materiales tangibles, a pesar de que tal decisión comporte alargar los períodos de instrucción.

6º En general, los alumnos que se incorporan al Colegio, para cursar sexto de Educación Primaria, recuerdan las técnicas de paso entre los dos sistemas de representación habituales del número racional positivo porque más de la mitad de los alumnos de las dos Etapas tienen éxito al realizar las preguntas nº 4 y nº 5 de la Prueba del Segundo Ciclo.
No obstante, el hecho de que las expresiones numéricas se presenten descontextualizadas en los enunciados de las preguntas sobre las conversiones entre ambos sistemas de representación nos ha imposibilitado hacer indagaciones acerca de las ideas de reparto que ponen en juego los alumnos para resolver estas cuestiones. Dado que nuestro planteamiento metodológico aboga porque las representaciones que efectúen los escolares se sustenten en acciones físicas efectuadas desde los modelos de aprendizaje, proponemos aumentar, en futuros investigaciones de aula, el número de tareas de realización de repartos igualitarios con materiales tangibles porque la reflexión sobre la base de la manipulación de objetos da persistencia a las ideas matemáticas. La enseñanza de los conceptos de fracción y número decimal desde el modelo de cociente partitivo será más lenta pero, a la larga, se espera que potencie la mejora de la comprensión de los alumnos.

VII. 4. Estudio Comparativo entre Colegios

VII.4.1. Objetivo del estudio

Se pretende estudiar la comprensión que sobre las fracciones y los números decimales poseen los alumnos del C.E.I.P. "Tío Jorge" que participaron en la Primera Etapa de la fase Experimental en la que recibieron una enseñanza alternativa del número racional positivo durante los cursos cuarto y quinto de Educación Primaria. Ahora, un año y medio más tarde, cuando éstos comienzan una nueva etapa educativa como alumnos de Educación Secundaria Obligatoria, responden a un cuestionario para evaluar sus conocimientos sobre la enseñanza recibida.

Además, nos interesa indagar la comprensión de los alumnos procedentes de otros Colegios que han recibido una enseñanza tradicional del número racional positivo, fundamentada sobre la relación parte-todo, y que hemos caracterizado en el Capítulo III de esta Memoria. La comparación entre la comprensión mostrada por alumnos que han seguido propuestas de enseñanza diferentes pondrá de manifiesto las potencialidades y limitaciones de los modelos de aprendizaje implicados en la Propuesta Didáctica que hemos diseñado e implementado en este trabajo de investigación.

VII.4.2. Participantes

En el estudio participan 60 alumnos matriculados en el Primer Curso de ESO del I.E.S. “D. Pedro de Luna” de la ciudad de Zaragoza. Este Instituto de Educación Secundaria acoge a los alumnos que han cursado Educación Primaria en Colegios Públicos de la zona donde está ubicado el C.E.I.P. "Tío Jorge", que es el colegio dónde se ha implementado la Propuesta Didáctica. Los alumnos procedentes de otros colegios distintos del C.E.I.P. "Tío Jorge" van a constituir el grupo de control. Dentro de este grupo de control destacan, por su cantidad, los alumnos procedentes del C.E.I.P. “Cándido Domingo”. La siguiente tabla indica la procedencia y el número de alumnos que han contestado al Cuestionario:

Grupo de Experimental	***Grupo de Control***	
C.E.I.P. "Tío Jorge"	C.E.I.P. “Cándido Domingo”	Varios Colegios
24	**23**	**13**

Cuadro VII.6. Procedencia y número de alumnos que han participado en el estudio

Los alumnos participantes proceden de Colegios ubicados en la zona de influencia del Instituto de manera que las variables de carácter social, como el poder adquisitivo de las familias de los alumnos encuestados, pierden importancia en este estudio y no van a ser consideradas.

Los 24 alumnos del C.E.I.P. "Tío Jorge" se identifican con el mismo código que tenían asignado previamente en la investigación. Los alumnos del C.E.I.P. “Cándido Domingo” van a ser identificados con códigos C01 a C23; y los 13 que proceden de varios Colegios de la zona, con los códigos D01 a D13.

VII.4.3. Cuestionario

El Cuestionario se presenta mediante cuatro folios grapados, escritos por las dos caras. El anverso de la primera página pregunta por los datos del alumno y por el Colegio de Educación Primaria de procedencia; e invita a los alumnos a leer las siguientes indicaciones:

1º Utiliza exclusivamente bolígrafo o lapicero. No te hace falta nada más.

2º Realiza TODAS las operaciones en las hojas del cuestionario, NO UTILICES OTRAS HOJAS.

3º Hacer dibujos puede servirte de ayuda. Si utilizas DIBUJOS, realízalos en las hojas del cuestionario.

El reverso de la última página está en blanco para que el alumno lo utilice como borrador, si lo desea.

El Cuestionario, cuyo contenido se muestra en el Anexo IV de esta Memoria, indaga la comprensión de los alumnos sobre determinados conceptos del número racional positivo. En este mismo Anexo se detallan los resultados obtenidos por cada uno de los participantes para cada una de las preguntas formuladas.

La enseñanza que reciben los alumnos del grupo de control se fundamenta en el significado de la fracción como relación parte-todo, mientras que los alumnos que proceden del C.E.I.P. "Tío Jorge" no conocen este significado y, en su lugar, han estudiado la fracción y el número decimal con los significado de medida y de cociente partitivo.
En estas condiciones, es inevitable que algunas de las preguntas de la Prueba sean novedosas para alguno de los dos grupos de alumnos. No obstante, el diseño de la Prueba ha sido respetuoso con la enseñanza implementada en los dos grupos de modo que hemos asegurado el equilibrio entre las preguntas formuladas desde la relación parte-todo y las formuladas desde los modelos de medida. La siguiente tabla detalla los significados del número racional desde los que se formulan las diez primeras preguntas de la Prueba:

Significados	*Preguntas*
Relación parte-todo. Contexto continuo	1
Relación parte-todo. Contexto discreto	2 y 3
Medida de longitud y de superficie	4 y 5
Medida de longitud sobre la recta numérica	6 y 7
Tareas descontextualizadas, sin significado preestablecido	8, 9 y 10

Cuadro VII.7. Modelos de aprendizaje utilizados en las diez primeras preguntas

Mostramos las diez primeras preguntas porque son las que han respondido la mayoría de los alumnos, dado que las restantes seis preguntas han tenido un porcentaje muy bajo de respuestas y, por lo tanto, van a ser excluidas del estudio.

Antes de analizar los resultados de los alumnos vamos a describir las diez primeras preguntas del Cuestionario indicando, para cada pregunta o tarea, el significado desde el que se propone la tarea, el tipo de tarea que se plantea, y si la enseñanza recibida por los alumnos de los dos grupos, durante su estancia en el Colegio de Educación Primaria, ha contemplado la resolución de tareas como las que propone la pregunta:

Pregunta	*Significado*	*Tipo de tarea*	*Enseñanza en "Tío Jorge"*	*Enseñanza en el grupo de control*
1	Relación Parte-todo Contexto continuo	Construcción de la fracción	NO	SI
2-a	Relación Parte-todo Contexto discreto	Construcción de la fracción	SI, como medida	SI

2-b	Relación Parte-todo Contexto discreto	Equivalencia de fracciones	SI, como medida	SI
3-a 3-b	Relación Parte-todo Contexto discreto	Evaluación semántica de la fracción	SI, como medida	SI
4-a	Medida de longitud Recta numérica	Construcción de la fracción	SI	SI
4-b	Medida de longitud Recta numérica	Construcción del número decimal	SI	SI
5	Medida de superficie	Construcción de la fracción	SI	NO
6-a 6-b	Medida de longitud Recta numérica	Evaluación semántica de la fracción	SI	SI
7-a 7-b	Medida de longitud Recta numérica	Evaluación semántica del número decimal	SI	SI
8	Descontextualizada, sin significado	Paso del decimal a la fracción	SI	SI
9	Descontextualizada, sin significado	Paso de la fracción al decimal	SI	SI
10	Descontextualizada, sin significado	Equivalencia de fracciones	SI	SI

Cuadro VII.8. Información relativa a las diez primeras preguntas del Cuestionario

VII.4.4. Implementación de la Prueba

Los alumnos matriculados en el Primer Curso de ESO del IES "D. Pedro de Luna" responden a un cuestionario sobre fracciones y números decimales en una de las primeras sesiones de clase del curso 2002/03. En concreto, la Prueba se realiza el 19 de septiembre de 2002 en los cursos 1º A, 1º B y 1º C de dicho Instituto.

Los alumnos no reciben enseñanza previa de los conceptos por los que indaga la Prueba. El período temporal destinado a cumplimentar el cuestionario fue de una hora, que coincide con la duración aproximada de una sesión de clase. Los alumnos realizaron la Prueba individualmente, y los profesores del Instituto informaron que ésta se desarrolló sin incidencias.

VII.4.5. Resultados globales

Para evaluar el rendimiento global de los alumnos valoramos las respuestas de cada uno de los alumnos. A todas las preguntas se les asigna el mismo peso excepto a las preguntas nº2, 3, 4 y 7 que tienen dos apartados y se les asigna valor doble. Valoramos el rendimiento global de los alumnos de los dos grupos estudiados mediante una escala numérica comprendida entre 0 y 10 cuyos valores mostramos a continuación:

	Grupo experimental	***Grupo de control***
Rendimiento global	**5´5**	**2´8**

Tabla VII.41. Rendimiento global de los alumnos detallado por grupos

El rendimiento de los alumnos del C.E.I.P. "Tío Jorge" duplica al obtenido por los alumnos del grupo de control. Este dato significativo confirma que los alumnos del grupo experimental poseen una mejor comprensión sobre diversos aspectos conceptuales del número racional que los alumnos del grupo de control. Sin embargo, dado que nuestro propósito es indagar sobre las potencialidades y limitaciones de nuestra Propuesta Didáctica, vamos a realizar un análisis cualitativo de las respuestas que aportan los participantes en cada una de las preguntas del Cuestionario.

VII.4.6. Análisis de los resultados

El análisis de las respuestas de los alumnos se articula en los siguientes siete conceptos:

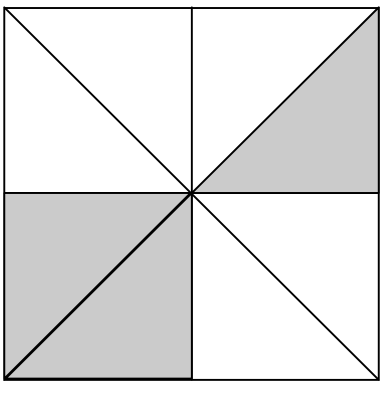
1º La relación parte-todo en contextos continuos (pregunta 1) y la medida de superficie (pregunta 5)
2º La relación parte-todo en contextos discretos (preguntas 2-a y 3) y la medida de la cardinalidad
3º La fracción y el número decimal como resultado de la medida de una cantidad de longitud (pregunta 4)
4º Evaluación semántica de la fracción y del número decimal desde el modelo medida (preguntas 6 y 7)
5º Conversión de la notación decimal a la notación fraccionaria (pregunta 8)
6º Conversión de la notación fraccionaria a la notación decimal (pregunta 9)
7º Cálculo e interpretación de la equivalencia de fracciones (preguntas 2-b y 10)

VII.4.6.1. La relación parte-todo en contextos continuos y la medida de superficie

P.1) Enunciado de la Pregunta nº 1

La primera pregunta esta formulada desde la relación parte-todo en contextos continuos. Se trata de una cuestión que se formula habitualmente en los programas de enseñanza tradicionales. El enunciado de esta cuestión lo hemos tomado de las preguntas que el INCE devela periódicamente (INCE, 2000; pp. 39):

1.- ¿Qué parte de la figura está sombreada?



Cuadro VII.9. Enunciado de la pregunta nº 1 del Cuestionario

Los alumnos del C.E.I.P. “Tío Jorge” no han recibido enseñanza de la relación parte-todo, en su lugar han estudiado la fracción como resultado de la medida. Los alumnos del grupo experimental entienden la cuestión como un problema de medida de la cantidad de una superficie: medir la cantidad de superficie que posee la región sombreada cuando se considera como unidad de medida la superficie del cuadrado.

R.1) Resultados de la Pregunta nº 1

Para analizar las respuestas de los alumnos en la pregunta nº 1 nos ayudamos de la siguiente tabla que aporta información relevante expresada en frecuencias absolutas y, entre paréntesis, con frecuencias relativas:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa “no contesta”*
Grupo experimental	23 (**96**)	1 (**4**)	0 (**0**)
Grupo de control	29 (**81**)	7 (**19**)	0 (**0**)

Tabla VII.42. Resultados de la pregunta nº 1 del Cuestionario

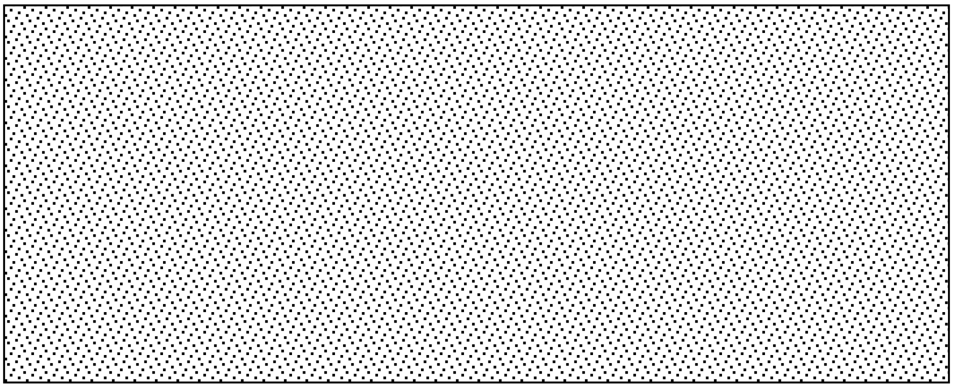
C.1) Interpretación de los resultados obtenidos en la Pregunta nº 1

Los alumnos procedentes del C.E.I.P. “Tío Jorge” no han realizado ejercicios de este tipo porque no han recibido enseñanza del significado de la fracción como relación entre la parte y el todo y, sin embargo, la enseñanza de la fracción desde el modelo de medida les permite obtener una tasa de éxito superior a la que obtienen los alumnos del grupo de control.

P.5) Enunciado de la Pregunta nº 5

Se plantea el siguiente problema de medida de una cantidad de superficie:

5.- Consideras como unidad de superficie 1 decímetro cuadrado que es la superficie del cuadrado de papel que se te entrega.
Expresa, en decímetros cuadrados y con una fracción, la superficie del rectángulo siguiente:



Cuadro VII.10. Enunciado de la pregunta nº 5 del Cuestionario

Los alumnos reciben varios papeles cuadrados de lado 1 decímetro, con la indicación: “PUEDES DOBLAR ESTA UNIDAD”.

Los alumnos del grupo de control están en inferioridad de condiciones que los alumnos procedentes del C.E.I.P. “Tío Jorge” para responder a esta pregunta porque no han recibido enseñanza del significado de la fracción como medida. Nos proponemos indagar si el conocimiento de la fracción como relación parte-todo les permite afrontar con éxito esta tarea.

R.5) Resultados de la Pregunta nº 5

Para analizar las respuestas de los alumnos en la pregunta nº 5 nos ayudamos de la siguiente tabla que aporta información relevante expresada en frecuencias absolutas y, entre paréntesis, con frecuencias relativas:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa “no contesta”*
Grupo experimental	13 (**54**)	6 (**25**)	5 (**21**)
Grupo de control	1 (**3**)	11 (**31**)	24 (**67**)

Tabla VII.43. Resultados de la pregunta nº 5 del Cuestionario

Los alumnos del grupo de control no saben medir la cantidad de superficie que propone la pregunta nº 5. Solo dos alumnos (C10 y C12) miden correctamente con la ayuda de números decimales y, uno de ellos, no expresa el resultado mediante la representación fraccionaria. El elevado porcentaje de alumnos del grupo de control que no responden a esta cuestión indica que su conocimiento de la fracción como parte-todo es insuficiente para afrontar la tarea de medida de una cantidad de superficie.

C.5) Interpretación de los resultados obtenidos en la Pregunta nº 5

Estos resultados confirman nuestros hallazgos teóricos obtenidos a partir del análisis fenomenológico del número racional positivo y que resumimos a continuación:

1º La medida y de la relación parte-todo son significados diferenciados del número racional positivo

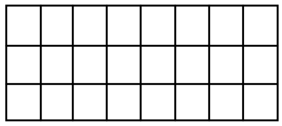
2º El significado de medida es más potente que el de relación parte-todo, de manera que las tareas formuladas desde la relación parte-todo pueden ser abordadas con éxito desde el significado de medida, pero no al revés, porque las actividades de medida exigen poner en juego capacidades cognitivas superiores a las tareas propuestas desde la relación parte-todo.

VII.4.6.2. La relación parte-todo en contextos discretos y la medida de la cardinalidad

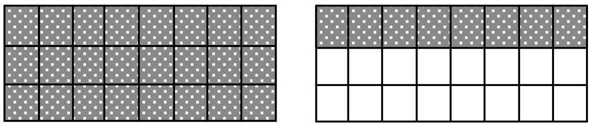
P.2-3) Enunciados de las Preguntas nº 2 y nº 3

Los alumnos resuelven las preguntas nº 2 y nº 3 que son tareas de construcción de la notación fraccionaria y de evaluación semántica de la fracción, respectivamente.

2.- Una tableta de chocolate tiene esta forma:

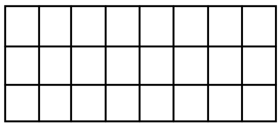


Si comes la cantidad de chocolate que está sombreada:



a) Expresa, con una fracción, la cantidad de chocolate que has comido.

3.- a) Dibuja $\frac{7}{4}$ de tableta de chocolate. Puedes utilizar como "todo" o unidad la tableta de chocolate de la pregunta anterior:



b) ¿Cómo explicarías a un amigo lo que significa la fracción $\frac{7}{4}$?

Cuadro VII.11. Enunciados de las preguntas nº 2 y nº 3 del Cuestionario

Ambas tareas están formuladas desde la relación parte-todo en un contexto discreto. En consecuencia, se tratan de tareas novedosas para los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" que no han recibido enseñanza de la fracción como relación "parte-todo" y que durante la fase experimental implementada en este Colegio han estudiado la fracción como medida de la cardinalidad. Para ejemplificar los tipos de problemas que estos alumnos han resuelto desde el modelo de medida de la cardinalidad en Educación Primaria mostramos los enunciados de las preguntas 2-a y 3-a reformulados desde el modelo de medida de la cardinalidad:

2.- Una tableta de chocolate tiene 24 porciones. Si comes 32 porciones, ¿cuántas tabletas de chocolate has comido?

3.- Una tableta de chocolate tiene 24 porciones. Si comes 7/4 tabletas de chocolate, ¿cuántas porciones has comido?

Por otra parte, no sabemos con certeza si los alumnos del grupo de control han realizado tareas como las propuestas en las preguntas 2-a y 3. Sin embargo, hemos formulado estas preguntas porque pertenecen a la fenomenología didáctica de la enseñanza tradicional de la fracción basada en la relación parte-todo en contextos discretos. Además, el hecho de que todos los alumnos del grupo de control hayan respondido a la pregunta 2-a permite suponer que esta cuestión pertenece a la práctica docente tradicional de la enseñanza de la fracción.

R.2-3) Resultados de las Preguntas nº 2 y nº 3

Para analizar las respuestas de los alumnos en la pregunta nº 2-a nos ayudamos de la siguiente tabla que informa de los resultados globales expresados con frecuencias absolutas y, entre paréntesis, con frecuencias relativas:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	8 (**33**)	15 (**63**)	1 (**4**)
Grupo de control	14 (**39**)	22 (**61**)	0 (**0**)

Tabla VII.44. Resultados de la pregunta nº 2-a del Cuestionario

La siguiente tabla permite analizar, con más detalle, las respuestas de los alumnos en la pregunta nº 2-a e indica las frecuencias de los tipos de representaciones fraccionarias correctas que utilizan los alumnos y de los tipos de errores que cometen los alumnos:

Pregunta nº 2-a	*Respuestas correctas*		*Respuestas erróneas*		
Alumnos procedentes del	Fracción impropia $\frac{32}{24}$	Fracción mixta $1\frac{8}{24}$	Consideran como unidad dos tabletas	Solo mide una tableta	Otros errores
Grupo experimental	8 (**33**)	0 (**0**)	6 (**25**)	6 (**25**)	3 (**13**)
Grupo de control	2 (**6**)	12 (**33**)	10 (**28**)	8 (**22**)	4 (**11**)

Tabla VII.45: Información detallada de las respuestas a la pregunta nº 2-a del Cuestionario

Para analizar las respuestas de los alumnos en la pregunta 3-a nos ayudamos de la siguiente tabla que aporta información de los resultados globales expresada en frecuencias absolutas y, entre paréntesis, con frecuencias relativas:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	11 (**46**)	8 (**33**)	5 (**21**)
Grupo de control	3 (**8**)	17 (**47**)	16 (**45**)

Tabla VII.46. Resultados de la pregunta nº 3-a del Cuestionario

La siguiente tabla muestra los resultados globales correspondientes a la pregunta 3-b:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	12 (**50**)	6 (**25**)	6 (**25**)
Grupo de control	7 (**19**)	14 (**39**)	15 (**42**)

Tabla VII.47. Resultados de la pregunta nº 3-b del Cuestionario

Si comparamos los resultados obtenidos por los alumnos de los dos grupos observamos que en la pregunta nº 2 los alumnos obtienen tasas de éxito próximas mientras que, en las preguntas 3-a y 3-b, los alumnos del grupo de control obtienen tasas de éxito muy inferiores a las que obtienen los que proceden del C.E.I.P. "Tío Jorge".

En nuestra investigación hemos constatado que la enseñanza de la fracción como medida de la cardinalidad, es decir en contextos discretos, presenta mayores dificultades conceptuales que en contextos continuos. En efecto, la fracción, en cada uno de estos contextos, tiene una génesis fenomenológica muy diferente. En este sentido, se han cumplido las predicciones, y los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge", han obtenido peores resultados que en la pregunta nº 5 que indaga sobre la medida de la fracción en contextos continuos. Por otra parte, las preguntas nº 2-a y nº 3 resultan novedosas para los alumnos procedentes de este Colegio cuya resolución les obliga a reformular los enunciados de estas tareas en términos de medida de la cardinalidad.

Una de las dificultades que plantea la enseñanza de la fracción en contextos discretos, ya sea desde el modelo de medida o desde el modelo parte-todo, consiste en la identificación de la unidad o "el todo". Un tipo de error muy extendido consiste en confundir la unidad que, en el caso que nos ocupa es la tableta de 24 porciones de chocolate, con la unidad básica (una porción) y, en ocasiones, con toda la cantidad de chocolate (las dos tabletas). Esta dificultad se ha puesto de manifiesto en las respuestas a la pregunta 2-a que aportan los alumnos de los dos grupos: en la tabla VIII.45 se observan frecuencias próximas en los diferentes tipos de errores.

Posiblemente, la propia formulación de la pregunta nº 2-a, que deliberadamente hemos enunciado desde el significado parte-todo, ha dificultado la identificación de la unidad como la tableta de chocolate a los alumnos del grupo experimental. En este sentido, la modificación del enunciado de esta pregunta desde el modelo medida, con la formulación de la cuestión: "¿cuántas tabletas de chocolate has comido?", hubiera facilitado la identificación de la unidad.

Los alumnos del grupo de control han recibido enseñanza de la fracción como relación parte-todo en contextos discretos. En particular, un grupo de estos alumnos, los que proceden del C.E.I.P. "Cándido Domingo", han recibido enseñanza de las fracciones mixtas porque han utilizado, de forma mayoritaria, este sistema de representación de la fracción en sus respuestas a la pregunta nº 2-a. Los alumnos que proceden de este Colegio utilizan, de forma mayoritaria, fracciones mixtas para expresar con éxito la fracción y, con la ayuda de este sistema de representación de la fracción, obtienen una tasa de éxito un poco superior a la de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge".

No cabe duda de que el conocimiento de la fracción mixta que poseen una parte de los alumnos del grupo de control ha contribuido a la mejora del rendimiento en la pregunta nº 2-a; sin embargo las respuestas de estos mismos alumnos a las preguntas nº 3-a y nº 3-b deja al descubierto las limitaciones de la enseñanza tradicional de la fracción como relación parte-todo en contextos discretos porque:

1º) solo el 19% de los alumnos asigna un significado adecuado a la fracción $\frac{7}{4}$; y

2º) tan solo tres alumnos (8% de los alumnos del grupo de control) son capaces de representar gráficamente $\frac{7}{4}$ de tableta de chocolate.

En efecto, el rendimiento de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" mejora en los resultados de las preguntas nº 3-a y nº 3-b, mientras que el rendimiento de los alumnos del grupo de control empeora al responder a estas preguntas.

Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" no han recibido enseñanza de la fracción desde la relación parte-todo ni del sistema de representación de la fracción mixta. En consecuencia, todos los alumnos del grupo experimental que, en la pregunta nº 2-a, miden correctamente utilizan fracciones impropias.

Las respuestas que aportan los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" son de mayor calidad conceptual que las escriben los alumnos del grupo de control. Así, la mitad de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" realizan interpretaciones adecuadas de la fracción impropia cuando responden a la pregunta nº 3-b. Estos alumnos aportan formulaciones valiosas de la fracción impropia fundamentadas desde el modelo de medida con una amplia variedad de matices. De estas respuestas destacamos las siguientes:

> *"Son siete trozos de tamaño 1/4"* (A13)
>
> *"Pues que has cogido una unidad la has dividido en cuatro partes iguales y has cogido una segunda unidad, la partes en cuatro partes iguales y coges 3/4 partes de la unidad"* (A30)
>
> *"4/4 es una unidad y 7/4 es casi el doble de 4/4, para ser exactos1/4 menos que de 2 unidades"* (A31)

Por el contrario, los 7 alumnos del grupo de control que tienen éxito en la pregunta nº 3-b escriben interpretaciones muy uniformes de la fracción 7/4, todas ellas fundamentadas en la relación parte-todo.

La pregunta nº 3-a que consiste en representar gráficamente la fracción 7/4 de una tableta de chocolate que esta fraccionada en 24 partes iguales (porciones) plantea a los alumnos la dificultad de hallar el fraccionamiento adecuado del "todo" o unidad.

A pesar de que los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" no han realizado en Educación Primaria tareas como la formulada en la pregunta nº 3-a, la tasa de éxito se eleva hasta el 46%. Esto significa que algunos alumnos que han tenido dificultades para identificar la unidad de medida en la pregunta nº 2-a después, en la pregunta nº 3-a han sabido interpretar correctamente los términos de la fracción impropia. Este es el caso de la alumna A13 que en la pregunta nº 2-a comete el error de medir solo la parte sombreada de la tableta de chocolate incompleta y aporta como solución $\frac{8}{24}$, pero en la pregunta nº 3, evalúa correctamente la fracción $\frac{7}{4}$ de tableta de chocolate cuando dibuja:

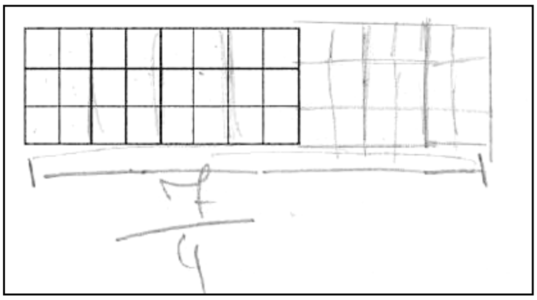


Gráfico VII.24. Respuesta de A13 en las pregunta 3-a

Otro caso análogo es el del alumno A01 que en la pregunta 2-a considera como unidad de medida las dos tabletas de chocolate y aporta como respuesta $\frac{32}{48}$ pero, en la pregunta 3-a, dibuja correctamente $\frac{7}{4}$ de tableta de chocolate.

Los alumnos del grupo de control muestran una escasa comprensión del significado de la fracción impropia porque tan solo tres alumnos consiguen representar gráficamente $\frac{7}{4}$ de tableta de chocolate. La mayoría de alumnos consideran, de modo erróneo, que la unidad de medida es la porción de chocolate. El alumno C13 ejemplifica una de las respuestas erróneas mas habituales cuando dibuja la fracción $\frac{27}{24}$ de tableta:

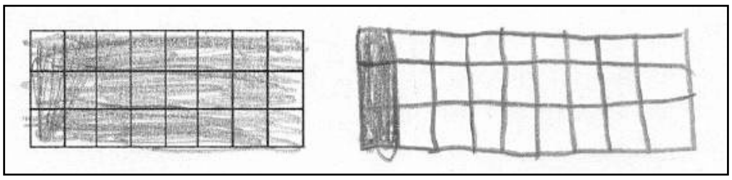


Gráfico VII.25. Respuesta de C13 en las pregunta 3-a

Este alumno, en la pregunta 2-a, utiliza la fracción mixta para resolver correctamente la tarea. Este caso pone de manifiesto que la utilización correcta de la representación mixta de la fracción no garantiza una buena comprensión del concepto de fracción impropia.

C.2-3) Interpretación de los resultados obtenidos en las Pregunta nº 2 y nº 3

Los alumnos de los dos grupos estudiados obtienen peores resultados en las tareas planteadas desde el modelo parte-todo en contextos discretos que en las tareas propuestas desde el modelo parte-todo en contextos continuos.

Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" obtienen mejores resultados que los alumnos del grupo de control en las tareas de evaluación semántica que se proponen en las preguntas nº 3-a y nº 3-b. Estos resultados son coherentes con los obtenidos en la pregunta nº 2-a si se tiene en cuenta que los alumnos de uno de los Colegios que constituyen el grupo de control han recibido enseñanza de la fracción mixta y este sistema de representación resulta cómodo para representar la situación planteada en esta pregunta. Los resultados deficientes obtenidos por los alumnos del grupo de control en las tareas de evaluación semántica de la fracción impropia confirman las limitaciones de la relación parte-todo para dotar de significado a la fracción impropia.

Las tareas planteadas en las preguntas 2-a, 3-a y 3-b, que están formuladas desde la relación parte-todo en contextos discretos, pueden ser abordadas con plena garantía de éxito desde el modelo medida de la cardinalidad siempre y cuando los alumnos reciban enseñanza previa de este modelo de medida.

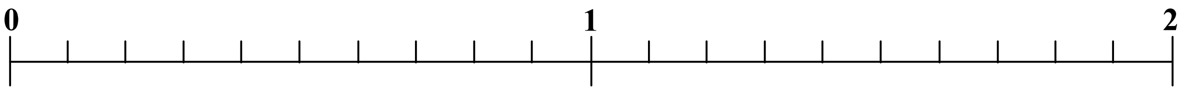
Al igual que ocurre en contextos continuos, el modelo de medida en contextos discretos es más potente que la relación parte-todo. Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" que no han recibido enseñanza de la fracción desde la relación parte-todo obtienen mejores resultados que los alumnos del grupo de control y aportan respuestas de mayor calidad conceptual.

VII.4.6.3. La fracción y el número decimal como resultado de la medida de una cantidad de longitud

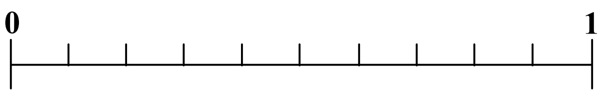
P.4) Enunciado de la Pregunta nº 4

Los apartados 4-a y 4-b de pregunta 4 plantean la tarea de medir una cantidad de longitud y exigen expresar el resultado de la medida mediante una representación fraccionaria (pregunta nº 4-a) y una notación decimal (pregunta nº 4-b).

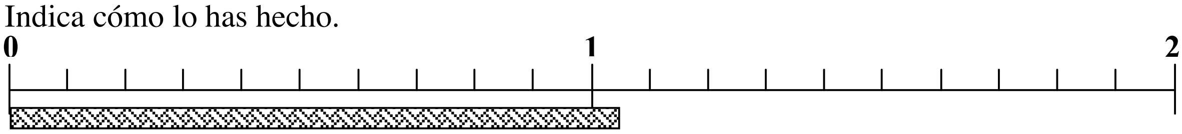
4.- En la regla que ves dibujada:



la **unidad** es la longitud entre 0 y 1**:**



a) Expresa con una fracción, la longitud de la cuerda que está dibujada debajo de la regla. Indica cómo lo has hecho.



b) Expresa, con un número decimal, la longitud de la cuerda que está dibujada debajo de la regla. Indica cómo lo has hecho.

Cuadro VII.12: Enunciado de las pregunta nº 4 del Cuestionario

Estas tareas de medida están formuladas sobre un soporte gráfico. Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" han utilizado la representación fraccionaria para medir cantidades de longitud que poseen determinados objetos tangibles pero no han medido cantidades de longitud representadas gráficamente. En cambio, si que han utilizado la representación gráfica de la recta numérica en actividades de medida que exigían expresar la cantidad mediante la notación decimal.

Por otra parte, no sabemos si los alumnos del grupo de control han realizado tareas como las formuladas en las preguntas nº 4-a y nº 4-b. Sin embargo, podemos suponer que éstos alumnos, con independencia de la enseñanza que hayan recibido, conocen las aplicaciones prácticas del número decimal como medida de cantidades de magnitud como consecuencia de fenómenos de enculturación matemática.

En cualquier caso, queremos indagar si la enseñanza de la fracción y del número decimal como relación parte-todo que han recibido alumnos del grupo de control les permite afrontar con éxito las tareas de medida de cantidades de longitud. También, nos interesa estudiar si los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge", que han recibido enseñanza de la fracción y del número decimal desde los modelos de medida, son capaces de medir una cantidad de longitud.

R.4) Resultados de la Pregunta nº 4

Para analizar las respuestas de los alumnos en la pregunta nº 4-a, que evalúa las representaciones fraccionarias que utilizan los alumnos para expresar la medida de una cantidad de longitud, nos ayudamos de la siguiente tabla que aporta información de los resultados globales expresada en frecuencias absolutas y, entre paréntesis, con frecuencias relativas:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	5 (**21**)	11 (**46**)	8 (**33**)
Grupo de control	3 (**8**)	11 (**31**)	22 (**61**)

Tabla VII.48. Resultados de la pregunta nº 4-a del Cuestionario

Los resultados de la pregunta nº 4-b, que evalúa las notaciones decimales que utilizan los alumnos para expresar la medida de una cantidad de longitud, se muestran en la siguiente tabla:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	12 (**50**)	5 (**21**)	7 (**29**)
Grupo de control	7 (**19**)	11 (**31**)	18 (**50**)

Tabla VII.49. Resultados de la pregunta nº 4-b del Cuestionario

Se observa que los alumnos de los grupos investigados obtienen mejores resultados cuando expresan la medida de la longitud con un número decimal que con una fracción. Los fenómenos de enculturación matemática puede explicar este hecho porque los alumnos, al margen de la enseñanza recibida, realizan abundantes experiencias vitales de medida relacionadas con la notación decimal.

Los alumnos de los dos grupos estudiados obtienen un rendimiento bajo cuando utilizan la representación fraccionaria en las tareas de medida. En el análisis de las respuestas de los alumnos detectamos limitaciones:

a) en la percepción de la unidad de medida,
b) en la percepción un fraccionamiento común de la unidad y de la cantidad de longitud a medir, y
c) en la conversión del decimal en fracción: los alumnos miden correctamente la cantidad de longitud con un número decimal pero no saben convertir el número decimal en fracción.

Hemos detectado diferencias importantes en la calidad de las respuestas que aportan los alumnos de los dos grupos. La estrategia mayoritaria de los alumnos del grupo de control consiste utilizar la notación decimal para medir la cantidad de longitud y, después, convertir el número decimal en una fracción. Esta estrategia tiene un porcentaje de éxito muy bajo de modo que solo tres alumnos consiguen resolver las tareas.

En cambio, los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" aportan respuestas de mayor calidad conceptual porque algunos los alumnos deciden medir utilizando la representación fraccionaria. Uno de estos casos, lo ejemplifica la alumna A22 que escribe:

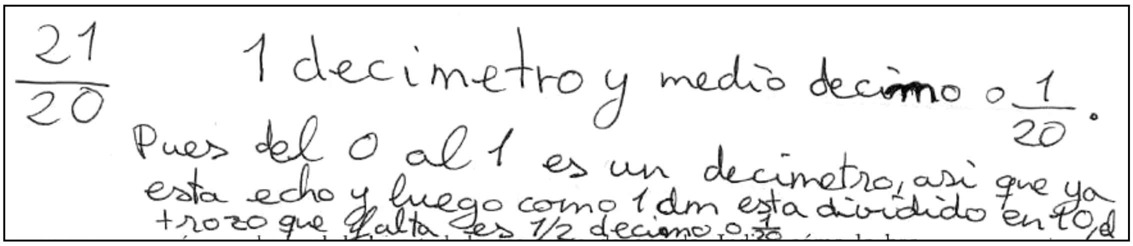

$\frac{21}{20}$ 1 decimetro y medio decimo o $\frac{1}{20}$.
Pues del 0 al 1 es un decimetro, así que ya
esta echo y luego como 1 dm esta dividido en 10 d
trozo que falta es 1/2 decimo, o $\frac{1}{20}$

Gráfico VII.26: Respuesta de A22 en las pregunta 4-a

Algunas de las respuestas erróneas que aportan los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" muestran una comprensión parcial que deja entrever ideas adecuadas de la fracción como resultado de una medida. Este es el caso de la alumna A05 que escribe:

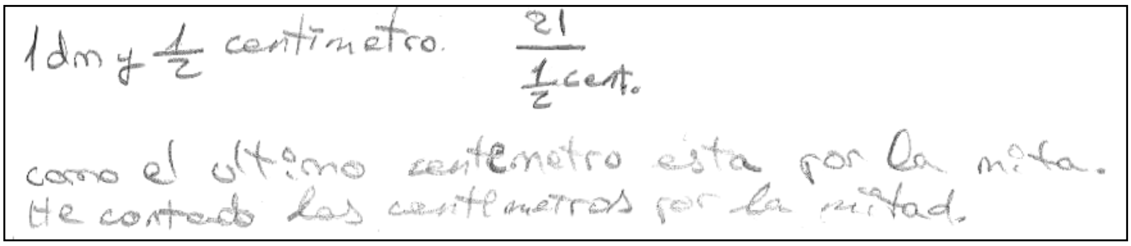

1dm y $\frac{1}{2}$ centimetro. $\frac{21}{\frac{1}{2}\text{cent.}}$
como el ultimo centemetro esta por la mita.
He contado los centimetros por la mitad.

Gráfico VII.27: Respuesta de A05 en las pregunta 4-a

C.4) Interpretación de los resultados obtenidos en la Pregunta nº 4

Las tasas de éxito obtenidas por los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" en las tareas de medida de cantidades de longitud en la recta numérica son superiores a las de los alumnos del grupo de control. Las respuestas de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" son de mayor calidad conceptual que las que aportan los alumnos del grupo de control.

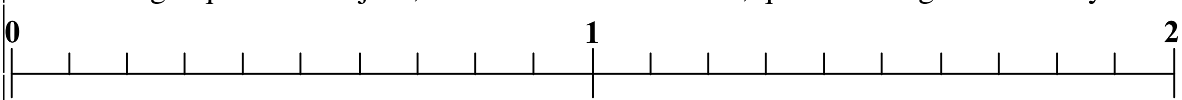
Estos resultados permiten concluir que el modelo de medida se muestra más eficaz que el modelo parte-todo para resolver con éxito las tareas de medida. Es más, la enseñanza desde la relación parte-todo se muestra insuficiente para garantizar el éxito de los alumnos en las tareas de medida de cantidades de magnitud.

VII.4.6.4. Evaluación semántica de la fracción y del número decimal desde el modelo medida

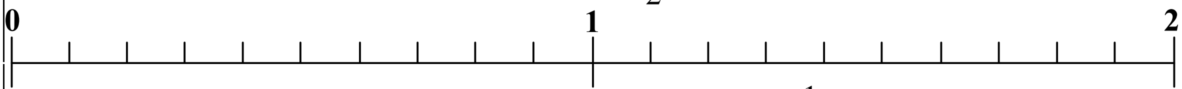
P.6-7) Enunciados de las preguntas nº 6 y nº 7

La formulación de las preguntas nº 6 y nº 7 exige a los alumnos representar gráficamente cantidades de longitud cuyas medidas están expresadas mediante una fracción (pregunta nº 6) o un número decimal (pregunta nº 7).

6.- En la regla que ves dibujada, la unidad es 1 decímetro, que es la longitud entre 0 y 1:



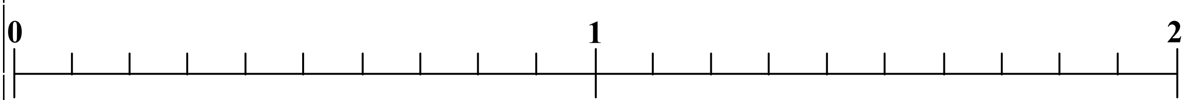
a) Dibuja sobre la regla un segmento de longitud $\frac{1}{2}$ decímetro.



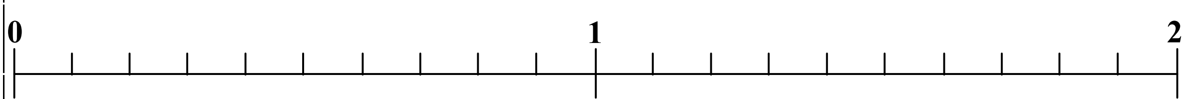
b) Indica qué has hecho para dibujar el segmento de longitud $\frac{1}{2}$ decímetro.

Cuadro VII.13: Enunciado de las pregunta nº 6 del Cuestionario

7.- En la regla que ves dibujada, la unidad es 1 decímetro, que es la longitud entre 0 y 1:



a) Dibuja sobre la regla un segmento de longitud 0´95 decímetros.



b) Indica el significado de las cifras del número decimal:

La cifra 0 significa que ______________________________

La cifra 9 significa que ______________________________

La cifra 5 significa que ______________________________

Cuadro VIII.14: Enunciado de las pregunta nº 7 del Cuestionario

La resolución de las tareas de evaluación semántica de la fracción y del número decimal que se formulan en las preguntas nº 6 y nº 7 exige que los alumnos realicen representaciones gráficas sobre la recta numérica. Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" han realizado tareas de evaluación semántica y de representación gráfica del número decimal y solo han realizado tareas de evaluación semántica de la fracción. Por otra parte, no sabemos si los alumnos del grupo de control han realizado tareas como las formuladas en las preguntas nº 6 y nº 7. En cualquier caso, aunque los alumnos no hayan realizado tareas específicas como las que se plantean en estas preguntas, una adecuada comprensión del número racional positivo debería garantizar la capacidad de los alumnos para representar gráficamente cantidades de longitud expresadas mediante la notación fraccionaria y decimal.

Nuestro propósito es indagar si la enseñanza del número racional como medida que han estudiado los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" les posibilita evaluar semánticamente las notaciones fraccionaria y de decimal. También, queremos indagar si la enseñanza que han recibido los alumnos del grupo de control les permite resolver con éxito estas tareas.

R.6-7) Resultados de la preguntas nº 6 y nº 7

Para analizar las respuestas de los alumnos en la pregunta nº 6, que valora la comprensión que poseen los alumnos de la fracción como resultado de la medida de una cantidad de longitud, nos ayudamos de la siguiente tabla que aporta información de los resultados globales expresada en frecuencias absolutas y, entre paréntesis, con frecuencias relativas:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	17 (**71**)	5 (**21**)	2 (**8**)
Grupo de control	9 (**25**)	17 (**47**)	10 (**28**)

Tabla VII.50. Resultados de la pregunta nº 6 del Cuestionario

La tasa de éxito en la tarea de evaluación semántica de la fracción que han obtenido los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" (71%) es superior a la que obtienen los alumnos del grupo de control (25%).

Si analizamos las respuestas erróneas que los alumnos cometen en esta pregunta, vemos que destacada un tipo de error: considerar como unidad de medida el segmento que une los puntos 0 y 2. En la siguiente tabla vemos reflejado este tipo de error:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de alumnos que consideran como unidad 2 dms*
Grupo experimental	3 (**13**)
Grupo de control	13 (**36**)

Tabla VII.51. Alumnos que yerran al identificar la unidad en la pregunta nº 6

Los alumnos del grupo de control cometen con mayor frecuencia que los procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" el error que consiste en considerar como unidad 2 dms. El 75% de los alumnos del grupo de control que yerran cometen este error. Estos alumnos, que han recibido enseñanza de la fracción como relación parte-todo, consideran como unidad o "todo" la mayor cantidad que perciben con la vista. Así, el alumno C15 escribe:

"*Como hay dos dm y* $\frac{1}{2}$ *es la mitad he hecho un segmento del 0 al 1"*

y la alumna D05 escribe:

"Se que el denominador es 2 por lo tanto, el máximo. Luego el numerador es 1 por lo tanto la resta será hasta el 1"

La pregunta nº 7-a plantea dibujar la cantidad de longitud 0´95 decímetros. Los resultados de esta pregunta, que valora la comprensión que poseen los alumnos de la notación decimal como resultado de la medida de una cantidad de longitud, se muestran en la siguiente tabla:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	16 (**67**)	5 (**21**)	3 (**13**)
Grupo de control	16 (**44**)	7 (**19**)	13 (**36**)

Tabla VII.52. Resultados de la pregunta nº 7-a del Cuestionario

Los resultados de la pregunta nº 7-b, que indaga sobre el significado que los alumnos asignan a las cifras del número decimal en un contexto de medida de una cantidad de longitud, se muestran en la siguiente tabla:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	17 (**71**)	4 (**17**)	3 (**13**)
Grupo de control	7 (**19**)	9 (**25**)	20 (**56**)

Tabla VII.53. Resultados de la pregunta nº 7-b del Cuestionario

Si analizamos las respuestas erróneas que los alumnos cometen en la pregunta nº 7-a, vemos que destacada un tipo de error en los dos grupos estudios, que consiste en dibujar 0´9 decímetros y obviar las 5 centésimas de la unidad. Parece que algunos alumnos tienen dificultades para gestionar las unidades decimales de segundo orden y que la frecuencia de los alumnos que cometen este error es similar en los dos grupos. El porcentaje de éxito de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" es superior al de los alumnos del grupo de control en la tarea de evaluación semántica del número decimal.

El número elevado de alumnos del grupo de control que no responden a la cuestión nº 7-b indica que este tipo de tareas no son habituales en la práctica docente tradicional. Los alumnos del grupo de control muestran extrañeza cuando se les pregunta por los significado de los símbolos matemáticos. Por el contrario, se observa que los alumnos que proceden del C.E.I.P. "Tío Jorge" están habituados a una metodología de trabajo en el aula que les exige cuestionarse el significado de los símbolos y de los conceptos matemáticos.

C.6-7) Interpretación de los resultados obtenidos en las preguntas nº 6 y nº 7

Los alumnos de los dos grupos observados obtienen mejores resultados cuando evalúan el significado de un número decimal que cuando evalúan el de una fracción.

Los alumnos del grupo de control obtienen, en las preguntas nº 6 y nº 7, tasas de éxito más bajas que los alumnos que proceden del C.E.I.P. "Tío Jorge". La diferencia entre el rendimiento de los dos grupos se hace más patente en la pregunta nº 6 que indaga sobre la evaluación semántica de la fracción.

La enseñanza de la fracción como la relación entre la parte y el "todo" obstaculiza la compresión de la fracción como resultado de una medida porque la práctica docente de la relación parte-todo se caracteriza por la indefinición de la unidad.

El número decimal goza de gran presencia e importancia en nuestra sociedad. Posiblemente, esta es la razón por la que los alumnos del grupo de control reconocen el número decimal en situaciones de medida y contribuye a que mejoren sus resultados en la pregunta nº 7-a, si se comparan con los obtenidos en la pregunta nº 6. Sin embargo, los resultados obtenidos por los alumnos del grupo de control ponen de manifiesto un conocimiento instrumental del número decimal caracterizado por una escasa comprensión conceptual porque tienen grandes dificultades para explicar el significado de las cifras del número decimal.

Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" obtienen buenos resultados en las tareas de evaluación semántica de la fracción y del número decimal, mientras que los alumnos del grupo de control obtienen tasas de éxito bajas en las mismas tareas. Según estos datos, la enseñanza que han recibido estos últimos alumnos y que esta basada en la relación parte-todo resulta inadecuada para resolver con éxito las tareas de evaluación semántica de la fracción y del número decimal como medida de cantidades de longitud.

VII.4.6.5. Conversión de la notación decimal a la notación fraccionaria

P.8) Enunciado de la pregunta nº 8

La pregunta nº 8 valora la capacidad de los alumnos para convertir un número decimal en una fracción:

8.- Expresa, con una fracción, el número decimal 0´45. Indica cómo lo has hecho.

La cantidad numérica que aparece en esta pregunta está descontextualizada, es decir, no hacen referencia al resultado de la medida de una cantidad de magnitud. Deseamos indagar si los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" se sirven del modelo de cociente partitivo para interpretar el número decimal como el resultado de un reparto igualitario que admite una expresión alternativa como suma de fracciones decimales.

R.8) Resultados de la pregunta nº 8

Para analizar las respuestas de los alumnos en la pregunta nº 8 nos ayudamos de la siguiente tabla que aporta información de los resultados globales expresada en frecuencias absolutas y, entre paréntesis, con frecuencias relativas:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	6 (**25**)	10 (**42**)	8 (**33**)
Grupo de control	8 (**22**)	7 (**19**)	21 (**58**)

Tabla VII.54. Resultados de la pregunta nº 8 del Cuestionario

La tasa de éxito en los dos grupos es baja. Los alumnos de los dos grupos tienen dificultades para conectar la notación decimal con la representación fraccionaria.

Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" que resuelven correctamente la tarea no utilizan el modelo de cociente partitivo, y ninguno se ha servido de la representación polinómica decimal asociada al resultado del reparto: $0 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$. Solo la alumna A13 parece interpretar 0´45 como el resultado de un reparto cuando escribe:

$$0´45 \times 100 = 45.\ \textit{Fracción: } \frac{45}{100}$$

Otra alumna (A49) que procede del C.E.I.P. "Tío Jorge" se sirve del significado del número decimal de medida de una cantidad de longitud para aportar como solución $\frac{9}{20}$:

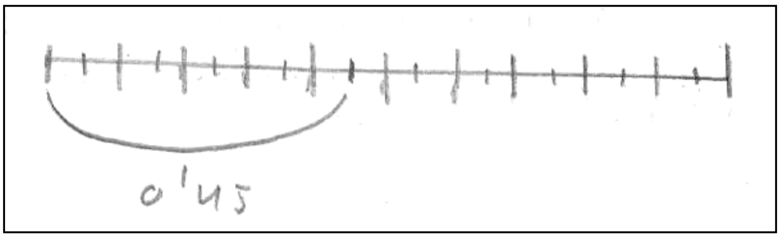


Gráfico VII.28. Respuesta de A45 en la pregunta nº 8

Mientras tanto, los alumnos del grupo de control no utilizan ningún modelo de aprendizaje y aplican reglas de carácter simbólico. La respuesta de la alumna D05 ejemplifica una de las ocho respuestas correctas:

$$0´45 = \frac{45}{100}$$

El numerador se queda el mismo número pero sin coma.
El denominador tantos ceros como indica el número decimal después de la coma (hacia la derecha)

Gráfico VII.29. Respuesta de la alumna D05 en la pregunta nº 8

En la siguiente tabla mostramos los tipos de errores más frecuentes que cometen los alumnos cuando responden a la pregunta nº 8:

	Frecuencias absolutas y relativas de respuestas erróneas		
Alumnos del	Inventan reglas falsas	Confunden el sistema decimal con el sexagesimal	Buscan la fracción por ensayo y error
Grupo experimental	2 (**8**)	3 (**12**)	5 (**21**)
Grupo de control	7 (**19**)	0 (**0**)	0 (**0**)

Tabla VIII.55. Tipos de respuestas erróneas de los alumnos en las pregunta nº 8 del Cuestionario

Al estudiar la tipología de los errores cometidos por los alumnos de los dos grupos detectamos diferencias importantes que guardan estrecha relación con las metodologías dispares que caracterizan la enseñanza implementada con los alumnos del C.E.I.P. "Tío Jorge" y la enseñanza tradicional que han recibido los alumnos del grupo de control. En efecto, las respuestas erróneas que cometen los alumnos del grupo de control son muy uniformes y consisten en inventar y aplicar reglas falsas.

Mostramos todas las respuestas erróneas y, entre paréntesis, los alumnos del grupo de control que inventan reglas falsas:

$\frac{4}{5}$ (C15, C17, C18 y D09)

$\frac{45}{10}$ (C09)

$\frac{4}{50}$ (D13)

$\frac{1}{0'45}$ (C19)

En cambio, en las respuestas erróneas de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" se pueden observar los intentos de éstos para contextualizar el número decimal 0´45. Por ejemplo, tres alumnos (A02, A05 y A19) han contextualizado el número decimal como cantidad de tiempo pero no se han percatado de que la medida del tiempo se rige mediante un sistema sexagesimal, no decimal. En estas condiciones, estos tres alumnos cometen el error de asociar la expresión decimal con la representación fraccionaria $\frac{3}{4}$ de hora.

Otros cinco alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" utilizan una estrategia de ensayo y error, sin éxito, al intentar encontrar el numerador y denominador adecuados para que la cantidad sea 0´45. Este es el caso de la alumna A31 que escribe:

"Casi llega a la mitad, así que: $\frac{2}{6}$ *"*

C.8) Interpretación de los resultados obtenidos en la pregunta nº 8

Los porcentajes de éxito en la pregunta nº 8 que indaga la capacidad de los alumnos para convertir un número decimal en una fracción son bajos en los dos grupos estudiados. Aproximadamente, la cuarta parte de los alumnos de cada uno de los grupos realiza correctamente la conversión.

Aunque las tasas de éxito son similares, las estrategias que utilizan los alumnos de uno y otro grupo son muy diferentes porque la enseñanza se ha implementado en cada uno de los grupos con metodologías dispares. Así, los alumnos del grupo de control utilizan una estrategia única: rescatar de la memoria una regla de carácter simbólico.

En cambio, los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" utilizan un mayor número de estrategias como considerar el decimal como la medida de una cantidad de longitud o como un cociente indicado y proceder por ensayo y error. Para estos alumnos, la aplicación de la regla de paso entre los dos sistemas de representación no juega un papel tan relevante como en el caso de las respuestas de los alumnos del grupo de control.

Al analizar las respuestas de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" obtenemos un resultado relevante: estos alumnos apenas utilizan el significado de cociente partitivo para convertir el número decimal en una fracción. Estos resultados inducen a pensar que los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" gestionan mejor los modelos de medida que los de cociente partitivo, posiblemente, porque la enseñanza sustentada en los modelos de medida prevé un mayor número de actividades manipulativas con objetos tangibles que la enseñanza basada en los modelos de cociente partitivo.

VII.4.6.6. Conversión de la notación fraccionaria a la notación decimal

P.9) Enunciado de la pregunta nº 9

La pregunta nº 9 indaga la capacidad de los alumnos para convertir una fracción en un número decimal:

9**.-** Expresa, con un número decimal, la fracción $\frac{6}{5}$. Indica cómo lo has hecho.

La cantidad numérica que aparece en esta pregunta está descontextualizada, es decir, no hacen referencia al resultado de la medida de una cantidad de magnitud. Deseamos indagar si los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" se sirven del modelo de cociente partitivo para interpretar los términos de la fracción como las condiciones iniciales de un reparto igualitario, es decir, deseamos evaluar si los alumnos del grupo experimental perciben la fracción como un cociente indicado que procede de un reparto igualitario.

R.9) Resultados de la pregunta nº 9

Para analizar las respuestas de los alumnos en la pregunta nº 9 nos ayudamos de la siguiente tabla que aporta información de los resultados globales expresada en frecuencias absolutas y, entre paréntesis, con frecuencias relativas:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	6 (**25**)	11 (**46**)	7 (**29**)
Grupo de control	1 (**3**)	17 (**47**)	18 (**50**)

Tabla VII.56. Resultados de la pregunta nº 9 del Cuestionario

Los resultados son muy bajos: un cuarto de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" sabe convertir la fracción en un número decimal, y solo una alumna (C10) del grupo de control resuelve con éxito la tarea.

Si observamos las respuestas de los alumnos que saben convertir la fracción en un número decimal detectamos que todos los alumnos interpretan la fracción como división indicada y proceden dividiendo el numerador entre el denominador. La enseñanza sustentada en el modelo de cociente partitivo que se ha implementado con los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" explica que éstos hayan optado por aplicar la estrategia de dividir el numerador entre el denominador.

En la siguiente tabla mostramos los tipos de errores más frecuentes en las soluciones que los alumnos aportan a la pregunta nº 9:

	Frecuencias absolutas y relativas de respuestas erróneas			
Alumnos del	*Inventan reglas falsas*	*Yerran al convertir 1/5*	*Se confunde al dividir 6:5*	*Dividen 5 : 6*
Grupo experimental	2 (**8**)	3 (**12**)	4 (**16**)	2 (**8**)
Grupo de control	14 (**39**)	1 (**3**)	1 (**3**)	1 (**3**)

Tabla VIII.57. Tipos de respuestas erróneas de los alumnos en las pregunta nº 9 del Cuestionario

La mitad de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" que yerran perciben la fracción como división indicada. Sin embargo, los alumnos del grupo de control no interpretan la fracción como división indicada y optan por no responder a la pregunta (50%) o bien por inventar reglas erróneas (39%) . La estrategia mayoritaria de los alumnos del grupo de control que yerran consiste en inventar y aplicar reglas falsas. Las respuestas más frecuentes de los alumnos del grupo de control son 0´65 y 6´5.

Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" apenas inventan reglas falsas, y los errores que cometen muestran una comprensión parcial del significado de la fracción impropia 6/5. Este es el caso de las tres alumnas (A31, A40 y A49) que perciben la fracción 6/5 como la descomposición aditiva de la unidad y 1/5, pero tienen dificultades para convertir en decimal la fracción 1/5. En particular, la alumna A31 aporta como solución *1'10* y justifica su respuesta del siguiente modo:

"$\frac{5}{5}$ *=1 entero como es un quinto mas le pongo un 10 que es un décimo"*

La alumna A49 escribe una respuesta errónea (*1´02*), sin embargo el dibujo que realiza muestra una comprensión aceptable de la fracción 6/5 porque descompone la unidad en 5 subunidades de tamaño 2/10 de unidad:

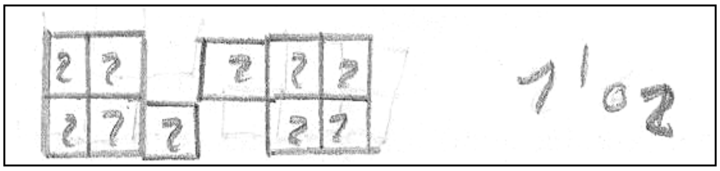


Gráfico VII.30. Respuesta de A49 en las pregunta nº 9

C.9) Interpretación de los resultados obtenidos en la pregunta nº 9

El porcentaje de éxito en la pregunta nº 9 que indaga la capacidad de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" para convertir una fracción en un número decimal es bajo (25%), mientras que el porcentaje de éxito de los alumnos del grupo de control es muy bajo (3%).

Esta tarea resulta compleja a los alumnos porque la fracción aparece descontextualizada, sin hacer referencia a ningún contexto familiar. Para los alumnos del grupo de control la relación parte-todo se muestra ineficaz para afrontar con éxito esta tarea y, ante la ausencia de un modelo eficaz, optan por gestionar directamente las representaciones simbólicas e inventar reglas falsas.

La mitad de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" perciben la fracción como una división indicada porque estos alumnos recibieron enseñanza del número racional positivo desde el modelo de cociente partitivo, en quinto curso de Educación Primaria.

Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" obtienen tasas de éxito más altas y poseen una mejor comprensión de los sistemas de representación habituales del número racional que los alumnos del grupo de control que se manifiesta en el análisis de los tipos de errores que cometen los alumnos de cada uno de los dos grupos estudiados. No obstante, los resultados obtenidos por los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" son inferiores a los esperados y ponen de manifiesto que la complejidad del modelo de cociente partitivo es muy superior a la de los modelos de medida y que su implementación en el aula exige períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo que los empleados en la fase experimental.

VII.4.6.7. Cálculo e interpretación de la equivalencia de fracciones

P.10) Enunciados de las preguntas nº 2-b y nº 10

La segunda pregunta, en su primer apartado, plantea la búsqueda de una fracción que mide la cantidad de tabletas de chocolate que consume una persona sabiendo que la tableta de chocolate tiene 24 porciones. Vamos a valorar el segundo apartado de la pregunta que se enuncia del siguiente modo:

2-b. Expresa esta cantidad de chocolate con otras fracciones equivalentes.

Con esta pregunta queremos indagar si los alumnos son capaces de encontrar fracciones equivalentes a una dada. Valoraremos si los alumnos saben encontrar una fracción equivalente a la que hayan escrito en la pregunta nº 2-a, a pesar de que la fracción de partida sea errónea. Este ítem nos permite establecer comparaciones entre los dos grupos del estudio minimizando sesgos porque todos los alumnos del grupo de control responden a la pregunta nº 2-a y tan solo el 4% de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" no responden a la pregunta nº 2-a.

La pregunta nº 10 indaga el significado que los alumnos dotan al concepto de equivalencia a partir de las respuestas que aportan para justificar la equivalencia de 1/2 y 3/6. La pregunta queda formulada del siguiente modo:

10. ¿Qué quiere decir que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ son equivalentes?

R.10) Resultados de las preguntas nº 2-b y nº 10

Para analizar las respuestas de los alumnos en la pregunta nº 2-b nos ayudamos de la siguiente tabla que aporta información de los resultados globales expresada en frecuencias absolutas y, entre paréntesis, con frecuencias relativas:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	21 (**88**)	2 (**8**)	1 (**4**)
Grupo de control	11 (**31**)	8 (**22**)	17 (**47**)

Tabla VII.58. Resultados de la pregunta nº 2-b del Cuestionario

La tasa de éxito que han obtenido los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" (88%) es muy superior a la que obtienen los alumnos del grupo de control (31%). Destacamos el elevado porcentaje de alumnos del grupo de control que no responden a esta cuestión, y el bajo porcentaje de éxito en la gestión simbólica de la equivalencia de fracciones.

El sistema de representación de la fracción mixta que conocen los alumnos que recibieron enseñanza en uno de los Colegios que forman el grupo de control se ha mostrado eficaz para obtener éxito en la pregunta nº 2-a. Sin embargo, algunos alumnos de ese mismo Colegio muestran una escasa comprensión de la fracción mixta cuando intentan encontrar una fracción equivalente a la mixta. Este es el caso del alumno C13 que afirma que:

$$2\frac{16}{48} \text{ \textit{es equivalente a} } 1\frac{8}{24}$$

Para analizar las respuestas de los alumnos en la pregunta nº 10 nos ayudamos de la siguiente tabla que aporta información de los resultados globales expresada en frecuencias absolutas y, entre paréntesis, con frecuencias relativas:

Alumnos del	*Frecuencia absoluta y relativa de éxito*	*Frecuencia absoluta y relativa de fracaso*	*Frecuencia absoluta y relativa "no contesta"*
Grupo experimental	19 (**79**)	1 (**4**)	4 (**17**)
Grupo de control	24 (**67**)	3 (**8**)	9 (**24**)

Tabla VII.59. Resultados de la pregunta nº 10 del Cuestionario

Los alumnos de los dos grupos estudiados obtienen tasas de éxito altas. Esto quiere decir que los alumnos asignan un significado adecuado al concepto de equivalencia de fracciones. Sin embargo, se observan diferencias importantes en las respuestas de los alumnos de uno y otro grupo, que informan de la disparidad de las propuestas didácticas implementadas en cada uno de los grupos del estudio.

Para analizar la calidad de las respuestas correctas que aportan los alumnos de cada uno de los grupos definimos dos criterios de valoración:

RC cuando los alumnos utilizan un razonamiento conceptual, y

TO cuando los alumnos utilizan técnicas operatorias,

que informan del tipo de razonamientos que utilizan los alumnos para justificar la equivalencia de las fracciones 1/2 y 3/6.

	Frecuencias absolutas y relativas de las estrategias utilizadas en las respuestas correctas a la pregunta nº 10	
Alumnos del	***RC***	***TO***
Grupo experimental	13 (**54**)	6 (**25**)
Grupo de control	3 (**8**)	21 (**58**)

Tabla VII.60: Tipos de estrategias utilizadas en la pregunta nº 10 del Cuestionario

Entre las justificaciones que aportan los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" predominan los razonamientos de carácter conceptual y son minoritarias las que se basan en una técnica operatoria. Así, los alumnos que proceden del C.E.I.P. "Tío Jorge" aportan justificaciones, que son coherentes con la enseñanza que han recibido, en la que la fracción tiene el significado de medida de una cantidad de magnitud. Mostramos algunas de estas respuestas:

"Son equivalentes porque tienen la misma longitud, capacidad, etc." (A01)

"Que significan el mismo trozo de chocolate pero partido en diferentes porciones" (A05)

"Que tienen las mismas dimensiones" (A11)

" $\frac{3}{6}$ *forman* $\frac{1}{2}$. *Si doblas* $\frac{1}{2}$ *en 3 partes iguales salen* $\frac{3}{6}$ " (A13)

"Se refieren a la misma cantidad pero dividida diferente" (A14)

"*Que* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{3}{6}$ *son la misma cantidad*" (A16)

"Que son de igual tamaño" (A29)

"*Un $\frac{1}{2}$ es la mitad y $\frac{3}{6}$ también es la mitad"* (A31)

Los alumnos del grupo de control utilizan reglas numéricas para justificar la equivalencia de fracciones. Se trata de una consecuencia lógica de la enseñanza que han recibido estos alumnos, y que se caracteriza por presentar los símbolos en abstracto en lugar de situarlos en el marco de modelos de aprendizaje estables. En estas condiciones, solo tres alumnos utilizan razonamientos fundamentados en la fracción como relación entre la parte y el todo, y que mostramos a continuación:

"Que los dos tienen la mitad coloreada" (C01)

"Que expresan la misma parte de la unidad" (C10)

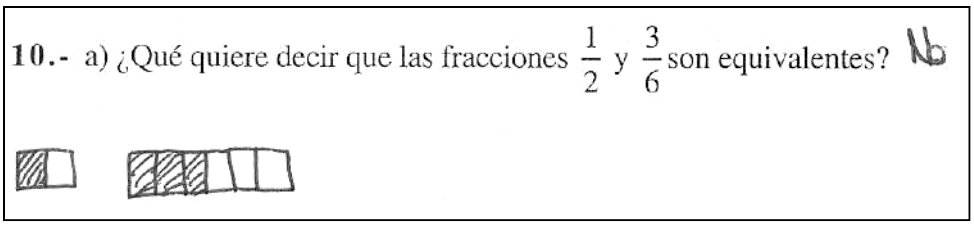
"Que representan la misma parte de la unidad" (C12)

Las dos últimas respuestas son formas habituales para definir la equivalencia de fracciones desde la relación parte-todo. En ellas se utilizan términos como "expresar" o "representar" que dejan sin aclarar interrogantes importantes sobre el concepto, tales como:

a) las fracciones equivalentes indican igualdad entre cantidades de magnitud, o bien,

b) las fracciones equivalentes indican proporcionalidad entre cantidades de magnitud.

La indefinición del significado de la fracción que caracteriza la enseñanza de este concepto desde la relación parte-todo es la causa de algunos de los errores detectados en los alumnos del grupo de control. Este es el caso de la alumna C18, cuya respuesta mostramos a continuación, y que niega que las fracciones sean equivalentes porque vincula la equivalencia a la igualdad de cantidades de magnitud, es decir, opta por el modelo de medida pero desconoce que la gestión adecuada de este modelo exige considerar una única unidad de medida:



10.- a) ¿Qué quiere decir que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ son equivalentes? No

Gráfico VII.61: Respuesta de la alumna C18 en la pregunta nº 10

Las técnicas operatorias que utilizan los alumnos de cada uno de los grupos también son distintas porque la reglas que se han enseñado en las propuestas didácticas implementadas en los dos grupos también son diferentes. Así, los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" utilizan la regla que ejemplifica la alumna A19 cuando escribe:

"*Pues que si multiplicas los dos números por 3 te sale $\frac{3}{6}$* "

Mientras tanto, la mayoría de los alumnos del grupo de control utilizan la regla que les ha sido enseñada y que ejemplifica la alumna C07 cuando escribe:

"Que si multiplicas en cruz, por ejemplo 2x3=6 y 1x 6=6, da el mismo número"

C.10) Interpretación de los resultados obtenidos en las preguntas nº 2-b y nº 10

La práctica totalidad de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" saben obtener fracciones equivalentes a una dada. La tasa de éxito que han obtenido los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" (88%) es muy superior a la que obtienen los alumnos del grupo de control (31%). La propuesta de enseñanza implementada con los alumnos del C.E.I.P. "Tío Jorge" ha incidido particularmente en este concepto que es fundamental para una buena comprensión del número racional positivo.

Se ponen de manifiesto diferentes estrategias para justificar la equivalencia de dos fracciones en función de la enseñanza dispar que han recibido los alumnos de los dos grupos estudiados. Así, los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge", que han estudiado la fracción como resultado de una medida, optan por justificar la equivalencia mediante razonamientos conceptuales. En cambio, los alumnos del grupo de control, que han recibido enseñanza de la fracción como relación entre la parte y el "todo", se sirven de técnicas operatorias. En estas condiciones, los alumnos del grupo de control recurren a justificar la equivalencia con símbolos matemáticos, en abstracto, sin hacer referencia a acciones concretas y los escasos razonamientos conceptuales que utilizan consisten en expresiones tabuladas, como "representan la misma parte de la unidad" que han retenido en su memoria.

Las justificaciones de los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" se producen con mayor frecuencia de éxito y, además, son de mayor calidad conceptual que las que aportan los del grupo de control porque los alumnos del grupo experimental fundamentan sus explicaciones al evocar las acciones físicas realizadas con los modelos de medida y no necesitan memorizar frases uniformes y esteriotipadas.

VII.4.7. Conclusiones del estudio comparativo entre Colegios

VII.4.7.1. Transferencia entre los modelos medida y la relación parte-todo

Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" que han recibido enseñanza de la fracción como medida son capaces de resolver con éxito las tareas basadas en la relación entre la parte y el "todo", a pesar de que no han recibido enseñanza de este último significado. Sin embargo, los alumnos del grupo de control que han recibido enseñanza de la relación entre la parte y el "todo" son incapaces de encontrar la fracción que expresa la medida de una cantidad de superficie.

El significado de medida es más potente que el de relación parte-todo, de manera que las tareas formuladas desde la relación parte-todo pueden ser abordadas desde el significado de medida, pero no al revés, porque las actividades de medida exigen poner en juego capacidades cognitivas superiores a las tareas propuestas desde la parte-todo que se sustentan en el recuento de naturales.

Estos resultados aportan sugerencias didácticas sobre la enseñanza de estos conceptos:

1º La comprensión de la fracción con el significado de medida precisa enseñanza específica; no surge de la enseñanza de la relación entre la parte y el "todo".

2º El número racional positivo como resultado de la medida de cantidades de magnitud debería ser objeto de enseñanza.

3º La enseñanza de la fracción desde la relación "parte-todo" puede ser eludida y sustituida con plena garantía de éxito por la enseñanza de la fracción desde los modelos de medida.

VII.4.7.2. Fracción impropia

La enseñanza de las fracciones impropias desde la relación parte-todo no se sostiene. En cambio, los modelos de medida de magnitudes continuas permite introducir, de manera natural, la enseñanza de las fracciones impropias.

La representación mixta de la fracción enseñada desde el modelo de relación parte-todo no resuelve el problema de la comprensión de las fracciones impropias. La fracción mixta facilita al alumno la búsqueda de la representación simbólica de la fracción impropia pero hemos constatado que no garantiza la comprensión de la fracción impropia porque los alumnos del grupo de control que han utilizado este sistema de representación tienen grandes dificultades para realizar una evaluación semántica de la fracción impropia.

VII.4.7.3. Modelo de medida de la cardinalidad

En nuestra investigación hemos constatado que la enseñanza de la fracción como medida de la cardinalidad, es decir en contextos discretos, presenta mayores dificultades conceptuales que en contextos continuos porque el concepto de fracción, en cada uno de estos contextos, tiene una génesis fenomenológica muy diferente. En efecto, los alumnos de los dos grupos estudiados obtienen peores resultados en las tareas planteadas desde el modelo parte-todo en contextos discretos que en las tareas propuestas desde el modelo parte-todo en contextos continuos.

Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" obtienen mejores resultados que los alumnos del grupo de control y aportan respuestas de mayor calidad conceptual en las tareas de evaluación semántica de la evaluación impropia en contextos discretos, a pesar de que las preguntas del cuestionario están formuladas desde la relación parte-todo.

El modelo de medida de la cardinalidad es más potente que la relación parte-todo, a pesar de la enseñanza del numero racional como medida de la cardinalidad plantea un obstáculo epistemológico como consecuencia de que la medida de la cantidad discreta no pertenece a la fenomenología histórica del número racional.

VII.4.7.4. La notación fraccionaria y decimal en el modelo de medida de longitud

En situaciones de medida los alumnos de los dos grupos estudiados utilizan con más éxito la representación decimal que la representación fraccionaria. Parece razonable que esto sea así porque los alumnos tienen abundantes experiencias vitales de medida en las que expresan el resultado con un número decimal y están más familiarizados con la notación decimal que con la representación fraccionaria.

Los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" obtienen mejores resultados que los alumnos del grupo de control en todas las tareas de medida y de evaluación semántica de la representación fraccionaria y de la notación decimal.

Los alumnos que han recibido enseñanza de la fracción como la relación entre la parte y el "todo" obtienen resultados muy bajos cuando intentan expresar con una fracción o con número decimal la medida de una cantidad de magnitud. La tasa de éxito de los alumnos del grupo de control también es baja cuando realizan una evaluación semántica de la fracción como medida de una cantidad de longitud. A pesar de que el rendimiento de estos alumnos mejora al evaluar el número decimal como cantidad de longitud, hemos detectado en estos alumnos un conocimiento instrumental del número decimal caracterizado por una escasa comprensión conceptual dado que tienen grandes dificultades para explicar el significado de las cifras del número.

En consecuencia, concluimos que el modelo de medida de longitud se muestra más eficaz que el modelo relación parte-todo para resolver con éxito las tareas de medida planteadas sobre la recta numérica. Es más, la enseñanza sustentada en la relación parte-todo es insuficiente para garantizar con éxito las tareas formuladas desde el modelo de medida de longitud porque una de las característica que define la relación parte-todo es la indefinición de la unidad de medida.

VII.4.7.5. Conversión de la notación decimal a la notación fraccionaria

Los alumnos de los dos grupos estudiados tienen dificultades para transformar un número decimal en una fracción. Solo un cuarto de los alumnos de cada uno de los grupos estudiados realizan correctamente la conversión.

A pesar de que las tasas de éxito son similares, las estrategias que utilizan los alumnos de uno y otro grupo son dispares porque también lo son las propuestas didácticas y las metodologías implementadas en uno y otro grupo. Así, mientras que los alumnos del grupo de control utilizan una única estrategia: aplicar reglas de carácter simbólico; los alumnos procedentes del C.E.I.P. "Tío Jorge" utilizan un mayor número de estrategias como considerar el número decimal como la medida de una cantidad de longitud, o como el resultado de un reparto igualitario, o proceder por ensayo y error. Además, mientras que los alumnos del grupo experimental apenas inventan reglas falsas, el 20% de los alumnos del grupo de control inventan reglas falsas.

Al analizar las respuestas de los alumnos procedentes del C.E.I.P. “Tío Jorge” obtenemos un resultado relevante: estos alumnos apenas utilizan el significado de cociente partitivo para convertir el número decimal en una fracción. Este resultado pone de manifiesto la complejidad conceptual de la idea de reparto, muy superior a la de medida; y sugiere la necesidad de incidir y reforzar la enseñanza sustentada en los modelos de cociente partitivo en futuras experimentaciones de la Propuesta Didáctica.

VII.4.7.6. Conversión de la notación fraccionaria a la notación decimal

Los alumnos de los dos grupos estudiados tienen dificultades para transformar una fracción en un número decimal. El 25% de los alumnos procedentes del C.E.I.P. “Tío Jorge” resuelve con éxito esta tarea y solo el 3% de los alumnos del grupo de control resuelve con éxito la tarea.

Las tareas de conversión entre los sistemas de representación habituales del número racional resultan complejas a los alumnos de los dos grupos estudiados porque la fracción aparece descontextualizada. En este caso, los alumnos necesitan contextualizar la fracción en función de un modelo de aprendizaje. La relación parte-todo que conocen los alumnos procedentes del grupo de control se muestra ineficaz para resolver esta tarea y, en consecuencia, optan por gestionar directamente las representaciones simbólicas sin evocar ningún modelo y, en consecuencia, optan por inventar reglas falsas.

La mitad de los alumnos procedentes del C.E.I.P. “Tío Jorge” perciben la fracción como una división indicada dado que estos alumnos recibieron enseñanza del número racional positivo desde el modelo de cociente partitivo, en quinto curso de Educación Primaria.

A pesar de que los alumnos procedentes del C.E.I.P. “Tío Jorge” obtienen tasas de éxito más altas y poseen una mejor comprensión de los sistemas de representación habituales del número racional que los alumnos del grupo de control, los resultados son inferiores a los esperados y ponen de manifiesto que la complejidad del modelo de cociente partitivo es muy superior a la de los modelos de medida y que su implementación en el aula exige períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo que los empleados en la fase experimental.

VII.4.7.7. Equivalencia de fracciones

La mayoría de los alumnos procedentes del C.E.I.P. “Tío Jorge” saben obtener fracciones equivalentes a una dada. La tasa de éxito que obtienen estos alumnos (88%) es muy superior a la que obtienen los alumnos del grupo de control (31%).

Los alumnos de los dos grupos estudiados ponen en juego diferentes estrategias para justificar la equivalencia de dos fracciones. Así, los alumnos procedentes del C.E.I.P. “Tío Jorge” optan por justificar la equivalencia mediante razonamientos conceptuales mientras que los alumnos del grupo de control se sirven de técnicas operatorias.

Los alumnos procedentes del C.E.I.P. “Tío Jorge” utilizan razonamientos conceptuales porque rememoran las acciones efectuadas, con materiales tangibles, durante la implementación de la Propuesta Didáctica. De esta forma, los alumnos del grupo experimental obtienen mayores porcentajes de éxito que los alumnos del grupo de control cuando justifican la equivalencia de fracciones y, además, aportan razonamientos valiosos.

Por el contrario, los alumnos del grupo de control recurren a justificar la equivalencia con símbolos matemáticos, en abstracto, sin hacer referencia a acciones concretas. Estos alumnos utilizan técnicas operatorias para justifican la equivalencia de fracciones y describen la equivalencia formulando frases uniformes y esteriotipadas.

Los alumnos del grupo de control han recibido una enseñanza tradicional del número racional que se caracteriza por la ausencia de modelos de aprendizaje y por las limitaciones de la relación parte-todo. Los resultados de la *Prueba entre Colegios* confirma estos hallazgos teóricos: los alumnos del grupo de control obtienen rendimientos bajos en la Prueba y, además, optan por el uso de técnicas simbólicas en detrimento de los razonamientos conceptuales. Por el contrario, los alumnos del grupo experimental poseen una comprensión alta del número racional positivo porque la enseñanza recibida se ha sustentado sobre modelos de aprendizaje adecuados y cuyos efectos son perdurables en el tiempo.

Capítulo VIII
Conclusiones

VIII.1. Introducción

Esta Memoria recoge el desarrollo de una investigación centrada en la búsqueda de alternativas a la enseñanza habitual del número racional positivo en Educación Primaria. En particular, se ha ocupado de la elaboración razonada de una Propuesta Didáctica, sustentada en los modelos de medida y de reparto, que establezca conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales positivos; además, se ha implementado esta propuesta didáctica a lo largo de dos Etapas experimentales en condiciones naturales de aula.

A lo largo de esta memoria se ha justificado la necesidad de buscar una alternativa didáctica que ayude a los escolares a alcanzar un mayor grado de comprensión del número racional. Con esa finalidad se ha realizado un análisis crítico de las propuestas habituales sustentadas en el significado parte-todo, y se han tenido en cuenta las aportaciones del análisis epistemológico y fenomenológico del número racional positivo.

En este capítulo se exponen, de forma resumida y para concluir la memoria, los aspectos clave de la investigación realizada, atendiendo a los siguientes puntos:

- Una síntesis de los elementos fundamentales de la investigación: objetivo general y objetivos específicos, hipótesis de investigación, metodología empleada y etapas en el desarrollo del trabajo.
- Descripción de las conclusiones más relevantes obtenidas a lo largo de la investigación sobre la comprensión alcanzada por los alumnos y la pertinencia de la Propuesta Didáctica experimentada.

- Una relación de las perspectivas futuras que abre este trabajo de investigación a partir de los resultados reflejados en esta memoria.

VIII.2. El problema de investigación

Recogemos de forma sintética los elementos esenciales que han delimitado el problema que se aborda en esta memoria.

(i) Objetivos

Los objetivos generales de nuestra investigación (apartado I.10. capítulo I) son los siguientes:

Objetivo I: Diseñar de una Propuesta Didáctica para la enseñanza del Número Racional Positivo en Educación Primaria fundamentada en los modelos de aprendizaje de medida y de cociente partitivo, que propone una enseñanza alternativa a la tradicional sustentada en la relación parte-todo.

Objetivo II: Explorar las potencialidades y limitaciones de la Propuesta Didáctica cuando se implementa con grupos naturales de 4º y 5º curso de Educación Primaria.

Para alcanzar cada uno de estos dos objetivos generales se proponen los siguientes objetivos parciales (apartado I.10. capítulo I)

Objetivo I

I.a. Caracterizar un modelo para el aprendizaje de los números racionales positivos basado en la acción de medir directamente cantidades de longitud, superficie y masa.

I.b. Articular una secuencia de actividades sobre el modelo anterior para dar significado a las relaciones de orden y de equivalencia entre fracciones.

I.c. Dotar de significado, en el modelo de medida, a las operaciones de suma, resta, multiplicación de una fracción por un número natural y cociente entre una fracción y un número natural.

I.d. Caracterizar un modelo de aprendizaje basado en el reparto igualitario de cantidades de longitud y de superficie.

I.e. Explicitar las características sintácticas y semánticas del sistema de representación polinómico decimal, utilizado para expresar el resultado del reparto hecho por fases y con fraccionamientos sistemáticos, de la unidad o de partes de la unidad, en 10 partes iguales

I.f. Conectar las notaciones fraccionaria y decimal como formas diferentes de expresar la misma cantidad de magnitud.

I.g. Dotar de significado a las relaciones de orden entre números decimales; a las operaciones de suma y resta de números decimales; y a la multiplicación de un decimal por un número natural y al cociente de un decimal por un número natural.

Objetivo II:

II.1. Precisar los medios, los recursos y la organización necesarios para la recogida de la información.

II.2. Definir las unidades de análisis para procesar la información, atendiendo a la comprensión de los alumnos, a la eficacia de la propuesta didáctica y a las estrategias metódicas utilizadas.

II.3. Analizar y valorar los resultados obtenidos.

(ii) Hipótesis

En la consecución de los objetivos de la investigación se han contrastado las siguientes hipótesis (apartado III.12, capítulo III):

Hipótesis I: Es viable una propuesta didáctica sobre los números racionales positivos, destinada a alumnos de los cursos 4º y 5º de Educación Primaria, sustentada en los significados de medida y cociente partitivo que, consecuentemente, desatiende las propuestas tradicionales basadas en el significado parte-todo.

Hipótesis II: Esta propuesta permite superar los obstáculos provocados por el significado parte-todo y, en consecuencia, produce una mejora en la comprensión de los alumnos de Educación Primaria sobre los números racionales positivos.

(iii) Metodología

Para elaborar la propuesta didáctica, que constituye el Objetivo I de nuestra investigación, se han tenido en cuenta elementos esenciales del Análisis Didáctico (capítulos II y V) como la Historia y Epistemología de la Matemática, los procesos relacionados con la cognición y el aprendizaje, la Fenomenología del número racional, los procesos relacionados con la enseñanza y las peculiaridades de la comunicación matemática. Además, se ha incorporado, en el capítulo III, un estudio y valoración de los procesos instructivos que, a través de los libros de texto, se desarrollan actualmente en la Enseñanza Primaria, pues ello permite valorar los obstáculos didácticos que se producen como consecuencia de la práctica docente.

En la investigación desarrollada en torno al Objetivo II, sobre la implementación de una Propuesta Didáctica, se ha utilizado la metodología de Investigación-Acción (capítulo IV). El carácter recursivo de esta metodología se aplicó en las dos Etapas que conforman nuestro trabajo de relacionar los estudios teóricos con su aplicabilidad en el aula. De este modo, en la Segunda Etapa se incorporan las observaciones y reflexiones realizadas al analizar los resultados de la experimentación de la Primera Etapa.

VIII.3. Evaluación de la propuesta didáctica

En el Capítulo V se expusieron las razones que sustentan los contenidos y la secuenciación de la Propuesta Didáctica que elaboramos como alternativa a la enseñanza tradicional.

Superadas las distintas fases de la Investigación-Acción, hay que dejar constancia de las conclusiones sobre el diseño de dicha Propuesta Didáctica.

a) Los modelos de medida son más potentes que los de la relación parte-todo y, en consecuencia, la decisión de suprimir este último significado se muestra acertada. En el estudio *Comparativo entre Colegios* (Capítulo VII) hemos comprobado que los alumnos que han recibido enseñanza desde los modelos de medida son capaces de resolver con éxito tareas típicas formuladas desde la relación parte-todo; sin embargo, los alumnos que han recibido la enseñanza tradicional, sustentada en la parte-todo, no son capaces de resolver una tarea de medida de una cantidad de superficie.

b) Los modelos de medida eluden los obstáculos didácticos que ocasiona la enseñanza desde la relación parte-todo, porque en los modelos de medida:

- La introducción de la representación fraccionaria surge, en el aula, para comunicar el resultado de un problema de la vida real: medir una cantidad de magnitud. Sin embargo, desde la relación parte-todo la fracción surge para dar respuesta a una tarea escolar: realizar traslaciones entre representaciones gráficas y simbólicas sin que haya un problema que justifique la necesidad de realizar esa tarea.
- Los alumnos necesitan realizar intentos con diferentes fraccionamientos igualitarios de la unidad, lo que conlleva una toma de decisiones. Por contra, las tareas que se proponen desde la relación parte-todo no constituyen verdaderos problemas que obliguen al alumno a deliberar y a tomar decisiones. Las tareas formuladas desde la relación parte-todo aseguran el éxito de los escolares porque éstos solo tienen que aplicar un procedimiento pautado sustentado en el recuento de números naturales.
- Las fracciones impropias surgen de modo natural y no presentan mayores dificultades conceptuales que las fracciones propias. Sin embargo, la relación parte-todo es un modelo inapropiado para dar sentido a estas fracciones, como confirman los resultados de la pregunta 2-a del estudio *Comparativo entre Colegios*. (Capítulo VII)
- La unidad juega un papel fundamental en los modelos de medida. Sin embargo, la enseñanza desde relación parte-todo se caracteriza por la indefinición del "todo" o unidad, y que genera múltiples dificultades de aprendizaje.

c) La introducción de los conceptos matemáticos en base a la manipulación física de los alumnos, con materiales tangibles, tiene efectos muy beneficiosos en la Propuesta de Didáctica. Nuestro estudio confirma que los alumnos retienen en la memoria ideas matemáticas si éstas se construyen en base a la manipulación física de objetos, aunque ello implique alargar los períodos de enseñanza.

d) La enseñanza de la fracción desde los modelos de medida se articula a partir de la resolución de actividades de medida de cantidades continuas. Esta enseñanza resulta adecuada a pesar de que los alumnos de cuarto curso no intuyen la necesidad de realizar fraccionamientos en partes iguales de la unidad para realizar la medida. La intervención del profesor sugiriendo el fraccionamiento de la unidad resulta inevitable para salvar este obstáculo epistemológico porque los alumnos no tienen capacidad suficiente para provocar la ruptura de carácter epistemológico entre las estructuras numéricas del natural y del racional.

e) La decisión de anteponer al enseñanza del modelo de medida de longitud al modelo de superficie se muestra acertada, pues el trabajo con la magnitud longitud facilita a los alumnos de cuarto curso la percepción visual de la cantidad y, en consecuencia, la construcción de ideas abstractas sobre la fracción. Esto hace que los alumnos de las dos Etapas obtengan con el modelo de superficie un rendimiento similar y, en ocasiones, superior al obtenido con el modelo longitud.

f) El modelo de medida utilizado con magnitudes continuas se muestra eficaz en el trabajo con magnitudes discretas. La enseñanza de la fracción desde este modelo plantea obstáculos epistemológicos derivados de la ausencia de este significado en la génesis histórica de la fracción. Sin embargo, las tasas de éxito de los alumnos en la tarea de medida del cardinal (ficha de evaluación nº 8) y en la tarea de evaluación semántica (ficha de evaluación nº 9) están próximas a las obtenidas por los alumnos de cuarto en las tareas del mismo tipo propuestas desde los modelos de medida de magnitudes continuas. Estos resultados confirman que los alumnos transfieren conocimientos de la fracción que han adquirido desde los modelos de medida de magnitudes continuas al modelo discreto de la cardinalidad. Concluimos que la estabilidad de los modelos de medida favorece la transferencia de conocimientos.

g) El modelo masa no ha funcionado bien en la Primera Etapa de la Experimentación. Este modelo plantea grandes dificultades a los alumnos de cuarto curso de la Primera Etapa porque la percepción visual de las cantidades de masa les resulta muy compleja y les impide evaluar adecuadamente las cantidades de esta magnitud. Esta realidad aconsejó suprimir el modelo masa en la experimentación de la Segunda Etapa.

h) En cuarto curso, la enseñanza desde los modelos de medida de longitud y de superficie resulta insuficiente para que los alumnos gestionen la equivalencia de fracciones a nivel simbólico. Sin embargo, las actividades de construcción de fracciones equivalentes a una desde los modelos de medida con objetos tangibles sientan las bases conceptuales para que estos mismos alumnos, unos meses más tarde, tengan operativo el concepto de equivalencia para resolver, con símbolos, tareas de comparación de fracciones y problemas que modelizan determinadas operaciones con fracciones.

i) Los modelos de medida resultan adecuados para que los alumnos abandonen gradualmente las estrategias aditivas en beneficio de las estrategias multiplicativas que están vinculadas al concepto de equivalencia de fracciones.

j) Los modelos de medida de longitud y de superficie son apropiados para introducir el significado y cálculo de las operaciones con fracciones y con números decimales. En el caso de la división de una fracción y de número decimal entre un número natural el significado de medida se amplia con las situaciones fenomenológicas asociadas al cociente partitivo.

k) Los modelos de medida son adecuados para enseñar las relaciones de orden de fracciones y números decimales. Los alumnos de las dos Etapas obtienen porcentajes de éxito altos en las tareas de comparación de fracciones (ficha de evaluación nº 7) y de ordenación de números decimales (ficha de evaluación nº 19). Además, los alumnos son capaces de conjeturar reglas válidas para ordenar números decimales: el 50% de los alumnos de la Primera Etapa y el 75% de los de la Segunda Etapa tienen éxito al razonar de modo inductivo.

l) El modelo de cociente partitivo con la técnica del reparto en una sola fase resulta apropiado para introducir el concepto de fracción. La enseñanza de la fracción, desde el significado de cociente partitivo, permite superar dos obstáculos didácticos que tienen su origen en los conocimientos previos que los alumnos de quinto curso poseen acerca de:

- la división de naturales asociado a la idea de reparto de objetos discretos. La imposibilidad de repartir totalmente determinadas cantidades discretas y el conocimiento que poseen los alumnos de la división entera de naturales como operación que modeliza los repartos de cantidades discretas les lleva a pensar que es imposible completar el reparto de cantidades continuas hasta agotar la totalidad de la cantidad de magnitud continua.
- la fracción con el significado de medida. El conocimiento que poseen los alumnos de la fracción como medida de la cantidad les lleva a fijar su atención en el producto final del reparto y a obviar las condiciones iniciales (número de barras de regaliz y números de participantes) existentes en el momento anterior a la realización del reparto.

m) El modelo de cociente partitivo con la técnica del reparto en varias fases posibilita que los alumnos de quinto curso encuentran con facilidad el número decimal que expresa el resultado del reparto igualitario. La Unidad de Análisis de la Comprensión CCXI informa que los tres cuartos de los alumnos de la Primera Etapa y todos los alumnos de la Segunda Etapa encuentran el número decimal que expresa el resultado del reparto.

n) Los modelos de cociente partitivo han demostrado su potencialidad para alcanzar uno de los objetivos principales de nuestra investigación. En efecto, los resultados alcanzados por los alumnos de 5º curso, tanto en la Primera como en la Segunda Etapas, avalan el elevado porcentaje de estudiantes que establecen conexiones cognitivamente significativas entre las notaciones fraccionaria y decimal (Objetivo I.f)

o) Las representaciones gráficas juegan un papel relevante en la Propuesta Didáctica. Hemos constatado que las representaciones gráficas facilitan la transición entre las acciones realizadas con materiales manipulativos y la representación simbólica de la fracción. En la enseñanza del número decimal, las representaciones gráficas sobre la recta numérica ayudan a reinterpretar el número decimal como resultado de la medida de la cantidad de longitud dado que, inicialmente, el número decimal se introduce como resultado de un reparto igualitario.

p) A pesar de que el sistema de representación de la recta numérica resulta complejo a los alumno de quinto curso, las actividades de representación gráfica de fracciones y números decimales sobre este sistema de representación poseen un gran valor formativo. En efecto, de una parte, facilita la percepción del número decimal como medida de la cantidad de longitud y refuerza las conversiones decimales que subyacen en su estructura numérica; y, por otra parte, aporta información fiable del grado de comprensión que poseen los escolares sobre el significado del número decimal.

q) Los modelos de cociente partitivo son más complejos que los modelos de medida. La enseñanza implementada no ha aprovechado toda la potencialidad de los modelos de cociente partitivo, debido a que los alumnos de quinto curso no son capaces de poner en juego ideas de proporcionalidad que están vinculadas con el significado de razón del número racional. Así, por ejemplo, los alumnos tienen grandes dificultades para encontrar las condiciones iniciales del reparto cuyo resultado viene dado por una fracción o un número decimal.
La gestión de las estrategias de proporcionalidad es una habilidad que está en el límite de las capacidades cognitivas de los alumnos de quinto curso. En estas condiciones proponemos reforzar, en sexto curso de Educación Primaria, los modelos de reparto dotándolos de mayor funcionalidad al incorporar el significado de razón. Los modelos de razón están vinculados a la idea de proporcionalidad y aportan estrategias valiosas para encontrar las condiciones iniciales de un reparto, o bien, para conectar el número decimal y la representación fraccionaria.

VIII.4. Conclusiones sobre la comprensión de los contenidos

El objetivo II de nuestra investigación es la de ofrecer alternativas a la enseñanza habitual, sustentada en el significado parte-todo, que incrementen la comprensión de los escolares sobre el número racional. Las observaciones y reflexiones realizadas en las dos Etapas de nuestro trabajo han permitido poner de manifiesto potencialidades y limitaciones de la Propuesta Didáctica que, de forma abreviada, separamos en aspectos conceptuales y procedimentales.

VIII.4.1. Logros en la comprensión de los contenidos conceptuales

A partir de los resultados expuestos en el Capítulo VII, resumimos los aspectos más destacados sobre la comprensión de los escolares, atendiendo a los epígrafes contemplados en la propuesta didáctica.

• *Significado de la fracción como medida*

Los alumnos de cuarto curso construyen y dotan de sentido a la representación simbólica de la fracción al resolver un problema de medida que reproduce la génesis histórica del concepto de fracción. Y también demuestran una correcta evaluación semántica de los símbolos pues son 2/3 de estos alumnos los que saben construir cantidades de magnitud a partir del conocimiento de la representación fraccionaria que expresa su medida. Además, las ideas así construidas perduran en el tiempo, como ponen de manifiesto los resultados obtenidos en la *Pruebas de Evaluación realizadas al finalizar el Primer Ciclo* (Capítulo VII): seis meses más tarde los alumnos disponen de recursos conceptuales y procedimentales para medir cantidades de magnitud y evaluar semánticamente la fracción.

• *Significado de la fracción en el modelo de cardinalidad*

La naturaleza de la magnitud cardinalidad constituye un obstáculo epistemológico en la enseñanza de la fracción como medida de cantidades discretas, porque si se toma como unidad un elemento, la unidad básica, el problema de la medida del cardinal lo resuelve el conjunto de los números naturales. Este hecho provoca que los resultados obtenidos en las tareas de medida de la cardinalidad son levemente inferiores a los obtenidos en las tareas de medida de magnitudes continuas.

Hemos de dejar constancia de que la enseñanza previa de los modelos de medida de magnitudes continuas facilita la comprensión de la fracción como resultado de la medida de magnitudes discretas. Así, los alumnos de cuarto curso obtienen porcentajes cercanos al 80% al calcular el cardinal de una colección cuya medida viene expresada por una fracción, utilizando materiales tangibles, o bien representaciones gráficas, o bien representaciones simbólicas de la fracción

• *Significado de la fracción como cociente*

La mayoría de los alumnos de las dos Etapas resuelven las tareas de reparto con éxito y son capaces de encontrar la representación fraccionaria que indica el resultado de un reparto igualitario cuando se ayudan de materiales manipulativos y reconocen la necesidad de fraccionar las barras (tiras de papel) en partes iguales como una actividad previa a las acciones de repartir y medir.
Los alumnos de quinto curso vinculan de modo natural la fracción como la medida de la cantidad de longitud que se obtiene en el reparto igualitario realizado en una fase; sin embargo, perciben con menor nitidez la fracción con sentido descriptivo de las condiciones iniciales del reparto.

• *Equivalencia de fracciones*

Los modelos de medida facilitan la comprensión del significado de equivalencia de fracciones, pues perciben que una misma cantidad de magnitud admite expresiones simbólicas diferentes, dependiendo del fraccionamiento de la unidad elegido. Es más, buena parte de los alumnos de cuarto curso de las dos Etapas son capaces de obtener fracciones equivalentes a una dada con la ayuda de materiales tangibles cuyo atributo reconocible es, principalmente, la cantidad de longitud o superficie. Sin embargo, la gestión de la equivalencia de fracciones, mediante sus representaciones simbólicas, en tareas de comparar cantidades de magnitud presenta grandes dificultades a los alumnos de cuarto curso puesto que la tarea de buscar fracciones equivalentes a una dada es más exigente que la acción de medir; en efecto, esta tarea les obliga a evaluar semánticamente la representación fraccionaria y a percibir la cantidad descompuesta de otro modo distinto del que inicialmente han conceptualizado.

Nuestro estudio confirma que es prematuro plantear situaciones de enseñanza a los alumnos de cuarto curso de Educación Primaria en las que se trabaje el concepto de equivalencia de fracciones a nivel simbólico. En este curso deberían limitarse las tareas al reconocimiento y comprobación de la equivalencia de fracciones utilizado material manipulativo o representaciones gráficas; y esperar al siguiente curso para que las capacidades de los alumnos les permitan la gestión simbólica de la equivalencia de fracciones.

• *Orden entre fracciones con significado de medida*

Los alumnos de cuarto curso dan significado a la comparación de fracciones como comparación de la medida de cantidades de magnitud, obteniendo porcentajes de éxito próximos al 60% en este tipo de tareas. Además, realizan representaciones gráficas adecuadas de las cantidades que expresan las fracciones y establecen razonamientos sustentados en la idea de fracción.

Los escolares de cuarto curso de Educación Primaria no son capaces de utilizar la equivalencia de fracciones en las tareas de comparación de fracciones, mientras que los dos tercios de los alumnos de quinto curso son capaces de gestionar correctamente esta estrategia.

• *Orden entre fracciones con significado de cociente*

Los alumnos de quinto curso de las dos Etapas de la Experimentación obtienen rendimientos superiores al 70% al comparar fracciones con el significado de cociente partitivo. La utilización de la equivalencia de fracciones resulta ser la estrategia más frecuente y con la que alcanzan porcentajes de éxito elevados: el 55% de los alumnos de la Primera Etapa y el 90% de los de la Segunda Etapa utilizan la equivalencia para comparar las fracciones que expresan los resultado de los repartos implicados en la comparación.
Además, los alumnos transfieren el significado de la relación de orden de fracciones en el modelo de medida de cantidades de longitud a la relación de orden de fracciones en el modelo de cociente partitivo: el 60% de los alumnos de la Primera Etapa y todos los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación vinculan el orden de fracciones con la comparación entre las medidas de las cantidades de longitud que expresan resultados de repartos igualitarios.

Otras estrategias de gran riqueza conceptual como la de “compartir o socializar repartos” o utilizar el concepto de equivalencia de repartos resultan muy complejas para los alumnos porque tales estrategias se fundamentan en ideas de proporcionalidad que caen fuera de las capacidades cognitivas de la mayoría de estos escolares.

• *Operaciones con fracciones*

Los alumnos de quinto curso de Educación Primaria comprenden las acciones que plantean los enunciados de las situaciones problemáticas de medida: la suma y resta de fracciones se dota de significado de adición, sustracción o comparación de cantidades de magnitud; la multiplicación de una fracción por un natural tiene el significado de reiteración de una misma cantidad de magnitud; y la división de una fracción por un natural tiene el sentido de disminución reiterada o reparto igualitario de cantidades de magnitud. El siguiente cuadro resume los porcentajes de respuestas correctas de los alumnos, aunque resuelvan el problema mediante procedimientos informales, sin utilizar las reglas convencionales de cálculo simbólico:

Suma Etapa 1//Etapa 2	Resta Etapa 1//Etapa 2	Multiplicación Etapa 1//Etapa 2	División Etapa 1//Etapa 2
75 // 67	63 // 67	73 // 72	73 // 67

Tabla VIII.1. Tasa de éxito en las Fichas de Evaluación Nº 10, 11, 12 y 13

También cabe destacar que los alumnos de quinto curso saben gestionar las magnitudes escolares implicadas en los problemas aritméticos: longitud, superficie, peso, capacidad y tiempo. Los alumnos encuentran de gran ayuda representar gráficamente estas cantidades de magnitud como si fueran cantidades de longitud o de superficie.

• *Representación polinómica decimal*

El 80% de los alumnos de la Primera Etapa y el 90% de los alumnos de la Segunda Etapa saben encontrar la representación polinómica decimal del reparto, al aplicar la técnica del reparto igualitario por fases y con fraccionamientos sistemáticos decimales de la unidad. Las representaciones gráficas se muestran muy eficaces porque evitan la utilización de un material tangible de difícil manipulación en el fraccionamiento en 100 partes iguales.

Es de destacar que la utilización de modelos estables contribuye a la mejora de la comprensión de los alumnos. Conjeturamos que los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación han obtenido mejores resultados que los alumnos de la Primera Etapa porque, en el tercer curso de Educación Primaria, han recibido enseñanza de la división de números naturales desde el modelo de cociente partitivo modificado para el caso de magnitudes discretas.

• *Significado del número decimal*

Los alumnos de las dos Etapas de la Experimentación perciben el número decimal como agregación de fracciones decimales que provienen de un reparto efectuado en varias fases: el 73% de los alumnos de la Primera Etapa y 94% de los alumnos de la Segunda Etapa encuentran el número decimal que expresa el resultado del reparto igualitario de 17 barras de regaliz entre 8 niños. Además, los alumnos aportan argumentaciones adecuadas sobre el significado del número decimal y de las cifras que lo componen: el 60% de los alumnos de la Primera Etapa y el 72% de los alumnos de la Segunda Etapa.

En esta investigación se ha puesto de manifiesto que las representaciones del número decimal sobre la recta numérica resultan adecuadas para dar significado al número decimal como resultado de la medida directa de cantidades de la magnitud longitud. Ahora bien, el rendimiento de los alumnos en este tipo de tareas depende del número de cifras decimales puestas en juego: mientras que el 80% hace representaciones correctas con números de una cifra decimal, tan sólo el 40% lo hace correctamente si se trata de un número con tres cifras decimales.

• *Conexión entre el número decimal y la fracción*

El 75% de los alumnos de la Primera Etapa y casi todos los alumnos de la Segunda Etapa saben expresar el número decimal como suma de fracciones decimales. Los alumnos han utilizado básicamente dos estrategias: una, de carácter informal y de ámbito local, consiste en recordar la representación fraccionaria de los números decimales más comunes; la otra, de carácter formal y de ámbito general, consiste en expresar el número decimal por medio de su Representación Polinómica Decimal y, después, operar la suma de fracciones decimales.

En ninguno de las dos Etapas ha aparecido la estrategia sustentada en el significado de reparto y en la idea de proporcionalidad que consiste en reiterar el reparto, expresado por el número decimal, una potencia de diez adecuada hasta encontrar dos números naturales que informan de las condiciones iniciales del reparto y, por lo tanto, de los términos de fracción: número entero de barras de regaliz y de número de participantes en el reparto.

En el trabajo se ha constatado que la adecuada gestión de los procedimientos simbólicos de paso de un sistema de representación a otro precisa de períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo y que nuestra implementación de aula no contempla porque se respeta la temporalización de la programación del Centro.

• *Orden entre decimales*

Los alumnos de las dos Etapas de Experimentación obtienen porcentajes de éxito altos, cercanos al 90%, en la tareas de ordenación de números decimales, lo que pone de manifiesto una elevada comprensión del número decimal. Es más, se constata la escasa frecuencia con que aparece la estrategia errónea que consiste utilizar el número de cifras decimales que poseen los números a comparar.

La tarea de conjeturar reglas válidas para ordenar números decimales favorece la aparición de tres estrategias correctas que refuerzan la representación polinómica decimal que subyace al número decimal:

- Comparar los decimales, cifra a cifra, comenzando por las unidades de mayor orden.
- Colocar los números en columna alineados por la coma.
- Añadir ceros a la parte decimal para que todos tengan el mismo número de cifras decimales.

También queremos destacar que el criterio metodológico de proponer que los alumnos inventen reglas para ordenar números decimales se ha mostrado eficaz por motivos de naturaleza diversa: favorece la creatividad de los alumnos, mejora la capacidad de comunicación de ideas matemáticas, posibilita una reflexión de los procesos mentales puestos en juego y, lo que es más importante, da la oportunidad a los alumnos de modificar su percepción de las matemáticas como ciencia hermética.

• *Operaciones con decimales*

Los alumnos de quinto curso de las dos Etapas de Experimentación identifican las operaciones de suma y resta de decimales, así como las de multiplicación y división de un decimal por un natural porque el significado de estas operaciones cubre la misma fenomenología que la de las operaciones con fracciones. Los porcentajes de éxito para todas las operaciones son superiores al 80%.

La similitud entre los algoritmos de los números naturales y los de los números decimales facilita el manejo de la técnica pero obstaculiza la justificación de los algoritmos de los números decimales. Los alumnos tienen dificultades para justificar los procedimientos de cálculo con decimales porque:

1º no perciben la necesidad de justificar los algoritmos de cálculo que conocen y saben aplicar debido a su parecido con los algoritmos para números naturales, y

2º desconocen la justificación de los algoritmos de las operaciones con números naturales, salvo el de la suma de naturales.

Los alumnos comprenden la justificación del algoritmo usual de la división porque se fundamenta en el significado de cociente partitivo. Sin embargo, tan solo la tercera parte de los alumnos justifican el procedimiento de cálculo porque descuidan la simbolización del tamaño de las cantidades que van a repartir, y del número y del tamaño de las partes que obtienen en cada fase del reparto.

VIII.4.2. Logros en la comprensión de los contenidos procedimentales

• *Técnicas de cálculo*

a) Los alumnos de cuarto curso no utilizan el concepto de equivalencia en las tareas de comparación de fracciones; sin embargo estos mismos alumnos, en el siguiente curso, son capaces de gestionar este concepto a nivel simbólico. Esta diferencia se produce porque en quinto curso confluyen dos factores:

1º Una mayor experiencia en la enseñanza desde los modelos de medida, implementada en cuarto y quinto curso,

2º La evolución natural del desarrollo cognitivo de los escolares.

Respecto a la utilización del lenguaje simbólico hemos constatado que las exigencias sintácticas resultan complejas a los escolares de estas edades, en parte debido a su escasa experiencia en el manejo del lenguaje simbólico. En concreto hemos detectado que los alumnos de quinto curso confunden la operación multiplicación de una fracción por un natural con la técnica de multiplicar el numerador y denominador de una fracción para obtener una equivalente a ésta (ver Gráfico VII.9) También cabe reseñar que los alumnos perciben con mayor dificultad la técnica de simplificación de fracciones que la de amplificación de fracciones, pues la descomposición de los naturales en factores primos es un contenido desconocen.

b) El modelo de medida permite que los alumnos de quinto curso conjeturen las técnicas algorítmicas de las operaciones:

- En el caso de la suma y de la resta, comprenden que la medida de las cantidades que se agregan o se separan deben están referidas a una misma subunidad, y esto exige utilizar la equivalencia de fracciones.
- La multiplicación por un número natural se percibe con facilidad como la suma reiterada de la misma cantidad de magnitud.
- En el caso de la división de una fracción entre un número natural los alumnos no conjeturan la técnica de cálculo pero comprenden la necesidad de descomponer la cantidad a repartir en tantas subunidades como indica el número natural, lo que obliga a utilizar el concepto de equivalencia de fracciones.

La pauta metodológica de afrontar la resolución de los problemas sin conocer previamente los algoritmos de cálculo de las operaciones se ha mostrado eficaz porque los alumnos apenas cometen errores conceptuales como sumar o restar numeradores y denominadores entre sí. Ello se debe, en buena parte, a que las representaciones simbólicas que gestionan estos alumnos tienen un referente concreto en las acciones físicas que han realizado en el modelo de aprendizaje.

• *Razonamiento inductivo*

Situada en el paradigma constructivista, esta Propuesta Didáctica ha tomado la opción de que los alumnos conjeturen los contenidos procedimentales, es decir, las reglas para operar y para comparar fracciones y números decimales. Con esta finalidad, se presentan a los alumnos tareas que posibiliten conjeturar reglas a partir de una amplia experimentación con casos particulares; lo que conlleva mayor relevancia de las reflexiones y explicaciones de los alumnos y una reducción de las intervenciones de los profesores. La mejora en el razonamiento inductivo de los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación se concreta en los siguientes logros:

1. Uno de cada tres alumnos formulan la regla simbólica para calcular “la fracción de una cantidad” asociada a la medida de la cardinalidad.
2. Los dos tercios de los alumnos conjeturan una regla correcta para comparar repartos con distinto número de participantes e igual número de objetos a repartir. En estas situaciones de comparación de fracciones los alumnos enuncian reglas del tipo: “*cuando tienen el mismo denominador es mayor el que tiene mayor numerador*”
3. La mitad de los alumnos conjeturan la regla para "situar la coma" en el caso de la multiplicación de un número decimal por un natural.

4. Las dos tercios de los alumnos son capaces de conjeturar la regla para "situar la coma" en el caso de la división de un natural por una potencia de diez.
5. La mayoría de los alumnos han sabido enunciar reglas correctas para ordenar números decimales

• Destrezas

Las representaciones gráficas han jugado un papel fundamental en el proceso de enseñanza porque favorecen el paso de las acciones manipulativas a las representaciones simbólicas. De modo progresivo, conforme van resolviendo nuevas tareas, los alumnos tienden a abandonar las representaciones gráficas en favor de las representaciones simbólicas.
La recta numérica es un sistema de representación del número racional positivo que presenta la potencialidad de conceptualizar la fracción y el número decimal como medida de cantidades de longitud. Se trata de un sistema de representación complejo cuyo aprendizaje precisa de una secuencia de enseñanza más larga que la implementada en las dos Etapas de la Experimentación.

• Estrategias

a) Constituye una meta esencial del proceso instructivo que los escolares utilicen correctamente los sistemas simbólicos. En este camino los alumnos comienzan por utilizar materiales tangibles y, con mayor o menor rapidez, los sustituyen por representaciones gráficas. En este trabajo hemos constatado que este recorrido se puede acelerar introduciendo cambios metodológicos, como puede constatarse en los resultados obtenidos por los escolares al resolver la misma tarea, la Ficha de Evaluación nº 6.

- En la Primera Etapa un número importante de alumnos resuelve la Ficha nº 6 con ayuda de materiales tangibles o representaciones gráficas, siendo menor el número de estudiantes que utilizan las representaciones simbólicas:

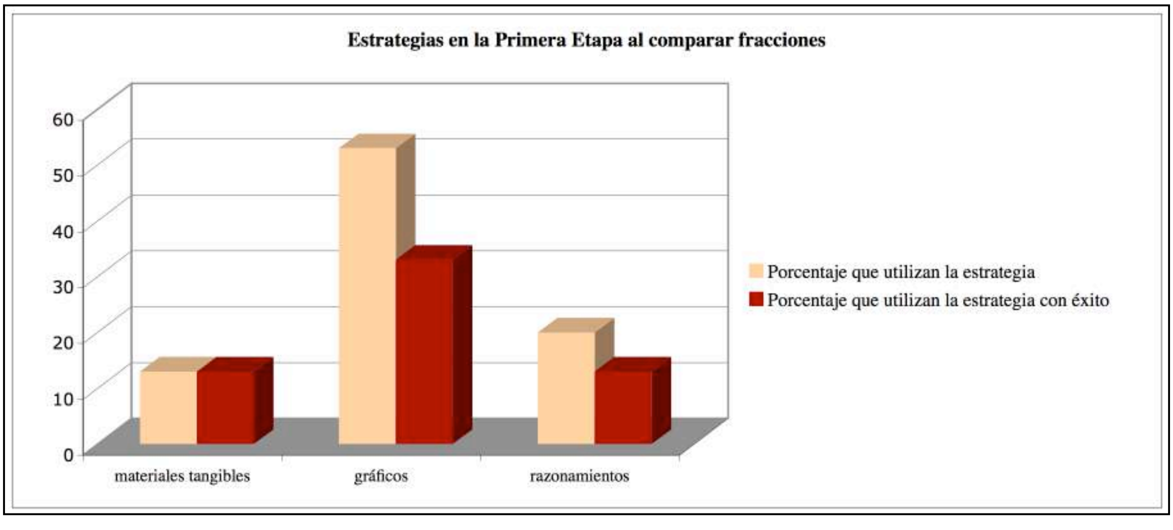


Gráfico VIII.1. Estrategias que utilizan los alumnos de la Primera Etapa en la Ficha de Evaluación Nº 6

- En la Segunda Etapa se produjo un cambio metodológico: recomendar a los alumnos el uso de representaciones gráficas y simbólicas, y restringir el uso de materiales tangibles solo en el caso de que los alumnos lo consideren estrictamente necesario:

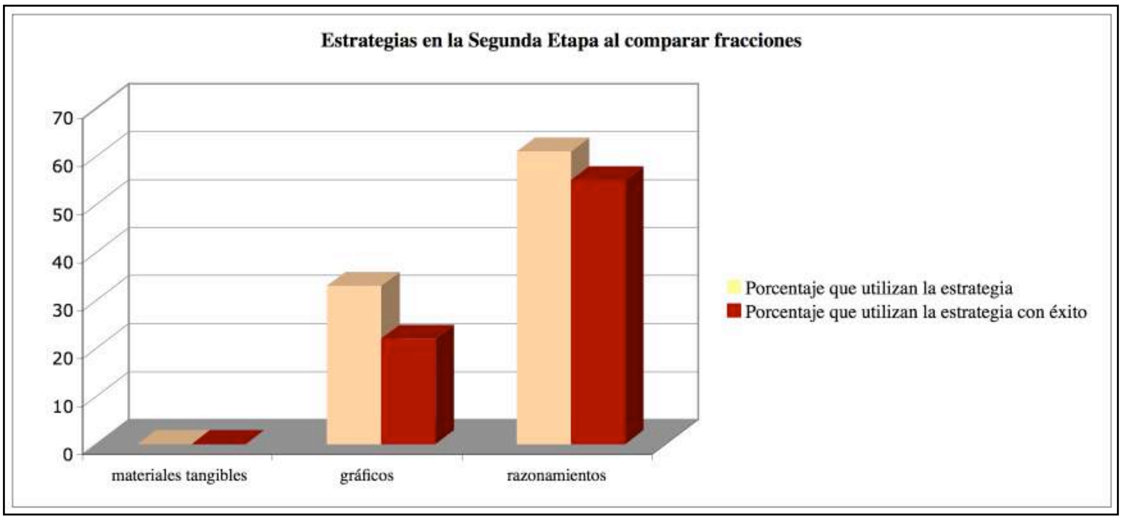


Gráfico VIII.2. Estrategias que utilizan los alumnos de la Segunda Etapa en la Ficha de Evaluación Nº 6

Como puede constatarse, el cambio metodológico produjo un abandono general del uso de materiales y un incremento notable de la utilización del lenguaje simbólico. Además, el hecho de que los alumnos de esta Segunda Etapa obtengan porcentajes de éxito superiores a los de la Primera Etapa nos lleva a pensar que los alumnos por sí solos avanzan muy lentamente hacia el uso de las representaciones simbólicas, que son de mayor interés porque implican un grado mayor de riqueza conceptual.

b) La edad y un mayor conocimiento conceptual hacen avanzar en la búsqueda de estrategias que resulten más económicas en cuanto al tiempo y al trabajo. Así, los alumnos de cuarto curso para comparar fracciones representan física o gráficamente las cantidades, o bien razonan a partir de la composición o descomposición de las cantidades implicadas. Sin embargo, los alumnos de quinto curso realizan esta misma tarea de comparar fracciones utilizando, de forma mayoritaria, la estrategia basada en la equivalencia de fracciones. Es evidente que la utilización del lenguaje simbólico acorta los tiempos y el trabajo necesarios para resolver la tarea recurriendo al uso de materiales o representaciones gráficas

c) Las estrategias que utilizan los alumnos de quinto curso cuando operan con fracciones, al resolver los problemas planteados, evolucionan desde la utilización de materiales tangibles hasta el uso de representaciones simbólicas, según va avanzando la secuencia de enseñanza. Además, se pone de manifiesto que los materiales tangibles se utilizan en las operaciones de suma y resta, pero su uso en la multiplicación y división por un número natural conlleva mayores dificultades de gestión.

El gráfico siguiente muestra los porcentajes de los alumnos de quinto curso de la Primera Etapa que utilizan, con éxito, las estrategias en la resolución de los problemas con fracciones:

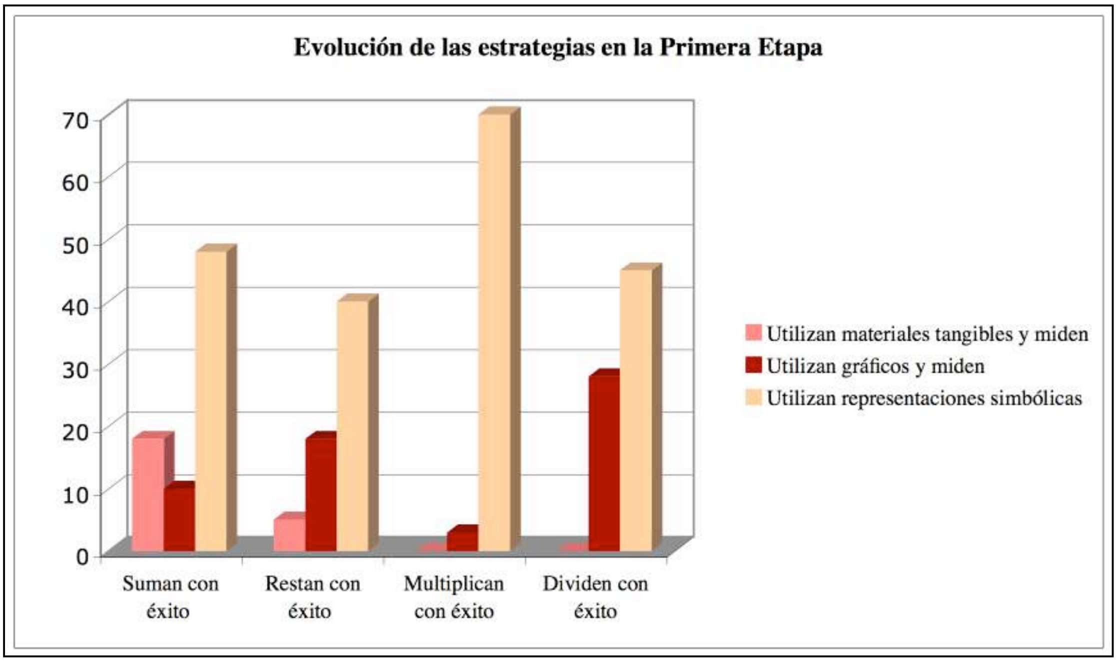


Gráfico VIII.3. Evolución de las estrategias de los alumnos de la Primera Etapa

Tanto en esta Primera Etapa como en la Segunda Etapa se observa una evolución muy clara hacia el uso paulatino de representaciones simbólicas en detrimento de las estrategias basadas en la medida, bien con objetos tangibles o bien con representaciones gráficas.

VIII.4.3. Dificultades en la comprensión de los contenidos

La implementación de la Propuesta Didáctica ha puesto de manifiesto que los alumnos encuentran dificultades en la comprensión de los contenidos. En las dos Etapas de la Experimentación se ha constatado que estas dificultades provienen de la existencia de obstáculos cognitivos, epistemológicos y didácticos, tal y como queda sintetizado en los siguientes epígrafes:

a) Los alumnos de cuarto curso no perciben por sí mismos la necesidad de fraccionar la unidad en un número entero de partes iguales para proceder a calcular la medida de una cantidad de longitud; para resolver las tareas propuestas consideran suficiente hacer aproximaciones “groseras” de un número entero de unidades.

b) Los alumnos tienen grandes dificultades para evaluar cantidades de masa pues la percepción visual de la cantidad se torna muy compleja. Y también resulta compleja la acción de fraccionar en partes iguales una cantidad de masa, ya que ello exige una sucesión de pruebas de ensayo y error en una balanza de dos platillos.

c) La mayoría de los alumnos de cuarto curso no son capaces de conjeturar una regla adecuada para obtener fracciones equivalentes a una dada y, cuando lo hacen, optan por estrategias aditivas en lugar de estrategias multiplicativas. Además, para estos alumnos la gestión simbólica de la equivalencia de fracciones en las tareas de comparación de fracciones es una habilidad que se sitúa en el límite de sus capacidades cognitivas.

d) La tarea de encuadrar fracciones entre dos dadas resulta muy compleja para los alumnos de cuarto curso pues no alcanzan a entender las exigencias de dichas tareas y, en consecuencia, obtienen tasas de éxito muy bajas porque:

1º La tarea se presenta descontextualizada, lo que ocasiona que los escolares no razonen en términos del modelo,

2º La resolución de la tarea exige establecer dos comparaciones en la búsqueda de cada fracción, y

3º Los alumnos no tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones y esto les impide encontrar fracciones equivalentes con denominador o numerador común.

e) La enseñanza de la fracción como medida de la cardinalidad plantea a los alumnos de cuarto curso mayores dificultades que la medida de magnitudes continuas. Su enseñanza constituye un obstáculo epistemológico derivado de las características especiales de la medida de magnitudes discretas, provocando errores que ponen de manifiesto la confusión que se crea en el alumno entre:

1º la unidad de medida (caja o bolsa de objetos) y la unidad básica (el objeto discreto)

2º el fraccionamiento de la unidad y el tamaño de las subunidades.

f) La enseñanza de la fracción desde el modelo de cociente partitivo plantea, a los alumnos de quinto curso, una superación de los obstáculos cognitivos forjados en sus experiencias previas que les exigen:

- abandonar la idea, que proviene del trabajo con números naturales, de que el reparto solamente tiene sentido en el caso de magnitudes discretas.
- asumir que un mismo concepto matemático, en concreto la idea de fracción, tiene dos interpretaciones diferenciadas: como medida de un cantidad de longitud y como resultado de un reparto igualitario.

g) Las tareas de búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto a partir del conocimiento del resultado del mismo, ya sea en como de fracción o como expresión decimal, presenta grandes dificultades a los alumnos, porque implican ideas de proporcionalidad que les resultan muy complejas.

h) Los alumnos de quinto curso no son capaces de gestionar la estrategia de "compartir o socializar repartos" en las tareas de comparación de repartos igualitarios, debido a las dificultades que les plantea integrar las acciones aditivas, que consisten en agregar personas y barras, con las acciones multiplicativas o de razón invariante del número de barras por unidad de persona.

i) Las representaciones gráficas sobre la recta numérica que efectúan los alumnos de quinto curso ponen al descubierto dificultades en la gestión de los órdenes de unidades del número decimal inferiores a la décima. Estas dificultades son inherentes a la naturaleza de la notación decimal, pues exige fraccionamientos sucesivos en diez partes iguales, lo que implica trabajar con puntos de la recta que están muy próximos entre si.

j) Los alumnos de quinto curso saben expresar los números decimales mediante su Representación Polinómica Decimal asociada; sin embargo, encuentran más dificultades cuando convierten, en fracción, números decimales que tienen más de una cifra decimal. Buena parte de las causas de estos errores se deben a dificultades en la gestión simbólica de las operaciones con fracciones decimales.

l) La justificación de los algoritmos de cálculo de las operaciones aritméticas con números decimales constituye un obstáculo didáctico ocasionado por su semejanza con los algoritmos de números naturales y, también, por el desconocimiento que poseen los alumnos de las propiedades que justifican los algoritmos con números naturales.

VIII.5. Comparación entre la Primera Etapa y la Segunda Etapa

El diseño experimental contempla la realización de dos Etapas, la Segunda de los cuales introduce algunas modificaciones a la Propuesta desarrollada en la Primera Etapa y que han sido comentadas con anterioridad. Las modificaciones afectan, principalmente, a algunos contenidos, a la metodología y a los materiales utilizados. Estas modificaciones han influido en la comprensión de los alumnos en el sentido que se indica seguidamente:

1. Los alumnos de la Segunda Etapa incrementan su comprensión sobre el denominador de la fracción; pues fortalecen la conexión entre la subunidad utilizada para medir y la unidad de magnitud.

En la Segunda Etapa, se sustituyen las cañas de plástico por tiras de papel. Con este nuevo material, los alumnos no disponen de subunidades ya preparadas, sino que tienen que ser ellos mismos los que se ven obligados a construir las subunidades necesarias para la medida. Ello les obliga a planificar el fraccionamiento de la unidad al realizar cada tarea de medida, y también a ser sistemáticos en la búsqueda de la subunidad adecuada, de modo que comienzan probando con unidades enteras y después con fraccionamientos cada vez más pequeños de la unidad de medida. Esta forma diferente de gestionar el material incide en la relación entre el fraccionamiento y el tamaño, respecto de la unidad, de cada una de las partes o subunidades; aunque retrasa en algunas sesiones la aparición de la equivalencia de fracciones.

2. La utilización de representaciones gráficas incrementa la comprensión de los alumnos de la Segunda Etapa sobre el papel que juega el fraccionamiento en las tareas de medida.

En esta etapa se introducen dos nuevas tareas, denominadas Ficha de Evaluación nº 2BIS y Ficha de Evaluación nº 4, que proponen acciones de medida y de evaluación semántica de la fracción que mide cantidades de longitud y de superficie. En la resolución de dichas tareas se recomienda a los alumnos que no utilicen los materiales tangibles, por lo que éstos se ven forzados a utilizar representaciones gráficas. Y ello obliga a simbolizar la unidad en el papel, lo que implica modificar el tamaño de la misma. Este hecho pone de manifiesto el carácter arbitrario, pero a la vez fundamental, de la unidad de medida: los alumnos comprenden que lo importante son las acciones de fraccionamiento que realizan sobre la unidad de medida con independencia de la cantidad de magnitud que ésta posea.

3. Los alumnos de cuarto curso tienen dificultades para gestionar, con representaciones simbólicas, la búsqueda de fracciones equivalentes a una dada.

En la planificación de la Segunda Etapa correspondiente a cuarto curso se introduce una nueva ficha de trabajo (nº 21) para ejercitar la técnica simbólica de obtención de fracciones equivalentes a otras dadas. Con la inclusión de esta tarea se pretende indagar si los alumnos de este curso son capaces de aplicar la equivalencia de fracciones en las tareas posteriores de comparación de fracciones. La respuesta es negativa, de modo que los alumnos de la Segunda Etapa se comportan de modo similar a los de la Primera Etapa: hay que esperar a que, en quinto curso, el desarrollo de las capacidades cognitivas de éstos les permitan gestionar simbólicamente el concepto de equivalencia de fracciones.

4. Los alumnos de la Segunda Etapa muestran mayor comprensión de las técnicas del reparto igualitario y de la representación del resultado del mismo.

En esta Segunda Etapa se introducen modificaciones para la simbolización del reparto en una fase: se sustituye la caja de la división utilizada en la Primera Etapa por el uso de dos puntos. Además, se distinguen con nitidez tres momentos en la simbolización del proceso de reparto: expresar las condiciones del reparto a realizar, indicar el proceso de realización del reparto y, finalmente, representar el resultado de las acciones realizadas. Los resultados de la Unidad de Análisis de la Comprensión CC.VIII.2 indican que los alumnos de esta etapa alcanzan un grado más alto de comprensión de los procesos implicados y de la forma de expresarlos.

5. Suprimir las tareas de encontrar las condiciones iniciales del reparto conocida la representación decimal del resultado del mismo tiene escasa incidencia en el desarrollo de la Propuesta Didáctica.

La tarea que consiste en buscar las condiciones iniciales del reparto cuyo resultado es conocido y viene dado por un número decimal plantea serias dificultades a los alumnos de quinto curso, pues obliga a los escolares a significar el número decimal como una razón, es decir, como el invariante de una situación de proporcionalidad entre las dos cantidades de magnitud que intervienen en el reparto: el número de barras de regaliz y el número de personas. El hecho de suprimir este tipo de tareas en la Segunda Etapa Experimental, con la intención de que se pospongan hasta que los alumnos estudien el significado del número racional positivo como razón, no tiene repercusiones significativas en la consecución de los objetivos de la propuesta didáctica; en efecto, los alumnos de esta etapa prosiguen los aprendizajes con un rendimiento similar al que muestran los alumnos de la Primara Etapa.

6. Un grado más alto en la comprensión del cociente de números naturales incrementa el rendimiento de los alumnos en el significado y uso del número decimal.

Los alumnos de la Segunda Etapa, en tercer curso de Educación Primaria, recibieron enseñanza específica de la división de números naturales desde el modelo de cociente partitivo modificado para el caso de magnitudes discretas. Estos mismos alumnos, en quinto curso, obtienen un rendimiento mayor que los alumnos de la Primera Etapa en las tareas de encontrar y gestionar la Representación Polinómica Decimal de un reparto, pues perciben que esta Representación amplía el sentido de la división entera de naturales al caso de magnitudes continuas, especialmente la longitud. En estas condiciones, los alumnos de la citada Segunda Etapa se encuentran con una mejor disposición de entender y utilizar los números decimales.

7. Los alumnos de la Segunda Etapa muestran un mayor grado de competencia en el uso de las representaciones simbólicas.

El Equipo Investigador toma la decisión de restringir el uso de materiales tangibles y recomendar su uso, solamente, en el caso de que los alumnos no sepan utilizar otras estrategias de mayor riqueza conceptual. Esta decisión se adopta para evitar el fenómeno pernicioso, observado en la fase de acción de la Primera Etapa, que consiste en que algunos alumnos que son capaces de gestionar con cálculos simbólicos la equivalencia de fracciones prefieren utilizar materiales con la consiguiente limitación de sus aprendizajes. Esta modificación metodológica propicia la aparición de estrategias de carácter simbólico y, en consecuencia, los alumnos de la Segunda Etapa obtienen mejores porcentajes de éxito que los de la Primera Etapa al gestionar estas estrategias.

8. Los alumnos de cuarto y quinto curso son capaces de conjeturar reglas de carácter simbólico si disponen de abundante base experimental para detectar propiedades y reglas que siguen una determinada pauta o patrón.

En la Segunda Etapa se pretende dotar a los alumnos de mayor capacidad participativa a costa de que el profesor intervenga menos en los momentos de exploración, de manera que sean los alumnos quienes conjeturen las reglas y propiedades. La actuación deliberada del profesor de posponer la institucionalización de los contenidos hasta que los alumnos hayan hecho una interpretación personal de los mismos, favorece la aparición de valiosas ideas informales cuya gestión en el aula va a repercutir positivamente en la comprensión de los conceptos puestos en juego. Además, se potencia la comunicación de las ideas matemáticas, se favorece el uso de argumentos correctamente secuenciados y se desarrolla el pensamiento inductivo de los alumnos.

VIII.6. Perspectivas de futuro

El objetivo principal de esta investigación es encontrar alternativas a la enseñanza tradicional de los números racionales positivos. Pero la Propuesta Didáctica elaborada e implementada ha dejado algunas cuestiones para profundizar y que se han descrito como dificultades de comprensión. Este es un campo de trabajo al que se pueden dirigir futuras investigaciones, como las que señalamos a continuación:

1. Integrar el currículum de la aritmética escolar

   Se trata de elaborar propuestas didácticas de ámbito más general, pues el aprendizaje aritmético integra viejos y nuevos conocimientos. En este sentido, y como se puso de manifiesto en la Segunda Etapa, la comprensión de los alumnos se incrementa al mejorar los contenidos conceptuales y procedimentales relativos al número natural.
   En este sentido, apuntamos dos vías para revisar y modificar en la enseñanza habitual del número natural:

   - Incidir en los aspectos fundamentales de la medida de cantidades de magnitud que afectan a la naturaleza de magnitud y a las tareas y decisiones implicadas en su medida. El énfasis hay que ponerlo más en la actividad de medir (identificar la magnitud, elegir una unidad de medida, arbitrar una técnica para realizar la medida, comunicar el resultado), que en la actividad de realizar conversiones entre distintos órdenes de unidades del Sistema Métrico Decimal.
   - El significado de la división de naturales como reparto, así como la justificación del algoritmo de la división de naturales, son conocimientos imprescindibles para comprender las técnicas de reparto de magnitudes continuas, así como el significado de la fracción como cociente. Sin una buena comprensión de estos aspectos, la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal no será cognitivamente significativa para los alumnos.

2. Realizar una revisión crítica de los resultados aparecidos al implementar nuestra Propuesta de Enseñanza.

   En nuestra investigación se ha puesto de manifiesto que los cambios en los contenidos y en la metodología han mejorado la comprensión de los alumnos de la Segunda Etapa. Como era de esperar, todas las propuestas didácticas son mejorables, y la que se ha implementado en esta propuesta no es la excepción. En este sentido, indicamos algunas vías por las que podría discurrir esta revisión:

   - *Acomodar los tiempos a la instrucción*. Tal y como se ha diseñado e implementado nuestra Propuesta Didáctica se han manifestado algunas urgencias docentes producidas por la necesidad de ajustar la Propuesta a la planificación del Centro. En consecuencia, habría que analizar los tiempos necesarios para que los alumnos completen todas la actividades que garanticen la mayor comprensión de los contenidos puestos en juego.
   - *Buscar los materiales más eficaces*. En esta investigación se ha utilizado materiales de distinta naturaleza, alguno de los cuales ya fue excluido en el Segunda Etapa de la Experimentación, como el caso de los paquetes de plastilina; por el contrario, otros materiales (como los listones de madera y tiras

de papel para el modelo de longitud, y la cartulina y folios para el modelo de superficie) se han mostrado muy eficaces. Pero queda la posibilidad de encontrar otros materiales, que resulten de fácil manipulación por parte de los alumnos, y que se muestren más eficaces para la instrucción. En todo caso, hay que tener presente que esta Propuesta Didáctica se sustenta en la utilización de materiales de este tipo y que, en consecuencia, cuanto más adecuados sean los materiales más se facilitará la comprensión de los alumnos.

- *Adaptar la secuenciación de los contenidos a las capacidades cognitivas de los alumnos*. En el diseño e implementación de nuestra Propuesta Didáctica pusimos el énfasis en los significados del número racional. A cambio, debimos ajustar la secuenciación de los contenidos a la programación del Centro. Nuestra experimentación ha puesto de manifiesto que hay contenidos, como la equivalencia de fracciones, que a los alumnos les resulta de difícil comprensión en un curso determinado, pero al curso siguiente han desaparecido muchas de esas dificultades.

3. Integrar la proporcionalidad aritmética.

Completar el estudio del número racional positivo conlleva integrar en este ámbito el tema de la proporcionalidad aritmética. En efecto, entendemos que la idea de razón hay que situarla en la actividad de medir; ciertamente no se trata de una medida directa porque intervienen dos cantidades de dos magnitudes que pueden ser diferentes. Se trata, por tanto, de una medida que tiene lugar en la mente; es la medida de la cantidad de una magnitud que se compara o relaciona con una unidad de otra magnitud. De este modo, el concepto de proporción se identifica con el de equivalencia de fracciones, con la igualdad entre la misma cantidad de magnitud expresada de dos formas diferentes.

Esta investigación permitiría cubrir las necesidades de formación aritmética de los escolares; además de proporcionarles una visión de las matemáticas más compacta y de mostrar que las técnicas, sobre todo la regla de tres, tienen un justificación desde los conceptos y procedimientos del número racional.

Se trata, por tanto, de un estudio que implique la elaboración de una Propuesta Didáctica que tome como punto de partida los conocimientos sobre el número racional construidos a partir de los modelos de medida y de cociente partitivo, que diseñe las actividades y recursos necesarios para la instrucción sobre la proporcionalidad, que implemente la propuesta así elaborada, que diseñe los instrumentos necesarios para recoger y analizar toda la información producida al implementar dicha Propuesta, y que obtenga conclusiones acerca de su viabilidad, así como de las repercusiones que produce en la comprensión de los alumnos. Es de esperar que los resultados favorezcan la mejor formación matemática de los futuros ciudadanos.

4. Implicar a los Maestros

   Esta Propuesta nace con la idea de ofrecer una alternativa a la enseñanza del número racional sustentada en el significado parte-todo. En los Capítulos II y III ya quedaron recogidos los obstáculos generados por ese significado, y cómo no son significativamente relevantes las modificaciones que se introducen a dicho significado para superar tales obstáculos. Y como, a pesar de los obstáculos que genera, es el significado predominante en la enseñanza habitual del número racional.

   En nuestra investigación se ha manifestado la potencialidad de utilizar una Propuesta alternativa sustentada en los modelos de medida y de cociente partitivo. Pero esta experimentación se llevó a cabo con la intervención directa del investigador, ocupando una posición de poyo los profesores de aula.

   Queda así abierta una vía de investigación cuya intencionalidad es la de analizar las potencialidades y limitaciones de nuestra Propuesta cuando se implementa en condiciones naturales de aula; es decir, cuando son los Maestros los responsables directos y únicos de la implementación de la Propuesta Didáctica. Se trata, por tanto, de un trabajo de planificación, ejecución y evaluación del trabajo de unos profesionales que han de modificar su práctica docente en los cursos 4º y 5º de Educación Primaria. Los resultados de la investigación serán de gran interés para planificar y desarrollar una enseñanza, en cuanto a significados y metodología, muy distante de la que actualmente se lleva a cabo en las aulas de los centros educativos españoles.

Esperamos y deseamos que el trabajo realizado en esta investigación sirva para mejorar la comprensión de los alumnos sobre un tema tan importante para su formación personal, laboral y social.

Y también deseamos haber contribuido al avance de la Didáctica de las Matemáticas en su doble vertiente de investigación básica y de investigación aplicada.

BIBLIOGRAFÍA

APPLE, M.W. (1989). *Maestros y textos*. Piados-MEC. Barcelona.

ARMON, I., NESHER, P. y NIRENBURG, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp.167-214

ARNAL, J. DEL RINCON, D. y LATORRE, A. (1992). *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Labor. Barcelona.

BALL, D.L. (1993). Halves, pieces, and twoths: constructing and using representational contexts in teaching fractions. En Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. A. (Edits): *Rational Numbers. An integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hilldale, New Jersey.

BAUERSFELD, H. (1994). Theorical perspectives on the interaction in the mathematics classroom. En Biehler, R. et al (Edits.): *Didactic of Mathematics as a scientific discipline*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

BERH, M. J.; LESH, R.; POST, T. R. y SILVER, E. A. (1983). Rational number concepts. En Lesh y Landau (Edits.) *Acquisition of mathematics concepts and processes*. pp. 91-126. Academic Press, New York.

BEHR, M. J., HAREL, G., POST, T. y LESH, R. (1992). Rational numbers, ratio and proportion. En Grouws, D. (Edit.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishers, N. J. pp. 296-333.

BEHR, M. J., HAREL, G., POST, T. y LESH, R. (1993). Rational Numbers: toward a Semantic Analysis. Emphasis on the Operator Construct. En Carpenter, T.P., Fennema, E. y Romberg, T. A. (Edits): *Rational Numbers. An integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey.

BENOIT, P., CHEMLA, K. y RITTER, J. (Coords.) (1992). *Histoire de fractions, fractions d´histoire*. Birkhäuser Verlag. Basel, Boston, Berlin.

BEZUK, N. S. y BIECK, M. (1993) Current research on rational numbers and common fractions: summary and implications for teachers. En Owens, D. T. (Edit.): *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics*. Macmillan Publishing Company, New York.

BISHOP, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós, Barcelona.

BISQUERRA, A. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Ceac. Barcelona.

BLANDO, J.; KELLY, A.; SCHNEIDER, B. y SLEEMAN, D. (1989). Analyzing and modeling arithmetic errors. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, pp. 301-308.

BONOTTO, C. (1993). A research project on rational number*s*. Department of Pure and Applied Mathematics, University of Padova, Italy. *Paper presented at the International Study Group on the Rational Numbers of Arithmetic*. University of Georgia, Athens.

BOUVIER, A. y GEORGE, M. (1984). *Diccionario de Matemáticas*. Akal editor. Madrid.

BOYER, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. Madrid.

BROTHERSON, M. J. (1994). Interactive focus group interviewing: a qualitative research method in early intervention. *Topics in Early Childhood Special Education*, 14 (1), pp. 101-118.

BROUSSEAU, G. (1983) *Problemas en la enseñanza de los decimales. Problemas de la didáctica de los decimales*. Universidad de Córdoba, Argentina.

BROUSSEAU, G.; DAVIS, R. y WERNER, T. (1986). Observing students at work. En Christiansen, B.; Howson, G. y Otte, M. (Edits.): *Perspectives on Mathematics Education*. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

BROUSSEAU, G., BROUSSEAU, N, WARFIELD, V (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior*. Vol. 23, pp. 1-20.

BUSTOS, A. y otros (2003). Reconocer atributos de la relación parte-todo. *Ema,* Vol. 8, Nº 1, pp.70-88.

CAJORI, F. (1985). *A history of Mathematical notations* (2 vol.). Open Court Press, Illinois.

CAUNEDO, B. Y CÓRDOBA, R. (2000). *El arte del alguarismo. Un libro castellano de aritmética comercial y de ensayo de moneda del siglo XIV*. Junta de Castilla y León. Consejería de Educación y Cultura.

CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. y ROMBERG, T. A. (Edits.) (1993). *Rational Numbers. An Integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. Hillsdale, New Jersey.

CARRAHER, D.W. (1993). Lines of thought: A ratio and operador model of racional number. *Educational Studies in Mathematics,* 25, pp. 281–305.

CASSELL, C. y SYMON G. (Edits.) (1994). *Qualitative methods in organizacional researc*h. Sage. Londres.

CASTRO, E. (1994). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales*. *Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

CASTRO, E., RICO, L. y ROMERO, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15, 3*, pp. 361-371

CHARLES, K. y NASON, R. y COOPER, T. (1999). Mathematical Analogs and the Teaching of Fractions. *Paper presented at the Annual Meeting of the New Zealand. Association for Research in Education.* Melbourne. Australia.

CHARLES, K. y NASON, R. (2000) Young children´s partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics,* 43, pp. 191–221.

COHEN, L. y MANION, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla, Madrid.

COOK, T. D. y REICHARD, CH. S. (1982). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Morata, Madrid.

CONTRERAS, M. y GÓMEZ, B. (2006). Sobre problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. En BOLEA, P.; GONZÁLEZ, M.J. y MORENO, M. (Edits): *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).* Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses, pp. 171-184.

COOB, P. (1987). Information-processing psychology and mathematics education. A constructivist perspective. *The Journal of Mathematics Behavior,* 6(1), pp. 3-40.

CORIAT, M. y SCAGLIA,S. (2000). Representación de los números reales en la recta. *Enseñanza de las Ciencias,* 18 (1), pp. 25-34

CUBILLO, M.C. (1998). *Un estudio sobre las potencialidades que genera en alumnos de secundaria el modelo de gestión mental aplicado a las fracciones*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

DAVYDOV, V.V. , TSVETKOVICH, Z.H. (1991). On the objective origin of the concept of fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 13 (1), pp. 13-64

DENZIN, N. y LINCOLN, Y. (Edits.) (1994). *Handbook of Qualitative Research*. Sage Publications, California.

DIENES, Z. P. (1972). *Fracciones*. Teide. Barcelona

DÖRFLER, W.(2004). Objectifying Relations: Fractions as Symbols for Actions. En Clarke et al. (Edits.): *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, pp. 229-311. National Center for Mathematics Education (NCM). Goteborg.

DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lang, S.A. Bern.

ELLIOT, J. (1990). *La Investigación-Acción en Educación*. Morata. Madrid.

ERNEST, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Falmer Press. London.

ESCOLANO, A. (1998). *Historia ilustrada del libro escolar en España. Vol. 1*. Fundación Germán Sánchez Ruipérez. Madrid.

ESCOLANO, R. (2005). Presencia histórica de la fracción en los libros de texto del Sistema Educativo Español. *Comunicación presentada al Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. La Coruña, 10 al 13 de septiembre de 2004

ESCOLANO, R y GAIRIN, J,M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión* Nº 1. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)

EUCLIDES (1994). *Elementos. Libros V a IX*. Tomo II. Editorial Gredos. Madrid.

FEFERMAN (1989). *The number systems. Foundations of Algebra and Analysis.* Chelsea Publishing Company, New York.

FIGUERAS, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales*. Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzado del IPN (CINVESTAV). México.

FIRESTONE, W. (1993). Alternative arguments for generalizing from data as applied to qualitative research. *Educational Researcher, 22*, pp. 16-23.

FLEGG, G. (1989). *Numbers through the ages*. Macmillan-The Open University, London.

FREUDHENTAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel Publishing Company. Dordrecht. Holland

FREUDHENTAL, H. (1995). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. (Textos seleccionados: El Método, Fracciones, el lenguaje algebraico, Razón y Proporcionalidad. Traducción, notas e introducción de Didactical Phenomenology of

Mathematical Structures. Dordrecht: D. Reidel. 1983 por Luis Puig). México, D. F. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV.

GAGATSIS, A. y PATRONIS, T. (1990). Using Geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. pp. 29-54.

GAIRIN, J. M. (1999). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.

GAIRIN, J. M. (2001). Una interpretación de las fracciones egipcias desde el recto del papiro de Rhind. *LLUL,* nº 24, pp. 649-684.

GAIRIN, J. M. (2004). Números racionales. Modelos y significados. En Rico, L. (Edit): *El número, agente integrador del conocimiento*. Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid. pp. 99-124.

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. En BOLEA, P.; GONZÁLEZ, M.J. y MORENO, M. (Edits): *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses, pp. 57-77

GILLINGS, R. J. (1982). *Mathematics in the time of the pharaohs*. Dover Publications, New York.

GIMENEZ, J. (1991). *Innovación metodológica de la didáctica especial del número racional positivo. Diagnosis cognitiva y desarrollo metodológico*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

GODINO, J.D. y BATANERO, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), pp. 325-355

GODINO, J.; BENCOMO, D.; FONT, V. Y WIHELMI, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. En BOLEA, P.; GONZÁLEZ, M.J. y MORENO, M. (Edits.): *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses, pp. 36-56.

GOETZ, J. P. y LECOMPTE, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Morata. Madrid.

GÓMEZ, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria. En BOLEA, P.; GONZÁLEZ, M.J. y MORENO, M. (Edits):

Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses, pp. 15-35

GONZALEZ, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

GUNTTENPLAN, S. (1994). *A Companion to the Philosophy of Mind*. Blackwell, Oxford.

HIEBERT, J. A. y CARPENTER, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grows, D. A. (Edit.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Macmillan Publishing Company, New York.

HIEBERT, J. A. (1993). Benefits and costs of research that links teaching and learning mathematics. En Carpenter, T. P.; Fennema, E. y Romberg, T. A. (Edits): *Rational numbers. An integration of research*. Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hillsdale, N. J.

HITT, F. (1988). Systemes Sémiotiques de Représentation liés au Concept de Fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* Vol 6. pp. 7-26.

I.C.M.I. (1987). *Las matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90*. Mestral, Valencia.

IFRAH, G. (2001). *Historia Universal de las Cifras: La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Espasa. Madrid.

INCE (2002). *Evaluación de la Educación Primaria 1999. Fallos y dificultades de los alumnos en la prueba de Matemáticas*. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Secretaría General Técnica del MEC. Madrid.

INECSE (2004a). *Aprender para el mundo de mañana. Resumen de resultados PISA 2003*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

INECSE (2004b). *Evaluación PISA 2003. Resumen de los primeros resultados en España*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

JACOB, E. (1987). Qualitative research traditions: a review. *Review of Educational Research*, 57 (1), pp. 1-50.

JANESICK, V. (1994). The dance of cualitative researchdesign. En Denzin, N. y Lincoln, Y. (Edits.): *Handbook of Qualitative Research*. Sage Publications, California.

KAPUT, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D. A. (Edit.): *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company, New York.

KEIJZER, R. y TERWEL, J. (2001) Audrey´s acquisition of fractions: a case study into the learning of formal mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47,* pp. 53-73

KEIJZER, R. y TERWEL, J. (2003) Learning for mathematical insight: a longitudinal comparative study on modelling. *Learning and Instruction*, *13*, pp. 285-304

KEMIS, S. y MCTAGGART, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Laertes, Barcelona

KERSLAKE, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors*. Windsor, England: NFER-Nelson.

KERSLAKE, D. (1991). The language of fractions. En Durkin, K. y Beatrice, S. (Edits.): *Language in Mathematical Education: Research and Practice*. Open University Press, Bristol, PA. pp. 85-94.

KIEREN, T. E. (1976) On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En Lesh, R. A. (Edit.): *Number and Measurement*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, pp. 101-144.

KIEREN, T. E. (1980) The rational numbers construct. Its elements and mechanisms. En Kieren, T. E. (Edit.): *Recent research on number learning*. Columbus. OH: ERIC/SMEAC, pp. 125-150.

KIEREN, T. E. (1992). Rational and Fractional Numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En Leinhardt, G., Putnam, R. and Hattrup, R. A. (Edits.): *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey. pp. 49-84.

KIEREN, T. E. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. (Edits): *Rational Numbers. An Integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey, pp. 323-371.

KIEREN, T. E. (1994). Reflections and interactions on racional number thinking, learning and teaching. En Kirshner. D. (Edit.) *Proceedings of the sixteenth annual meeting of the North American chapterof the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 1*, Baton Rouge: Louisiana State University, pp. 53-56

KIEREN, T. E. (1995). Creating Spaces for Learning Fractions. En Sowder, J. T., Schappelle, B. P. (Edits). *Providing a Foundation for Teaching Mthematics in the Middle Grades*. Albany: State University of New York Press, pp. 31-65.

KILPATRICK, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. En Grouws, D. A. (Edit.): *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company, New York.

KILPATRICK, J. (1993). Beyond face value: assessing research in Mathematics Education. En Nissen, G. y Blomhoj, M. (Edits.): *Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics*. Roskilde University, Denmark.

KRIBS-ZALETA, C. M. (2006). Estrategias construidas para la división de fracciones. *Comunicación presentada al XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.

LAMON, S. J. (2001). Presenting and Representing: From Fractions to Rational Numbers. En Albert A. Cuoco and Francis A.Curcio (Edits.), *The Roles of Representations in School Mathematics, 2001 Yearbook of The National Council of Teachers of Mathematics*, Reston VA, pp. 146-165.

LAMON, S. J. (2002). Part-whole comparisons with unitizing. En B. Litwiller (Edit.): *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*, *2002 Yearbook of The National Council of Teachers of Mathematics*, Reston VA, pp. 79-86.

LAMON, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding . Essential Content knowledge and instructional Strategies for Teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

LESH, R., POST, T. y BEHR, M. (1987). Representacions and translation among representation en Mathematics learning and Problem Solving. En Janvier, C. (Edit.): *Problems of Representation in the teaching and learning of Mathematics*. LEA, Hillsdale, New Jersey.

LESH, R. (1997). Matematización: La necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las Ciencias,* Vol 15, nº 3, pp. 377-391.

LÓPEZ, J. A. y MORENO, Mª L. (1997). *Resultados de Matemáticas. Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS)*. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. MEC. Madrid.

LÓPEZ FACAL, R. (1997). Libros de texto: sin novedad. *ConCiencia Social,* nº 1; pp 51-76.

LLINARES, S. y SANCHEZ, M. A. (1988). *Fracciones*. Síntesis, Madrid.

MACK, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*. 21, pp. 16-32.

MACK, N. K. (1993). Learning Rational Numbers with understanding: Case of Informal Knowledge. En Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. (Edits): *Rational Numbers. An Integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, N. Jersey.

MARTINEZ, C. y LASCANO, M. (2001). Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. *Ema,* Vol. 6, Nº 2, pp.159-179.

MCNIFF, J. (1992). *Acción Research: Principles and Practice*. Routledge, Canadá.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1970). *Ley General de Educación y Financiamiento de la reforma educativa*. Ley 14/1970, de 4 de Agosto. Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1970). *Orientaciones Pedagógicas para los planes y programas de estudios de la Educación General Básica*. Orden Ministerial de 2 de Diciembre de 1970 (B.O.E. de 8-12-70). Imprenta Nacional del Boletín Oficial del Estado. Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1982). *Programas Renovados de la Educación General Básica. Ciclo Medio*. Editorial Escuela Española. Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1990). *Ley Orgánica de Ordenación del Sistema Educativo*. LOGSE, 1/1990. (BOE, 4/10/90, nº 238). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2003). *Real Decreto 830/2003, de 27 de junio por el que se establecen las enseñanzas comunes de la Educación Primaria*. (BOE de 2 de julio de 2003)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2004). *Real Decreto 115/2004, de 23 de enero por el que se establece el currículo de Educación Primaria*. (BOE de 7 de febrero de 2004)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2006). Ley orgánica de Educación de 3 de mayo (BOE de 4 de mayo de 2006, nº 106). Jefatura del Estado. Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. (BOE de 8 de diciembre de 2006)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1962). Fichas Didácticas de Matemáticas. *Vida Escolar*, Nº 43. Noviembre de 1962.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1965). *Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria*. Orden Ministerial de 8 de Julio de 1965 (B.O.E. de 24-9-65). Centro de Documentación y Orientación didáctica del Ministerio de Educación Nacional. Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1981). Programas Renovados en E.G.B. Área de Matemáticas. Documento de consulta. *Vida Escolar*, Nº 210. Enero-Febrero 1981.

MICHEL, C. (1992). Fractions in the economic tablets of the early second millenium in Assyria and Babylonia. En Benoit, P., Chemla, K. y Ritter, J. (Coords.) *Histoire de fractions, fractions d´histoire*. pp. 87-101. Birkhäuser Verlag Basel

MIDDLETON, J.A., DE SILVA, T., TOLUK, Z. and MITCHELL, W. (2001). The Emergence of Quotient Understandings in a Fifth-Grade Classroom: A Classroom Teaching Experiment. En Speiser, R.S. y Maher, C. (Edits.): *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Snowbird, UT: ERIC.

MORCOTE, O. y FLORES, P. (2001). Análisis del conocimiento didáctico sobre las fracciones en un texto escolar de 1º de ESO. En Berenguer, J., Cobo, B. y Navas, J. (Edits.): *Investigación en el aula de matemáticas*. *Retos de la educación matemática del siglo XXI*. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.

MORRIS, A. K. (2000) A Teaching Experiment: Introducing Fourth Graders to Fractions from the Viewpoint of Measuring Quantities Using Davydov's Mathematics Currículum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 22 (2), pp. 32-84.

MOSELEY, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 60,* pp. 37-69.

MOSS, J. y CASE, R. (1999). Developing Children´s Understanding of Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 30. Nº 2, pp. 122-147.

MOVSHOVITZ HARDAR, N.; ZASLAVKSY, O. y INBAR, S. (1987). An empirical clasification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, pp. 3-14.

MULLIS. I. et al. (2002). *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003*. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid.

MUÑOZ-ESCOLANO, J.M. (2005). La práctica docente: el caso de los números racionales. *Comunicación presentada al Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM*. Córdoba.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (N.C.T.M.) (1991). *Estandares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sociedad andaluza de educación matemática "Thales". Sevilla.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1989). *Everybody Counts: A report to the nation on the future of Mathematics Education.* National Academic Press. Washington.

NICKSON, M. (1992). The culture of the mathematics classroon: an unknown quantity? En Grouws, D. A. (Edit.): *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company, New York.

NOVILLIS LARSON, C. (1980) Locating proper fractions on number lines: Effect of length and equivalence. *School Science and Mathematics.* Vol LXXX (5), pp. 423-428

NUNES, T. y BRYANT, P. (1996). *Children doing mathematics*. Cambridge, M.A: Blackwell.

OBANDO, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Ema,* Vol. 8, Nº 2, pp.157-182.

OWENS, D. T. y SUPER, D. B., (1993). Teaching and Laerning Decimal Fractions. En Owens, d. (Edit.): *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

PÉREZ MOYA, J. (1561). *Aritmética práctica y speculativa*. Reedición de 1998. Fundación José A. De Castro. Madrid.

PÉREZ ZORILLA, Mª J. (2005). *Evaluación de la Educación Primaria 2003*. Ministerio de Educación y Ciencia. Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo. INECSE. Madrid.

PITKETHLY, A. y HUNTING, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*. (30), 1, pp. 5-38.

POST, T., BEHR, M, y LESH, R. (1982). Interpretations of Rational Number Concepts. En Silvey, L y Smart, J. (Edits.): *Mathematics for Grades 5-9*, *(1982, Yearbook),* NCTM, Reston, Virginia, pp. 59-72.

POST, T.R., HAREL, G., BEHR, M.J. y LESH, R. (1991). Intermediate teachers´ knowledge of rational number concept. En Fennema, E., Carpenter, T.P. y Lamon, S.J. (Edits.): *Integrating research on teaching and learning mathematics*. SUNY, Albany. New York.

PUIG, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico, L. (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Ice-Horsori. Barcelona, pp. 61-94.

PUIG, L. (2006). Sentido y elaboración de componentes de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En BOLEA, P.; GONZÁLEZ, M.J. y MORENO, M. (Edits): *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses, pp. 107-126.

RADATZ, H. (1980). Student´s errors in the mathematical learning: a survey. *For the Learning of Mathematics,* 1(1), pp. 1-20.

RAMIREZ, T. (2003). El texto escolar: una línea de investigación en educación. *Revista de Pedagogía,* V. 24, nº 70. Caracas

RASHED, R. (1984). *Entre Arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Les Belles Lettres. Paris.

RESNICK, L. B.; NESHER, P.; LEONARD, F.; MAGONE, M.; OMANSON, S. y PELED, I. (1989). Conceptual bases of artihmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, pp. 8-27.

RESNICK, L. B. y FORD, W. W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós-M.E.C., Barcelona.

RICO, L. (1990a). Diseño curricular en Educación Matemática: Elementos y evaluación. En Llinares, S. y Sánchez, M. V. (Edits.): *Teoría y práctica en Educación matemática*. Alfar, Sevilla.

RICO, L. (1990b). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En Llinares, S. y Sánchez, M. V. (Edits.): *Teoría y práctica en Educación matemática*. Alfar, Sevilla.

RICO, L. y CASTRO, E. (1995). Pensamiento numérico en Educación Secundaria Obligatoria. *Aspectos didácticos de Matemáticas, 5*. Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Zaragoza.

RICO, L.; CASTRO, E. y ROMERO, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. *Proceedings 20 International Conference for the*

Psychology of Mathematics Education. Valencia, España.

RICO, L., CASTRO, E., CASTRO, E., CORIAT, M, SEGOVIA, I. (1997). Investigación, diseño y desarrollo curricular. En Rico, L. (Edit.): *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* Síntesis, pp. 265-318.

RICO, L., CASTRO, E., CASTRO, E., CORIAT, M., MARTÍN, A., PUIG, L. SIERRA, M., SOCAS, M. (Coords.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Ice-Horsori. Barcelona.

RICO, L. y SAENZ, O. (1982). Programación del bloque de las fracciones en el Ciclo Medio de E.G.B.. En *Actas de las II J.A.E.M., tomo II,* Sociedad Andaluza de profesores de matemáticas Thales, Sevilla.

RITTER, J. (1992). Metrology and the prehistory of fractions. En Benoit, P., Chemla, K. y Ritter, J. (Coords.): *Histoire de fractions, fractions d´histoire*. Birkhäuser Verlag Basel, pp. 3-34.

ROMBERG, T. (1992). Perspectives on Scholarschip and Research Methods. En Grouws, D. A. (Edit): *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company, New York.

ROMERO, I. M. (1995). *Introducción del Número Real en Educación Secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

ROUCHE, N. (1992). *Le sens de la mesure*. *Des grandeurs aux nombres rationnels*. Collection Formation. Edition Dider Hatier.

SAENZ-LUDLOW, A. (2003). A collective chain of signification in conceptualizing fractions: a case of a fourth-grade class. *Journal of Mathematical Behavior*,*22,* pp.181-211

SAXE, G.B.; TAYLOR, E.V.; MCINTOSH, C. Y GEARHART, M. (2005). Representing Fractions with Standard Notation: A Developmental Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*. 36 (2), pp. 137-157.

SCARDAMALIA, M., BEREITER, C., MCLEAN, R. S., SWALLOW, J. y WOODRUFF, E. (1989). Computer-supported intentional learning enviroments. *Journal of Educational Computing Research,* 5 (1), pp. 51-68.

SIERRA, M.; RICO, L., y GÓMEZ, B. (1997). El número y la forma. Libros impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En Escolano, A. (Edit.): *Historia ilustrada del libro escolar en España*. Vol. 2. Fundación Germán Sánchez Ruipérez. Madrid.

SMITH, D. E. (1953). *History of Mathematics. Vol. 2: Special topics of elementary mathematics*. Dover Publications. New York.

SOWDER, J.T, BEZUK, N y SOWDER, L.K. (1993). Using principles from cognitive psychology to guide rational number instruction for prospective teachers. En Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. (Edits): *Rational Numbers. An Integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale. New Jersey.

SOWDER, J. T. (1995). Instructing for rational number sense. En Sowder, J. T. y Schappelle, B. P. (Edits.): *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades*. Albany: State University of New York Press, pp. 15-30.

STAFYLIDOU, S. y VOSNIADOU, S. (2004). The development of students´ understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, pp. 503-518.

STAKE, R. (1994). Case studies. En Denzin, N. y Lincoln, Y. (Edits.): *Handbook of Qualitative Research*. Sage Publications, California.

STEFFE, L. P. (2002). A new hipótesis concerning children's fraccional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, pp. 267-307.

STEVIN, S. (1585). *Disme*. Reproduction de textes anciens. IREM de l'Université de Paris VII.

STREEFLAND, L. (1991). *Fractions in realist mathematics education. A paradigm of developmental research*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

STREEFLAND, L. (1993). Fractions: A Realistic Approach. En Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. (Edits): *Rational Numbers. An Integration of Research*. pp. 289-325. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey.

TALL, D. y VINNER, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, pp. 151-169.

TALL, D. (Edit.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

TAYLOR S.J. y BOGDAM R. (1990). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Paidós, Buenos Aires.

TIANA FERRER, A. (1998). El libro escolar como instrumento didáctico. *Historia ilustrada del libro escolar en España. De la posguerra a la reforma educativa*. Fundación

Germán Sánchez Ruipérez. Madrid.

TOLUK, Z. y MIDDLETON, J. A. (2001). The development of children's understanding of quotient: A Teaching experiment. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Edit.): *Proceedings of the25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hogrefe. Utrecht, The Netherlands.

TZUR, R. (2004). Teacher and students' joint production of a reversible fraction conception. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, pp. 93-114.

VALDEMOROS, M. E. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 7, nº 3, pp. 235-256.

VERGNAUD, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics*, 3, 2, pp. 31-41.

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative Structures. En Lesh, R. y Landau, M. (Edits.): *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*. New York: Academic Press, pp.127-174

VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert & M. Behr (Edits.): *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. NJ: Lawrence Erlbaum Association, pp. 141-161.

VERGNAUD, G. (1990). Théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*, Nº 2-3, pp. 133-170.

WEARNE, D.; HIEBERT, J. y TABER, S. (1991). Four grades´ gradual construction of decimal fractions during instruction using different physical representations. *Elementary School Journal*. 91 (4), pp. 321-341.

WITTROCK, M.C. (1990). *La investigación de la enseñanza: Profesores y Alumnos*. Paidós. Barcelona.

LIBROS DE TEXTO Y MANUALES ESCOLARES CONSULTADOS

El listado está agrupado de acuerdo con los períodos temporales considerados en el análisis fenomenológico didáctico llevado a cabo el Capítulo II de esta Memoria. Dentro de cada período los libros aparecen según el orden alfabético de autor. También indicamos la ubicación física de cada libro de texto en las distintas dependencias de la Universidad de Zaragoza.

Comprendidos entre 1850 y 1900

ALMEDA, J. (1892). *Principios de Aritmética para uso de los alumnos de las Escuelas de Primera Enseñanza (Sexta edición)*. Imprenta de la Casa Provincial de Caridad. Ubicación: Biblioteca de Matemáticas (HCM-A72)

BARBÉRY, M. Mª (1868). *La aritmética explicada a los niños*. Tipografía Gregorio Estrada. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo

CIRODDE, P. L. (1861). *Lecciones de Aritmética. Tercera edición*. Carlos Bailly-Bailliere. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Matemáticas (ANT 331)

DE YÉVES. J. M. (1860). *Elementos de aritmética*. Imprenta y Librería de J.A. NEL-LO (Tarragona). Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo.

DOS PROFESORES DEL RAMO (1860). *Tratado de Aritmética Teórico-Práctica para uso de las Escuelas de Primera Enseñanza*. Imprenta y Librería de Lucas Polo. Huesca. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

FRAX, F. (1867). *Aritmética para niños con ejercicios y problemas*. Tipografía Calixto Ariño Zaragoza. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 106)

FRAX, F. (1867). *Colección de ejercicios y problemas aritméticos muy útiles para las escuelas de Primera Enseñanza*. Tipografía Calixto Ariño Zaragoza. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 107)

GALLEGO CHAVES, A. (1880). *Aritmética completa para niños (9ª edición)* Aprobada por la Autoridad eclesiástica y declarada de utilidad para la enseñanza por Real orden de 20 de Diciembre de 1886. Saturnino Calleja Fernández. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

GARCÍA DE GALDEANO, Z. (1884). *Tratado de Aritmética*. Fando y Hermano. Toledo. Ubicación: Biblioteca de Matemáticas (ANT 428)

GAVILÁN REYES, M. (1896). *Elementos de Matemáticas. Quinta edición.* Libro de texto de Segunda Enseñanza. Imprenta Andrés Martín. Valladolid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

LACROIX, S. F. (1846). *Tratado elemental de Aritmética para uso de la Escuela Central de las Cuatro Naciones. (7ª edición).* Imprenta Nacional. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 112-1)

MOYA, A. (1867). *Lecciones de aritmética.* Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 126)

SÁNCHEZ VIDAL, B. (1866). *Lecciones de aritmética. Segunda edición.* Bernardino Imprenta de F. Martínez García. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

SANJURJO, R. (1884). *Elementos de Aritmética y Álgebra. Novena edición.* Editorial La Guirnalda. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

TORRECILLA, G. (1898) *Aritmética de niños (17ª edición).* Señalada en primer lugar por el Real Consejo de Instrucción Pública, entre las seis que habían de servir de texto en todas las Escuelas de Instrucción Primaria de la Nación. Librería de Hernando y compañía. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas.

VALLEJO, J. M. (1821). *Tratado Elemental de Matemáticas para uso de los Caballeros Seminaristas del seminario de Nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino.* Tercera edición. Tomo I que contiene Aritmética y álgebra. Imprenta del Gobierno Político Superior. Barcelona. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas.

Comprendidos entre 1900 y 1950

ÁLVAREZ CASTRILLÓN, M. (1943). *Nociones de aritmética y geometría.* Ediciones Estudio. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de la E.U. Empresariales. Fondo antiguo (FA 124)

CASTRO Y LEGUA, V. (1911). *Aritmética y Sistema Métrico. Programa en treinta lecciones para un cursillo mensual.* Imprenta G. López del Horno. Madrid. Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo

CATALÁN Y MONROY, F. (1901). *Tratado elemental de Aritmética y Geometría.* Imprenta El Riojano. Logroño. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 454)

COMAS, M. (1928). *La escuela activa. Aritmética*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 98)

COMAS, M. (1932). *Cómo se enseña la aritmética y la geometría. Quinta edición*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo

CORREA, F. (1943). *Elementos de aritmética. 4ª edición*. Heraldo de Aragón. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca de la E.U. Empresariales. Fondo antiguo (FA 64)

DALMÁU CARLES, J. (1943). *Aritmética Razonada y Nociones de Álgebra*. Libro de texto por Real Orden de 11 de febrero de 1897 para uso de las escuelas normales. Editor Dalmáu Carles. Gerona.

DE FRAGA, E. (1934). *Aritmética*. Editorial Florencia. Pamplona. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

EDELVIVES (1944). *Aritmética de Primer Grado. Sexta edición*. Editorial Luis Vives. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 285)

EDELVIVES (1934). *Aritmética de Segundo Grado. Sexta edición*. Editorial Luis Vives. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

GALÁN, G. (1931). *Curso de aritmética y álgebra*. Imprenta La Académica. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca de la E.U. Empresariales. Fondo antiguo (FA 15)

GUTIÉRREZ DEL ARROYO, L. (1916). *Aritmética de Primer Grado*. Colección El Libro Escolar. Ediciones de La Lectura. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 109-1)

GUTIÉRREZ DEL ARROYO, L. (1916). *Aritmética de Segundo Grado*. Colección El Libro Escolar. Ediciones de La Lectura. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 109-2)

GUTIÉRREZ DEL ARROYO, L. (1916). *Aritmética de Tercer Grado*. Colección El Libro Escolar. Ediciones de La Lectura. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 109-3)

MIRALLES Y SOLBES, L. (1919). *Primeras Nociones de Aritmética*. Tipografía Doménech. Valencia. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 117)

NELSON, E. (1906). *Aritmética Inventiva*. Appleton y compañía. Buenos Aires, New York, México. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

OÑATE GUILLEN, J. (1942). *Matemáticas. Segundo curso de Bachillerato*. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 67)

PALAU VERA, J. (1923). *Aritmética. Tercer grado*. Tercera edición. Seix Barral. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 124)

PORCEL Y RIERA, M. (1918). *Aritmética. Grado medio*. Libro del alumno. Novena edición. Tipografía A. Rotger. Palma de Mallorca. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo

REY PASTOR Y PUIG ADAM. (1950). *Elementos de Aritmética*. Colección Elemental Intuitiva. Afrodisio Aguado. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Matemáticas (B-11-203)

REY PASTOR Y PUIG ADAM. (1942). *Matemáticas Primer curso de Bachillerato. (Método intuitivo)*. Tercera edición. Afrodisio Aguado. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 69)

SABRÁS GURREA, A. (1917). *Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría*. Imprenta de Galo Sáez. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

SALINAS Y ANGULO, I. (1939). *Aritmética*. Decimocuarta edición. Editorial Hernando. Madrid. Ubicación: Biblioteca de Matemáticas (HC-M 102)

SUÁREZ SOMONTE, I. (1936). *Primer curso de Matemáticas. Libro de texto de Bachillerato*. Tipografía de Vázquez y Prieto. Granada. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

SUÁREZ SOMONTE, I. (1935). *Segundo curso de Matemáticas. Libro de texto de Bachillerato*. Tipografía de Vázquez y Prieto. Granada. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

VIRSEDA PÉREZ, C. (1906). *Nociones de aritmética para uso de las Escuelas de Primera Enseñanza*. Imprenta del Diario de Avisos. Segovia. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 138)

YEVES, C. (1926). *Programas de Primera Enseñanza. Aritmética*. XX edición Obra aprobada para servir de texto en las Escuelas Reales. Ordenes de 5 de mayo de 1879 y de 13 de agosto de 1907. Editorial Hernando. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

ZALAMA HERRERA, T. (1936). *Didáctica de la aritmética desarrollada en lecciones*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación. Fondo antiguo (CN 146)

Comprendidos entre 1950 y 1970

ALVAREZ PÉREZ, A. (1999). *Enciclopedia. Primer Grado*. Reprod. facs. de la edición de la Editorial Miñón de 1964. Valladolid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EDO 1663)

ALVAREZ PÉREZ, A. (1998). *Enciclopedia. Segundo Grado*. Reprod. facs. de la edición de la Editorial Miñón de 1964. Valladolid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EDO 1662)

ALVAREZ PÉREZ, A. (1997). *Enciclopedia. Tercer Grado. Periodo de perfeccionamiento*. Reprod. facs. de la edición de la Editorial Miñón de 1966. Valladolid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EDO 1665)

BRUÑO (1960). *Tratado de aritmética. Primer grado*. Valladolid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EDO 1675)

BRUÑO (1967). *Matemáticas. Primer curso de Bachillerato*. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

CASULLERAS, J. (1967). *Primer curso de Bachillerato*. Editorial Anaya. Salamanca. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

CORREA, F. (s.f.). *Matemáticas. Primer curso de las Escuelas de Comercio*. Librería General. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

EDELVIVES (1951). *Aritmética de Segundo Grado*. Editorial Luis Vives. Zaragoza Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

EDELVIVES (1954). *Aritmética de Primer Grado*. Editorial Luis Vives. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

GARCÍA GARCÍA, J. (1969). *Matemáticas. Primer curso de Bachillerato*. Editorial Marfil. Alcoy. Valencia. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

ORTEGA UCEDO, J. J. (1963). *Haces de luz. Matemáticas. Curso de Perfeccionamiento*. Editorial Prima Luce. Barcelona. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

PUIG ADAM, P. (1956). *Didáctica Matemática Eurística. Treinta lecciones activas sobre temas de Enseñanza Media*. Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

RODRÍGUEZ VIDAL, R. (1965). *Cifras. Primer curso de Bachillerato*. Octava edición. Ed. Teide. Barcelona. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

SEGURA DOMÉNECH, S. (1969). *Matemáticas. Primer curso de Bachillerato*. Editorial ECIR. Valencia. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

Comprendidos entre 1970 y 1980

AIZPÚN, A. (1974). *Matemáticas 4. Libro de consulta*. Ed. Magisterio Español. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 4º 57)

AIZPÚN, A. (1974). *Matemáticas 4. Libro de trabajo*. Ed. Magisterio Español. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 4º 58)

AIZPÚN, A. (1974). *Matemáticas 5. Libro de consulta*. Ed. Magisterio Español. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 5º 63)

AIZPÚN, A. (1974). *Matemáticas 5. Libro de trabajo*. Ed. Magisterio Español. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 5º 64)

AIZPÚN, A. (1974). *Matemáticas 6. Libro de consulta*. Ed. Magisterio Español. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 6º 90)

AIZPÚN, A. (1974). *Matemáticas 6. Libro de trabajo*. Ed. Magisterio Español. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 6º 91)

AIZPÚN, A. (1974). *Matemáticas 7. Libro de consulta*. Ed. Magisterio Español. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 7º 79)

AIZPÚN, A. (1974). *Matemáticas 7. Libro de trabajo*. Ed. Magisterio Español. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 7º 80)

AIZPÚN, A. (1974). *Matemáticas 8. Libro de consulta*. Ed. Magisterio Español. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 8º 98)

AIZPÚN, A. (1974). *Matemáticas 8. Libro de trabajo*. Ed. Magisterio Español. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 8º 99)

ÁLVAREZ PÉREZ, A. (2001). *Enciclopedia. Iniciación profesional*. Reprod. facs. de la edición de la Editorial Miñón de 1971. Valladolid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EDO 1679)

ÁLVAREZ PÉREZ, A. y otros (1972). *Nueva matemática : [EGB]. Libro de consulta. Tercer nivel*. Ed. Miñón. Valladolid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 3º 64)

ÁLVAREZ PÉREZ, A. y otros (1972). *Nueva matemática : [EGB]. Libro de consulta. Cuarto nivel*. Ed. Miñón. Valladolid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 4º 59)

ÁLVAREZ PÉREZ, A. y otros (1972). *Nueva matemática : [EGB]. Libro de consulta. Quinto nivel*. Ed. Miñón. Valladolid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 5º 53)

ÁLVAREZ PÉREZ, A. y otros (1975). *Nueva matemática : [EGB]. Libro de consulta. Sexto nivel*. Ed. Miñón. Valladolid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 6º 86)

RAMOS SOBRINO, A. (1977). *Matemáticas básicas 4º. Educación General Básica*. Anaya. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

RAMOS SOBRINO, A. (1977). *Matemáticas básicas 5º. Educación General Básica*. Anaya. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas.

SANTILLANA (1972). *Tecnología Educativa 6ª E.G.B. Matemática.* Guiones didácticos. Santillana. Madrid.

Comprendidos entre 1980 a 1990

AYUSO, J. Y BUJANDA, M. P. (1983). *Pitágoras 3º*. Educación General Básica. Editorial S.M. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

AYUSO, J. Y BUJANDA, M. P. (1983). *Pitágoras 4º*. Educación General Básica. Editorial S.M. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

AYUSO, J. Y BUJANDA, M. P. (1983). *Pitágoras 5º*. Educación General Básica. Editorial S.M. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

BUJANDA, M. P. Y MANSILLA, S. (1990). *ALERCE 4º*. Educación General Básica. Editorial S.M. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

BUJANDA, M. P. Y MANSILLA, S. (1986). *ALERCE 5º*. Educación General Básica. Editorial S.M. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

CARDEÑOSO, J. M. y otros (1982). *Contar 5º EGB*. Departamento de Educación Anaya. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (EGB 5º 71)

JANÉ, Á. y otros (1987). *Matemáticas 4*. Educación General Básica. Editorial Edebé. Barcelona. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

JANÉ, Á. y otros (1987). *Matemáticas 5*. Educación General Básica. Editorial Edebé. Barcelona. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

JANÉ, Á. y otros (1987). *Matemáticas 6*. Educación General Básica. Editorial Edebé. Barcelona. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

ROMERO, F. (1988). *Matemáticas 4*. Educación General Básica. Santillana. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

ROMERO, F. (1988). *Matemáticas 5*. Educación General Básica. Santillana. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

ROMERO, F. (1988). *Matemáticas 6*. Educación General Básica. Santillana. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

Desde 1990 a la fecha actual

ALZU, J. L. (1999). *Matemáticas 4*. Educación Primaria. Segundo ciclo. Santillana. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 2/MAT/43)

ALZU, J. L. (1998). *Matemáticas 5*. Educación Primaria. Tercer ciclo. Santillana. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/29)

ALZU, J. L. (1998). *Matemáticas 6*. Educación Primaria. Tercer ciclo. Santillana. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/34)

ALZU, J. L. (2001). *Entre amigos. Matemáticas 4º Primaria*. Santillana. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

ALZU, J. L. (2002). *Entre amigos. Matemáticas 5º Primaria*. Santillana. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

ALZU, J. L. (2002). *Entre amigos. Matemáticas 6º Primaria*. Santillana. Madrid. Ubicación: Biblioteca del Área de Didáctica de las Matemáticas

ANDRÉS LACUEVA, J. y otros (1995). *Matemáticas 6. Educación Primaria Tercer ciclo*. Edebé. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/5)

BUJANDA JÁUREGUI, M.P. (1993). *Matemáticas 4. Educación Primaria. Segundo ciclo*. Editorial S.M. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 2/MAT/16)

BUJANDA JÁUREGUI, M.P. (1994). *Matemáticas 5. Educación Primaria. Tercer ciclo.* Editorial S.M. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/15)

BUJANDA JÁUREGUI, M.P. (1995). *Matemáticas 6. Educación Primaria. Tercer ciclo.* Editorial S.M. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/20)

DÍAZ, P. Y SÚCAR, L. (1993). *Matemáticas 4. Educación Primaria. Segundo ciclo.* Editorial Luis Vives. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 2/MAT/9)

FERRERO, L. y otros (1999). *Matemáticas 4. Educación Primaria. Segundo ciclo.* Anaya. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 2/MAT/41)

FERRERO, L. y otros (2000). *Matemáticas 5. Educación Primaria. Tercer ciclo.* Anaya. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/42)

FERRERO, L. y otros (2001). *Matemáticas 6. Educación Primaria. Tercer ciclo.* Anaya. Madrid. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/50)

FRAILE, J. Y GÓMEZ, C. (1996). *Matemáticas 4. Educación Primaria Segundo ciclo.* Vicens Vives. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 2/MAT/37)

FRAILE, J. Y GÓMEZ, C. (1996). *Matemáticas 5. Educación Primaria Tercer ciclo.* Vicens Vives. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/25)

FRAILE, J. Y GÓMEZ, C. (1996). *Matemáticas 6. Educación Primaria Tercer ciclo.* Vicens Vives. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/27)

FRÍAS, V. (1995). *Matemáticas 5. Educación Primaria. Tercer ciclo.* Editorial Luis Vives. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/7)

MARISCAL, R. (1995). *Matemáticas 6. Educación Primaria. Tercer ciclo.* Editorial Luis Vives. Zaragoza. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/13)

RÚBIES, M. y otros (1993). *Matemáticas 4. Educación Primaria Segundo ciclo.* Edebé. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 2/MAT/5)

SEGARRA OLLER, J. y otros (1994). *Matemáticas 5. Educación Primaria Tercer ciclo.* Edebé. Barcelona. Ubicación: Biblioteca de la Facultad de Educación (P CICLO 3/MAT/3)

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Departamento de Matemáticas

Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente

Memoria presentada por

RAFAEL ESCOLANO VIZCARRA

para optar al Grado de Doctor por

la Universidad de Zaragoza,

dirigida por el Dr. JOSE Mª GAIRÍN SALLÁN

VOLUMEN II: ANEXOS

Zaragoza, Mayo de 2007

Índice general

VOLUMEN I

Capítulo I. El problema de investigación

Capítulo II. Significados del número racional positivo

Capítulo IV. Diseño de la investigación

Capítulo V. Fase de Planificación

Capítulo VI. Fase de Acción

VOLUMEN II

ANEXOS

Anexo III. Resultados de la Experimentación

Anexo IV. Estudio Comparativo entre colegios

Anexo V. Interacción didáctica

Anexo VI. Material entregado a los alumnos

ANEXO I

Propuesta de Enseñanza

I.1 Del Primer Ciclo (4º curso)

II.2 Del Segundo Ciclo (5º curso)

En el Anexo I.1 se detalla la Propuesta Didáctica diseñada para enseñar el número racional positivo en 4º curso de Educación Primaria. En el Anexo I.2 se hace lo propio con la Propuesta Didáctica para 5º curso de Educación Primaria.
Dado que nuestra investigación contempla dos Etapas, es decir, la Propuesta Didáctica se vuelve a replicar en otro momento diferente; resulta necesario incorporar en cada uno de los Anexos las modificaciones incorporadas a la Propuesta en la fase de planificación de la Segunda Etapa. Por esta motivo dentro del Anexo I.1 y del Anexo I.2 aparece un apartado titulado" Modificación de la Propuesta Didáctica en la Segunda Etapa".

Propuesta didáctica para la enseñanza del número racional positivo en 4º curso de Educación Primaria

La propuesta didáctica para cuarto curso de Educación Primaria se articula en 21 sesiones de aula y se organiza en torno a cinco componentes curriculares: objetivos, contenidos, metodología, actividades propuestas y evaluación. La presentación se hace de forma secuencial, en el mismo orden en que se ha implementado.

Sesiones de enseñanza en 4º curso de Educación Primaria

Sesiones 1 a 6	Tema 1.- La fracción con significado de medida de cantidades de longitud Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 1 a nº 5
Sesiones 7 y 8	Tema 2.- La fracción con significado de medida de cantidades de masa Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 6 y nº 7
Sesiones 9 a 12	Tema 3.- La fracción con significado de medida de cantidades de superficie Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 8 a nº 12
Sesiones 13 y 14	Tema 4.- La equivalencia de fracciones Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 13 a nº 15
Sesiones 15 a 18	Tema 5.- Relaciones de orden entre fracciones Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 16 a nº 21
Sesiones 19 a 21	Tema 6.- La fracción con significado de medida de cantidades discretas Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 22 a nº 27

Tema 1: La fracción con significado de medida de cantidades de longitud

En las seis primeras sesiones de la secuencia de enseñanza se introduce la fracción desde el modelo de medida de cantidades de longitud.

SESIÓN NÚMERO 1

1. Objetivos de la sesión
Introducción de la medida de la magnitud longitud.

2. Contenidos

- Magnitud longitud (Los alumnos al resolver la tarea se despreocupan de otros atributos mensurables de la cortina y se concentran en la magnitud longitud, referida a la largura de la cortina).
- La imposibilidad de comunicación directa entre los alumnos y el hipotético vendedor obliga a los primeros a medir. Surge el problema de medida de la longitud y los aspectos clave a destacar:
  - elección de la unidad de medida
  - reiteración de la unidad de medida y de las subunidades de medida
  - expresión del resultado de la medida.
- El resultado de medida varía en función de las unidades y subunidades tomadas.

3. Metodología

• El profesor plantea el siguiente problema:

Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared (la longitud de la cortina mide 73,5 cm. si la unidad tiene 98 cm.). La longitud de la barra queréis que sea igual que la largura de la cortina. ¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda la barra de la cortina que tenga la longitud deseada?

• El profesor controla el trabajo de los alumnos y reorienta el mismo mediante dos intervenciones generales:

- Delimitar la magnitud que interesa destacar, concretar la cantidad de magnitud que debe medirse, necesidad de que el cliente y el vendedor utilicen una misma unidad de medida, y exigencia de crear subunidades.
- Poner de manifiesto la necesidad de expresar estas subunidades de longitud REFERIDAS A LA UNIDAD, indicando que se emplean unos nuevos números: LAS FRACCIONES. Nombrar a cada subunidad de acuerdo con un aspecto que sea relevante para la magnitud que estamos trabajando: la longitud (no lo es el color, la materia de la que están hechas, …). Es decir, se propone que cada subunidad se nombre según sea su medida referida a la caña – unidad.

• La tarea inicial y las derivadas de las intervenciones del profesor, se presenta a todo el grupo en general y para realizarlas se forman grupos de 2 alumnos.

• Al finalizar cada una de las tareas parciales se celebra un debate que el profesor utiliza para poner de manifiesto las exigencias de la tarea. Además, reformula la tarea en el sentido ya indicado.

4. Material

- En el aula se colgarán varias cortinas, todos de papel y de las mismas dimensiones que representan una cortina de longitud 75 cm.
- Cada grupo de dos alumnos recibe, al inicio de cada una de las tareas parciales, un modelo de carta para enviar al vendedor.
- Después de la primera reformulación de la tarea cada grupo recibe 2 cañas –unidad, y dos tiras de papel de 1 m. de longitud para que mediante doblado pueda construir subunidades de longitud $1/2^n$

5. Impresos para el alumno

Para completar la tarea el alumno debe cumplimentar cada una de las cartas que se le han entregado en el desarrollo de dicha tarea

1ª carta

A la atención del Sr. vendedor de barras de cortinas. Zaragoza, Estimado Sr. Vendedor: Deseo recibir en mi domicilio una barra de cortina que mida ________________________ Atentamente: Firmado: ____________________ y ____________________

2ª carta

A la atención del Sr. vendedor de barras de cortinas.

Zaragoza,

Estimado Sr. Vendedor:

Deseo recibir en mi domicilio una barra de cortina que mida una longitud de ________________ de unidad.

Atentamente:

Firmado: ________________________ y ______________________

SESIÓN NÚMERO 2

1. Objetivos de la sesión

Introducción de la medida de la magnitud longitud.

2. Contenidos

- El proceso de medida: el resultado de la medida varía en función de las unidades y subunidades tomadas.
- Introducción del sistema de representación de las fracciones:
- Necesidad de expresar el resultado de una medida de longitud con unos nuevos números.
- Significado de las fracciones unitarias: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 y 1/6 de la caña - unidad
- Representación oral y escrita de las fracciones unitarias.

3. Metodología

• El profesor interviene para sintetizar la sesión número 1 y destacar que *La fracción 1/2 unidad indica la longitud de media unidad o la mitad de la unidad*.

• El profesor propone que cada pareja de alumnos *construya y exprese, mediante la representación escrita y oral la longitud de las subunidades obtenidas al fraccionar la unidad en TRES, CUATRO, CINCO y SEIS partes de igual longitud*.

• Se propone finalizar la tarea de escribir al comerciante para solicitar la barra necesaria para sujetar la cortina.

• Los resultados de la tarea se expondrán en la pizarra dedicando especial atención a las nuevas expresiones orales y escritas que han introducido

4. Material

- Cada pareja de alumnos recibe 5 cañas y dos tiras de papel de 98 cm. Si necesitan más cañas lo pedirán al profesor. También utilizarán los cuadros de segmentos paralelos (habrá 6 colgados en las paredes del aula).
- Etiquetas
- Las subunidades construidas por los alumnos se agruparán, por tamaños, en papeleras o bandejas, de modo que los alumnos soliciten al profesor las subunidades que precisen. De esta forma, el profesor tiene información inmediata de las estrategias que emplea cada grupo

5. Impresos para el alumno

Se proporciona a cada pareja de alumnos un modelo de carta que deben cumplimentar

3ª carta

A la atención del Sr. vendedor de barras de cortinas.

Zaragoza,

Estimado Sr. Vendedor:

Deseo recibir en mi domicilio una barra de cortina que mida ______________________________ de unidad

Atentamente:

Firmado: ________________________ y ______________________

SESIÓN NÚMERO 3

1. Objetivos de la sesión
Construir fracciones para expresar el resultado de la medida en una sola fase.

2. Contenidos

- La fracción con el significado de medida de longitud
- Interpretación del numerador de la fracción
- Interpretación del denominador de la fracción

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea propuesta:

Expresad la longitud de la barra de la cortina con una fracción, UTILIZANDO SUBUNIDADES DE UN SOLO TIPO.
Escribid la longitud de la barra en la carta de pedido que os acabo de entregar.

• El profesor institucionalizará el resultado de la medida de la longitud de la cortina como 3/4 de unidad. Comentará que la fracción se lee «tres cuartos» y que la fracción indica que la longitud de la barra de cortina es TRES partes iguales de longitud 1/4 de unidad.
• El profesor institucionalizará el significado de la fracción y de los términos de ésta: numerador y denominador.
• El profesor enuncia una nueva tarea

Expresar la longitud del listón que os entrego con una FRACCIÓN

• Los alumnos trabajan por parejas.
• Los resultados de la tarea se expondrán en la pizarra dedicando especial atención a las nuevas expresiones orales y escritas que se han introducido.

4. Material

- Los alumnos pueden acceder libremente a las barquillas que contienen subunidades de diferentes tamaños
- Cada pareja de alumnos recibe un listón de tamaño 4/3 de unidad.

5. Impresos para el alumno
Cada pareja de alumnos reflejará en la tarjeta que se le entrega la medida del listón que ha entregado el profesor.

TARJETA DE LA FICHA Nº 2

ALUMNO/A:____

1º. Para medir el listón he probado con las siguientes **subunidades** de longitud**:**

1ª.________________ porque ____

2ª.________________ porque ____

3ª.________________ porque ____

2º. La longitud del listón es: ____

3º. Escribe como se lee la longitud del listón: ____

4º. ¿Cuál es la unidad de medida que has utilizado? ____

5ª. ¿Qué indica el numerador de la fracción: ____

6º. ¿Qué indica el denominador de la fracción?: ____

SESIÓN NÚMERO 4

1. Objetivos de la sesión

Construir el sistema de representación fraccionario.
Introducir el concepto de fracciones equivalentes.

2. Contenidos

- Significar la fracción como resultado de una medida.
- Significar los términos de la representación fraccionaria.
- Observar diferentes formas de expresar el resultado de la medida de una misma cantidad de longitud.

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea:

Expresar, con una fracción, la medida de tres listones de madera que os entrego.

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual.
• Los resultados obtenidos se escribirán en la pizarra y serán analizados por los alumnos de la clase.

4. Material

- Se necesitan, al menos, 25 listones iguales de medidas 5/4, 5/6 y 2m. de longitud.
- También se necesitan para cada alumno: una caña unidad, diversas subunidades de la unidad.
- Al alumno que no tenga suficientes subunidades se les dará una o dos cañas unidad para que construya las subunidades que precise.
- Las subunidades estarán depositadas en barquillas. El alumno solicitará al profesor el tipo de subunidades y la cantidad de éstas que considere necesario.
- Los alumnos tienen en el aula de dos *fraccionadores* que son dispositivos para fraccionar unidad en partes iguales.
- Cada alumno recibirá una tarjeta de evaluación para que escriba las soluciones.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe completar la siguiente ficha:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 3 O FICHA EVALUACIÓN Nº 1

ALUMNO/A:____

MEDIDA DEL PRIMER LISTÓN:

1º. Escribe la fracción que expresa longitud del listón: __________ de unidad

2º. Escribe como se lee la longitud del listón: ____

3ª. Has fraccionado la unidad en _________ partes iguales.

4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ____

5º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? ____

SESIÓN NÚMERO 5

1. Objetivos de la sesión
Introducir el concepto de fracciones equivalentes.
Reforzar el significado de la fracción como resultado de una medida.
Realizar una evaluación semántica de la fracción.

2. Contenidos
- Significar la fracción como resultado de una medida.
- Significar los términos de la representación fraccionaria.
- Observar diferentes formas de expresar el resultado de la medida de una misma cantidad de longitud.

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea:

Os voy a entregar a cada grupo un sobre con un mensaje en su interior que os indica la longitud del listón que debéis construir. Cuando hayáis visto la longitud del listón volver a meter el mensaje en el sobre y guardarlo hasta que os lo pida. No digáis cuál es la medida del listón que vais a construir. Es un secreto.
Después de que lo hayáis construido pasaréis el listón a otro grupo, que os indicaré, sin decirles cuanto mide. El trabajo del otro grupo será medir el listón.
Vosotros también recibiréis un listón que deberéis medir.
Podéis utilizar la unidad y la plantilla "de los medios" para obtener más subunidades si las necesitáis.

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven por parejas.
• Se dispone de listones para que midan los alumnos: 5/10, 12/8, 9/6 y 4/8 unidades. Como puede constatarse se utilizan fracciones que deliberadamente no están simplificadas.
• Se distribuyen los grupos de forma que quienes emiten y reciben los mensajes se encuentren lo suficientemente alejados como para no intercambiar ayudas.
• Cuando un grupo haya construido el listón de la longitud del mensaje, pasará el listón al grupo que le indique el profesor. Este grupo realizará la medida del listón y preguntará al grupo del que procede el mensaje si la medida del listón que han construido coincide con la que acaban de medir.
A su vez el grupo que había recibido el encargo del profesor para construir un listón de longitud determinada, procederá de forma análoga enviando el listón al grupo que le indique el profesor para que lo mida y, después, comprobar si la medida del listón efectuada coincide con la que aparecía en el mensaje que el profesor había enviado.
• Los resultados obtenidos se escribirán en la pizarra y serán analizados por los alumnos de la clase. Para posibilitar debates entre todos los alumnos el profesor escribirá en la pizarra la fracción indicada en uno de sus mensajes y las fracciones obtenidas por los tres grupos que han medido el mismo listón.
• Para concluir la sesión intervendrá el profesor para dar sentido a la equivalencia de fracciones y para simbolizar la igualdad entre fracciones que expresan la misma cantidad de magnitud.

4. Material
- El profesor dará a cada grupo un sobre con un mensaje en su interior en el que pide a cada grupo que construya un listón de una determinada longitud.
- Cada grupo dispone al comenzar la tarea de un listón de 2 m. de longitud y, como en las tareas anteriores, tiene a su disposición la unidad de medida, la plantilla para construir subunidades.

5. Impresos para el alumno
El profesor dará a cada grupo un sobre con este mensaje en su interior:

Mensaje destinado a: ______________________________ y ____________________________
"Tenéis que construir un listón de longitud _____________ *de unidad*"
Leed y guardad este mensaje en el sobre.
Cuando hayáis construido el listón, se lo pasáis (el sobre os lo quedáis vosotros) al grupo formado por
______________________________ y ____________________________

Cuando este grupo haya medido vuestro listón deberéis abrir el sobre y comprobar si coincide la medida que han obtenido con la fracción de este mensaje.
MENSAJE ENVIADO POR EL PROFESOR

Una vez construido el listón, cada grupo envía el mensaje rellenado que se presenta abajo a la pareja indicada por el profesor:

Mensaje destinado a: ______________________________ y ___________________________
Con este mensaje os entrego un listón que tenéis que medir.
Escribid la longitud del listón y devolved este mensaje al profesor .
El listón mide: ____
MENSAJE ENVIADO POR _____________________ *y* _____________________

SESIÓN NÚMERO 6

1. Objetivo de la sesión
Evaluar semánticamente expresiones fraccionarias.

2. Contenidos

- La fracción con el significado de medida de longitud.
- Interpretación del numerador de la fracción.
- Interpretación del denominador de la fracción

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea propuesta:

> *Quieres construir un listón de longitud $\frac{5}{3}$ de unidad. ¿Cuántas subunidades necesitas?¿De qué longitud son las subunidades que necesitas?*

Enunciados similares se formulan con las fracciones 6/5, 4/7 y 7/8.
• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual.
• Sobre un listón de longitud 2 unidades cada alumno marcará con un rotulador por dónde realizaría el corte para construir un listón de longitud la fracción dada.

4. Material
- Tarjetas de evaluación

5. Impresos para el alumno
Por cada una de las cuatro fracciones

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 5 O DE EVALUACIÓN Nº 2
ALUMNO:____
Quieres construir un listón de longitud $\frac{5}{3}$ de unidad
¿Cuántas subunidades necesitas? ____
¿De qué longitud son las subunidades que necesitas? ______________________________

Tema 2: La fracción con significado de medida de cantidades de masa

Las dos sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 7 y nº 8) se introduce la fracción desde el modelo de medida de cantidades de masa.

SESIÓN NÚMERO 7

1. Objetivos de la sesión

Percibir la necesidad de medir con respecto a un atributo o magnitud.
Expresar el resultado de una medida de peso mediante fracciones.
Expresar el resultado de una medida de peso con fracciones que no necesariamente sean unitarias.

2. Contenidos

- La fracción con el significado de medida de masa.
- Interpretación del numerador de la fracción.
- Interpretación del denominador de la fracción.

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea propuesta:

Aquí tenéis una pieza que podemos llamarle "estira-cordones" que se coloca en un extremo del cordón que sirve para correr y descorrer las cortinas. Suele ser una pieza de plástico y metal, generalmente de plomo, cuyo peso hace que el cordón esté tenso, y así facilitar la maniobra de asir (coger) el cordón.

Deseáis encargar, por carta, estira-cordones como el que tenéis aquí. Escribid, en el folio que os entrego, lo que le dirías al vendedor para que os sirva estira-cordones como el que tenéis en la mesa.

• El profesor controla el trabajo de los alumnos y reorienta el mismo mediante dos intervenciones generales:

- Establece una pastilla de plastilina como unidad de medida. Además introduce en el aula balanzas de dos platillos para uso de los grupos de alumnos.
- Concreta la tarea de alumnos señalando que el resultado de la medida, el que hay que escribir en el mensaje, debe hacerse con una única fracción.

• La tarea inicial y las derivadas de las intervenciones del profesor, se presenta a todo el grupo en general y para realizarlas se forman grupos de 4 alumnos.

• Al finalizar cada una de las tareas parciales se celebra un debate que el profesor utiliza para poner de manifiesto las exigencias de la tarea. Además, reformula la tarea en el sentido ya indicado.

• Cuando los alumnos hayan entregado la carta al profesor, los resultados de la tarea expondrán en la pizarra dedicando especial atención a las representaciones orales y escritas que se han introducido.

4. Material

- Conviene utilizar estira-cordones y unidades de medida de modo que el peso de un estira-cordón sea 5/4 de la unidad. Si se toma como unidad el peso de una pastilla de plastilina de 50 gramos, el plomo deberá pesar 62,5 gramos.

5. Impresos para el alumno

Cada grupo de alumnos recibe una carta para enviar al vendedor y una tarjeta de evaluación

Carta

A la atención del Sr. Vendedor:
Zaragoza,
Estimado Sr. Vendedor:
Deseo recibir en mi domicilio una caja de estira-cordones. Cada estira-cordón debe pesar ______________ Atentamente:
Firmado: _______________________ y ______________________

TARJETA DE LA FICHA 6

ALUMNOS:____

1º. Para medir el peso de un estira-cordón hemos probado con las siguientes **subunidades:**

1ª.________________ porque ____

2ª.________________ porque ____

2º. El peso de un estira-cordón viene expresado por la fracción: _____________________________

3º. Escribe como se lee el peso de un estira-cordón: _____________________________________

4º. ¿Cuál es la unidad de medida que has utilizado? ______________________________________

5ª. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ____

6º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? ____

SESIÓN NÚMERO 8

1. Objetivos de la sesión

Introducir el concepto de fracciones equivalentes
Reforzar el significado de la fracción como resultado de una medida de peso.
Manejar el sistema de representación introducido para las fracciones.

2. Contenidos

- La fracción con el significado de medida de peso
- Fracciones equivalentes

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea propuesta (Ficha de trabajo nº 7):

> *Os voy a entregar a cada grupo un sobre con un mensaje en su interior que os indica el peso de una bola de plastilina que debéis construir. Cuando hayáis leído el mensaje volved a meterlo en el sobre y guardadlo hasta que os lo pida. No digáis cuál es el peso de la bola de plastilina que vais a construir. Es un secreto.*
> *Después de que lo hayáis construido pasaréis la bola a otro grupo, que os indicaré, sin decirles cuanto pesa. El trabajo del otro grupo será medir el peso de la bola.*
> *Vosotros también recibiréis una bola de plastilina que deberéis pesar*

• La tarea inicial y las derivadas de las intervenciones del profesor, se presenta a todo el grupo en general y para realizarlas se forman grupos de 4 alumnos.
• Al finalizar cada una de las tareas parciales se celebra un debate que el profesor utiliza para poner de manifiesto las exigencias de la tarea. Además, reformula la tarea en el sentido ya indicado.
• Cuando los alumnos hayan entregado la carta al profesor, los resultados de la tarea se expondrán en la pizarra dedicando especial atención a las representaciones orales y escritas que se han introducido.
• El profesor controla el trabajo de los alumnos e institucionaliza los resultados que han ido apareciendo en el sentido de que de las distintas formas de expresar el resultado de la medida es aconsejable utilizar la que tienen el denominador más pequeño.

4. Material

- 6 balanzas, una para cada grupo de 4 alumnos.
- 36 bloques de plastilina (3 bloques de plastilina para cada grupo)
- 6 sobres que contienen dos mensajes: uno del profesor y otro que deberán enviar a un determinado grupo con el mandato de pesar una bola de plastilina.

- Cuando los grupos estén pesando la bola de plastilina remitida por otro grupo, el profesor les ofrecerá más bloques de plastilina

5. Impresos para el alumno

Cada grupo de cuatro alumnos recibe de profesor una carta que contiene el mensaje que figura seguidamente, para que los alumnos lo cumplimenten y, a continuación, que cumplan las instrucciones siguientes:

Mensaje destinado a: ________________ ; ________________ ; ________________ y ________________

Tenéis que construir una bola de plastilina de peso ______________ *de unidad*

La unidad es el peso de un bloque de plastilina.

Leed y guardad este mensaje en el sobre.

Cuando hayáis construido la bola se la pasáis (el sobre os lo quedáis vosotros) al grupo formado por :

________________ ; ________________ ; ________________ y ________________

Cuando este grupo haya pesado vuestra bola deberéis abrir el sobre y comprobar si coincide la medida que han obtenido con la fracción de este mensaje.

MENSAJE ENVIADO POR EL PROFESOR

Impreso para que los alumnos de uno de los grupos lo cumplimenten y lo entreguen a otro grupo, que previamente les ha indicado el profesor:

Mensaje destinado a: ________________ ; ________________ ; ________________ y ________________

Con este mensaje os entrego una bola de plastilina que tenéis que pesar.

Escribid, con una fracción, el peso de la bola de plastilina y devolved este mensaje al profesor.

La bola pesa: ________________________ de unidad.

Mensaje enviado por : ________________ ; ________________ ; ________________ y ________________

Tema 3: La fracción con significado de medida de cantidades de superficie

En las cuatro sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 9 a nº 12) se introduce la fracción desde el modelo de medida de cantidades de superficie.

SESIÓN NÚMERO 9

1. Objetivos de la sesión

Medir cantidades de magnitud superficie cuya medida venga dada por una fracción unitaria.
Observar que figuras de diferente forma pueden poseer la misma cantidad de superficie.

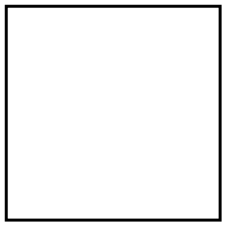
2. Contenidos

- La fracción con el significado de medida de superficie.

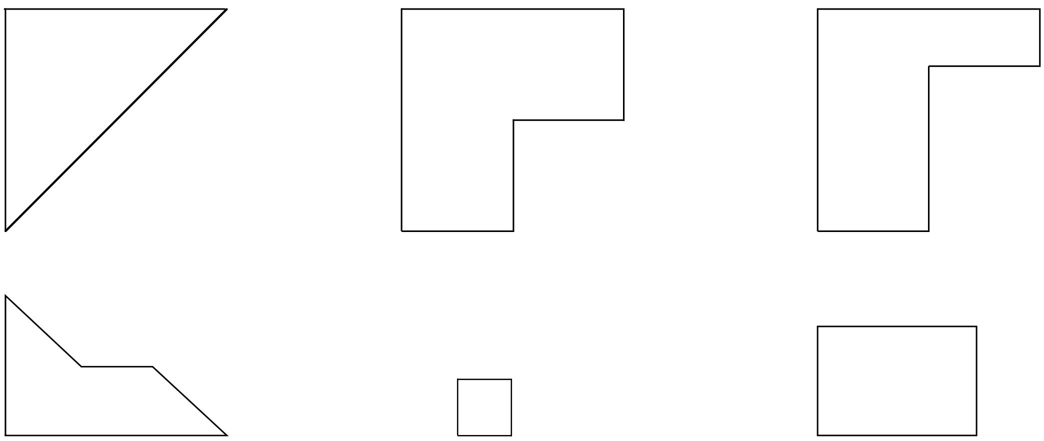
3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea propuesta (Ficha de Trabajo nº 8):

Consideras como unidad de superficie la medida de este mantel cuadrado (de 20 cm de lado, los alumnos disponen de la unidad de superficie, no conocen de la longitud del lado) *que denominamos UNIDAD DE SUPERFICIE.*



Tienes que medir la superficie de los siguientes manteles:



• La tarea se presenta a todo el grupo en general y para realizarla se forman grupos de dos alumnos.
• Todos los grupos miden la superficie de los seis manteles.

• El profesor enuncia la siguiente tarea:

Construye manteles de superficie 1/2 , 1/3 , 1/4 y 1/8 de unidad de superficie.

4. Material

- Los manteles se construyen con folios cuadrados de papel que aporta el profesor.
- Se puede utilizar papel de la misma superficie y forma que la unidad.

5. Impresos para el alumno.
En el mantel que se entrega a los alumnos, en la primera de la tareas, aparecerán escritas algunas preguntas como el nombre del alumno, la fracción que da la medida de la superficie y el significado del numerador y denominador de la fracción.

SESIÓN NÚMERO 10

1. Objetivos de la sesión
Que los alumnos perciban la magnitud superficie como cantidad de extensión.
Que los alumnos construyan cantidades de magnitud superficie cuya medida venga dada por una fracción unitaria.
Que los alumnos observen que figuras de diferente forma poseen la misma cantidad de superficie.

2. Contenidos
- Evaluación semántica de la fracción con significado de medida de superficie.
- Interpretación del numerador de la fracción.
- Interpretación del denominador de la fracción.

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea (Ficha de trabajo nº 9) propuesta:

> *Consideras como unidad de superficie la medida la de un mantel cuadrado como el que os entrego (cuadrado de 20 cm. de lado), que denominamos UNIDAD DE SUPERFICIE.*
> *Construye manteles cuya superficie sea 1/4 de unidad de superficie. Ganará el equipo que construya más manteles, pero de formas distintas.*
> Observación*: Los manteles de la misma forma pero que estén colocados en diferente posición se considerarán como iguales.*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y para realizarla se forman grupos de DOS alumnos.
• El profesor preguntará a cada grupo el número de manteles que hayan construido. El grupo que aporte un mayor número de manteles expondrá sus soluciones y el resto de los alumnos verificará las respuestas.

4. Material.
- Los manteles se construyen con papel.
- Se pueden utilizar folios de tamaño A4.

5. Impresos para el alumno.
No se piden resultados escritos

SESIÓN NÚMERO 11

1. Objetivos de la sesión
Que los alumnos midan cantidades de magnitud superficie cuya medida venga dada por una fracción no necesariamente unitaria.

2. Contenidos
- Interpretación de las fracciones como resultado de la medida de cantidades de superficie.
- Interpretación del numerador de la fracción.
- Interpretación del denominador de la fracción.

3. Metodología
• El profesor enuncia la siguiente tarea (Ficha de Trabajo nº 10):

> *Quieres medir la superficie del mantel que os entrego (de dimensiones 30 x 25 cms., cuya superficie es 3/2 u). La unidad de superficie que sigues utilizando es la unidad de superficie definida en la sesión anterior. Expresa con una FRACCIÓN la superficie del mantel.*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente.

• Finalizada esta tarea el profesor enuncia la siguiente tarea (Ficha de Trabajo nº 11):

Os entrego una cartulina (de dimensiones 30 x 25 cm., cuya superficie es 15/8 u). Si consideras como unidad de medida la unidad de superficie (papel cuadrado de 20 cms. de lado*). Debéis expresar, con una fracción, la medida de la cantidad de superficie de la cartulina.*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente.

4. Material

- Cada alumno recibe un mantel que se construye con un folio A4 al que se le corta una tira longitudinal de 1 cm..
- Cada alumno recibe dos unidades de superficie.

Para la segunda tarea se precisa el siguiente material

- 100 unidades de superficie (4 unidades para cada alumno)
- Cartulinas de dimensiones 30 x 25 cm
- Cinta de cello.

5. Impresos para el alumno

Una vez finalizada esta tarea cada alumno debe cumplimentar la ficha de evaluación de los aprendizajes. Las dos Fichas de trabajo tienen el mismo formato; reproducimos seguidamente una de ellas:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 11 O FICHA DE EVALUACIÓN Nº 3

ALUMNO/A:____

1º. Escribe con una fracción la superficie de la cartulina: _____ **de unidad**

2º. Escribe como se lee la fracción: ______________________________

3ª. ¿Qué indica el numerador de la fracción? __________________________

4º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? _________________________

SESIÓN NÚMERO 12

1. Objetivos de la sesión

Reforzar el significado de la fracción como resultado de una medida de superficie.

Poner de manifiesto la equivalencia de fracciones en situaciones de medida de superficie.

2. Contenidos

- Interpretación de las fracciones como resultado de la medida de cantidades de superficie.
- Interpretación del numerador de la fracción
- Interpretación del denominador de la fracción

3. Metodología

• El profesor enuncia la siguiente tarea (Ficha de Trabajo nº 12):

Os voy a entregar a cada grupo un sobre en el que os encargo construir un mantel RECTANGULAR QUE, ADEMÁS, TENDRÁ LA FORMA MÁS CUADRADA POSIBLE. El mantel será de papel de una determinada cantidad de superficie que os indico mediante una fracción que he escrito y he colocado en un sobre. Cuando hayáis dibujado y recortado el mantel se lo pasaréis al grupo que os indico para que midan la superficie del mantel. Cuando este último grupo haya realizado la medida, abriréis el sobre y compararéis la fracción del sobre y la que resulta de medir el mantel.

En esta tarea vamos a considerar como unidad de medida una unidad que es cuatro veces más pequeña que la unidad que hemos empleado en las tareas anteriores. (La unidad actual es la superficie de un cuadrado de 10 cm. de lado*).*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos en grupos de DOS alumnos.

• Al finalizar la tarea el profesor aconseja expresar la medida de la superficie del mantel con la fracción de denominador menor, dado que de esta forma disminuye el error achacable al proceso de medida.

4. Material

- Cada grupo dispone al comenzar la tarea de un folio de tamaño A4.
- Cada grupo tiene a su disposición 6 unidades de medida de superficie.
- Tijeras
- Cinta de cello.

5. Impresos para el alumno

Cada grupo de cuatro alumnos recibe de profesor una carta que contiene el mensaje que figura seguidamente, para que los alumnos lo cumplimenten y, a continuación, que cumplan las instrucciones

Mensaje destinado a: _______________ y _______________

Tenéis que construir un mantel rectangular que tenga la forma más cuadrada posible y de superficie _____________ de unidad

Leed y guardad este mensaje en el sobre.

Cuando hayáis dibujado y recortado el mantel se la pasáis (el sobre os lo quedáis vosotros) al grupo formado por : _______________ y _______________

Cuando este grupo haya medido vuestro mantel deberéis abrir el sobre y comprobar si coincide la medida que han obtenido con la fracción de este mensaje.

MENSAJE ENVIADO POR EL PROFESOR

Impreso para que los alumnos de uno de los grupos lo cumplimenten y lo entreguen a otro grupo, que previamente les ha indicado el profesor:

Mensaje destinado a: _______________ y _______________

Os entrego un mantel que tenéis que medir.

Escribid la superficie del mantel, introducid este mensaje en el sobre y entregad el sobre al profesor.

El mantel mide: ______________________ unidades de superficie.

Mensaje enviado por : _______________ y _______________

Tema 4: La equivalencia de fracciones

Las dos sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 13 y nº 14) se estudia el concepto de equivalencia de fracciones. Se trata de que los escolares comprendan que la medida de una misma cantidad de magnitud puede expresarse con fracciones diferentes. Además, se pretende que avancen hacia la formulación de una regla que facilite la búsqueda de fracciones equivalentes a una dada.

SESIÓN NÚMERO 13

1. Objetivos de la sesión

Significado del concepto de fracciones equivalentes

Cálculo de fracciones equivalentes a una dada.

2. Contenidos

- Interpretación de las fracciones equivalentes como expresiones de la misma cantidad de magnitud.
- Técnica de búsqueda de fracciones equivalentes

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea propuesta (Ficha de trabajo nº 13):

Encuentra TRES fracciones equivalentes a la fracción 6/4. Indica cómo las has encontrado.

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de manera individual.

• Después de recoger las respuestas escritas de los alumnos, éstos expondrán en la pizarra las fracciones equivalentes encontradas indicando el procedimiento utilizado. Es importante que expongan las estrategias utilizadas dado que la secuencia de enseñanza pretende, de modo gradual, abandonar las estrategias más cercanas al modelo (manipulación de materiales) para dar paso a estrategias más abstractas y también más rápidas.

4. Material

- Los alumnos disponen del material manipulativo que han utilizado en tareas anteriores.
- Los alumnos tendrán la opción de elegir el tipo de material que deseen utilizar.
- Una tarjeta de evaluación con el enunciado de la tarea donde deben plasmar la resolución de la tarea.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente. Se le entregan 3 de estas tarjetas para que incluya, en cada una de ellas, cada una de las tres fracciones equivalentes que exige la tarea.

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 13

ALUMNO/A:____

Encuentra TRES fracciones equivalentes a la fracción 6/4. Indica cómo las has encontrado.

PRIMERA RESPUESTA:

Una fracción equivalente a 6/4 de unidad es: ______________________ de unidad.

A) Si **has utilizado materiales** contesta las siguientes preguntas:

1. He construido un objeto de medida 6/4 de unidad. La unidad que utilizo es: ___________________
2. He fraccionado la unidad en ________________________________ subunidades
3. He completado la medida del objeto con _________________________ subunidades

B) Si **has obtenido la fracción equivalente de otra forma, sin utilizar materiales**, explica como lo has hecho: ____

SESIÓN NÚMERO 14

1. Objetivos de la sesión
Significado del concepto de fracciones equivalentes
Cálculo de fracciones equivalentes a una dada.

2. Contenidos
- Interpretación de las fracciones equivalentes como expresiones de la misma cantidad de magnitud.
- Técnica de búsqueda de fracciones equivalentes

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea propuesta (Ficha de trabajo nº 14):
Escribe CUATRO fracciones equivalentes a la fracción 2/4 e indica que has hecho para obtenerlas. No debéis utilizar material, pero si no sabéis como resolver la tarea podéis pedir el material que deseéis".
• El profesor enuncia la siguiente tarea complementaria de la anterior (Ficha de trabajo nº 15):
Indica cómo podrías encontrar CIEN fracciones equivalentes a la fracción 2/4. Debes inventar una regla para obtener fracciones equivalentes a una fracción dada.

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de manera individual.
• Al finalizar la tarea habrá una intervención del profesor, sustentada en todas las respuestas dadas por los alumnos, en la repasará el concepto de equivalencia de fracciones. Es importante representar de diferentes formas: verbales, gráficas y escritas, las acciones implicadas en la construcción de fracciones equivalentes.
• Una vez finaliza la ficha de trabajo nº 15 y comentadas las respuestas de los alumnos, el profesor institucionaliza una regla para encontrar fracciones equivalentes:

Dada una fracción se pueden obtener fracciones equivalentes a la dada si se multiplica o se divide el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número (2, 3, 4, 5, 6, ….).
De forma simbólica: $\frac{2}{4} = \frac{2x2}{4x2} = \frac{4}{8}$ $\qquad$ $\frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$

4. Material.
- En principio, los alumnos no utilizan material.
- Si algún alumno no sabe cómo resolver la tarea se le permitirá utilizar el material que solicite. El profesor dará el material a cada alumno que se lo pida y anotará que material utiliza.
- Una tarjeta de evaluación con el enunciado de la tarea donde deben plasmar la resolución de la tarea.

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno, en la primera parte de la tarea, debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 14
ALUMNO/A:____________________

PRIMERA FRACCIÓN

Una fracción equivalente a 2/4 es ____________________

Para encontrar la fracción equivalente:

☐ He pensado en la magnitud siguiente: ____________ ,
he utilizado material y he hecho lo siguiente: ____________________

☐ He pensado en la magnitud siguiente: ________, y he realizado el siguiente dibujo:

☐ He pensado en la magnitud siguiente: ____________ , y he realizado el siguiente razonamiento: ____________________

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para encontrar la fracción equivalente.

Se le entregan tres de estas tarjetas para que incluya, en cada una de ellas, cada una de las tres fracciones equivalentes que exige la tarea.

En la ficha de trabajo nº 15 los alumnos deben cumplimentar la siguiente ficha:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 15

ALUMNO/A:______________________________

Inventa una regla para encontrar CIEN fracciones equivalentes a la fracción 2/4.

Para encontrar fracciones equivalentes a la fracción 2/4 he hecho____________________

La regla que he inventado es correcta porque ______________________________

Tema 5: Relaciones de orden entre fracciones

Las cuatro sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 16 a nº 20) se estudia la relación de orden entre fracciones. Los escolares han de determinar cuál de las dos fracciones dadas es mayor que la otra, sin que la comparación exija utilizar la equivalencia de fracciones. Además, se quiere avanzar en ideas de densidad respecto del orden intercalando varias fracciones entre dos dadas.

SESIÓN NÚMERO 15

1. Objetivos de la sesión

Que los alumnos adquieran estrategias para comparar fracciones.
Se pretende que abandonen las estrategias manipulativas y que los razonamientos utilizados se basen en el modelo de la medida desde alguna de las magnitudes estudiadas.

2. Contenidos

- Comparación de fracciones.
- Técnica de comparación de fracciones

3. Metodología

• El profesor interviene para recordar que la fracción expresa el resultado de la medida de una cantidad de alguna de las magnitudes utilizadas en las sesiones precedentes. Además, recuerda que la expresión de la medida no es única sino que existen muchas formas distintas de expresarla. La tarea que se emprende ahora es la de poder comparar fracciones.
• El profesor enuncia dos tareas:

Ficha nº 16.- Tengo dos servilletas: una de superficie $\frac{3}{4}$ unidad y otra de superficie $\frac{7}{4}$ unidad. ¿Cuál de las dos servilletas tiene mayor superficie?.

Ficha nº 17.- Has cortado dos listones de madera. La longitud de uno de ellos es $\frac{6}{5}$ unidad y la del otro $\frac{6}{7}$ unidad. ¿Qué listón es más corto?

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de manera individual.
• Después de que los alumnos resuelvan, por escrito, la tarea el profesor solicitará a algunos de ellos que expongan de forma oral sus respuestas.
• Después de revisar los trabajos el profesor dedicará especial atención a los diferentes razonamientos que hayan utilizado los alumnos para ordenar fracciones.

4. Material

- En principio, los alumnos no utilizan material.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente para dar la respuesta a la Ficha nº 16:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 16 Fecha ___________
ALUMNO/A:___________________________________
"Tengo dos servilletas: una de superficie $\frac{3}{4}$ unidad y otra de superficie $\frac{7}{4}$ unidad. ¿Cuál de las dos servilletas tiene mayor superficie?"
SOLUCIÓN: ___________________________________

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para ordenar las fracciones.

☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ___________________________

☐ He utilizado el siguiente dibujo:

☐ He realizado el siguiente razonamiento: ___________________________

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente para dar la respuesta a la Ficha nº 17:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 17 Fecha ___________

ALUMNO/A:___________________________

Has cortado dos listones de madera. La longitud de uno de ellos es $\frac{6}{5}$ *unidad y la del otro* $\frac{6}{7}$ *unidad.*

¿Qué listón es más corto?

SOLUCIÓN: ___________________________

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para ordenar las fracciones.

☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ___________________________

☐ He utilizado el siguiente dibujo:

☐ He realizado el siguiente razonamiento: ___________________________

SESIÓN NÚMERO 16

1. Objetivos de la sesión

Significado de la ordenación de fracciones y de expresiones como "mayor que" y "menor que".
Encontrar diferentes procedimientos para ordenar fracciones

2. Contenidos

- Comparación de fracciones. Términos y símbolos
- Técnica de comparación de fracciones

3. Metodología

• El profesor enuncia dos tareas:

Ficha 18.- He comprado dos tuercas: una tiene un diámetro $\frac{3}{8}$ *de pulgada y otra es de* $\frac{1}{2}$ *pulgada. ¿Qué tuerca es la de menor diámetro?*

Ficha 19.- Has comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de $\frac{5}{4}$ *unidades y otra tiene una superficie de* $\frac{4}{3}$ *unidades. ¿Qué cartulina tiene menor superficie?*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de manera individual.
• Después de que los alumnos resuelvan, por escrito, la tarea el profesor solicitará a algunos de ellos que expongan de forma oral sus respuestas.
• El profesor recomendará a los alumnos la utilización de estrategias basadas en razonamientos.
• Al finalizar la revisión de las respuestas de los alumnos el profesor tendrá una intervención para recordar las diferentes estrategias para comparar fracciones (que también sirven para encontrar fracciones intermedias entre dos dadas): utilizando el material, realizando un gráfico, igualando denominadores, igualando numeradores y comparar con una fracción intermedia conocida.

4. Material

- En principio, los alumnos no utilizan material.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente para dar la respuesta a la Ficha nº 18:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 18 Fecha ___________

ALUMNO/A:____

He comprado dos tuercas: una tiene un diámetro $\frac{3}{8}$ *de pulgada y otra es de* $\frac{1}{2}$ *pulgada. ¿Qué tuerca es la que tiene menor diámetro?*

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para ordenar las fracciones.

- ☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ___________________
- ☐ He utilizado el siguiente dibujo:
- ☐ He realizado el siguiente razonamiento: ___________________

En la Ficha nº 19 se entrega a los alumnos la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 19 O FICHA DE EVALUACIÓN Nº 6 Fecha ___________

ALUMNO/A:____

Has comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de $\frac{5}{4}$ *unidades y otra tiene una superficie de* $\frac{4}{3}$ *unidades. ¿Qué cartulina tiene menor superficie?*

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para ordenar las fracciones.

- ☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ___________________
- ☐ He utilizado el siguiente dibujo:
- ☐ He realizado el siguiente razonamiento: ___________________

SESIÓN NÚMERO 17

1. Objetivos de la sesión

Consolidar los procedimientos de ordenación de fracciones. Los procedimientos manipulativos serán desechados por lentos.

Ampliar los procedimientos de ordenación de fracciones cuando éstas tengan denominadores primos entre sí.

Introducir el concepto de densidad de las fracciones: entre dos fracciones siempre existe otra fracción.

Introducir el sistema de representación de la recta numérica.

2. Contenidos

- Comparación de fracciones. Términos, símbolos y técnicas
- La densidad de las fracciones respecto del orden

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea propuesta (Ficha de trabajo nº 20):

Deberéis encontrar fracciones intermedias entre las fracciones 1/3 y 1. Las fracciones que sean equivalentes sólo se contabilizarán una vez. Disponéis de 15 minutos"

"Pasados los 15 minutos entregaréis la tarjeta de evaluación con el número de fracciones encontradas y la estrategia que habéis utilizado para hallarlas. Después, los grupos saldrán a la pizarra a escribir las fracciones comenzando por el grupo que mayor número de fracciones haya encontrado. Si un grupo escribe una fracción incorrecta pierde su turno y continúa el equipo que había encontrado un número inmediatamente menor. Ganará el PRIMER grupo que escriba más fracciones que cumplan las condiciones de la tarea.

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven en grupos de cuatro alumnos.
• Después de que los alumnos resuelvan, por escrito, la tarea el profesor solicitará a algunos de ellos que expongan de forma oral sus respuestas.
• El profesor recomendará a los alumnos la utilización de estrategias basadas en razonamientos.
• El profesor observará los diferentes procedimientos utilizados por éstos para la búsqueda de fracciones y preguntará a cada grupo el número de fracciones encontradas.
• Cada grupo entregará al profesor la tarjeta de evaluación con las fracciones que han encontrado, de modo que el profesor se convierte en el árbitro del juego.
• El representante del grupo que afirme haber encontrado mayor número de fracciones saldrá a la pizarra y las escribirá. El resto de los grupos comprobarán que cada una de las fracciones escritas cumple las condiciones de la tarea. Si alguna de las fracciones no esta comprendida entre 1/3 y 1 ese grupo ha perdido y su representante debe sentarse para dejar que un representante del grupo que le seguía en el número de fracciones halladas pase a la pizarra y las escriba. Y así, sucesivamente, hasta llegar al primer grupo que tenga las fracciones encontradas correctas.
• Los alumnos explicarán cómo han obtenido las fracciones. El profesor velará porque aparezcan todas las posibles estrategias.
• El profesor hará una intervención final para establecer diferencias entre los números naturales y las fracciones: números que se escriben de diferente forma pero que significan lo mismo y que entre dos fracciones siempre podemos encontrar otra. Además, el profesor situará sobre una semirrecta las fracciones que aportan los alumnos en la resolución de la tarea. Con este sistema de representación una fracción vendrá dada por un punto: el extremo del segmento que tiene el otro extremo en el origen de la semirrecta y la medida de su longitud es la fracción que se representa

4. Material

- Cada grupo dispondrá de listones de madera, de plastilina y balanza, de folios, y de las respectivas unidades de medida correspondientes a cada una de las magnitudes.

5. Impresos para el alumno

Cada grupo de cuatro alumnos debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente para dar la respuesta al juego propuesto por el profesor.

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 20 Fecha ____________

ALUMNOS: _______________, _______________, _______________ y _______________

	Estrategia utilizada			
Fracción entre 1/3 y 1	empleando material	igualando denominadores	igualando numeradores	otra
1º______________________	□	□	□	□
2º______________________	□	□	□	□
3º______________________	□	□	□	□
4º______________________	□	□	□	□
5º______________________	□	□	□	□
6º______________________	□	□	□	□

7º______________________	□	□	□	□
8º______________________	□	□	□	□
9º______________________	□	□	□	□
10º______________________	□	□	□	□

Marca con una cruz las estrategias que hayáis utilizado para encontrar cada fracción.

SESIÓN NÚMERO 18

1. Objetivos de la sesión
Ordenar e intercalar fracciones entre dos dadas.

2. Contenidos
- La densidad de las fracciones respecto del orden

3. Metodología
• El profesor enuncia las tareas propuestas:
a) Ordena las fracciones 3/2 y 7/8 de unidad".
b) Encuentra OCHO fracciones que estén comprendidas entre 7/8 y 3/2 de unidad. Indica cómo has obtenido las fracciones"
c) ¿Cuántas fracciones hay entre 7/8 y 3/2?
• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual.
• Si lo desean los alumnos pueden utilizar material.
• Los alumnos según vayan terminando la tarea la entregarán al profesor para su evaluación. No obstante, cuando todos los alumnos la hayan realizado el profesor solicitará que algunos de ellos escriban los resultados en la pizarra y después procederá a una evaluación conjunta de las respuestas. Las soluciones de la tarea se escribirán en la pizarra empleando la representación de la recta numérica.
• Cuando aparezcan fracciones susceptibles de ser simplificadas el profesor indicará a los alumnos que las escriban de la forma más simplificada posible

4. Material.
- Cada alumno dispondrá de listones de madera, de plastilina y balanza, de folios, y de las respectivas unidades de medida correspondientes a cada una de las magnitudes.

5. Impresos para el alumno.
Cada grupo de cuatro alumnos debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 21 Fecha ____________

ALUMNO/A: ____

PRIMERA PREGUNTA:

Ordena las fracciones $\frac{3}{2}$ *y* $\frac{7}{8}$ *de unidad.*

SOLUCIÓN: La fracción $\frac{7}{8}$ es ____________ que $\frac{3}{2}$, porque: ______________________

SEGUNDA PREGUNTA:

Encuentra OCHO fracciones que estén comprendidas entre $\frac{7}{8}$ *y* $\frac{3}{2}$ *de unidad*

Fracción	
1º_____________	porque ____
2º_____________	porque ____
3º_____________	porque ____
4º_____________	porque ____
5º_____________	porque ____
6º_____________	porque ____
7º_____________	porque ____
8º_____________	porque ____

Tema 6: La fracción con significado de medida de cantidades discretas

Las tres sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 19 a nº 21) se estudia la fracción como resultado de la medida de cantidades discretas. La magnitud cardinalidad presenta peculiaridades que aconsejan hacer un tratamiento específico de las mismas por razones de uso social. Los alumnos han de medir cantidades de magnitudes discretas y han de aplicar la técnica que facilita el cálculo de la fracción de una cantidad.

SESIÓN NÚMERO 19

1. Objetivos de la sesión.

Reconocer la cardinalidad como una nueva magnitud.

Introducir la fracción como medida de la cardinalidad

2. Contenidos

- La fracción para expresar la medida de la magnitud cardinalidad.

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea siguiente:

Ficha de Trabajo nº 22.- Has comprado una bolsa que contiene 6 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 3 bombones. ¿Qué parte de la bolsa has comido?"

Si lo deseáis, podéis utilizar los siguientes policubos que os entrego: tres de cada color.

Una vez enunciada la tarea el profesor hace una intervención general: en esta tarea tienes que MEDIR LA CANTIDAD DE BOMBONES QUE HAS COMIDO tomando como UNIDAD DE MEDIDA LA CANTIDAD DE BOMBONES QUE HAY EN LA BOLSA. En esta tarea no nos preocupa el peso, ni la longitud, ni la superficie de los bombones (pensamos que todos son iguales); lo que nos interesa de los bombones es la CANTIDAD de bombones que hay. La magnitud que consideramos se denomina cardinalidad.

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y el profesor la resuelve en la pizarra con las indicaciones que recibe de los alumnos..

• El profesor enuncia la tarea siguiente:

Ficha de Trabajo nº 23.- Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 8 bombones. ¿Qué parte de la bolsa has comido? Si lo deseáis, podéis utilizar los policubos

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual

4. Material.

- Centicubos o policubos.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar las dos tarjetas de evaluación. Ambas tienen el mismo formato. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de Trabajo nº 23:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 23 Fecha ____________
ALUMNO/A: ____
Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 8 bombones.
¿Qué parte de la bolsa has comido?
Vas a resolver el problema de diferentes maneras: la unidad es el número de bombones que hay en la bolsa.
1º Si fraccionas la unidad en 12 partes iguales, cada subunidad (es un bombón) es de medida $\frac{1}{12}$ de unidad.
Y la solución es: he comido $\frac{\quad}{\quad}$ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

2º Si fraccionas la unidad en 6 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 2 bombones) es de medida $\frac{1}{6}$ de unidad.
Y la solución es: He comido ―― de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

3º Si fraccionas la unidad en 3 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 4 bombones) es de medida $\frac{1}{3}$ de unidad.
Y la solución es: he comido ―― de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

---

SESIÓN NÚMERO 20

1. Objetivos de la sesión
Construir el sistema de representación fraccionario en el modelo de medida con la magnitud cardinalidad.
Calcular la fracción de una cantidad discreta

2. Contenidos
- La fracción para expresar la medida de la magnitud cardinalidad.
- La fracción de una cantidad discreta

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea siguiente:
Ficha de Trabajo nº 24.- Has comprado una bolsa que contiene 16 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 12 bombones. ¿Qué parte de la bolsa que has comido?
Si lo deseáis, podéis utilizar los siguientes policubos que os entrego.
La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual

• Una vez finalizada esta tarea el profesor propone los dos problemas siguientes que constituyen la Ficha de trabajo nº 25:

Problema 1.- Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{1}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?.*

Problema 2.- Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{3}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?*

La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual

4. Material.
- Centicubos o policubos.

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación, para dar respuesta a la Ficha de trabajo nº 24:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 24 O TARJETA DE EVALUACIÓN Nº 8 Fecha_________
ALUMNO/A:____

Has comprado una bolsa que contiene 16 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 12 bombones.
¿Qué parte de la bolsa has comido?

Vas a resolver el problema de diferentes maneras. La unidad es el número de bombones que hay en la bolsa.

1º Si fraccionas la unidad en 16 partes iguales, cada subunidad (es un bombón) es de medida $\frac{1}{16}$ de la unidad.
Y la solución es: he comido $\frac{}{}$ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

2º Si fraccionas la unidad en 8 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 2 bombones) es de medida $\frac{1}{8}$ de la unidad.
Y la solución es: he comido $\frac{}{}$ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

3º Si fraccionas la unidad en 4 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 4 bombones) es de medida $\frac{1}{4}$ de la unidad.
Y la solución es: he comido $\frac{}{}$ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

Después de resolver los dos problemas propuestos, los alumnos deben cumplimentar la tarjeta siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 25 Fecha___________
ALUMNO/A:____

PRIMER PROBLEMA

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{1}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?*

SOLUCIÓN: He comido ____

Explica cómo has obtenido la solución: ____

SEGUNDO PROBLEMA

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{3}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?*

SOLUCIÓN: He comido ____

Explica cómo has obtenido la solución: ____

SESIÓN NÚMERO 21

1. Objetivos de la sesión
Reconocer la cardinalidad como una nueva magnitud.
Calcular la fracción de una cantidad discreta.

2. Contenidos
- La fracción para expresar la medida de la magnitud cardinalidad.
- La fracción de una cantidad discreta

3. Metodología

• El profesor propone la tarea siguiente:

Ficha de Trabajo nº 26.- En mi clase estamos 25 alumnos en total entre niños y niñas. Si sabemos que los $\frac{4}{5}$ de los alumnos de la clase son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase? ¿Cuántos niños hay en la clase?

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual.

• El profesor recomienda a los alumnos que no utilicen material y les recomienda realizar dibujos. Para orientarles escribe 25 círculos en la pizarra formando una distribución simétrica de 5 filas y 5 columnas.

• Una vez finalizada esta tarea el profesor propone la resolución del siguiente problema:

Ficha de Trabajo nº 27.- Tienes una bolsa con 245 canicas, y das a un amigo los $\frac{3}{7}$ de las canicas. ¿Cuántas canicas le has dado?

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual.

4. Material.

- Centicubos o policubos.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar las siguientes tarjeta de evaluación que corresponden a la Fichas de Trabajo nº 26 y nº 27:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 26 O TARJETA DE EVALUACIÓN Nº 9

ALUMNO/A:____

En mi clase estamos 25 alumnos en total entre niños y niñas. Si sabemos que los $\frac{4}{5}$ de los alumnos de la clase son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase?. ¿Cuántos niños hay en la clase?

SOLUCIÓN: En la clase hay ________ niñas. En la clase hay ________ niños.

Explica como has obtenido la solución: ______________________________

Después de resolver el problema, contesta las preguntas:

1º ¿Cuál es la unidad de medida? ______________________________

2º ¿Qué indica el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$? ______________________________

3º ¿Qué indica el numerador de la fracción $\frac{4}{5}$? ______________________________

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 27 FECHA ____________

ALUMNO/A:____

Tienes una bolsa con 245 canicas, y das a un amigo los $\frac{3}{7}$ de las canicas. ¿Cuántas canicas le has dado?

SOLUCIÓN: Has dado ________ canicas.

Explica como has obtenido la solución: ______________________________

Después de resolver el problema, contesta las preguntas:

1º ¿Cuál es la unidad de medida? ______________________________

2º ¿Qué indica el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$?______________________________

3º ¿Qué indica el numerador de la fracción $\frac{4}{5}$? ______________________________

Modificación de la Propuesta Didáctica de 4º curso de Educación Primaria en la Segunda Etapa

La Propuesta Didáctica para cuarto curso de Educación Primaria, en la Segunda Etapa, se articula en 21 sesiones de aula que se muestran, de forma secuencial, en el mismo orden en que se han implementado:

Sesiones de enseñanza en 4º curso de Educación Primaria

Sesiones 1 a 6	Tema 1.- La fracción con significado de medida de cantidades de longitud Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 1 a nº 8
~~Sesiones 7 y 8~~	Tema 2.- La fracción con significado de medida de cantidades de masa Se suprime este tema de la Propuesta de la Segunda Etapa.
Sesiones 7 a 12	Tema 3.- La fracción con significado de medida de cantidades de superficie Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 9 a nº 16
Sesiones 13 a 16	Tema 4.- La equivalencia de fracciones Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 17 a nº 21
Sesiones 17 y 18	Tema 5.- Relaciones de orden entre fracciones Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 22 a nº 25
Sesiones 19 a 21	Tema 6.- La fracción con significado de medida de cantidades discretas Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 26 a nº 31

Tema 1: La fracción con significado de medida de cantidades de longitud

Se dedican 6 sesiones y se proponen 8 Fichas de Trabajo para introducir la fracción desde el modelo de medida de cantidades de longitud.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
1	**FT2E nº 1 nueva**	FT1E nº 1
2	**FT2E nº 2 = FT1E nº 1**	FT1E nº 1
3	**FT2E nº 2 = FT1E nº 1** **FT2E nº 3 = FT1E nº 2**	FT1E nº 1 FT1E nº 2
4	**FT2E nº 4 = FT1E nº 3**	FT1E nº 3
5	**FT2E nº 5 nueva** **FT2E nº 6 nueva**	FT1E nº 4
6	**FT2E nº 7 y nº 8 = FT1E nº 5**	FT1E nº 5

Con respecto a la Propuesta de la Primera Etapa se producen las modificaciones siguientes:

• En la sesión Nº 1, antes de proponer la Ficha de Trabajo nº 1, se plantea la siguiente situación problemática: *Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared (la longitud de la cortina mide 1/2 de la unidad). La longitud de la barra queréis que sea igual que la largura de la cortina. ¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda la barra de la cortina que tenga la longitud deseada?*

Esta tarea se presenta antes de que los alumnos resuelvan la situación análoga de medida de un listón (de longitud 3/4 de unidad) con la intención de que intuyan la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad de medida. Los alumnos utilizan materiales tangibles: tiras de papel de longitud la unidad y el listón de madera que deben medir. Sin embargo, no reciben impresos para escribir la solución.

• En la Segunda Etapa se introducen los siguientes cambios metodológicos:

1º Los alumnos utilizan tiras de papel en lugar de cañas previamente fraccionadas. De esta forma se consigue que los alumnos relacionen, en todo momento, el tamaño de las subunidades con el de la unidad de medida.

2º Se recomienda a los alumnos afronten la búsqueda de la subunidad que resuelve el problema de la medida DE FORMA SISTEMÁTICA, es decir, que prueben con la unidad de longitud, después con 1/2 de unidad, con 1/3 de unidad, y así sucesivamente.

3º Los alumnos copian en sus cuadernos los significados de los términos de la fracción después de haber cumplimentado la tarjeta de evaluación de la tarea.

• Se suprime la situación de comunicación (FT1E nº 4) que se propone en la sesión Nº 5 de la Primera Etapa y en su lugar se refuerza la técnica del fraccionamiento de la unidad en partes iguales y se proponen dos nuevas Ficha de Trabajo de medida, cuyos enunciados son:

Expresar, con una fracción, la medida del listón de madera que os entrego (de medida 6/5 unidades).

Expresar, con una fracción, la medida del listón de madera que os entrego (de medida 2 unidades).

Las tarjetas de tarjeta de evaluación de estas tareas tienen un formato común que mostramos a continuación:

TARJETA DE LA FICHA Nº 6 Fecha _____________

ALUMNO/A:____

1º. Escribe la fracción que expresa longitud del listón:

__________ de unidad

2º. Escribe como se lee la longitud del listón: ______________________________

3ª. Has fraccionado la unidad en _________ partes iguales.

4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ______________________________

5º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? ______________________________

• Las Fichas de Trabajo nº 7 y nº 8 son las tareas de evaluación semántica de la fracción que se corresponden con la FT1E nº 5 o Ficha de Evaluación nº 2 de la Primera Etapa.

Tema 2: La fracción con significado de medida de cantidades de masa

• Se suprime este tema de la Propuesta de la Segunda Etapa.

Tema 3: La fracción con significado de medida de cantidades de superficie

Se dedican 6 sesiones y se proponen 8 Fichas de Trabajo (nº 9 a nº 16) para introducir la fracción desde el modelo de medida de cantidades de superficie.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
7	**FT2E nº 9 = FT1E nº 8**	
8	**FT2E nº 10 = FT1E nº 9**	
9	**FT2E nº 11 = FT1E nº 10** **FT2E nº 12 = FT1E nº 11**	FT1E nº 8
10	**FT2E nº 13 nueva** **FT2E nº 14 nueva**	FT1E nº 9
11	**FT2E nº 15 nueva**	FT1E nº 10 FT1E nº 11
12	**FT2E nº 16 nueva**	FT1E nº 12

Con respecto a la Propuesta de la Primera Etapa se producen las modificaciones siguientes:

• La situación de comunicación (Ficha nº 12) de la Primera Etapa se suprime porque su gestión en el aula resulta compleja y se introducen cuatro nuevas tareas. En su lugar, se proponen cuatro nuevas tareas.

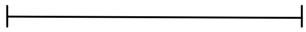
• La primera de las nuevas tareas (Ficha de Trabajo nº 13) plantea la situación de medida siguiente:

> *Os entrego una cartulina (cuya superficie es 11/8 u). Si consideras como unidad de medida la unidad de superficie* (papel cuadrado de 20 cms. de lado*). Debéis expresar, con una fracción, la medida de la cantidad de superficie de la cartulina.*

La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente.

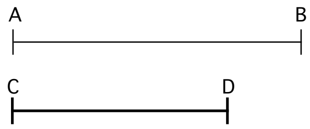
• La segunda y tercera tarea (Fichas de Trabajo nº 14 y nº 15) tienen un formato común y plantean actividades de medida y de evaluación semántica de la fracción. Cada una de estas fichas plantean dos actividades de medida y dos de evaluación semántica de la fracción. La novedad radica en que las actividades están formulada mediante un soporte gráfico: la unidad se representa gráficamente mediante un segmento, en el caso de la Ficha nº 14 que trabaja la magnitud longitud, o la figura de un cuadrado en el caso de la Ficha nº 15 que trabaja la magnitud superficie. A pesar de que las tareas están formuladas de forma gráfica, los alumnos disponen de trozos de papel de la misma forma y cantidad de magnitud que la unidad por si desean realizar acciones físicas.
La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente. Cuando concluyen las tareas, los alumnos cumplimentan las tarjetas de evaluación de las dos Fichas de trabajo que mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 14. FECHA: _______________

Si la unidad de longitud es: 

PRIMERA PREGUNTA

Expresa, con una fracción, la longitud del segmento que une los puntos C y D.

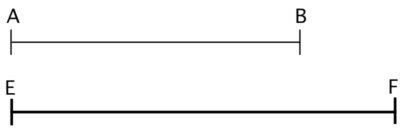


SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES __________ DE LA UNIDAD.

Explica que has hecho para medir: ____

SEGUNDA PREGUNTA

Expresa, con una fracción, la longitud del segmento que une los puntos E y F.

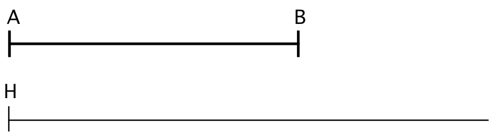


SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES __________ DE LA UNIDAD.

Explica que has hecho para medir: ____

TERCERA PREGUNTA

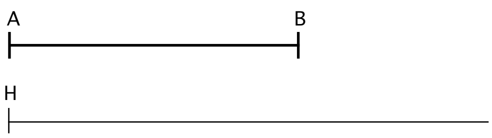
Dibuja, a partir del punto H, un segmento que mida una longitud de $\frac{5}{4}$ unidad.



Explica que has hecho para dibujar el segmento: ____

CUARTA PREGUNTA

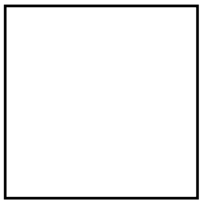
Dibuja, a partir del punto H, un segmento que mida una longitud de $\frac{4}{3}$ unidad.



Explica que has hecho para dibujar el segmento: ____

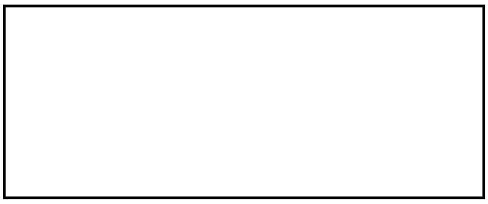
TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 15. FECHA: ______________

SI LA UNIDAD DE SUPERFICIE ES:



PRIMERA PREGUNTA:

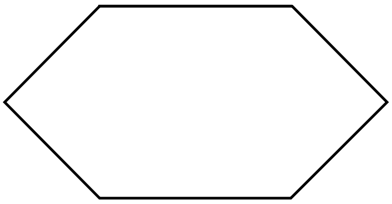
EXPRESA, CON UNA FRACCIÓN, LA SUPERFICIE DE LA SIGUIENTE FIGURA:



SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES _________ DE LA UNIDAD.

SEGUNDA PREGUNTA:

EXPRESA, CON UNA FRACCIÓN, LA SUPERFICIE DE LA SIGUIENTE FIGURA:



SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES _________ DE LA UNIDAD.

TERCERA PREGUNTA:

Dibuja una figura cuya superficie sea $\frac{5}{4}$ de unidad.

Explica que has hecho para dibujar la figura: ____

CUARTA PREGUNTA:

Dibuja una figura cuya superficie sea $\frac{4}{3}$ de unidad.

Explica que has hecho para dibujar la figura: ____

• La cuarta tarea (Fichas de Trabajo nº 16) plantea una actividad de evaluación semántica de la fracción como medida de la cantidad de superficie. La tarea se les formula verbalmente a los alumnos de siguiente modo:

Debes construir "todos los manteles que puedas" y que cumplan las condiciones siguientes:

a) Que tengan una superficie de 1/2 unidad

b) Que tengan forma lo más regular posible (cuadrada o rectangular)

Los alumnos reciben varias unidades de superficie con la consigna de que identifiquen la subunidad con la que construyen el mantel. Los alumnos deben resolver individualmente esta tarea en sus casas y traerla resuelta al comienzo de la siguiente sesión de clase.
Esta tarea prepara y anticipa la introducción del concepto de equivalencia de fracciones.

Tema 4: La equivalencia de fracciones

Se dedican 4 sesiones y se proponen 5 Fichas de Trabajo (nº 17 a nº 21) para introducir el concepto de equivalencia de fracciones. Se trata de que los escolares comprendan que la medida de una misma cantidad de magnitud puede expresarse con fracciones diferentes. Además, se pretende que avancen hacia la formulación de una regla que facilite la búsqueda de fracciones equivalentes a una dada

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	**Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)**	**Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)**
13	**FT2E nº 17 = FT1E nº 13**	FT1E nº 13
14	**FT2E nº 18 = FT1E nº 15**	FT1E nº 14 FT1E nº 15
15	**FT2E nº 19 nueva** **FT2E nº 20 nueva**	________________
16	**FT2E nº 21 nueva**	________________

Con respecto a la Propuesta de la Primera Etapa se producen las modificaciones siguientes:

• Se espera que la resolución de las Fichas FT2E nº 16 y FT2E nº 17 aporten suficiente base experimental para que los alumnos comprendan el concepto de equivalencia e intuyan la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada. Se mantiene la FT2E nº 18 que propone a los alumnos conjeturar la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada, pero se suprime la FT1E nº 14 porque la FT2E nº 16 cubre el mismo objetivo.
• Se proponen tres nuevas tareas. El objetivo de las dos primeras es enseñar la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada. Mostramos las tarjetas de evaluación de estas dos fichas:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 19. Fecha: ____________
ALUMNO/A: ____
Encuentra el numerador o el denominador de la fracción para que sean equivalentes las siguientes fracciones:
a)

$$\frac{1}{3} = \frac{\square}{6}$$

x 2

b)

: 3

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{\square}$$

c)

$$\frac{3}{2} = \frac{\square}{12}$$

d)

$$\frac{8}{12} = \frac{\square}{3}$$

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 20. Fecha: _____________

ALUMNO/A: ____

Encuentra el numerador o el denominador de la fracción para que sean equivalentes las siguientes fracciones:

a)

$$\frac{2}{5} = \frac{\square}{15}$$

b)

$$\frac{5}{10} = \frac{\square}{2}$$

c)

$$\frac{6}{4} = \frac{\square}{10}$$

d)

$$\frac{6}{4} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{10}$$

• La tercera tarea que se propone, en la Ficha de Trabajo nº 21, tiene como objetivo indagar si los alumnos son capaces de aplicar la equivalencia de fracciones y estar en disposición de utilizar esta estrategia simbólica en las tareas posteriores de comparación de cantidades de magnitud cuyas medidas vienen dadas con expresiones fraccionarias. Mostramos las tarjetas de evaluación de esta ficha:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 21. Fecha: ____________

ALUMNO/A: ____

Voy a escribir dos fracciones y tu debes encontrar fracciones equivalentes a las que he escrito pero que tengan el mismo denominador

a) $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$

d) $\frac{7}{5}$ $\frac{3}{2}$

e) $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{6}$

f) $\frac{13}{18}$ $\frac{3}{4}$

Los enunciados de estas tres últimas Fichas de se presentan a todo el grupo en general y los alumnos las resuelven, en el aula, de manera individual. Como de costumbre, al finalizar las tareas habrá una intervención del profesor, sustentada en todas las respuestas dadas por los alumnos, en la repasará el concepto de equivalencia de fracciones y la técnica simbólica de obtención de fracciones equivalentes a una dada.

Tema 5: Relaciones de orden entre fracciones

Se dedican 2 sesiones y se proponen 4 Fichas de Trabajo (nº 17 a nº 21) para estudiar la relación de orden entre fracciones. Los alumnos han de determinar cuál de las dos fracciones dadas es mayor que la otra, sin que la comparación exija utilizar la equivalencia de fracciones.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	**Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)**	**Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)**
15		FT1E nº 16 FT1E nº 17
16		FT1E nº 18 FT1E nº 19
17	**FT2E nº 22 = FT1E nº 16** **FT2E nº 23 = FT1E nº 17**	FT1E nº 19
18	**FT2E nº 24 = FT1E nº 19** **FT2E nº 25 nueva**	FT1E nº 20

Con respecto a la Propuesta de la Primera Etapa se producen las modificaciones siguientes:

• Se suprime la Ficha de trabajo nº 18 de la Primera Etapa porque el contexto del enunciado del problema que plantea es poco familiar para los alumnos. En su lugar se propone la FT2E nº 25 cuyo enunciado es:

Un niño tiene una estatura de $\frac{7}{6}$ *metros y una amiga mide* $\frac{3}{2}$ *metros. ¿Cuál de los dos niños es más alto?*

La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente. Cuando concluyen la tarea, los alumnos cumplimentan las tarjetas de evaluación de la Fichas de trabajo nº 25 que mostramos a continuación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 25. Fecha _____________

ALUMNO/A: ____

Un niño tiene una estatura de $\frac{7}{6}$ *metros y una amiga mide* $\frac{3}{2}$ *metros. ¿Cuál de los dos niños es más alto?*

SOLUCIÓN: ____

He realizado un dibujo.

☐ Con la ayuda de materiales

☐ Sin la ayuda de materiales

He utilizado símbolos o razonamientos:

• Se suprimen la Ficha de trabajo nº 19 y nº 20 de la Primera Etapa porque los alumnos de esta Etapa han tenido grandes dificultades para comprender la densidad respecto del orden de fracciones.

Tema 6: La fracción con significado de medida de cantidades discretas

Se dedican tres sesiones (nº 19 a nº 21) a estudiar la fracción como resultado de la medida de cantidades discretas. La magnitud cardinalidad presenta peculiaridades que aconsejan hacer un tratamiento específico de las mismas por razones de uso social. Los alumnos han de medir cantidades de magnitudes discretas y han de aplicar la técnica que facilita el cálculo de la fracción de una cantidad. Además, se pretende que los alumnos conjeturen la regla de obtención de cálculo de la fracción de una cantidad. Se prevé implementar7 fichas de trabajo.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
19	**FT2E nº 26 = FT1E nº 23** **FT2E nº 27 = FT1E nº 24**	FT1E nº 22 FT1E nº 23
20	**FT2E nº 28 = FT1E nº 25** **FT2E nº 29= FT1E nº 26**	FT1E nº 24 FT1E nº 25
21	**FT2E nº 30 nueva** **FT2E nº 31= FT1E nº 27**	FT1E nº 26 FT1E nº 27

Se producen pocas modificaciones en la Segunda Etapa con respecto a la planificación de la Primera Etapa. Hay dos modificaciones con respecto a la Propuesta de la Primera Etapa:

• La Ficha de trabajo nº 22 de la Primera Etapa la gestiona directamente el profesor con los alumnos. El grupo clase resuelve la situación problemática pero los alumnos no cumplimentan ninguna tarjeta de evaluación.

• Se introduce una nueva tarea, Ficha de Trabajo nº 30, que tiene por objeto que los alumnos conjeturen la regla para calcular la fracción de una cantidad. La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente. Cuando los alumnos concluyen la tarea, cumplimentan la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 30 que mostramos a continuación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 30. Fecha ______________

ALUMNO/A:____

Tienes una bolsa con 12 caramelos, y $\frac{1}{4}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?*

SOLUCIÓN: Hay ____

Tienes una bolsa con 16 caramelos, y $\frac{3}{4}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?*

SOLUCIÓN: Hay ____

Tienes una bolsa con 15 caramelos, y $\frac{3}{5}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?*

SOLUCIÓN: Hay ____

Tienes una bolsa con 21 caramelos, y $\frac{2}{3}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?*

SOLUCIÓN: Hay ____

Tienes una bolsa con 24 caramelos, y $\frac{6}{6}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?*

SOLUCIÓN: Hay ____

Propuesta didáctica para la enseñanza del número racional positivo en 5º curso de Educación Primaria

La propuesta para quinto curso se articula en 41 sesiones de aula y se organiza en torno a cinco componentes curriculares: objetivos, contenidos, actividades propuestas, metodología y evaluación. La presentación se hace de forma secuencial, en el mismo orden en que se ha implementado.

Sesiones de enseñanza en 5º curso de Educación Primaria	
Sesiones 1 a 3	Tema 0.- Tareas previas para profundizar en el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente. Se resuelven las Fichas de Trabajo previas nº 1 a nº 6
Sesiones 4 a 12	Tema 1.- Operaciones con fracciones desde el significado de medida. Significado y cálculo de la suma, resta de fracciones; y multiplicación y división por un número natural. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 1 a nº 13
Sesiones 13 a 20	Tema 2.- La fracción con significado de cociente partitivo. La fracción como resultado de un reparto realizado en una sola fase. Búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto y comparación de repartos realizados en una sola fase. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 14 a nº 23
Sesiones 21 a 24	Tema 3.- La fracción con significado de cociente partitivo. La representación polinómica decimal como resultado de un reparto realizado en varias fases. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 24 a nº 32
Sesiones 25 a 28	Tema 4.- La notación decimal. El número decimal como resultado de un reparto igualitario. El número decimal como resultado de la medida de cantidades de magnitud. Representación gráfica en la recta numérica. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 33 a nº 36
Sesiones 29 y 30	Tema 5. Conexión entre la notación decimal y la notación fraccionaria. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 37 y nº 38
Sesiones 31 y 32	Tema 6. Relación de orden entre números decimales Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 39 y nº 40
Sesiones 33 a 41	Tema 7.- Operaciones con números decimales. Significado y cálculo de la suma, resta de números decimales; y multiplicación y división por un número natural. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 41 a nº 51

Tema 0: Repaso del concepto de equivalencia de fracciones

Las tres primeras sesiones de la secuencia de enseñanza profundizan en el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente desde el significado de medida. Se ha considerado pertinente dedicar estas tres sesiones a reforzar el significado y cálculo de la equivalencia de fracciones porque los procedimientos de cálculo de las operaciones con fracciones se fracción se fundamentan en el concepto de equivalencia.

SESIÓN NÚMERO 1

1. Objetivos de la sesión

Profundizar sobre el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente.

2. Contenidos

- Significado de fracciones equivalentes
- Técnica de búsqueda y comprobación de fracciones equivalentes

3. Metodología

• El profesor enuncia las tareas propuestas a los alumnos:

Ficha previa nº 1.-

Debéis medir el listón (de longitud $\frac{3}{4}$ de la caña unidad) que os entrego.

Sin deshacer el tren de subunidades que has hecho, construye otro tren de la misma longitud utilizando subunidades de $\frac{1}{8}$ de la caña unidad.

Pregunta 1: "Expresa de dos formas diferentes la longitud de los dos trenes que has construido"

Pregunta 2: "¿Por qué son equivalentes las fracciones que has escrito?"

Pregunta 3: "¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a las fracciones que has escrito?. Explica cómo la has obtenido?

Ficha previa nº 2.-

Debéis medir el listón (de longitud $\frac{2}{3}$ de la caña unidad) que os entrego.

Sin deshacer el tren de subunidades que has hecho, construye otro tren de la misma longitud utilizando subunidades de $\frac{1}{6}$ de la caña unidad.

Pregunta 1: "Expresa de dos formas diferentes la longitud de los dos trenes que has construido"

Pregunta 2: "¿Por qué son equivalentes las fracciones que has escrito?"

Pregunta 3: "¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a las fracciones que has escrito?. Explica cómo la has obtenido?.

• Las tareas se presentan a todo el grupo en general y los alumnos las resuelven por parejas.

4. Material

- Los alumnos dispondrán de un listón de longitud $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$ de unidad, cañas-unidad y subunidades de diversas cantidades de longitud.

5. Impresos para el alumno

Para completar cada una de las tareas los alumnos deben cumplimentar la tarjeta de evaluación. Las tarjetas de evaluación de las dos Fichas tienen un formato común; mostramos la de la Ficha Previa nº 2:

TARJETA DE LA FICHA PREVIA Nº 2 FECHA ___________
ALUMNO/A:______________________________________
Debes construir con las cañas, un listón de longitud $\frac{2}{3}$ de la caña unidad. Sin deshacer el listón que has hecho, construye un listón de la misma longitud utilizando subunidades de $\frac{1}{6}$ de la caña unidad
Pregunta 1: Expresa con otra fracción diferente la longitud del listón que has construido
Pregunta 2: ¿Por qué la fracción que has escrito es equivalente a $\frac{2}{3}$? ______________________________
Pregunta 3: ¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a la fracción $\frac{2}{3}$?. Explica cómo la has obtenido.

SESIÓN NÚMERO 2

1. Objetivos de la sesión
Profundizar sobre el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente.

2. Contenidos
- Significado de fracciones equivalentes
- Técnica de búsqueda y comprobación de fracciones equivalentes

3. Metodología
• El profesor plantea, en la Ficha Previa nº 3; distintas tareas:

Tarea 1: Construye un mantel de superficie $\frac{3}{2}$ *de unidad utilizando subunidades de* $\frac{1}{4}$ *de unidad.*
Expresa con una fracción la superficie del mantel que acabas de construir

Tarea 2: Construye un mantel de superficie $\frac{3}{2}$ *de unidad utilizando subunidades de* $\frac{1}{6}$ *de unidad.*
Expresa con una fracción la superficie del mantel que acabas de construir

Tarea 3: :Construye un mantel de superficie $\frac{3}{2}$ *de unidad utilizando subunidades de* $\frac{1}{8}$ *de unidad.*
Expresa con una fracción la superficie del mantel que acabas de construir

Tarea 4: En las tareas 1, 2 y 3 has encontrado tres fracciones equivalentes a $\frac{3}{2}$*. Escribe otras fracciones equivalentes a* $\frac{3}{2}$ *de la unidad*

• Las tareas se presenta a todo el grupo en general y los alumnos lo resuelven de forma individual.

• El profesor plantea, en la Ficha Previa nº 4; el siguiente problema:

Dados dos listones: uno de longitud $\frac{3}{4}$ *de unidad y otro de longitud* $\frac{2}{3}$ *de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*
No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$ que tengan el mismo denominador.

4. Material
- Los alumnos dispondrán de unidades de superficie y pliegos de papel para que construyan cantidades de superficie.

5. Impresos para el alumno
Para completar la tarea propuesta en la Ficha Previa nº 4, los alumnos deben cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA PREVIA Nº 4 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Dados dos listones: uno de longitud $\frac{3}{4}$ *de unidad y otro de longitud* $\frac{2}{3}$ *de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*
No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a 3/4 y *2/3* que tengan el mismo denominador.

SOLUCIÓN: El listón más largo mide ______________________________

Para comparar los listones he hecho lo siguiente: ______________________________

SESIÓN NÚMERO 3

1. Objetivos de la sesión
Profundizar sobre el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente.

2. Contenidos
- Significado de fracciones equivalentes
- Técnica de búsqueda y comprobación de fracciones equivalentes

3. Metodología
• El profesor plantea la resolución de la tarea siguiente:

Ficha Previa nº 5.- *Dados dos listones: uno de longitud* $\frac{3}{4}$ *y otro de longitud* $\frac{5}{6}$ *de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*

No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a 3/4 y 5/6 que tengan el mismo denominador

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos lo resuelven de forma individual.

• Cuando se haya resuelto la tarea anterior y se haya procedido a la evaluación conjunta de la tarea, el profesor plantea la resolución de la tarea siguiente:

Ficha Previa nº 6.- *Dados dos listones: uno de longitud* $\frac{4}{5}$ *y otro de longitud* $\frac{5}{6}$ *de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*

No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a 4/5 y 5/6 que tengan el mismo denominador

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos lo resuelven de forma individual.

4. Material
- Los alumnos dispondrán de unidades de superficie y pliegos de papel para que construyan cantidades de superficie.

5. Impresos para el alumno

Las tarjetas de evaluación de las Fichas Previas nº 5 y nº 6 tienen el mismo formato. Mostramos la tarjeta de la Ficha Previa nº 6:

TARJETA DE LA FICHA PREVIA Nº 6 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Dados dos listones: uno de longitud $\frac{4}{5}$ *de unidad y otro de longitud* $\frac{5}{6}$ *de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*

No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a 4/5 y 5/6 que tengan el mismo denominador.

SOLUCIÓN: El listón más largo mide ____

Para comparar los listones he hecho lo siguiente: ______________________________________

Tema 1: La fracción con significado de medida. Operaciones con fracciones

En las siguientes nueve sesiones de la secuencia de enseñanza se estudian las operaciones con fracciones asociadas a situaciones problemáticas de medida de cantidades de magnitud. Cuando los alumnos resuelven las correspondientes Fichas de Trabajo modelizan situaciones que dan sentido a las operaciones con fracciones: añadir cantidades, quitar cantidades, comparar cantidades, completar cantidades, reiterar cantidades de magnitud, repartir cantidades en partes iguales y fraccionar cantidades en partes iguales.

Concedemos gran importancia a las representaciones gráficas por cuanto posibilitan la transición entre las acciones realizadas con el material y las representaciones simbólicas. Para fomentar en los alumnos la realización de gráficos hemos modificado las tarjetas de las fichas de trabajo para que los alumnos, con independencia de la estrategia que utilicen, se vean obligados a representar gráficamente las fracciones involucradas en el enunciado de la tarea.

SESIÓN NÚMERO 4

1. Objetivos de la sesión
Significado y cálculo de la suma de fracciones.

2. Contenidos
- Introducir el significado de la suma de fracciones.
- Encontrar procedimientos de cálculo de la suma de fracciones con el mismo denominador.

3. Metodología.
• El profesor plantea la resolución de dos problemas. En primer lugar, propone el de la Ficha de Trabajo nº 1:

Problema 1.- Tengo dos listones de madera: uno mide los $\frac{4}{3}$ de la caña unidad, y otro mide $\frac{2}{3}$ de la caña unidad. Si colocamos un listón a continuación del otro, ¿cuánto mide el nuevo listón?

Y, después, cuando se haya evaluado esta tarea plantea la resolución de la Ficha de Trabajo nº 2:

Problema 2: Tienes un listón que mide $\frac{1}{2}$ de la caña unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud 1 caña unidad. Expresa, con una fracción, la longitud del nuevo listón que has construido. Si necesitáis algún material podéis pedírmelo.

• El profesor controla el trabajo de los alumnos y reorienta el mismo mediante dos intervenciones generales:

- Primera intervención: El problema se puede resolver midiendo el listón que se obtiene al colocar uno de los listones a continuación del otro. Pero si se reconoce como suma de fracciones, no hace falta medir, pues : si tengo un listón que mide 4 trozos de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad y le añado otro listón que mide 2 trozos de la misma longitud, es como si tuviera un sólo listón de medida 6 trozos de longitud $\frac{1}{3}$. Surge así el algoritmo de suma de fracciones de igual denominador:

$$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4+2}{3}$$

- Segunda intervención: El significado de la suma de dos o más fracciones es la medida de longitud (también una fracción) de un listón que se obtiene al unir, alineados y uno a continuación del otro, los listones iniciales cuyas longitudes son las fracciones de partida. El correspondiente algoritmo de cálculo se introduce a partir de la búsqueda de fracciones equivalentes a las dadas y que tengan igual denominador

• La tarea de la Ficha nº 1 se presenta a todo el grupo en general y para realizarla se forman grupos de 2 alumnos. La tarea de la Ficha nº 2 debe resolverla cada alumno individualmente.

• Cuando los alumnos resuelven cada una de las dos problemas, cumplimentan las respectivas tarjetas de evaluación. Inmediatamente después se celebra un debate que el profesor utiliza para institucionalizar el significado y el algoritmo de la suma de fracciones.

4. Material

- Los alumnos dispondrán, SI LO SOLICITAN AL PROFESOR, de cañas de tamaño la unidad y de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad para que puedan construir cantidades de longitud $\frac{4}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de unidad. También dispondrán de plantillas colgadas en la pared para fraccionar las cañas-unidad en partes iguales. Los alumnos que no utilicen este método dispondrán de tiras de papel de la misma longitud que la caña unidad para que obtengan las fracciones unitarias mediante el fraccionamiento de la tira.

5. Impresos para el alumno

Por cada una de las tareas que se le proponen, los alumnos han de cumplimentar una tarjeta de evaluación. Las dos tarjetas tienen el mismo formato; mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 2:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 2 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Tienes un listón que mide $\frac{1}{2}$ de la caña unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud 1 caña unidad. Expresa, con una fracción, la longitud del nuevo listón que has construido.

Si necesitas utilizar material puedes solicitarlo.

SOLUCIÓN: La longitud del listón es ______________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He medido el nuevo listón	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________

SESIÓN NÚMERO 5

1. Objetivos de la sesión

Significado y cálculo de la suma de fracciones

2. Contenidos

- Introducir el significado de la suma de fracciones.
- Encontrar procedimientos de cálculo de la suma de fracciones con distinto denominador.

3. Metodología

- El profesor plantea dos problemas:

Ficha de Trabajo nº 3.- Tienes un listón que mide $\frac{1}{2}$ de la caña unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud $\frac{1}{3}$ de la caña unidad. ¿Cuál es la longitud del nuevo listón que has construido?

Ficha de Trabajo nº 4.- Una empresa fabrica refrescos que vende en botellas de diferente capacidad: de $\frac{1}{5}$ *de litro, de* $\frac{1}{3}$ *de litro y de* $\frac{1}{2}$ *litro. Si bebes el contenido de dos botellas: una de* $\frac{1}{5}$ *de litro y otra de* $\frac{1}{3}$ *de litro, ¿qué cantidad de refresco has bebido? La cantidad de refresco que has bebido, ¿cabe en una botella de* $\frac{1}{2}$ *litro?*

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• Cuando los alumnos resuelven cada problema cumplimentan la tarjeta de evaluación y, después, se procede la evaluación conjunta de cada una de las tareas,
• Algunos alumnos exponen en la pizarra la estrategias de resolución utilizadas en cada problema, dedicando especial atención a las nuevas representaciones escritas de algoritmo de la suma de fracciones.

4. Material

- Los alumnos dispondrán, SI LO SOLICITAN AL PROFESOR, de cañas unidad y de trozos de caña de longitud 1/2 y 1/3 unidad para que puedan construir listones de longitud 3/6 y 2/6 de unidad. También dispondrán de plantillas colgadas en la pared para fraccionar las cañas-unidad en partes iguales. Los alumnos que no utilicen este método dispondrán de tiras de papel de la misma longitud que la caña unidad para que obtengan las fracciones unitarias mediante el fraccionamiento de la tira.
- En el segundo problema no se pone a disposición de los alumnos ningún material específico, por lo que el profesor prestará especial atención a los alumnos que solicitan material para comprobar como resuelven el problema cambiando la magnitud: ¿qué magnitud utilizan?; ¿vuelven a medir ?; ¿razonan con el significado de suma de fracciones?

5. Impresos para el alumno

En cada una de los problemas los alumnos deben cumplimentar una ficha similar a la que reproducimos correspondiente al problema propuesto en la Ficha de Trabajo nº 4:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 4 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Una empresa fabrica refrescos que vende en botellas de diferente capacidad: de $\frac{1}{5}$ *de litro, de* $\frac{1}{3}$ *de litro y de* $\frac{1}{2}$ *litro. Si bebes el contenido de dos botellas: una de* $\frac{1}{5}$ *de litro y otra de* $\frac{1}{3}$ *de litro, ¿qué cantidad de refresco has bebido?*

PRIMERA PREGUNTA

He bebido ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ____

Indica cómo has resuelto el problema: ____

SEGUNDA PREGUNTA

La cantidad de refresco que has bebido, ¿cabe en una botella de $\frac{1}{2}$ *litro?* SI ☐ NO ☐

Explica por qué cabe o no cabe en una botella de 1/2 litro: ______________________________

SESIÓN NÚMERO 6

1. Objetivos de la sesión
Dar significado a la resta de fracciones.
Encontrar procedimientos de cálculo de la resta de fracciones con distinto denominador.

2. Contenidos
- Introducir el significado de la resta de fracciones.
- Procedimientos de cálculo de la resta de fracciones con distinto denominador.

3. Metodología
• El profesor enuncia el problema siguiente:

Ficha de Trabajo nº 5.- Deseas empapelar una pared que tiene una superficie de 5 metros cuadrados. Si por la mañana has empapelado una superficie de $\frac{11}{4}$ *metros cuadrados. ¿Cuánta superficie queda por empapelar?*

No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

• El profesor plantea el problema para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la resta de dos fracciones.
• El cálculo de la operación se justifica en la necesidad de encontrar la superficie de pared que añadida a 11/4 unidades complete las 5 unidades de superficie.
• No es aconsejable introducir la regla del algoritmo de la resta de fracciones de forma simbólica, pero si establecer el procedimiento para restar fracciones con diferente denominador:

1.- Reducir las fracciones a un mismo denominador.
2.- Restar los numeradores y dejar como denominador el común de ambas fracciones.

4. Material
- El profesor no ofrece ningún material para resolver la tarea. No obstante, tendrá preparado material para dárselo a quien lo solicite.

5. Impresos para el alumno
Los alumnos deben cumplimentar la tarjeta de evaluación que reproducimos a continuación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 5 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Deseas empapelar una pared que tiene una superficie de 5 metros cuadrados. Si por la mañana has empapelado una superficie de $\frac{11}{4}$ *metros cuadrados. ¿Cuánta superficie queda por empapelar?*

Consigna: No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

SOLUCIÓN: La superficie por empapelar es ____________________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ____________________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ____________________________________

SESIÓN NÚMERO 7

1. Objetivos de la sesión
Dar significado a la resta de fracciones.
Encontrar procedimientos de cálculo de la resta de fracciones con distinto denominador.

2. Contenidos
- Introducir el significado de la resta de fracciones.
- Encontrar procedimientos de cálculo de la resta de fracciones con distinto denominador.

3. Metodología
• El profesor plantea el siguiente problema en la Ficha de Trabajo nº 6:

Quieres comprar aceitunas. La tendera te sirve $\frac{6}{5}$ *Kgr. de aceitunas. Expresa, con una fracción, el peso de aceitunas que debe añadir para servirte dos kilogramos de aceitunas.*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

• El profesor propone el problema para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la resta de dos fracciones.
• El cálculo de la operación se justifica por la necesidad de encontrar la cantidad de magnitud masa que añadida a 6/5 kgrs formen dos kgrs.
• No se aconseja introducir la regla del algoritmo de la resta de fracciones de forma simbólica.

4. Material
- El profesor no ofrece ningún material para resolver la tarea. No obstante, tendrá preparado material para dárselo a quien lo solicite

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 6 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Quieres comprar aceitunas. La tendera te sirve $\frac{6}{5}$ *Kgr. de aceitunas. Expresa, con una fracción, el peso de aceitunas que debe añadir para servirte dos kilogramos de aceitunas.*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

SOLUCIÓN: Debe añadir ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ____

Indica cómo has resuelto el problema: : ____

SESIÓN NÚMERO 8

1. Objetivos de la sesión
Significado y cálculo del producto de una fracción por un número natural.

2. Contenidos
- Introducir el significado del producto de una fracción por un número natural.
- Inferir el algoritmo de cálculo de esta operación.

3. Metodología.
• El profesor plantea dos problemas en la misma Ficha de Trabajo nº 7:

Problema 1: Compráis 12 latas de conserva. Cada lata de conserva pesa $\frac{2}{3}$ *Kgrs. ¿Cuánto pesan las 12 latas?*

Problema 2: Compráis 36 latas de conserva. Cada lata de conserva pesa $\frac{2}{3}$ *Kgrs. ¿Cuánto pesan las 36 latas?.*

No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos para que éstos indiquen públicamente las estrategias utilizadas.
• El profesor establecerá el significado de la operación: la medida de una cantidad de magnitud que se construye al reiterar la cantidad de magnitud de partida tantas veces como indica el factor multiplicador.
• Para justificar el algoritmo de esta operación se procede observando que la fracción $\frac{a}{b}$ significa la medida de una cantidad de masa que puede considerarse como *a* trozos de cantidad de magnitud $\frac{1}{b}$ de unidad de masa. Si los *a* trozos se reiteran *n veces*, es como si hubiera $a \cdot n$ trozos de cantidad de magnitud $\frac{1}{b}$ de unidad.

4. Material
- El profesor no ofrece ningún material para resolver la tarea. No obstante, tendrá preparado material para dárselo a quien lo solicite

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta de evaluación por cada uno de los problemas propuestos. Estas tarjetas tienen el mismo formato; reproducimos la que corresponde al problema 1:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 7 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Compras 12 latas de conserva. Cada lata de conserva pesa $\frac{2}{3}$ *Kgrs. ¿Cuánto pesan las 12 latas?*

SOLUCIÓN: Las doce latas pesan ______________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: : ______________________________

SESIÓN NÚMERO 9

1. Objetivos de la sesión
Significado y cálculo del producto de una fracción por un número natural.

2. Contenidos

- Introducir el significado del producto de una fracción por un número natural.
- Inferir el algoritmo de cálculo de esta operación.

3. Metodología

• El profesor enuncia el siguiente problema en la Ficha de Trabajo nº 8:

Quieres colocar el rodapié en un pasillo que mide 8 metros. Para ello has comprado 25 losetas de longitud $\frac{3}{10}$ *de metro. Las losetas se colocan una a continuación de la otra. Con las losetas que has comprado, ¿qué longitud del rodapié puedes colocar?. Indica que longitud de rodapié te sobra o te falta por colocar el rodapié. ¿Tienes bastantes losetas para hacer todo el rodapié? Indica las losetas que te sobran o las que te faltan*

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.

4. Material

- El profesor no ofrece ningún material para resolver la tarea. No obstante, tendrá preparado material para dárselo a quien lo solicite

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 9 Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

Quieres colocar el rodapié en un pasillo que mide 8 metros. Para ello has comprado 25 losetas de longitud $\frac{3}{10}$ *de metro. Las losetas se colocan una a continuación de las otra.*

PRIMERA PREGUNTA

Con las losetas que has comprado, ¿qué longitud del rodapié puedes colocar?".

SOLUCIÓN: Puedo colocar una longitud de ______________________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: : ______________________________

SEGUNDA PREGUNTA

¿Qué longitud que te sobra o te falta para colocar el rodapié?. ______________________________

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: : ______________________________

TERCERA PREGUNTA

¿Tienes bastantes losetas para colocar todo el rodapié? SI ☐ NO ☐

Explica la respuesta: ______________________________

SESIÓN NÚMERO 10

1. Objetivos de la sesión
Significado y cálculo del cociente entre una fracción unitaria y un número natural.

2. Contenidos
- Introducir el significado del cociente entre una fracción y un número natural.
- Inferir el algoritmo de cálculo de esta operación.

3. Metodología
• El profesor plantea dos problemas en las Fichas de Trabajo nº 9 y nº 10, respectivamente:

Ficha de Trabajo nº 9.- *Has cortado por la mitad, en dos partes iguales, un cristal de superficie* $\frac{1}{4}$ *de unidad. ¿Cuánto mide la superficie de la mitad del cristal que has cortado?*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

Ficha de Trabajo nº 10.- *Tienes una bola de plastilina que pesa* $\frac{1}{2}$ *de unidad. Si con esta cantidad de plastilina construyes tres bolas iguales de plastilina. ¿Cuánto pesa cada una de las tres bolas de plastilina?*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.

Comentario: En el problema de la Ficha nº 9 la operación división puede entenderse como "fraccionar por la mitad $\frac{1}{4}$ de unidad", es decir "hacer $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ unidad". En este caso la fracción $\frac{1}{2}$ actúa sobre la fracción $\frac{1}{4}$. El significado de la fracción $\frac{1}{2}$ no es el de una medida: es el de un ***operador*** que modifica una longitud. Sin embargo, no aconsejamos introducir la idea de operador ni la multiplicación de fracciones que será objeto de enseñanza en 6º curso de Educación Primaria; es decir, no consideramos pertinente introducir las representaciones simbólicas siguientes:

$$\frac{1}{4}:2=\frac{1}{2}\text{ de }\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\text{ x }\frac{1}{4}=\frac{1x1}{2x4}=\frac{1}{8}\text{ unidad}$$

En cambio, proponemos justificar desde el modelo de medida las expresiones siguientes:

$$\frac{1}{4}:2=\frac{2}{8}:2=\frac{2:2}{8}=\frac{1}{8}\text{ unidad}$$

porque la cantidad $\frac{1}{4}$ de unidad puede ser percibida como 2 subunidades de tamaño $\frac{1}{8}$ de unidad; y esta última cantidad pueden ser repartida fácilmente en 2 partes iguales.

• Se recomienda posponer la enseñanza del algoritmo de cálculo de esta operación porque puede ser introducida posteriormente, en este mismo curso, con mayores garantías de éxito cuando los alumnos hayan estudiado la fracción con el significado de cociente partitivo.
• A los alumnos que terminan las tareas se les pide que la resuelvan de otra manera, es decir, con otro procedimiento. De esta modo se espera que aparezcan nuevas estrategias. Por ejemplo, se espera que algunos alumnos hagan uso de su conocimiento de las fracciones unitarias y adelanten que la mitad de 1/4 de unidad es 1/8 de unidad.
• De inicio el profesor aconseja no utilizar materiales; no obstante, si algún alumno no sabe como resolver la tarea le permitirá utilizar el material que éste considere como necesario.

4. Material
- Cada alumno dispondrá de plastilina y la posibilidad de utilización de la balanza

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta por cada uno de los problemas propuestos. Ambas tarjetas tienen el mismo formato; reproducimos a continuación la que corresponde a la Ficha de Trabajo nº 10:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 10 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Tienes una bola de plastilina que pesa $\frac{1}{2}$ *de unidad. Si con esta cantidad de plastilina construyes tres bolas iguales de plastilina. ¿Cuánto pesa cada una de las tres bolas de plastilina?*

SOLUCIÓN: Cada bola de plastilina pesa ______________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: : ______________________________

SESIÓN NÚMERO 11

1. Objetivos de la sesión
Que los alumnos identifiquen el problema como división de una fracción por un número natural.
Que los alumnos formulen estrategias de procedimientos de cálculo de esta operación con fracciones no necesariamente unitarias

2. Contenidos
- Introducir el significado del cociente entre una fracción y un número natural.
- Inferir el algoritmo de cálculo de esta operación.

3. Metodología
• El profesor plantea los dos problemas siguientes:

Ficha de Trabajo nº 11.- *De un mantel que tiene una superficie de* $\frac{3}{4}$ *metros cuadrados, quieres sacar dos manteles iguales, sin que sobre ni falte mantel. ¿Cuál es la medida de la superficie del mantel que has obtenido?"*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo

Ficha de Trabajo nº 12.- De una tela de superficie $\frac{3}{2}$ de unidad, quieres hacer 6 manteles iguales, sin que sobre ni falte tela. ¿Qué superficie tendrá cada uno de los manteles?
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• Cuando un alumno termine la tarea el profesor le animará a resolver el problema utilizando otra estrategia
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.
• El profesor no impondrá ninguna estrategia, aunque se aconseja la utilización de las estrategias que obligan al alumno a utilizar el lenguaje simbólico.

• A la vista de los resultado obtenidos en esta tarea y en las anteriores, se espera que los alumnos conjeturen el algoritmo de cálculo de la operación. Se recuerda que no se persigue la formulación de la técnica algorítmica; se pretende que los alumnos sepan obtener fracciones equivalentes al dividendo cuyo numerador tenga tantas subunidades como indique el divisor o número de partes iguales en las que hay que repartir o distribuir.
• De inicio el profesor les aconseja no utilizar materiales; no obstante, si algún alumno no sabe como resolver la tarea le permitirá utilizar el material que éste considere como necesario.

4. Material

- El profesor indica a sus alumnos que no utilicen material. Se intenta que los alumnos abandonen gradualmente las estrategias manipulativas. Los alumnos pueden tener dificultades derivadas de la prohibición de utilizar el material. En tal caso el profesor les proporcionará el material que los alumnos soliciten

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la correspondiente tarjeta. Ambas tarjetas poseen el mismo formato; mostramos la correspondiente a la Ficha nº 12:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 12 Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

De una tela de superficie $\frac{3}{2}$ *de unidad quieres hacer 6 manteles iguales, sin que sobre ni falte tela. ¿Qué superficie tendrá cada uno de los manteles?*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo"

SOLUCIÓN: Cada mantel tiene una superficie de ______________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________

*Indica cómo has resuelto el problema:*______________________

SESIÓN NÚMERO 12

1. Objetivos de la sesión

Que los alumnos identifiquen el problema como división de una fracción por un número natural.
Que los alumnos formulen estrategias de procedimientos de cálculo de esta operación con fracciones no necesariamente unitarias

2. Contenidos

- Introducir el significado del cociente entre una fracción y un número natural.
- Inferir el algoritmo de cálculo de esta operación.

3. Metodología

• El profesor plantea el problema siguiente:

Ficha de Trabajo nº 13.- *Tenéis una masa de pan de* $\frac{5}{4}$ *Kgr. Con esta masa queremos hacer 10 panecillos iguales de modo que gastéis toda la masa. ¿Cuánto pesará cada panecillo?*

• El profesor propone el problema para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• Cuando un alumno termine la tarea el profesor le animará a resolver el problema utilizando otra estrategia
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.
• El profesor no impondrá ninguna estrategia, aunque se aconseja la utilización de las estrategias que obligan al alumno a utilizar el lenguaje simbólico.
• A la vista de los resultado obtenidos en esta tarea y en las anteriores, se espera que los alumnos conjeturen el algoritmo de cálculo de la operación. El profesor institucionaliza la siguiente regla:

Para dividir una fracción por un número natural debes hallar una fracción equivalente a la dada que tenga como numerador un número de subunidades que pueda ser dividido por el número natural y después debes realizar la división recordando la nueva medida de las subunidades.

• De inicio el profesor les aconseja no utilizar materiales; no obstante, si algún alumno no sabe como resolver la tarea le permitirá utilizar el material que éste considere como necesario.

4. Material

- El profesor indica a sus alumnos que no utilicen material. Se intenta que los alumnos abandonen gradualmente las estrategias manipulativas. Los alumnos pueden tener dificultades derivadas de la prohibición de utilizar el material. En tal caso el profesor les proporcionará el material que los alumnos soliciten

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 13 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Tienes una masa de pan de $\frac{5}{4}$ *de Kgr. Con esta masa quieres hacer 10 panecillos iguales de modo que gastes toda la masa. ¿Cuánto pesará cada panecillo?*

No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

SOLUCIÓN: Cada panecillo pesa ________________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ________________________

Tema 2: La fracción con significado de cociente partitivo

En las siguientes ocho sesiones de la secuencia de enseñanza los alumnos resuelven las Fichas de Trabajo y encuentran la fracción que expresa el resultado de un reparto igualitario efectuado en una fase utilizando procedimientos manipulativos, gráficos y simbólicos.

El modelo de aprendizaje de cociente partitivo que utilizamos viene caracterizado por cuatro variables:

objetos:	*barras de regaliz, todas de la misma la longitud.*
magnitud:	*longitud*
acción:	*reparto igualitario,*
técnicas de reparto:	*reparto en una fase*

El resultado del reparto viene expresado por la fracción $\frac{a}{b}$ *barras.*

La fracción admite una doble evaluación semántica. Por un lado posee el significado de medida e indica la cantidad de longitud de barra resultado del reparto. Y por otro lado expresa las condiciones iniciales del reparto; así, a es el número de barras de regaliz y b es el número de personas que van a participar en el reparto. Las cantidades a y b reciben el nombre de condiciones iniciales del reparto.

Sobre el proceso de reparto conviene recordar a los alumnos que:

a) Todas las barras se deben repartir.
b) Todas las barras deben tener la misma cantidad de longitud. La unidad es la cantidad de longitud que posee una de las barras.
c) Antes de simbolizar el reparto, deben realizarlo físicamente y además representar gráficamente el proceso de reparto.

En estas sesiones los alumnos reciben enseñanza de los siguientes conceptos referidos a la fracción como resultado de un reparto igualitario efectuado en una fase:

a) construcción del sistema de representación fraccionario con el significado de reparto igualitario.
b) comparación de repartos.
c) búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto conocido el resultado del mismo.

SESIÓN NÚMERO 13

1. Objetivos de la sesión

Que los alumnos analicen y apliquen la acción de repartir de forma igualitaria

Introducir la fracción con el significado de reparto, con el significado de cociente partitivo.

2. Contenidos

- Interpretar la acción de repartir objetos (barras) entre personas.
- Cuantificar el resultado de un reparto.
- Introducir la fracción como resultado de un reparto igualitario realizado en una sola fase.

3. Metodología

• El profesor plantea la tarea siguiente:

> *Ficha de Trabajo nº 14.- Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 4 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?*
>
> Os recuerdo que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra y que las barras se pueden fraccionar.

• El profesor propone la tarea para que los alumnos la resuelvan por parejas.

• Hay una intervención del profesor para aclarar que una fracción expresa la medida de un listón o segmento. Y también expresa el resultado de un reparto: la cantidad de barra de regaliza que recibe CADA UNA de las personas que participan en el reparto.

• El profesor animará a los alumnos a que expresen las representaciones orales, gráficas, escritas y simbólicas de las acciones que éstos realicen. Es interesante que aparezcan las representaciones gráficas del proceso de reparto para que poco a poco vayan sustituyendo a la utilización del material.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la correspondiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 13 Fecha: ______________

ALUMNOS/AS:____

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 4 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:

2. Completad la tabla siguiente:

SITUACIÓN PROBLEMA	FRACCIONAMIENTO DE LAS BARRAS	RESULTADO DEL REPARTO
Repartir 3 barras para 4 personas		
3 |_4___		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ____

El denominador indica ____

SESIÓN NÚMERO 14

1. Objetivos de la sesión

Que los alumnos analicen y apliquen la acción de repartir de forma igualitaria

Introducir la fracción con el significado de reparto, con el significado de cociente partitivo.

2. Contenidos

- Interpretar la acción de repartir objetos (barras) entre personas.
- Cuantificar el resultado de un reparto.
- Introducir la fracción como resultado de un reparto igualitario realizado en una sola fase.

3. Metodología.

• El profesor plantea la tarea siguiente:

Ficha de Trabajo nº 15.- *Vais a repartir 3 barras entre 2 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?*

Os recuerdo que el resultado de un reparto es la cantidad de regaliz que recibe cada uno de los individuos que participan en el reparto. Las barras se pueden fraccionar.

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.

• Hay una intervención del profesor enfatizando el significado de la acción de repartir en partes iguales: el resultado de un reparto igualitario es la cantidad de magnitud que recibe cada niño, y no la cantidad total a repartir.

• En la evaluación conjunta de la tarea conviene que aparezcan todas las soluciones y, en particular la que corresponde al reparto en una sola fase. A los alumnos que den como solución respuestas en varias fases el profesor les indicará que, a partir de ahora, cuando realicen repartos deben repartir las barras sobrantes, y para ello tendrán que fraccionar las barras, en partes iguales.

• El profesor animará a los alumnos a que expresen las representaciones orales, gráficas, escritas y simbólicas de las acciones que éstos realicen. Es interesante que aparezcan las representaciones gráficas del proceso de reparto para que poco a poco vayan sustituyendo a la utilización del material.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la correspondiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 15 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 2 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:

2. Completad la tabla siguiente:

SITUACIÓN PROBLEMA	FRACCIONAMIENTO DE LAS BARRAS	RESULTADO DEL REPARTO
Repartir 3 barras para 2 personas		
3 $\lfloor\underline{\;2\;\;\;\;\;\;}$		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ____

El denominador indica ____

SESIÓN NÚMERO 15

1. Objetivos de la sesión

Que los alumnos analicen y apliquen la acción de repartir de forma igualitaria
Introducir la fracción con el significado de reparto, con el significado de cociente partitivo.

2. Contenidos

- Interpretar la acción de repartir objetos (barras) entre personas.
- Cuantificar el resultado de un reparto.
- Introducir la fracción como resultado de un reparto igualitario realizado en una sola fase.
- Significado de la unidad en el modelo de reparto.

3. Metodología

• El profesor plantea las tareas siguientes, la segunda al finalizar la primera:

Ficha nº 16.- *Vais a repartir 5 barras entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?*
Ficha nº 17.- *Vais a repartir 3 barras entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?*
Os recuerdo que el resultado de un reparto es la cantidad de regaliz que recibe cada uno de los individuos que participan en el reparto. Las barras se pueden fraccionar

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• Hay una intervención del profesor enfatizando el significado de la acción de repartir en partes iguales: el resultado de un reparto igualitario es la cantidad de magnitud que recibe cada niño, y no la cantidad total a repartir.
• El profesor prestará especial atención a las estrategias utilizadas por los alumnos, así como a las representaciones orales y escritas. En la evaluación de la tarea interesa que aparezcan las estrategias y que las acciones realizadas con material sean representadas de forma gráfica.
• El profesor animará a los alumnos a que expresen las representaciones orales, gráficas, escritas y simbólicas de las acciones que éstos realicen. Es interesante que aparezcan las representaciones gráficas del proceso de reparto para que poco a poco vayan sustituyendo a la utilización del material.
• Interesa estar alerta a la solución $\frac{3}{3}$ de barra que deberá ser reinterpretada en términos de medida de longitud como 1 barra de regaliz.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar, por cada una de las tareas, la correspondiente tarjeta. Ambas tarjetas tienen el mismo formato; reproducimos la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 17:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 17 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?
SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:

2. Completad la tabla siguiente:

SITUACIÓN PROBLEMA	FRACCIONAMIENTO DE LAS BARRAS	RESULTADO DEL REPARTO
Repartir 3 barras para 2 personas		
3 | 3		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ______________________________

El denominador indica ______________________________

SESIÓN NÚMERO 16

1. Objetivos de la sesión

Reconocer que repartos con condiciones iniciales diferentes (distinto número de barras y de personas) pueden dar el mismo resultado.

Reforzar el concepto de equivalencia de fracciones en el modelo de cociente partitivo.

2. Contenidos

- Concepto de equivalencia de fracciones en el modelo de cociente partitivo.

3. Metodología

• El profesor plantea las tareas siguientes, cada una de ellas la deben resolver unos alumnos determinados, de acuerdo con la siguiente distribución:

Grupo A (columnas impares): Vais a repartir 4 barras de regaliz entre 6 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

Grupo B (columnas pares): Vais a repartir 2 barras de regaliz entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.

• Hay una intervención del profesor haciendo notar que los repartos realizados por los dos grupos son iguales, y preguntará a la clase si esto es posible y en qué condiciones se da esta circunstancia.

• El profesor resumirá dos estrategias para comprobar la igualdad de los dos repartos:

1º Razonando que reciben igual cantidad de magnitud en los dos repartos, 2/3 y 4/6 respectivamente, porque las fracciones son equivalentes.

2º Razonando con la idea de reparto, sin necesidad de cuantificar el reparto: si se duplican las barras de regaliz y se duplican las personas, en ambos repartos recibirán la misma cantidad de magnitud. Conviene escenificar con los alumnos los dos repartos.

4. Material

- Cada alumno puede utilizar material manipulativo, si lo desea, o bien resolver la tarea utilizando representaciones gráficas, o bien, representaciones simbólicas

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta que corresponda a la tarea encomendada, y que tienen este formato:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 18 Fecha: ____________

ALUMNO/A: ______________________________

Vais a repartir 4 barras de regaliz para 6 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ______________________________

1. Marca con una cruz el cuadro que indica lo que has hecho para resolver la tarea:

☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ____

☐ He realizado el siguiente dibujo:

☐ He utilizado símbolos:

2. Indica el significado de la fracción, del numerador y denominador de la FRACCIÓN _________________

SESIÓN NÚMERO 17

1. Objetivos de la sesión

Evaluar semánticamente la fracción como resultado de un reparto.
Comprender que diferentes condiciones iniciales de un reparto pueden dar el mismo resultado.
Reforzar la idea de repartos equivalentes.

2. Contenidos

- Encontrar las condiciones del reparto conocido su resultado.

3. Metodología

• El profesor enuncia el siguiente problema:

Ficha de Trabajo nº 19.- *Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe* $\frac{2}{3}$ *de barra. ¿Cuántas personas han participado en el reparto y cuántas barras de regaliz se han repartido?*

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.

• Hay una intervención del profesor para que se muestren todas las estrategias de resolución que han aparecido y, por si no lo han hecho, que se muestre la de multiplicar el resultado por el denominador (por el número de personas), o bien por un múltiplo de este denominador. Además, debe reiterar la idea de que un mismo resultado puede proceder de repartos en los que intervienen números diferentes de unidades y de personas.

4. Material

- Cada alumno puede utilizar material manipulativo, si lo desea, o bien resolver la tarea utilizando representaciones gráficas, o bien, representaciones simbólicas

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 19 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe $\frac{2}{3}$ *de barra. ¿Cuántas personas han participado en el reparto y cuántas barras de regaliz se han repartido?*

SOLUCIÓN:

Si participan 3 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es _____

Escribe el reparto: $\square \quad \underline{|\square\quad}$

Si participan 6 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______

Escribe el reparto:

Si participan 9 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______

Escribe el reparto:

Si participan 12 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______

Escribe el reparto:

SESIÓN NÚMERO 18

1. Objetivos de la sesión

Evaluar semánticamente la fracción como resultado de un reparto.
Comprender que diferentes condiciones iniciales de un reparto pueden dar el mismo resultado.
Reforzar la idea de repartos equivalentes.

2. Contenidos

- Encontrar las condiciones del reparto conocido su resultado.

3. Metodología

• El profesor enuncia, de forma secuenciada, los siguientes problemas:

Ficha de Trabajo nº 20.- *Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe* $\frac{1}{2}$ *de barra. ¿Cuántas personas han participado en el reparto y cuántas barras de regaliz se han repartido?*

Ficha de Trabajo nº 21.- *Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe* $\frac{5}{4}$ *de barra. ¿Cuántas personas han participado en el reparto y cuántas barras de regaliz se han repartido?*

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.

4. Material

- Cada alumno puede utilizar material manipulativo, si lo desea, o bien resolver la tarea utilizando representaciones gráficas, o bien, representaciones simbólicas

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta por cada una de problemas, y de las que reproducimos la correspondiente a la Ficha nº 21:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 21 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe $\frac{5}{4}$ *de barra. ¿Cuántas personas han participado en el reparto y cuántas barras de regaliz se han repartido?*

SOLUCIÓN:

Si participan 4 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es _____

Escribe el reparto:

Si participan 8 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______

Escribe el reparto:

Si participan 12 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______

Escribe el reparto:

Si participan 16 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______

Escribe el reparto:

SESIÓN NÚMERO 19

1. Objetivos de la sesión
Comparar repartos igualitarios.
Reforzar el significado del concepto de fracción asociado al resultado de un reparto igualitario.

2. Contenidos

- Relaciones de orden entre repartos.

3. Metodología

• El profesor enuncia, de forma secuenciada, los siguientes problemas que constituyen la Ficha nº 22:

Problema 1.- *Imagina que participas en el reparto "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto "4 barras de regaliz entre 3 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta*.

Problema 2.- *Imagina que participas en el reparto "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto "2 barras de regaliz entre 5 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta*.

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual y para que, posteriormente, los alumnos expongan sus razonamientos públicamente.

• El profesor coordinará el debate en el que los alumnos expondrán sus razonamientos. Conviene que los razonamientos basados en el reparto, sin apoyo de las técnicas del reparto, aparezcan en el aula.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 22 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Imagina que participas en el reparto de "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto de "4 barras de regaliz entre 3 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ____

porque ____

Imagina que participas en el reparto de "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto de "2 barras de regaliz entre 5 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ____

porque ____

SESIÓN NÚMERO 20

1. Objetivos de la sesión
Comparar repartos igualitarios.
Reforzar el significado del concepto de reparto.

2. Contenidos

- Relaciones de orden entre repartos.

3. Metodología.

• El profesor enuncia, de forma secuenciada, los siguientes problemas que constituyen la Ficha nº 23:

Problema 1.- *Imagina que participas en el reparto "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta.*

Problema 2.- *Imagina que participas en el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas" y en el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta.*

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual y para que, posteriormente, los alumnos expongan sus razonamientos públicamente.

• El profesor coordinará el debate en el que los alumnos expondrán sus razonamientos. Conviene poner de manifiesto las estrategias utilizadas por los alumnos. Si alguna de las estrategias descritas no son propuestas por los alumnos serán presentadas por el profesor:

- En particular, interesa que aparezca la estrategia que permite comparar repartos y establecer la equivalencia de repartos, y por lo tanto de fracciones, mediante razonamientos basados en el significado del reparto. Es decir, utilizar la equivalencia de repartos, igualando en ambos repartos el número de barras de regaliz o el número de personas.
- Otra estrategia que interesa que conozcan los alumnos es la de considerar las fracciones que expresan los resultados de los repartos que se desean comparar y, después, comparar las fracciones complementarias de la unidad. Esta estrategia posee un importante valor formativo, a pesar de que se trata de una estrategia es de carácter local porque no siempre las fracciones complementarias de la unidad se comparan más fácilmente.
- La estrategia que resulta más compleja es la de escenificar los repartos a comparar y utilizar la idea de "socializar repartos" o "compartir repartir". Como se trata de comparar los repartos «3 barras para 4 personas» y «2 barras para 3 personas», puede observarse que el reparto «3 barras para 4 personas» se obtiene del «2 barras para 3 personas» cuando acude una persona que lleva una barra de regaliz. Las tres personas que participan en el reparto de «2 barras para 3 personas» son "más pobres" que la persona que tiene una barra de regaliz. Si las tres personas "pobres" deciden compartir con la persona "rica" las barras se construye un reparto de «3 barras entre 4 personas» en el que las personas recibirán más cantidad de regaliz que la que recibían en el reparto de «2 barras para 3 personas»

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 23 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Imagina que participas en el reparto "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ____

porque ____

Imagina que participas en el reparto de "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto de "2 barras de regaliz entre 5 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ____

porque ____

Tema 3: La Representación Polinómica Decimal

En las siguientes cuatro sesiones de la secuencia de enseñanza los alumnos resuelven las correspondientes tareas y encuentran la Representación Polinómica Decimal que expresa el resultado de un reparto igualitario efectuado en varias fases utilizando procedimientos manipulativos, gráficos y simbólicos.

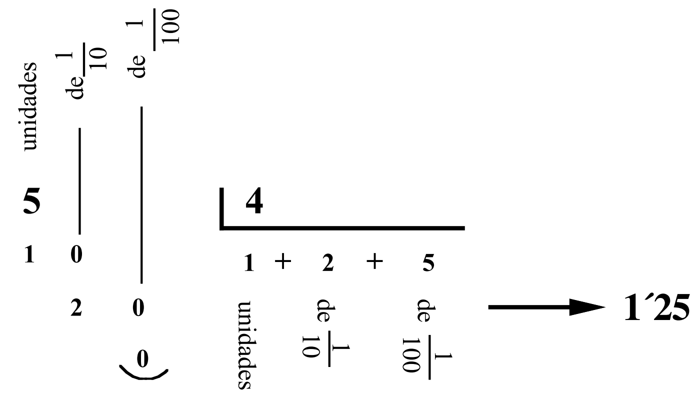
Se utiliza el modelo de aprendizaje de cociente partitivo modificando la técnica del reparto igualitario que ahora se realiza por fases, aplicando el criterio de la mayor parte que consiste en dar en cada fase del reparto la mayor cantidad posible, y fraccionando las partes sobrantes en diez partes iguales.
De esta forma el resultado del reparto aparece como una suma de partes enteras y partes alícuotas de la unidad cuyos tamaños son las sucesivas potencias de 1/10 de unidad. Esta suma recibe el nombre de representación polinómica decimal del reparto.

Ejemplificamos el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas" realizado con esta técnica:

Fase del reparto	***Acción***	***Cantidad que recibe cada persona***	***Cantidad que queda por repartir***
Primera	*Repartir*	*1 barra*	*1 barra*
Segunda	*Fraccionar en 10 partes iguales 1 barra y después repartir*	$\frac{2}{10}$ *de barra*	$\frac{2}{10}$ *de barra*
Tercera	*Fraccionar en 10 partes iguales* $\frac{2}{10}$ *de barra y después repartir*	$\frac{5}{100}$ *de barra*	*No sobra cantidad*

La representación polinómica decimal de este reparto es $1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ *barras de regaliz.*

Los alumnos simbolizan el proceso de reparto del siguiente modo:



SESIÓN NÚMERO 21

1. Objetivo de la sesión

Introducir la representación polinómica fraccionaria decimal como resultado de un reparto igualitario realizado en VARIAS FASES Y REALIZANDO FRACCIONAMIENTOS DE LAS BARRAS (O PARTES DE BARRA) EN 10 PARTES IGUALES.

2. Contenidos

- Sistema de representación polinómico decimal.

3. Metodología

• El profesor expone una nueva técnica de reparto:

Ahora, vamos a repartir barras de regaliz entre personas utilizando el siguiente método:

1º. Se reparten barras enteras, si es posible, dando a cada persona la mayor cantidad posible.

2º. Si quedan barras (o partes de barra) sin repartir se fraccionan las barras sobrantes (o partes de barra) en 10 partes iguales y se procede a realizar otra fase del reparto.

3º. Si quedan partes de barra sin repartir se vuelve a hacer lo mismo que hemos hecho en el apartado 2º, y así sucesivamente, hasta que no queden partes sobrantes.

• El profesor enuncia la tarea siguiente, que constituye la Ficha de Trabajo nº :

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto " 3 barras de regaliz entre 2 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales".
Os recuerdo que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra y que las barras se pueden fraccionar

• El profesor propone la tarea para que los alumnos los resuelvan por parejas y siguiendo las instrucciones que va exponiendo en la pizarra.

• El profesor coordinará el trabajo de los alumnos mediante tres indicaciones explícitas:

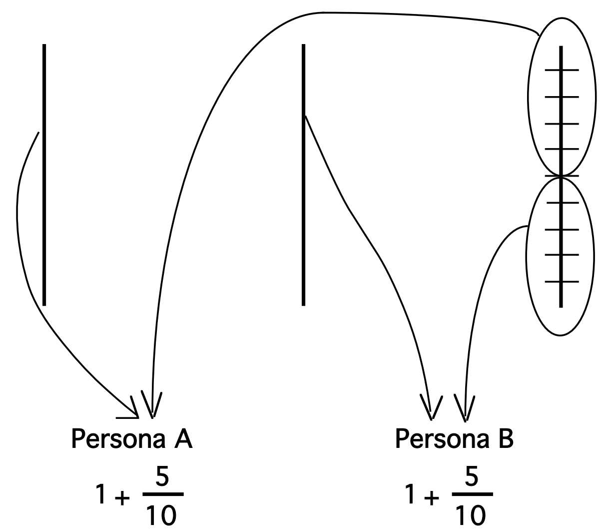
1. Indicar a los grupos de alumnos las acciones que deben realizar con el material manipulativo. Y que son:

1.1 repartir una barra a cada una da las dos personas

1.2 como no podemos dar más barras enteras, se fracciona la barra sobrante en DIEZ partes iguales.

1.3 al repartir los diez trozos de longitud 1/10 de barra, cada persona recibe, en la segunda fase, 5 trozos de longitud 1/10 de barra. Y no quedan trozos sobrantes para repartir.

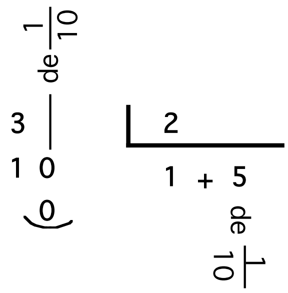
2. Representar gráficamente las acciones realizadas con el material.



3. Simbolizar el proceso del reparto, en el paso de la notación fraccionaria a la representación polinómica decimal.

Antes de introducir la representación decimal conviene mostrar que el resultado del reparto es una medida de cantidad de longitud. Así, vamos a dotar al número decimal de otro significado: el de medida de cantidades de magnitud. Este significado se introduce mediante la REPRESENTACIÓN POLINÓMICA DECIMAL asociada a la acción de reparto.

De forma simbólica:



El resultado del reparto es **1 +** $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}$ **de barra**, que denominamos REPRESENTACIÓN POLINÓMICA DECIMAL.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 24 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:

2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

3 $\underline{\lfloor 2 \quad\quad}$

SESIÓN NÚMERO 22

1. Objetivo de la sesión

Introducir la representación polinómica fraccionaria decimal como resultado de un reparto igualitario realizado en VARIAS FASES Y REALIZANDO FRACCIONAMIENTOS DE LAS BARRAS (O PARTES DE BARRA) EN 10 PARTES IGUALES.

2. Contenidos

- Representación polinómica decimal.

3. Metodología.

• El profesor enuncia la tarea siguiente, que constituye la Ficha de Trabajo nº 25:

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto " 7 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

Os recuerdo que debéis realizar el reparto por fases, fraccionando en 10 partes iguales las barras (o trozos de barra) sobrantes, y que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra

• El profesor propone la tarea para que los alumnos la resuelvan de forma individual

• El profesor propone que algún alumno exponga el trabajo realizado con materiales manipulativos, de forma gráfica y, finalmente, de forma simbólica. Además, vuelve a indicar que estamos realizando un reparto por fases y ahora expresamos el resultado del reparto indicando, en cada sumando, lo que se da en cada fase del reparto.

Se propone evaluar la técnica de reparto en tres pasos:

1º Los alumnos indican verbalmente las acciones realizadas con el material manipulativo.

2º Los alumnos representar gráficamente, en la pizarra, las acciones realizadas con el material.

3º Los alumnos simbolizan el proceso del reparto. Algún alumno explicará el paso de la notación fraccionaria a la representación polinómica decimal.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

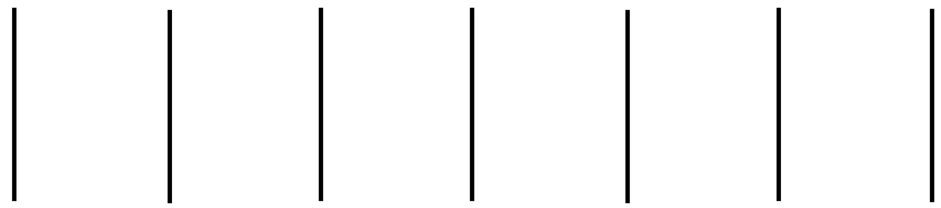
TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 25 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "7 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

$7 \;\; \underline{|\, 5 \quad}$

SESIÓN NÚMERO 23

1. Objetivo de la sesión

Introducir la representación polinómica fraccionaria decimal como resultado de un reparto igualitario realizado en VARIAS FASES Y REALIZANDO FRACCIONAMIENTOS DE LAS BARRAS (O PARTES DE BARRA) EN 10 PARTES IGUALES.

2. Contenidos

- Representación polinómica decimal.

3. Metodología

• El profesor enuncia la Ficha de Trabajo nº 26 que plantea las dos tareas siguientes:

Tarea 1.- *Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto " 4 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales*.

Tarea 2.- *Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "3 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales*.

Os recuerdo que debéis realizar el reparto por fases, fraccionando en 10 partes iguales las barras (o trozos de barra) sobrantes, y que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra

• El profesor propone la tarea para que los alumnos la resuelvan de forma individual

• El profesor propone que algún alumno exponga el trabajo realizado con materiales manipulativos, de forma gráfica y, finalmente, de forma simbólica.

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar, por cada una de las tareas una tarjeta similar a la que reproducimos de la tarea 1:

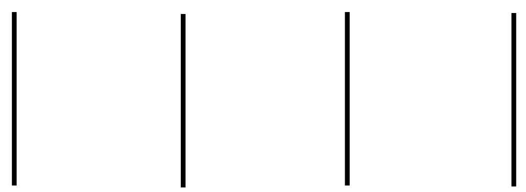
TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 26 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "4 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

4 |_5

SESIÓN NÚMERO 24

1. Objetivos de la sesión
Introducir la representación polinómica fraccionaria decimal como resultado de un reparto igualitario realizado en VARIAS FASES Y REALIZANDO FRACCIONAMIENTOS DE LAS BARRAS (O PARTES DE BARRA) EN 10 PARTES IGUALES.

2. Contenidos
- Representación polinómica decimal.

3. Metodología.
• El profesor enuncia la siguiente tarea:
Ficha de Trabajo nº 27.- *Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.*
Os recuerdo que debéis realizar el reparto por fases, fraccionando en 10 partes iguales las barras (o trozos de barra) sobrantes, y que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra
• El profesor propone la tarea para que los alumnos la resuelvan de forma individual.
• El profesor propone que algún alumno exponga el trabajo realizado con materiales manipulativos, de forma gráfica y, finalmente, de forma simbólica.

4. Material
- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

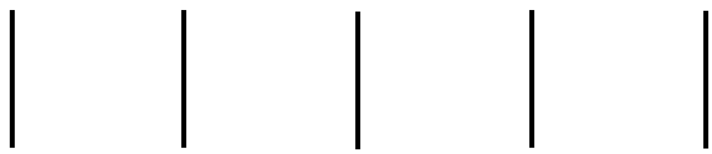
TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 27 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

5 |_4___

Tema 4: La Notación Decimal

En las siguientes cuatro sesiones de la secuencia de enseñanza los alumnos resuelven las tareas propuestas para obtener y dotar de significado al número decimal.

El número decimal se introduce desde el modelo de cociente partitivo a partir de la Representación Polinómica Decimal aplicando el criterio de economía en la representación escrita del resultado del reparto igualitario.

Se observa que la notación fraccionaria y la notación decimal tienen un mismo significado y surgen de simbolizar una misma acción, el reparto igualitario, con técnicas diferenciadas. Ambas representaciones admiten una misma evaluación semántica como cocientes partitivos, y poseen la misma estructura numérica subyacente, de la que informa la representación polinómica decimal asociada al reparto.
Por tanto, el número decimal expresa el resultado de un reparto igualitario efectuado en varias fases, y también expresa la medida de una cantidad de longitud. Para incidir en este segundo significado del número decimal proponemos representar números decimal sobre la recta numérica.

También se prevé realizar tareas de evaluación semántica del número decimal como resultado de un reparto igualitario en las que los escolares deben encontrar las condiciones iniciales de los repartos cuando conocen el número decimal que expresa el resultado del mismo. Estas tareas son exigentes porque indagan sobre los siguientes aspectos conceptuales:

1º la representación gráfica del decimal,
2º la acción de repartir, porque a partir del resultado de un reparto, expresado por un decimal, los alumnos deben reconstruir las condiciones iniciales en las que se ha realizado el mismo,
3º la fracción que expresa la misma cantidad de magnitud que viene dada por un decimal.

SESIÓN NÚMERO 25

1. Objetivos de la sesión

Introducir la notación decimal.
Conectar los significados de medida y reparto del número decimal
Evaluar semánticamente el número decimal.
Conectar la representación decimal y fraccionaria de repartos.

2. Contenidos

- Representación decimal de la cantidad de magnitud.

3. Metodología.

• El profesor hace una exposición general para introducir la notación decimal mediante un criterio de economía que sigue las pautas de nuestro sistema de numeración de números naturales.
• El profesor enuncia las siguientes tareas que comprenden la Ficha de Trabajo nº 28.

Tarea 1: El profesor pregunta a los alumnos por el significado de 1´5 barras de regaliz.

Tarea 2: El profesor entrega a cada alumno dos tiras de papel de la misma longitud que la de la barra de regaliz, una de ellas fraccionada en 10 partes iguales. Los alumnos deben construir una cantidad de longitud de 1´5 barras o tiras de papel.

• El profesor propone una serie de tareas similares para que los alumnos la resuelvan de forma individual. Las representaciones polinómicas decimales que aparecen en estas tareas son las que los alumnos han obtenido en las 5 Fichas precedentes al realizar repartos por fases con la técnica del fraccionamiento decimal.

• Después de introducir la notación decimal, el profesor plantea la resolución de la tarea siguiente que tiene por objetivo conectar los significados de medida y reparto del número decimal:

Ficha de Trabajo nº 29.- *Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño en el reparto "15 barras de regaliz entre 4 niños". Además, se pide indicar el significado de las cifras del número decimal; y dibujar sobre la recta numérica la cantidad de longitud que expresa el número decimal.*
• El profesor propone la tarea para que los alumnos la resuelvan de forma individual
• Cuando los alumnos han resuelto la tarea y cumplimentado la tarjeta de evaluación, el profesor propone que algún alumno exponga el trabajo realizado, y procede a realizar las aclaraciones oportunas.

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar, de forma consecutiva, cada una de las tarjetas que le entregará el profesor:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 28 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Cuando has realizado repartos por fases y has fraccionado los trozos que sobran en 10 partes iguales, en el reparto " 3 barras de regaliz entre 2 personas" cada persona recibe $1 + \frac{5}{10}$ *de barra, y el número decimal que indica esta cantidad es 1'5 barras.*

En el reparto " 7 barras de regaliz entre 5 personas" cada persona recibe $1 + \frac{4}{10}$ *de barra,*
y el número decimal que indica esta cantidad es ____

En el reparto " 4 barras de regaliz entre 5 personas" cada persona recibe $0 + \frac{8}{10}$ *de barra,*
y el número decimal que indica esta cantidad es ____

En el reparto " 3 barras de regaliz entre 5 personas" cada persona recibe $0 + \frac{6}{10}$ *de barra,*
y el número decimal que indica esta cantidad es ____

En el reparto " 5 barras de regaliz entre 4 personas" cada persona recibe $1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ *de barra,*
y el número decimal que indica esta cantidad es ____

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 29 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

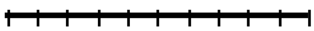
Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño en el reparto "15 barras de regaliz entre 4 niños”.

SOLUCIÓN: ____

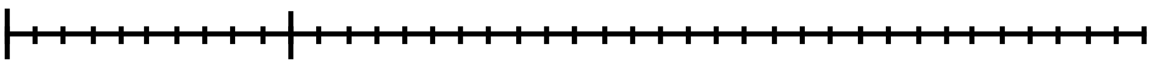
a) Indica, con símbolos, cómo haces el reparto

$$15 \;\; \underline{|\; 4 \quad\quad}$$

b) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal: ____________________________

c) Si la longitud de una barra de regaliz es: 

Dibuja sobre la línea, la longitud que indica la cantidad de regaliz que recibe cada niño:



SESIÓN NÚMERO 26

1. Objetivo de la sesión

Reforzar los dos significados del número decimal: como medida y como cociente partitivo.
Evaluar semánticamente el número decimal.
Conectar la representación decimal y fraccionaria de repartos.

2. Contenidos

- Representación decimal de la cantidad de magnitud.

3. Metodología

• El profesor enuncia las siguientes tareas:

Ficha de Trabajo nº 30.- *Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño en el reparto" 17 barras de regaliz entre 8 niños*.

• El profesor propone una serie de tareas en torno a la resolución de la tarea para que los alumnos las contesten, de forma individual, en la tarjeta que se les entrega. En concreto*, se pide indicar el significado de las cifras del número decimal; y dibujar sobre la recta numérica la cantidad de longitud que expresa el número decimal*.

• Seguidamente, se proponen una serie de tareas similares con los repartos que se indican:

Ficha de Trabajo nº 30BIS.- Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada persona en los siguientes repartos:

a) " 9 barras de regaliz entre 10 personas".
b) " 22 barras de regaliz entre 25 personas".
c) " 7 barras de regaliz entre 8 personas".
d) " 41 barras de regaliz entre 20 personas".
e) " 6 barras de regaliz entre 3 personas".
f) " 39 barras de regaliz entre 20 personas".
g) " 401 barras de regaliz entre 200 personas

• Las tareas formuladas en esta ultima Ficha de Trabajo que no sean resueltas por los alumnos, en el aula, se consideran trabajos para que los realicen en sus casas. Su posterior evaluación se llevará a cabo en próximas sesiones de clase.

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente, para cada una de las tareas. Todas poseen el mismo formato; mostramos la correspondiente a la Ficha de Trabajo nº 30:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 30 Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño en el reparto "17 barras de regaliz entre 8 niños”.

SOLUCIÓN: ____

a) Indica, con símbolos, cómo haces el reparto

$$17 \quad \underline{|\ 8 \qquad\quad}$$

b) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal: ____________________________

c) Si la longitud de una barra de regaliz es: 

Dibuja sobre la línea, la longitud que indica la cantidad de regaliz que recibe cada niño:

SESIÓN NÚMERO 27

1. Objetivos de la sesión

Reforzar los dos significados del número decimal: como medida y como cociente partitivo.
Evaluar semánticamente el número decimal.
Conectar la representación decimal y fraccionaria de repartos.
Realizar el paso de la notación decimal a la notación fraccionaria en el modelo de cociente.

2. Contenidos

- Representación decimal de la cantidad de magnitud resultante de un reparto.
- Representación fraccionaria de la cantidad de magnitud resultante de un reparto.
- Conexión entre las representaciones fraccionaria y decimal.

3. Metodología

• El profesor enuncia, sucesivamente, dos tareas correspondientes a determinar las condiciones de un reparto conocidos los resultados de los mismos: 1,5 y 2,5 barras de regaliz. La Ficha de Trabajo nº 31 indaga por las condiciones iniciales del reparto en el que los participantes reciben 1,5 barras, y por la notación fraccionaria que corresponde al numero decimal. En la Ficha de Trabajo nº 32 el problema se repite con el decimal 2,5 barras.
• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor modera el debate en el que los alumnos exponen las soluciones y las estrategias utilizadas. Además, valora la pertinencia de introducir las siguientes estrategias:

1. Sumar las fracciones e interpretar los términos de la fracción suma para obtener las condiciones iniciales del reparto: cada persona recibe 1,5 barras = $1 + \frac{5}{10} = \frac{10}{10} + \frac{5}{10} = \frac{15}{10}$ barras

Y sabemos que $\frac{15}{10}$ barras es el resultado de repartos del tipo "15 barras entre 10 personas" o "3 barras entre 2 personas"

2. Utilizando el concepto de reparto: como cada participante recibe $1 + \frac{5}{10}$ barras de regaliz, si suponemos que han participado 10 personas en el reparto la cantidad de regaliz que se han repartido es:

$$10 \text{ x } (1 + \frac{5}{10}) = 10 + 5 = 15 \text{ barras}$$

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente. Mostramos la de la Ficha nº 32:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 32 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

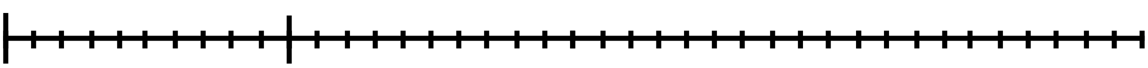
Cada una de las personas que participan en un reparto reciben 2´5 barras de regaliz.

Responde y justifica tu respuesta:

1º) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal: ___________________________

2º) Si la longitud de una barra de regaliz es: 

Dibuja sobre la línea, la longitud 2´5 barras:



3º) ¿Qué fracción expresa la cantidad de regaliz que recibe cada una de las personas que participan en el reparto?

4º) ¿Cuántas barras había antes de hacer el reparto y cuántas personas han participado en el reparto?

SESIÓN NÚMERO 28

1. Objetivos de la sesión

Reforzar los dos significados del número decimal: como medida y como cociente partitivo.
Evaluar semánticamente el número decimal.
Conectar la representación decimal y fraccionaria de repartos.
Realizar el paso de la notación decimal a la notación fraccionaria en el modelo de cociente.
Poner de manifiesto la equivalencia entre números decimales cuya cifra de menor orden es cero

2. Contenidos

- Representación decimal de la cantidad de magnitud resultante de un reparto.
- Representación fraccionaria de la cantidad de magnitud resultante de un reparto.
- Conexión entre las representaciones fraccionaria y decimal.

3. Metodología

• El profesor enuncia, sucesivamente, dos tareas correspondientes a determinar las condiciones de un reparto conocidos los resultados de los mismos: 0,75 y 2,50 barras de regaliz. La Ficha de Trabajo nº 33 indaga por las condiciones iniciales del reparto en el que los participantes reciben 0´75 barras, y por la notación fraccionaria que corresponde al numero decimal. En la Ficha de Trabajo nº 34 el problema se repite con el decimal 2´50 barras.
• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor modera el debate en el que los alumnos exponen las soluciones y las estrategias utilizadas.

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta siguiente, para cada una de las tareas, que son similares a las que figura en la tarjeta de la Ficha de Trabajo nº 33:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 33 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

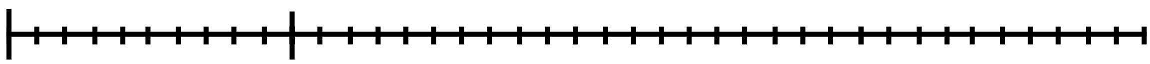
Cada una de las personas que participan en un reparto reciben 0´75 barras de regaliz.

Responde y justifica tu respuesta:

1º) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal: ___________________________

2º) Si la longitud de una barra de regaliz es: 

Dibuja sobre la línea, la longitud 0´75 barras:



3º) ¿Qué fracción expresa la cantidad de regaliz que recibe cada una de las personas que participan en el reparto?

4º) ¿Cuántas barras había antes de hacer el reparto y cuántas personas han participado en el reparto?

Tema 5: Conexión entre la notación decimal y la notación fraccionaria

En las dos sesiones de la secuencia de enseñanza (nº 29 y nº 30) los alumnos resuelven las correspondientes tareas con la finalidad de establecer conexiones entre la representación decimal y fraccionaria.

Sabemos que la notación fraccionaria y la notación decimal tienen un mismo significado y surgen de simbolizar una misma acción, el reparto igualitario, con técnicas diferenciadas. Ambas representaciones admiten una misma evaluación semántica como cocientes partitivos, y poseen la misma estructura numérica subyacente, de la que informa la representación polinómica decimal asociada al reparto.

Ahora se trata de establecer la conexión entre el número decimal y la fracción en contextos de medida que son diferentes de los de reparto. El nexo de unión entre ambas representaciones es la Representación Polinómica Decimal.

SESIÓN NÚMERO 29

1. Objetivos de la sesión

Evaluar semánticamente el número decimal desde los modelos de medida.
Conectar la representación decimal y fraccionaria desde los modelos de medida.
Realizar el paso de la notación decimal a la notación fraccionaria desde modelos de medida.

2. Contenidos

- El número decimal como resultado de la medida de cantidades de magnitud.

3. Metodología

• El profesor hace un breve exposición pública insistiendo en el significado de las notaciones fraccionaria y decimal: los números decimales expresan el resultado de un reparto. Los números decimales también expresan la medida de cantidades de magnitud. Así, cuando decimos que nuestra temperatura corporal es 36,5 grados centígrados, estamos afirmando que tenemos 36 grados y $\frac{5}{10}$ de grado. Esto quiere decir que si fraccionamos el grado centígrado en 10 partes iguales la temperatura es 36 grados y, además, 5 décimas de grado. Vamos a realizar algunas tareas para ejercitar el paso de número decimal a fracción en situaciones de medida de cantidades, diferentes de las de reparto

• El profesor enuncia, de forma secuenciada, estas dos tareas que constituyen la Ficha de Trabajo nº 35:

Tarea 1.- *La capacidad de una botella de agua de 1´5 litros. Expresa con una fracción la capacidad de la botella.*

Tarea 2.- *El contenido de botella de fertilizante pesa 1´2 Kgrs. Expresa con una fracción el peso del contenido de la botella.*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

• El profesor velará porque al menos aparezcan las siguientes estrategias de resolución:

1. Sumar las fracciones, dado que el resultado del reparto viene expresado por una fracción.
2. Utilizar el concepto de reparto: como cada participante recibe 1+ $\frac{5}{10}$ barras de regaliz, si suponemos que han participado 10 personas en el reparto la cantidad de regaliz que se han repartido es:

$$10 \text{ x } (1+ \frac{5}{10}) = 10 + 5 = 15 \text{ barras.}$$

Y el reparto de 15 barras para 10 personas se expresa por la fracción $\frac{15}{10}$ barras.

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 35 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

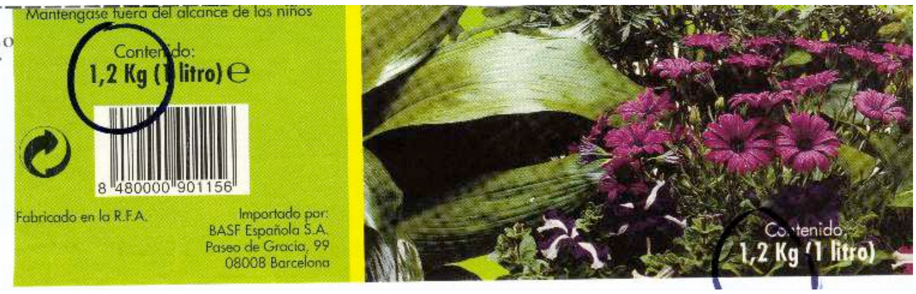
Expresa con una fracción las cantidades de magnitud que están escritas con números decimales.

1º.

SOLUCIÓN: ☐ de ____________

*He obtenido la fracción del siguiente modo:*____

2º



SOLUCIÓN: ☐ de ____________

He obtenido la fracción del siguiente modo: ____

SESIÓN NÚMERO 30

1. Objetivos de la sesión

Evaluar semánticamente el número decimal desde modelos de medida.
Conectar la representación decimal y fraccionaria desde modelos de medida.
Realizar el paso de la notación decimal a la notación fraccionaria desde modelos de medida..

2. Contenidos

- El número decimal como resultado de la medida de cantidades de magnitud.

3. Metodología.

• El profesor enuncia, de forma secuenciada, estas dos tareas que constituyen la Ficha de Trabajo nº 36:

Tarea 1.- *La capacidad de un botellín de zumo es 0,25 litros. Expresa con una fracción la capacidad de este botellín.*

Tarea 2.- *En la carnicería has comprado 0,375 Kgrs. de carne picada. Expresa con una fracción el peso de carne picada que has comprado.*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 36 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

1º. La capacidad de una botella de batido es 0´25 litros. Expresa con una fracción (la más simplificada posible) la capacidad de esta botella.

SOLUCIÓN: $\boxed{}$ de ____________

*He obtenido la fracción del siguiente modo:*____

2º En la carnicería has comprado 0´375 Kgrs. de carne picada. Expresa con una fracción (la más simplificada posible) el peso de carne picada que has comprado.

SOLUCIÓN: $\boxed{}$ de ____________

*He obtenido la fracción del siguiente modo:*____

Tema 6: Relación de orden entre números decimales
En las sesiones de la secuencia de enseñanza (nº 31 y nº 32) los alumnos resuelven las correspondientes tareas con la finalidad de ordenar cantidades de magnitud expresadas con números decimales y, además, de conjeturar reglas que permitan ordenar números decimales.

SESIÓN NÚMERO 31

1. Objetivos de la sesión
Ordenar cantidades de magnitud expresadas con números decimales

2. Contenidos
- Relaciones de orden entre notaciones decimales.

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea siguiente que constituye la Ficha de Trabajo nº 37:

Ordena de menor a mayor, la estatura de los siguientes niños:

Manuel	*1,51*	*metros*
Oscar	*1,495*	*metros*
Luis	*1,510*	*metros*
Enrique	*1,5*	*metros*
Antonio	*1,59*	*metros*
César	*1,509*	*metros*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor revisará públicamente las soluciones que van exponiendo los alumnos, así como las estrategias puestas en juego. Velará porque aparezca la estrategia consistente en ir comparando, en los diversos números, las unidades de mayor orden. Por ello, se comparan las cifras que ocupan los mismos lugares en cada número, empezando por las cifras que ocupan los lugares de mayor orden de magnitud.
• Conviene que el profesor anime a los alumnos para que enuncien la regla de comparación de números decimales.

4. Material
- Cañas de longitud la unidad.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 37 Fecha: ______________
ALUMNO/A:____

Ordena de menor a mayor, la estatura de los siguientes niños:

Manuel	*1´6*	*metros*
Oscar	*1´495*	*metros*
Luís	*1´510*	*metros*
Enrique	*1´5*	*metros*
Antonio	*1´51*	*metros*
César	*1´59*	*metros*

SOLUCIÓN:
El niño de menor estatura es: ______________________
____
____
____
____
El niño de mayor estatura es: ______________________

Inventa una regla que sirva para ordenar números decimales: ______________________

SESIÓN NÚMERO 32

1. Objetivos de la sesión
Ordenar cantidades de magnitud expresadas con números decimales.
Conjeturar la regla para ordenar números decimales.

2. Contenidos
- Relaciones de orden entre notaciones decimales.

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea siguiente que constituye la Ficha de Trabajo nº 38:
Ordena de menor a mayor los siguientes números decimales:
10,21 10,3 1,031 10,30 100,01 0,975

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor revisará públicamente las soluciones que van exponiendo los alumnos, así como las estrategias puestas en juego.
• Conviene que el profesor anime a los alumnos para que enuncien la regla de comparación de números decimales.

4. Material
- Cañas de longitud la unidad.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales..

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 38 Fecha: ______________
ALUMNO/A:____
Ordena de menor a mayor, los siguientes números decimales:
10,21 10,3 1,031 10,30 100,01 0,975

SOLUCIÓN:
El número decimal menor es: ______________________________

El número decimal mayor es: ______________________________

Inventa una regla que sirva para ordenar números decimales: ______________________________

Actividad complementaria: juego de adivinar un número decimal

Funcionamiento del juego
Los alumnos se dividen en grupos de cuatro. Se sortea entre los 6 grupos el orden de intervención. El profesor escribe un número decimal en un folio de manera que los alumnos no puedan ver el decimal escrito. Se trata de que los grupos adivinen el número decimal. Cuando los alumnos de un grupo intenten adivinar el número el profesor sólo les dirá si el número escrito es mayor, menor o igual que el numero "escondido".
Un representante de cada grupo situará sobre la recta numérica el número que, según ellos, es el "escondido".
Otro representante del grupo sitúa los números elegidos sobre la recta numérica que está dibujada en la tarjeta de evaluación que les entrega el profesor.
Gana el grupo que adivine el número decimal.

Actuaciones para desarrollar el juego

1) Para no alargar las partidas el profesor puede indicar, al comienzo de la partida, que el decimal esta comprendido entre determinados números naturales. Por ejemplo, les puede decir que el decimal está entre 0 y 1.

2) Interesa que el número "escondido" tenga al menos dos cifras decimales. De esta manera, si los alumnos empiezan a probar con números con una sola cifra decimal les aparecerá una situación conflictiva que juzgamos interesante por cuanto introduce la densidad de los números decimales. Veamos un ejemplo. Si el número desconocido es 0,27 y los alumnos van probando con números de una sola cifra decimal, es previsible que tengan el número acotado entre 0,2 y 0,3; y sin embargo, no hayan atrapado al decimal.

3) El profesor valorará las partidas que son necesarias realizar. Durante la primera partida observará las estrategias que utilizan los grupos para llevar el control de las diferentes cotas que encuadran al decimal "escondido". Y valorará si propone a los alumnos, antes de comenzar la segunda partida, la utilización de la recta numérica.

Objetivos

Ordenar números decimales.
Comprender que entre dos decimales siempre hay otro número decimal.
Situar números decimales sobre la recta numérica.

Metodología

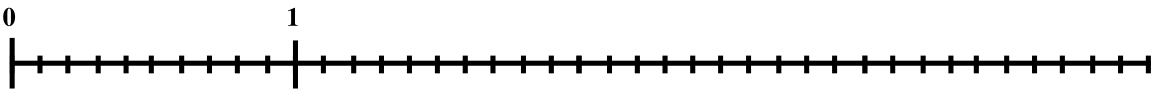
La tarea se presenta a todo el grupo en general. Los alumnos participan por equipos en el juego y escriben las sucesivas acotaciones en un folio que recogerá el profesor al finalizar la sesión. Tiempo dedicado al juego no está computado en la temporalización de la Propuesta Didáctica.

Cuando comienza la partida el profesor entrega un modelo para que los alumnos utilicen la recta numérica:

TARJETA DE EVALUACIÓN. **Juego de adivinar un número decimal.**

ALUMNOS: ____

Partida nº _____



Tema 7: Operaciones entre números decimales

En las nueve sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 33 y nº 41) los alumnos resuelven las tareas correspondientes para estudiar el significado y los procedimientos de cálculo de las operaciones suma y resta de números decimales, y de la multiplicación y división de un número decimal por un número natural.

La enseñanza se centra en dos aspectos clave: el significado de las operaciones y la justificación de los algoritmos de cálculo de dichas operaciones.

El primer aspecto se trabaja a partir de la resolución de situaciones problemáticas en contextos de medida de cantidades de magnitud.

En cuanto al segundo aspecto, desde una perspectiva formativa que va más lejos de la función instrumental que tienen los algoritmos de cálculo, proponemos la enseñanza de los procedimientos de cálculo desde la comprensión. De esta forma, la enseñanza de los algoritmos de cálculo refuerza la comprensión de las estructuras numéricas y del sistema de numeración. Ejemplificamos justificar el método de trabajo que proponemos con el cálculo de la multiplicación 2´75x8 que resuelve el problema enunciado en la Ficha nº 45. Antes que los alumnos utilicen el procedimiento de "situar la coma":

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 7 & 5 \\ & & \times & 8 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

y al situar la coma 22´00 metros

Proponemos que procedan del siguiente modo:

$2´75 = 2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$

$$\begin{array}{r} 2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} \\ \times \quad 8 \\ \hline 16 + \frac{56}{10} + \frac{40}{100} \end{array}$$

Como $\frac{56}{10} = 5 + \frac{6}{10}$ y $\frac{40}{100} = \frac{4}{10}$

Y además, $\frac{6}{10} + \frac{4}{10} = 1$, entonces el resultado es 16 + 5 + 1 = 22 metros

---

SESIÓN NÚMERO 33

1. Objetivos de la sesión

Introducir el significado de la suma de números decimales.
Conjeturar y justificar el procedimientos de cálculo de la suma de decimales.

2. Contenidos

- Significado y cálculo de la suma de decimales.

3. Metodología

• El profesor enuncia, de forma secuenciada los problemas siguientes:

Ficha de Trabajo nº 39.- *Un albañil ha colocado el rodapié de una habitación. Por la mañana ha colocado una longitud de 6´5 m. de rodapié y por la tarde coloca 3´8 m, ¿cuántos metros de rodapié ha puesto?*

Ficha de Trabajo nº 40.- *Un grupo de amigas quedan para caminar dos veces al día. Por la mañana andan 4,5 Km. y por la tarde 3,75 Km. ¿Cuantos kilómetros caminan cada día?*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• Sobre el significado de la operación suma de decimales en el modelo longitud:

1. Para resolver este problema no es necesario identificar la operación suma de decimales: basta con volver a medir la longitud que se obtiene al colocar la longitud de un rodapié a continuación del otro rodapié. Como las cantidades son poco manejables los alumnos podrían optar por sumar, mentalmente, los metros "enteros" y escenificar con el material las longitudes menores que el metro. En este caso, no queda claro que los alumnos utilicen la operación suma para resolver la tarea.
2. Cuando los alumnos interpreten el problema como de suma de decimales, el profesor pregunta a la clase: ¿Tiene alguna ventaja reconocer este problema como de suma de decimales? La respuesta es afirmativa, dado que el proceso de resolución del problema es mucho más corto: no se necesita volver a medir, ni utilizar materiales. El proceso de resolución es mental, si se desea con apoyos gráficos, de modo que se conceptualiza la longitud del *rodapié suma* como la cantidad de longitud que se obtiene al unir, alineados y uno a continuación del otro, las cantidades de longitud de los rodapiés iniciales.
3. El cálculo de la operación se justifica con el significado de la suma de fracciones decimales: si tengo un rodapié que mide 6 m. y $\frac{5}{10}$ de m. y le añado otro que mide 3 m. y $\frac{8}{10}$ de m, es como si tuviera un sólo rodapié de medida $9 + \frac{5}{10} + \frac{8}{10}$ metros.

4. Material

- Los alumnos dispondrán, si lo solicitan al profesor, de trozos caña de longitud 1/10 y 1/100 de metro.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente por cada uno de los problemas propuestos:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 39 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Un albañil ha colocado el rodapié de una habitación. Por la mañana ha colocado una longitud de 6´5 m. de rodapié y por la tarde coloca 3´8 m, ¿cuántos metros de rodapié ha puesto?

SOLUCIÓN: La longitud del rodapié que ha colocado es _________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema ______________________________

SESIÓN NÚMERO 34

1. Objetivos de la sesión

Introducir el significado de la suma y resta de números decimales.
Conjeturar y justificar el procedimientos de cálculo de la resta de decimales.

2. Contenidos

- Significado y cálculo de la suma y resta de números decimales.

3. Metodología

• El profesor enuncia el problemas siguiente que constituye la Ficha de Trabajo nº 41:

> *Un carnicero vende una pieza de ternasco de 20 Kgrs. A los tres primeros clientes les vende 3,75 Kgrs.; 5,8 Kgrs. y 6,5 Kgrs. ¿Cuántos Kgrs. de la pieza de ternasco le queda por vender?*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

• El profesor expondrá los diferentes procedimientos de cálculo y velará porque aparezca en el aula la justificación del algoritmo tradicional de la resta de decimales

4. Material

- Los alumnos dispondrán, si lo solicitan al profesor, de trozos caña de longitud 1/10 y 1/100 de metro.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 41 Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

Un carnicero vende una pieza de ternasco de 20 Kgrs. A los tres primeros clientes les vende 3,75 Kgrs.; 5,8 Kgrs. y 6,5 Kgrs. ¿Cuántos Kgrs. de la pieza de ternasco le queda por vender?

SOLUCIÓN: Le queda para vender ____________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema ______________________________

SESIÓN NÚMERO 35

1. Objetivos de la sesión

Introducir el significado de la suma y resta de números decimales.

Conjeturar y justificar el procedimientos de cálculo de la resta de decimales.

2. Contenidos

- Significado y cálculo de la suma y resta de números decimales.

3. Metodología

• El profesor enuncia el problema siguiente que constituye la Ficha de Trabajo nº 42:

> *Un carpintero debe hacer un soporte para un canalón de un tejado que tiene 3,2m. de largo. Dispone de planchas de 1m., 1,57m., 1,1m., 1,33m. y 0,3m. Ha subido al tejado dos planchas: una de 1,57m. y otra de 0,3m; y se da cuenta de que no es suficiente para sostener el canalón de 3,2m. ¿Qué plancha subir ahora?*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

• Para dotar de significado de la operación suma y resta de decimales y para conjeturar y justificar el algoritmo tradicional de la resta de decimales

4. Material

- Los alumnos dispondrán, si lo solicitan al profesor, de trozos caña de longitud 1/10 y 1/100 de metro.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 42 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Un carpintero debe hacer un soporte para un canalón de un tejado que tiene 4´1m. de largo. Dispone de planchas de 0´5m., 1´55m., 1´2m., 1´85m. y 0´7m. Ha subido al tejado dos planchas: una de 1´55m. y otra de 0´7m; y se da cuenta de que no es suficiente para sostener el canalón de 4´1m.

a) ¿Qué plancha deberá subir ahora?

b)¿Puede hacer el soporte utilizando otras planchas?

SOLUCIÓN: La plancha que debe subir al tejado mide _______________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ____

Indica cómo has resuelto el problema ____

SESIÓN NÚMERO 36

1. Objetivos de la sesión
Introducir el significado del producto de un decimal por las potencias de 10.
Conjeturar y ejercitar los procedimientos de cálculo para multiplicar un decimal por 10, 100 y 1000.

2. Contenidos
- Producto de un decimal por las potencias de 10.

3. Metodología
• El profesor enuncia, de forma secuencial, los problemas siguientes:

Ficha de Trabajo nº 43.- *Imagina que eres una de las ocho personas que participa en el reparto de 3 barras de regaliz para 8 personas.*

1ª pregunta.- Si participas 10 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

2ª pregunta.- Si participas 100 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

3ª pregunta.- Si participas 1000 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

Ficha de Trabajo nº 44.- *Imagina que eres una de las 20 personas que participa en el reparto de 21 barras de regaliz entre 21 personas. Y que participas 10 veces en el mismo reparto. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.*

Completa la siguiente tabla:

	Multiplicado por 10	*Multiplicado por 100*	*Multiplicado por 1000*
Número decimal resultado del reparto 21 barras entre 20 personas:			

e inventa una regla para multiplicar un decimal por 10, 100 y 1000.

Os aconsejo que no utilicéis material, pero si no sabéis resolver la tarea de otro modo podéis solicitarlo.

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

• El profesor presentará las soluciones aportadas por los alumnos. Finalmente, establecerá el significado de la operación: la medida de una cantidad de magnitud (resultado de un reparto) que se construye al reiterar la cantidad de magnitud de partida tantas veces como indica el factor multiplicador. El cálculo de la operación se justifica por dos vías:

1º. Realizando el reparto inicial y después reiterar 10 veces el resultado del reparto expresado por la suma de fracciones decimales. Es decir: $10 \times (\frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}) = 3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} = 3{\acute{}}75$

Aunque esta presentación no se corresponde con la del algoritmo tradicional, sirve para prepararlo y justificarlo.

2º. Antes de realizar el reparto inicial considerar qué ocurre si las personas participan 10 veces en el mismo reparto. En este caso, daría lo mismo que realizar el reparto de 30 barras para 8 personas. Esta segunda estrategia de resolución es poco probable que sea utilizada por los alumnos.

Para que los alumnos conjeturen la regla de la multiplicación por potencias de 10 conviene que el profesor escriba al finalizar la evaluación de la tarea una tabla del tipo:

	Multiplicado por 10	Multiplicado por 100	Multiplicado por 1000
0´375	**3´75**	**37´5**	**375**

4. Material

- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.
- Se pretende que los alumnos abandonen las estrategias basadas en la manipulación de materiales y vayan utilizando razonamientos que modelizan las operaciones aritméticas

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente por cada uno de los problemas propuestos. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de Trabajo nº 43:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 43 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Imagina que eres una de las ocho personas que participa en el reparto de 3 barras de regaliz entre 8 personas.

Primera pregunta:

Si participas 10 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________

Segunda pregunta:

Si participas 100 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________

Tercera pregunta:

Si participas 1000 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________

Cuarta pregunta:

Completa la siguiente tabla:

	x 10	x 100	x 1000
Número decimal resultado del reparto 3 barras entre 8 personas			

Inventa una regla para multiplicar un decimal por 10, 100 y 1000: ______________________________

SESIÓN NÚMERO 37

1. Objetivos de la sesión
Introducir el significado del producto de un decimal por un número natural.
Conjeturar y ejercitar el algoritmo de cálculo de esta operación.

2. Contenidos

- Significado y cálculo del producto de un decimal por las potencias de 10.

3. Metodología.
• El profesor enuncia el problema siguiente, que constituye la Ficha de Trabajo nº 45:

La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas.

Os aconsejo que no utilicéis material, pero si no sabéis resolver la tarea de otro modo podéis solicitarlo.

• El profesor debe dejar claro que los números decimales expresan también medidas de magnitudes que no proceden, necesariamente, de acciones de reparto.
• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor presentará las soluciones aportadas por los alumnos. Finalmente, establecerá el significado de la operación: la medida de una cantidad de magnitud que se construye al reiterar la cantidad de magnitud de partida tantas veces como indica el factor multiplicador.
El cálculo de la operación se justifica con el significado de la suma de fracciones decimales: como la altura de cada planta es de 2´75 m. debemos reiterar 8 veces la cantidad de longitud expresada por la suma de fracciones decimales:

$$8 \text{ x } (2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}) = 16 + 8 \text{ x } \frac{7}{10} + 8 \text{ x } \frac{5}{100} = 16 + 5 + \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = 21 + \frac{10}{10} = 22 \text{ metros}$$

El profesor no propone el algoritmo de cálculo escrito arriba, más bien propone reiterar las centésimas, décimas y unidades del decimal 2,75 por separado, como paso previo a la introducción del algoritmo tradicional. Así:
8 x 5 centésimas = 40 centésimas = 4 décimas;; 8 x 7 décimas = 56 décimas = 5 unidades y 6 décimas
8 x 2 unidades = 16 unidades
En total, 21 unidades y 10 décimas = 22 unidades.

4. Material

- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.
- Se pretende que los alumnos abandonen las estrategias basadas en la manipulación de materiales y vayan utilizando razonamientos que modelizan las operaciones aritméticas

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 45 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas consecutivas es de 2´75 metros?

SOLUCIÓN: La altura del edificio es _________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema ______________________________

SESIÓN NÚMERO 38

1. Objetivos de la sesión
Introducir el significado del producto de un decimal por un número natural.
Conjeturar y ejercitar el algoritmo de cálculo de esta operación.

2. Contenidos
- Significado y cálculo del producto de un decimal por un número natural.

3. Metodología
• El profesor enuncia los problemas siguientes que constituyen la Ficha de Trabajo nº 46:
Problema 1.- *La mejor marca olímpica de los 50 Km. marcha está próxima a 3,5 horas. ¿Cuántos minutos hay en 3'5 horas?*
Problema 2.- *He comprado 500 sobres. Cada sobre cuesta 3´75 ptas. ¿Cuánto he gastado*
Os aconsejo que no utilicéis material, pero si no sabéis resolver la tarea de otro modo podéis solicitarlo.
• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor presentará las soluciones aportadas por los alumnos y observará, en particular, la estrategias de resolución utilizadas por los alumnos.
Para realizar el cálculo de la operación multiplicación de un decimal por un natural se propone reiterar las centésimas, décimas y unidades del decimal por separado, como paso previo a la introducción del algoritmo tradicional.

4. Material
- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 46 Fecha: _____________
ALUMNO/A:____

La mejor marca olímpica de los 50 Km. marcha está próxima a 3´5 horas. ¿Cuántos minutos hay en 3´5 horas?

SOLUCIÓN: En 3´5 horas hay ______________________________________

*Indica cómo has resuelto el problema:*______________________________

He comprado 500 sobres. Cada sobre cuesta 3´75 ptas. ¿Cuánto he gastado?

SOLUCIÓN: He gastado ______________________________________

*Indica cómo has resuelto el problema:*______________________________

SESIÓN NÚMERO 39

1. Objetivos de la sesión
Introducir el significado de la división de un decimal por un número natural.
Conjeturar y ejercitar el algoritmo de cálculo de esta operación.

2. Contenidos
- Significado y cálculo de la división de un decimal por un número natural.

3. Metodología.
• El profesor enuncia los problemas siguientes que constituyen la Ficha de Trabajo nº 47:
Problema 1.- *Un carpintero corta un listón de 1´5 metros de longitud en cuatro partes iguales. ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes iguales?*

Problema 2.- *Con 0´375 Kgrs. de carne picada haces 5 hamburguesas iguales. ¿Cuánto pesa cada una de las cinco hamburguesas?*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

• El significado de la división de una cantidad de magnitud entre un número natural se conceptúa como la cantidad de magnitud que se obtiene al fraccionar en partes iguales, tantas como indique el número natural, la cantidad de magnitud del objeto inicial.

Para potenciar en los alumnos la utilización de estrategias más avanzadas que la de la utilización de material manipulativo, el profesor comentará con el grupo clase todas las estrategias utilizadas por los alumnos.

No se espera que los alumnos utilicen la notación fraccionaria para resolver la ficha. En tal caso, estos alumnos escribirán $\frac{3}{2} : 4$ para resolver la el problema nº 1.

Se espera que la mayoría de alumnos opten por utilizar el algoritmo "usual" de la división, que fue trabajado cuando se introdujo el número decimal con significado de reparto

4. Material

- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 47 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Un carpintero corta un listón de 1´5 metros de longitud en cuatro partes iguales. ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes iguales?

SOLUCIÓN: La longitud de una de las partes del listón es ________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Indica cómo has resuelto el problema ____

Con 0´375 Kgrs. de carne picada haces 5 hamburguesas iguales. ¿Cuánto pesa cada una de las cinco hamburguesas?

SOLUCIÓN: Cada hamburguesa pesa ________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Indica cómo has resuelto el problema ____

SESIÓN NÚMERO 40

1. Objetivos de la sesión

Profundizar en el significado de la división de un número decimal por las potencias de 10.

Conjeturar el algoritmo de cálculo de la división de un número decimal por las potencias de 10.

2. Contenidos

- Significado y cálculo de la división de un decimal por las potencias de 10.

3. Metodología.

• El profesor enuncia los problemas siguientes que constituyen la Ficha de Trabajo nº 48:

Problema 1: Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 10 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes

Problema 2: Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 100 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes

Problema 3: Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 1000 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes

Problema 4: Completa la siguiente tabla:

	: 10	*: 100*	*: 1000*
125			

e inventa una regla para dividir un decimal por 10, 100 y 1000

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

4. Material

- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 48 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Primera pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 10 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema: ____

Segunda pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 100 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema: ____

Tercera pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 1000 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema: ____

Cuarta pregunta:

Completa la siguiente tabla:

	: 10	: 100	: 1000
125			

Inventa una regla para dividir un decimal por 10, 100 y 1000: ______________________________________

SESIÓN NÚMERO 41

1. Objetivos de la sesión
Introducir la división de dos números decimales desde el significado agrupamiento.
Conjeturar las modificaciones que deben sufrir el dividendo y el divisor para transformar la división de decimales en una división de números naturales.

2. Contenidos

- Significado y cálculo de la división de dos números decimales.

3. Metodología
• El profesor enuncia los problemas siguientes que constituyen la Ficha de Trabajo nº 49:
Problema 1.- *Quieres trocear un listón de madera de 1,5 m. para obtener el mayor número posible de listones de longitud 0,25 m. ¿Cuántos listones puedes obtener?*
Problema 2.- *Deseas embotellar 50 litros de mosto en botellas de 1,5 litros ¿Cuantas botellas puedes llenar?*
• Una vez finalizados estos problemas el profesor enuncia nuevos problemas que constituyen la Ficha de Trabajo nº 50:
Problema 1: El médico le ha dicho a mi abuela que tiene que beber cada día 4 vasos de agua. La capacidad del vaso es 0,3 litros. ¿Cuántos litros de agua debe beber cada día?
Problema 2: Las cajas de agua mineral embotellada suelen contener 12 botellas de 1,5 litros. ¿Cuántos litros de agua hay en una caja?
Problema 3: Si compro una caja de agua embotellada para que mi abuela beba la cantidad de agua que le recomienda el médico, ¿cuantos días durará la caja?
• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• La división aparece con la idea de agrupamiento, en el que las magnitudes que actúan como divisor y dividendo son del mismo tipo y están expresadas con respecto a la misma unidad de medida.
El profesor mostrará a los alumnos que el significado de la división no se corresponde con un reparto. La clasificación de la tipología de los problemas de multiplicación / división se hará en función de las magnitudes implicadas en los datos del problema.
Para que los alumnos puedan utilizar el algoritmo usual de la división se necesita suprimir las cifras decimales del divisor. Para ello se recurre al siguiente razonamiento basado en la proporcionalidad: el número de listones que se obtienen no varía si tenemos un listón de madera 100 veces mayor pero la longitud de cada trozo de listón también es 100 veces mayor.
Esta estrategia justifica y prepara la introducción de la técnica usual del algoritmo de la división que consiste en suprimir las partes decimales del dividendo y/o del divisor. Sin embargo, existen otras estrategias, de carácter más local, como recurrir a la resta reiterada o a la multiplicación; y que algunos alumnos pueden utilizar en la resolución de la Ficha nº 49. Así: 0,25 x 4 = 1;; 0,25 x 2 = 0,5 y sumando: 0,25 x 6 = 1,5
O bien, quitando uno a uno cada trozo del listón: 1,5 - 0,25 = 1,25;; 1,25 - 0,25 = 1;; 1 - 0,25 = 0,75
0,75 - 0,25 = 0,5;; 0,5 - 0,25 = 0,25;; 0,25 - 0,25 = 0

4. Material
- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente por cada una de las series de problemas que le entrega el profesor. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de Trabajo nº 50:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 50 Fecha: _____________
ALUMNO/A:____

Primera pregunta:
El médico le ha dicho a mi abuela que tiene que beber cada día 4 vasos de agua. La capacidad del vaso es 0´3 litros. ¿Cuántos litros de agua debe beber cada día?

SOLUCIÓN: Cada día debe beber ____________________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________

Segunda pregunta:

La caja de agua mineral embotellada contiene 12 botellas de 1´5 litros. ¿Cuántos litros de agua hay en una caja?

SOLUCIÓN: En cada caja hay ______________________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________________

Tercera pregunta:

Si compro una caja de agua embotellada y solo la utilizo para que mi abuela beba la cantidad de agua que le dice el médico, ¿cuántos días durará la caja?

SOLUCIÓN: La caja durará ______________________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________________

Modificación de la Propuesta Didáctica de 5º curso de Educación Primaria en la Segunda Etapa

La Propuesta Didáctica para quinto curso de Educación Primaria, en la Segunda Etapa, se articula en 41 sesiones de aula que se muestran, de forma secuencial, en el mismo orden en que se han implementado:

Sesiones de enseñanza en 5º curso de Educación Primaria

Sesiones 1 a 3	Tema 0.- Tareas previas para profundizar en el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente. Se resuelven las Fichas de Trabajo previas nº 1 a nº 6
Sesiones 4 a 14	Tema 1.- Operaciones con fracciones desde el significado de medida. Significado y cálculo de la suma, resta de fracciones; y multiplicación y división por un número natural. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 1 a nº 15
Sesiones 15 a 21	Tema 2.- La fracción con significado de cociente partitivo. La fracción como resultado de un reparto realizado en una sola fase. Búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto y comparación de repartos realizados en una sola fase. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 16 a nº 25
Sesiones 22 a 25	Tema 3.- La fracción con significado de cociente partitivo. La representación polinómica decimal como resultado de un reparto realizado en varias fases. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 26 a nº 30
Sesiones 26 a 29	Tema 4.- La notación decimal. El número decimal como resultado de un reparto igualitario. El número decimal como resultado de la medida de cantidades de magnitud. Representación gráfica en la recta numérica. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 31 a nº 38
Sesiones 30 y 31	Tema 5. Conexión entre la notación decimal y la notación fraccionaria. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 39 y nº 40
Sesiones 32 y 33	Tema 6. Relación de orden entre números decimales Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 41 y nº 42
Sesiones 34 a 41	Tema 7.- Operaciones con números decimales. Significado y cálculo de la suma, resta de números decimales; y multiplicación y división por un número natural. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 43 a nº 53

Tema 0: Repaso del concepto de equivalencia de fracciones

Se dedican las tres primeras sesiones de la secuencia de enseñanza a profundizar en el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente desde el significado de medida. Se ha considerado pertinente dedicar tres sesiones a reforzar el significado y cálculo de la equivalencia de fracciones porque los procedimientos de cálculo de las operaciones con fracciones se fracción se fundamentan en el concepto de equivalencia. Se proponen las mismas tareas que se han implementado en la Primera Etapa.

• No hay modificaciones en la planificación de la propuesta didáctica referida al Tema 0.

Tema 1: La fracción con significado de medida: Operaciones con fracciones

En las siguientes nueve sesiones de la secuencia de enseñanza se estudian las operaciones con fracciones asociadas a situaciones problemáticas de medida de cantidades de magnitud. Cuando los alumnos resuelven las correspondientes Fichas de Trabajo modelizan situaciones que dan sentido a las operaciones con fracciones: añadir cantidades, quitar cantidades, comparar cantidades, completar cantidades, reiterar cantidades de magnitud, repartir cantidades en partes iguales y fraccionar cantidades en partes iguales.

Se dedican 11 sesiones y se proponen 15 Fichas de Trabajo para introducir las operaciones con fracciones desde el modelo de medida de cantidades de magnitud.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
4	**FT2E nº 1 = FT1E nº 1** **FT2E nº 2 = FT1E nº 2**	FT1E nº 1 FT1E nº 2
5	**FT2E nº 3 = FT1E nº 3** **FT2E nº 4 = FT1E nº 4**	FT1E nº 3 (de evaluación) FT1E nº 4
6	**FT2E nº 5 = FT1E nº 5** **FT2E nº 6 nueva**	FT1E nº 5
7	**FT2E nº 7 = FT1E nº 6**	FT1E nº 6 (de evaluación)
8	**FT2E nº 8 = FT1E nº 7**	FT1E nº 7
9	**FT2E nº 9 nueva**	FT1E nº 8 (de evaluación)
10	**FT2E nº 10 = FT1E nº 8**	FT1E nº 9 FT1E nº 10
11	**FT2E nº 11 = FT1E nº 9** **FT2E nº 12 = FT1E nº 10**	FT1E nº 11 FT1E nº 12
12	**FT2E nº 13 = FT1E nº 12**	FT1E nº 13 (de evaluación)
13	**FT2E nº 14 = FT1E nº 13**	_________
14	**FT2E nº 15 nueva**	_________

Se observa que en la planificación de la Segunda Etapa contempla el aumento de dos sesiones con respecto a la de la Primera Etapa. Esto supone introducir tres nuevas Fichas de Trabajo, que mostramos a continuación.

• Se introduce la Ficha de Trabajo nº 6 que plantea el siguiente problema:

Tengo una caña de pescar que mide $\frac{7}{5}$ metros y se ha partido en dos partes: una mide $\frac{9}{10}$ de metro. ¿Cuánto mide la otra parte de la caña?
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

Con esta tarea se pretende reforzar la enseñanza del significado y del cálculo de la resta de fracciones.
• El profesor propone el problema para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.
• Cuando un alumno termine la tarea el profesor le entrega la siguiente tarjeta de evaluación para que haga una reflexión personal del proceso de resolución del problema:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 6 **Fecha** ______________
ALUMNO/A:____

Tengo una caña de pescar que mide $\frac{7}{5}$ *metros y se ha partido en dos partes: una mide* $\frac{9}{10}$ *de metro. ¿Cuánto mide la otra parte de la caña?*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

SOLUCIÓN: La otra parte mide ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ________________________________

Indica cómo has resuelto el problema: : ________________________________

• Se introduce la Ficha de Trabajo nº 9 con el objetivo de que reforzar el significado y cálculo del producto de una fracción por un número natural. Esta Ficha plantea dos situaciones problemáticas. Además, con el segundo problema se pretende incidir en el significado y cálculo de la resta de fracciones.

Problema 1.- ¿Cuántos litros de agua mineral hay en una caja que contiene 12 botellas de $\frac{3}{2}$ *de litro?*

Problema 2.- El paso de un adulto es $\frac{5}{6}$ de metro y el un niño es $\frac{3}{4}$ de metro. Contesta las siguientes preguntas:

a) *¿Cuántos metros avanza el adulto en 12 pasos?*
b) *¿Cuántos metros avanza el niño en 12 pasos?*
c) *Si el adulto avanza 12 pasos, ¿cuál es el menor número de pasos que debe dar el niño para que camine más que el adulto?*

El profesor propone el problema para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.
Cuando los alumnos resuelvan los problemas el profesor les entrega una tarjeta de evaluación para que hagan una reflexión personal de los procesos de resolución realizados.

• Por último, se introduce la Ficha de Trabajo nº 15 con el objeto de reforzar el significado de las operaciones con fracciones y de las técnicas de cálculo de dichas operaciones. Esta Ficha se compone de cuatro problemas cuyos enunciados se muestran a continuación:

1º. Para celebrar tu cumpleaños invitas a tus amigas a merendar pizza en tu casa. Sois 6 amigas, contándote tú. ¿Cuántas pizzas deberás comprar si quieres servir $\frac{2}{3}$ *de pizza a cada una?*

2º. Tres hermanos van a cenar. Tienen una tortilla de patata. Como dos de los hermanos se retrasan el otro hermano se sienta a la mesa y come $\frac{1}{4}$ *de tortilla. Los otros dos hermanos deciden repartirse, en partes iguales, la cantidad sobrante. Se pregunta:*

a) ¿Cuánta tortilla comerá cada uno de los hermanos que se han retrasado?
b) ¿Comen todos la misma cantidad de tortilla?. ¿Cuánta tortilla comen unos más que el otro?

3º. Jaime come $\frac{1}{3}$ *de tarta y su hermana Ángela la cuarta parte del resto. ¿Cuánta tarta come Ángela? ¿Cuánta tarta comen entre los dos hermanos?*

4º. Un equipo de 4 atletas participa en una carrera de relevos que consiste en correr $\frac{2}{5}$ de kilómetro. Si los cuatro atletas recorren la misma longitud, expresa con una fracción la cantidad de longitud que recorre cada uno.

Como en la tareas anteriores, el profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.
La formulación de algunos de estos problemas se ha creído oportuno ocultar, deliberadamente, la magnitudes implicadas en los enunciados de los problemas. De esta forma, los problemas se asemejan a los formulados en la enseñanza sustentada en la relación parte-todo, y posiblemente permitirá indagar si los alumnos reconocen las magnitudes que entran en juego en los contextos de los problemas.
Cuando los alumnos resuelvan los problemas el profesor les entrega una tarjeta de evaluación para que hagan una reflexión personal de los procesos de resolución realizados.

Tema 2: La fracción con significado de cociente partitivo

Se dedican 7 sesiones y se proponen 10 Fichas de Trabajo para introducir la fracción desde el modelo de cociente partitivo cuando el reparto se realiza en una sola fase, utilizando procedimientos manipulativos, gráficos y simbólicos.
En estas sesiones los alumnos reciben enseñanza de los siguientes conceptos referidos a la fracción como resultado de un reparto igualitario efectuado en una fase:

a) construcción del sistema de representación fraccionario con el significado de reparto igualitario.
b) comparación de repartos.
c) búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto conocido el resultado del mismo.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
13	_________	FT1E nº 14
14	_________	FT1E nº 15
15	**FT2E nº 16 = FT1E nº 14**	FT1E nº 16 (de evaluación) FT1E nº 17
16	**FT2E nº 17 = FT1E nº 15**	FT1E nº 18
17	**FT2E nº 18 = FT1E nº 16** **FT2E nº 19 nueva**	FT1E nº 19
18	**FT2E nº 20 = FT1E nº 17** **FT2E nº 21 = FT1E nº 18**	FT1E nº 20 FT1E nº 21
19	**FT2E nº 22 nueva**	FT1E nº 22
20	**FT2E nº 23 = FT1E nº 22**	FT1E nº 23(de evaluación)
21	**FT2E nº 24 = FT1E nº 23** **FT2E nº 25 nueva**	_________

• En la Segunda Etapa se suprimen tres tareas (FT1E nº 19, 20 y 21) de búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto igualitario porque los alumnos de la Primera Etapa reconocen directamente que el numerador y denominador de la fracción coinciden, respectivamente, con el número de unidades y de personas que participan en el reparto; y, además, las estrategias de obtención de las condiciones iniciales resultan complejas a la mayoría de los alumnos.

• Se introducen tres nuevas tareas. La primera tarea, constituye la Ficha de Trabajo nº 19, refuerza la comprensión de la fracción como resultado de un reparto igualitario, y plantea el siguiente problema:
Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 5 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

- El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
- El profesor prestará especial atención a las estrategias utilizadas por los alumnos, así como a las representaciones orales y escritas. En la evaluación de la tarea interesa que aparezcan las estrategias y que las acciones realizadas con material sean representadas de forma gráfica.
- El profesor animará a los alumnos a que expresen las representaciones orales, gráficas, escritas y simbólicas de las acciones que éstos realicen. Es interesante que aparezcan las representaciones gráficas del proceso de reparto para que poco a poco vayan sustituyendo a la utilización del material.
- Los alumnos cumplimentan la siguiente tarjeta de evaluación, que se ha modificado con respecto a las de la Primera Etapa:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 19 Fecha: ______________

ALUMNO/A: ____

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 5 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:

2. Completad la tabla siguiente:

ANTES DE HACER EL REPARTO	*COMO SE HACE EL REPARTO*	*DESPUÉS DE HACER EL REPARTO*
Hay 3 barras para 5 personas		RESULTADO DEL REPARTO
3:5		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ____

El denominador indica ____

• Se introduce la Ficha de Trabajo nº 22 para reforzar el significado de la equivalencia de fracciones. Esta tarea que tiene un formato análogo, a la Ficha nº 21 y cuya primera pregunta propone realizar el reparto de "*6 barras de regaliz entre 4 niños*". El proceso de reparto deben hacerlo con gráficos y con símbolo. Cuando los alumnos resuelven este reparto, los alumnos afrontan la resolución de la segunda pregunta que propone realizar el reparto de "*9 barras de regaliz entre 6 niños*".

- El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
- Hay una intervención del profesor haciendo notar que los repartos realizados por los dos grupos son iguales, y preguntará a la clase si esto es posible y en qué condiciones se da esta circunstancia.
- Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación que ha sido parcialmente modificada con respecto a la de la Primera Etapa; mostramos la que corresponde a la segunda pregunta:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 22 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Vais a repartir 9 barras de regaliz para 6 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para resolver la tarea:

☐ He realizado el siguiente dibujo:

☐ He utilizado símbolos:

ANTES DE HACER EL REPARTO	*COMO SE HACE EL REPARTO*	*DESPUÉS DE HACER EL REPARTO*

• Por último, se introduce la Ficha de Trabajo nº 25 que refuerza la técnica de comparación de repartos. Se enuncian, de forma secuenciada, los siguientes problemas:

Problema 1.- *Imagina que participas en el reparto "3 barras de regaliz entre 5 personas" y en el reparto "4 barras de regaliz entre 7 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta.*

Problema 2.- *Imagina que participas en el reparto "2 barras de regaliz entre 5 personas" y en el reparto "3 barras de regaliz entre 8 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta.*

- El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual y para que, posteriormente, los alumnos expongan sus razonamientos públicamente.
- El profesor coordinará el debate en el que los alumnos expondrán sus razonamientos. Conviene poner de manifiesto las estrategias utilizadas por los alumnos. Si alguna de las estrategias descritas no son propuestas por los alumnos serán presentadas por el profesor.
- Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación que no ha sufrido modificaciones con respecto a la Primera Etapa.

<u>Comentarios sobre las modificaciones efectuadas en la Segunda Etapa con respecto a la planificación de la Propuesta de la Primera Etapa:</u>

En esta Segunda Etapa de la Experimentación de la Propuesta para quinto curso se introducen algunas variaciones que vamos a comentar:

1º En lugar de cañas de un metro se van a utilizar tiras de papel de un metro que simulan las barras de regaliz. Este material es más manejable, permite de forma rápida en fraccionamiento en partes iguales, y no distrae a los escolares.

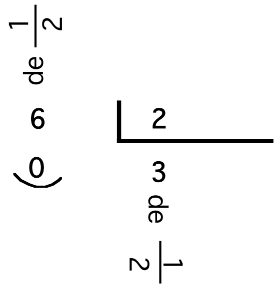
2º Se acuerda incidir en la ubicación temporal de las cantidades que intervienen en el reparto:

a) lo que recibe cada participante, <u>después</u> de realizar el reparto.

b) lo que tenían <u>antes</u> de comenzar el reparto.

3º Solicitar a los alumnos mayor atención y esmero en las representaciones gráficas que realizan. A los participantes en los repartos se les asignan letras (A, B, C, ….) para que los alumnos visualicen de forma gráfica la cantidad que recibe cada participante.

4º Utilizar la notación "dos puntos" en lugar de "la caja" para simbolizar el proceso del reparto. Para describir las condiciones iniciales de un reparto; se recomienda utilizar el lenguaje natural.
Se recuerda que en la Primera Etapa los escolares simbolizaban el proceso del reparto " 3 barras entre 2 niños" del siguiente modo:



En la Segunda Etapa los alumnos escriben:

$$3 : 2 = \frac{6}{2} : 2 = \frac{6:2}{2} = \frac{3}{2} \text{ de barra}$$

Justificamos esta decisión por las siguientes razones:

a) Deslindar la acción de reparto con magnitudes continuas de la que se realiza con magnitudes discretas y que los alumnos resuelven mediante el algoritmo de la división entera. Durante la Primera Etapa hemos detectado influencias perniciosas como la imposibilidad de realizar repartos que manifestaban algunos alumnos cuando el número de barras es menor que el número de participantes. Sin duda la notación de "la caja de la división" les recordaba la división entera de naturales y les retrotraía a situaciones con objetos discretos.
b) Por coherencia con la división entera de naturales, porque la notación de la caja la utilizamos para realizar repartos de objetos discretos en varias fases. Se recuerda que en el trabajo con números naturales si la división se realiza en una sola fase utilizamos la notación "dos puntos"
c) La notación de los dos puntos la hemos utilizado, en sesiones anteriores de este curso, para simbolizar la operación división de una fracción por un número natural que solía estar asociada a acciones de repartos igualitarios.
d) La notación de los dos puntos es compatible con la simbolización de la equivalencia de fracciones y refuerza el trabajo realizado con fracciones equivalentes.

Tema 3: La Representación Polinómica Decimal

Se dedican 4 sesiones y se proponen 5 Fichas de Trabajo para introducir la Representación Polinómica Decimal que expresa el resultado de un reparto igualitario efectuado en varias fases utilizando procedimientos manipulativos, gráficos y simbólicos.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
21	_________	FT1E nº 24
22	**FT2E nº 26 = FT1E nº 24**	FT1E nº 25
23	**FT2E nº 27 = FT1E nº 25**	FT1E nº 26
24	**FT2E nº 28 = FT1E nº 26a** **FT2E nº 29 = FT1E nº 26b**	FT1E nº 27 (de evaluación)
25	**FT2E nº 30 = FT1E nº 27**	_________

Como puede observarse en el cuadro anterior, no se hay modificaciones en la planificación de la Propuesta Didáctica referida a este Tema.

Tema 4: La Notación Decimal

Se dedican 4 sesiones y se proponen 8 Fichas de Trabajo para introducir y dotar de significado al número decimal.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
25	_________	FT1E nº 28 FT1E nº 29
26	**FT2E nº 31 = FT1E nº 28** **FT2E nº 32 nueva**	FT1E nº 30 (de evaluación) FT1E nº 30BIS
27	**FT2E nº 33 = FT1E nº 29** **FT2E nº 34 nueva**	FT1E nº 31 FT1E nº 32
28	**FT2E nº 35 = FT1E nº 30** **FT2E nº 36 nueva**	FT1E nº 33 FT1E nº 34
29	**FT2E nº 37 = FT1E nº 30BIS** **FT2E nº 38 nueva**	_________

Como puede observarse en el cuadro anterior, no se hay modificaciones en el número de sesiones y en el número de Fichas de Trabajo propuestas con respecto a la planificación de la Propuesta en la Primera Etapa Sin embargo, si que se ha modificado el contenido de las Fichas de Trabajo, según indicamos a continuación:

• Se suprimen 4 Fichas de la Primera Etapa, desde FT1E nº 31 hasta FT1E nº 34, que indagan por las condiciones iniciales de un reparto cuyo resultado es conocido y viene dado por un número decimal. La resolución de estas Fichas presentan grandes dificultades conceptuales a los alumnos de la Primera Etapa.

• En su lugar se modifican los enunciados de las 4 primeras Fichas propuestas en la Primera Etapa y se introducen 3 nuevas Fichas que tienen como objetivo:

- Conectar los significados de medida y reparto del número decimal
- Evaluar semánticamente el número decimal como medida de la cantidad de longitud
- Conectar la representación decimal y fraccionaria de repartos.

Las tres tareas que plantean realizar los siguientes repartos, utilizando las dos técnicas estudiadas:

Ficha de Trabajo nº 32.- *Realiza el reparto"7 barras de regaliz entre 2 niños" de dos formas diferentes.*

Ficha de Trabajo nº 34.- *Realiza el reparto"21 barras de regaliz entre 10 niños" de dos formas diferentes.*

Ficha de Trabajo nº 36.- *Realiza el reparto"9 barras de regaliz entre 4 niños" de dos formas diferentes.*

- El profesor propone, en sesiones diferentes, los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual y para que, posteriormente, los alumnos expongan sus razonamientos públicamente.
- Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación que sufrido importantes modificaciones con respecto a la Primera Etapa. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 32:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 32 Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

***Realiza el reparto"7 barras de regaliz entre 2 niños" de dos formas diferentes**:*

1º) Cuando fraccionas todas las barras en tantas partes iguales como el número de niños:

Expresa, con una fracción, el número de barras de regaliz que recibe cada niño.

SOLUCIÓN: Cada niño recibe barras de regaliz.

2º) Cuando repartes barras enteras y fraccionas las barras o partes de barras sobrantes en diez:

7 |2

Expresa, con un número decimal, el número de barras de regaliz que recibe cada niño

SOLUCIÓN: Cada niño recibe barras de regaliz

3º) La longitud de una barra de regaliz es ______________

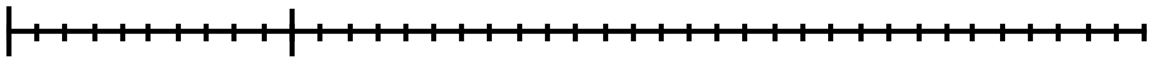
Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, la fracción que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

O

4º) La longitud de una barra de regaliz es 

Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, el número decimal que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

O



5º) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal

La parte entera es _____ e indica que ______________________________

La cifra de las centésimas es _____ e indica que ______________________________

La cifra de las milésimas es _____ e indica que ______________________________

• Se introduce la Ficha de Trabajo nº 38 con el objetivo de conectar la representación fraccionaria con la notación decimal. Mostramos la tarjeta de evaluación de esta tarea:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 38 Fecha: ____________

ALUMNO/A ____

Expresa, con un número decimal, las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{2} =$

b) $\frac{8}{4} =$

c) $\frac{7}{4} =$

d) $\frac{2}{5} =$

e) $\frac{15}{5} =$

f) $\frac{3}{10} =$

g) $\frac{27}{10} =$

h) $\frac{3}{8} =$

i) $\frac{17}{8} =$

j) $\frac{33}{20} =$

k) $\frac{21}{8} =$

Si la unidad de longitud es:

dibuja, a partir de O, la cantidad de longitud que expresan los números decimales que acabas de obtener:

a) ***O***

Tema 5: Conexión entre la notación decimal y la notación fraccionaria

En las dos sesiones de la secuencia de enseñanza (nº 30 y nº 31) los alumnos resuelven las correspondientes tareas con la finalidad de establecer conexiones entre la representación decimal y fraccionaria.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	**Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)**	**Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)**
29	_________	FT1E nº 35 (de evaluación)
30	**FT2E nº 39 = FT1E nº 35**	FT1E nº 36
31	**FT2E nº 40 = FT1E nº 36**	_________

Como puede observarse en el cuadro anterior, no se hay modificaciones en la planificación de la Propuesta Didáctica referida a este Tema.

Tema 6: Relación de orden entre números decimales

En las dos sesiones de la secuencia de enseñanza (nº 32 y nº 33) los alumnos resuelven dos tareas con la finalidad de ordenar cantidades de magnitud expresadas con números decimales y, además, de conjeturar reglas que permitan ordenar números decimales.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
30	_________	FT1E nº 37
32	**FT2E nº 41 = FT1E nº 37**	FT1E nº 38 (de evaluación)
33	**FT2E nº 42 = FT1E nº 38**	_________

Como puede observarse en el cuadro anterior, no se hay modificaciones en la planificación de la Propuesta Didáctica referida a este Tema.

Tema 7: Operaciones entre números decimales

Las últimas 7 sesiones de la secuencia de enseñanza (nº 34 a nº 41) se dedican a estudiar el significado y los procedimientos de cálculo de las operaciones suma y resta de números decimales, y de la multiplicación y división de un número decimal por un número natural.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
33	_________	FT1E nº 39 FT1E nº 40 (de evaluación)
34	**FT2E nº 43 = FT1E nº 39** **FT2E nº 44 = FT1E nº 40**	FT1E nº 41 (de evaluación)
35	**FT2E nº 45 = FT1E nº 41**	FT1E nº 42
36	**FT2E nº 46 = FT1E nº 42** **FT2E nº 47 = FT1E nº 45**	FT1E nº 43 FT1E nº 44
37	**FT2E nº 48 = FT1E nº 46**	FT1E nº 45 (de evaluación)
38	**FT2E nº 49 = FT1E nº 47**	FT1E nº 46
39	**FT2E nº 50 = FT1E nº 48**	FT1E nº 47 (de evaluación)
40	**FT2E nº 51 = FT1E nº 43** **FT2E nº 52 = FT1E nº 44**	FT1E nº 48
41	**FT2E nº 53 = FT1E nº 50**	FT1E nº 49 FT1E nº 50

• La Propuesta Didáctica, referida a este tema, contempla disminuir en una sesión de clase la planificación de la Segunda Etapa porque se suprime la Fichas de Trabajo nº 49 de la Primera Etapa que tiene por objeto conceptualizar la división de números decimales y, además, conjeturar las modificaciones que deben sufrir el dividendo y el divisor para transformar la división de decimales en una división de números naturales. La Propuesta Didáctica contiene suficientes contenidos por lo que no resulta oportuno introducir tareas cuyos objetivos no contempla la experimentación de aula.

• La Propuesta contempla implementar las restantes Fichas de Trabajo que componen la planificación de la Primera Etapa. La modificación más importante afecta al formato de las tarjetas de evaluación: se solicita a los alumnos que utilicen la representación polinómica decimal asociada al número decimal. A modo de ejemplo, mostramos la tarjeta de evaluación modificada que corresponde a la Ficha de Trabajo nº 43 de la Segunda Etapa o Ficha de Trabajo nº 39 de la Primera Etapa:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA FICHA Nº 43. Fecha: _______________

ALUMNO/A ____

Un albañil ha colocado el rodapié de una habitación. Por la mañana ha colocado una longitud de 6´5 m. de rodapié y por la tarde coloca 3´8 m, ¿cuántos metros de rodapié ha colocado?

SOLUCIÓN: La longitud del rodapié que ha colocado es ____________________

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

$$6´5 = 6 + \frac{5}{10}$$

$3´8 =$

Indica cómo has resuelto el problema: ____

• Otra modificación consiste en retrasar la implementación de las Fichas de Trabajo nº 43 y nº 44 de la Primera Etapa que tenían por objetivo introducir la regla para "situar la coma". La propuesta de enseñanza persigue que los alumnos justifiquen los algoritmos de cálculo con decimales utilizando sus representaciones polinómicas decimales asociadas. Para alcanzar este objetivo se recomienda posponer la enseñanza de la regla para "situar la coma" que los alumnos de la Primera Etapa sabían aplicar, cuando realizaban multiplicaciones de decimales, a pesar de que desconocían la justificación conceptual de dicha regla.

ANEXO II

Diarios de clase

II.1 Del Primer Ciclo de la Primera Etapa

II.2 Del Segundo Ciclo de la Primera Etapa

II.3 Del Primer Ciclo de la Segunda Etapa

II.4 Del Segundo Ciclo de la Segunda Etapa

ANEXO II: DIARIOS DE CLASE

Se muestran los diarios de clase correspondientes a la Primera Etapa y a la Segunda Etapa de la Experimentación. A su vez, en cada Etapa, hay dos diarios que se corresponden con el Primer Ciclo (cuarto curso de Educación Primaria) y Segundo Ciclo (quinto curso de Educación Primaria). En consecuencia, se detallan los siguientes cuatro diarios:

Anexo II.1: Diario de clase del Primer Ciclo y de la Primera Etapa

Anexo II.2: Diario de clase del Segundo Ciclo y de la Primera Etapa

Anexo II.3: Diario de clase del Primer Ciclo y de la Segunda Etapa

Anexo II.4: Diario de clase del Segundo Ciclo y de la Segunda Etapa

En todos los diarios, el desarrollo de cada una de las sesiones de clase se organiza atendiendo a los aspectos siguientes:

1.- Plan previsto
2.- Ejecución
3.- Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos
4.- Aspectos relacionados con la comprensión
5.- Valoración
6.- Toma de decisiones

ANEXO II.1: DIARIO DE CLASE DEL PRIMER CICLO Y DE LA PRIMERA ETAPA

Día 25-1-2000 (Primera sesión)

Plan previsto.

Abordar la resolución de la ficha de trabajo nº 1:

"Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared (la longitud de la cortina mide 3/4 de la unidad). La longitud de la barra queréis que sea igual que la largura de la cortina. ¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda la barra de la cortina que tenga la longitud deseada?".

Con esta tarea pretendemos que los alumnos intuyan y comprendan:

1. La utilidad de los números.-

Los números sirven para comunicar (transmitir) información. Con un número debemos comunicar al vendedor de barras de cortinas la longitud de la barra de cortina que nos debe mandar.

2. La necesidad de utilizar una unidad común.-

El comprador y vendedor para ponerse de acuerdo necesitan utilizar la misma unidad de longitud

3. La necesidad de fraccionar.-

Como lo único que tienen en común el comprador y vendedor es la unidad de medida, la comunicación indicará las acciones que deben efectuarse sobre la unidad: fraccionar o dividir la unidad en partes iguales.

Ejecución

En ambos grupos se han cumplido los objetivos 1 y 2; sin embargo, se constata que los alumnos no reconocen como evidente que la acción de fraccionar o dividir la unidad de longitud en partes iguales sirva para que el comprador comunique al vendedor la longitud de la barra de la cortina.

Aspectos actitudinales

En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

Asistencia de alumnos

Dos alumnos del grupo de 4º A faltan a clase (A37 y A40). En el grupo de 4º B faltan a clase tres alumnos (A41, A20 y A24).

Aspectos relacionados con la comprensión

Los alumnos no son conscientes de la utilidad de los números para transmitir información. Subestiman el valor de los números cuando proponen, con reiteración, que el comprador se desplace hasta la tienda del vendedor con la barra o la cortina que se desea encargar. Después de una puesta en común entre los alumnos de ambos grupos, los alumnos muestran comprensión de la función de los números y de la necesidad de que el comprador y el vendedor dispongan de la misma unidad de medida.

La dificultad, que en esta primera sesión ha sido ineludible, se manifiesta cuando se les pregunta a los alumnos que indiquen las acciones que deberá realizar el comprador para comunicarse con el vendedor, en las condiciones que se plantean en la ficha. Aunque un alumno (del grupo de 4º B) expresa correctamente la medida de la barra y otros (de ambos grupos) proponen métodos que respetan las condiciones del enunciado de la tarea, ninguno sabe explicar la estrategia o el método que debe utilizar el comprador de la barra.

Valoración
Los alumnos no reconocen la acción de fraccionar o dividir la unidad de longitud en partes iguales para comunicar al vendedor la longitud de la barra de la cortina. La primera sesión concluye sin que el profesor indique la acción que debe efectuar el comprador de la barra. Se detecta que *los alumnos no perciben como evidente la acción de fraccionar en partes iguales*. Esta acción no aparece en el aula cuando los alumnos intentan resolver la ficha.

Toma de decisiones
Se propone comenzar la segunda sesión realizando una modificación, transitoria, de la longitud de la barra de la ficha 1 que, ahora, será de media unidad. Cada grupo recibirá una unidad de medida y dos cañas de 1/2 de unidad. El profesor pregunta: ¿Cuánto mide la longitud de la caña que os acabo de entregar?. ¿Cómo le pediríais, por carta, al vendedor para que os mande una barra de longitud de la caña que os acabo de entregar?.
Ante la posibilidad de que los alumnos no especifiquen las acciones que el comprador debería indicar al vendedor, el profesor preguntará: ¿Cómo indicará el comprador al vendedor las acciones que éste deberá realizar para que le construya la barra que el comprador desea?

Día 26-1-2000 (Segunda sesión)
Plan previsto.
Continuar con la resolución de la ficha 1, con el objetivo de que los alumnos intuyan y comprendan:
3. La necesidad de fraccionar la unidad.
4. Las técnicas de fraccionamiento y la nomenclatura de las subunidades de medida.

Si fraccionamos la unidad en dos partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un medio de unidad" y se escribe 1/2. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/2 de unidad.

Si fraccionamos la unidad en tres partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un tercio de unidad" y se escribe 1/3. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/3 de unidad.

Si fraccionamos la unidad en cuatro partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un cuarto de unidad" y se escribe 1/4. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/4 de unidad.

Ejecución
En ambos grupos se han cumplido los objetivos 3 y 4; éste último de manera parcial dado que la duración de la sesión de clase ha concluido con la construcción y definición de las subunidades de longitud 1/3.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

Asistencia de alumnos
Un alumno del grupo de 4º A falta a clase (A28) y dos alumnas se ausentan para asistir a clases de apoyo. En el grupo de 4º B faltan a clase dos alumnos (A41 y A24).

Aspectos relacionados con la comprensión
Con la modificación provisional de la ficha 1 descrita en el apartado "toma de decisiones" del diario correspondiente a la sesión anterior, los alumnos comentan de forma inmediata que la medida de la barra es "un medio de unidad". Sin embargo, como los alumnos siguen sin especificar las orientaciones que el comprador debería decir al vendedor para que le construya la barra deseada, el profesor les pregunta: ¿cómo indicará el comprador al vendedor las acciones que éste deberá realizar para que le construya la barra que el comprador desea?. Algunos alumnos que contestan a esta cuestión dicen que debería decirle "que parta la unidad en dos partes y que haga una barra de longitud una de las dos partes". En este momento el profesor aprovecha estas intervenciones para indicar que la acción a realizar es el fraccionamiento o división en partes iguales de la unidad.

Dado que la acción a realizar es el fraccionamiento, el profesor propone fraccionar la unidad en tres partes iguales y, posteriormente, definir la subunidad de longitud 1/3 de unidad. Los alumnos ejercitan la técnica de fraccionamiento con éxito, empleando tiras de papel de longitud la unidad.

Valoración
Con la modificación provisional realizada en el enunciado de la ficha 1 los alumnos han comprendido la necesidad de efectuar fraccionamientos iguales de la unidad de medida, dado que la unidad es el único objeto del que disponen los dos protagonistas del problema: el comprador y el vendedor, que necesitan comunicarse una medida de longitud.
En sucesivas secuencias de enseñanza se debería proponer la ficha 1 con una barra de cortina que midiese 1/2 de unidad. Y después plantear la ficha 1 tal y como aparece descrita en la programación.

Toma de decisiones
No se considera necesario proponer modificaciones en la propuesta de enseñanza.

Día 27-1-2000 (Tercera sesión)
Plan previsto.
Continuar con la resolución de la ficha 1, con el objetivo de que los alumnos intuyan y comprendan:

4. Las técnicas de fraccionamiento y la nomenclatura de las subunidades de medida.
Si fraccionamos la unidad en cuatro partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un cuarto de unidad" y se escribe 1/4. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/4 de unidad.
Si fraccionamos la unidad en cinco partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un quinto de unidad" y se escribe 1/5. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/5 de unidad.
Si fraccionamos la unidad en cuatro partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un sexto de unidad" y se escribe 1/6. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/6 de unidad.

5. La técnica de la medida.
Los alumnos van probando con diversas subunidades, de modo que colocando una misma subunidad, una a continuación de la otra, se complete la longitud de la barra de la cortina. En el problema de la ficha 1 son necesarias colocar 3 subunidades de longitud 1/4 de unidad.

6. La escritura y lectura del resultado de la medida.
La medida de la barra se escribe 3/4 de unidad, y se lee "tres cuartos" de unidad.
Ni al numerador ni al denominador conviene darle el status de número, dado que el número es propiamente la fracción 3/4. El numerador, que es 3, indica el número de subunidades que contiene la barra que se está midiendo.
El denominador, que es el 4, indica que la unidad ha sido fraccionada en 4 partes iguales. Es decir, que las subunidades con las que se ha medido la barra son de longitud 1/4 de unidad.

Ejecución
En ambos grupos se han cumplido los objetivos 4, 5 y 6. Queda por construir y definir las subunidades de longitudes 1/5 y 1/6. Ante la previsible falta de tiempo para cumplir con el plan previsto en esta sesión, el equipo de investigación ha decidido terminar la ficha 1 e introducir la escritura y lectura de la fracción.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

Asistencia de alumnos
Un alumno del grupo de 4º A falta a clase (A28). En el grupo de 4º B faltan a clase dos alumnos (A12 y A24).

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos de los dos grupos aprenden rápidamente a fraccionar la unidad en partes iguales. La construcción de subunidades, aunque no ocasiona dificultades conceptuales en los alumnos, requiere una mayor duración temporal de la que inicialmente se había propuesto en la programación de la secuencia de enseñanza.

Valoración
Los alumnos de ambos grupos, en general, muestran comprensión de las técnicas de fraccionamiento y de la medida de longitudes, y de la representación oral y escrita de la fracción.
Los alumnos de 4º B (en el grupo de 4º A no ha habido tiempo para recoger información escrita), antes de

recibir enseñanza de la representación escrita y oral de la fracción, aportan las siguientes respuestas de la medida de la longitud de la barra de la ficha de trabajo nº 1:

3 cuartos de unidad o tres cuartos de unidad (10 alumnos)
Tres trozos de un cuarto de unidad (7 alumnos)
3 subunidades de longitud 1/4 de unidad (2 alumnos)
Un cuarto (2 alumnos)

Resulta extraño que diez alumnos aporten como solución la representación oral canónica o usual de la fracción antes de haber recibido enseñanza de este aspecto de la fracción. Ello puede deberse a circunstancias como que algún alumno comente a otros la solución, o bien, a conocimientos informales de los alumnos sobre la fracción (fenómenos de enculturación).

Se puede afirmar que todos los alumnos conocen y aplican correctamente la técnica de la medida, y que eligen las subunidades adecuadas. Cuando algunos alumnos proponen que la medida de la barra es una subunidad de longitud 1/2 y otra de longitud 1/4, el profesor les comenta que la respuesta es correcta pero que tomaremos como acuerdo que la medida de cantidades de longitud vendrá expresada por subunidades del mismo tipo.

Toma de decisiones
El equipo de investigación es consciente de que existe un desfase temporal, equivalente a una sesión de clase, que se justifica en:

1. las dificultades que mostraron los alumnos en reconocer la acción de fraccionar como paso previo a la expresión de la medida de una cantidad de longitud que no sea múltiplo de la unidad.

2. las técnicas de fraccionamiento de la unidad y la construcción de subunidades requieren una dedicación durante un período temporal más prolongado.
Sin embargo, no se considera necesario realizar modificaciones en la propuesta de enseñanza.

Día 31-1-2000 (Cuarta sesión)
Plan previsto.
1º. Abordar la resolución de la ficha 2, con el objetivo de consolidar los aprendizajes realizados por los alumnos en las tres primeras sesiones.
2º. Construir y definir las subunidades de longitud 1/5 y 1/6 de la unidad.

Ejecución
En los dos grupos de docencia se resuelve la ficha 2 y se realizan las actividades de fraccionamiento de la unidad en 5 y 6 partes iguales. Respecto a la segunda tarea hay que constatar que no todos los grupos han conseguido fraccionar en 5 y 6 partes iguales la unidad. Los alumnos han utilizado las plantillas de segmentos paralelos y bandas de papel de longitud la unidad para facilitar el fraccionamiento de la unidad pero, dado que esta tarea requiere cierta precisión, los alumnos obtenían subunidades de diferentes longitudes. A pesar de ello, el equipo de investigación considera que el objetivo se ha cumplido dado que los alumnos saben como fraccionar en partes iguales la unidad aunque no tengan la suficiente habilidad ni hayan dispuesto de un período mayor de entrenamiento para manejar con destreza esta técnica.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 4º A faltan a clase dos alumnas (A03 y A05) y otras dos se ausentan para asistir a clases de apoyo. En el grupo de 4º B faltan a clase cuatro alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
En la ficha 2 se propone la medida de un listón de madera (de longitud 4/3 de la unidad). Esta es la segunda actividad de medida que realizan los alumnos. El objetivo de esta ficha es que los alumnos ejerciten la técnica de la medida, escriban y lean la fracción resultado de la medida y además, sepan interpretar correctamente los términos de la fracción. De la evaluación de las producciones de los alumnos cuando han resuelto esta ficha destacamos los siguientes aspectos:

1º. La mayoría de los alumnos miden correctamente la longitud del listón. Se puede afirmar que conocen la técnica de la medida de cantidades de longitud. El procedimiento más utilizado ha consistido en comparar la longitud del listón con la unidad de medida y medir la "parte sobrante". Para medir esta "parte sobrante" los alumnos piden al profesor subunidades de longitud 1/2, 1/3 y 1/4 de unidad. La mayoría de los alumnos no son sistemáticos al pedir las subunidades, es decir, no prueban primero con subunidades de longitud 1/2, después con las de 1/3, y así sucesivamente.

2ª. La estrategia mayoritaria seguida por los alumnos les lleva a proponer como solución "la unidad y un tercio" expresada de forma escrita. Pocos alumnos (tan sólo cinco alumnos del grupo 4º A) expresan la fracción con el símbolo 4/3. Otros alumnos no recuerdan el acuerdo tomado días atrás relativo a la obligación de expresar la medida con subunidades de la misma longitud y escriben que la medida es:

"Una unidad y un tercio"
"Una unidad y 1/3"
"Dos de 1/2 y un 1/3"
"Un entero y un tercio"
"1 y un tercio"

3º En general, los alumnos han tenido dificultades para interpretar las preguntas de la Tarjeta de la ficha 2. El equipo investigación detecta las siguientes deficiencias de esta tarjeta:
1) Tiene demasiadas preguntas: los alumnos dedican demasiado tiempo a cumplimentarla.
2) En la segunda pregunta debe quedar más claro que se pregunta por la representación simbólica de la fracción.
3) La ubicación de la pregunta 4ª (¿cuál es la unidad de medida?) no es adecuada. Como los alumnos ya han medido, tienen la tendencia a expresar como unidad la longitud del listón o bien la subunidad con la que han medido el listón.
En consecuencia, se propone modificar las siguientes tarjetas de evaluación: suprimir las preguntas 1ª y 4ª, y clarificar la pregunta 2ª.

4ª. En general, los alumnos tienen dificultades para contestar a las preguntas 5ª y 6ª relativas al significado del numerador y denominador. En este momento de la secuencia de enseñanza es previsible que esto ocurra: el conocimiento que muchos alumnos tienen de la fracción como medida es inestable. Además, el equipo investigador ha observado que bastantes alumnos no saben expresar con palabras adecuadas los significados correctos que tienen acerca del numerador y denominador de la fracción.

Valoración
Los alumnos de ambos grupos, en general, muestran comprensión de las técnicas de fraccionamiento y de la medida de longitudes, y de la representación oral y escrita de la fracción. Sin embargo, se debe profundizar en el significado de fracción como resultado de la medida y en la expresión adecuada de los significados del numerador y del denominador de la fracción.

Toma de decisiones
De acuerdo con lo indicado en el apartado anterior, se procede a modificar las tarjetas de las fichas que los alumnos deben cumplimentar después de haber medido cantidades de magnitud. Por ejemplo, modificamos la tarjeta de la ficha 2 tal como indicamos a continuación:

1º. Escribe la fracción que expresa la longitud del listón:

_____ de unidad

2º. Escribe como se lee la fracción que expresa la longitud del listón: ________________________________

3ª. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ____

4º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? ____

En cuanto a la programación de la propuesta de la secuencia de enseñanza y, en concreto, en la ficha 3 de la sesión 4ª de la propuesta inicial se suprime una actividad de medida de un listón. En la propuesta inicial se planteaba la medida de tres listones de longitudes 5/4, 5/6 y 2 unidades. La observación del ritmo de trabajo de los alumnos en la implementación de las sesiones realizadas indica claramente que éstos no iban a tener tiempo suficiente para medir los tres listones. Por ello, se propone medir los listones que son más complejos: los de longitudes 5/6 y 2 unidades, respectivamente.

Día 1-2-2000 (Quinta sesión)

Plan previsto

Trabajar la ficha 3 de evaluación, con la actividad de medida de los listones de madera: primero el de longitud 5/6 de unidad y después el de longitud 2 unidades.

Ejecución

Los alumnos de los dos grupos resuelven la actividad de medida del primer listón (el de 5/6 de unidad) pero agotan el período temporal de la sesión realizando esta primera medición. Por este motivo no se aborda la medida del segundo listón.

Aspectos actitudinales

En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

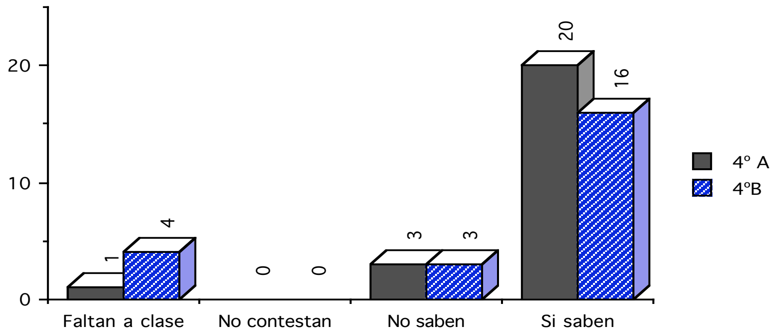
Asistencia de alumnos

En el grupo de 4º A falta a clase una alumna (A33). En el grupo de 4º B faltan a clase cuatro alumnas (A15, A27, A44 y A34)

Aspectos relacionados con la comprensión

Con carácter general puede decirse que los alumnos escriben correctamente la expresión simbólica de la fracción resultado de la medida del listón.

Expresan de forma simbólica la fracción



Unidades de comprensión

El mayor número de errores detectados en la segunda pregunta se debe a que los alumnos no han adquirido destreza en la lectura de fracciones. La propuesta pretende que los alumnos vayan conociendo como se nombran las fracciones mediante actividades de medida, sin proponer tareas específicas para adquirir esta destreza. De hecho esperamos que el número de respuestas correctas dadas por los alumnos en este ítem vayan creciendo a medida que realicen las siguientes fichas.

En los dos grupos, los alumnos tienen dificultades para expresar el significado de los términos de la fracción y por lo tanto de la propia fracción. El significado del denominador presenta mayor dificultad de comprensión que el del numerador. En el grupo de 4º A nueve alumnos saben expresar el significado del numerador frente a siete alumnos para el caso del denominador. En el grupo 4º B la tendencia se mantiene, siete alumnos expresan con corrección el significado del numerador frente a cinco que lo hacen en el caso del denominador.

Con la intención de justificar estos resultados, el equipo investigador propone tres hipótesis, no necesariamente incompatibles:

1º En relación con el diseño de la evaluación, cabe suponer que si se modifican los ítem 3º y 4º de la tarjeta de evaluación los resultados pueden mejorar. En algunos casos nos consta que determinados alumnos entienden los significados de los términos de la fracción y, sin embargo, no son capaces de expresar correctamente las ideas.

2º En relación a la propuesta de enseñanza, ésta no contempla la memorización de determinadas frases para que los alumnos las reciten cuando sean preguntados por los significados del numerador y denominador. La metodología que se sigue en esta propuesta es incompatible con tal proceder: resulta más enriquecedor para los alumnos, aunque también más complejo, que sean éstos los que realicen una interpretación personal del papel que juegan los términos de la fracción. Así, los alumnos para expresar el significado del denominador escriben frases como:

"veces en las que se corta la caña, paja, ... o sea cualquier material" (alumno A09)
"número de trozos que se han partido de la unidad" (alumno A10)
"el denominador indica de que tamaño son las subunidades" (alumno A11)
"la medida de las pajitas (subunidades)" (alumno A14)

3ª En relación con la gestión del material utilizado, se ha optado por escribir en cada subunidad la fracción unitaria, 1/n, que expresa su longitud con la intención de favorecer la actividad de medida. Esta decisión ha resultado operativa pero puede ocasionar una desconexión conceptual entre las subunidades rotuladas y separadas en cajas (que los alumnos manipulan con éxito como se manifiesta en los resultados obtenidos en la pregunta 1ª), y la unidad de medida de la que proceden aquellas a través de la técnica del fraccionamiento.
Ante esta coyuntura, el equipo investigador valoró la posibilidad de quitar el rótulo de las subunidades. Esta decisión hubiera dificultado la tarea de los alumnos y precisado de una ampliación del período temporal destinado a la realización de las fichas. Para fortalecer la conexión entre la unidad de medida y las subunidades obtenidas mediante su fraccionamiento en partes iguales se optó por la construcción de un mural en el que aparece la unidad sin descomponer y la unidad fraccionada en dos, tres, ..., nueve y diez partes iguales. Con la ayuda de este nuevo material, los alumnos recibirán una explicación al comienzo de la siguiente sesión, antes de proponer la siguiente ficha de trabajo de medida.

Valoración

Aunque se observan avances en cuanto a la adquisición del significado de fracción como resultado de la medida y de los significados del numerador y del denominador de la fracción, se debe seguir trabajando en este tópico, mientras que se realizan las actividades de medida propuestas en la ficha 3.

Toma de decisiones

Como se ha indicado en un apartado anterior se pretende concluir la ficha 3 en la siguiente sesión e introducir una explicación del profesor, con la ayuda del mural descrito con anterioridad, de modo que los alumnos perciban con mayor intensidad las relaciones existentes entre las diversas subunidades y la unidad de medida.
Dado que los alumnos han encontrado dificultades para significar los términos de la fracción 5/6 de unidad, el equipo investigador propone medir inicialmente la fracción 5/4 de unidad que tiene una representación simbólica más convencional que la de 2 unidades.

Día 2-2-2000 (Sexta sesión)

Plan previsto.

Terminar la ficha 3 de evaluación, con la actividad de medida de los listones de madera: primero el de longitud 5/4 de unidad y después, si da tiempo, el de longitud 2 unidades.

Ejecución

Los alumnos de los dos grupos resuelven la actividad de medida del primer listón (el de 5/4 de unidad) pero agotan el período temporal de la sesión realizando esta primera medición. Por este motivo no se aborda la medida del listón de 2 unidades.

Aspectos actitudinales

En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Sin embargo, cuando el profesor les indica, al comienzo de la sesión, que van a realizar una medida de longitud algunos alumnos muestran un cierto cansancio. A pesar de esto, asumen la tarea y la realizan con agrado.

Asistencia de alumnos

En el grupo de 4º A falta a clase una alumna (A33) y dos alumnas se ausentan para ir a clases de apoyo. En el grupo de 4º B faltan a clase cuatro alumnas (A15, A27, A44 y A34)

Aspectos relacionados con la comprensión

Durante los diez primeros minutos de la sesión; el profesor identifica diferentes tipos de subunidades, con la ayuda del mural en el que aparece la caña unidad descompuesta en diversas fracciones unitarias. El objetivo de esta intervención es relacionar la unidad de medida con la longitud de las subunidades y ver cómo dependen éstas del fraccionamiento realizado en la unidad. Después los alumnos miden el listón de longitud 5/4 de unidad y contestan a las preguntas de la tarjeta de evaluación.
Los resultados obtenidos por los alumnos son muy parecidos a los obtenidos en la actividad de medida realizada en la sesión anterior. En concreto, en ambos grupos, para las preguntas 1ª y 2ª se obtienen mejores resultados que los obtenidos en la ficha de la sesión anterior.

Número de alumnos que responden correctamente a las preguntas de la tarjeta de evaluación de la ficha 3:

	Listón 1 4º A	*Listón 2 4º A*	*Listón 1 4º B*	*Listón 2 4º B*
Escriben la fracción	**20** (87%)	**20** (95%)	**16** (89%)	**18** (100%)
Nombran la fracción	**15** (65%)	**15** (71%)	**15** (83%)	**16** (89%)
Significado de la fracción	**7** (30%)	**9** (43%)	**7** (39%)	**4** (22%)

Se siguen observando dificultades para contestar a las cuestiones sobre los significados de los términos de la fracción. Este hecho puede deberse a que los conocimientos que los alumnos utilizan para responder a las preguntas 1ª y 2ª surgen de la actividad manipulativa de la medida y los alumnos no están obligados a realizar otra interpretación de la fracción que no sea la del resultado de una medida. En cambio, para contestar a las cuestiones 3ª y 4ª es necesario realizar una interpretación de los significados del numerador y el denominador, y además saber expresar por escrito estas ideas.

Como se hizo en la sesión anterior, los alumnos han expresado públicamente los resultados obtenidos. En este caso algunos alumnos han trabajo con subunidades de tamaño 1/4 y otros con subunidades de tamaño 1/8 y han obtenido fracciones que se escriben de diferente forma: 5/4 y 10/8. El profesor ha intervenido para preguntarles si algunos alumnos se habían equivocado al medir. Después de varias intervenciones, los alumnos comprueban que las dos fracciones están bien escritas. El profesor les pregunta de nuevo que expliquen porqué la medida de una longitud puede escribirse con dos fracciones diferentes. En ambos grupos, algunos alumnos han aportado razonamientos valiosos. En particular, la alumna A09 indica que "son iguales porque un subunidad de 1/4 es lo mismo que 2 subunidades de 1/8, y que por lo tanto si el listón mide 5 de un cuarto también mide el doble (10) de un octavo". Como era presumible ha aparecido en los dos grupos por primera vez el concepto de equivalencia de fracciones.

Valoración

Los alumnos han mejorado su rendimiento en la fichas de medida de longitudes, en la escritura simbólica de la fracción y en la lectura de este nuevo sistema de representación. Aparentemente no se observan avances relativos a la comprensión de los significados del numerador y del denominador de la fracción. Por ello resulta imprescindible encontrar nuevos mecanismos de evaluación de los aprendizajes de este concepto en la línea que se ha sugerido en el apartado anterior.

Toma de decisiones

Dado que llevamos acumulado un retraso de dos sesiones respecto de la temporalización de la propuesta de enseñanza inicial, el equipo investigador suprime la medida del tercer listón de la ficha 3, que puede ser trabajo desde la medida de otra magnitud (masa o superficie). Así pues la siguiente sesión se dedicará a preparar la introducción del concepto de fracción equivalente.

Día 3-2-2000 (Séptima sesión)

Plan previsto.

Realizar la ficha 4 que plantea una situación de comunicación entre los alumnos para introducir la equivalencia de fracciones.

Ejecución

En ambos grupos los equipos formados por dos alumnos construyen un listón, realizan la medida de otro listón y, finalmente, valoran la bondad de las mediciones realizadas por el equipo con el que se ha intercambiado mensajes. Algún equipo (sólo dos, entre los seis grupos) no ha podido construir el listón. En esta ficha, el momento clave es el de la confrontación de los componentes de los equipos cuando comprueban que la fracción que obtienen como resultado de la medida del listón que han recibido no coincide con la medida del listón que habían cortado los componentes del otro equipo. A este momento, se ha llegado cuando el tiempo de clase se estaba agotando y los debates entre los diferentes equipos no se han podido escenificar de forma conjunta con todo el grupo de clase.

Aspectos actitudinales

Los alumnos asumen la realización de la ficha que se propone en esta sesión con mayor motivación. Se muestran expectantes ante el desarrollo de una tarea en la que se les anuncia que van a cortar un listón de madera para que otros compañeros midan el listón que han de construir. La realización de varias tareas similares como las realizadas en las dos sesiones precedentes tal vez hayan producido un cierto cansancio en algunos alumnos. En este sentido, se constata que cuatro alumnos del grupo 4º B muestran desgana en la realización de las tareas de clase. Esta apatía queda también plasmada en sus producciones escritas: no responden a algunas de las preguntas planteadas en las tarjetas de evaluación.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 4º A faltan a clase tres alumnos (A46, A33 y A37). En el grupo de 4º B faltan a clase cuatro alumnos (A04, A15, A27 y A44)

Aspectos relacionados con la comprensión
En general, los equipos han sido capaces de señalar sobre un listón los extremos de otro listón cuya longitud se les hacia saber mediante una fracción escrita en un mensaje. Sólo dos equipos del grupo de 4º A no ha conseguido construir el listón.
Se observa que algunos alumnos dudan entre pedir subunidades obtenidas al fraccionar la unidad en tantas partes iguales como indique el denominador, o bien, según indique el numerador. Esta dificultad atañe directamente al significado del numerador y denominador de la fracción. Por este motivo parece oportuno valorar los significados del numerador y del denominador en la siguiente sesión.

La cantidad de fracciones equivalentes que han aparecido en esta ficha nos parece escasa. Las fracciones involucradas en ambos grupos son: 5/10, 4/8, 9/6 y 12/8 de unidad. Las fracciones equivalentes que han aparecido en el grupo 4º A han sido:
2/4 y 3/6 cuando han medido un listón de 5/10 de unidad
6/4 cuando han medido un listón de 9/6 de unidad

En el grupo 4º B han aparecido las fracciones:
3/6 cuando han medido un listón de 5/10 de unidad
3/6 cuando han medido un listón de 4/8 de unidad
3/2 cuando han medido un listón de 12/8 de unidad

La baja aparición de fracciones equivalentes pueden deberse a que los equipos emisores y receptores se han comunicado, sin desearlo, dado que los 12 equipos están situados muy próximos en el aula y es casi inevitable que el equipo receptor observe las subunidades con las que está trabajando el equipo emisor. Para evitar esta distorsión sería conveniente reducir el número de equipos y separar los equipos utilizando biombos.

Valoración
Ha sido interesante que los alumnos hayan realización una tarea, en cierta forma, contraria a la realizada en las fichas precedentes: construir un listón. De este modo el equipo investigador ha podido detectar dificultades en algunos alumnos que han dudado al interpretar la representación simbólica de la fracción cuando éstos debían solicitar el tipo y la cantidad de subunidades. En la siguiente sesión se procederá a realizar una evaluación del significado de los términos de la fracción. También, queda pendiente evaluar de forma conjunta, en el aula, los resultados obtenidos en la situación de comunicación trabajada durante esta sesión.

Toma de decisiones
Antes de continuar con la programación de la secuencia de enseñanza, se propone que en la siguiente sesión se evalúen dos aspectos:

1º) el significado que los alumnos dotan al numerador y denominador de la fracción, con la ayuda de la ficha nº 5.

2º) los resultados obtenidos por los alumnos en la situación de comunicación que han trabajado en esta sesión. Se pretende exponer y analizar el origen de las fracciones equivalentes encontradas por los alumnos.

Día 4-2-2000 (Octava sesión)
Plan previsto
El indicado en el párrafo anterior:
1º) Evaluar significado de que los alumnos dotan al numerador y al denominador
2º) Debatir los resultados obtenidos por los alumnos en la sesión anterior para poner de manifiesto la existencia de fracciones equivalentes.

Ejecución
Se cumple la planificación prevista que consiste en resolver tareas cortas de evaluación semántica de una fracción propia y otra impropia. Se trata que los alumnos resuelvan las siguientes cuestiones de forma individual, sin recibir ayudas o influencias de sus compañeros:

Quieres construir un listón de longitud $\frac{4}{7}$ de la unidad

¿Cuántas subunidades necesitas? ____

¿De qué longitud son las subunidades que necesitas? _____________________________

Quieres construir un listón de longitud $\frac{5}{3}$ de la unidad

¿Cuántas subunidades necesitas? ____

¿De qué longitud son las subunidades que necesitas? _____________________________

Aspectos actitudinales

Los alumnos de ambos grupos han seguido la clase con interés. En esta sesión el tiempo que los alumnos dedican a la realización material de tareas es menor, si se compara con la mayoría de las sesiones anteriores. En la segunda parte de la sesión se evaluará la situación de comunicación llevada a cabo en la sesión anterior. Se pretende que los alumnos intervengan para afirmar o negar, de modo razonado, si una fracción expresa la misma longitud que otra. Los alumnos de ambos grupos han participado en el debate suscitado alrededor de la equivalencia de fracciones.

Asistencia de alumnos

En el grupo de 4º A faltan a clase dos alumnas (A05 y A33). En el grupo de 4º B faltan a clase tres alumnos (A04, A27 y A44)

Aspectos relacionados con la comprensión

Respecto a la tarea de evaluación del significado que los alumnos poseen del numerador y del denominador de la fracción se constata una gran diferencia de rendimiento entre los grupos 4º A y 4º B: el grupo A obtiene mejores resultados que el grupo B.

Número de alumnos que responden correctamente a las preguntas de la tarjeta de evaluación de la ficha *3 y en la* ficha *de la sesión de hoy (octava):*

	Sesión 5ª en 4º A	Sesión 6ª en 4º A	Sesión 8ª en 4º A	Sesión 5ª en 4º B	Sesión 6ª en 4º B	Sesión 8ª en 4º B
Significado del numerador	10	9	17	9	6	16
Significado del denominador	9	9	15	5	4	5

Los resultados mejoran respecto a los obtenidos en las tarjetas de evaluación de la ficha 3. Esto puede deberse a varios factores:

1. Los alumnos han realizado más actividades de medida.
2. El diseño del instrumento de evaluación posibilita mejores resultados. En concreto:
   - 2.1. los alumnos tienen que escribir menos texto que en la tarjeta de evaluación de la tarea 3.
   - 2.2. puede serles de ayuda un mejor conocimiento de la representación oral de la fracción. A la pregunta: "Quieres construir un listón de longitud 4/7 de la unidad. ¿De qué longitud son las subunidades que necesitas?"; algunos alumnos contestan "séptimos"; posiblemente ayudados por la representación oral de la fracción "cuatro séptimos".

A pesar de que el diseño de la tarea posibilita la obtención de mejores resultados, muchos de los alumnos del grupo 4º B desconocen el significado de los términos de una fracción.

La revisión de la situación de comunicación se ha realizado con la ayuda de material. Se ha comenzado por estudiar la fracción 4/8 de unidad. Los alumnos, a indicación del profesor, han llevado sobre un listón de esta longitud 4 subunidades de longitud 1/8 de unidad. Después han ido expresando otras fracciones de la misma longitud y han cubierto la longitud del listón con subunidades de diversas longitudes. Una de las fracciones que ha aparecido es 5/10 con la que otros equipos habían construido un listón. También ha aparecido la fracción más simplificada 1/2, que permite encontrar otras fracciones equivalentes a 4/8 como 3/6; y que algunos alumnos se resistían a admitirla como "igual que 4/8".

En ninguno de los dos grupos ha habido tiempo para tratar las fracciones equivalentes a 12/8 ó 9/6 de la unidad.

Valoración
Teniendo en cuenta el número de intervenciones de los alumnos y la calidad de las mismas podemos suponer que éstos han comprendido que existen fracciones que se escriben de diferente forma pero que expresan la misma longitud.

Toma de decisiones
Continuar con la secuencia de enseñanza pasando a trabajar la magnitud masa.

Día 7-2-2000 (Novena sesión)
Plan previsto
En 4º A se pretende trabajar la ficha de pesar un tira-cordón.
En 4ª B se desea trabajar la misma ficha pero antes se evaluar el significado del numerador y denominador de una fracción con la magnitud longitud.

Ejecución
Se cumple la planificación realizada si bien hay que indicar que la ficha de evaluación que se realiza en 4º B no estaba prevista en la secuencia de enseñanza inicial.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos están motivados dado que se les propone trabajar formando equipos de cuatro alumnos utilizando el material propio de la magnitud masa: balanzas y pastillas de plastilina.

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A falta a clase una alumna (A07) y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el otro grupo asisten todos los alumnos, y se incorpora un nuevo alumno (A49).

Aspectos relacionados con la comprensión
Para pesar el tira-cordón los alumnos comprueban que pesa más que la unidad. Algunos grupos agregan una bola de plastilina a la unidad para nivelar la balanza cuando en el otro plato tienen el tira-cordón. Después realizan una conjetura sobre el masa de este trozo de plastilina y proceden a comprobarla. Alguno de los grupos que resuelven la tarea de esta forma concluyen escribiendo que la medida del tira -cordón es 1/4 de unidad. Cuando el profesor les coloca en un plato de la balanza un trozo de plastilina de 1/4 de unidad y en el otro plato el tira-cordón se perciben del error y contestan correctamente.
Algún grupo hace una bola de plastilina del mismo masa que el tira-cordón y afirma que ha resuelto la tarea. A estos grupos se les indica que la masa debe estar referida a la unidad de medida que es la pastilla de plastilina.
Aunque se han observado dificultades, todos los equipos de los dos grupos (excepto uno del grupo de 4º B) han terminado la ficha, dando la respuesta correcta.
Los alumnos, después de pesar, debían escribir el significado que asocian al numerador y denominador de la fracción que expresa la masa del tira-cordón (5/4 de unidad). Se observa que los alumnos siguen teniendo dificultades conceptuales referidas a la noción fracción y a los términos de ésta.

En el grupo 4º A se observa que tres equipos tienen dificultades para expresar el significado del numerador y denominador de la fracción 5/4. Este hecho contrasta con los resultados obtenidos por los alumnos de 4º A en la ficha de evaluación relativa a este concepto que realizaron el pasado viernes: la mayoría de los componentes de los equipos contestaron correctamente. Esto puede ser debido al diseño de aquella prueba, o bien, debido a las dificultades debidas al trabajo con la magnitud masa.

En el grupo 4º B se han puesto de manifiesto las mismas dificultades para expresar el significado de los términos de la fracción. Si bien en este grupo tales resultados eran esperados dado el bajo nivel de éxito que obtuvieron los alumnos en la ficha de evaluación realizada el pasado viernes. Debido a estos resultados el equipo de investigación propuso la repetición de una ficha análoga a la realizada en la sesión anterior, pero variando el orden de disposición de las dos preguntas y planteando fracciones impropias. Los resultados de esta prueba han mejorado de modo que se ha duplicado el número de respuestas correctas: diez alumnos han indicado el significado correcto del numerador y del denominador de una fracción.

Valoración
Los alumnos se han sentido inicialmente desconcertados porque no han tenido claro que deben fraccionar la unidad de medida, que en este caso es la pastilla de plastilina, en partes iguales. Cuando se les ha indicado o

han llegado por su cuenta a esta conclusión, la tarea se ha desarrollado sin mayores dificultades.

Toma de decisiones
Continuar con la secuencia de enseñanza pasando a trabajar la ficha que prepara la equivalencia de fracciones con la magnitud masa.

Día 8-2-2000 (décima sesión)
Plan previsto
En los dos grupos se pretende trabajar la situación de comunicación (ficha 7).

Ejecución
No se cumple el plan previsto dado que los alumnos del grupo 4ª A se sienten paralizados cuando intentan abordar la tarea. No saben cómo abordar la actividad de construir una bola de plastilina de masas 12/8 y 6/8 de unidad. El profesor realiza una intervención general a todo el grupo y pregunta a varios alumnos cómo construirían una bola de plastilina de masa 5/7 de la unidad. Ninguno de los alumnos preguntados responde correctamente. Ante esta situación el profesor suspende esta tarea y propone una análoga a la realizada en la sesión del día anterior que consiste en pesar una bisagra metálica (que pesa 7/8 de la unidad). Los alumnos intentan resolver esta nueva tarea cuando ha transcurrido media sesión y por lo tanto bastantes no disponen de tiempo para terminar la ficha.

En el grupo 4ª B, de entrada, los alumnos abordan la ficha alternativa propuesta en el grupo 4º A. En este grupo los alumnos terminan la ficha y cumplimentan la siguiente tarjeta de evaluación:

TAREA 7BIS

ALUMNOS: ____________________ *y* ____________________

____________________ *y* ____________________

La bisagra pesa* ——— *de unidad

¿Qué indica el numerador de la fracción? ____________________

¿Qué indica el denominador de la fracción? ____________________

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A asisten todos los alumnos y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el grupo 4º B falta a clase dos alumnos (A12 y A15)

Aspectos relacionados con la comprensión
Si se comparan las dos fichas que se han propuesto a los alumnos en esta sesión, podemos observar que la actividad de construir una bola de plastilina de la que los alumnos conocen su masa, expresado por una fracción, les resulta más compleja que la actividad de pesar un objeto.
Aunque los alumnos del grupo 4º A no han terminado de pesar la bisagra, han procedido a realizar fraccionamientos de la unidad de masa. No han terminado la ficha por varios motivos:
1. les ha faltado tiempo.
2. apenas tienen destreza en la realización de fraccionamientos
3. la masa de la bisagra se expresa con una fracción muy próxima a la unidad (7/8 de unidad)

Los alumnos de grupo 4ª A no han sabido cómo abordar la tarea cuando han intentado construir bolas de plastilina de masas 6/8 y 12/8 de unidad. Esta dificultad muestra una evidencia: el trabajo con la magnitud masa es más complejo que con la magnitud longitud. Los alumnos que intuyen como necesario el fraccionamiento de la unidad para medir cantidades de magnitud longitud ahora, con la masa, no reconocen la necesidad de fraccionar la unidad de masa.

Con la intención de analizar las causas de la dificultad se formulan dos hipótesis, para determinar si la presencia de la magnitud masa explica el fracaso en la realización de la ficha:
1º. La magnitud masa, que no aporta tantas percepciones visuales como la longitud, dificulta en los alumnos la toma de decisiones para enfrentarse a la resolución de la tarea.

2º. No se han consolidado los aprendizajes realizados por los alumnos relativos al significado de la fracción como resultado de la medida de una longitud.

Los alumnos del grupo de 4º B, que han trabajado por equipos la ficha necesitaron la ayuda de los profesores para concluir con éxito la tarea. La mayoría de los equipos han comprobado que la bisagra pesa menos que la unidad, pero después no saben cómo proseguir la tarea. Algunos equipos forman una bola de plastilina que equilibra la bisagra pero después proceden a fraccionar esta bola en vez de fraccionar la unidad de masa.

Conviene indicar que esta ficha es más compleja que la de pesar el tira-cordón que posibilita una estrategia de resolución aditiva, es decir, primero observan que la masa del tira-cordón es mayor que la unidad, de modo que separan esta masa en dos bolas de plastilina: una de la unidad y otra que completa la masa del tira-cordón; y, finalmente, proceden a pesar ésta última bola. En cambio, la estrategia más aconsejable para resolver la ficha de la bisagra es sustractiva: consiste en pesar la bola de plastilina que añadida a la bisagra pesa lo mismo que la unidad. Esta puede ser una de las razones que justificaría la falta de recursos mostrada por los alumnos en la resolución de la ficha.

Toma de decisiones
El equipo de investigación decide proponer en el grupo 4º A una ficha análoga a la que intentaron realizar sin éxito en la sesión anterior. Se pretende que las fichas tengan las mismas variables, a excepción de la magnitud que ahora será la longitud. El enunciado de la ficha y las condiciones en las que se propone a los alumnos son las siguientes:
El grupo de clase se divide en seis equipos de 4 alumnos cada uno. Tres de los equipos reciben un sobre cerrado en el que se les indica que construyan un listón de madera de longitud 6/8 de la unidad. Los restantes equipos reciben otro sobre cerrado en el que se les indica que deben construir un listón de 12/8 de la unidad.
Cada equipo dispone de tres cañas de longitud la unidad y pueden solicitar tiras de papel de longitud la unidad o utilizar los paneles de segmentos paralelos que están colgados en la pared. No se les ofrecen subunidades cortadas como en otras tareas realizadas con anterioridad, los alumnos deberán realizar el fraccionamiento de la unidad del mismo modo que lo realizan en las tareas con la magnitud masa. De esta manera se pretende que los alumnos realicen esta ficha en las mismas condiciones con las que han afrontado la ficha de la situación de comunicación con la magnitud masa.

Para contrastar resultados en el grupo 4º B se propone la situación de comunicación con la magnitud masa en la que, inicialmente, los alumnos deben construir bolas de plastilina de 6/8 y 12/8 de la unidad.

Día 9-2-2000 (undécima sesión)
Plan previsto
En los dos grupos se propone trabajar la situación de comunicación. En el grupo 4º A con la magnitud longitud y el grupo 4º B con la magnitud masa.

Ejecución
Los equipos de los dos grupos necesitan utilizar toda la duración de la sesión para construir el listón o la bola de plastilina. En el grupo de 4º B hay tres equipos que están en condiciones de afrontar la segunda parte de la ficha. Dos de estos equipos se "cruzan" las bolas de plastilina que han construido y consiguen pesarlas.

Asistencia de alumnos
En los grupo 4º A asisten todos los alumnos y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el 4º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
En general, se puede afirmar que los alumnos del grupo 4º A saben que deben realizar el fraccionamiento de la unidad de medida de longitud: los componentes de dos equipos se han levantado y han ido a utilizar los paneles de segmentos paralelos; y otros equipos han pedido al profesor tiras de papel para fraccionar.
Ahora bien, tres equipos han necesitado la ayuda del profesor para saber en cuántas partes debían fraccionar la unidad. Comentamos algunas actuaciones:

El equipo compuesto por los alumnos A05, A10, A32 y A36 que tienen que construir un listón de 6/8 deciden fraccionar la unidad en 6 partes iguales, pero cuando se les pregunta el motivo de su decisión entonces dicen que lo van a fraccionar en 8 partes.
El equipo compuesto por los alumnos A28 y A31 que tienen que construir un listón de 12/8 dicen que tienen que fraccionar la unidad en 12 partes iguales, pero que como no pueden porque en el panel de segmentos paralelos no se puede, entonces lo van a fraccionar en 8 partes.
El equipo compuesto por los alumnos A13, A21, A33 y A37 que tienen que construir un listón de 12/8

dicen que tienen que fraccionar la unidad en 12 partes iguales, y cuando el profesor les pide que expliquen la razón de esta decisión la alumna nº 7 pregunta: " Pero, ¿el numerador no indica en cuántas partes hay que fraccionarlo?"

La técnica del fraccionamiento no ha sido evaluada dado que el equipo investigador es consciente que los alumnos no tienen destreza en realizar fraccionamientos de la unidad y, en particular, fraccionar la unidad en ocho partes iguales.

Los equipos del grupo 4º B también han tenido dificultades para realizar la primera parte de la ficha: construir bolas de plastilina de masa 6/8 y 12/8. Sólo tres grupos han construido con éxito las bolas de plastilina de los masas indicadas:

El equipo formado por los alumnos A01, A12, A26 y A49 han conseguido construir la bola de masa 12/8 después de haber fracasado en el primer intento. Sin embargo, este equipo no ha podido intercambiar la bola con la del otro equipo que le correspondía dado que éste último ha conseguido construir la bola cuando terminaba la sesión.

El equipo formado por los alumnos A06, A08, A27 y A34 han terminado las dos fases de la ficha. Primero han construido la bola de masa 12/8 de la unidad y después han pesado una bola de 6/8 de unidad, dando como resultado de la medida 6/8 de la unidad, posiblemente porque han preguntado a los componentes del equipo emisor cuál es la masa de la bola. La respuesta natural hubiera sido 3/4 de la unidad.

El equipo formado por los alumnos A04, A20, A24 y A25 han terminado las dos fases de la ficha. Primero han construido la bola de masa 6/8 de la unidad y después han pesado una bola de 12/8 de unidad, dando como resultado de la medida 3/2 de la unidad.

Los otros tres equipos han recibido ayuda de los profesores y han terminado la primera fase de la ficha.

Valoración

Dado que el 50% de los equipos del grupo 4º A ha tenido dificultades para realizar con éxito esta ficha en la que se ha trabajado la magnitud longitud, al confundir el significado del numerador y denominador de la fracción, no podemos concluir que el origen de las dificultades observadas por los alumnos de ambos grupos al realizar las tareas radique en el trabajo con la magnitud masa. Mas bien, cabe suponer que:

1º. Los alumnos tienen más dificultades cuando resuelven fichas en las que interviene la magnitud masa que cuando interviene la magnitud longitud.

2º. El conocimiento que poseen los alumnos sobre el significado de la fracción no está consolidado, podemos decir que está en fase de acomodación. Y por ello, las dificultades de los alumnos en esta fase se manifiestan con más crudeza cuando trabajan con una magnitud más compleja, como es la masa.

La complejidad de la magnitud masa frente a la longitud viene dada porque:
1º. los alumnos han disfrutado de más experiencias previas con la magnitud longitud que con la magnitud masa.
2º. las acciones que realizan los alumnos con la longitud pueden ser percibidas y evaluadas con la vista, mientras que las realizadas con la masa no tienen una percepción visual tan clara. Tal vez sea ésta la razón de la desconexión entre las partes fraccionadas de la unidad y la unidad de masa que el equipo investigador ha observado en las conversaciones mantenidas con los alumnos. Ahora bien, este fenómeno también ha sido observado, aunque en un número menor de casos, cuando se ha trabajado la magnitud longitud.

De las interferencias entre la magnitud longitud y masa en la secuencia de enseñanza quedan muchos aspectos por investigar, y surgen preguntas como:

¿Se debería haber propuesto una secuencia de enseñanza de la fracción como medida de cantidades de magnitud longitud más extensa, antes de abordar la enseñanza de la fracción como medida de cantidades de masa?.

¿Cómo ha influido (de forma positiva, negativa o, tal vez, neutra) la enseñanza de la fracción como resultado de una medida de masa en los aprendizajes realizados por los alumnos del concepto de fracción como medida de la cantidad de longitud?.

¿Se debía haber suprimido la enseñanza de la fracción como medida de cantidades de masa?

El equipo investigador a partir de los datos recogidos en la ficha de evaluación de la sesión octava pensaba que los alumnos del grupo 4º A comprendían el significado de los términos de la fracción. Sin embargo, a partir de los resultados aparecidos en esta ficha, hay que cuestionar los resultados de aquella evaluación, puesto que en aquel momento los alumnos no tenían que construir realmente el listón: debían indicar la longitud de la subunidad que debían utilizar (sin necesidad de indicar el fraccionamiento de la unidad) y el número de subunidades. Además, la representación oral de la fracción les podía dar pautas para responder correctamente al ítem. Por ejemplo, si se les dice que deben construir un listón de 4/7 de unidad, al nombrar "cuatro séptimos" la propia representación oral de la fracción les indica que las subunidades serán de longitud "un séptimo" y que se necesitarán 4 subunidades.

En el grupo 4º B ha faltado tiempo para terminar la ficha y, por lo tanto, no han aparecido fracciones equivalentes mediante la observación de fracciones que se escriben de diferente forma pero que expresan la misma cantidad de masa. La resolución de la ficha ha mostrado de nuevo las dificultades mostradas por los alumnos del grupo 4º A cuando esta ficha les fue propuesta en la sesión décima.

Toma de decisiones

En ambos grupos continuar con la enseñanza de la fracción como resultado de la medida de la magnitud masa.

En la siguiente sesión se propone, para el grupo de 4º A, la situación de comunicación con las fracciones 9/6 y 6/4 de la unidad de masa. Para el grupo de 4º B revisar la situación de comunicación llevada a cabo en la sesión del día anterior.

Día 10-2-2000 (duodécima sesión)

Plan previsto

En el grupo de 4º A, trabajar la situación de comunicación para la magnitud masa con las fracciones 9/6 y 6/4 de la unidad. En el grupo 4º B se pretende revisar los resultados obtenidos por los alumnos en la ficha de situación de comunicación para el peso realizada en la sesión anterior.

Ejecución

Los equipos del grupo 4º A en la ficha de situación de comunicación con la masa realizan las dos fases de la ficha: construyen bolas de plastilina y pesan la que ha sido construida por otro grupo. Sin embargo, les falta tiempo para establecer entre ellos un debate sobre los resultados obtenidos.

En el grupo de 4º B el profesor comenta las producciones realizadas por los alumnos en la ficha de la sesión del día anterior. Como aparecen fracciones equivalentes el profesor propone la siguiente tarea:

"Os entrego una bola de plastilina que pesa 6/8 de la unidad. Debéis encontrar otra fracción, diferente de 6/8, que indique la masa de la bola de plastilina".

Todos los equipos terminan esta tarea. Hay tres equipos que acaban antes y reciben el encargo de construir bolas de plastilina de masa 6/4 y 9/6 de la unidad. Estos equipos también concluyen esta tarea.

El equipo formado por los alumnos A01, A12, A26 y A49 recibe la consigna de construir una bola de plastilina de masa 9/6 de la unidad. Realiza con éxito la tarea.

El equipo formado por los alumnos A02, A41, A38 y A30 recibe la consigna de construir una bola de plastilina de masa 6/4 de la unidad. Realiza con éxito la tarea, después de recibir ayuda del profesor.

El equipo formado por los alumnos A14, A15, A19 y A44 recibe la consigna de construir una bola de plastilina de masa 9/6 de la unidad. El profesor les indica cómo realizar la tarea.

Asistencia de alumnos

En los grupo 4º A falta una alumna (A46). En el 4º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Se observa una mejoría en los resultados obtenidos por los equipos del grupo 4º A dado que todos concluyen la tarea. Si bien, hay que indicar que todos los equipos han necesitado recibir alguna indicación de los profesores. En el comienzo de la tarea, varios equipos estaban paralizados: no sabían qué hacer. Cuando los profesores les han preguntado por el significado del denominador de la fracción han comenzado a resolver la tarea.

Con este tipo de ayuda, todos los equipos han construido las bolas de plastilina de masa 6/4 ó 9/6 de la unidad.

Cuando se han cruzado las bolas de plastilina, los equipos han comenzado a pesarlas. En esta fase de la tarea no han recibido ayuda de los profesores. Los equipos han recibido una tarjeta de evaluación para que escriban, con una fracción, la masa de la bola e indiquen los significados que asignan al numerador y denominador de la fracción.

Cuatro equipos expresan correctamente la masa de la bola: tres escriben la fracción 3/2 y uno la fracción 6/4. (Este último no se sabe si ha pesado la bola o ha escrito la fracción que se les indicaba en la carta para que procedieran a construir la bola de este peso).

En cuanto al significado de los términos de la fracción sólo dos equipos dan respuestas satisfactorias.

Se ha observado que la tarea de pesar una bola de plastilina es más compleja que la de pesar un objeto compacto, sin posibilidad de descomponerlo. La opción de descomponer el objeto a medir lleva a algunos alumnos a fraccionar el objeto a pesar, en lugar de la unidad de medida.

Valoración
Los resultados obtenidos por los equipos en esta tarea corroboran la hipótesis de que la magnitud masa es más compleja que la longitud porque no ofrece referencias visuales como esta última. Se observa que dos equipos escriben como resultado del peso 1/2 de unidad y , con longitud, posiblemente se hubieran percatado que la cantidad a medir es mayor que la unidad y por lo tanto hubieran rectificado. Otra circunstancia que se tuvo presente al diseñar esta tarea para trabajar con la magnitud masa es que las bolas que se han intercambiado los equipos son del mismo peso y ningún alumno parece haberse percatado.

Las actividades de construcción de una bola de plastilina y, en el caso de la longitud la construcción de listones, son más complejas que las tareas de medición directa, posiblemente porque los alumnos deben saber interpretar los términos de la fracción para poder comenzar la tarea.
Un ejemplo de las dificultades para interpretar el significado del numerador y denominador lo aporta el equipo del grupo 4º B formado por los alumnos A14, A15, A19 y A44 cuando intentan construir una bola de plastilina de masa 9/6 de la unidad. El profesor les pregunta como van a construir la bola y una alumna indica van a fraccionar la bola en 9 partes iguales. cuando el profesor les dice que expliquen porque debe ser en 9 partes no saben qué responder. El profesor les hace una pregunta más concreta: ¿en cuántas partes fraccionaríais la unidad para obtener una bola que pesara 1/6?. Contestan de inmediato que en 6 partes iguales. El profesor sigue preguntando: ¿Y para hacer una bola de 2/6 de unidad?. Las alumnas contestan en 6 partes y añadirían 2 de esas partes. El profesor les sigue preguntando: ¿Y para hacer una bola de 6/6 de la unidad?, y las alumnas contestan de modo correcto. Pero cuando el profesor les pregunta: ¿Y para hacer una bola de 7/6 de la unidad?, la alumna A15 responde que fraccionaría la unidad en 7 partes iguales. Esta alumna se ha inventado una regla: fraccionar la unidad en tantas partes como indique el número mayor. Sin embargo, esta alumna había contestado correctamente a las preguntas sobre el significado de los términos de la fracción para la magnitud longitud realizadas en la octava sesión.

Todo parece indicar que, en este caso, no ha habido transferencia de significados de la magnitud longitud a la magnitud masa. Es decir, los conocimientos adquiridos en el trabajo con la magnitud longitud no le han servido de ayuda para la magnitud masa.

Toma de decisiones
En el grupo 4º A se debe realizar una evaluación conjunta de las producciones de los alumnos realizadas durante esta sesión, que permita al profesor repasar el concepto de fracción equivalente.
En el grupo 4º B se puede comenzar el trabajo con la magnitud superficie, pero el equipo investigador propone dedicar la siguiente sesión a la construcción de bolas de plastilina cuyo peso venga dado por una determinada fracción, justificando tal decisión en dos motivos:

1. las dificultades observadas en todo el proceso de enseñanza con la magnitud masa.
2. llevar el desarrollo de la secuencia de enseñanza acompasado con el grupo 4º A.

Día 11-2-2000 (decimotercera sesión)

Plan previsto
En el grupo 4º A se pretende revisar los resultados obtenidos por los alumnos en la ficha de situación de comunicación para el peso realizada en la sesión anterior.
En el grupo de 4º B, se propone dos tareas nuevas. La primera tarea consiste en "construir una bola de plastilina de masa 4/3 unidades". A los equipos que terminen la tarea se les propone: "encontrar fracciones que se escriban de diferente forma pero que tengan el mismo peso que la bola de plastilina que han construido".

Ejecución
En 4º A se cumple con el plan previsto. Lo mismo ocurre en el grupo 4º B.
Los equipos del grupo 4º B al realizar la primera tarea solicitan la ayuda de los profesores. Sólo un grupo es autónomo y termina la tarea con celeridad. Cuando los equipos han construido la bola de plastilina reciben una tarjeta de evaluación para que escriban el significado del numerador y denominador de la fracción 4/3. Después se le propone la siguiente tarea y, tan sólo dos equipos, encuentran fracciones equivalentes. El profesor, antes de concluir la sesión, valora con todo el grupo las fracciones equivalentes que han aparecido.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. La disposición de la

clase en esta sesión ha variado: los alumnos no forman equipos porque se va a proceder a evaluar los resultados obtenidos en la sesión anterior.

Asistencia de alumnos
En los grupo 4º A asisten todos los alumnos y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el 4º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos de ambos grupos van adquiriendo destreza en las actividades de fraccionamiento de la unidad, que es una bola de plastilina, pero no tienen una imagen mental clara de las acciones que están realizando con el material. Por esta razón los alumnos muestran inseguridad cuando deben comenzar las tareas.

Los conocimientos adquiridos mediante las experiencias tenidas con la magnitud longitud no saben transferirlos, en general, a la magnitud masa. Un caso paradigmático es el de la alumna A09 que indica que las fracciones 6/4 y 3/2 son iguales, y cuando el profesor le pide que justifique esta igualdad, indica razonamientos de tipo aritmético: " porque 6 es el doble que 3 y 4 el doble que 2". El profesor le recuerda que días atrás dio un razonamiento para la longitud basado en las acciones realizadas con el material y le pide que haga ahora lo mismo con las bolas de plastilina. La alumna responde: "ahora no sabría hacerlo".
Según esto, los alumnos tienden a suplir la falta de comprensión inventando reglas que, en ocasiones, como esta que acabo de describir, son ciertas y en otras (como la descrita en la sesión anterior por la alumna A15) no lo son.

Los alumnos están en una fase de instrucción en la que necesitan visualizar las acciones que realizan con el material. Y estas acciones quedan más ocultas cuando trabajan con la magnitud masa. La longitud permite percepciones visuales más claras que la masa. La cantidad de longitud se observa con la vista como está descompuesta en subunidades o fraccionamientos de la unidad, y en el caso de la masa no es evidente que, por ejemplo, 3 bolitas de un tercio de la unidad "a simple vista" tengan el mismo peso que la bola de peso la unidad, como queda de manifiesto es la respuesta dada por la alumna A31.
Uno de los múltiples ejemplos de las dificultades observadas, puede verse en la grabación de video realizada en esta sesión. Tres componentes de un equipo del grupo 4º A (A05, A32 y A36) intentan pesar una bola de plastilina (cuyo peso es 3/2 de unidad). Proceden separando una bola de peso la unidad y, después, pesan la parte restante y comprueban que pesa 1/2 unidad. Los alumnos dicen que la bola pesa "una unidad y media". Cuando el profesor les pide que escriban, en la pizarra, con una fracción, en la el peso de la bola, después de varias consultas entre ellos escriben 1/2 de unidad.

Valoración
Se vuelve a poner de manifiesto que el trabajo con la magnitud masa presenta más dificultades que con la magnitud longitud. Como se ha indicado antes, no ha habido transferencia de significados de la magnitud longitud a la magnitud masa. Es decir, los conocimientos adquiridos en el trabajo con la magnitud longitud no le han servido de ayuda para la magnitud masa.

Sin embargo, sería prematuro dar contestación a las preguntas formuladas en la undécima sesión. Pensamos que hay que esperar a que se consoliden los conocimientos de los alumnos y a que reciban instrucción de la fracción como resultado de la medida de cantidades de superficie.

Toma de decisiones
Comenzar en la siguiente sesión el trabajo con la medida de la magnitud superficie.

Día 14-2-2000 (decimocuarta sesión)
Plan previsto
Trabajar la ficha 8 que ha sido modificada con el objetivo de introducir la fracción como medida de la cantidad de superficie. Se optado por ampliar la ficha 8 que denominamos ficha 8BIS y cuya resolución se propone a los alumnos como trabajo para casa.

Ejecución
En ambos grupos se cumple con el plan previsto.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Los alumnos han trabajado con agrado y se han mostrado muy participativos. Los alumnos han resuelto, de forma individual, siete tareas cortas pero muy intensas y, además, todos han intervenido en la evaluación conjunta de las tareas.

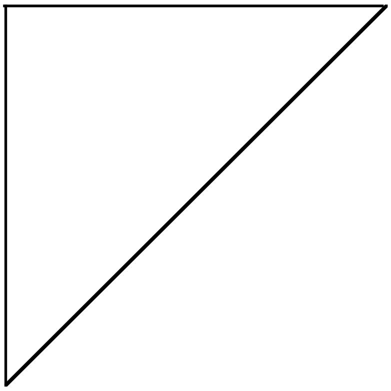
Asistencia de alumnos

En los grupo 4º A faltan dos alumnas (A07 y A23) y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el 4º B asisten todos los alumnos.

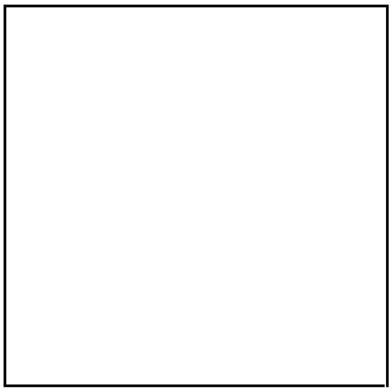
Aspectos relacionados con la comprensión

El desarrollo de la sesión en los dos grupos muestra que el trabajo con la magnitud superficie les resulta mucho más fácil que con la magnitud masa. Antes de realizar una valoración de las tareas realizadas en esta sesión conviene indicar la secuencia de actividades realizadas.

1º. Se distribuye a cada alumno el siguiente mantel:



Y se pregunta a los alumnos cual es la superficie del mantel. De forma deliberada, el profesor no les ha proporcionado la siguiente unidad de medida:



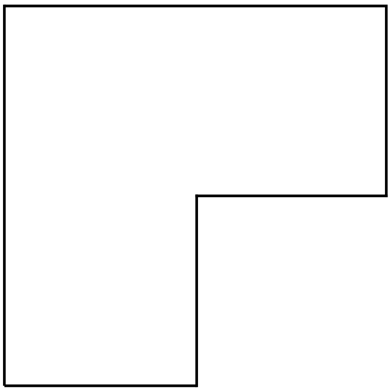
En los dos grupos, algunos alumnos han dado respuestas sin reparar en la necesidad de utilizar una unidad de medida. Cuando alguno ha preguntado por la unidad de medida el profesor les ha entregado una a cada alumno y han resuelto con éxito esta primera actividad.

2º. El profesor les propone doblar por la mitad la unidad de medida. Y cuando la han doblado les pregunta qué superficie tiene el mantel que han obtenido.

Antes de que expresen la solución, el profesor les sugiere que levanten la mano los que sepan cual es la superficie. En el grupo de 4º A tres alumnos no levantan la mano y cuando, se le solicita la medida a uno de ellos, contesta: "un cuarto". Esta respuesta obliga al profesor a plantear a estos alumnos, y al resto de la clase, la medida de media caña con la magnitud longitud y la construcción de un listón de 1/4 de la unidad.

Cuando se retoma el trabajo con la magnitud superficie, el profesor propone comparar la superficie de los manteles construidos en las actividades 1 y 2. Los alumnos aportan diferentes formas de comparación y esto permite al profesor comentar que existen figuras que tienen diferente forma pero que tienen la misma cantidad de superficie.

3º Cada alumno recibe un mantel con la consigna de que mida la superficie del mismo:



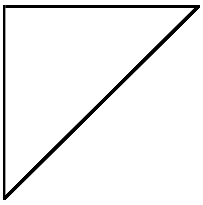
Los alumnos resuelven la tarea con éxito. Todos perciben como subunidad adecuada 1/4 de unidad, aunque aparecen dos estrategias diferentes que pueden simbolizarse mediante las operaciones:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ ó } \frac{4}{4} - \frac{1}{4}$$

4º. Los alumnos reciben una unidad de medida y se les propone construir un mantel de superficie **1/3** de la unidad.

Todos los alumnos construyen el mantel, aunque algunos han necesitado ayuda. Algunos alumnos intentar construirlo realizando fraccionamientos por la mitad de la unidad.

5ª Los alumnos reciben el siguiente mantel con la consigna de medir su superficie:

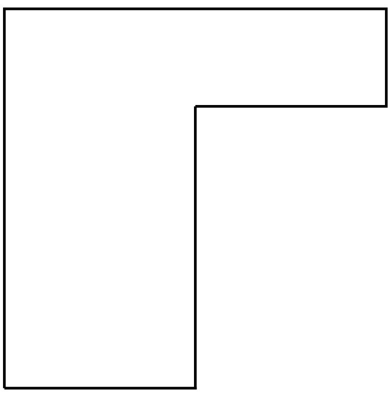


La mayoría de los alumnos resuelven con éxito esta actividad.

6ª Los alumnos reciben el siguiente mantel con la consigna de medir su superficie:

Esta actividad también la resuelven con éxito la mayoría de los alumnos.

7ª Los alumnos reciben el siguiente mantel con la consigna de medir su superficie:



A diferencia de las actividades anteriores, el profesor indica a los alumnos que escriban la superficie del mantel en lugar de expresarla verbalmente.

En el grupo de 4º A tan sólo tres alumnos dan respuestas erróneas: la alumna A10 indica $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; el alumno A29 indica $\frac{2}{4}$; y el alumno A28 indica $\frac{1}{10}$ porque inventa una regla equivocada por la que decida "sumar denominadores".

En el grupo de 4º B seis alumnos dan respuestas erróneas. Una de ellas (alumna A20) escribe bien "2 cuartos y un octavo" y más abajo escribe $\frac{2}{8}$. Los alumnos no han tenido dificultades para cubrir el mantel con subunidades, los errores han aparecido cuando en el momento de expresar con una fracción la cantidad de superficie.

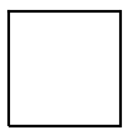
Como tarea para casa se propone la ficha nº 9 que consiste en construir el mayor número de manteles de superficie $\frac{1}{4}$ de la unidad pero que tengan diferente forma. Para incentivar a los alumnos el profesor les dice que el que más manteles construya recibirá un premio.

Valoración
Los rendimiento de los alumnos en ambos grupos es alto. Es evidente que los alumnos van a obtener mayores niveles de éxito en el trabajo con la magnitud superficie si se compara con el peso.

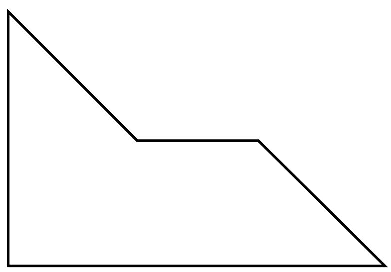
Toma de decisiones
Para afianzar la técnica de la medida de superficie se propone la realización de actividades análogas a las propuestas en la ficha 8, de modo que la dificultad de éstas vaya creciendo y, además, aparezcan subunidades más pequeñas como **1/16** de unidad que admite representaciones geométricas sencillas. También se debe proceder a evaluar la ficha 8. Y, sino se agota la sesión, continuar con la programación de la secuencia de enseñanza.

Día 15-2-2000 (decimoquinta sesión)
Plan previsto
Las actividades de medida que se piensan proponer en ambos grupos, consisten en calcular la superficie de los siguientes manteles:

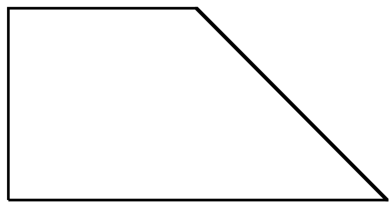
1º De superficie $\frac{1}{16}$ de unidad



2ª De superficie $\frac{1}{3}$ de unidad.



3º De superficie $\frac{3}{8}$ de unidad.



4º De superficie $\frac{3}{8}$ de unidad.

Ejecución
En el grupo 4º A no se evalúa la ficha nº 9 porque los alumnos no la han realizado, sólo han trabajado las actividades indicadas en el apartado anterior. En el grupo 4º B se ha evaluado la ficha nº 9 y se han realizado las actividades 1, 2 y 4 de las descritas en el apartado anterior.

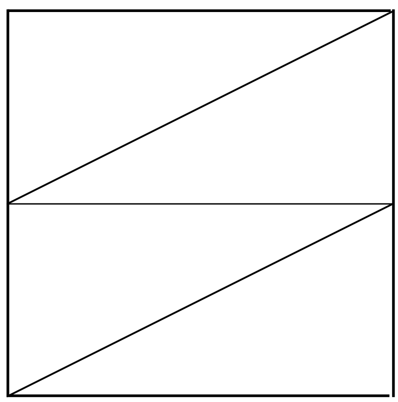
Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Sorprende que los alumnos el grupo 4º A no hayan resuelto la ficha propuesta para casa. Algunos alumnos dicen que no han tenido tiempo porque realizan actividades extraescolares. En el grupo de 4º B sólo cuatro alumnos han trabajado la ficha con resultados aceptables.

Asistencia de alumnos
En los grupo 4º A faltan dos alumnas (A09 y A23). En el 4º B asisten todos los alumnos.

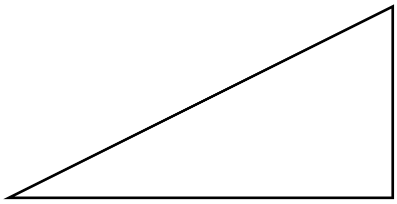
Aspectos relacionados con la comprensión
Por lo que se refiere a las actividades de medida de cantidades de superficie menores que la unidad los resultados por los alumnos de los dos grupos son buenos, por encima del 75% de tasa de éxito.

En el grupo 4º B se ha evaluado la ficha nº 9. La justificación de la construcción de los manteles ha posibilitado la introducción de fracciones equivalentes a **1/4** de unidad. Cuatro alumnos (A01, A15, A24 y A34) han aportado soluciones y, en particular, los dos primeros alumnos han realizado un buen trabajo. Mostramos algunas soluciones aportadas por los estos alumnos:

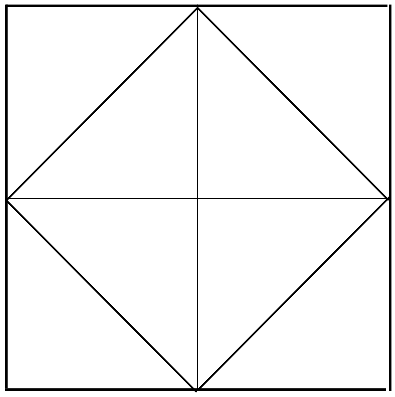
A) Si fraccionan la unidad en 4 partes iguales del siguiente modo:



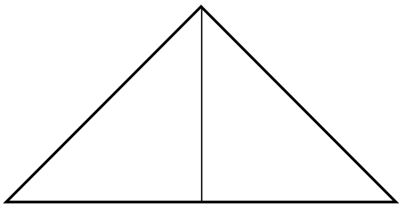
aparece la solución:

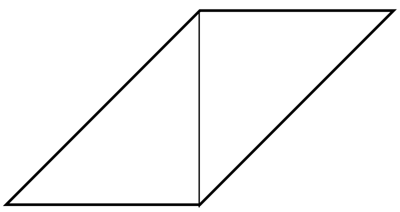


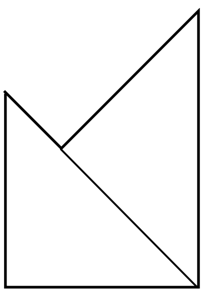
B) Si fraccionan la unidad en 8 partes iguales del siguiente modo:



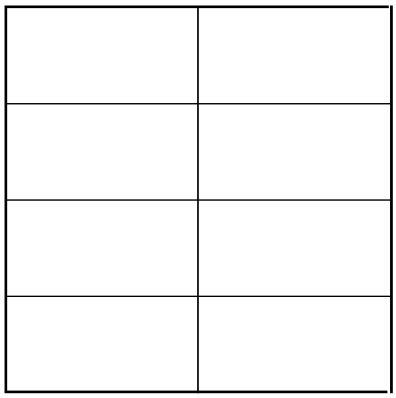
aparecen las soluciones:



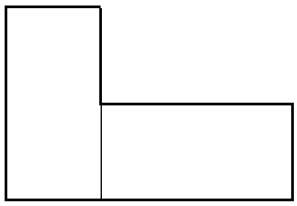


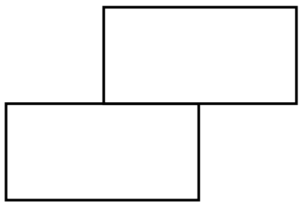


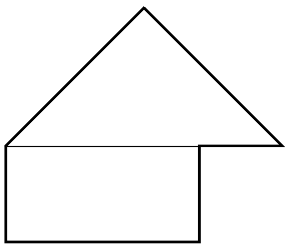
C) Si fraccionan la unidad en 8 partes iguales del siguiente modo:



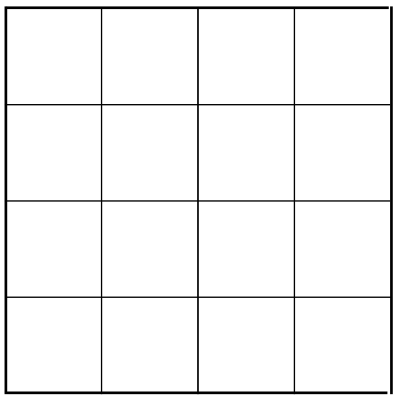
aparecen las soluciones:



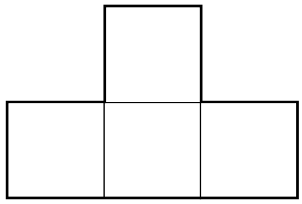




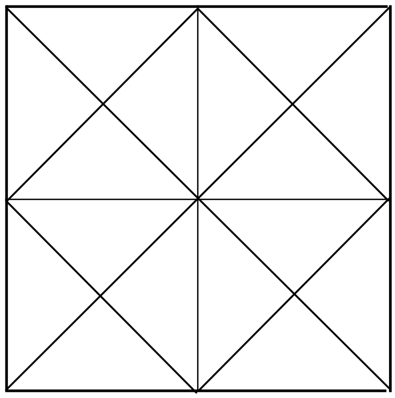
D) Si fraccionan la unidad en 16 partes iguales del siguiente modo:



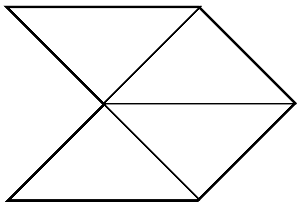
aparece una solución no repetida:

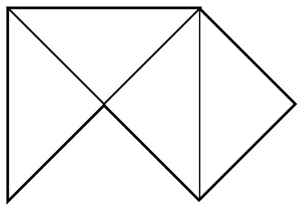


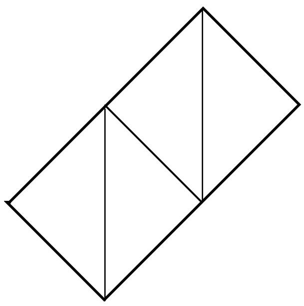
E) Si fraccionan la unidad en 16 partes iguales del siguiente modo:

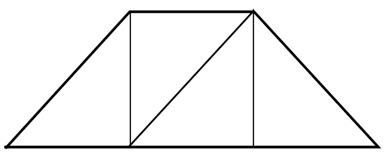


aparecen las soluciones:

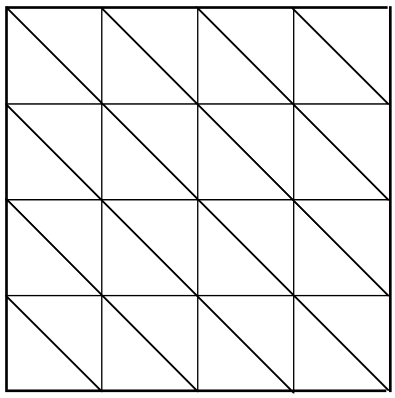




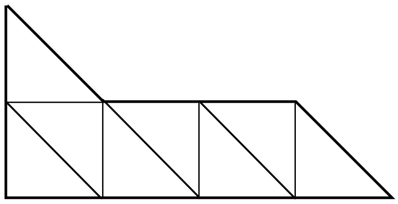


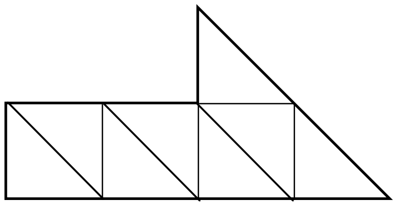


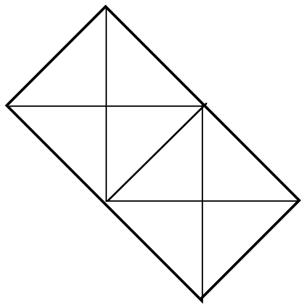
F) Si fraccionan la unidad en 32 partes iguales del siguiente modo:



aparecen las soluciones:







Se observa que este mantel rectangular aparece en el apartado E) cuando se fraccionaba en 16 partes iguales, por lo tanto $\frac{4}{16} = \frac{8}{32}$. Así, pues, aparece en múltiples ocasiones el concepto de fracciones equivalentes.

Toma de decisiones
Se propone continuar con la programación de la secuencia de enseñanza, con la propuesta de las fichas 10 y 11, en las que se debe medir la superficie de dos manteles que tienen una cantidad de superficie mayor que la unidad.

Día 16-2-2000 (decimosexta sesión)
Plan previsto
Proponer, resolver y evaluar las fichas 10 y 11. Con estas tareas se pretende que los alumnos realicen actividades de medida, aparezca la concepto de fracción equivalente y se incida en el significado de los términos de la fracción desde la magnitud superficie.

Ejecución

En ambos grupos se ha resuelto y evaluado la ficha 10. No se propone la resolución de la ficha 11 dado que se ha agotado el tiempo de la sesión entre la realización y la evaluación conjunta de la ficha 10.

La evaluación de la ficha 10 ha posibilitado la aparición de fracciones equivalentes a **3/2** de unidad. En ambos grupos el profesor ha introducido, de forma explícita, la noción de fracción equivalente, aprovechando que los alumnos han aportado diferentes fracciones como resultado de la medida de superficie de un mismo mantel. Así, el profesor ha recogido diversas respuestas de los alumnos, ha comprobado que las fracciones expresan la medida del mantel y ha escrito en la pizarra:

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{12}{8} = \frac{24}{16}$$

El profesor ha preguntado a diferentes alumnos por el significado del numerador y denominador de las fracciones equivalentes que éstos han aportado. Se constatan dificultades en la expresión verbal y escrita de estos significados.

Aspectos actitudinales

Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Los alumnos el grupo 4º A siguen sin resolver la ficha propuesta para casa el pasado lunes.

Asistencia de alumnos

En los grupo 4º A faltan tres alumnas (A09, A23 y A40) y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el grupo 4º B falta un alumno (A41).

Aspectos relacionados con la comprensión

Para valorar los resultados de los alumnos cuando han realizado las fichas 10 y 11 se debe conocer las condiciones en las que éstos han afrontado la tarea. Los alumnos han recibido un folio en la ficha 10 y una cartulina en la ficha 11 cuya superficie debían medir y dos unidades de superficie. Si precisaban más material el profesor les daba más unidades, pero nunca subunidades.

De este modo se desea que las subunidades sean construidas por los alumnos, para que exista una conexión clara entre las subunidades utilizadas y la unidad de medida. Como se recordará esta conexión no era percibida por algunos alumnos en el trabajo realizado con la magnitud longitud. En efecto, cuando los alumnos debían medir o construir un listón éstos utilizaban subunidades que estaban previamente fraccionadas. Este proceder facilitaba la realización de la tarea y acortaba los tiempos de resolución de las tareas, pero tenía el peligro de obviar la unidad de medida.

Esta organización de la ficha, obliga a los alumnos a construir la subunidades con las que van a probar si cubren la superficie a medir. Esta puede ser la razón por la que los alumnos han necesitado más tiempo del esperado para resolver la tarea. Sin embargo, pensamos que esta planificación mejora el proceso de enseñanza y, por otra parte, favorece la evaluación de los aprendizajes por cuanto aporta datos para un análisis más fiable, al proponer un problema de medida en un estado "más puro", con sólo dos objetos: la unidad de medida y el objeto a medir.

Respuestas dadas por los 19 alumnos del grupo 4º A referidas a la medida del mantel:

Soluciones	Varias fracciones equivalentes	3/2	6/4	12/8	2/3
Nº alumnos	1	1	9	4	4

Sobre el significado que los alumnos asignan a los términos de la fracción, nueve alumnos expresan correctamente los significados del numerador y del denominador (alumnos A10, A11, A13, A42, A21, A29, A33, A35 y A36)

Respuestas dadas por los 23 alumnos del grupo 4º B referidas a la medida del mantel:

Soluciones	Varias fracciones equivalentes	3/2	6/4	12/8	Erróneas
Nº alumnos	10	2	7	1	3

Sobre el significado que los alumnos asignan a los términos de la fracción, seis alumnos expresan correctamente los significados del numerador y del denominador (alumnos A01, A02, A18, A19, A45 y A30)

Valoración

La tasa de éxito, en ambos grupos, referida a la medida de la cantidad de superficie es alta. Por el contrario, los alumnos tienen graves dificultades para expresar el significado que dotan al numerador y denominador de

la fracción. Nos preguntamos si el origen de estas dificultades radica en un problema de expresión o tiene su origen en una comprensión incompleta o escasa. De momento, no podemos responder a esta cuestión, y posiblemente confluyan ambas razones. Sin embargo, una diferencia tan dispar entre las tasas de éxito de la medida de la cantidad de superficie y los significados de la fracción muestra la existencia de dificultades para expresar del significado de estos términos después de haber resuelto correctamente la ficha de medida. Además, la explicación de los significados del numerador y denominador de una fracción no es una tarea sencilla dado que intervienen simultáneamente tres objetos: la unidad, la subunidad que se construye y el objeto a medir.
Otro aspecto a considerar es el referido a las respuestas erróneas dadas por los alumnos de 4º A (A07, A31, A32 y A37). Lo curioso de este caso es que todos los alumnos que se equivocan aportan como solución 2/3 de unidad. En este caso, el error se justifica por el escaso significado que dan al numerador y denominador de una fracción. Los alumnos han cubierto el mantel con una unidad y media unidad. Puede que lleguen a verbalizar la situación como "tres subunidades de superficie media unidad" y, sin embargo, escriben la representación simbólica de la fracción de forma incorrecta. En este caso, los alumnos optan por situar los números 2 y 3, tal vez, al azar en los espacios reservados al numerador y denominador. Para que los alumnos dispongan de más esquemas conceptuales referidos a las fracciones se recomienda afrontar pronto el estudio de la ordenación de fracciones que les permite valorar si una fracción es mayor o menor que otra. En nuestro caso, el conocimiento de la relación de orden de las fracciones permitiría descartar la opción 2/3 por ser de menor superficie que la unidad, y nosotros buscamos fracciones mayores que unidad.
Finalmente, llama la atención que diez alumnos del grupo 4º B hayan optado por expresar el resultado de la cantidad de superficie con diversas fracciones equivalentes, y sin embargo, sólo un alumno del grupo 4º A procede de este modo. La razón de esta asimetría en las respuestas dadas por los dos grupos, posiblemente, se debe al proceso de instrucción, y en concreto, a que en el grupo 4º A no se ha realizado una evaluación conjunta de la ficha 8. Al evaluar aquella ficha con el grupo 4º B, durante la sesión anterior, se realizaron diversos fraccionamientos de la unidad que posibilitaban la construcción de nuevas formas de mantel manteniendo invariable la superficie de los mismos y, por lo tanto, se refuerza el concepto de fracción equivalente.

Toma de decisiones
Se propone continuar con la programación de la secuencia de enseñanza, con la propuesta de la ficha 11.

Día 17-2-2000 (decimoséptima sesión)
Plan previsto
Proponer, resolver y evaluar la ficha 11.

Ejecución
En ambos grupos se ha resuelto y evaluado la ficha 11. En el grupo 4º A los alumnos resuelven la siguiente tarea: "Debéis construir un mantel rectangular que tenga una superficie de **3/4** de unidad". En el grupo 4º B no queda tiempo para resolver esta tarea.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Los alumnos el grupo 4º A siguen sin resolver la ficha propuesta para casa el pasado lunes.

Asistencia de alumnos
En los grupo 4º A faltan dos alumnas (A09 y A23). En el grupo 4º B falta una alumna (A04).

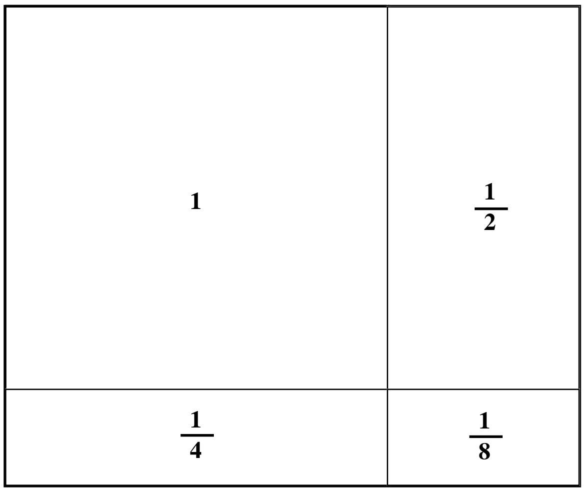
Aspectos relacionados con la comprensión
Esta ficha es análoga a la anterior en lo referente a estructura de la tarea y a las unidades de comprensión utilizadas para su evaluación, si bien, el grado de dificultad es ahora mayor. A pesar de esto, los resultados han mejorado con respecto a los obtenidos en la sesión anterior en el grupo 4º A. Todos los alumnos del grupo 4º A referidas a la medida de la cartulina: todos los alumnos contestan correctamente **15/8** de unidad.

Sobre el significado que los alumnos asignan a los términos de la fracción, diez alumnos expresan correctamente los significados del numerador y del denominador (alumnos A05, A10, A11, A13, A28, A29, A31, A33, A36 y A40)

Los 23 alumnos del grupo 4º B aportan las siguientes respuestas en la ficha 11:

Soluciones	Varias fracciones equivalentes	15/8	30/16	Erróneas	No contestan
Nº alumnos	3	7	6	4	3

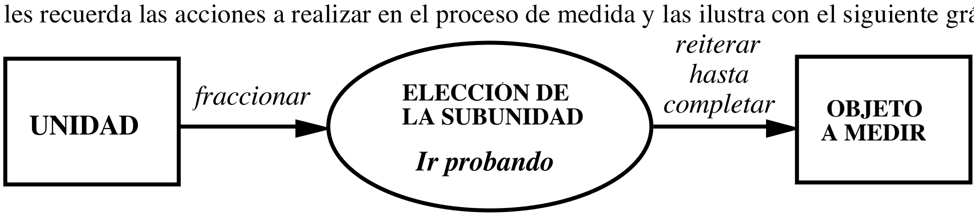
Sobre el significado que los alumnos asignan a los términos de la fracción, siete alumnos expresan correctamente los significados del numerador y del denominador (alumnos A01, A08, A14, A15, A17, A34 y A30). En el momento de realizar la evaluación conjunta de la ficha el profesor describe en la pizarra la estrategia seguida por mayoría de los alumnos. La cantidad de superficie de la cartulina la obtienen mediante una descomposición con subunidades de **1/8 unidad**:



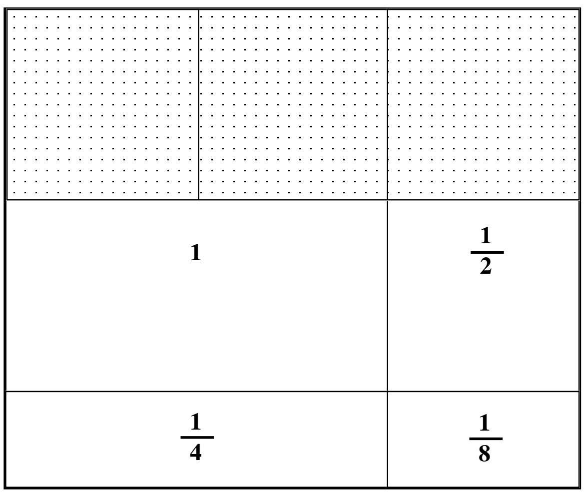
La alumna A22 dice: "He pensado en octavos porque es la subunidad más pequeña". De esta forma aparece como medida de la cartulina la fracción $\frac{15}{8}$ *u*. En este mismo grupo, cuando el profesor les propone encontrar otra fracción que indique la misma superficie, sólo una alumna (A10) aporta la fracción $\frac{30}{16}$ *u*.

El profesor vuelve a recordar la existencia de fracciones equivalentes y escribe en la pizarra: $\frac{15}{8} = \frac{30}{16}$

También les recuerda las acciones a realizar en el proceso de medida y las ilustra con el siguiente gráfico:



Respecto a la ficha resuelta en el grupo de 4º A, bastantes alumnos han construido un mantel cuya superficie es la fracción equivalente a 3/4. Una alumna (A13) ha llevado tres veces la subunidad de tamaño 1/4 sobre la cartulina y ha doblado ésta para mostrar el mantel a sus compañeros. La región punteada es el mantel construido por esta alumna:



Valoración
Los alumnos de ambos grupos han obtenido mejores resultados en la medida de la superficie del mantel propuesta en la ficha 11 si se compara con los de la ficha 10 y si, además, se tiene en cuenta que el grado de dificultad de la ficha 11 es superior a la de la ficha 10.

Los significados de los términos de la fracción que los alumnos expresan, por escrito, cuando resuelven la ficha 11 no mejoran substancialmente respecto de las respuestas dadas por los mismos escolares en la ficha 10. Y ello después de que en esta última ficha varios alumnos han expresado el significado del numerador y del denominador de la fracción 3/2 y de otras equivalentes. Los alumnos tienen dificultades para expresar los significados de los términos de la fracción aunque tengan éxito en la actividad de medida de la superficie del mantel.

Toma de decisiones
Se decide no resolver la ficha 12, que propone una situación de comunicación con la magnitud superficie, por tres motivos:
1. Las dos situaciones de comunicación trabajadas en sesiones anteriores no se han podido terminar por falta de tiempo necesario para que los alumnos terminen las actividades.
2. Los resultados obtenidos con la magnitud superficie son buenos y, además, ha aparecido en las fichas anteriores la noción de fracción equivalente.
3. La temporalización de la secuencia de enseñanza lleva un retraso considerable debido fundamentalmente a las dificultades que los alumnos han tenido con la magnitud peso.

En la siguiente sesión se trabajará la ficha 13 sobre la equivalencia de fracciones.

Día 18-2-2000 (decimoctava sesión)
Plan previsto
Proponer, resolver y evaluar la ficha 12. Proponer la resolución de la ficha 13 como trabajo para casa durante el fin de semana. Además, del fin de semana los alumnos dispondrán de un día más para resolver la ficha dado que el lunes, 21 de febrero, realizan una excursión y las sesiones de clase se retoman el día siguiente.

Ejecución
En ambos grupos se ha resuelto y evaluado la ficha 13.
Cuando los alumnos, en ambos grupos, han terminado la ficha se realiza una evaluación conjunta de la misma. El profesor pregunta a los alumnos que indiquen las fracciones encontradas y justifica la aparición de las mismas según los fraccionamientos realizados sobre la unidad. En este caso la unidad de medida que se considera es la de superficie. Las primeras fracciones equivalentes que nombran los alumnos son:

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8}$$

Una alumna (A31) aporta la fracción 15/10 y un alumno (A28) que conoce la regla de obtención de fracciones equivalentes a nivel simbólico, aunque no se ha explicitado en el aula, sugiere la fracción 48/32. Cuando el profesor le pide que justifique, pensando en la magnitud superficie o longitud, la obtención de esta fracción el alumno no sabe construirla en el modelo. El profesor la justifica utilizando la magnitud superficie e indica la conveniencia de comprender la regla de obtención de fracciones equivalentes.

A los alumnos se les propone como trabajo para casa que encuentren fracciones equivalentes a 1/4. El profesor les ofrece unidades de superficie y les indica que, si lo desean, pueden utilizarlas para resolver la ficha.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Los alumnos el grupo 4º A siguen sin resolver la ficha propuesta para casa el pasado lunes.

Asistencia de alumnos
En los grupo 4º A faltan tres alumnos (A09, A16 y A23). En el grupo 4º B falta una alumna (A25).

Aspectos relacionados con la comprensión
En primer lugar debemos indicar que los alumnos han tenido dificultades para interpretar la tarea a realizar por dos motivos:
1. El formato de la ficha es novedoso para ellos.
2. La ficha tiene más texto que la de otras fichas que han resuelto con anterioridad.

Para reconducir la resolución de la ficha el profesor lee en voz alta el enunciado y explica el objetivo de la misma. Después ofrece en el grupo 4º A la opción de utilizar el material para trabajar con la magnitud longitud, superficie o masa. A la vista de los resultados obtenidos en este grupo por los alumnos que trabajan con la magnitud masa, aconseja a los alumnos del grupo 4º B que utilicen la magnitud longitud o superficie, pero no la masa.

La práctica totalidad de los alumnos ha decidido utilizar algún tipo de material. Veámoslo en la siguiente tabla:

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
Razonamiento	1	1
Material de longitud	14	13
Material de superficie	2	4
Material de masa	4	0
Material no especificado	0	5
Total alumnos	*21*	*23*

El número de fracciones equivalentes correctas que han encontrado son:

Nº de fracciones equivalentes	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
3	9	8
2	2	4
1	4	7
0	6	4
Total alumnos	*21*	*23*

Para evaluar con qué magnitud tienen más éxito los alumnos de ambos grupo estudiamos el valor medio del número de fracciones equivalentes encontradas en función de la estrategia utilizada:

Estrategia utilizada	*Media de fracciones por alumno en 4º A*	*Media de fracciones por alumno en 4º B*
Razonamiento	3	3
Material de longitud	2	1,6
Material de superficie	2	2,75
Material de masa	0	-

Valoración

De la interpretación de estos datos obtenemos las siguientes conclusiones:

1. Que los pocos alumnos que han dado el salto hacia estrategias de resolución más abstractas, sin utilización del material, obtienen las tres fracciones equivalentes que solicitaba el enunciado de la ficha.
2. Que los alumnos se encuentran más familiarizados con el material para trabajar la magnitud longitud.
3. Que los pocos alumnos que resuelven la tarea pensando en la magnitud superficie obtienen tan buenos resultados, o incluso mejores, que los alumnos que utilizan la magnitud longitud.
4. Que se pone de manifiesto las dificultades de los alumnos cuando trabajan con la magnitud masa, de modo que ninguno de los cuatro alumnos del grupo 4º A consiguen obtener una sola fracción equivalente.

Como valoración general de la ficha confirmamos que los alumnos no están todavía en condiciones de abandonar las estrategias manipulativas, muy próximas al modelo. Y aunque muestran comprensión cuando otro compañero de clase explica que 6/4 es equivalente a 3/2 utilizando un razonamiento, muchos se sienten inseguros y demandan el material para resolver las fichas.

Queda por estudiar la influencia que la introducción de estrategias de representación gráfica en el proceso de enseñanza de fracciones equivalentes ejerce en el desarrollo conceptual de los alumnos, en el sentido de propiciar el salto hacia estrategias de resolución más abstractas y, por lo tanto, más alejadas de los modelos manipulativos. La estrategia consistente en la utilización de representaciones gráficas estaba contemplada en la propuesta de enseñanza pero no se ha introducido en este momento por falta de tiempo; no obstante, se va a trabajar en las sesiones siguientes cuando se trabaje el orden de fracciones.

En general, la mayoría de los alumnos de ambos grupos comprenden el sentido de la existencia de fracciones equivalentes a una dada y, además, mediante la utilización de material manipulativo, saben encontrar fracciones equivalentes.

Toma de decisiones
El equipo de investigación considera que tiene suficiente información sobre el conocimiento y destrezas que tienen los alumnos del concepto de fracción equivalente y dado el desfase que acumula la fase experimental se decide no proponer la resolución de la ficha 14 y proponer directamente la resolución de la ficha nº 15 que introduce la regla de obtención de fracciones equivalentes a nivel simbólico.

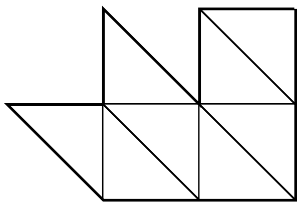
Con esta decisión se pretende ganar tiempo para desarrollar la mayor parte de la propuesta inicial de enseñanza. En la próxima sesión se va a evaluar los resultados de la ficha 13 en ambos grupos. Además, en el grupo 4º A se procederá a valorar una ficha pendiente desde hacia varias sesiones: la construcción de manteles de superficie 1/4 de unidad.

Día 22-2-2000 (decimonovena sesión)
Plan previsto
En ambos grupos evaluar la ficha 13. En el grupo 4º A se van revisar los manteles construidos por los alumnos de superficie 1/4 de unidad que proponía la ficha nº 9. Además, se prevé proponer la resolución de la ficha 15.

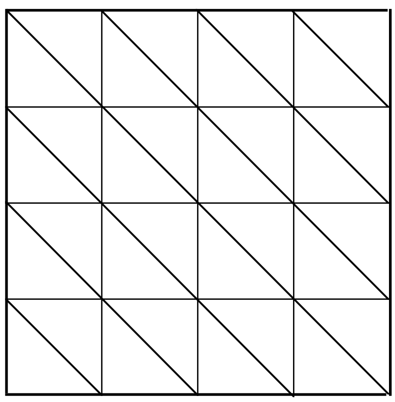
Ejecución
En el grupo 4º A se ha procedido a evaluar la ficha nº 9. Varios alumnos traen manteles (en particular el alumno A11 aporta muchas soluciones). Para cada mantel se comprueba si mide 1/4 de unidad y se estudia con qué fraccionamiento de la unidad se ha construido. De esta forma, se ponen de manifiesto fracciones equivalentes a 1/4 de unidad.

En el aula se han presentado los mismos manteles que los descritos en la sesión decimoquinta.

El alumno A11 presenta un nuevo tipo de mantel:



que se obtiene fraccionando la unidad en 32 partes iguales del siguiente modo:



En el grupo 4º B se han evaluado los resultados de la ficha 13, de modo que los alumnos proponen las fracciones y el profesor las justifica utilizando el material manipulativo de superficie:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{8}{32} = \frac{16}{64}$$

Después los alumnos afrontan la resolución de la ficha 15 modificada del siguiente modo:

Inventa una regla para encontrar MUCHAS fracciones equivalentes a la fracción $\frac{1}{4}$.

Para encontrar fracciones equivalentes a la fracción $\frac{1}{4}$ he hecho ___________________________________

Después de realizar una evaluación conjunta de la ficha el profesor formula la regla de obtención de fracciones equivalentes, que es la que escribe una alumna (A24): "Multiplicar el numerador y denominador por un mismo número", y que de forma completa se enuncia: " Si multiplicas o divides el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número obtienes otra fracción equivalente".

Como trabajo para casa les profesor propone, en ambos grupos, la siguiente ficha con el objetivo de ejercitar la regla de obtención de fracciones equivalentes:

Ficha 15 BIS.-

Encuentra el numerador o denominador de la fracción para que sea equivalentes las siguientes fracciones:

a) $\frac{4}{6} = \frac{10}{\square}$

b) $\frac{15}{12} = \frac{\square}{8}$

Aspectos actitudinales

Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo.

Asistencia de alumnos

En el grupo 4º A asisten todos los alumnos y en el grupo 4º B falta un alumno (A38).

Aspectos relacionados con la comprensión

La mayoría de los alumnos de 4º B no saben que es una regla. Cuando reciben indicaciones por parte del profesor de la utilidad de enunciar una regla para la obtención de fracciones equivalentes, bastantes alumnos no dan un enunciado de tipo general, sino que más bien describen el modo con el que trabajan con los modelos manipulativos cuando buscan fracciones equivalentes.

Así pues, la ficha les ha resultado muy complicada de modo que los alumnos han tenido muy poco éxito. Estos datos quedan reflejados en la siguiente tabla:

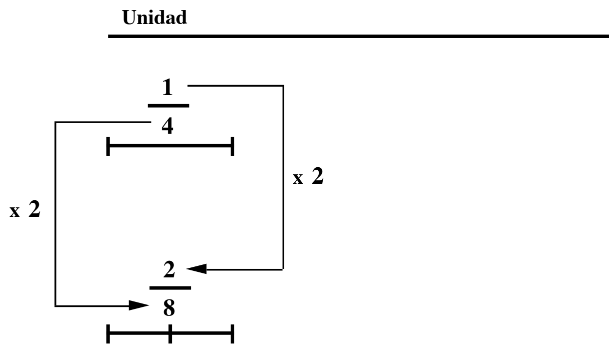
Respuestas	Enuncian una regla correcta	Enuncian una regla incompleta	Enuncian una regla incorrecta	Aportan explicaciones basadas en el modelo	No contestan
Nº alumnos	3	4	2	7	7

Valoración

De la interpretación de estos datos obtenemos las siguientes conclusiones:

1. La tarea de formular reglas generales excede la capacidad de los alumnos de este nivel educativo. Para afrontar este tipo de tareas se precisan capacidades de razonamiento como la generalización, la búsqueda de regularidades, etc. que no suelen poseer los alumnos de esta edad.
2 Se debería modificar la propuesta de enseñanza relativa a la regla de obtención de fracciones equivalentes de modo que los alumnos dispongan, además del material, de representaciones gráficas, que les puedan ayudar en el descubrimiento de la regla. Así se espera que los alumnos puedan realizar una conjetura, aunque no esté expresada con precisión, de la relación existente entre el numerador y denominador de dos fracciones equivalentes.

El razonamiento, basado en las experiencias manipulativas de los alumnos, puede venir ejemplificado en una representación gráfica con la magnitud longitud o superficie:



3. Para que los alumnos puedan conjeturar la regla de obtención de fracciones equivalentes se aconseja que el profesor realice las siguientes indicaciones:

"Hemos visto que algunas fracciones equivalentes a $\frac{1}{4}$ son: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{8}{32} = \frac{16}{64}$

Recuerda que $\frac{2}{8}$ es equivalente a $\frac{1}{4}$, porque si partes por la mitad una subunidad de longitud $\frac{1}{4}$ tienes el DOBLE de subunidades que ahora son de longitud $\frac{1}{8}$. Y en una longitud de $\frac{1}{4}$ unidad tienes el DOBLE de subunidades de longitud $\frac{1}{8}$ unidad".

Toma de decisiones

Como en el grupo 4º A se ha revisado la tarea de construcción de manteles de superficie 1/4 de unidad ha faltado tiempo para proponer en el aula la resolución de la ficha 15. En principio esta ficha debería realizarse en la siguiente sesión pero los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 4º B aconsejan no proponer su resolución en el grupo 4º A y ganar tiempo para continuar con la secuencia de enseñanza que va desfasada en la temporalización. De esta forma en la siguiente sesión, la secuencia de enseñanza va a ir, de nuevo, acompasada en ambos grupos.

Día 23-2-2000 (vigésima sesión)

Plan previsto

En ambos grupos evaluar la ficha 15 BIS. Después está previsto comenzar la enseñanza del orden de fracciones con la propuesta de las fichas 15 y 16.

Ejecución

En ambos grupos se evalúa la ficha 15 BIS y, después, en el grupo 4º A el profesor propone que los alumnos formulen de forma verbal la regla de obtención de fracciones equivalentes.

El predominio de las estrategias aditivas frente a las multiplicativas se manifiesta en la respuesta dada por un alumno del grupo 4º A (A36) cuando escribe que 10/12 es equivalente a 4/6 y lo justifica diciendo que "he añadido 6 al numerador y al denominador"

Cuando el profesor pregunta al resto de los alumnos si está fracción es equivalente a 4/6 sólo una alumna (A09) aporta otra solución diferente:

$$\frac{10}{12} = \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

El profesor les pregunta si las fracciones $\frac{10}{12}$ y $\frac{10}{15}$ son iguales y por lo tanto, si las dos soluciones son correctas. Como la mayoría de los alumnos se encuentran desorientados, a la vista de la solución planteada por un alumno $\frac{4}{6} = \frac{10}{12}$, el profesor les propone encontrar el numerador de la siguiente fracción:

$$\frac{4}{6} = \frac{\square}{12}$$

Utilizando el material propio de la magnitud longitud los alumnos observan que $\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$

Y por lo tanto, la fracción $\frac{10}{12}$ no es equivalente ni a $\frac{8}{12}$ ni a $\frac{4}{6}$.

Con la ayuda del material se comprueba que la solución $\frac{10}{15}$ es correcta y el profesor propone a los alumnos que encuentren el razonamiento incorrecto por el que la mayoría asumía como fracción equivalente de $\frac{4}{6}$ la fracción $\frac{10}{12}$. De esta forma pretendemos que aparezca la estrategia multiplicativa que modeliza las acciones realizadas con el material.

Una alumna del grupo 4º A trae resuelta la segunda parte de la ficha, aportando como solución:

$$\frac{15}{12} = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$$

y justificando que como no podía pasar de "doceavos" a "octavo", se dio cuenta que 15 = 3 x 5 y que 12 = 3 x 4.

Como en los dos grupos de docencia la ficha ha sido resuelta por muy pocos alumnos el profesor la resuelve utilizando el material con el que se ha trabajado la magnitud longitud. Después propone que a los alumnos que formulen verbalmente la regla de obtención de fracciones equivalentes.

Los alumnos han resuelto la ficha 16 de comparación de fracciones pero no ha dado tiempo para realizar la evaluación conjunta de la ficha.

<u>Asistencia de alumnos</u>
En el grupo 4º A falta una alumna (A33) y dos alumnas se ausentan para asistir a clases de apoyo (A46 y A47). En el grupo 4º B asisten todos los alumnos.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Respecto de la ficha sobre equivalencia debemos constatar de nuevo que los alumnos han mostrado preferencia por la aplicación de estrategias aditivas en situaciones inapropiadas en las tareas de búsqueda de fracciones equivalentes.

Como era de esperar, esta tarea les ha resultado muy difícil por varias razones:

1. Las fracciones vienen representadas de forma simbólica y no hay referencia a ningún modelo manipulativo.
2. La fracción equivalente no se percibe con claridad pues en el primer ejercicio no se observa cual va a ser el factor (número natural) que multiplicado por 4 va a dar 10; y en el segundo ejercicio tampoco se sabe qué factor multiplicado por 8 va a dar 12.
3. No han realizado con anterioridad tareas de este mismo tipo.

El equipo de investigación valoró la dificultad de la ficha y decidió proponer esta ficha como trabajo fuera del aula con el objetivo de conectar las acciones manipulativas con la regla de obtención de fracciones equivalentes que es propia del lenguaje simbólico, durante la evaluación de la ficha.

Respecto al trabajo realizado por los alumnos en la resolución de la primera actividad relativa a la ordenación de fracción (ficha 15) los niveles de éxito en ambos grupos son muy altos: sólo una alumna (A05) de 4º A y dos alumnos (A06 y A14) de 4º B no ordena bien las fracciones. Cabe indicar que se trata de una ficha sencilla porque las dos fracciones a comparar poseen el mismo numerador.

Pero sin duda la potencialidad de esta ficha radica en el diseño de la tarjeta donde los alumnos escriben su respuesta y las estrategias utilizadas en la resolución. Los alumnos tienen la opción de utilizar materiales manipulativos, representaciones gráficas o directamente realizar razonamientos basados en el concepto de fracción.

Resulta altamente significativo que bastantes alumnos han recurrido a utilizar razonamientos o bien realizar representaciones gráficas sin haber recibido enseñanza de la utilización de esta última estrategia. Veámoslo en la siguiente tabla:

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
Con material	5	6
Con repr. gráficas	8	6
Con razonamientos	8	12
Total alumnos	*21*	*24*

Todas las estrategias basadas en razonamientos se basan en el concepto de fracción y sólo dos alumnas de 4º A (A09 y A10) aportan otro razonamiento basado en la existencia de la unidad como fracción intermedia entre ambas.

Valoración
Con la resolución conjunta de la ficha 15BIS con los grupos clase se consigue el objetivo propuesto: ejercitar la regla de obtención de fracciones equivalentes conectando la regla con las acciones realizadas con el modelo. A la vista del escaso número de alumnos que ha resuelto la ficha 15BIS el equipo de investigación observa que se debería haber intentado cubrir el mismo objetivo con la propuesta de tareas de menor grado de dificultad, como la siguiente:

FICHA 15BIS MODIFICADA
Encuentra el numerador o denominador de la fracción para que sea equivalentes las siguientes fracciones:

a) $\frac{2}{4} = \frac{3}{\square}$

b) $\frac{6}{2} = \frac{\square}{5}$

Se observará que, en estas tareas, se mantiene la necesidad de buscar una tercera fracción equivalente a la dada como paso intermedio para resolver la ficha. Se pretende obviar la propuesta de tareas que sean aplicación inmediata de la regla de obtención de fracciones equivalentes.

Los buenos resultados del trabajo realizado por los alumnos en la ficha 16 de comparación de fracciones se explican por la facilidad de la tarea pero, también, por los aprendizajes realizados por éstos a lo largo de la secuencia de enseñanza. Por un lado los alumnos han recibido enseñanza sobre el significado de la fracción como resultado de una medida y del concepto de fracciones equivalentes. Pero no menos importantes son los habilidades y estrategias metodológicas que los alumnos han aprendido a utilizar:

capacidad de comunicación de ideas matemáticas con otros compañeros
capacidad de rebatir argumentos y defender los razonamientos propios.
estrategias basadas en la búsqueda de regularidades
estrategias basadas en representaciones gráficas
capacidad de decisión entre diversos materiales manipulativos para resolver una tarea.
capacidad de decisión entre diversas estrategias de resolución.

En este aspecto la resolución de la ficha 16 permite a los alumnos optar entre diversas estrategias de resolución. En particular la estrategia basada en la realización de representaciones gráficas ha sido utilizada con éxito por una tercera parte de los alumnos de los dos grupos, sin que éstos hayan recibido enseñanza previa sobre la utilización de esta estrategia.

Toma de decisiones
Continuar con la secuencia de enseñanza y, en particular, trabajar los conocimientos y estrategias relativas al orden de fracciones.

Día 24-2-2000 (vigésimo primera sesión)

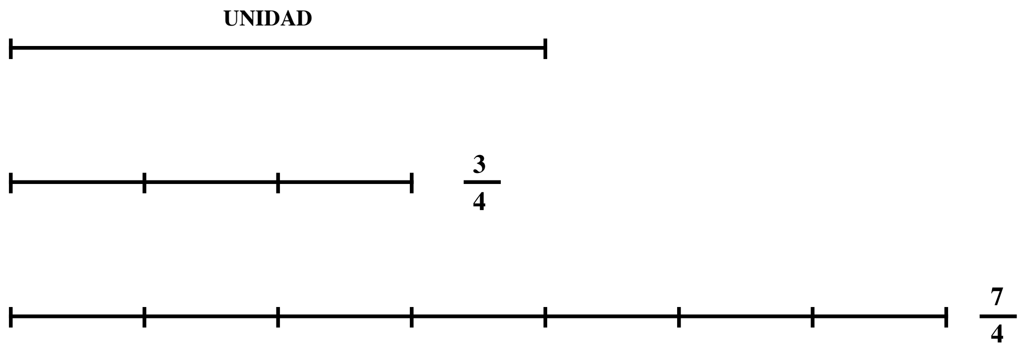
Plan previsto

En ambos grupos evaluar la ficha 16. Después está previsto resolver y evaluar las fichas 17 y 18.

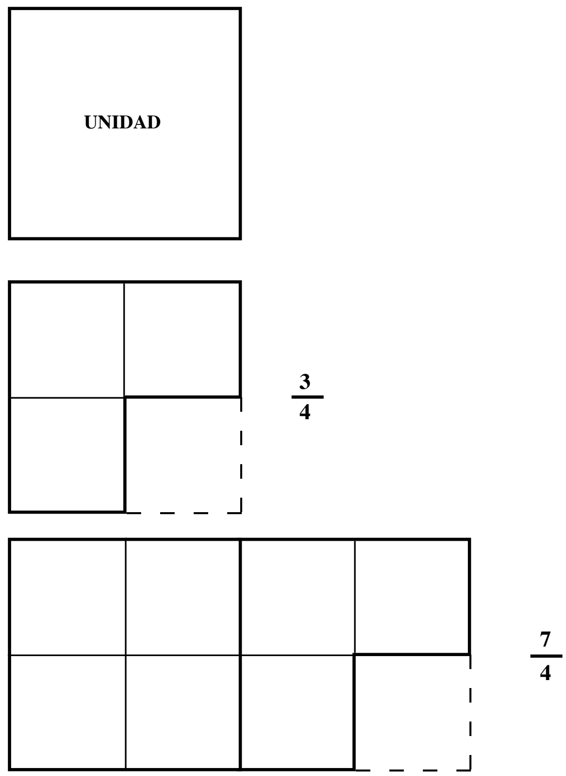
Ejecución

Se cumple con el plan previsto pero no da tiempo de evaluar la tarea 18. Los primeros minutos de la sesión de clase con cada uno de los dos grupos se emplean en evaluar la ficha 16, de modo que el profesor comenta las estrategias utilizadas por los alumnos para ejemplificar en la pizarra diversas representaciones gráficas y solicita a los alumnos que indiquen los razonamientos que han puesto en juego para resolver la tarea. Las representaciones gráficas descritas siguen los modelos de longitud y superficie.

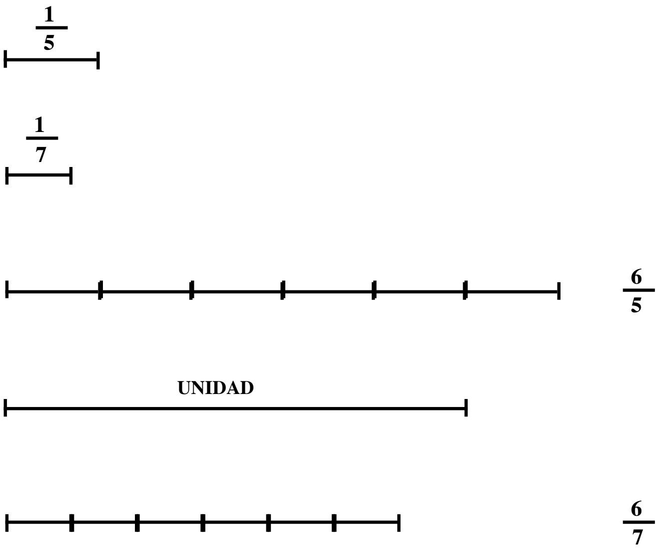
Las representaciones gráficas con la magnitud longitud son del tipo:



Las representaciones gráficas con la magnitud superficie son del tipo:



Cuando se realiza la evaluación de la ficha 17 el profesor vuelve a mostrar algunas de las representaciones gráficas que los alumnos aportan, casi siempre pensando en el modelo de medida de longitud:



El profesor propone a los alumnos que expliquen las estrategias basadas en razonamientos. Todas ellas se basan en el significado de fracción como medida y en la observación de que 1/7 es menor que 1/5. Una alumna del grupo de 4º A (A09) expone un razonamiento, más avanzado por comparación de las fracciones con la unidad.

Después los alumnos resuelven la ficha 18, pero apenas queda tiempo para realizar la evaluación conjunta en el aula. El profesor les entrega la tarjeta de evaluación de la ficha 19 y les propone que realicen esta tarea en casa durante el fin de semana (el viernes, 25 de febrero, se suspende la sesión de clase de matemáticas).

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A faltan dos alumnas (A23 y A33). En el grupo 4º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
En la ficha 17 los alumnos deben comparar dos fracciones que tienen el mismo numerador. Veamos los resultados obtenidos por los alumnos de los dos grupos:

Tipo de respuesta	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
Ordenan bien	11	17
Ordenan mal	9	4
No contestan	0	3
Total alumnos:	*20*	*24*

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º A*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
Con material	3	33%
Con repr. gráficas	10	40%
Con razonamientos	7	71%
Total alumnos:	*20*	

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º B*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
Con material	0	0%
Con repr. gráficas	15	27%
Con razonamientos	7	71%
Total alumnos:	*22*	

Se observa que los alumnos van abandonando las estrategias manipulativas por convicción propia al intentar ahorrar tiempo en la resolución de la ficha y porque siguen las indicaciones dadas por el profesor en el sentido de que utilicen otras estrategias más rápidas y, por lo tanto, más abstractas. También se observa que la calidad de las explicaciones dadas por los alumnos mejora conforme éstos utilizan estrategias más alejadas del modelo que se sustentan en representaciones gráficas y razonamientos.

La ficha 18 propone la comparación de dos fracciones que tienen diferentes numeradores y denominador: 1/2 y 3/8. Esta ficha presenta una dificultad, ajena al concepto que se pretende trabajar, y que radica en que algunos alumnos no saben qué es una tuerca y desconocen éstas se clasifican según su diámetro y que suele medirse con una unidad que no pertenece al sistema métrico decimal: la pulgada. Para que los alumnos realicen la tarea el profesor realiza un dibujo de la tuerca y del diámetro de ésta. Con esta explicación los alumnos resuelven la tarea pero se detectan dificultades en algunos alumnos que, cuando deciden utilizar una representación gráfica, tienden a confundir el dibujo de la tuerca con la representación gráfica de la longitud del diámetro de la tuerca. Veamos los resultados obtenidos por los alumnos en esta ficha:

Tipo de respuesta	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
Ordenan bien	18	10
Ordenan mal	1	6
No contestan	1	8
Total alumnos:	*20*	*24*

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º A*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
No la indican	1	0
Con material	5	100%
Con repr. gráficas	13	46%
Con razonamientos	1	100%
Total alumnos:	*20*	

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º B*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
No la indican	11	-
Con repr. gráficas	12	75%
Con razonamientos	1	100%
Total alumnos:	*24*	

Se observa que muy pocos alumnos resuelven la tarea utilizando razonamientos. Pensamos que esto se debe a que los alumnos tienen un conocimiento operativo de la noción de fracción equivalente, de modo que llegan a ver que $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ realizando dibujos o bien utilizando el material asociado a la longitud o a la superficie; sin embargo, los alumnos no tienen un conocimiento conceptual de la equivalencia de fracciones que les lleve a plantear estrategias más avanzadas y, por lo tanto, más próximas al nivel simbólico.

<u>Valoración</u>
Podemos concluir que los resultados obtenidos por los alumnos en la resolución de las fichas 17 y 18 son aceptables. Y lo que es más importante, observamos que, después de realizar la evaluación conjunta de una ficha, los alumnos resuelven mejor la siguiente ficha y, por lo tanto, se producen progresos observables en la secuencia de enseñanza.

Como era de esperar, los alumnos no disponen de un conocimiento conceptual de la noción de fracción equivalente, de modo que no son capaces de construir mentalmente fracciones equivalentes para resolver directamente las fichas de comparación de fracciones utilizando razonamientos. Este es un objetivo muy ambicioso y, los resultados muestran, que cae fuera de las capacidades mentales de la mayoría de los alumnos.

Para resolver estas tareas la mayoría de los alumnos utiliza como estrategia la realización de representaciones gráficas. Se observa que el porcentaje de alumnos que ha utilizado con éxito esta estrategia, en la ficha 18, ha crecido respecto al de la ficha anterior. Cabe preguntarnos si los resultados hubieran sido mejores si en el enunciado de la ficha 18 no hubieran aparecido términos alejados del entorno vital de los alumnos como tuerca, diámetro o pulgada. Por esta razón consideramos conveniente proponer la ficha 19 que no presenta estas dificultades y que sirve para ejercitar los procedimientos de comparación de fracciones y las estrategias dirigidas a la consecución de este objetivo.

Toma de decisiones

En la siguiente sesión se trabajará la ficha 19 que exige comparar fracciones con diferentes numeradores y denominadores. Se procederá a evaluar esta tarea que el profesor ha propuesto a los alumnos de ambos grupos como trabajo para ser realizado en casa durante el fin de semana.

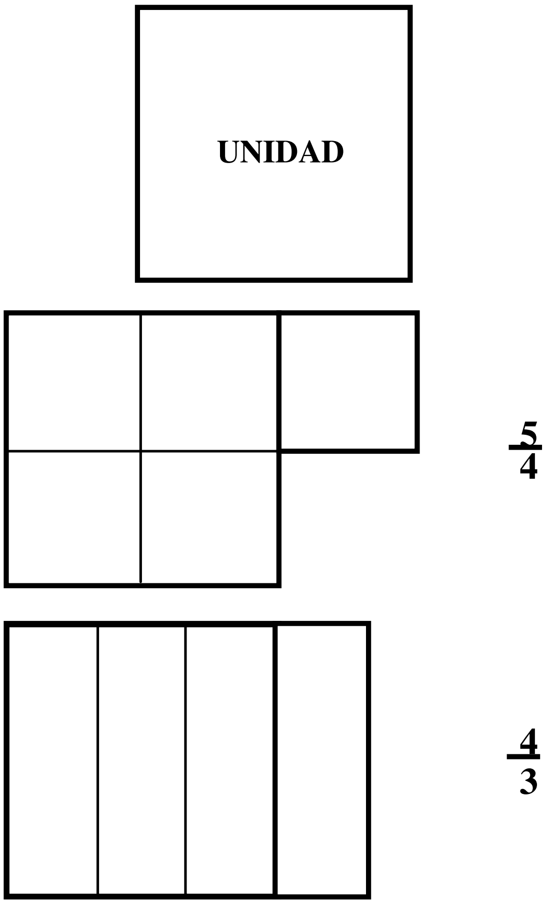
Día 28-2-2000 (vigésimo segunda sesión)

Plan previsto

En ambos grupos evaluar la ficha 18. Después está previsto resolver y evaluar la ficha 19.

Ejecución

Al evaluar la ficha 19 el profesor pondera las estrategias basadas en representaciones gráficas y razonamientos, y recomienda de nuevo el abandono de las estrategias manipulativas. En la pizarra escribe alguna de las representaciones gráficas dibujadas por algunos alumnos:



El profesor solicita que alguno de los alumnos que han dado una respuesta basada en razonamiento expliquen como han actuado. Todas las respuesta se fundamentan en la comparación de entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ dado que:

$$\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

Aunque no han aparecido estrategias más avanzadas basadas en la noción de equivalencia de fracciones el profesor muestra estas estrategias porque facilitan la resolución de la ficha 19 y, además, prepara la iniciación del tratamiento de las fracciones a nivel simbólico.

Si igualan denominadores: $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$

$\frac{4}{3} = \frac{16}{12}$

Y si igualan numeradores: $\frac{5}{4} = \frac{20}{16}$

$\frac{4}{3} = \frac{20}{15}$

Como los alumnos, en general, no han sabido realizar la ficha 19, el profesor explica cómo abordar ésta e introduce la representación de la recta numérica utilizando como soporte un listón de madera en el que se asigna un origen y se representan las fracciones como puntos de la recta. Después les indica que sigan trabajando la ficha y comenta que en la sesión del día siguiente se procederá a su evaluación.

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A se ausentan dos alumnas (A46 y A47) para asistir a clases de apoyo. En el grupo 4º B falta una alumna (A44).

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados de la ficha 19 son los siguientes:

Tipo de respuesta	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
Ordenan bien	19	17
Ordenan mal	3	4
No contestan	0	2
Total alumnos:	*22*	*23*

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º A*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
No la indican	2	0
Con material	5	80%
Con repr. gráficas	9	56%
Con razonamientos	6	66%
Total alumnos:	*22*	

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º B*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
No la indican	6	-
Con repr. gráficas	14	50%
Con razonamientos	3	33%
Total alumnos:	*23*	

Aunque la mayoría de los alumnos de ambos grupos saben decir qué fracción tiene menor superficie (86% de los alumnos de 4º A y 74% de los alumnos de 4º B) el porcentaje de alumnos que saben justificar la respuesta decrece considerablemente: 64% en 4º A y 35% en 4º B.

Se observa un aumento en el número de alumnos que han utilizado con éxito razonamientos para resolver el problema. Estos razonamientos se basan en descomponer ambas fracciones: una en la unidad y un cuarto, y otra en la unidad y un tercio; y después, afirmar que un cuarto es menor que un tercio. Sin embargo, ningún alumno ha utilizado estrategias basadas en la equivalencia de fracciones, igualando denominadores o numeradores. Esta estrategia no la perciben los alumnos como natural y, sin duda, será un obstáculo para resolver la ficha 20 en la que a los alumnos se les pide que encuentren fracciones intermedias entre dos dadas.

Valoración
Durante la resolución de las tareas de comparación de fracciones las estrategias utilizadas por los alumnos

han evolucionado desde aquellas que están próximas a los modelos manipulativos a otras más evolucionadas como la representación gráfica y el razonamiento centrado en la idea de fracción. Dentro de esta última categoría han aparecido estrategias basadas en la comparación con fracciones conocidas, como la unidad y la media unidad. Sin embargo, ningún alumno ha utilizado la equivalencia de fracciones para conseguir que las fracciones a ordenar tengan el mismo numerador o denominador.

Aunque los alumnos de ambos grupos han recibido enseñanza de la estrategia basada en la equivalencia de fracciones no se muestran capaces de afrontar la tarea de encontrar fracciones intermedias entre dos dadas utilizando esta estrategia.

Toma de decisiones
Continuar con la propuesta de enseñanza. En la siguiente sesión se evaluará la ficha 19 que el profesor había propuesto a los alumnos de ambos grupos como trabajo para ser realizado en casa durante el fin de semana y que los alumnos habían manifestado no saber realizarla en la sesión de clase del día anterior.
El equipo de investigación sabedor de las dificultades que los alumnos van a tener para encontrar fracciones intermedias entre dos fracciones decide trabajar de forma conjunta con los alumnos la ficha 20 y proponer como trabajo para casa la realización de la ficha 21 que va a ser modificada.

Día 29-2-2000 (vigésimo tercera sesión)
Plan previsto
Realizar la evaluación conjunta de la ficha 20

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A se ausentan dos alumnas (A46 y A47) para asistir a clases de apoyo. En el grupo 4º B falta una alumna (A44).

Ejecución
Con la realización de esta ficha se pretende introducir las estrategias basadas en la equivalencia de fracciones para encontrar fracciones intermedias entre $\frac{1}{3}$ y la unidad.

En primer lugar el profesor propone utilizar la estrategia de igualar denominadores. Como la unidad puede expresarse como $\frac{3}{3}$, los alumnos no tienen dificultades para encontrar la fracción $\frac{2}{3}$ intermedia entre $\frac{1}{3}$ y la unidad.

$\frac{1}{3}$ $\quad \boldsymbol{\frac{2}{3}}$ $\quad \frac{3}{3} = 1$

Si fraccionamos la unidad en 6 partes iguales:

$\frac{2}{6}$ $\quad \frac{6}{6} = 1$

$\frac{2}{6}$ $\quad \frac{3}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$ $\quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\quad \boldsymbol{\frac{5}{6}}$ $\quad \frac{6}{6} = 1$

Si fraccionamos la unidad en 12 partes iguales:

$\frac{4}{12}$ $\quad \frac{12}{12} = 1$

$\frac{4}{12}$ $\quad \boldsymbol{\frac{5}{12}}$ $\quad \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $\quad \boldsymbol{\frac{7}{12}}$ $\quad \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{9}{12} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$ $\quad \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ $\quad \boldsymbol{\frac{11}{12}}$ $\quad \frac{12}{12} = 1$

El profesor no ha seguido realizando fraccionamientos diferentes de la unidad, ni tampoco ha ejemplificado la estrategia de igualar numeradores porque ha observado que muchos alumnos no sabían encontrar fracciones equivalentes. Los alumnos tienen más dificultad cuando simplifican una fracción que cuando realizan fraccionamientos "más finos" de la unidad para obtener fracciones equivalentes. Esto era de esperar porque las acciones realizadas con los modelos manipulativos consistían en volver a realizar fraccionamientos con mayor número de subunidades.

Otro tipo de error consiste en la utilización de estrategias aditivas para obtener fracciones equivalentes. Esta dificultad ha quedado bien reflejada en el alumno A29 que afirma que 8/11 es una fracción equivalente a 9/12. El profesor, para que los alumnos se percaten del error, expone en la pizarra lo siguiente:

$$\frac{1}{2} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$$

y pregunta si las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ son equivalentes. Finalmente recuerda que las acciones a utilizar son multiplicativas y no aditivas ni sustractivas.

El profesor les vuelve a proponer a los alumnos que encuentren una fracción equivalente a 9/12 lo más simplificada posible. Muy pocos alumnos encuentran fracciones equivalentes de este tipo; de modo que propone utilizar el material asociado a la magnitud longitud y, de forma manipulativa, obtienen la fracción equivalente a 9/12.

De forma paralela a la resolución de la ficha el profesor va escribiendo en la recta numérica las fracciones que los alumnos van obteniendo. Momentos antes de terminar la sesión de clase el profesor propone a los alumnos la ficha 21 para que la trabajen en casa durante las mini vacaciones denominadas "semana blanca".

Valoración

Aunque no se ha realizado una evaluación individual de los resultados de la ficha 20, podemos afirmar que la mayoría de los alumnos no saben resolver esta tarea. En nuestra opinión las dificultades se justifican:

1º. Por la forma de enunciar la ficha. No hay una situación problemática que permita utilizar los modelos que se han trabajado en las sesiones precedentes.

2º. Desconocen las estrategias de obtención de fracciones equivalentes basadas en la igualdad de denominadores o de numeradores. Y, aunque el profesor las ha ejemplificado en la sesión anterior, se trata de una estrategia que requiere un conocimiento conceptual de la fracción propia del nivel simbólico.

3º. El nivel medio de capacidad de abstracción de los alumnos de estas edades es incompatible con la utilización de estrategias que se sitúan en el nivel simbólico.

Toma de decisiones

Pensamos que se han cubierto los objetivos relativos a la equivalencia y comparación de las fracción, pero no se ha abordado la noción de densidad entre fracciones. El equipo de investigación es consciente de que los alumnos van a tener dificultades para comprender el concepto de densidad de fracciones. Por este motivo se ha modificado la ficha 21, eliminando la tercera cuestión que se refiere a este concepto. Mostramos a continuación la ficha 21 modificada:

TARJETA DE LA FICHA 21

ALUMNO/A:____

PRIMERA PREGUNTA:

Ordena las fracciones $\frac{3}{2}$ *y* $\frac{7}{8}$ *de unidad*

SOLUCIÓN: La fracción $\frac{7}{8}$ es __________ que $\frac{3}{2}$, porque: ________________________

SEGUNDA PREGUNTA:

Encuentra OCHO fracciones que estén comprendidas entre $\frac{7}{8}$ *y* $\frac{3}{2}$ *de unidad.*

Fracción

1º__________ porque ________________________________

La temporalización de la propuesta prevé la implementación de 21 sesiones. En estas condiciones, con esta sesión deberíamos dar por concluida la secuencia de enseñanza; sin embargo, vamos a ampliar la secuencia dos o tres sesiones para trabajar la fracción como medida de la cantidad de objetos discretos. Consideramos imprescindible la inclusión de este significado de la fracción como medida, porque:
1º. Refuerza los significados de la fracción como medida.
2º. Es un objetivo de enseñanza de las matemáticas en el nivel de cuarto curso reflejado en el proyecto curricular de Centro.

Día 6-3-2000 (vigésimo cuarta sesión)
Plan previsto
Realizar la evaluación conjunta de la ficha 21. Iniciar la enseñanza desde el modelo de cardinalidad con la resolución de la ficha 22.

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A falta un alumno (A28). En el grupo 4º B falta un alumno (A26).

Ejecución
El profesor solicita la tarjeta de la ficha 21 pero bastantes alumnos de ambos grupos dicen que se la han dejado en su casa. El profesor les dice que la traigan en la siguiente sesión y procede a realizar preguntas a diferentes alumnos sobre las actividades propuestas en esta tarea.

La mayoría de los alumnos dan muestras de saber ordenar las fracciones $\frac{7}{8}$ y $\frac{3}{2}$. Cuando les pregunta que indiquen fracciones intermedias los alumnos aportan soluciones aisladas que suelen ser correctas. Sin embargo, al profesor le interesa que describan cómo se pueden obtener "familias" de fracciones intermedias.

Una alumna propone escribir la fracción $\frac{3}{2}$ como $\frac{12}{8}$ para proceder a localizar fracciones intermedias:

$\frac{7}{8}$ $\quad$ $\frac{8}{8} = \mathbf{1}$ $\quad$ $\mathbf{\frac{9}{8}}$ $\quad$ $\frac{10}{8} = \mathbf{\frac{5}{4}}$ $\quad$ $\mathbf{\frac{11}{8}}$ $\quad$ $\frac{10}{8} = \frac{3}{2}$

Estas fracciones se han representado con el material manipulativo de longitud sobre la recta numérica.

Después los alumnos perciben, con facilidad, la posibilidad de volver a fraccionar en dos partes iguales las subunidades de longitud $\frac{1}{8}$ de unidad. El profesor para ejemplificar las subunidades de medida $\frac{1}{16}$ ha utilizado el material asociado a la magnitud superficie y ha justificado la existencia de las fracciones intermedias:

$\frac{14}{16}$ $\quad$ $\mathbf{\frac{15}{16}}$ $\quad$ $\frac{16}{16} = 1$ $\quad$ $\mathbf{\frac{17}{16}}$ $\quad$ $\frac{18}{16} = \frac{9}{8}$ $\quad$ $\mathbf{\frac{19}{16}}$ $\quad$ $\frac{20}{16} = \frac{10}{8}$ $\quad$ $\mathbf{\frac{21}{16}}$ $\quad$ $\frac{22}{16} = \frac{11}{8}$ $\quad$ $\mathbf{\frac{23}{16}}$ $\quad$ $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

El profesor les comenta que pueden encontrar muchas más fracciones entre $\frac{7}{8}$ y $\frac{3}{2}$.

En la segunda parte de la sesión de clase se introduce la fracción como medida de cantidades discretas. Para ello el profesor propone a los alumnos la realización conjunta de la ficha 22 cuyo enunciado mostramos a continuación:

> *"Has comprado una bolsa que contiene 6 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 3 bombones. ¿Qué parte de bolsa has comido?".*
>
> *Consigna: "Si lo deseáis, podéis utilizar los seis policubos que os entrego: tres de cada color"*

Antes de resolver la ficha el profesor ofrece la siguiente explicación: "En esta tarea tenéis que MEDIR LA CANTIDAD DE BOMBONES QUE HAS COMIDO tomando como UNIDAD DE MEDIDA LA CANTIDAD DE BOMBONES QUE HAY EN LA BOLSA. En esta tarea no nos preocupa la masa, ni la longitud, ni la superficie de los bombones (pensamos que todos son iguales); lo que nos interesa de los bombones es la CANTIDAD bombones que hay. La magnitud que consideramos se llama cardinalidad".

Para resolver la tarea los alumnos dicen han comido "la mitad de los bombones" o "media unidad". Cuando se les pregunta qué subunidad han considerado muestran extrañeza y algunos responden la unidad la han partido en dos grupos, de tres colores cada uno. Por lo tanto, la subunidad es de tamaño 1/2 bolsa porque ésta la han fraccionado en dos partes iguales, y la fracción que indica la parte de bolsa que han comido se puede percibir como una subunidad de medida 1/2 bolsa. También comer tres bombones puede ser percibido como comer 3 veces 1/6 de la cantidad de bombones que hay en la bolsa, es decir, 3/6 de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. En este caso la subunidad que se ha considerado es un bombón.

Aspectos relacionados con la comprensión
En la ficha 22, la unidad de medida viene dada por una colección de objetos que por su carácter discreto los alumnos la confunden con el objeto discreto, de modo que éste último es considerado como la unidad, ocasionando dificultades de comprensión.
Con esta tarea se pretende que los alumnos adquieran el significado de la fracción como medida de la cardinalidad de una colección de objetos que se toma como unidad. Un segundo objetivo consiste en reforzar el significado del concepto de fracción equivalente cuando se realizan diferentes fraccionamientos de la unidad.

Toma de decisiones
Los resultados de esta primera tarea muestra una escasa consecución del primer objetivo. Por este motivo, en la siguiente sesión se va a proceder a resolver las fichas 23 y 24 que son análogas a ésta.

Día 7-3-2000 (vigésimo quinta sesión)
Plan previsto
Introducir la fracción como medida de cantidades discretas. Resolver y evaluar la fichas 23, 24 y 25.

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A asisten todos los alumnos. En el grupo 4º B falta un alumno (A26).

Ejecución
Los alumnos resuelven la ficha nº 23 cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE LA FICHA Nº 23

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 8 bombones.

¿Qué parte de bolsa has comido?

Vas a resolver el problema de diferentes maneras:

La unidad es el número de bombones que hay en la bolsa.

1º Si fraccionas la unidad en 12 partes iguales, cada subunidad (es un bombón) es de medida 1/12 de la unidad.
Y la solución es:

He comido ——— de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

El profesor les entrega 12 policubos: 8 de color negro que representa los bombones que has comido y 4 de color blanco que representa los bombones que quedan sin comer, y les recuerda que la unidad son 12 bombones (policubos). Siguiendo la secuencia indicada en la tarea, pregunta:

1º. Si la unidad la fraccionamos en 12 partes iguales, ¿cuál es la doceava parte de la unidad?. Y, ¿qué parte de la bolsa de los bombones has comido?
Los alumnos contestan 8/12 de la unidad.

2º. Si la unidad la fraccionamos en 6 partes iguales, ¿cuál es la sexta parte de la unidad?. Después solicita que construyan con los policubos, la sexta parte de la unidad. Y, ¿qué parte de la bolsa de los bombones has comido?
Los alumnos contestan 4/6 de la unidad. Y el profesor solicita que indiquen el significado del numerador y del denominador de esta fracción. También pregunta: ¿qué relación hay entre las fracciones 8/12 y 4/6?

3º. Si la unidad la fraccionamos en 3 partes iguales, ¿cuál es la tercera parte de la unidad?. Después solicita que construyan con los policubos, la tercera parte de la unidad. Y, ¿qué parte de la bolsa de los bombones has comido?
Los alumnos contestan 2/3 de la unidad. Y el profesor solicita que indiquen el significado del numerador y del denominador de esta fracción. También pregunta: ¿qué relación hay entre las fracciones 8/12, 4/6 y 2/3?

Cuando se ha realizado la evaluación de la ficha 23 el profesor propone la resolución de las fichas 24 y 25. La ficha nº 24 tiene la misma estructura que la ficha de trabajo nº 23, y su enunciado es:

Has comprado una bolsa que contiene 16 bombones. Has abierto la bolsa y has comido12 bombones.

¿Qué parte de la bolsa has comido?

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados de las ficha 23 y 24 indican que los alumnos del grupo 4º A saben expresar con una fracción la medida del cardinal de una colección de objetos discretos. La colección de objetos la consideramos como la unidad de medida y según se realicen diferentes fraccionamientos de la unidad obtenemos fracciones equivalentes. Así, en la ficha 24, el grupo de 4º A el 83% de los alumnos encuentra dos o tres fracciones equivalentes que expresan la medida. Sin embargo, en el grupo 4º B el porcentaje de éxito baja hasta el 43%.

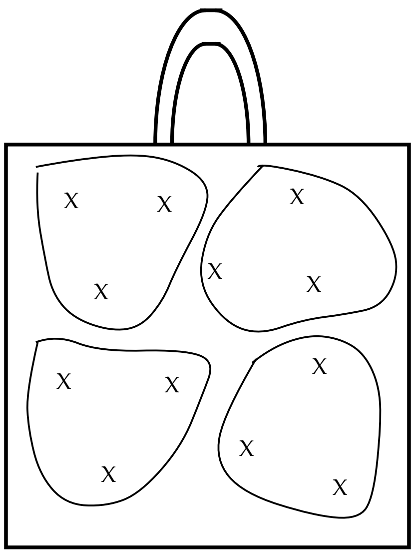
Si el objetivo de la ficha 24 es encontrar la fracción que indica la medida de una parte de una colección de objetos discretos, el objetivo de las ficha 25 es calcular el número de objetos de una parte de la colección o unidad cuya medida es una fracción dada. Esta actividad es conocida como cálculo de la fracción de un número. Los resultados obtenidos por los alumnos de ambos grupos cuando han resuelto la ficha 25 muestran un conocimiento operatorio aceptable de la fracción como medida de cantidades discretas. La tasa de éxito, en ambos grupos, se sitúa alrededor del 50%. Conviene recordar que es la primera ficha de este tipo que los alumnos realizan sin haber recibido enseñanza de la técnica que permite calcular la fracción de un número.

Toma de decisiones
Como la sesión de clase ha concluido sin disponer de tiempo para realizar una evaluación de la ficha 25, ésta se realizará en la siguiente sesión. En la siguiente sesión va a concluir la secuencia de enseñanza con la realización de dos últimas fichas de estructura análoga a las ficha 25, cuyo objetivo es ejercitar el cálculo de la fracción de un número y conceptualizar la fracción con el significado de medida de una parte de los objetos discretos de una colección o unidad.

Día 8-3-2000 (vigésimo sexta sesión)
Plan previsto
Evaluar la ficha 25, y resolver y evaluar las fichas 26 y 27.

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A faltan dos alumnos (A16 y A42) y se ausentan dos alumnas (A46 y A47) para asistir a clases de apoyo. En el grupo 4º B asisten todos los alumnos.

Ejecución



Para realizar una evaluación conjunta de la ficha 25 el profesor dibuja en la pizarra una bolsa con 12 cruces que representan los bombones, con la intención de introducir las representaciones gráficas y abandonar la utilización de los materiales manipulativos (policubos).

El profesor recuerda que la unidad son los 12 bombones. Para saber cuántos bombones son 1/4 de la bolsa, el profesor pregunta por el significado del denominador de la fracción 1/4. Cuando algunos alumnos explican que el denominador indica las partes iguales en las que se ha dividido la unidad, se dibuja el fraccionamiento de la unidad y se justifican los resultados obtenidos.

Cuando el profesor propone la resolución de la ficha 26 recomienda a los alumnos que no utilicen material manipulativo y que, en todo caso, realicen alguna representación gráfica.

Después de realizar una evaluación conjunta de la ficha 26 el profesor propone a los alumnos la resolución de la ficha 27, recomendándoles ante la elevada magnitud del dato que aparece en el enunciado que no utilicen material manipulativo ni dibujos para representar la cantidad de objetos a los que se refiere el dato.

En esta última sesión cada alumno recibe un cuadernillo, que a modo de libro de texto, les recuerda los contenidos de la fracción sobre los que han recibido enseñanza.

Aspectos relacionados con la comprensión

Del análisis de los respuestas dadas por los alumnos en las tarjetas de evaluación de las fichas 26 y 27 referidas al cálculo de la fracción de un número podemos concluir que los alumnos conocen y saben aplicar la regla o técnica operatoria. Recogemos estos datos en la siguiente tabla:

Fracción de un número	*Nº alumnos 4º A que saben calcular*	*% de aciertos*	*Nº alumnos 4º B que saben calcular*	*% de aciertos*
4/5 de 25	19	95%	19	79%
3/7 de 245	17	85%	18	75%
Total alumnos	*20*		*24*	

Los alumnos siguen teniendo dificultades para expresar correctamente los significados del numerador y denominador de la fracción. Como los estos significados son comunes en los cuatro modelos de enseñanza implementados de la fracción como resultado de una cantidad de magnitud, podemos afirmar que en este último modelo estos significados han sido expresados por un número similar de alumnos que los obtenidos en las fichas referidas a la magnitud longitud (ficha 3) o las referidas a la magnitud superficie (ficha 10 y 11). En estas fichas, y en las fichas 26 y 27, menos de la mitad de los alumnos de ambos grupos sabe expresar correctamente el significado de los dos términos de la fracción.

Sin embargo, se observa una mejoría en la capacidad de expresión de algunos alumnos conforme se ha ido desarrollando la secuencia de enseñanza, de modo que en ellos se percibe un progreso en la conceptualización de la fracción como resultado de una medida de cantidad de magnitud. En efecto, podemos comparar las respuestas dadas por la alumna A13 en las fichas 3, 11 y 27 sobre el significado del numerador y denominador de la fracción:

Significado del denominador.-

"La subunidad que has usado" en la ficha 3 cuando la longitud el listón era $\frac{5}{4}$ de unidad.

"En cuantos trozos tienes que partir la unidad" en la ficha 10 cuando la superficie de la cartulina era $\frac{15}{8}$ de unidad.

"Las veces que has fraccionado la unidad" en la ficha 23 cuando debía calcular los $\frac{3}{7}$ de una bolsa con 245 canicas.

Significado del numerador.-

"Cuantas pajitas has usado" en la ficha 3 cuando la longitud el listón era $\frac{5}{4}$ de unidad.

"El numero que tienes que usar" en la ficha 10 cuando la superficie de la cartulina era $\frac{15}{8}$ de unidad.

"Las veces que coges la cantidad que está fraccionada" en la ficha 23 cuando debía calcular los $\frac{3}{7}$ de una bolsa con 245 canicas.

En la producciones de esta alumna se percibe una mayor precisión terminológica según ha ido realizando tareas. Por ejemplo, en la ficha 3 emplea el término de subunidad que ha sido utilizado en la secuencia de enseñanza para referirnos a uno de fraccionamientos iguales de la unidad y, por lo tanto, la subunidad no es 4. En todo caso, podría haber escrito que la unidad la había fraccionado en 4 partes iguales.

Valoración
En las fichas 26 y 27 se ponen en juego conocimientos de naturaleza diferente: conceptos y procedimientos. Así, cuando los alumnos calculan la fracción de una cantidad discreta utilizan un conocimiento procedimental, y entonces obtienen mayor nivel de éxito que cuando, en las mismas fichas, son preguntados por el significado del numerador y denominador de la fracción. En ese momento se evalúa el conocimiento conceptual que los alumnos tienen del significado de la fracción y, en consecuencia, la tarea les resulta más compleja.

Es importante tener en cuenta la diferente naturaleza de los contenidos para interpretar los porcentajes de éxito tan dispares obtenidos por los alumnos cuando responden a varios apartados de una misma tarea. Como se ha indicado con anterioridad la tasa de éxito de la ficha 27 baja en el grupo 4º A del 85% al 45% ; y del 75% al 25% en el grupo de 4º B, dependiendo del tipo de conocimiento que interviene en la realización de la tarea.

Toma de decisiones
Aunque la secuencia de enseñanza relativa a la fracción ha concluido, el equipo investigador recomienda a los profesores tutores de ambos grupos que propongan a los alumnos, en otros momentos de período lectivo, algunas tareas similares a las de la Propuesta Didáctica para consolidar los aprendizajes realizados por los escolares.

ANEXO II.2: DIARIO DE CLASE DEL SEGUNDO CICLO Y DE LA PRIMERA ETAPA

Día 2-11-2000 (Primera sesión)

Plan previsto.

En esta sesión se repasa el concepto de fracción con significado de medida. Los resultados obtenidos en la evaluación realizada en los primeros días lectivos de este curso que evalúa los aprendizajes que sobre el concepto de fracción han adquirido los alumnos, después de la enseñanza recibida durante el curso pasado, muestra que no tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones. Por este motivo hemos diseñado tres sesiones de enseñanza del concepto de fracción equivalente.

Ejecución

El profesor ha recordado a los alumnos los siguientes aspectos referidos a la fracción como medida de cantidades de longitud:

1. La necesidad de tener una unidad de medida.
2. Cuando el resultado de la medida no es un número natural se precisa disponer de subunidades de la unidad que se obtienen al fraccionar en partes iguales la unidad de medida.
3. Con la ayuda del material (cañas de plástico) se ha ejemplificado la obtención de algunas fracciones unitarias.
4. Los alumnos han medido un listón de madera de longitud 3/4 unidad. Este listón ha servido de ayuda para realizar la ficha previa nº 1 en la que se solicita encontrar fracciones equivalentes a la fracción 3/4.

Los alumnos de los dos grupos de 5º curso han realizado las fichas previas 1 y 2 que tienen una estructura semejante. Al comienzo de la siguiente sesión se realizará una evaluación conjunta de la segunda ficha, en la que se propone encontrar fracciones equivalentes a 2/3.

Aspectos actitudinales

En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

Variaciones entre los alumnos que participan en la experimentación del Primer y Segundo Ciclo

Mantenemos la misma asignación de códigos a los alumnos que han participado en la experimentación de 4º curso. No obstante, cabe indicar que ha habido variaciones en los alumnos que participan en la experimentación.

Cinco alumnos no van a participar en la experimentación por diferentes motivos: 4 alumnos (A41, A42, A43 y A44) han abandonado el Centro de Enseñanza antes de comenzar 5º curso y uno (A45) repite 4º curso.

Por contra, destacamos que otros 5 alumnos, a los que designamos con los códigos A48, A49, A50, A51 y A52, se incorporan a la experimentación porque se han matriculado en el C.E.I.P. "Tío Jorge".

Asistencia de alumnos

Dos alumnos del grupo de 5º A faltan a clase (A03 y A47), en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Para hallar fracciones equivalentes a una dada los alumnos suelen proceder fraccionando por la mitad la longitud de la subunidad, expresada por el denominador de la fracción dada. Posiblemente actúan de esta manera porque perciben con más claridad que al fraccionar en dos partes iguales la subunidad se necesitan colocar el doble de subunidades; mientras que no admiten como técnica posible la realización de otros fraccionamientos.

Los alumnos manejan con soltura la regla de obtención de fracciones equivalentes, aunque muestran una tendencia muy marcada a multiplicar el numerador y denominador de la fracción por dos.

La mayoría de los alumnos saben escribir 4/6 como fracción equivalente de 2/3. De los 22 alumnos del grupo 5º A que realizan la ficha previa nº 2, 19 alumnos encuentran que 4/6 es equivalente a 2/3, y de éstos 12 encuentran además que 6/9 es equivalente a 2/3 y uno escribe que 8/12 es equivalente a 2/3. En el grupo 5º B los 22 alumnos que realizan la ficha escriben que 4/6 como fracción equivalente de 2/3, y 13 alumnos encuentran que 8/12 es equivalente a 2/3 y 4 alumnos escriben que 6/9 es equivalente a 2/3. Se observa que los alumnos de 5º B utilizan como estrategia de obtención de fracciones equivalentes la sucesiva duplicación de los numeradores y denominadores.

Los alumnos tienen dificultades para justificar en términos del modelo la equivalencia de las fracciones 2/3 y 4/6. Muy pocos alumnos justifican la equivalencia. Posiblemente las dificultades se deban a problemas de expresión más que de comprensión.

Sólo la alumna A10 razona en términos del modelo:

"Porque si coges un tercio, la mitad es un sexto y si coges dos sextos es un tercio. Por lo tanto, dos tercios es igual a cuatro sextos".

Y dos alumnas del grupo 5º B hacen un esfuerzo por justificar la equivalencia:

"Porque si lo partes por la mitaz $\frac{1}{3}$ son sextos" (alumna A04)

"Porque los tercios se parten por la mitad y te salen son sesto. Y son dos y dos cuatro" (alumna A18)

<u>Valoración</u>
Aunque los alumnos parecen manejar la regla de obtención de fracciones equivalentes conviene seguir incidiendo en el significado de la fracciones equivalentes y en procedimientos más sistemáticos de obtención de fracciones equivalentes como multiplicar el numerador y denominador por diferentes números naturales consecutivos.

<u>Toma de decisiones</u>
En la secuencia de enseñanza correspondiente a esta sesión estaba previsto ejemplificar con material (cañas) que la fracción 6/9 es equivalente a 2/3. No se ha podido verificar la equivalencia utilizando material porque ha faltado tiempo. Con esta actividad comenzaremos la siguiente sesión con la intención de justificar el procedimiento de obtención de fracciones equivalentes a una dada consistente en multiplicar el numerador y denominador por un número que no sea necesariamente dos (en este caso será tres).

Día 3-11-2000 (Segunda sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Realizar la evaluación conjunta de la ficha previa nº 2
2º Presentar la ficha previa nº 3 y proponer su resolución como trabajo para casa. La ficha consiste en construir un mantel de superficie 3/2 y hallar diversas fracciones equivalentes a esta fracción. El material utilizado, folios, permite que los alumnos trabajen esta ficha fuera del aula.
3º Realizar la ficha previa nº 4 para introducir la estrategia de hallar fracciones equivalentes con un mismo denominador común. Como los alumnos han resuelto la ficha sin utilizar el concepto de equivalencia de fracciones, el profesor propone resolver de nuevo la ficha como trabajo para casa, después de proceder a su resolución en la pizarra.

<u>Ejecución</u>
La mitad de la duración de la sesión se ha dedicado a realizar la evaluación conjunta de la ficha previa 2 y presentar la ficha previa 3. Para orientar a los alumnos en esta última ficha, que se propone como trabajo para casa, el profesor ha comprobado en el aula que los alumnos saben construir un mantel de superficie 3/2 de unidad.
En la segunda mitad de la sesión se aborda la ficha previa nº 4 en la que se deben comparar las fracciones 3/4 y 2/3. El profesor aprovecha el momento de la evaluación conjunta de la ficha para exponer las posibles estrategias de resolución:

1. Utilizar el material (cañas) para construir segmentos de longitud las fracciones dadas.
2. Utilizar el material para trabajar la superficie y construir manteles de cantidades de superficie las fracciones dadas.
3. Utilizar gráficos que representan las fracciones dadas.
4. Pensar en la fracción unitaria que es el complemento de la unidad y comparar las fracciones unitarias. Se observa que esta estrategia es de ámbito local y que sólo la ha mencionado una alumna del grupo 5º A (A09)
5. Hallar fracciones equivalentes a ambas fracciones.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos del grupo 5º A han estado más inquietos de lo habitual. Al comienzo de la sesión han mostrado su desagrado por el cambio realizado en su horario que les afecta a la materia de plástica. También ha podido influir que es viernes (último día lectivo de la semana) y el mal comportamiento de tres alumnos (A16, A28 y A29) que el profesor ha censurado varias veces durante la sesión. En el grupo 5º B no ha habido ninguna incidencia.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A han faltado a clase dos alumnos (A46 y A37), y en el grupo 5º B una alumna (A04).

Aspectos relacionados con la comprensión
Para resolver la ficha previa nº 4 que consiste en comparar cantidades expresadas por fracciones los alumnos utilizan como estrategia el uso de material (cañas) o la realización de gráficos. Cuando el profesor comenta a los alumnos las limitaciones de estas estrategias (necesidad de disponer de material, dificultades con la realización de gráficos si las fracciones están próximas) y les pide que busquen otros procedimientos de resolución, sólo un alumno del grupo 5º B (A01) propone encontrar fracciones equivalentes a las fracciones que se van a comparar de modo que tengan el mismo denominador.

El profesor ha escrito en la pizarra fracciones equivalentes a 3/4 y 2/3 utilizando subunidades de longitud 1/12 u. Como algunos alumnos no comprenden la razón de elegir subunidades de esta longitud el profesor propone la utilización de material. La ejemplificación con material de esta estrategia de resolución se ha visto dificultada debido a la falta de subunidades de caña de longitud 1/12 de unidad.

Valoración
El concepto de equivalencia de fracciones es clave para el desarrollo posterior de la secuencia de enseñanza de la fracción. Por otra parte, sabemos que presenta dificultades conceptuales como que una misma fracción pueda ser expresada de múltiples formas; y las derivadas de la búsqueda de fracciones equivalentes a unas dadas con la condición de que tengan los mismos denominadores.

Toma de decisiones
El profesor va a preparar 300 subunidades de longitud 1/12 u, que junto con las subunidades de longitud 1/3 y 1/4, permitirá justificar la elección de este denominador común. Después propondrá la resolución de las fichas previas 5 y 6.

Día 6-11-2000 (Tercera sesión)
Plan previsto.
1º Recoger las tarjetas de evaluación de las fichas previas nº 3 y nº 4.
2º Realizar una evaluación conjunta de las fichas previas nº 3 y 4. En el caso de la ficha nº 4 se desea ejemplificar la equivalencia con la ayuda de material.
3º Realizar la ficha previa nº 5 para ejercitar la estrategia de hallar fracciones equivalentes con un mismo denominador común

Ejecución
La mayor parte de la sesión se ha empleado en realizar la evaluación conjunta de la fichas previas 3 y 4.
Se ha procedido a evaluar la ficha 3 con la ayuda de varios manteles de superficie 3/2 u y la unidad.

Para realizar la evaluación de la ficha 4 el profesor ha preparado trozos de caña de 1/12 de subunidad para que los alumnos visualicen, con la ayuda del material, las equivalencias

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \text{ y } \frac{3}{4} = \frac{9}{12}.$$

Después, aprovechando que los alumnos tenían en sus mesas las subunidades de longitud 1/12 u. se les ha propuesto la resolución de la siguiente ficha, análoga a la que se estaba evaluando:

"*Dados dos listones: uno de longitud* $\frac{3}{4}$ *y otro de longitud* $\frac{5}{6}$ *de la caña unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*"

No ha quedado tiempo para realizar la ficha previa nº 5 en la que se deben comparar dos fracciones, 4/5 y 5/6. Los alumnos reciben la tarjeta de evaluación correspondiente a esta ficha con el encargo de resolverla como trabajo para casa. La tarjeta se recogerá al comienzo de la siguiente sesión y después se procederá a su evaluación.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Sin embargo, algunos alumnos no realizan las fichas que debían resolver en sus casas o bien dicen que las han dejado olvidadas en sus hogares.
Para recordar a estos alumnos la obligación de resolver y traer a clase las fichas propuestas el profesor investigador, de acuerdo con los profesores de la asignatura, deciden que estos alumnos utilicen parte del

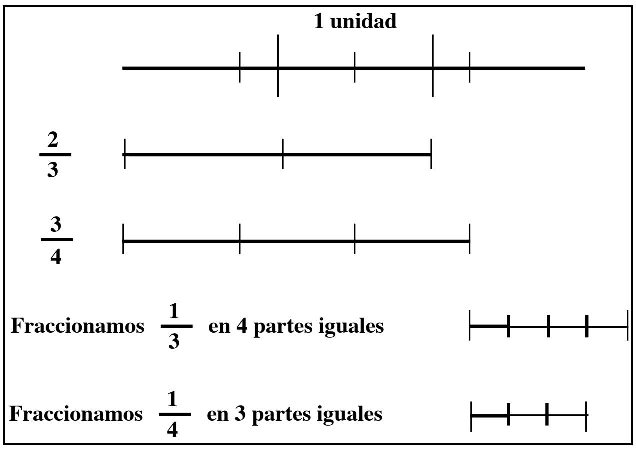
tiempo del recreo en resolver las fichas bajo la tutela del profesor investigador. Durante el recreo de este día el profesor ha ayudado a los alumnos A16, A23, A28 y A29 del grupo 5º A.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A faltan a clase tres alumnos (A46, A47 y A37); y en el grupo 5º B falta a clase el alumno A12.

Aspectos relacionados con la comprensión
Cuando los alumnos realizan las fichas en sus casas es difícil determinar el origen de los errores detectados: si son debidos a dificultades conceptuales o bien son achacables al poco interés mostrado en resolver la ficha.
Una cuarta parte de los alumnos del grupo 5º A ha tenido dificultades para resolver correctamente la ficha previa nº 3. Los alumnos de 5º A que resuelven mal o de modo incompleto la ficha 3 son: A03, A22, A23, A32, A48 y A51.
La mitad de los alumnos del grupo 5º B no han resuelto correctamente la ficha 3. Unos alumnos (A02, A15, A19, A24, A38, A50) han cometido errores y otros (A06, A20, A30, A49) no la han entregado.

Sobre los resultados de la ficha previa nº 4 destacamos un aspecto relevante: los alumnos perciben la equivalencia de fracciones como un concepto difícil y muy alejado de sus intuiciones primitivas. Después de dedicar dos sesiones de clase a trabajar la equivalencia de fracciones los alumnos se resisten a utilizar este concepto en la resolución de la ficha nº 4: sólo una quinta parte de los alumnos de 5º B y la tercera parte de 5º A utilizan la noción de equivalencia.
Sin embargo, como ha ocurrido en la ficha anterior, cuando el profesor ha explicado la estrategia de resolución de la ficha previa nº 4 basada en la búsqueda de fracciones equivalentes a aquellas que se desean comparar, los alumnos dan muestras de comprender el procedimiento utilizado. Ahora bien, cuando asumen, en solitario, la resolución de la ficha no se muestran seguros con esta estrategia y prefieren representar gráficamente las fracciones y proceder a una comparación visual de la cantidad de magnitud dibujada.
Somos conscientes de que la estrategia basada en la equivalencia de fracciones requiere capacidades cognitivas superiores porque requiere realizar operaciones simbólicas tales como la búsqueda de un denominador común. Por ello se espera que esta situación de desequilibrio conceptual que muestran los alumnos sea transitoria.
Un caso interesante observado en la respuestas dadas a la ficha previa nº 4 lo aporta la alumna A31 que utiliza la equivalencia para igualar numeradores en lugar de denominadores y, después, razona adecuadamente en términos del modelo.
La utilización de materiales para ejemplificar las acciones realizadas en la resolución de la ficha previa nº 4 ha mejorado la comprensión de la estrategia para comparar fracciones basada en la búsqueda de fracciones con un denominador común. Veamos cómo se ha utilizado el material:

Cada alumno ha recibido una caña unidad, tres subunidades de 1/3 u, cuatro subunidades de 1/4 u y doce subunidades de 1/12 u. Los alumnos reciben la consigna de colocar las doce subunidades de 1/12 u, una a continuación de la otra, en paralelo a la caña unidad. Del mismo modo formará dos "trenes" más: uno con tres subunidades de 1/3 u. y otro con cuatro subunidades de 1/4 u.
Después, les dice que quiten una subunidad de longitud 1/3 u. de un tren y otra subunidad de 1/4 u del otro tren. Les pide que indiquen las longitudes de los "trenes" y que expresen estas cantidades de longitud con subunidades de 1/12 de la unidad:



Los alumnos observarán que la longitud 2/3 u se cubre con 8 subunidades de 1/12 u. y que la longitud 3/4 u se cubre con 9 subunidades de 1/12 de la unidad. Se espera que los alumnos comprendan que la subunidad que han elegido es de longitud 1/12 u. porque cabe un número entero de veces en las subunidades de longitud 1/3 u. y 1/4 u.

Toma de decisiones
Se va a dedicar una sesión más a comparar fracciones para consolidar la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes. Primero se va a realizar la evaluación conjunta de la ficha previa nº 5 que los alumnos deben traer resuelta de sus casas y después se propondrá la resolución de las ficha previa nº 6. Esta última ficha la utilizaremos para evaluar los aprendizajes realizados durante estas sesiones.

También proponemos como trabajo para que los alumnos lo realicen en sus casas la resolución de una nueva tarea que denominamos *Ficha Previa 7* y cuyo enunciado mostramos a continuación:

a) "Ordena las fracciones $\frac{4}{3}$ *y* $\frac{5}{6}$ *de unidad".*

b) "Encuentra OCHO fracciones que estén comprendidas entre $\frac{5}{6}$ *y* $\frac{4}{3}$ *de unidad. Indica cómo has obtenido las fracciones"*

Día 7-11-2000 (Cuarta sesión)
Plan previsto.
1º Recoger la tarjeta de evaluación de las ficha previa nº 5.
2º Realizar la evaluación conjunta de la ficha previa nº 5.
3º Realizar la ficha previa nº 6 para ejercitar la estrategia de hallar fracciones equivalentes con un mismo denominador común.
4º Proponer como trabajo para casa la resolución de la ficha previa nº 7. Cada alumno recibe una tarjeta de evaluación de esta ficha.

Ejecución
La sesión de clase, en ambos grupos, se desarrolla según el plan previsto.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Sin embargo, algunos alumnos no realizan las fichas que debían resolver en sus casas o bien dicen que las han dejado olvidadas en sus hogares.

En el grupo 5º A las alumnas (A03, A46 y A47) no entregan la ficha nº 5, y en el grupo 5ª B no entregan la ficha los alumnos A02, A06, A12, A20, A38, A39, A30 y A49.

Durante el recreo el profesor ha ayudado a los alumnos A06, A12, A38, A39 y A49.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A asisten todos los alumnos, y en el grupo 5º B falta a clase el alumno A02.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados de la ficha previa nº 5 que los alumnos han realizado en sus casas son los siguientes:

	5º A		**5º B**	
	Sol. correcta	**Sol. incorrecta**	**Sol. correcta**	**Sol. incorrecta**
Equivalencia	**11**	**0**	**10**	**1** (A52)
Gráficos	**3** (A21, A22, A29)	**1** (A28)	**0**	**1** (A26)
No razona	**6** (A05, A16, A32, A36, A40, A51)		**4** (A04, A17, A18, A25)	
No entrega	**3** (A03, A46, A47)		**8** (A02, A06, A12, A20, A38, A39, A49, A52)	

Se observa que la mitad de los alumnos de ambos grupos utilizan correctamente el concepto de equivalencia, pero la otra mitad no sabe resolver la ficha.

Durante la evaluación de la ficha previa nº 5 el alumno A36, que todavía no utiliza la equivalencia de fracciones, aporta una estrategia válida, aunque de ámbito local, basada en la comparación de las fracciones unitarias que son el complemento de la unidad de las fracciones dadas. La alumna A24 parece expresar, por escrito en la tarjeta de evaluación de la ficha, la misma estrategia.

Vamos a analizar los resultados de la ficha de evaluación nº 5BIS que son más significativos que los obtenidos en la ficha anterior porque los alumnos la resuelven de modo individual en el aula, sin influencias externas, y por otro lado cabe suponer que están en mejores condiciones para resolver con éxito la ficha dado que acaban de recibir explicaciones sobre la resolución de la ficha previa nº 5. Los datos son los siguientes:

	5º A		**5º B**	
	Sol. correcta	**Sol. incorrecta**	**Sol. correcta**	**Sol. incorrecta**
Equivalencia	**16**	**3** (A28, A32, A51)	**13**	**3** (A17, A19, A38)
Gráficos	**1** (A05)	**1** (A36)	**0**	**1** (A12)
No razona	**3** (A03, A16, A47)		**4** (A04, A20, A30, A49)	
No entrega	**0**		**3** (A02 falta a clase), (A39, A52 en blanco)	

Las dos terceras partes de los alumnos de 5º A resuelven la ficha utilizando la estrategia recomendada: la equivalencia de fracciones.

Estos resultados muestran que va creciendo el número de alumnos utiliza con éxito estrategias más abstractas como la equivalencia de fracciones. Después de cuatro sesiones de clase más de la mitad de los alumnos de ambos grupos dan muestras de comprender y aplicar el concepto de equivalencia de fracciones.

Valoración
Hemos dedicado una sesión más de las previstas inicialmente para repasar el concepto de equivalencia de fracciones. Los alumnos recibieron enseñanza de este concepto durante la fase de implementación de la secuencia didáctica en 4º curso. En el curso pasado los alumnos han percibido la equivalencia como la posibilidad de expresar una misma fracción de diferentes formas pero no han adquirido un sentido operativo de este concepto. Pensamos que los alumnos de cuarto curso no disponen de capacidades cognitivas suficientes para afrontar la enseñanza de la equivalencia de fracciones a nivel simbólico. A la vista de esos resultados parciales pensamos que es aconsejable, en cuarto curso, la introducción de este concepto con la ayuda de materiales pero no se espera que los alumnos hagan los progresos necesarios para utilizar la equivalencia como estrategia para comparar fracciones.

Los resultados obtenidos por los alumnos de 5º curso en estas cuatro sesiones son esperanzadores. Es bien cierto, que en este momento de la secuencia de enseñanza hay alumnos de 5º curso que no tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones, pero ha habido un avance en el número de alumnos que asumen como estrategia de resolución de problemas la equivalencia de fracciones. Como la noción de equivalencia está presente en el cálculo operatorio con fracciones, tomamos como decisión continuar con la propuesta de enseñanza porque este concepto se reforzará con la resolución de las fichas sobre operaciones con fracciones.

Día 8-11-2000
Los alumnos realizan una excursión a Sierra de Guara. No hay sesiones de clase.

Día 9-11-2000 (Quinta sesión)
Plan previsto.
1º Recoger la tarjeta de evaluación de las ficha previa nº 7 y evaluar de modo individual, con cada alumno,

las soluciones que éste ha escrito.
2º Comenzar la enseñanza de la suma de fracciones con la realización de la ficha nº 1.
3º Evaluación de la ficha nº 1.
4º Resolución y evaluación de la ficha nº 2.

Ejecución
La sesión ha transcurrido según la planificación prevista.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Sin embargo, pocos alumnos han traído resuelta la ficha previa nº 7 y, algunos de ellos, no la han resuelto correctamente. El profesor devuelve la ficha a estos últimos y recuerda a los restantes que deben traerla resuelta en la siguiente sesión.
Durante el recreo el profesor ha orientado a las alumnas A05, A23, A32 y A53 en la resolución de la ficha previa nº 7.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A faltan los alumnos A03, A46, A47 y A36; en el grupo 5º B falta la alumna A15.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos del grupo 5º A resuelven correctamente la ficha nº 1 y sólo el alumno A02 de 5ª B no resuelve la ficha. Cabe suponer que este alumno se ha sentido inseguro al afrontar la resolución de la ficha a sabiendas de que faltó a la sesión de clase del día anterior.

Podemos concluir que los alumnos comprenden el significado de la suma de fracciones, cuando se enfrentan a situaciones problemáticas como la descrita en la ficha nº 1. Todos los alumnos han identificado el problema como de suma de fracciones y algunos de ellos (siete en 5º A) han expresado la representación canónica de la operación:

$$\frac{4}{3} + \frac{2}{3}$$

Sorprende que ningún alumno, ni siquiera los que utilizan la representación canónica de la operación suma, han procedido sumando numeradores y denominadores. Pensamos que la no aparición de esta estrategia errónea se debe a una buena comprensión del significado de la fracción. Así, los alumnos perciben $\frac{4}{3}$ como 4 subunidades de longitud 1/3 u, y saben que si añaden 2 subunidades de longitud 1/3 u, tendrán 6 subunidades de longitud 1/3 u.

Ahora bien, debemos realizar dos consideraciones:
1º referida al significado de la suma de fracciones: algunos alumnos han necesitado utilizar cañas de longitud 1/3 de unidad. Hay alumnos que se sienten muy inseguros si no utilizan material.
2º referida al concepto de equivalencia de fracciones: sólo una alumna (A10) indica que la fracción 6/3 u. es equivalente a 2 unidades.

Los alumnos de ambos grupos resuelven con éxito la ficha 2, sólo dos alumnas del grupo 5º A (A22 y A23) y un alumno del grupo 5º B (A02) dan respuestas erróneas.

En cuanto a las estrategias utilizadas se observan diferencias sustanciales entre los dos grupos: más de la mitad de los alumnos del grupo 5º A, trece, utilizan la equivalencia de fracciones, mientras que una tercera parte de los alumnos del grupo 5º B, siete, utiliza esta estrategia. Diez alumnos de este grupo han utilizado material para resolver la ficha.

La mitad de los alumnos de ambos grupos no identifican la operación realizada como una suma de fracciones aunque hayan resuelto correctamente la ficha.

Un dato relevante es que muy pocos alumnos (A11, A14 y A34) son conscientes de que están utilizando la estrategia basada en el concepto de fracción equivalente. Los otros alumnos que utilizan la equivalencia no la reconocen como estrategia de resolución en la tarjeta de evaluación de la ficha.

Valoración
En este momento de la secuencia de enseñanza no consideramos preocupante que los alumnos no identifiquen las estrategias que utilizan. Algunos alumnos que utilizan la equivalencia de fracciones no lo hacen constar en la tarjeta de evaluación posiblemente porque no son conscientes de haberla utilizado. En

este caso lo importante es que utilicen tal estrategia y vayan abandonando gradualmente la dependencia del manejo de materiales manipulativos.

Toma de decisiones
Continuar con la planificación prevista.

Día 10-11-2000 (Sexta sesión)
Plan previsto.
1º Recoger la tarjeta de evaluación de las ficha previa nº 7 y evaluar de modo individual, con cada alumno, las soluciones que éste ha escrito.
2º Resolución y evaluación de la ficha nº 3
3º Resolución y evaluación de la ficha nº 4.

Ejecución
El profesor ha recogido la ficha previa nº 7 a los alumnos que la han resuelto correctamente. Como bastantes alumnos tienen dificultades para resolverla el profesor hace una intervención general, dirigida a todos los alumnos de la clase, para explicar el procedimiento de búsqueda de fracciones comprendidas entre $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{3}$. Después les propone intentar de nuevo trabajar esta ficha en sus casas.

Se ha resuelto la ficha 3 y se ha realizado, en el aula, la evaluación conjunta de esta ficha. Sin embargo, el tiempo dedicado a orientar la resolución de la ficha previa nº 7 ha impedido resolver la segunda parte de la ficha nº 4 y proceder posteriormente a la evaluación conjunta de esta ficha. El profesor recoge esta ficha que entregará a los alumnos, al comienzo de la siguiente sesión, para que terminen de resolverla en el aula.

En la evaluación de la ficha 3 el profesor ha descrito las tres estrategias de resolución de la ficha: con el material asociado a la magnitud longitud, con representaciones gráficas o utilizando la equivalencia de fracciones. El profesor recomienda la utilización de esta última estrategia y para encontrar el denominador común a las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ propone establecer las siguientes cadenas de equivalencias:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Sin embargo, pocos alumnos han traído resuelta la ficha previa nº 7 y, algunos de ellos, no la han resuelto correctamente. El profesor devuelve la ficha a estos últimos y recuerda a los restantes que deben traerla resuelta en la siguiente sesión.
Durante el recreo el profesor ha ayudado a las alumnas A03, A07 y A09 en la resolución de la ficha nº 4.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A faltan los alumnos A28, A46 y A36; en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Vamos a valorar los resultados de la ficha 3 en la que los alumnos debían resolver un problema mediante la suma de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

Si nos atenemos a las soluciones dadas por los alumnos, los resultados son excepcionales. Sólo dos alumnos del grupo 5º A (A03 y A51) y uno de 5º B (A12) no resuelven correctamente la ficha. Ahora bien, estos resultados pueden ser engañosos. Más de la mitad de los alumnos que resuelven correctamente la ficha (19 en 5º A y 23 en 5º B) utilizan cañas para resolver la ficha. En efecto, 10 alumnos de 5º A y 15 de 5º B utilizan esta estrategia.

Hasta ahora la utilización de material ha tenido efectos positivos en la mejora de la comprensión de los alumnos. Sin embargo hemos detectado en esta ficha interferencias, entre los alumnos, en el momento en el que están resolviendo el problema como consecuencia de la utilización del material. Describimos este fenómeno: el alumno que no sabe resolver la ficha utilizando la equivalencia de fracciones o realizando gráficos solicita material y pide al profesor el tipo de subunidad que necesita. Se espera que el alumno le pida una subunidad de longitud $\frac{1}{2}$ unidad y otra de longitud $\frac{1}{3}$ unidad. El profesor le dará, también, una caña de longitud la unidad. El alumno muestra una buena comprensión cuando solicita al profesor SUBUNIDADES DE LONGITUD $\frac{1}{6}$ unidad, y con este material construye un tren con 5 subunidades de este tipo que iguala la longitud del tren formado por la caña de $\frac{1}{2}$ colocada a continuación de la de $\frac{1}{3}$. Hasta aquí la descripción ideal para que surja el aprendizaje en una situación de resolución de problemas con la ayuda de material manipulativo. El efecto pernicioso aparece cuando los alumnos, que no han reflexionado suficientemente sobre como deben fraccionar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ para solicitar al profesor una subunidad de longitud menor pero que esté contenida un número entero de veces en ambas subunidades, escuchan que otros piden "cañas de $\frac{1}{6}$". Estos alumnos piden y reciben subunidades de $\frac{1}{6}$ y comprueban que colocando 5 de éstas igualan la longitud $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; creen haber resuelto la ficha y no son conscientes de que la ayuda recibida les ha impedido realizar aprendizajes.

Los profesores hemos observado esta distorsión en ambos grupos aunque no sabemos precisar con certeza qué alumnos han sufrido estas interferencias. Para evitar tales influencias externas se va a restringir, en las siguientes fichas, la utilización de material.

También se ha observado que los alumnos identifican con dificultad la operación suma aunque sepan resolver la ficha: sólo 8 alumnos de 5º A y 6 de 5º B reconocen expresamente que está realizando una suma de fracciones. En este momento de la secuencia de enseñanza no consideramos preocupante que los alumnos no identifiquen la operación, porque dan muestras de comprender las acciones asociadas a la operación suma de fracciones.

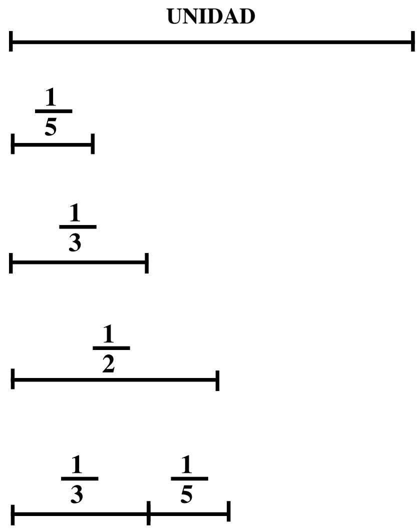
Toma de decisiones
Continuar con la planificación prevista. Como los alumnos no han dispuesto del tiempo suficiente para terminar de resolver la ficha nº 4 el profesor recoge esta ficha que terminarán de resolverla al comienzo de la siguiente sesión.

Día 13-11-2000 (Séptima sesión)

Plan previsto.
1º Recoger la tarjeta de evaluación de las ficha previa nº 7 y evaluar de modo individual, con cada alumno, las soluciones que éste ha escrito.
2º Terminar la resolución y proceder a evaluar la ficha nº 4
3º Resolución y evaluación de la ficha nº 5.

Ejecución
El profesor ha recogido la ficha previa nº 7 de los alumnos que la han traído resuelta y ha evaluado en su presencia la ficha. La mayoría de los alumnos que la entregan han encontrado bastantes fracciones intermedias y sólo deben realizar pequeñas correcciones. Si la ficha no está correctamente resuelta el profesor le propone intentar de nuevo resolverla como trabajo para casa.

En la evaluación de la ficha nº 4 el profesor ha mostrado la conveniencia de utilizar las representaciones gráficas, aún en este tipo de problemas que trabajan magnitudes difíciles de dibujar como la capacidad. En tal caso se aconseja pensar en otra magnitud como la longitud o la superficie, y proceder del siguiente modo:



Las representaciones gráficas permiten valorar la magnitud de las cantidades que intervienen en el problema y conjeturar resultados. En nuestro caso podemos adelantar que $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}>\frac{1}{2}$. La propuesta de enseñanza contempla la utilización de la equivalencia de fracciones para sumar las fracciones $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$, y después para comparar la suma con $\frac{1}{2}$. Esta técnica se ha ejemplificado en la pizarra.

La resolución y evaluación de la ficha nº 4 ha llevado más tiempo del inicialmente esperado. Por este motivo no se afronta la resolución de la ficha nº 5 en el aula. El profesor da indicaciones para facilitar su resolución como trabajo para casa, con el encargo de traer cumplimentada, a la siguiente sesión, la tarjeta de evaluación de esta ficha.

Aspectos actitudinales

En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Durante el recreo el profesor ha ejemplificado con materiales de capacidad las cantidades que aparecen como soluciones en la resolución de la ficha nº 4. Asisten y ayudan a traspasar líquidos de unas botellas a otras algunos alumnos de los dos grupos de docencia de 5º curso.

Asistencia de alumnos

En el grupo de 5º A faltan los alumnos A47 y A36 ; en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

El trabajo de búsqueda de fracciones intermedias que se propone en la ficha previa nº 7, que antecede al concepto de densidad de fracciones, les resulta muy complicado a los alumnos. Estos saben resolver fichas en las que les dan dos fracciones con la consigna de ordenarlas. Sin embargo, se muestran muy inseguros en fichas, como esta, que tienen un abanico más amplio de estrategias de resolución aunque todas se basen en la equivalencia de fracciones.

Hasta este momento han resuelto con éxito la ficha previa nº 7 nueve alumnos de 5º A (A05, A07, A09, A10, A11, A23, A28, A31 y A33) y once del grupo 5º B (A01, A12, A14, A17, A18, A19, A24, A34, A38 , A49 y A52).

Las fracciones que aparecen en la ficha 4 expresan cantidades de capacidad. En la primera pregunta del problema los alumnos deben realizar la suma $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$. Y en la segunda parte deben explicar si la cantidad de capacidad de la suma que acabamos de escribir cabe en una botella de $\frac{1}{2}$ litro.

El rendimiento de los alumnos en las dos preguntas que se formulan en la ficha es alto, con mejores resultados en la primera que en la segunda pregunta. En el grupo 5º A 19 y 13 alumnos, respectivamente, escriben la solución correcta; en el grupo 5º B son 16 y 11 alumnos los que resuelven correctamente la ficha sin recibir ayuda de los profesores.

El dato más significativo es que todos los alumnos utilizan como estrategia la equivalencia de fracciones. Sólo tres alumnos, una del grupo 5º A (A10) y dos del grupo 5º B (A15 y A49) realizan gráficos para responder a la segunda pregunta de la ficha.

Para disponer de los datos más reales posibles hemos considerado con el código 0, no realizada la ficha, las respuestas de los alumnos que han recibido ayudas de los profesores. Teniendo en cuenta este aspecto y que los todos los alumnos han utilizado la estrategia basada en el cálculo simbólico, podemos afirmar que los resultados son muy satisfactorios.

Aunque la estrategia utilizada por los alumnos es propia del nivel simbólico, éstos han entendido bien el enunciado del problema gracias a que el profesor, cuando ha presentado la ficha, les ha mostrado a los alumnos botellas de $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ litro de capacidad.

La percepción visual de la cantidades de magnitud que expresan las fracciones que intervienen en los problemas les ayuda a los alumnos en la resolución del problema. En este caso, se hace más necesario porque la magnitud capacidad no tiene referencias visuales tan claras como la longitud o la superficie.

Se observa que los alumnos identifican con dificultad la operación suma aunque sepan resolver la ficha, si bien los resultados mejoran con respecto a la los de la ficha anterior: 14 alumnos de 5º A y 11 de 5º B reconocen expresamente que están realizando una suma de fracciones. Algunos alumnos afirman que la operación es la equivalencia de fracciones (A33), otros que se trata de la multiplicación (A37, A25) debido a las acciones que realizan para obtener fracciones equivalentes, otros formulan y realizan correctamente la suma de fracciones y en la tarjeta de evaluación indican que no han realizado ninguna operación (A05). Cuando el profesor realiza la evaluación de las fichas muestra la operación que resuelve el problema pero no comenta estos aspectos porque se pretende estudiar la evolución del proceso que siguen los alumnos en la identificación de las operaciones sin que reciban instrucciones específicas sobre el modo de cumplimentar la tarjeta de evaluación.

Cuando el profesor ha presentado la ficha nº 5 los alumnos encuentran dificultades para entender el enunciado del problema. El intercambio de opiniones con los alumnos deja entrever que las dificultades radican en dos puntos:
1º desconocen la unidad de superficie utilizada: el metro cuadrado
2º la cantidad 5 metros cuadrados que aparece en el enunciado no la identifican con una fracción.

Toma de decisiones
Hemos dedicado más tiempo del previsto a la resolución y evaluación conjunta de la ficha 4. Hemos presentado la ficha nº 5 que se debía resolver en el aula pero como no tenemos tiempo suficiente entregamos a cada uno de los alumnos 5 manteles cuadrados de 20 x 20 cm. que representan la unidad de superficie junto con la tarjeta de evaluación de la ficha y reciben el encargo de traerla resuelta a la siguiente sesión. La ficha 5BIS que estaba pensada para que los alumnos la realizaran en sus casas se trabajará en el aula durante la siguiente sesión.

Día 14-11-2000 (Octava sesión)
Plan previsto.
1º Recoger la tarjeta de evaluación de las ficha previa nº 7 y evaluar de modo individual, con cada alumno, las soluciones que estos hayan escrito.
2º Recoger y evaluar la ficha nº 5
3º Resolución y evaluación de la ficha nº 5BIS.

Ejecución
Se cumple el plan previsto. Los alumnos del grupo 5º A reciben el encargo de resolver la resta de fracciones:

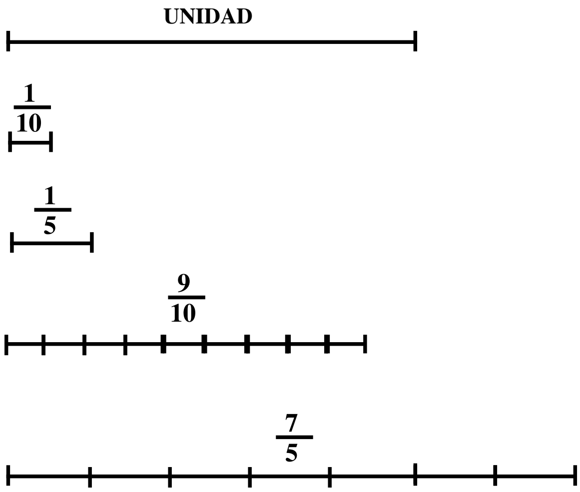
$$\frac{7}{5} - \frac{9}{10}$$

y además que inventen el enunciado de un problema que se resuelva mediante la anterior resta de fracciones. En el grupo 5º B no ha dado tiempo para plantear esta ficha de ejercitación del procedimiento de cálculo de la resta de fracciones.

En la evaluación de la ficha nº 5 el profesor ha utilizado tres estrategias: utilizar material (manteles), hacer gráficos (con longitud) y la equivalencia de fracciones.

Cuando procede a evaluar la ficha nº 5BIS, antes de utilizar la equivalencia de fracciones, el profesor recomienda representar gráficamente las fracciones que aparecen en el enunciado de la ficha. Sólo de esta forma pueden hacerse una idea de las cantidades que representan las fracciones y entender el enunciado del problema , antes de proceder a resolverlo.

Así:



Aspectos actitudinales
Hemos observado un comportamiento pasivo en algunos alumnos del grupo 5º B que se ha manifestado en dos momentos próximos en el tiempo: descuido al olvidar en sus casas la tarjeta de evaluación de la ficha 5 y falta de esfuerzo en la ficha 5BIS cuya resolución se ha afrontado en el aula. Estos alumnos son: A04, A20, A25, A26 y A38

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A falta el alumno A36; en el grupo 5º B faltan los alumnos A08 y A52

Aspectos relacionados con la comprensión
Vamos a centrarnos en analizar los resultados de la ficha 5BIS dado que ésta ha sido resuelta en el aula mientras que la ficha 5 ha sido trabajada fuera de ella y, por lo tanto, cabe suponer que los resultados están condicionados por factores externos que dificultan una valoración del grado de consecución de las unidades de comprensión. No obstante, estudiados los resultados de la ficha nº 5 hacemos las siguientes anotaciones:

1º Sobre los hábitos de estudio de los alumnos: cuando éstos se llevan fichas para resolverlas en sus casas algunos de ellos olvidan traerlas o las traen sin resolver. En este caso han sido 4 alumnos del grupo 5º A (A03, A21, A22 y A51) y 5 del grupo 5º B (A01, A04, A20, A25 y A26)

2º Sobre el nivel de éxito obtenido en la ficha: los 17 alumnos de cada grupo que la entregan dan la respuesta correcta. Ahora bien, 4 alumnos de 5º A (A13, A16, A29 y A37) y otros 4 de 5º B (A02, A12, A24 y A39) no justifican, cometen errores en la respuesta o han recibido ayuda de otras personas.

3º Sobre las estrategias utilizadas por los alumnos: existen diferencias sustanciales entre ambos grupos. A los alumnos de 5º B se les ha entregado manteles de 20 x 20 cm. para facilitarles la resolución del problema. Sin embargo, sólo un alumno de este grupo (A02) dice haberlos utilizado; el resto procede mediante la equivalencia de fracciones. En el otro grupo la presencia de material si que contribuye a que aparezcan otras estrategias diferentes de la equivalencia. Así:

Utilizan material 2 alumnos (A28 y A29)
Utilizan gráficos 6 alumnos (A05, A07, A16, A23, A35 y A37)
Utilizan la equivalencia de fracciones 9 alumnos (A09, A10, A11, A13, A31, A32, A33, A40 y A48)

A falta de otra explicación debemos pensar que bastantes alumnos de 5º B se han dejado olvidados los manteles en el aula y no han podido utilizar otras estrategias más acordes con su desarrollo cognitivo. A pesar de ello los resultados obtenidos son buenos, descontando la ayuda exterior que eventualmente hayan recibido.

Se concluye que cuando los alumnos disponen de material manipulativo utilizan una mayor variedad de estrategias, de modo que utilizan aquellas con las que se sienten más seguros. En este caso, algunos alumnos del grupo 5º A han abandonado la equivalencia de fracciones porque han utilizado gráficos posiblemente evocados por las acciones que han realizado con los manteles.

4º Sobre la identificación de la operación que resuelve el problema: 9 alumnos del grupo 5º A y 15 del grupo 5º B reconocen el significado de resta de fracciones. Recordemos que este es el primer problema de resta de fracciones que resuelven los alumnos. Este dato indica que los alumnos comprenden el significado de la resta de fracciones. El que haya más alumnos de 5º B que hayan reconocido la operación resta puede ser debido a la mayor utilización de la equivalencia de fracciones que obliga a representar de forma simbólica las fracciones y por lo tanto las relaciones que se establecen entre ellas.

Centrándonos en la ficha nº 5BIS los resultados siguen siendo satisfactorios aunque bajan con respecto a los obtenidos en la ficha anterior: en el grupo 5º A 17 alumnos saben resolver y explicar correctamente la solución, mientras que en el grupo 5º B hay 12 alumnos que actúan del mismo modo. En esta ficha se ha tomado la decisión de no dejar utilizar material manipulativo a los alumnos. De este modo se les ha forzado a utilizar el concepto de equivalencia.

En estas circunstancias no nos sorprendente que sólo una alumna (A35) haya resuelto el problema con la ayuda de gráficos. El resto de los alumnos ha utilizado la equivalencia de fracciones. La escasa utilización de gráficos hace que los alumnos afronten la ficha en el nivel simbólico, sin disponer de referencias visuales de las cantidades de longitud que indican las fracciones del enunciado del problema. Los alumnos se han situado en un nivel de abstracción superior, que no es el apropiado en este momento del proceso de instrucción, y que provoca la aparición de errores: alumnos que suman las fracciones en lugar de restarlas, alumnos que restan en el orden equivocado, etc. Para evitar estos errores se debe contextualizar el problema: realizar dibujos de las fracciones, ordenar las fracciones, realizar una estimación a priori de la magnitud del resultado y, finalmente, evaluar la solución en términos del modelo que se presenta en la propuesta didáctica.

Se observa que unos pocos alumnos han sumado las fracciones en vez de restarlas (A12 y A38); mientras una alumna (A15) ha restado las fracciones en el orden inapropiado.

Otra deficiencia observada en un grupo más numeroso de alumnos (A05, A16, A28, A29, A35, A37 y A40 y A19) consiste en que no reconocen la operación resta de dos fracciones. Estos alumnos resuelven la ficha con una resta, que simbolizan como $\frac{7}{5} - \frac{9}{10}$, y sin embargo en la tarjeta de evaluación escriben que no han realizado ninguna operación. Otros confunden la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes que se basa en la multiplicación con la operación que resuelve el problema.

Aparece otro resultado esperado: la práctica totalidad de los alumnos no saben simplificar fracciones. Muy pocos alumnos indican que 5/10 o bien 25/50 es igual a 1/2. Esta situación era previsible porque los alumnos no han recibido enseñanza de la técnica de simplificación. Hasta ahora, han recibido instrucción de la técnica de obtención de fracciones equivalentes basada en la multiplicación del numerador y denominador por un mismo número; sin embargo, no se les ha adiestrado en la modificación de la técnica basada en la división porque requiere conocimientos previos de divisibilidad que se estudiarán en el próximo curso. En este momento, los alumnos recibirán enseñanza de la técnica de simplificación.

En consecuencia, pensamos que las dificultades observadas por los alumnos en la ficha 5BIS tienen su origen en que las fracciones involucradas en el enunciado de la ficha no tienen para los alumnos una referencia tan clara de la cantidad de magnitud que representan como las implicadas en otras fichas anteriores. En efecto, los alumnos que no han percibido rápidamente que $\frac{7}{5}$ es mayor que $\frac{9}{10}$ comienzan a operar sin tener una conciencia clara de las cantidades de magnitud con las que están operando.

Para ayudar a los alumnos en la resolución de las tareas se propone recordar a los alumnos, en el momento de presentarles la ficha, la consigna: "antes de operar con símbolos realiza un dibujo de cada una de las fracciones que aparecen en el enunciado del problema".

Esta pauta es conocida por los alumnos porque es la que sigue el profesor cuando realiza la evaluación conjunta de las fichas: primero representa gráficamente las fracciones, identifica la operación que resuelve el problema y después aplica la equivalencia para calcular el resultado. Ahora lo que se pretende es que los alumnos no abandonen la estrategia de realizar gráficos porque les ayuda a identificar la operación que resuelve el problema y además les sirve de guía cuando operan con símbolos.

Toma de decisiones
Continuar con la planificación prevista. Y proponer en la siguiente sesión la resolución de fichas de ejercitación de la técnica operatoria de la resta de fracciones. Para ello se diseña la ficha 6BIS, que se compone de dos cuestiones:

1º. Compara las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$. Después réstale a la fracción mayor la fracción menor.

2º. Compara las fracciones $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{4}$. Después réstale a la fracción mayor la fracción menor

También hemos modificado la ficha nº 6, de modo que las cantidades que antes eran $\frac{5}{6}$ y 1 Kgr. ahora sean $\frac{6}{5}$ y 2 kgrs., respetando el resto del texto del enunciado del problema.

Día 15-11-2000 (Novena sesión)
Plan previsto.

1º Recoger, en el grupo de 5º A, el ejercicio que propone resolver la resta de fracciones $\frac{7}{4}$ - $\frac{3}{8}$.

2º Resolución y evaluación de la ficha nº 6
3º Resolución y evaluación de la ficha nº 6BIS.

Ejecución
Se cumple el plan previsto, aunque no ha habido tiempo para evaluar la ficha nº 6BIS. La evaluación se realizará al comienzo de la siguiente sesión.

Aspectos actitudinales
La mayoría de los alumnos de 5º A traen resuelto el cálculo de la resta propuesto el día anterior. Durante el recreo ayudo a resolver la ficha 6BIS a las alumnas A03, A46 y A31 y al alumno A39 que ha mostrado actitud muy pasiva en la sesión de clase de hoy.

Asistencia de alumnos
Asisten todos los alumnos del grupo de 5º A; en el grupo 5º B falta el alumno A52.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados de obtenidos en la ficha nº 6 son análogos a los obtenidos en las fichas anteriores. Se esperaba mejores resultados porque las fracciones que intervienen en la ficha expresan cantidades más sencillas de evaluar que las que aparecen en la ficha 5BIS. Sin embargo, los alumnos han tenido dificultades para comprender el enunciado del problema debido a dos motivos:

1º la estructura semántica del enunciado del problema. El enunciado del problema describe una acción aditiva (aceitunas que debe añadir) pero la operación que resuelve la ficha es una resta.

2º la magnitud que se trabaja en el problema es el peso. Esta magnitud no evoca a los alumnos imágenes mentales tan claras como la magnitud longitud o superficie. El profesor cuando ha presentado la ficha ha aconsejado que piensen en la magnitud longitud para representar gráficamente las fracciones y valorar la cantidad de magnitud que representan. A pesar de estas recomendaciones algunos alumnos no han sabido considerar el kilogramo como unidad de medida y, mucho menos, realizar una transferencia de significados entre la magnitud peso y longitud, y asemejar un kilogramo con la unidad de longitud: la caña unidad.

La observación de lo acontecido en el grupo de 5º A muestra que algunos alumnos (A21, A22, A29, A48) que han solicitado materiales podrían tener éxito utilizando estrategias más avanzadas, como la realización de gráficos o la utilización de la equivalencia. Por ello el profesor no ha permitido la utilización de materiales cuando los alumnos de 5º B han afrontado la resolución de esta ficha. Así, pues las condiciones en las que los alumnos de 5º B han resuelto la ficha son más exigentes, y ello queda reflejado en los resultados que han obtenidos los alumnos de este grupo.

Mostramos a continuación los resultados de la ficha de trabajo nº 6:

	5º A		5º B	
	Sol. correcta	**Sol. incorrecta**	**Sol. correcta**	**Sol. incorrecta**
Totales	**20**	**4**	**14**	**9**
Material	**6** (A21, A22, A29, A32, A37, A48)	**2** (A07, A51)	**0**	**0**
Gráficos	**6**	**2** (A23, A36)	**5**	**3** (A06, A08, A19)
Equivalencia	**8**	**0**	**9**	**2** (A20, A38)
No la resuelven	**0**		**4** (A04, A39, A30, A49)	

Pensamos que gran parte de las dificultades observadas en la resolución de la ficha 6 radica en problemas para comprender la formulación de la ficha más que en errores de cálculo operatorio. Esta conjetura se confirma al estudiar los resultados obtenidos por los alumnos de los dos grupos en la ficha 6BIS. Sólo 7 alumnos del grupo 5º A (A03, A07, A28, A32, A47, A36, A51) y 4 de 5º B (A02, A04, A26, A39) no saben resolver la ficha 6BIS. Bien es verdad que a los alumnos que no han terminado la ficha 6BIS se les ha permitido llevársela a su casa con el encargo de traerla resuelta a la sesión siguiente. No obstante, la mayoría de los alumnos han dado muestras de conocer y aplicar la técnica operatoria basada en la equivalencia de fracciones.

Toma de decisiones.
La ficha 6 el la última para trabajar la operación resta de fracciones. Se trata de una ficha de evaluación que debería tener otra formulación semántica de modo que:
1º apareciera el significado de la resta de manera más nítida.
2º la magnitud que se trabaje en el problema sea la longitud o la superficie, no el peso.

Día 16-11-2000 (Décima sesión)
Plan previsto.
1º Evaluación de la ficha nº 6BIS
2º Resolución y evaluación de las fichas nº 7 y nº 7BIS.

Ejecución
Se cumple el plan previsto.
Al comienzo de la sesión se recoge la ficha 6BIS a los alumnos que no terminaron la ficha en la sesión del día anterior. En el aula del grupo 5º A el profesor solicita a un alumno (A29), que dice no saber hacer la ficha, que salga a la pizarra para resolver la primera cuestión.

Los alumnos abordan la resolución conjunta de las fichas 7 y 7BIS y, después de algunas intervenciones del profesor, se realiza una evaluación conjunta de la ficha. En la evaluación se enfatiza en la necesidad de realizar gráficos y/o de representar la suma de la misma cantidad de magnitud con tantos sumandos iguales como veces se repita el objeto que tenga el atributo medible.

Aspectos actitudinales
Los alumnos que debían resolver la ficha 6BIS la entregan al profesor. Este les ofrece ayudarles durante el recreo, si lo desean, a los pocos alumnos que no la han resuelto correctamente la ficha. Durante el recreo ayudo a resolver la segunda cuestión de la ficha 6BIS a las alumnos A03, A05, A32 y A36.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A falta las alumnas A07, A22 y A47 ; en el grupo 5º B falta el alumno A52.

Aspectos relacionados con la comprensión
Las fichas 7 y 7BIS han desconcertado a los alumnos de ambos grupos. Hemos detectado dos comportamientos que pasamos a analizar:

1º La escasa utilización de estrategias: sólo 3 alumnas (A03, A23 y A15) utilizan la suma reiterada (escribiendo 12 veces consecutivas la fracción) y una alumna de 5º A (A35) realiza un gráfico. Cabe la posibilidad que la ausencia de estrategias se deba a que en el problema se trabaja la magnitud peso que es de difícil representación gráfica. O también puede deberse a la preponderancia que conceden los alumnos a la estrategia basada en la equivalencia de fracciones.

2º Los alumnos que identifican la operación que resuelve el problema como la multiplicación, confunden el cálculo de esta operación con la técnica para encontrar fracciones equivalentes.

Así, la mayoría de los alumnos escriben como solución de la ficha nº 7 la fracción $\frac{24}{36}$. Aunque reconocen la operación $\frac{2}{3}$ x 12, escriben:

$$\frac{2}{3} \text{ x } 12 = \frac{2x12}{3x12} = \frac{24}{36}$$

Este error puede deberse a una mala simbolización de la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes, que ha sido detectada en algunos alumnos. Ahora bien, otros alumnos que no utilizaban una simbolización incorrecta también han planteado inicialmente la misma respuesta errónea.

Para "desmontar" esta concepción errónea de los alumnos, el profesor ha realizado una intervención durante la fase de realización de la ficha. Sin duda, las explicaciones aportadas por el profesor van a condicionar los resultados de la ficha. La intervención comienza con la propuesta de resolución de un problema más sencillo: "¿Cuánto pesan 2 latas de $\frac{2}{3}$ de Kgr. cada una?

Los alumnos afirman que deben sumar las fracciones, y el profesor escribe en la pizarra:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

El profesor pregunta al alumno A52 que calcule el resultado de la suma, y éste responde que es $\frac{4}{6}$.

Con la ayuda del material de longitud el profesor construye un segmento de longitud $\frac{4}{6}$ y argumenta con los alumnos del aula que esta fracción es equivalente a $\frac{2}{3}$. después escribe en la pizarra que:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Y pregunta al alumno si es posible que: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

El alumno parece convencerse que $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Y en ese momento el profesor propone que ellos mismos se pregunten qué ocurre si compran 3, 4, 5, ... , hasta 12 latas.

Tal vez los alumnos hayan identificado y simbolizado excesivamente pronto la operación multiplicación. Deberían haber pasado previamente por la estrategia de sumar reiteradamente la cantidad de magnitud (fracción) tantas veces como indique el multiplicador (número de veces).

Salvadas estas dificultades, con la ayuda de los profesores, la mayoría de los alumnos han resuelto correctamente las fichas. Se ha puesto de manifiesto otra dificultad que ya fue comentada en fichas anteriores: desconocimiento de la técnica de simplificación de fracciones. En este caso los alumnos han resuelto esta nueva dificultad haciendo grupos de tantas subunidades como indica el denominador para obtener unidades enteras. Algunos de ellos ha utilizado la división entera sin dar muestras de una adecuada comprensión de la introducción de esta técnica operatoria. Tanto es así, que bastantes alumnos identifican la división como la operación que resuelve la ficha.

Toma de decisiones.
Continuar con la planificación prevista. Y proponer en la siguiente sesión la resolución de una ficha para que los alumnos la trabajen en sus casa durante el fin de semana para reforzar la operación multiplicación de una fracción por un número natural. Para ello se diseña una ficha titulada "operaciones con fracciones", que se compone de tres cuestiones:

1º. ¿Cuántos litros de agua mineral hay en una caja que contiene 12 botellas de $\frac{3}{2}$ de litro?

2º. ¿Cuántos litros de batido de chocolate hay en un paquete que contiene 6 botellas de $\frac{1}{5}$ de litro?

3º. El paso de un adulto es $\frac{3}{4}$ de metro y el un niño es $\frac{2}{3}$ de metro. Se pregunta:

a) ¿Cuál es la diferencia entre el paso del adulto y el paso del niño?

b) ¿Cuántos metros avanza el adulto en 12 pasos?

c) ¿Cuántos metros avanza el niño en 12 pasos?

A la vista de los resultados obtenidos, pensamos que la propuesta didáctica debería incluir una ficha anterior a la nº 7 sobre la multiplicación por un natural más sencilla, de manera que no trabaje la magnitud masa y que el número natural o multiplicador sea inferior a la decena. Con esta última condición se pretende que los alumnos escriban, al menos, la solución como suma de fracciones iguales.

Día 17-11-2000 (Undécima sesión)
Plan previsto.
1º Resolución y evaluación de la ficha nº 8.
2º Resolución y evaluación de la ficha nº 9.
3ª Entregar la ficha "operaciones con fracciones" para que los alumnos la resuelvan durante el fin de semana como trabajo para casa.

Ejecución
Se cumple el plan previsto. En el grupo 5º B no ha habido tiempo para trabajar la ficha nº 9.
Al final de la sesión los alumnos reciben la ficha "operaciones con fracciones" para que la resuelvan durante el fin de semana como trabajo para casa.

Aspectos actitudinales
Algunos alumnos del grupo 5º A (A28 y A29) no han mostrado buena disposición al trabajo. El segundo alumno ha sido amonestado por su mal comportamiento. Este alumno ha permanecido castigado unos minutos en el aula, durante el recreo. En ese tiempo el profesor le ha explicado la ficha resuelta en clase y le ha aconsejado que mejore su actitud en clase.

En otros alumnos de ambos grupos se percibe cansancio, que se manifiesta en la desgana con que realizan las fichas. Afortunadamente se trata de un fenómeno que sólo se produce los viernes y además no afecta a todos los alumnos. En el grupo 5º A son A28 y A51 y los alumnos del grupo 5º B son A02, A06, A38, A39 y A52

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos de ambos grupos.

Aspectos relacionados con la comprensión
La mayoría de los alumnos escribe $\frac{3}{10} \times 25 = \frac{75}{10}$ pero no justifican la operación, ni comentan el significado que asignan a cada factor de la multiplicación. La respuesta más usual consiste en escribir una multiplicación sin dar ninguna explicación del razonamiento utilizado.

Esto hace que la evaluación de las estrategias utilizadas por los alumnos resulte complicada. Se propone modificar la tarjeta de evaluación de modo que los alumnos escriban los significados de los términos que intervienen en las operaciones multiplicación de una fracción por un natural y división de una fracción por un natural.

Los resultados de la primera pregunta de la ficha nº 8 son los siguientes:

	5º A Sol. correcta	5º A Sol. incorrecta	5º B Sol. correcta	5º B Sol. incorrecta
Totales	**18**	**6**	**15**	**8**
Escriben la multiplicación	**16**	**0**	**15**	**3** (A12, A26, A38)
Suma reiterada	**2** (A22, A35)	**1** (A05)	**0**	**0**
No la resuelven o reciben ayuda	**5** (A07, A28, A32, A47, A51)		**5** (A02, A06, A20, A39, A52)	

Los alumnos no han querido dibujar 25 losetas de $\frac{3}{10}$ de unidad y, por lo tanto, han utilizado representaciones simbólicas que no les evoca ninguna estrategia de resolución. Sería deseable que hubieran utilizado estrategias como la representación gráfica y la suma reiterada. Pensamos que algunos alumnos no están todavía preparados para abandonar el modelo y trabajar en el nivel simbólico.

Los resultados obtenidos por los alumnos en la segunda y tercera pregunta son peores. Las razones del bajo rendimiento en esta parte de la ficha pueden ser:

1º En la resolución del problema interviene la solución de la primera parte de la ficha.

2º Dificultad para evaluar la longitud $\frac{75}{10}$ m. para compararla con 8 m.

3º Fatiga o /y poco interés de algunos alumnos que se manifiesta al no escribir nada en la tarjeta de evaluación de la ficha.

En el grupo 5º A hay 11 alumnos (A03, A09, A10, A11, A13, A16, A31, A33, A35, A40 y A48) que resuelven correctamente la segunda pregunta de la ficha nº 8 y en el grupo 5º B son 5 los alumnos (A01, A14, A15, A27 y A34) que realizan con éxito la ficha.

Valoración.
La operación multiplicación de una fracción por un número natural creemos que no tiene excesiva dificultad conceptual. Sin embargo, los alumnos han abandonado demasiado pronto el modelo debido a que el dato de los enunciados de los problemas referido al número que actúa como factor multiplicador es demasiado grande para realizar gráficos o para proceder simbolizando la multiplicación como suma reiterada.

Toma de decisiones.
Deberemos modificar las fichas que trabajan este concepto e introducir una nueva para ir gradualmente aumentando la magnitud del factor multiplicador.

Día 20-11-2000 (Duodécima sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la ficha "operaciones con fracciones"
2º Resolución de la ficha nº 9 en el grupo 5º B y resolución de la ficha nº 10 en el grupo 5º A

Ejecución
En el grupo 5º B no ha habido tiempo para trabajar la ficha nº 9. Los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la ficha y un mantel de superficie unidad con el encargo de traerla cumplimentada a la siguiente sesión.

Comienza la sesión de clase a las 9 horas con el grupo 5º B. Toda la sesión se ha dedicado a resolver la ficha "operaciones con fracciones".

Han salido a la pizarra alumnos que no han sabido resolver los problemas planteados en esta ficha. Así, el alumno A52 resuelve el primer problema. Para descartar una mala interpretación del enunciado, el profesor le pide al alumno que lo lea en alto y que explique lo que le preguntan. Como el alumno se sigue mostrando pasivo el profesor le propone una estrategia: resolver un problema más sencillo que se enunciaría: ¿cuántos litros de agua hay en dos botellas de $\frac{3}{2}$ de litro?. Con la ayuda de sus compañeros resuelve el problema.

El problema nº 2 lo resuelve, en la pizarra, el alumno A38. Este alumno propone como método de cálculo de la suma de fracciones sumar numeradores y denominadores. El profesor ejemplifica, de nuevo, el absurdo al que se llega cuando se opera con este procedimiento erróneo: el total sería igual a una de las partes, siendo la otra no nula.

El apartado a) y b) del problema nº 3 lo resuelve el alumno A08, que suele realizar correctamente las fichas, pero se ha mostrado muy inseguro en las últimas fichas porque ha faltado varios días a clase. El apartado c) lo resuelve, con grandes dificultades, la alumna A25.

Como no ha habido tiempo para afrontar la ficha nº 9, los alumnos reciben la hoja de evaluación de esta ficha junto con unidades de superficie, de papel, con el encargo de resolverla en sus casas y traerla resuelta a la sesión del día siguiente.

En el grupo 5º A se proceda a realizar la evaluación conjunta de la ficha "operaciones con fracciones". Ninguno de los alumnos utiliza el procedimiento de cálculo erróneo consistente en sumar numeradores y denominadores para calcular la suma de fracciones. Para resolver los tres problemas salen a la pizarra los alumnos que han mostrado alguna dificultad en la resolución: los alumnos A03, A22 y A11 respectivamente.

La evaluación de los problemas de la ficha "operaciones con fracciones" sirve para mostrar las dos estrategias de resolución:

1º. realización de gráficos y medida del resultado

2º. realizar una suma de sumandos repetidos tantas veces como indica el factor.

En el grupo 5º A la evaluación de esta ficha ha concluido antes que el otro grupo y los alumnos han tenido tiempo para afrontar la ficha nº 10. La evaluación de esta ficha se realizará al comienzo de la siguiente sesión.

Aspectos actitudinales

Algunos alumnos del grupo 5º A (A03, A16, A21, A28, A32 y A51) y del grupo 5º B (A02, A06, A26, A38, A39, A30 y A49) no han traído resuelta la ficha "operaciones con fracciones".
Sin embargo, los alumnos de los dos grupos muestran buena disposición al trabajo en el aula que se manifiesta en el alto grado de atención que han prestado a las explicaciones del profesor y a las intervenciones de los compañeros.

Asistencia de alumnos

En el grupo de 5º A falta el alumno A36; en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Algunos alumnos han abandonado, demasiado pronto, la estrategia basada en representaciones gráficas. Tal vez hayan estado condicionados por el aumento del número de cantidades de magnitud. Por ejemplo, en el problema nº 1 habría que representar gráficamente la capacidad de 12 botellas. Como consecuencia algunos alumnos han resuelto los problemas operando con símbolos sin haber alcanzado el nivel cognitivo adecuado.

Por ejemplo, el alumno A06 muestra escasa comprensión del problema nº 1. Afirma que hay 18 litros de agua en una caja, pero escribe que:

$$\frac{3}{2} \text{ x } 12 = \frac{36}{24}$$

O la alumna A25 que escribe en la resolución del problema nº 3 que:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{1}$$

A pesar de los errores que acabamos de mostrar, la ficha ha sido resuelta correctamente por la mayoría de los alumnos.

Los alumnos del grupo 5º A han resuelto las fichas 9 y 10 sin que el profesor les haya comentado la existencia de una operación denominada división de una fracción por un número natural. Como era de esperar la mayoría de los alumnos no ha identificado la operación a pesar de que todos los alumnos han sabido resolverlas.

Algunos alumnos (A33) dicen que en la ficha nº 9 que para resolverlo "he hecho lógica". El desarrollo de la secuencia de enseñanza ha requerido realizar acciones que consisten en fraccionar cantidades expresadas por fracciones unitarias. Sin duda estos fraccionamientos que han realizado hacen que los alumnos perciban las fichas 9 y 10 como evidentes, dado que en ambas se propone el fraccionamiento de 1/2 en dos partes y en tres partes iguales, respectivamente.

Día 21-11-2000 (Decimotercera sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º Evaluar la ficha nº 10
2º Resolver y evaluar la ficha nº 11

En el grupo 5º B:
1º Recoger y evaluar la ficha nº 9
2º Resolver y evaluar la ficha nº 10

Ejecución
Se cumple con el plan previsto.
Como la implementación de la secuencia de enseñanza lleva un desfase aproximado de media sesión entre los dos grupos de docencia vamos a especificar, para cada grupo, aquello que ha ocurrido en cada aula.

En el grupo 5º A el profesor solicita a la alumna A33 que explique la respuesta que daba en la ficha nº 9 cuando justifica que la mitad de 1/4 es 1/8 "por lógica". La alumna afirma que lo sabe sin más. El profesor le pregunta a ella y al resto del grupo si sabe cuanto es la tercera parte de 1/3. Los alumnos contestan de inmediato que es 1/9. El profesor decide plantear otra división más compleja y les pregunta: ¿cuánto es la cuarta parte de 1/5? Los alumnos dicen, con acierto, que es 1/20. Cuando se les pregunta cómo lo han calculado algunos dicen: "multiplicando 4 por 5".

Nuestra propuesta de enseñanza se caracteriza porque las reglas de cálculo que aplican los alumnos sean comprendidas por éstos. Es más, se pretende que las reglas las justifiquen los alumnos mediante las acciones que estos realizan con el modelo en el marco de la resolución de problemas. Por este motivo, el profesor decide verificar en el modelo que "la mitad de 1/4 es 1/8" y pide a la alumna A31, que había resuelto mal la ficha nº 10, que salga a la pizarra y utilizando gráficos justifique este resultado.

Después el profesor solicita a la alumna A07 que resuelva, utilizando gráficos, la ficha nº 10 en la que se pregunta calcular "la tercera parte de 1/2". También solicita al alumno A37 que, en la pizarra, justifique que "la cuarta parte de 1/5 es 1/20". La estrategia utilizada en estos casos ha sido la realización de gráficos con el modelo longitud sin utilizar otras estrategias, más avanzadas, que aparecerán más tarde en esta misma sesión.

Cuando los alumnos del grupo 5º A han resuelto la ficha nº 11 se ha procedido a su evaluación. En este momento el profesor explica el significado de división de una fracción entre un número natural ejemplificando diversas situaciones de medida al fraccionar en partes iguales y en situaciones de reparto.

Se ha resuelto la ficha nº 11 utilizando dos estrategias que han utilizado los alumnos y que son:

a) realizar gráficos
b) utilizar la equivalencia de fracciones para disponer, en el numerador de la fracción, de tantos trozos como indica el número natural que actúa como divisor.

La estrategia basada en gráficos ha sido descrita por el profesor utilizando el modelo longitud y el modelo superficie. En este momento les ha recordado a los alumnos que en el curso pasado habían medido la superficie $\frac{3}{4}$: 2. La alumna A10 indica que ha utilizado otra estrategia y sale a exponerla en la pizarra. Esta estrategia se basa en la equivalencia de fracciones. Finalmente, el profesor utiliza un mantel de medida la unidad de superficie para ejemplificar el reparto de 3 subunidades de medida $\frac{1}{4}$ entre dos personas.

Al comienzo de la sesión de clase en el grupo 5º B los alumnos entregan la ficha nº 9. Tres alumnos (A06, A39 y A52) no la traen resuelta. La alumna A04, que hace mal la tarea, sale a la pizarra y la resuelve con la ayuda de sus compañeros.

El grupo afronta la resolución de la ficha nº 10. Cuando se procede a su evaluación el profesor explica el significado de la operación división y, posteriormente, el alumno A30 sale a la pizarra para describir la estrategia de resolución basada en la realización de dibujos con el modelo superficie. Otro alumno (A26) describe la misma estrategia con el modelo longitud. Finalmente, el alumno A01 explica a sus compañeros la estrategia basada en la equivalencia de fracciones.

El profesor ejemplifica esta última estrategia utilizando un mantel de papel de superficie la unidad planteando una situación problemática de reparto: "Quieres repartir un mantel de superficie 1/2 unidad entre 3 personas. ¿Qué superficie recibe cada persona?"

Hemos observado un fenómeno de "contaminación exterior" que pasamos a comentar: dos alumnas (A17 y A18 de 5º B) han recibido enseñanza del procedimiento de cálculo para la división. Durante la resolución de la ficha nº 10 las alumnas aplican correctamente el algoritmo y saben la respuesta pero no son capaces de utilizar ninguna de las estrategias que, tal vez, sin este "conocimiento externo" hubieran sido capaces de desarrollar

Aspectos actitudinales
Tres alumnos del grupo 5º B (A06, A39 y A52) no traen resuelta la ficha nº 9. Sin embargo, los alumnos de los dos grupos muestran buena disposición al trabajo en el aula que se manifiesta en el alto grado de atención que han prestado a las explicaciones del profesor y a las intervenciones de los compañeros.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A falta el alumno A36; en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
La estrategia dominante utilizada por los alumnos para dividir una fracción por un número natural es fraccionar la cantidad de magnitud en tantas partes iguales como indica el número natural y, después medir la cantidad de magnitud resultante.

Cuando la fracción es unitaria como ocurre en las fichas 9 y 10 la mayoría de los alumnos conocen a priori el resultado de la división porque han tenido experiencias de este tipo manipulando con tiras de papel en el curso pasado, y también realizando gráficos en diversas fichas que han resuelto durante este curso, en las sesiones anteriores.

Se observa la tendencia de algunos alumnos a utilizar razonamientos aditivos cuando resuelven la ficha nº 9. Por ejemplo los alumnos A03, A16 y A29 escriben que la solución es 1/8 porque:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

Los alumnos dan muestras de comprender la estrategia basada en representaciones gráficas, así como las explicaciones dadas por el profesor sobre el significado de la operación división de una fracción por un número natural. En este momento, es prematuro pronunciarnos sobre el grado de comprensión de la estrategia basada en la equivalencia de fracciones.

Tres alumnos (A01, A09 y A34) utilizan la estrategia basada en la equivalencia de fracciones para resolver la ficha nº 9, aunque no la explican con detalle. De estos tres alumnos, sólo A01, sigue utilizando esta estrategia. El resto de los alumnos de ambos grupos utiliza como estrategia de resolución la realización de gráficos. También hay que decir no se ha ejemplificado la estrategia basada en la equivalencia de fracciones hasta después de que los alumnos hayan resuelto la ficha nº 10.

También se ha observado que algunos alumnos del grupo 5º B no han entendido el enunciado del problema de la ficha nº 9. Tal vez fuera conveniente otra redacción alternativa del enunciado de la ficha: "Tienes una bola de plastilina que pesa 1/2 de unidad. Si fraccionas la bola en 3 partes iguales obtienes tres bolitas de plastilina. ¿Cuánto pesa cada una de las tres bolitas de plastilina?"

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A en la ficha nº 10 muestran que todos los alumnos, excepto A31, saben dar la solución correcta. Sin embargo, la realidad es que 9 alumnos (A03, A07, A22, A23, A29, A46, A32, A33 y A36) no han justificado la solución o bien han recibido ayuda de los profesores o de sus compañeros. Los 12 alumnos restantes utilizan como estrategia de resolución la realización de dibujos, salvo la alumna A09 que utiliza la equivalencia de fracciones

Vamos a valorar los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B en la ficha nº 10. Si atendemos únicamente a la solución del problema los datos son engañosos: sólo 3 alumnos no dan la respuesta correcta (A12, A39 y A52). Sin embargo, se realiza una mejor valoración del nivel de comprensión si se observa las estrategias utilizadas por los alumnos. La mitad del grupo, 11 alumnos, justifica adecuadamente la solución del problema. Uno de ellos (A01) emplea la equivalencia de fracciones y el resto un gráfico. La otra mitad del grupo no indica la estrategia utilizada y dos alumnas (A17 y A18) emplean la regla tradicional que les han enseñado en su casa.

Cuando los alumnos de ambos grupos han resuelto la ficha nº 10 todavía no habían recibido enseñanza de la estrategia basada en la equivalencia. En estas condiciones, lo previsible es que utilicen estrategias basadas en representaciones gráficas.

En la resolución de la ficha nº 11 se observan los efectos de la acción de enseñanza al aumentar considerablemente el número de alumnos (A05, A09, A10, A11, A13, A16, A21, A28, A29, A33) que utilizan la equivalencia de fracciones; mientras que sólo dos alumnas (A07 y A35) mantienen la estrategia basada en la realización de representaciones gráficas. Una alumna (A40) utiliza una estrategia diferente: divide primero la fracción unitaria 1/4 y después triplica el resultado. Sorprende que haya tantos alumnos de este grupo que utilicen la última estrategia que se les ha presentado.

Toma de decisiones
Se observa que los alumnos van realizando progresos en la resolución de situaciones problemáticas de reparto o de fraccionamiento en partes iguales de un cantidades de magnitud. Los alumnos identifican la operación división por un número natural y calculan el resultado representando, mayoritariamente, la cantidad de magnitud, fraccionando o repartiendo y, finalmente midiendo la cantidad resultante. Pensamos que necesitan más experiencias de este tipo para que pasen a utilizar estrategias más avanzadas como la equivalencia de fracciones. Con esta finalidad introducimos una nueva ficha denominada 12BIS:

"*Un equipo de 4 atletas participa en una carrera de relevos que consiste en correr* $\frac{2}{5}$ *de kilómetro. Si los cuatro atletas recorren la misma longitud, expresa con una fracción la cantidad de longitud que recorre cada uno*"

Día 22-11-2000 (Decimocuarta sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º Resolver y evaluar la ficha nº 12
2º Resolver la ficha nº 12BIS
En el grupo 5º B:
1º Resolver y evaluar la ficha nº 11
2º Resolver la ficha nº 12

Ejecución
Los alumnos del grupo 5º A afrontan la resolución de la ficha 12. En la evaluación conjunta de la ficha colabora la alumna A32 para ejemplificar la estrategia basada en la equivalencia de fracciones. Sorprende que esta alumna, que suele obtener poco éxito en la resolución de tareas, haya comprendido y aplicado de forma tan rápida esta estrategia.

La alumna A03 sale a la pizarra para resolver la ficha utilizando gráficos con el modelo longitud. Y por último, el alumno A21 resuelve la ficha utilizando gráficos con el modelo superficie.

Después los alumnos afrontan la resolución de la ficha 12BIS. Bastantes alumnos terminan correctamente la ficha pero como algunos no la han podido resolver antes de terminar la sesión el profesor propone que la terminen en sus casa y que realicen el siguiente cálculo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

Los alumnos del grupo 5º B resuelven la ficha nº 11. Cuando se realiza la evaluación conjunta el profesor que observa que la alumna A20 no sabe calcular la suma de $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ le pide que salga a la pizarra. La alumna ejemplifica la estrategia basada en la realización de gráficos con el modelo superficie y con ayuda consigue calcular la suma de fracciones.

Para ejemplificar la estrategia basada en la equivalencia de fracciones que hasta ahora sólo utiliza el alumno A01 el profesor pide a la alumna A33 que salga a la pizarra en el convencimiento de que esta alumna ha utilizado esta estrategia. Sin embargo, la alumna realiza una variante de esta estrategia: utiliza la equivalencia y después un razonamiento aditivo. Afirma que la solución es $\frac{3}{8}$ porque:

$$\frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Después los alumnos afrontan la resolución de la ficha 12. Como algunos no la han resuelto antes de terminar la sesión el profesor propone que la terminen en sus casa y que realicen el siguiente cálculo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

Asistencia de alumnos

En el grupo de 5º A faltan los alumnos A47 y A36 ; en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B en la ficha nº 11 muestran que los alumnos de este grupo no utilizan la estrategia basada en la equivalencia a pesar de haberla ejemplificado, en la sesión anterior, durante la evaluación de la ficha nº 10. Sólo dos alumnos (A01 y A34) han utilizado esta estrategia, mientras que 12 alumnos han realizado con éxito la estrategia basada en la realización de gráficos. Ocho alumnos (A04, A12, A20, A26, A38, A39, A49 y A52) no justifican correctamente la respuesta o han necesitado ayuda para resolver la ficha.

A pesar de que los alumnos del grupo 5º B no se muestran seguros para utilizar la estrategia basadas en la equivalencia, los resultados de la ficha nº 11 han mejorado con respecto a los obtenidos en la ficha nº 10.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A en la ficha nº 12 muestran que los alumnos han abandonado la estrategia basada en la equivalencia de fracciones. Sólo cuatro alumnos (A09, A10, A11 y A32) utilizan esta estrategia frente a los diez alumnos que utilizaron esta estrategia para resolver la ficha nº 11, durante la sesión anterior. En aquella sesión se dio la circunstancia de que la alumna A10 y el profesor explicaron la estrategia basada en la equivalencia; y, pasados unos minutos, los alumnos resolvieron la ficha nº 11 en la que diez alumnos utilizaron la equivalencia de fracciones.

Este fenómeno indica que los alumnos son muy receptivos cuando reciben un estímulo próximo en el tiempo. Sin embargo, también se olvidan pronto de las estrategias que no han sido creadas por ellos y, en consecuencia, recelan de las estrategias impuestas por el profesor u otros alumnos. Para que un alumno asuma como propia una estrategia de resolución de un problema debe estar convencido de que obtiene una mejoría respecto a la estrategia utilizada hasta este momento.

Se observa una mejoría en las respuestas dadas por los alumnos del grupo 5º A en la ficha nº 12. El número de alumnos que ha necesitado ayuda o aporta una justificación incompleta ha bajado a 7 alumnos (A07, A23, A29, A46, A37, A48 y A52). Los restantes 11 alumnos resuelven con éxito la ficha utilizando gráficos, la mayoría con el modelo de superficie.

Toma de decisiones

Proponemos realizar una nueva ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones" que se compone de tres tareas:

1º. Para celebrar tu cumpleaños invitas a tus amigas a merendar pizza en tu casa. Sois 6 amigas, contándote tú. ¿Cuántas pizzas deberás comprar si quieres servir $\frac{2}{3}$ *de pizza a cada una?*

2º. Tres hermanos van a cenar. Tienen una tortilla de patata. Como dos de los hermanos se retrasan el *otro hermano se sienta a la mesa y come $\frac{1}{4}$ de tortilla. Los otros dos hermanos deciden repartirse, en partes iguales, la cantidad sobrante. Se pregunta:*

a) ¿Cuánta tortilla comerá cada uno de los hermanos que se han retrasado?

b) ¿Comen todos la misma cantidad de tortilla? ¿Cuánta tortilla comen unos más que el otro?

3º. Jaime come $\frac{1}{3}$ de tarta y su hermana Ángela la cuarta parte del resto. Se pregunta:

a) ¿Cuánta tarta come Ángela?

b) ¿Cuánta tarta comen entre los dos hermanos?

Día 23-11-2000 (Decimoquinta sesión)

Plan previsto.

En el grupo 5º A:

1º Recoger y evaluar la ficha nº 12BIS

2º Resolver la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones"

En el grupo 5º B:

1º Recoger y evaluar la ficha nº 12

2º Resolver y evaluar la ficha nº 12BIS

Ejecución

Todos los alumnos del grupo 5º A, salvo el A48, traen de sus casas resuelta la ficha nº 12BIS.

El alumno A37, que dice no saber operar la suma propuesta, sale a la pizarra y procede a realizar el cálculo.

Para realizar la evaluación conjunta de la ficha nº 12BIS el profesor solicita que la alumna A22, que no había justificado la solución de la ficha, salga a la pizarra y explique la estrategia utilizada. La alumna realiza un gráfico con el modelo superficie. Otra alumna (A35) ejemplifica la estrategia basada en gráficos con la magnitud longitud. Finalmente, el profesor comenta la estrategia basada en la equivalencia de fracciones.

Durante los 15 últimos minutos de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones". Cuatro alumnas (A09, A10, A35 y A40) resuelven correctamente los tres problemas de la ficha. Los demás alumnos reciben el encargo de traerla resuelta a la sesión.

A segunda hora de la mañana, comienza sesión de clase en el grupo 5º B. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la ficha nº 12 junto con el cálculo de la suma de fracciones $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$.

Se observan respuestas precipitadas y sin justificación alguna que muestran la desgana con que algunos alumnos realizan las fichas. Veamos la solución que aportan, sin justificación alguna, los siguientes alumnos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3}{9} \text{ (A02, A12)}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{9} \text{ (A06, A20, A30)}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{6} \text{ (A26)}$$

Además las alumnas A04 y A24 no entregan la ficha, los alumnos A25 y A39 no realizan el cálculo y las alumnas A17 y A18 dicen no saber realizar la suma. La alumna A17 sale a la pizarra y hace el cálculo utilizando como denominador común el número 24.

Otro indicador del escaso interés que ha suscitado la resolución de las fichas encomendadas por el profesor como trabajo de casa se manifiesta en el bajo rendimiento de los alumnos en el cálculo de la suma. Se trata de un ejercicio de consolidación de un procedimiento de cálculo sin dificultad conceptual alguna, que ha sido resuelto correctamente solamente por la mitad del grupo.

Para evaluar la ficha nº 12 sale a la pizarra el alumno A52 que manifiesta no saber resolver la tarea. El alumno utiliza como estrategia la realización de gráficos con el modelo superficie. Después de mostrar dificultades en la comprensión del significado de fracción consigue resolverla.

El profesor describe la otra estrategia basada en la equivalencia de fracciones y propone la resolución en el aula de la ficha nº 12BIS.

El alumno A01 realiza de inmediato la ficha y el profesor le propone la resolución de la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones". Los tres problemas de esta ficha los resuelve correctamente en 10 minutos. El profesor propone a todos los alumnos la resolución de esta última ficha como trabajo para realizar en sus casas.

No ha quedado tiempo para evaluar la ficha nº 12BIS con el grupo. Sin embargo, aprovechando que está lloviendo y los alumnos se quedan descansando en el aula, el profesor valora con los alumnos que lo desean las respuestas escritas en la tarjeta de evaluación.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Buen comportamiento en el aula pero se detecta poco esfuerzo en algunos alumnos del grupo 5º B. Por ejemplo, el alumno A06 tiene tal desinterés por resolver la ficha que ni siquiera pide ayuda a los profesores. El profesor le dice que resuelva la ficha en su casa y la traiga resuelta a la siguiente sesión.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Dos alumnos (A36 y A47) del grupo 5º A no asisten a clase y en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Resulta complicado evaluar las unidades de comprensión de los alumnos del grupo 5º B en la resolución de la ficha nº 12, porque se trata de una ficha que ha sido propuesta como trabajo para casa y, en consecuencia, no se ha resuelto en el aula. Además de los factores externos, como ayudas de familiares o compañeros, se observa en bastantes alumnos desgana y falta de interés para realizar la ficha. Dos alumnos se dejan la tarjeta de la ficha en sus casa y 14 alumnos no resuelven bien la tarea por diferentes motivos: no justifican la respuesta dada, dan el resultado incorrecto o bien reciben ayuda externa.

Como aspecto positivo indicamos que aumenta el número de alumnos que utiliza la estrategia de resolución basada en la equivalencia de fracciones. Ahora son cinco los alumnos (A01, A08, A14, A27 y A34) que utilizan esta estrategia, algunos de ellos en combinación con la estrategia consistente en realizar gráficos.

Analizamos los resultados de los grupos de docencia en la ficha 12BIS. Se recuerda que esta ficha ha sido resuelta por los alumnos del grupo 5º B en el aula y los alumnos de 5º A la han resuelto en sus casas:

	5º A		*5º B*	
	Sol. correcta	*Sol. incorrecta*	*Sol. correcta*	*Sol. incorrecta*
Totales	**14**	**7**	**10**	**13**
Realizan gráficos	**7**	**-**	**2** (A24, A50)	**-**
Equivalencia de fracciones	**7**	**-**	**8** (A01, A08, A14, A15, A20, A27, A34, A49)	**1** (A02)
Confunden la operación	**1** (A03)		**2** (A12, A30)	
No justifican o mal justificado	**6** (A16, A22, A23, A28, A37 y A51)		**10** (A04, A06, A17, A18, A19, A25, A26, A38, A39, A52)	

Hemos considerado como erróneas las respuestas que estaban justificadas de modo incompleto o estaban mal justificadas, aunque la solución aportada por los alumnos coincida con la correcta.

Se observa que hay un mayor número de alumnos de 5º A que han utilizado la equivalencia de fracciones en la resolución de la ficha 12BIS. Son 9 alumnos (A09, A10, A11, A21, A31, A32, A35, A40 y A48) los que utilizan la equivalencia de fracciones. Hay 7 alumnos (A05, A07, A13, A21, A29, A31 y A33) que realizan gráficos. Dos de estos últimos alumnos (A21 y A31) utilizan ambas estrategias.

En el grupo 5º B, aunque algunos alumnos se pasen información entre ellos, los resultados muestran un aumento de la comprensión de la operación división de una fracción por un número natural, que se manifiesta en la utilización de mayor variedad de estrategias.

En ambos grupos la mejora de la comprensión se manifiesta por el empleo de la estrategia basada en la equivalencia de fracciones. Algunas alumnos que utilizan esta estrategia también justifican la respuesta realizando gráficos. Este es el caso de las alumnas A14, A15, A27 y A34 del grupo 5º B.

Toma de decisiones
En la siguiente sesión los alumnos van a resolver la última ficha referida a la operación división de una fracción entre un natural. Pretendemos con esta última ficha valorar los aprendizajes que los alumnos han realizado sobre esta operación.

También proponemos una nueva ficha titulada "problemas de ampliación de operaciones con fracciones" para que los alumnos los resuelvan las siguientes tareas como trabajo para casa:

1º. Un comerciante de telas ha vendido la mitad de una pieza de tela y después vende la quinta parte de la misma pieza.

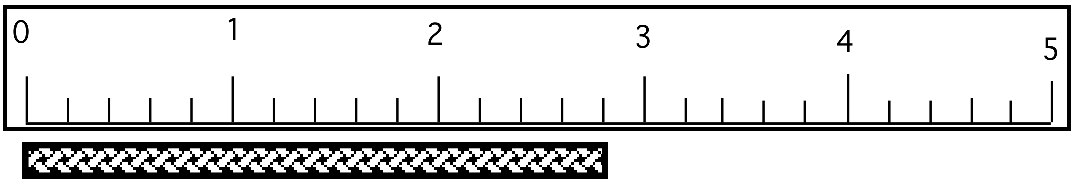
a) ¿Qué parte de la pieza ha vendido?

b) ¿Qué parte de la pieza le queda por vender?

c) Si la pieza tiene 20 metros, ¿qué longitud de tela queda por vender?

2º. Un pescadero vende los 3/4 de la mercancía y le quedan 15 Kgrs. por vender. ¿Cuántos kgrs. de mercancía tenía?

3º.- Con la ayuda de la siguiente regla, mide la longitud de la cuerda:



Debes expresar el resultado de la medida con una fracción. Te recuerdo que la unidad es el segmento que va de 0 a 1.

4ª. Halla la suma: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$

Día 24-11-2000 (Decimosexta sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º Resolver y evaluar la ficha nº 13
2º Recoger la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones" a los alumnos que resuelvan correctamente la tarea, y proponer a estos últimos la ficha "problemas de ampliación de operaciones con fracciones" para que sea resuelta como trabajo para casa.

En el grupo 5º B:
1º Evaluar la ficha nº 12BIS
2º Resolver y evaluar la ficha nº 13
3º Proponer la resolución de la ficha "problemas de ampliación de operaciones con fracciones" a los alumnos que hayan resuelto la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones"

Ejecución
Comienza la sesión del viernes, a primera hora de la mañana, con el grupo 5º B. El profesor pregunta al alumno A06 si ha resuelto la ficha 12BIS y dice habérsela dejado en casa. Para evaluar esta ficha el profesor pide la colaboración del alumno A30, que resuelve la ficha utilizando como estrategia la realización de gráficos con el modelo longitud.

Después los alumnos afrontan la resolución de la ficha nº 13. Los alumnos perciben esta tarea como sencilla; algunos dicen "es como la anterior". Todo indica que los alumnos identifican la operación que resuelve la ficha. Algunos alumnos la resuelven rápidamente. Según van terminando la ficha el profesor les propone la resolución de los tres problemas de la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones". Seis alumnas (A14, A15, A19, A24, A27 y A34) terminan con éxito esta tarea y reciben una nueva ficha "problemas de ampliación de operaciones con fracciones" para trabajarla durante el fin de semana. El alumno A01 que había resuelto la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones" ha estado trabajando la ficha de ampliación y sólo le queda terminar de resolver un problema.

La sesión del viernes comienza a las 11h.10m. en el aula de 5º A. Los alumnos afrontan la ficha nº 13. En la evaluación de la tarea sale a la pizarra la alumna A23 que da una respuesta errónea. Las dificultades de esta alumna radican en el conocimiento inestable del concepto de fracción que se manifiesta cuando utiliza el modelo longitud y decide fraccionar la unidad en 5 partes iguales para dibujar un segmento de longitud 5/4 u.

Cuando los alumnos van terminando la ficha nº 13 proceden a terminar de resolver la ficha "problemas de operaciones con fracciones". Antes de concluir la sesión ocho alumnos resuelven esta tarea (A05, A07, A11, A13, A21, A29, A33 y A48) que junto a las cuatro alumnas que la habían resuelto durante la sesión anterior hace que la mitad de los alumnos hayan resuelto la ficha. A todos estos alumnos se les propone la resolución de una nueva ficha "problemas de ampliación de operaciones con fracciones" para trabajarla durante el fin de semana.

Aspectos actitudinales

La mayoría de los alumnos de ambos grupos se sienten más motivados cuando el profesor les propone la realización de otras nuevas fichas según van terminando las precedentes. Hemos detectado, con agrado, este fenómeno en los dos grupos de docencia. La actitud de los alumnos ha sido muy activa. Esta metodología de trabajo ha funcionado bien; sin embargo cabe el peligro de que los alumnos no presten la dedicación deseable a las tareas a costa de primar la rapidez de la resolución en oposición al trabajo reflexivo durante el proceso de resolución.

Asistencia de alumnos

Dos alumnos (A36 y A46) del grupo 5º A no asisten a clase y en el grupo 5º B falta el alumno A12.

Aspectos relacionados con la comprensión

La estrategia mayoritaria para resolver la ficha 13 ha sido la realización de representaciones gráficas. Los resultados de los grupos de docencia en relación con las estrategias utilizadas son:

	5º A *Sol. correcta*	*5º A* *Sol. incorrecta*	*5º B* *Sol. correcta*	*5º B* *Sol. incorrecta*
Totales	**16**	**5**	**13**	**9**
Realizan gráficos	**9** (A05, A10, A16, A21, A22, A29, A47, A40, A48)	**5** (A03, A23, A32, A37, A51)	**7** (A14, A15, A24, A34, A30, A50, A52)	**6** (A04, A06, A17, A26, A39, A49)
Equivalencia de fracciones	**7** (A07, A09, A11, A13, A28, A31, A35)	**0**	**6** (A01, A08, A19, A20, A27, A38)	**3** (A02, A18, A25)
No justifican o mal justificado	**5**		**9**	

La práctica totalidad de los alumnos aportan la respuesta correcta e identifican correctamente la operación, aunque muchos alumnos no utilizan la representación simbólica $\frac{5}{4}: 10$. La secuencia de enseñanza no ha concedido relevancia a este aspecto de formalismo sintáctico. Pensamos que si los alumnos hubieran recibido la consigna de escribir esta representación en la tarjeta de evaluación éstos la hubieran incorporado a sus hábitos de escritura simbólica con muy poco esfuerzo. Se propone incidir sobre este aspecto en una futura fase de implementación.

Se observa que los alumnos tienen más recursos para resolver las fichas. Algunos alumnos utilizan las dos estrategias de resolución basadas en gráficos y el concepto de equivalencia de fracciones. Tres alumnos del grupo 5º A utilizan gráficos y la equivalencia de fracciones (A07, A28 y A35). En el grupo 5º B hay cinco alumnos (A08, A14, A19, A27 y A30) que muestran en la tarjeta de evaluación que han utilizado las dos estrategias.

Se observa que, poco a poco, conforme van realizando fichas los alumnos utilizan la estrategia basada en la equivalencia de fracciones de modo que perciben la cantidad de magnitud a fraccionar o repartir como compuesta por un número de subunidades que sea el mismo (o un múltiplo) del número que actúa como factor divisor. Observamos que otros alumnos no se encuentran seguros utilizando esta estrategia y proceden realizando gráficos de la cantidad de magnitud a fraccionar o repartir. No obstante, pensamos que los alumnos comprenden el significado de la operación y desarrollan capacidades para resolver problemas.

Si revisamos las fichas de los alumnos que no han justificado suficientemente la respuesta o que han recibido ayuda observamos que todos ellos han realizado gráficos, es decir, no se han paralizado ante la situación problemática descrita en la ficha y han sabido poner en marcha una estrategia de resolución de problemas.

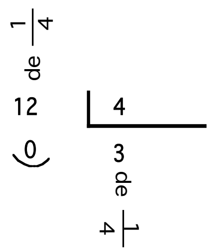
<u>Toma de decisiones</u>
Además de capacitar a los alumnos para que desarrollen el mayor número de estrategias, estamos particularmente interesados en que utilicen la estrategia basada en la equivalencia porque les va a servir, en un futuro muy próximo, para resolver problemas de repartos cuando en la secuencia de enseñanza se introduzca la fracción con el significado de reparto.

Día 27-11-2000 (Decimoséptima sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Resolver y evaluar la tarea nº 14
2º Introducir un nuevo significado de la fracción: como resultado de un reparto igualitario.

<u>Ejecución</u>
A las 9 h. de la mañana comienza la sesión de clase en el grupo 5º B. El profesor dispone a los alumnos en equipos de 4 alumnos. Se forman 4 equipos de 4 alumnos y 2 equipos de 3 alumnos.

Se va a introducir un nuevo significado de la fracción: como resultado de un reparto igualitario. Cada grupo recibe 3 cañas y se formula verbalmente el enunciado de la tarea nº 14 que consiste en calcular la cantidad de regaliz que recibirá cada una de las cuatro personas que participan en el reparto.

Algunos equipos resuelven de inmediato resuelven mentalmente la tarea. Dos equipos necesitan ejemplificar el proceso de reparto con la ayuda de material manipulativo. Cuando los profesores han visto que todos los equipos sabían resolver la tarea les han entregado a los alumnos la tarjeta de evaluación de la tarea para que representen, de modo gráfico y simbólico, las acciones que han realizado con el material. Como era de esperar los alumnos saben representar gráficamente los fraccionamientos, en partes iguales, realizados en las barras, pero piden ayuda para representar de forma simbólica el proceso de reparto. El profesor explica el significado de reparto y de los términos de la fracción que muestra el resultado del reparto; y propone en la pizarra la siguiente representación del proceso de reparto:



Después los alumnos proceden a resolver, por equipos, la tarea nº 15. Sólo dos equipos solicitan material. Los alumnos encuentran con rapidez la fracción que indica el resultado del reparto aunque tienen dificultades para simbolizar el proceso de reparto y expresar con corrección los significados de los símbolos que aparecen en el reparto. Concluye la sesión de clase y no ha quedado tiempo para realizar una evaluación de la tarea. Se realizará al comienzo de la siguiente sesión.

En el grupo de 5º A se ha seguido la misma metodología de enseñanza. En este grupo de docencia no ha dado tiempo para resolver la tarea nº 15, posiblemente porque dos alumnos han formulado dos preguntas que vamos a comentar.

1º. La alumna A13 se sorprende de que podamos dar un significado distinto a la fracción 3/4. Parece que la alumna no admite que una misma representación simbólica tenga dos significados diferentes.

2º El alumno A29, después de haber realizado correctamente la tarea nº 14, afirma que esta tarea no tiene solución, porque la división

$$3 \;\; \underline{|\, 4 \qquad}$$

no puede realizarse.

Asistencia de alumnos
Dos alumnos (A36 y A47) del grupo 5º A no asisten a clase. En el grupo 5º B falta el alumno A06.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una buena disposición al trabajo. Los alumnos se muestran más motivados cuando utilizan materiales manipulativos. Sin embargo, dos de los equipos de 5º B no han sabido trabajar con esta nueva disposición de las mesas. Los componentes de equipo se han dedicado a hacerse reproches y a molestarse entre ellos; y los del otro equipos han mostrado muy poco interés por resolver la tarea.

Durante el recreo el profesor ha ayudado a algunos alumnos de los dos grupos a resolver la tarea "operaciones con fracciones"

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos entienden la acción que consiste en realizar repartos igualitarios. Han tenido múltiples experiencias en la realización de esta acción con números naturales. Pensamos que el rendimiento alto de los alumnos al enfrentarse a estas nuevas tareas se debe al conocimiento previo del significado de reparto con cantidades discretas y de la fracción como de medida de la magnitud longitud realizado en el curso anterior. La mayoría de los alumnos se ha ayudado de dibujos y ha resuelto con éxito las dos primeras tareas.

Como era de esperar las dificultades han aparecido cuando los alumnos escriben la representación simbólica del reparto o cuando expresan los significados de los términos de la fracción.

Los alumnos muestran una buena comprensión del significado del reparto, de modo que en esta primera sesión hemos realizado, en el grupo 5º B, la tarea nº 15 que estaba prevista resolver en la siguiente sesión.

Algunos alumnos (A11, A21, A31 y A33 de 5º A) han realizado, en la tarea nº 14, el reparto de "3 barras entre 4 personas" en dos fases: en la primera reparten media barra y en la segunda un cuarto de barra. El profesor les indica que el reparto está bien hecho pero que nos vamos a poner todos de acuerdo y vamos a realizar los repartos en una sola etapa, de modo que los trozos que se repartan tengan la misma longitud.

Toma de decisiones.
En el grupo 5º B se propone que antes de realizar la evaluación conjunta de la tarea nº 15, se recuerde el enunciado de la tarea nº 14 y plantear a los alumnos la pregunta que formula el alumno A29 sobre la imposibilidad de realizar la división de "3 barras para 4 niños".

En segundo lugar se propone, en los dos grupos de docencia, dibujar en la pizarra durante la fase de evaluación de las tareas los fraccionamientos de las barras. Sabemos que las representaciones gráficas juegan un papel importante en la transición de las acciones manipulativas a las representaciones simbólicas.

Día 28-11-2000 (Decimoctava sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º Resolver y evaluar la tarea nº 15
2º Resolver y evaluar la tarea nº 16

En el grupo 5º B:
1º Evaluar la tarea nº 15
2º Resolver y evaluar la tarea nº 16

Ejecución
Al comenzar la sesión de clase, en los dos grupos, el profesor hace dos comentarios:
1º Recuerda que todavía hay alumnos que no han entregado las tareas "operaciones con fracciones" y

"ampliación de operaciones con fracciones". Indica que durante el recreo el profesor estará en el aula de 5º B para evaluar de modo individual las tareas y ayudará a resolver los problemas que no sepan resolver los alumnos.
2º Informa que el viernes realizaremos una evaluación de los aprendizajes realizados sobre operaciones con fracciones. Los resultados de la prueba quedarán reflejados en el boletín de notas de los alumnos.

En el grupo 5º A los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 15 en la que se pide cuantificar el resultado del reparto de 3 barras entre 2 niños. Los alumnos no desean utilizar el material (las cañas) y concluyen con rapidez y acierto la tarea. Las dificultades han surgido en la representación simbólica del proceso de reparto. En la evaluación conjunta de la tarea el profesor establece el convenio de la simbolización del reparto:

$$\begin{array}{l|l} 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$\frac{1}{2}$ de

$$\begin{array}{l|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \text{ de } \frac{1}{2} \end{array}$$

El profesor incide en el significado de la fracción resultado del reparto, $\frac{3}{2}$ de barra, y de los términos de la fracción.

Después los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 16 en la que se les pide que cuantifiquen el resultado de 5 barras de regaliz entre 3 niños. La mayoría de los alumnos resuelven con éxito la tarea. Para evaluar la tarea el profesor solicita que el alumno A16, que no ha sabido simbolizar el proceso del reparto, salga a la pizarra a resolver la tarea.

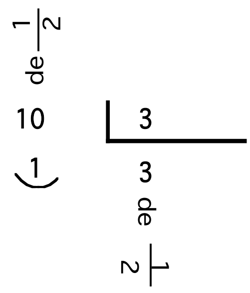
En el grupo 5º B comienza la sesión con una intervención del profesor para recordar las tareas resueltas en la sesión anterior. Escribe el enunciado de la tarea nº 14 en la que se pide cuantificar el reparto de 3 barras de regaliz entre 4 niños y traslada a los alumnos la pregunta que formula, durante la sesión del día anterior, el alumno A29: "¿se puede realizar el reparto de 3 entre 4 a pesar de que hay menos barras que personas?". Han intervenido algunos alumnos pero no han sabido dar una respuesta atinada que muestre las diferencias entre los conjuntos numéricos de los naturales y los racionales.

El profesor realiza la evaluación conjunta de la tarea nº 15. Indica a los alumnos que los fraccionamientos de la unidad (barras de regaliz) deben ser iguales, de la misma longitud; y aprovecha para establecer el convenio de la simbolización del reparto que hemos descrito anteriormente.

Los alumnos se muestran desorientados cuando intentan simbolizar el proceso del reparto que efectúan en la tarea nº 16. El profesor observa que algunos alumnos, como la alumna A18, que escribe:

$$\begin{array}{l|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$$

y realiza una intervención general para recordar el significado de los términos de la división entera. El profesor hace ver a los alumnos que quedan dos barras sin repartir y esto no es posible porque ahora debemos repartir TODAS las barras. Después pregunta si pueden realizar el reparto cuando fraccionan las 5 barras por la mitad. Los alumnos afirman que no, porque quedará una barra sin repartir. El profesor escribe la simbolización:



y pide a los alumnos que terminen de resolver la tarea.

Para evaluar la tarea nº 16 sale a la pizarra el alumno A38 que ha fraccionado cada barra en 6 partes iguales y que aporta como resultado del reparto la fracción $\frac{10}{6}$ de barra que es equivalente a $\frac{5}{3}$ de barra.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Dos alumnos (A36 y A48) del grupo 5º A no asisten a clase y en el grupo 5º B faltan tres alumnos: A06, A12 y A52.

<u>Aspectos actitudinales</u>
En ambos grupos se observa en los alumnos una buena disposición al trabajo. Durante el recreo el profesor ha ayudado a algunos alumnos de los dos grupos a resolver la tarea "operaciones con fracciones"

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Algunos alumnos realizan repartos en fases o etapas, aunque el profesor les ha recomendado que hagan los repartos en una sola fase, de modo que todos los fraccionamientos realizados tenga la misma cantidad de longitud. El alumno A28 realiza un reparto por fases en la tarea nº 16. Este alumno que da la respuesta correcta, actúa del siguiente modo: reparte tres barras sin fraccionarlas y las dos barras restantes las fracciona en tres partes iguales. El profesor le indica que ha repartido bien pero que debe proceder realizando todos los fraccionamientos iguales.

La mayoría de los alumnos resuelven las tareas de reparto con éxito. Esto hace que vayamos ganando tiempo en la temporalización de la propuesta de enseñanza. Como era de esperar hay dos focos en los que se concentran las dificultades: en la simbolización del proceso del reparto y en la formulación de los significados de la fracción que se obtiene como resultado del reparto.

Como los alumnos saben resolver las tareas utilizando gráficos evitan escribir la representación simbólica del proceso de reparto, a pesar el enunciado de la tareas exige simbolizar el proceso de reparto.

Se observa que algunos alumnos realizan la evaluación semántica de los términos de fracción desde el modelo medida. Los alumnos escriben, en la tarea nº 15, que el denominador indica "cuantas veces has fraccionado la unidad" y el numerador "cuantos trozos has cogido" (alumna A07), "trozos de regaliz que le ha tocado a cada uno" (alumna A23), "cuantos trozos de regaliz le damos a cada niño" (alumno A28), "el número de trozos de regaliz que hemos cogido para cada niño" (alumna A40).

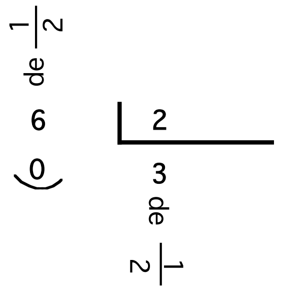
Las respuestas sobre el significado de los términos de la fracción dadas por los alumnos del grupo 5º B en la tarea nº 15 han sido escasamente reflexionadas y, en la mayoría de los casos, son erróneas.

Los alumnos siguen teniendo dificultades para expresar el significado de los términos de la fracción en la tarea nº 16, a pesar de que el profesor ha explicado el nuevo significado de la fracción al evaluar la tarea anterior. Los alumnos han recibido la siguiente explicación sobre los significado de los términos de la fracción:

1º La fracción indica la cantidad de barra de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto.
2º El numerador indica el número de barras que había antes de hacer el reparto.
3º El denominador indica el número de personas que participan en el reparto.

Hasta el momento ninguno de los alumnos que en la tarea nº 16 aportan como solución del reparto la fracción 10/6 barras cuestiona que el numerador ni denominador coincidan con las condiciones iniciales del reparto: 5 barras para 3 niños. El profesor ha preferido posponer hasta un momento posterior la cuestión de la igualdad de repartos. Si se diera tal circunstancia habría que adelantar la introducción de la noción de reparto equivalente.

Se observan fenómenos de colisión o confusión entre los dos significados de la fracción que conocen los alumnos. Así la alumna A22 ha tenido dificultades para simbolizar, con una fracción, la cantidad que obtiene en el reparto, de modo que después de simbolizar correctamente el proceso del reparto:



no reconoce que " 3 subunidades de longitud $\frac{1}{2}$ de barra" son $\frac{3}{2}$ de barra.

Toma de decisiones.
Dado que los alumnos necesitarán más tiempo para resolver la tarea nº 18 se propone comenzar la siguiente sesión con esta tarea, y proponer como trabajo para casa la resolución de la tarea nº 17. Esta última tarea tiene una estructura análoga a otras tareas realizadas con anterioridad y no se espera que los alumnos tengan dificultades para resolverla correctamente.

La alumna A50 ha realizado, en la tarea nº 16, el mismo fraccionamiento que el realizado por el alumno A28. Sin embargo, esta alumna aporta como solución de la tarea 1/2 de barra. Para que los alumnos observen un reparto en varias fases y, además, se percaten del tipo de error cometido por la alumna, se decide hacer un comentario general sobre esta tarea al comienzo de la siguiente sesión con el grupo de 5º B.

Día 29-11-2000 (Decimonovena sesión)
Plan previsto.
1º Repasar las tareas nº 15 y 16.
2º Resolver y evaluar la tarea nº 18.
3º Proponer como trabajo para casa la resolución de la tarea nº 17.

Ejecución
Los alumnos han tardado más tiempo del esperado en la resolución de las dos partes de la tarea nº 18. En ambos grupos se ha evaluado la primera parte de la tarea pero ha faltado tiempo para evaluar la segunda parte e institucionalizar el concepto de repartos equivalentes. Queda pendiente para la siguiente sesión trabajar esta noción.

En el grupo de 5º A, nos encontramos con la sorpresa agradable de que la alumna A46, que tiene dificultades de aprendizaje, ha resuelto correctamente y sin ayuda la primera parte de la tarea nº 18. El profesor le pide que salga a la pizarra a mostrar la estrategia de resolución utilizada.

Asistencia de alumnos
Tres alumnos (A36, A47 y A48) del grupo 5º A no asisten a clase y en el grupo 5º B falta el alumno A52.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos han estado muy activos. Han mostrado interés por resolver la tarea nº 18 y esto ha quedado reflejado en el mayor nivel de éxito obtenido en esta tarea.
Durante el recreo el profesor ha ayudado a algunos alumnos de los dos grupos a resolver la tarea "operaciones con fracciones". Algunos alumnos están interesados en resolver problemas de esa tarea ante la inminencia de la prueba de evaluación que van a realizar el próximo viernes.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos de los dos grupos de docencia indican que la cantidad de regaliz resultado de reparto "2 barras entre 3 niños" es 2/3 de barra. Sólo los alumnos A33 (de 5º A) y A38 (de 5º B) indican que el resultado del reparto es 4/6 de barra. Ninguno da una respuesta incorrecta.

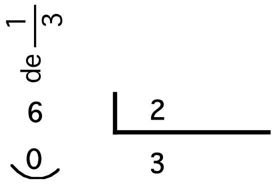
Cuando los alumnos cuantifican el reparto "4 barras entre 6 niños" la mayoría de los alumnos dan como respuesta 4/6 de barra, salvo 5 alumnos del grupo del grupo 5º A que escriben 2/3 de barra y la alumna A22 que da la respuesta incorrecta 3/3 de barra. En el grupo 5º B dos alumnas (A14 y A19) escriben 2/3 de barra y cuatro dan respuestas incorrectas como 6/4 y 24/6 de barra.

Para valorar el nivel de comprensión de los alumnos necesitamos otros indicadores, además del que hace referencia a la solución aportada por éstos. Vamos a interesarnos por las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver la tarea. Los alumnos han tenido la opción de utilizar material manipulativo pero han recibido la consigna de realizar representaciones gráficas y simbólicas. Muy pocos alumnos han utilizado material manipulable para resolver la tarea. La mayoría han realizado representaciones gráficas. Pensamos que el estudio de los gráficos realizados por los alumnos es un buen indicador para valorar el grado de comprensión que tienen éstos del proceso de reparto.

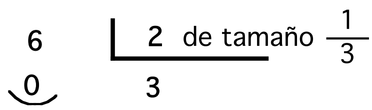
En el grupo 5º A hay 6 alumnos (A03, A07, A22, A32, A48 y A51) que tienen dificultades para entender el proceso del reparto. Hay 7 alumnos (A04, A06, A12, A25, A26, A49 y A52) del grupo 5º B que no justifican con gráficos adecuados el proceso de reparto a pesar de aportar la solución correcta. Tal proceder es un indicio de escasa comprensión conceptual.

Un tercer indicador del nivel de comprensión de los alumnos se basa en las representaciones simbólicas que efectúan los alumnos. En este apartado existen diferencias sustanciales entre los dos grupos. Los alumnos del grupo 5º B son mucho más descuidados en la simbolización, lo que les ocasiona mayor número de errores. Hay 5 alumnos (A04, A06, A12. A25 y A39) que no utilizan esta representación cuando reparten "4 barras entre 6 niños" y 14 alumnos que no escriben el tamaño de las subunidades que se reparten.

Se han observado errores en las representaciones simbólicas que utilizan alumnos que tienen una buena comprensión del significado de reparto. Así las alumnas A27 y A50 dividen el número de subunidades obtenidas al fraccionar 2 barras en 3 partes iguales, entre un número de trozos:



La alumna A31 comete el mismo tipo de error:



En el grupo 5º A hay 3 alumnos (A07, A22 y A48) que no escriben la representación simbólica, y 4 alumnos (A03, A31, A32 y A51) que realizan una representación errónea. Bastantes alumnos de 5º B han descuidado la representación simbólica del proceso de obtención del resultado del reparto.

Un último indicador del nivel de comprensión se obtiene del estudio de los significados que los alumnos asocian a la fracción y a sus términos. Los resultados de este indicador han mejorado con respecto al referido a la simbolización del proceso del reparto. El número de alumnos que no han expresado correctamente los significados es análogo al de alumnos que no han sabido justificar los gráficos realizados en el proceso del reparto.

Se observa con carácter general que los alumnos que no justifican los gráficos que efectúan cometen errores en la evaluación semántica de la fracción y de sus términos. Así, la alumna A22, que aporta como solución del reparto "4 barras entre 6 niños" la fracción 3/3 escribe:

"*La fracción indica el número de trocitos de regaliz que le toca a cada niño*".

"*El numerador indica el tamaño de los trocitos de regaliz que le toca a cada niño*".

El alumno A48 comprende el significado de la fracción como resultado de una medida, y escribe:

"*La fracción indica el resultado de la medida de una cantidad*".

"*El numerador indica el número de subunidades que he colocado*".

"*El denominador indica el número de partes iguales en los que has partido la unidad*"

Otros 7 alumnos de 5º A (A07, A16, A23, A28, A46, A33, A35) han asignado al denominador el mismo significado. Verdaderamente esta respuesta, sin ser la óptima, también es correcta porque los alumnos, para realizar el reparto, suelen proceder fraccionando la unidad (la barra) en tantas partes iguales como el número de niños que haya.

En ambos grupos se observa que los alumnos están influenciados por el significado de fracción estudiado con anterioridad. Se da la circunstancia que el significado de la fracción como reparto tiene una formulación verbal muy sencilla. Esto ha ayudado a elevar el nivel de éxito de la tarea.

Las dificultades mostradas para expresar los nuevos significados están asociadas, para un número reducido de alumnos de ambos grupos, con una escasa comprensión del significado de reparto; y para un número mayor de alumnos con la influencia del significado de la fracción como resultado de una medida. Algunos ejemplos de este último caso lo aportan las alumnas A19 y A50 cuando escriben:

"El numerador indica las partes que se lleva cada uno" (alumna A19)

"El numerador indica cuantos trozos" (alumna A50)

Podemos concluir que nivel de comprensión del significado de la fracción como resultado de un reparto y del proceso de obtención es aceptable en ambos grupos. En el grupo 5º A hay 6 alumnos (A03, A07, A22, A32, A48 y A51) que tienen una comprensión baja, mientras que en el grupo 5º B hay 10 alumnos (A04, A06, A12, A17, A18, A25, A26, A39, A49 y A52) que están en esta misma situación.

Toma de decisiones.
Aunque los resultados de la tarea nº 18 muestran una buena comprensión del significado de la fracción como resultado de un reparto, en las tareas siguientes, los alumnos deben mejorar la calidad de las representaciones simbólicas que utilizan. De momento vamos a seguir con la planificación prevista, que deberá ser modificada si los alumnos no utilizan con éxito las representaciones simbólicas del proceso del reparto, en las siguientes tareas.

Día 30-11-2000 (Vigésima sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 17.
2º Evaluar la Ficha de trabajo nº 18.
3º Proponer como trabajo para casa la resolución de la tarea nº 19.

Ejecución
Se cumple el plan previsto. Se ha procedido a recoger la tarea nº 17 y se ha realizado una evaluación conjunta de la tarea. Como la evaluación de esta tarea se ha realizado inmediatamente después de habérsela entregado al profesor, ha habido algunos aspectos interesantes que no se han comentado con los alumnos. Hubiera sido interesante que los alumnos que aportan como solución de la tarea 1 barra o la fracción 1/1 hubiesen explicado los significados que dotan al numerador y denominador de la fracción.

Durante la evaluación de la tarea nº 18 el profesor ha trabajado, con ambos grupos, la idea de equivalencia de repartos utilizando cañas y la colaboración de alumnos que han salido a la pizarra para ejemplificar repartos. Los alumnos afirman que los dos repartos involucrados en la tarea nº 18 son equivalentes porque las fracciones que indican los resultados de los repartos son equivalentes.

Finalmente, los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la tarea nº 19 para que la resuelvan en sus casas durante el fin de semana, dado que en la sesión del día siguiente, viernes, los alumnos van a realizar la prueba sobre operaciones con fracciones.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º A no asiste a clase el alumno A36. En el grupo 5º B asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos aportan una amplia variedad de soluciones en la tarea nº 17. Veámoslas en la siguiente tabla:

Tarea nº 17 Resultado del reparto	*5º A*	*5º B*
	Nº de alumnos	Nº de alumnos
1 barra	6	4

1/1 barra	3	3
2/2 barra	2	2
3/3 barra	8	5
1/3 barra	1	5
4/3 barras	0	1
No entregan	2	3

Ha habido 6 alumnos del grupo 5º A que han expresado mal la representación simbólica del reparto. Estos alumnos han optado por realizar fraccionamientos de las barras en dos o tres partes iguales, pero han intentado utilizar la representación simbólica que aparece en la tarjeta de evaluación:

$$3 \;\underline{|\;3\quad\quad}$$

Lejos de servirles de ayuda, los alumnos no han considerado esta notación como la acción a realizar: "repartir 3 barras de regaliz entre 3 personas", porque esta simbolización les sugiere realizar un cálculo. La caja de la división la tienen asociada al procedimiento de cálculo de la división entera y ahora, cuando la ven escrita, intentan de inmediato realizar un cálculo con esta simbolización.

Los alumnos conocen el significado de la fracción y de los términos de ésta. Sin embargo, las características particulares de la tarea en la que se reparten 3 barras de regaliz entre 3 niños pone de manifiesto un aspecto novedoso: la mayoría de los alumnos no intentan dar un significado coherente a los términos de la fracción que obtienen como resultado del reparto. Veamos el caso de la alumna A35 que si que realiza este esfuerzo. La alumna indica que el resultado del reparto es $\frac{1}{1}$ y escribe:

"*El numerador indica el trozo que recibe cada niño*"

"*El denominador indica cómo tiene que ser la longitud de cada trozo de barra*"

Otra alumna (A10) que aporta la misma solución, escribe el significado del numerador:

"*El numerador indica cuántas barras de regaliz les toca a cada niño*"

pero no justifica que aparezca un 1 en el denominador:

"*El denominador indica cuántos niños van a participar en el reparto*"

Sólo escriben un significado coherente con la respuesta dada los alumnos que han optado por fraccionar las barras en tres partes iguales y, en consecuencia, dan como solución la fracción $\frac{3}{3}$ de barra.

En el grupo 5º B diez alumnos (A02, A12, A15, A17, A18, A25, A26, A38, A49 y A52) no han escrito correctamente la representación simbólica del reparto. Por esta razón los alumnos A02, A12, A17, A18, A25 y A26 dan soluciones erróneas; y los restantes aportan como solución la fracción $\frac{3}{3}$ (A15, A49 y A52) y la fracción $\frac{2}{2}$ (A38) sin justificar sus respuestas.

En este grupo se manifiestan, con mayor crudeza, las dificultades que tienen los alumnos para utilizar correctamente la representación simbólica del reparto. Como hemos indicado al estudiar los resultados del grupo 5º A en la tarea nº 17 la aparición de la representación:

$$3 \;\underline{|\;3\quad\quad}$$

puede haberles inducido a error. Sin embargo, esta no es la única justificación de los errores cometidos por los seis alumnos del grupo 5º B que aportan como resultado del reparto las fracciones 1/3 y 4/3 de barra. Sin duda alguna han tenido que confluir las dificultades conceptuales con altas dosis de desidia para que los seis alumnos escriban estas soluciones como el resultado de repartir 3 barras de regaliz entre 3 niños.

Los alumnos de ambos grupos han dado muestras de comprender el concepto de reparto equivalente por analogía con el de fracción equivalente, cuando se ha realizado la evaluación conjunta de la tarea nº 18. Los alumnos han reconocido que en los repartos:

2 barras entre 3 niños
4 barras entre 6 niños

las personas implicadas reciben la misma cantidad de regaliz: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ de barra.

La propuesta de enseñanza pretende poner de manifiesto la potencia del significado de reparto. Por ello el profesor ha intentado que los alumnos perciban la equivalencia de repartos sin recurrir a cuantificar el resultado, es decir, sin que intervengan fracciones. La actividad ha consistido en pedir a tres alumnos que salgan a la pizarra a repartirse 2 barras. Después ha pedido a otros tres alumnos que hagan lo mismo. El profesor realiza la siguiente pregunta: "Si los dos grupos deciden juntarse y compartir las barras, ¿recibirán más cantidad de regaliz, menos o igual que antes?"

Inicialmente los alumnos dan respuestas contradictorias y, poco a poco, admiten que recibirán la misma cantidad de regaliz. Después el profesor solicita que salgan a la pizarra otros 3 alumnos para repartirse 2 barras de regaliz. Se forma un grupo de 9 personas que se van a repartir 6 barras de regaliz y cuando el profesor les formula la pregunta anterior los alumnos se muestran inicialmente muy inseguros en sus respuestas.

Con la intención de evaluar la conveniencia de la introducción de la técnica de comparación de fracciones basada en el significado de reparto en los casos en que las fracciones vengan expresadas con diferentes numeradores y denominadores, el profesor plantea a los alumnos una situación basada en "compartir" barras de regaliz. Para ello escenifica la situación de la siguiente manera:

1º Propone que salga a la pizarra un grupo de 3 alumnos que se van a repartir 2 barras de regaliz.
2º Pide que salga otro grupo de 2 personas que se van a repartir 2 barras de regaliz
3º Pregunta que grupo es más "rico" y que grupo es más "pobre"
4º Después pide a los dos grupos que "compartan" las barras, es decir que junten las barras y se junten las personas, para realizar después el reparto.
5º El profesor les pregunta: "En este último reparto, ¿recibirán más regaliz que el los anteriores? ¿Algún grupo sale ganando? ¿Alguno sale perdiendo? ¿Cuál?".

Esta situación se ha trabajado en los dos grupos pero no ha motivado en exceso a los alumnos. El profesor ha tenido que ir sugiriendo las respuestas, mientras que los alumnos asentían pero no intervenían con la contundencia que muestran cuando se sienten sabedores de la respuesta. Pensamos que el nivel cognitivo medio de los alumnos no es el adecuado para afrontar estas cuestiones. De momento, se toma como decisión no incidir en esta idea durante la secuencia de enseñanza.

Toma de decisiones.
Se propone modificar la tarjeta de evaluación de la tarea nº 17 de modo que no aparezca la representación simbólica:

$$3 \;\; \underline{|\;3\quad\quad}$$

En tareas próximas los alumnos van a comparar repartos con la intención de que refuercen el significado de la fracción y realicen una evaluación semántica de los términos de la fracción. En nuestro caso, no asumimos el objetivo de introducir nuevas estrategias de comparación basadas en la idea de "compartir repartir", aunque sería deseable por la riqueza conceptual que proporciona. En vista de que los alumnos han percibido como difícil esta primera aproximación a la estrategia que llamamos de "compartir repartos" hemos decidido no introducirla y estar alerta por si algún alumno la utiliza.

Día 1-12-2000 (Vigésimo primera sesión)
Plan previsto.
Se realiza en ambos grupos la prueba de evaluación sobre operaciones con fracciones.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º A falta a clase el alumno A36. En el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Ejecución
La prueba la realizan, simultáneamente, los dos grupos de docencia durante la tercera sesión de clase de la

mañana, es decir, de 11h. 10m. a 12h. Todos los alumnos terminan antes de que concluya la sesión. Cuando los alumnos terminan la prueba el profesor entrega a los alumnos otro ejemplar del examen que han realizado, con la consigna de que lo traigan resuelto el próximo lunes.

Día 4-12-2000 (Vigésimo segunda sesión)

Plan previsto.

1º Recoger la réplica del examen realizado el pasado viernes.

2º Recoger y evaluar la tarea nº 19

Ejecución

Comienza las sesiones de clase, del lunes, con el grupo 5º B. El profesor recoge la réplica del examen realizado el pasado viernes y la tarjeta de evaluación de la tarea nº 19.

Para realizar la evaluación conjunta de la tarea nº 19 sale a la pizarra la alumna A19. La alumna, siguiendo las instrucciones del profesor, escribe la fracción 2/3 que es la cantidad de regaliz que recibe cada uno de los niños que han participado en el reparto. Como han participado 3 niños en el reparto, el profesor le pregunta cómo puede saber el número de barras de regaliz que se han repartido. Ni la alumna ni la mayoría de los alumnos saben resolver la cuestión propuesta.

El profesor decide ejemplificar esta situación. Para ello solicita la presencia de 3 alumnos que tienen, cada uno, 2 subunidades de longitud 1/3 de caña (barra). Cuando el profesor vuelve a plantear la cuestión anterior, la alumna escribe:

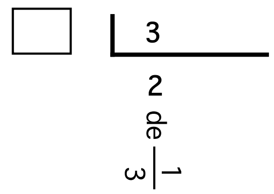
$$\frac{2}{3} \text{ x } 3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ barras}$$

Después, el profesor solicita a la alumna que complete la simbolización del reparto:

$$\square \quad \underline{|\,\square \qquad}$$

la alumna se muestra insegura y afirma que el número de barras es 6.

Posiblemente, la alumna asocia la representación simbólica que está escrita en la pizarra al procedimiento de calculo del resultado del reparto y, tal vez, evoque la siguiente imagen mental:



Cuando concluye la evaluación de la tarea nº 19 los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 20. Algunos alumnos dicen no entender el enunciado de esta tarea. El profesor realiza una intervención general para explicar el significado de las tres cantidades que intervienen en una situación de reparto, y lo ejemplifica con el reparto realizado en la tarea nº 19. Con esta explicación concluye la sesión de clase. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº20 aunque los alumnos no la hayan terminado.

Los alumnos del grupo 5º A muestran las mismas dificultades que los alumnos del grupo 5º B en la resolución de la tarea nº 19. El profesor pide al alumno A29 que salga a la pizarra para resolver la tarea. Después de ejemplificar el reparto con tres alumnos y utilizar material manipulativo el alumno obtiene que han sido 2 barras las que se han repartido.

De nuevo, como ha ocurrido en la sesión con el grupo 5º B, cuando el profesor ha solicitado a los alumnos que escriban el reparto los alumnos proponen:

$$6 \quad \underline{|\,3 \qquad}$$

Cuando el profesor indica que el reparto correcto es:

$$2 \quad \underline{|\,3 \qquad}$$

la alumna A34 dice que este reparto no puede hacerse porque el dividendo es menor que el divisor.

Ante las dificultades suscitadas durante la resolución de las tareas nº 19 y 20, el profesor decide posponer la resolución de la tarea nº 20.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º A falta a clase la alumna A47 y en el grupo 5º B falta la alumna A20.

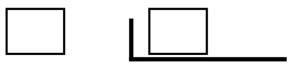
Aspectos relacionados con la comprensión
Pensamos que las dificultades observadas en la resolución de la tarea nº 19 se deben a dos razones: la mayor dificultad cognitiva de la tarea y el sistema de representación simbólico utilizado para designar el reparto.

Respecto al primer aspecto, se esperaba que la búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto, conocido el resultado del mismo, fuese una tarea más compleja que la tarea directa. Además, la formulación verbal de la tarea es de difícil comprensión para los alumnos porque confunden las cantidades de magnitud anteriores y posteriores en el momento de la realización del reparto.

Nuestra propuesta no tiene como objetivo ejercitar reglas para encontrar las condiciones iniciales de aquellos repartos de los que se conoce su resultado. El objeto de esta tarea es realizar una evaluación semántica del significado del reparto y reforzar el concepto de repartos equivalentes.

La mayor dificultad conceptual de la tarea se ha visto agravada con el diseño de una tarjeta de evaluación de la tarea nº 19 demasiado densa y en la que se utiliza un sistema de representación simbólico del reparto que les resulta extraño a los alumnos.

Los alumnos entienden la simbolización:



como la invitación a utilizar una técnica o procedimiento para calcular el resultado de un reparto. Y no lo entienden como la descripción de las condiciones iniciales de un reparto.

Los alumnos están acostumbrados a utilizar el símbolo de la caja para realizar el algoritmo de la división entera de números naturales. Por este motivo, la representación simbólica ha funcionado bien en las tareas precedentes, en las que los alumnos debían ejercitar el procedimiento para encontrar el resultado del reparto. Sin embargo, en la tarea nº 19 la representación simbólica tiene otra interpretación, más estática: fijar las condiciones iniciales de un reparto. Esta interpretación de la simbolización del reparto no ha sido entendida por los alumnos.

Toma de decisiones.
Las dificultades observadas en la resolución de la tarea nº 19 obligan a modificar las tarjetas de evaluación de esta tarea y de las siguientes, de modo que:

1º mantenemos la simbolización con la caja únicamente para realizar el procedimiento de obtención del resultado del reparto.

2º no vamos a utilizar símbolos específicos para la descripción de la condiciones iniciales de un reparto; utilizaremos el lenguaje natural.

3º vamos a enfatizar la ubicación temporal de las cantidades que intervienen en el reparto:

a) lo que recibe cada alumno, después de realizar el reparto.

b) lo que tenían antes de comenzar el reparto.

4º reducimos el número de repartos equivalentes que aparecen en la tarjeta de evaluación de la ficha.

Día 5-12-2000 (Vigésimo tercera sesión)
Plan previsto.
1º Recoger la réplica del examen realizado el pasado viernes.
2º Resolver y evaluar la tarea nº 20.
2º Resolver y evaluar la tarea nº 21.
3º Proponer como trabajo para casa la resolución de la tarea nº 22.

Ejecución

La sesión de clase en ambos grupos comienza con la propuesta de resolución de la tarea nº 20 cuya redacción ha sido modificada. Para realizar la evaluación conjunta de la tarea sale a la pizarra la alumna A03 que ha escrito algunas incorrecciones en la tarjeta de evaluación. Para ayudar a esta alumna y a otros compañeros suyos que no han entendido el enunciado de la tarea, se ejemplifica el reparto con dos personas que reciben $\frac{1}{2}$ barra (caña) cada una. Cuando el profesor le formula la pregunta: "¿cuántas barras de regaliz teníamos antes de hacer el reparto?" la alumna responde correctamente que teníamos una barra. Después resuelve la tarea de modo gráfico la tarea y realiza la suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ barra}$$

La misma alumna intenta encontrar el número de barras que había antes de que se haya realizado el reparto entre 4 personas y cada una haya recibido 1/2 barra. De nuevo ha sido necesario utilizar el material manipulativo. Después la alumna ha realizado en la pizarra representaciones gráficas con el modelo longitud y, finalmente, representaciones simbólicas:

$$\frac{1}{2} \text{ x } 4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ barras}$$

El profesor escribe, en la pizarra, los repartos:

1 barra entre 2 personas
2 barras entre 4 personas

y explica que son repartos equivalentes porque en cada uno de ellos las personas reciben la misma cantidad de regaliz. Y solicita a los alumnos que indiquen otros repartos equivalentes. Los alumnos nombran los repartos siguientes:

3 barras entre 6 personas
4 barras entre 8 personas
5 barras entre 10 personas

Los alumnos del grupo 5º A afrontan la tarea nº 21 que es similar a la anterior con la diferencia de que ahora cada persona recibe 5/4 de barra. Termina la sesión de clase en este grupo sin quedar tiempo para evaluar la tarea nº 21. El profesor recoge esta tarea y entrega la siguiente para que los alumnos la resuelvan en sus casas durante el puente festivo de la Constitución y de la Inmaculada.

En la sesión con el grupo 5º B se desarrolla la misma secuencia de actividades que con el grupo de 5º A. Se deja sin evaluar la antigua ficha nº 20 y pasamos a proponer la resolución de esta misma ficha que tiene modificada su tarjeta.

Para realizar la evaluación conjunta de la tarea nº 20 sale a la pizarra la alumna A24 que no ha sabido resolver la segunda y la tercera parte de la tarea. Las actuaciones seguidas han sido las mismas que las descritas en el grupo 5º A, salvo lo referente al proceso de institucionalización del concepto de repartos equivalentes. Se deberá incidir en este aspecto cuando se realice la evaluación de la tarea nº 21.

Los alumnos han dispuesto de poco tiempo para resolver la siguiente tarea. Sólo dos alumnos (A01 y A15) de este grupo han terminado la tarea nº 21. El profesor decide que los alumnos se lleven esta tarea a sus casa para que la terminen de resolver durante el puente festivo y, además, les propone la resolución de la tarea nº 22.

Asistencia de alumnos

Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º A. En el grupo 5º B falta la alumna A34.

Aspectos actitudinales

Los alumnos del grupo 5º A han estado muy trabajadores. El esfuerzo dedicado en la resolución de la tarea nº 20 se manifiesta en el alto nivel de éxito alcanzado. Los alumnos del grupo 5º B han tenido un buen comportamiento pero no han mostrado el mismo interés que aquellos durante la resolución de la tarea.

Aspectos relacionados con la comprensión

Si comparamos el rendimiento obtenido por los alumnos de los dos grupos en la tarea nº 20 se observan diferencias sustanciales: los alumnos del grupo 5º A obtienen niveles de éxito muy superiores a los obtenidos por los alumnos de 5º B. Veamos los datos obtenidos:

Tarea nº 20	*5º A*		*5º B*	
	1ª parte	*2ª parte*	*1ª parte*	*2ª parte*
Número de alumnos que aportan una solución correcta y bien justificada	20	20	13	11
Número de alumnos que aportan una solución incorrecta o no justificada	3	3	8	10

Tarea nº 20	*5º A*	*5º B*
	3ª parte	*3ª parte*
Número de alumnos que encuentran repartos equivalentes a "un medio"	20	11
Número de alumnos que justifican correctamente los repartos hallados	14	5

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A muestran un nivel de comprensión posiblemente superior al que realmente poseen. El alto rendimiento de los alumnos en esta tarea puede deberse a la ayuda que han recibido algunos alumnos por parte del profesor y de otros compañeros dado que han dispuesto de un mayor plazo temporal para la resolución de esta ficha.

Por otra parte, resulta decepcionante el rendimiento obtenido por los alumnos del grupo 5º B. Del estudio de las respuestas dadas por los alumnos podemos avanzar como hipótesis más certera que algunos alumnos (A20, A25, A30 y A49) no han entendido el enunciado de la tarea y que otros alumnos confunden las tres cantidades que intervienen en los repartos. Por otro lado, resulta lógico, que estas dificultades conceptuales se agudicen cuando los alumnos se enfrentan a tareas más complejas, como la nº 20, que plantea el proceso inverso al realizado en tareas anteriores: dado el resultado de un reparto se pide encontrar las condiciones iniciales del reparto.

Con independencia del nivel de éxito obtenido por los alumnos, durante la resolución de la tarea han aparecido una gran variedad de estrategias que deberán ser comentadas en el aula.

Nº de alumnos que utilizan y justifican la siguientes estrategias en la tarea nº 20	*5º A*			*5º B*		
	1ª parte	2ª parte	3ª parte	1ª parte	2ª parte	3ª parte
Dibujos	9	9	7	1	3	2
Suma	5	2	0	8	6	0
Multiplicación	3	5	4	2	1	3
Razonamientos con repartos	3	4	3	2	1	0

Cuando los alumnos tienen una comprensión aceptable de la tarea a resolver tienden a utilizar, inicialmente, representaciones gráficas. Después, cuando los alumnos alcanzan una mejor comprensión suelen abandonar esta estrategia por otras, más rápidas, de carácter simbólico.

Toma de decisiones.
Se deciden tres actuaciones:

1º Explicar a los alumnos las tres cantidades que intervienen en todo proceso de reparto. Para ello se aconseja escribir en la pizarra el siguiente esquema temporal del reparto:

ANTES DE REALIZAR EL REPARTO, hay que tener en cuenta dos cantidades:

Número de barras de regaliz

Número de personas que participan en el reparto

DESPUÉS DE REALIZAR EL REPARTO, hay que tener en cuenta:

La cantidad de regaliz que recibe cada persona.

2º Ejemplificar los dos tipos de tareas resueltas:

a) Problema directo:

Número de barras de regaliz

Número de personas

Cantidad de regaliz que recibe cada persona

?

b) Problema inverso:

Cantidad de regaliz que recibe cada persona

Número de personas

Número de barras de regaliz que había antes de repartir

?

3º Presentar a los alumnos las diferentes estrategias que han utilizado en la resolución de la tarea nº 20.

Con estas actuaciones no pretendemos ejercitar a los alumnos en la resolución de este tipo de tareas. El objetivo es que los alumnos mejoren la comprensión que tienen del concepto de reparto igualitario.

Día 11-12-2000 (Vigésimo cuarta sesión)

Plan previsto.

1º Entregar a los alumnos la réplica de la prueba efectuada por los alumnos el día 1 - 12 - 00, y realizar algunos comentarios sobre las respuestas dadas por los alumnos.
2º Explicar el significado de reparto.
3º Recoger y evaluar la tarea nº 21.

Ejecución

Comienza las sesiones de clase con el grupo 5º B. El profesor entrega a los alumnos la réplica de la prueba sobre operaciones con fracciones.

El alumno A49 sale a la pizarra para que realice la suma de fracciones que se propone en el problema nº 6. Este alumno había realizado la operación sumando numeradores y denominadores.

El profesor explica, a modo de repaso, las cantidades que intervienen en los dos momentos que suceden en un reparto. Con la ayuda de los alumnos A30, A27 y A19 se ejemplifica el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas". Aparecen las fracciones 5/4 y 10/8 barras como soluciones de este reparto.

No ha quedado tiempo para terminar la evaluación conjunta de la tarea nº 21. El profesor plantea a los alumnos la siguiente cuestión que se retomará al comienzo de la siguiente sesión:

"Si después de realizar un reparto cada persona recibe 5/4 de barra. Y se sabe que han participado 8 personas en el reparto, ¿cuántas barras de regaliz había antes de realizar el reparto?".

En el grupo 5º A se revisan algunos problemas de la prueba de operaciones con fracciones. La alumna A03 sale a la pizarra a realizar el primer problema y el alumno A37 a resolver el problema nº 3. Este alumno había sumado numeradores y denominadores para efectuar $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

El profesor explica el significado del reparto efectuado en una fase y ejemplifica las cantidades que intervienen en los dos momentos de un reparto, con el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas". Para realizar este reparto ha salido a la pizarra la alumna A31 que ha simbolizado de forma errónea el reparto:

<u>Asistencia de alumnos</u>
En el grupo 5º A falta la alumna A47 y en el grupo 5º B falta la alumna A20.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos grupos han mostrado buena disposición al trabajo.

<u>Toma de decisiones.</u>
1º A partir de esta sesión el profesor solicita que los alumnos utilicen el cuaderno de matemáticas para realizar anotaciones de algunas explicaciones o bien para realizar en él tareas de refuerzo o de ampliación cuando no se les entregue la tarjeta de evaluación.
2º. Dado que se han detectado dificultades de comprensión cuando los alumnos han afrontado la tarea de encontrar las condiciones iniciales de un reparto conocido el resultado del mismo, se decide realizar, con más detenimiento, la evaluación conjunta de la tarea 21.

Día 12-12-2000 (Vigésimo quinta sesión)
<u>Plan previsto.</u>
Evaluar la tarea nº 21.

<u>Ejecución</u>
En ambos grupos de docencia se procede a evaluar la tarea nº 21. Al comienzo de la sesión el profesor escribe en la pizarra una parte del enunciado de la tarea:
"Si después de realizar un reparto cada persona recibe 5/4 de barra. Y se sabe que han participado 8 personas en el reparto, ¿cuántas barras de regaliz había antes de realizar el reparto?".

El alumno A16 sale a la pizarra y escribe:

$$\frac{5}{4} \text{ x } 8 = \frac{40}{4} = 10 \text{ barras}$$

El alumno duda al simplificar $\frac{40}{4}$. Efectúa la división de 40 entre 4 y obtiene la respuesta correcta.

El alumno A21 que suele utilizar la estrategia basada en representaciones gráficas procede del siguiente modo: dibuja 8 barras, una para cada alumno, y después dibuja dos más fraccionando cada una de ellas en 4 partes iguales. El alumno afirma que con las 10 barras da $\frac{5}{4}$ de barra a cada una de las 8 personas.

El alumno A48 solicita salir a la pizarra porque ha resuelto la tarea de otro modo. Escribe:

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$$

pero no sabe justificar que las condiciones iniciales de un reparto en el que se reciba $\frac{10}{8}$ de barra son 10 barras y 8 personas.

El profesor aprovecha para recordar que en los repartos "5 barras entre 4 personas" y "10 barras entre 8 personas" son equivalentes porque las personas que participan en el reparto reciben la misma cantidad de magnitud. Después, plantea la siguiente tarea: "Encontrar tres repartos equivalentes al reparto "5 barras entre 4 personas".

La alumna A35 utiliza una estrategia multiplicativa:

$$\frac{5}{4} \text{ x } 8 = 10 \text{ barras}$$

$$\frac{5}{4} \text{ x } 12 = 15 \text{ barras}$$

$$\frac{5}{4} \text{ x } 16 = 20 \text{ barras}$$

La alumna A13 encuentra repartos equivalentes a partir de fracciones equivalentes, y escribe:

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \frac{20}{16} = \frac{40}{32}$$

Ahora bien, esta alumna no sabe justificar por qué los repartos que se obtienen son equivalentes.

La alumna A10 dice que los repartos "5 barras entre 4 personas" y "10 barras entre 8 personas" son equivalentes porque he multiplicado las barras y las personas por 2 y explica:

"*si haces el doble de todo obtienes lo mismo*".

El profesor desea que los restantes alumnos comprendan este razonamiento valioso y pregunta: "¿Entendéis lo que dice vuestra compañera?". Los alumnos afirman que no. Entonces el profesor escenifica con barras y alumnos dos repartos de "5 barras entre 4 personas". Propone construir el reparto "10 barras entre 8 personas" que acontece cuando las personas deciden compartir las barras que se van a repartir antes de realizar el reparto. En esta situación las personas que deciden compartir reciben la misma cantidad de regaliz que antes de juntarse. Esto es así porque las personas que deciden "compartir" son igualmente ricas.

Aprovechando que la alumna A05 ha escrito que "7 barras entre 6 personas" es equivalente a "5 barras entre 4 personas" y que la alumna A23 afirma que "10 barras entre 9 personas" es equivalente a "5 barras entre 4 personas" el profesor propone como trabajo para casa comparar los repartos:

"5 barras entre 4 personas"
"7 barras entre 6 personas"
"10 barras entre 9 personas"

En el grupo 5º B se ha realizado la evaluación conjunta de la tarea nº 21 y ha quedado pendiente la evaluación de la tercera parte de esta tarea. El profesor les pide a los alumnos que copien el enunciado en sus cuadernos e intenten resolverla en sus casas.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º A falta la alumna A03 y en el grupo 5º B falta la alumna A20.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos han mostrado buena disposición al trabajo. Los alumnos han participado de forma activa en la exposición de estrategias de resolución de la tarea. En el grupo 5º A han aparecido estrategias más avanzadas como la sugerida por la alumna A10.

Toma de decisiones.
Consideramos oportuno reforzar las estrategias de obtención de las condiciones iniciales de un reparto realizado en una sola fase, así como valorar la introducción de la estrategia para comparar repartos basada en la idea de "compartir repartos".

Día 13-12-2000 (Vigésimo sexta sesión)
Plan previsto.
1º En el grupo 5º A resolver y evaluar la tarea propuesta al final de la sesión anterior.
En el grupo 5º B resolver y evaluar la tercera parte de tarea nº 21.

Ejecución
Los alumnos del grupo 5º A reciben al comienzo de la sesión la tarea nº 21 con el encargo de resolver el problema planteado en la sesión anterior que consiste en comparar los repartos:

"5 barras entre 4 personas"
"7 barras entre 6 personas"
"10 barras entre 9 personas"

Como la mayoría de los alumnos no lo ha traído resuelto en sus casas, lo trabajan en el aula durante unos minutos.

La alumna A22 muestra una escasa comprensión del resultado de un reparto cuando pregunta si debe ordenar los repartos por el número de barras o por el número de personas. El profesor realiza un intervención general para recordar el significado del resultado de un reparto.

El profesor pide a la alumna A05 que tiene dificultades para resolver esta tarea que salga a la pizarra. Como no sabe cómo afrontar la tarea le aconsejan sus compañeros que exprese con una fracción los resultados de los tres repartos. La alumna utiliza el procedimiento simbólico y obtiene las fracciones:

$$\frac{5}{4}, \frac{7}{6} \text{ y } \frac{10}{9}$$

y procede a ordenarlas buscando un denominador común:

$$\frac{5}{4} = \frac{45}{36}$$
$$\frac{7}{6} = \frac{42}{36}$$
$$\frac{10}{9} = \frac{40}{36}$$

La alumna ordena los repartos a partir de las fracciones que indican sus resultados.

El profesor observa que, en este caso, se pueden ordenar las fracciones sin tener que encontrar fracciones equivalentes:

$$\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$
$$\frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$$
$$\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}$$

y después, comparar las fracciones unitarias.

El profesor intenta que aparezcan otras estrategias para comparar repartos basadas exclusivamente en la idea de reparto. Para ello les propone comparar los repartos:

"5 barras entre 4 personas"
y
"10 barras entre 9 personas"

sin utilizar las fracciones que indican los resultados de los repartos.

Algunos alumnos (A16, A31 y A09) vuelven a justificar la comparación con la idea de fracción. La alumna A10 razona correctamente del siguiente modo:

> "*En el reparto "5 barras entre 4 personas" las personas reciben más que en el reparto "10 barras entre 9 personas" porque "5 barras entre 4 personas" es lo mismo que "10 barras entre 8 personas", mientras que "10 barras entre 9 personas" es peor porque hay el mismo número de barras y hay una persona más*".

El profesor desea comprobar el grado de comprensión que los alumnos del grupo 5º A muestran cuando se les presenta la estrategia basada en "compartir repartos". Para ello solicita que los alumnos comparen los repartos:

"2 barras entre 2 personas"
y
"5 barras entre 4 personas"

Los alumnos afirman que el primer reparto es menor que el segundo reparto. El profesor les propone construir el reparto que se forma al compartir las barras los dos grupos de personas que participan en los dos repartos. El nuevo reparto es "7 barras entre 6 personas" y se trata de un reparto intermedio entre los dos escritos anteriormente.

Algunos alumnos indican que han entendido este razonamiento. Sin embargo, pensamos que esta estrategia utiliza razonamientos muy avanzados para la capacidad cognitiva actual de los alumnos.

Antes de concluir la sesión de clase, el profesor entrega a los alumnos la tarea nº 22 con el encargo de que la traigan resuelta a la siguiente sesión.

Los alumnos del grupo 5º B han recibido la tarea nº 21 con indicaciones para que intenten resolver los apartados mal resueltos. El tercer apartado coincide con la tarea propuesta al finalizar la sesión anterior.

Un grupo de siete alumnos (A04, A12, A18, A25, A26, A50 y A52) han tenido más dificultades de las esperadas para justificar correctamente sus respuestas, teniendo en cuenta que las soluciones de los apartados 1 y 2 las tenían escritas en sus cuadernos porque habían sido resueltas en la sesión de clase del día anterior. En este caso, además de baja compresión se observa en estos alumnos escaso interés por resolver la ficha.

Cuando los alumnos han ido acabando correctamente la tarea nº 21 el profesor les propone la resolución de la tarea nº 22.

Antes de terminar la sesión de clase se realiza la evaluación conjunta de la tercera parte de la tarea nº 21. La alumna nº 11 sale a la pizarra y propone, inicialmente, que un reparto equivalente a "5 barras entre 4 personas" es "15 barras entre 4 personas"

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º A falta la alumna A47 y en el grupo 5º B falta la alumna A20.

Aspectos actitudinales
La profesora tutora del grupo 5º B no ha podido asistir a clase por encontrarse enferma y ello ha hecho que la gestión de la clase haya sido más compleja. Algunos alumnos de este grupo (A02, A12, A26 y A49) han tenido mala actitud durante la sesión y por ello el profesor les ha obligado a quedarse parte del recreo hasta que han terminado correctamente la tarea.

Aparte del mal comportamiento de un número reducido de alumnos, las diferencias de este grupo con el grupo 5º A son notables. Se observa que en la clase de 5º B el grupo de alumnos que realiza con éxito las tareas es menos numeroso que en la otra clase y además, los alumnos que componen este grupo no ejercen un liderazgo sobre el resto de sus compañeros.

Aspectos relacionados con la comprensión
Hemos dedicado tres sesiones a profundizar en el significado de la idea de reparto a partir de la resolución de la tarea nº 21. Este tiempo pudiera ser considerado excesivo pero ha permitido que los alumnos muestren estrategias de resolución muy valiosas.

Vamos a analizar las estrategias utilizadas por los alumnos de ambos grupos que resuelven correctamente los apartados de la tarea y justifican su respuesta:

Nº de alumnos que utilizan y justifican la siguientes estrategias en la tarea nº 21	*5º A* 1ª parte	*5º A* 2ª parte	*5º B* 1ª parte	*5º B* 2ª parte
Dibujos	6	5	4	4
Suma	4	1	1	1
Multiplicación	5	4	6	6
Conjetura y después comprueba	1	1	1	1
Razonamiento proporcionalidad	0	1	1	1
Totales	16	12	13	13

Nº de alumnos que utilizan y justifican la siguientes <u>estrategias</u> en la tarea nº 21	*5º A* 3ª parte	*5º B* 3ª parte
Equivalencia de fracciones	0	9
Equivalencia de repartos.	9	5
Conjetura y después comprueba	1	1
Dibujos	0	2
Totales	10	17

Los alumnos del grupo 5º B han dispuesto de una segunda oportunidad para revisar y modificar las respuestas Ello explica el mejor rendimiento alcanzado en los apartados 2 y 3 de esta tarea.

En este momento de la instrucción en el que se perfila la multiplicación de la fracción que indica el resultado de un reparto por el número de participantes como la estrategia mayoritaria por un criterio de economía, se da la circunstancia de que los alumnos con mejor nivel de comprensión utilizan estrategias más rudimentarias pero que manejan con soltura. Este es el caso de los alumnos A10, A21, A35 y A40 (de 5º A) y las alumnas A14, A19 y A34 (de 5º B) que utilizan representaciones gráficas. O el caso del alumno A11 (de 5º A) y de los alumnos A15 y A27 (de 5º B) que proceden conjeturando el resultado y después realizan la comprobación. O el caso de la alumna A09 de 5º A y el alumno A01 de 5º B que prefieren sumar la fracción tantas veces como indica el número de participantes.

Unos pocos alumnos encuentran repartos equivalentes al reparto "5 barras entre 4 personas" utilizando la idea de proporcionalidad. Así, la alumna A19 escribe:

"*15 barras de regaliz entre 12 personas*

20 barras de regaliz entre 16 personas

25 barras de regaliz entre 20 personas

son equivalentes porque las personas van de dos en dos y las barras de 5 en 5".

La alumna A14 una respuesta ingeniosa. Como su propósito es conocer las barras de regaliz que disponían 8 personas en un reparto en el que reciben $\frac{5}{4}$ de barra, descompone el resultado en una barra y un cuarto de barra y explica:

"Son $\frac{5}{4}$, la unidad son $\frac{4}{4}$ hay 8 barras de $\frac{4}{4}$ y $\frac{8}{4}$ sueltas ahi 2 barras, entonces 8 + 2 = 10 barras"

La actividad de comparación de repartos que se realiza en la grupo 5º A sirve para mostrar a los alumnos que las estrategias aditivas no son adecuadas para obtener repartos equivalentes. También se ha servido para verificar que la estrategia basada en "compartir repartos" está alejada de las capacidades cognitivas de los alumnos.

<u>Toma de decisiones.</u>
Las actividades sobre búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto se han diseñado para realizar una evaluación semántica del reparto realizado en una sola fase. El objetivo de la secuencia de enseñanza no es ejercitar la técnica de obtención de las condiciones iniciales de un reparto. Se persigue que los alumnos mejoren la comprensión de la idea de reparto mas que consolidar determinados procedimientos. Con este mismo objetivo se han diseñado las tareas nº 22 y 23 de comparación de repartos, que van a resolver los alumnos en las sesiones siguientes.

Día 14-12-2000 (Vigésimo séptima sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 22.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 23

Ejecución

Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. Cuando el profesor recoge la tarea nº 22 observa que 10 alumnos (A03, A05, A07, A22, A28, A29, A31, A32, A40 y A51) no la traen resuelta de sus casas. Algunos de ellos dicen haberla dejado olvidada en su domicilio.

La alumna A33 que no ha sabido resolver la tarea sale a la pizarra y resuelve la primera parte de la tarea sin ninguna dificultad. Procede dibujando los resultados de los repartos "2 barras entre 3 personas" y "4 barras entre 3 personas". Después razona sobre el gráfico que $\frac{4}{3}$ es mayor que $\frac{2}{3}$

El profesor desea ver aparecer otras estrategias y para ello pregunta a los alumnos si han resuelto la tarea de otro modo diferente. El alumno A16 dice haber encontrado fracciones equivalentes:

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{12}{9}$$

El profesor le indica que no es necesario utilizar la equivalencia de fracciones. También interviene para comentar que el método utilizado hasta este momento consiste en calcular el resultado de los repartos y, después, comparar las fracciones que se han obtenido. Y de nuevo, les pregunta si saben resolver la tarea de otro modo diferente.

La alumna A09 razona utilizando el significado de reparto y otros alumnos (A10, A11, A13 y A31) hacen suyo este razonamiento. El profesor comenta que esta estrategia es válida y les dice que la escriban en sus cuadernos de matemáticas.

Para evaluar la segunda parte de la tarea sale a la pizarra la alumna A07. Escribe que en el reparto "2 barras entre 3 personas" cada persona recibe 2/3 de barra y que en el reparto "2 barras entre 5 personas" cada persona recibe 2/5 de barra. Después dibuja, con dificultad, las cantidades 2/5 y 2/3, las compara y expresa la comparación en términos de reparto.

La alumna A31 propone comparar las fracciones 2/5 y 2/3 con el significado de medida. El alumno A16, que ha utilizado la equivalencia de fracciones en el primer apartado, procede de modo análogo:

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

El profesor ha preguntado si ahora es posible resolver la tarea utilizando la idea de reparto. La alumna A09 razona que el reparto "2 barras entre 3 personas" es mayor "porque hay las mismas barras pero el número de personas es menor y entonces les toca más cantidad a cada uno".

Finalmente los alumnos del grupo 5º A resuelven la tarea nº 23. La mayoría de los alumnos la resuelve correctamente utilizando como estrategia la comparación de las fracciones asociadas a los repartos.

La sesión de clase con el grupo 5º B ha comenzado a las 15 horas porque los alumnos han realizado una excursión programada durante la jornada de mañana. Se ha cumplido con la planificación prevista y la sesión se ha desarrollado de forma análoga a la del grupo 5º A.

Para evaluar la primera parte de la tarea nº 22 sale a la pizarra la alumna A15. Procede hallando los resultados de ambos repartos, de forma gráfica y de forma simbólica; después establece la conexión entre la representación fraccionaria y el reparto.

Cuando el profesor pregunta a los alumnos si saben comparar los repartos sin utilizar la notación fraccionaria, sólo tres alumnos (A01, A34 y A38) proponen un razonamiento basado en la idea de reparto.

El profesor solicita que la alumna A04 salga a la pizarra para resolver la segunda parte de la ficha nº 22 porque no ha sabido resolver la tarea y mantiene una actitud pasiva. La alumna compara los repartos, con gran dificultad, utilizando la notación fraccionaria. De nuevo el profesor pregunta a los alumnos si conocen otro método de resolución basado en la idea de reparto. La alumna A17 ha expresado un razonamiento correcto que el profesor ha escrito en la pizarra para que los alumnos lo copien en sus cuadernos.

Finalmente los alumnos han afrontado la resolución de la tarea nº 23. Algunos alumnos han actuado con apatía (A06, A12, A25, A39, A49 y A50). Antes de terminar la sesión se realiza la evaluación de la primera parte de la ficha.

Algunos alumnos tienen un conocimiento inestable de la fracción como resultado de un reparto Así la alumna A17, que antes ha formulado un razonamiento valioso, ahora aporta un razonamiento incorrecto al escribir:

"*El reparto "5 barras entre 4 personas" es mayor que el reparto "4 barras entre 3 personas" porque hay más barras y más personas*".

Queda pendiente de evaluar la segunda parte de la ficha nº 23.

Asistencia de los alumnos
En el grupo 5º A falta la alumna A47 y en el grupo 5º B falta los alumnos A02 y A30.

Aspectos actitudinales
Se percibe cansancio en los alumnos de los dos grupos de docencia, posiblemente influya la duración de este trimestre y la proximidad de las fiestas de Navidad. Se incrementa el número de alumnos que no realizan las tareas encomendadas para casa y que en el aula las realizan con menor dedicación y esmero.

Aspectos relacionados con la comprensión
Veamos los resultados de las tareas nº 22 y 23, sobre comparación de repartos, y las estrategias utilizadas por los alumnos:

Tarea nº 22	*5º A*	*5º B*
Resuelven bien la tarea y justifican correctamente la respuesta.	15	11
Muestran algún tipo de dificultad	6	9
Totales	21	20

Tarea nº 23	*5º A*	*5º B*
Resuelven bien la tarea y justifican correctamente la respuesta.	16	10
Muestran algún tipo de dificultad	6	11
Totales	22	21

Los alumnos del grupo 5º A que han tenido alguna dificultad en la resolución de la tarea nº 22 son A03, A07, A29, A32, A33 y A37. Y los que han cometido errores en la tarea nº 23 son: A03, A07, A23, A32, A36 y A51.

Los alumnos del grupo 5º B que han tenido alguna dificultad en la resolución de la tarea nº 22 son A02, A04, A06, A12, A15, A17, A18, A30 y A52. Y los que han cometido errores en la tarea nº 23 son: A04, A12, A17, A18, A20, A24, A25, A26, A39, A49 y A52.

Nº de alumnos que utilizan correctamente las siguientes estrategias en la tarea nº 22	*5º A*	*5º B*
Comparación de fracciones o equivalencia de fracciones	7	3
Idea de reparto	5	4
Representaciones gráficas	3	4
Totales	15	11

Nº de alumnos que utilizan correctamente las siguientes estrategias en la tarea nº 23	*5º A*	*5º B*
Comparación de fracciones o equivalencia de fracciones	13	8
Idea de reparto	0	0
Representaciones gráficas	3	2
Totales	16	10

La naturaleza de los repartos que se trabajan en la tarea nº 22, en los que se comparan repartos con el mismo número de personas o de barras de regaliz, permite que algunos alumnos utilicen como estrategia la idea de reparto. Sin embargo, esta estrategia no saben gestionarla con los repartos que aparecen en la tarea nº 23. En otro momento de la secuencia de enseñanza se observó que los alumnos no estaban capacitados para utilizar la idea de "compartir" repartos como estrategia de comparación de repartos.

Como era previsible la mayoría de los alumnos proceden identificando las fracciones que expresan el resultado de los repartos y después comparan estas fracciones utilizando el concepto de equivalencia de fracciones. Los alumnos que utilizan representaciones gráficas suelen expresar, con una fracción, la cantidad de longitud que recibe cada persona en los dos repartos; y después comparan las longitud obtenidas en cada uno de los repartos.

Se observa que la mayoría de los alumnos que han utilizado las fracciones que expresan el resultado de los repartos, han sabido aplicar correctamente la equivalencia de fracciones. En este sentido se constatan progresos porque, al comienzo de las secuencia de enseñanza, los alumnos de 5º curso no tenían operativo el concepto de equivalencia de fracciones.

En la tarea nº 22, se han considerado como respuestas erróneas aquellas que no aportan ninguna justificación de la respuesta. En esta tarea seis alumnos dan una respuesta incorrecta o, aunque sea correcta, no la justifican adecuadamente.

Bastantes de los errores detectados en las tarjetas de evaluación correspondientes a la tarea nº 23 son de naturaleza conceptual y tienen su origen en la aplicación de reglas falsas como la que propone la alumna A17, cuando afirma que el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas" es menor que "5 barras de regaliz entre 4 personas" porque " 3 es menor que 5 y 2 es menor que 4". Los alumnos A36 y A39 afirman que los repartos son iguales porque, posiblemente, vinculan la equivalencia de fracciones a estrategias aditivas antes que a estrategias multiplicativas.

Valoración:
Podemos concluir que en la tarea de comparación de repartos nº 23 en la que los repartos a comparar tenían diferente número de barras y número de personas los alumnos han procedido comparando las fracciones que expresan los resultados de los repartos. Por este motivo han desaparecido las estrategias basadas en la idea de reparto que han sido utilizadas durante la resolución de la tarea nº 22. Sin embargo, observamos progresos en la consolidación de la noción de equivalencia cuando comparan fracciones.

Día 15-12-2000 (Vigésimo octava sesión)
Plan previsto.
1º Evaluar la tarea nº 23
2º Resolver la tarea nº 24 en la que se realiza un reparto por fases y se fraccionan las cantidades sobrantes en 10 partes iguales

El objetivo de la sesión es introducir la representación polinómica decimal como paso previo a la introducción de la notación decimal. Los alumnos mediante la utilización de material van a proceder a repartir "3 barras de regaliz entre 2 personas" con la condición de que el reparto se realice por fases y que las cantidades sobrantes de cada fase se fraccionen en 10 partes iguales.

Ejecución
A las 9 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º B. Los 15 primeros minutos se dedican a evaluar la segunda parte de la tarea nº 23. Sale a la pizarra el alumno A52, que es una de las nueve personas que no supo resolver esta tarea. El alumno resuelve correctamente la tarea sin necesidad de recibir ayuda. Esta circunstancia ocurre con frecuencia: cuando los alumnos salen a la pizarra se sienten más motivados, muestran más atención y, en consecuencia, aumenta su rendimiento.

El alumno ha utilizado el procedimiento seguido por la mayoría de sus compañeros. Mediante representaciones gráficas ha obtenido que las cantidades que reciben las personas que participan en los repartos son $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{4}$ de barra. Después, utiliza la equivalencia de fracciones para comparar los repartos:

$$\frac{3}{2} = \frac{3x4}{2x4} = \frac{12}{8}$$
$$\frac{5}{4} = \frac{5x2}{4x2} = \frac{10}{8}$$

El profesor indica que también se pueden comparar las fracciones buscando fracciones equivalentes con denominador 4, es decir, comparando $\frac{6}{4}$ y $\frac{5}{4}$.

Después pregunta a los alumnos si saben comparar repartos utilizando únicamente la idea de reparto, sin recurrir a la comparación de fracciones. Algunos alumnos dicen que en un reparto cada persona recibe 1 barra y un cuarto de barra, mientras que en el otro reparto reciben 1 barra y media barra. El razonamiento es correcto pero están utilizando las fracciones como resultado de los repartos. En el grupo 5º B ningún alumno ha sabido razonar con el significado de reparto y en el grupo 5º A sólo una alumna (A10) ha dado un razonamiento válido:

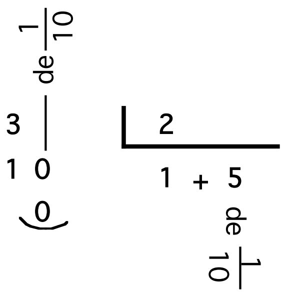
> "*Como el reparto "3 barras entre 2 personas" es lo mismo que el reparto "6 barras entre 4 personas", éste ultimo es mejor que el reparto "5 barras entre 4 personas" porque hay las mismas personas pero tienen una barra más*".

En el grupo 5º A se ha evaluado la tarea nº 23 siguiendo la misma secuencia de acciones que en el grupo 5º B. La alumna A03 ha resuelto la tarea correctamente con la ayuda de algunas indicaciones que le sugiere el profesor.

Antes de resolver la tarea nº 24 el profesor escribe en la pizarra el título del siguiente procedimiento de reparto: REPARTOS REALIZADOS EN VARIAS FASES. Los alumnos no reciben la tarjeta de evaluación de la tarea, escriben en su cuaderno este título y la siguiente tarea:

> "*Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales*"

Los alumnos han afrontado la tarea formando equipos de 2 personas. Cada equipo recibe 3 barras y una tira de papel de la misma longitud de las barras que está fraccionada en 10 partes iguales. El profesor ha guiado la resolución de esta nueva técnica de reparto, de modo que ha escrito en la pizarra las representaciones simbólicas trasladadas de las acciones que los alumnos realizan con el material:



El resultado del reparto que hemos aceptado como solución de la tarea es *1 +* $\frac{5}{10}$ *de barra*.

Algunos alumnos han intuido la aparición de los números decimales. También unos pocos alumnos de ambos grupos han sumado las fracciones y dan como resultado 15/10 de barra. El profesor ha preguntado si habíamos cometido algún error porque sabíamos de antemano que el resultado del reparto es 3/2 de barra. Los alumnos explican que no ha habido ningún error porque las fracciones 15/10 y 3/2 son equivalentes. El profesor vuelve a indicar que estamos realizando un reparto por fases y ahora vamos a expresar el resultado del reparto indicando, en cada sumando, *lo que recibe en cada fase*.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º B. En el grupo 5º A falta la alumna A46.

Aspectos actitudinales
La gestión de la clase en el grupo 5º B se torna más cómoda porque se ha incorporado la profesora después de haber estado dos días enferma.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos aprenden la técnica con facilidad. Sin embargo, hemos observado dificultades conceptuales en la comprensión del reparto por fases. A los alumnos les sorprende que una misma acción les lleve a obtener un resultado del reparto expresado de otra forma diferente.

También hemos observado que los alumnos tienen una escasa comprensión del papel que juegan los agrupamientos decimales (de base diez) en nuestro sistema de numeración. Después de realizar la tarea en ambos grupos el profesor ha preguntado si saben la razón de que los fraccionamientos se realicen en 10 partes iguales y no en otro número de partes diferente. Los alumnos no han sabido responder a esta cuestión y, lo que es peor, después de que el profesor ha justificado la existencia de los sistemas posicionales de base decimal, los alumnos no han intervenido. Este es un indicio de escasa comprensión, por parte de los alumnos, del concepto de sistema de numeración.

Día 18-12-2000 (Vigésimo novena sesión)
Plan previsto.
Resolver la tarea nº 25 y nº 26 en las que se realiza un reparto por fases y se fraccionan las cantidades sobrantes en 10 partes iguales

Ejecución
A las 9 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º B. Los primeros minutos se dedican a evaluar un problema del examen realizado el día 1 de diciembre. Sale a la pizarra la alumna A20 que había escrito en el examen y se había reafirmado, al volver a resolver el problema de comparar dos listones de madera, que "2/3 es lo mismo que 1/2". En esta ocasión la alumna no realiza el razonamiento incorrecto y, cuando se le pregunta por qué había dado esta respuesta incorrecta, la alumna argumenta que se había confundido al realizar los gráficos.

En los dos grupos de docencia se sigue la misma metodología de trabajo. Para resolver la tarea nº 25 los alumnos se colocan en grupos de cinco, alrededor de la mesa de uno de los alumnos del grupo. Cada grupo recibe 7 barras de regaliz (cañas).

Después de realizar la primera fase del reparto, algunos alumnos desprecian las dos barras de regaliz que quedan por repartir. Otros no recuerdan que deben fraccionar las dos barras en 10 partes iguales. Finalmente, todos los grupos obtienen la Representación Polinómica Decimal del reparto.

Los alumnos reciben la tarjeta de la ficha para que representen con gráficos las acciones realizadas con el material y, después, simbolicen el reparto. Como era de esperar, los alumnos realizan correctamente los gráficos pero tienen dificultades para simbolizar el proceso de reparto.

El profesor realiza la evaluación conjunta de la tarea nº 25 y propone a los alumnos la resolución de la tarea nº 26. Los alumnos disponen de poco tiempo para resolver la tarea. Por esta razón solo la concluyen los alumnos A09 y A10 de 5º A y los alumnos A01, A18, A27 y A34 de 5º B. El profesor propone que la terminen de resolver en sus casas. Al comienzo de la siguiente sesión se evaluará esta ficha.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º A faltan los alumnos A32 y A47; y en el grupo 5º B los alumnos A15, A38 y A49. Además estos dos últimos alumnos van a faltar durante toda la semana porque adelantan las vacaciones para viajar a sus países de origen.

Aspectos actitudinales
Se observa que los alumnos están más inquietos. Posiblemente la cercanía de las fiestas navideñas influya en el ánimo y en la menor disposición al estudio.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos saben expresar de forma gráfica y simbólica el proceso del reparto. Veamos los resultados:

Tarea 25	*5º A*		*5º B*	
	BIEN	MAL	BIEN	MAL
Resultado del reparto	18	3 14/10 (A16)	19	1 (A30)
Con dibujos	16	5 (A03, A07, A29, A31 y A37)	10	10 fraccionan mal (A04, A12, A18, A20, A39) no indican como reparten en la 2º fase (A02, A06, A08, A26, A27)
Con símbolos	19	2 (A07, A23)	19	1 (A18)

Los errores detectados en las representaciones gráficas efectuadas por los alumnos de 5º A tienen su origen en un mal fraccionamiento de las barras sobrantes en 10 partes iguales. Algunos alumnos de 5º B han sido descuidados y no se han molestado en asignar, en la 2ª fase del reparto, los trozos fraccionados a cada una de las personas que participan en el reparto.

La representación simbólica del proceso de reparto no ha presentado dificultades. Esto no debe hacernos pensar que los alumnos comprenden el significado del reparto por fases.

Día 19-12-2000 (Trigésima sesión)

Plan previsto.

1º Recoger y evaluar la tarea nº 26
2º Resolver la tarea nº 26BIS
3º Resolver la tarea nº 27

Ejecución

Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. El profesor recoge la tarea nº 26, en la que se pedía repartir por fases "4 barras de regaliz entre 5 personas". Bastantes alumnos la resuelven correctamente. Solicita salir a la pizarra el alumno A28 que tiene dificultades para reconocer las barras sobrantes después de realizar la primera fase del reparto dado que en esta fase no se reparten barras enteras.

Después, los alumnos de ambos grupos han resuelto la tarea nº 26BIS que es análoga a la tarea anterior. Conforme los alumnos terminan con éxito esta tarea se les propone la resolución de la tarea nº 27 en la que los alumnos deben realizar un reparto en tres fases al repartir" 5 barras entre 4 personas". La dificultad de esta tarea radica en evaluar el tamaño de los trozos de barra que quedan cuando se realiza la 3ª fase del reparto. Cuando el profesor realiza indicaciones individuales algunos alumnos de ambos grupos (A09, A10, A31, A33 y A35 de 5º A y A01, A15, A19, A27, A34 y A50 de 5º B) resuelven la tarea.

Para orientar a los restantes alumnos el profesor realiza una intervención conjunta y pregunta a toda la clase: ¿cuál es la longitud del trozo de caña que se obtiene cuando se fracciona, en diez partes iguales, un trozo de tamaño 1/10 de la caña? Para facilitar la respuesta de los alumnos el profesor pregunta: ¿cuántos trozos que son la décima parte de 1/10 de barra hay en una barra? Una alumna de 5º A responde que hay 20 trozos; de nuevo aparecen las estrategias aditivas frente a las multiplicativas.

Cuando los alumnos de 5º A han resuelto la tarea nº 27 se procede a la evaluación conjunta de esta tarea. Como trabajo para realizar en sus casas les propone realizar el reparto "30 barras de regaliz para 8 personas".

En la clase de 5º B los alumnos resuelven la tarea nº 27 pero no ha quedado tiempo para proceder a evaluar conjuntamente los resultados de esta tarea.

Asistencia de alumnos

En el grupo 5º A falta la alumna A32; y en el grupo 5º B los alumnos A38 y A49.

Aspectos relacionados con la comprensión

Mostramos los resultados de las tareas nº 26 y 26BIS:

Tarea 26	*5º A* BIEN	MAL	*5º B* BIEN	MAL
Resultado del reparto	20	0	18	3 (A12, A17, A20)
Con dibujos	11	9 fraccionan mal (A13, A22, A35) no indican como reparten (A03, A07, A09, A33, A40) reparte entre diez personas (A37)	11	12 fraccionan mal (A12, A17, A20, A25) no indican como reparten (A01, A02, A08, A26, A27, A34, A39, A49)
Con símbolos	18	2 (A03, A07)	18	3 (A04, A20, A39)

Los alumnos obtienen con facilidad la nueva representación simbólica del reparto.

Las representaciones gráficas no son un criterio fiable para evaluar la comprensión del proceso de reparto realizado por fases. Algunos alumnos, como los A09, A13, A33, A35 y A40 de 5º A y A01, A27 y A34 de 5º B) han realizado los gráficos de forma descuidada y sabemos que comprenden el significado del reparto por fases. En el enunciado de las tareas se debería haber remarcado la necesidad de expresar con letras las personas implicadas en el reparto y por lo tanto, la conveniencia de que los alumnos muestren como asignan los trozos de tamaño las potencias de 1/10 a las personas que participan en el reparto.

Tarea 26BIS	*5º A* BIEN	MAL	*5º B* BIEN	MAL
Resultado del reparto	20	0	20	1 (A39)
Con dibujos	16	4 fraccionan mal (A13) no indican el reparto (A07, A35, A40)	12	11 fraccionan mal (A12, A14, A18, A20, A39) no indican el reparto (A01, A02, A04, A08, A26, A27)
Con símbolos	19	1 (A05)	19	2 (A12, A20)

Comparando las tablas de resultados de las tareas nº 26 y 26BIS se observa que los alumnos han progresado al resolver la tarea nº 26BIS que tiene una estructura análoga a la nº 26. Podemos afirmar que los alumnos comprenden la técnica de obtención de una representación polinómica decimal como resultado de un reparto efectuado por fases y en el que las cantidades sobrantes se fraccionan en 10 partes iguales.

Cuando los alumnos han realizado el reparto de "5 barras entre 4 personas" han dado muestras de comprender la técnica. La única dificultad ha surgido cuando han necesitado fraccionar décimas de barra en centésimas de barra.

Toma de decisiones

En la siguiente sesión vamos a introducir la notación decimal. Este nuevo sistema de representación surge de la acción de reparto pero también indica una cantidad de magnitud: la longitud de barra de regaliz que recibe cada participante del reparto. Estos dos significados del número decimal deberán aparecer durante la evaluación conjunta de la tarea nº 28, en cuyo primer apartado leemos:

Cuando has realizado repartos por fases y has fraccionado los trozos que sobran en 10 partes iguales, en el reparto " 3 barras de regaliz entre 2 personas"

$$\text{cada persona recibe } 1 + \frac{5}{10} \text{ de barra,}$$

y el número decimal que indica esta cantidad es 1'5

Proponemos la siguiente metodología de trabajo que comprende dos tipos de actividades:

Actividad I.- El profesor preguntará a los alumnos por el significado de 1´5 barras de regaliz. Se espera que los alumnos respondan que esta cantidad es el resultado de un reparto en el que cada persona recibe 1 barra y $\frac{5}{10}$ de barra.

Actividad II.- Cada alumno recibe dos tiras de papel de la misma longitud que la de la barra de regaliz, una de ellas fraccionada en 10 partes iguales. Los alumnos deben construir una cantidad de longitud de 1´5 barras o tiras de papel.

Estos dos tipos de actividades se realizarán con los números decimales 0´8, 0´6 y 1´25 de barra.

Día 20-12-2000 (Trigésimo primera sesión)
Plan previsto.
En 5ºA:
1º Simbolizar el proceso del reparto de "30 barras entre 8 personas"
2º Resolver la tarea nº 28

En 5ºB:
1º Evaluar la tarea nº 27
2º Resolver la tarea nº 28

Ejecución
Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. La alumna A22 sale a la pizarra y reparte, por fases, "30 barras de regaliz entre 8 personas". Algunos alumnos han tenido dificultades para simbolizar el proceso de reparto, aunque otros no se han intentado resolver la tarea en sus casas.

A modo de repaso, el profesor solicita a la alumna A07 que simbolice el reparto "5 barras entre 4 personas". Mientras que la alumna ha obtenido la representación polinómica de este reparto el profesor ha ejemplificado el reparto utilizando material.

El debate que suscita el profesor sobre el significado de la representación polinómica decimal asociada a este reparto pone en evidencia dificultades de comprensión como lo muestra el alumno A37 cuando desconoce la cantidad de barras de regaliz que se obtienen al juntar las cantidades que reciben cada una de las 4 personas que participan en el reparto de 5 barras de regaliz.

El profesor ha entregado la tarjeta de la ficha nº 28. Los alumnos han dispuesto de 10 minutos para resolver la tarea y después se ha pasado a realizar una evaluación conjunta de la misma, proponiendo los dos tipos de actividades que se han comentado anteriormente.

En el aula de 5º B la secuencia de enseñanza se ha desarrollado de forma análoga a la del otro grupo de docencia. Al comienzo de la sesión se ha realizado la simbolización de la técnica del reparto "5 barras entre 4 personas". El profesor ha solicitado al alumno A39, que no había resuelto la tarea, que proceda a resolverla en la pizarra. El alumno ha salido con desgana y ha dicho que no deseaba resolverla. El profesor ha reprendido su actitud pero le ha permitido sentarse y ha tomado su lugar la alumna A19.

Los alumnos de ambos grupos se quedan con la tarjeta de la ficha nº 28 para que recuerden la conexión entre la representación polinómica de un reparto y la representación decimal. El profesor les entrega la tarjeta de evaluación de la tarea nº 29 para que resuelvan esta tarea en sus casas.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º B faltan los alumnos A04, A27, A38 y A49. En el grupo 5º A asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos de los dos grupos de docencia dan muestras de entender el significado de los símbolos que aparecen en la notación decimal.

Día 21-12-2000 (Trigésimo segunda sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la tarea nº 29
2º Resolver la tarea nº 30

Ejecución

Las sesiones de clase de hoy han estado condicionadas por la proximidad de las fiestas navideñas. Bastantes alumnos de ambos grupos no han traído resuelta la tarea nº 29. Uno de estos alumnos (A29) sale a la pizarra y resuelve correctamente la primera parte de la tarea, que consiste en realizar simbólicamente el reparto "15 barras entre 4 personas". El alumno A39, que se había negado a salir a la pizarra en las sesión del día anterior, ha representado gráficamente esta longitud.

Las mayores dificultades han aparecido en la segunda y tercera parte de la tarea. En la segunda parte los alumnos deben indicar el significado de las cifras del número decimal y, en la tercera parte, deben representar sobre una línea recta la longitud que indica el número decimal que es el resultado del reparto. Ambas actividades son novedosas para los alumnos, de modo que la mayoría no ha entendido la pregunta que se formula en el segundo apartado de la tarea. El profesor les ha dejado unos minutos para que intenten resolver estos apartados y, después, ha representado con tiras de papel la longitud 3´75 barras de regaliz.

Durante la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 30. Se trata de una tarea análoga a la anterior pero que tiene una dificultad mayor: el reparto requiere realizar una cuarta fase y, en consecuencia, la representación gráfica de la longitud de la cantidad de regaliz se complica al tener que evaluar hasta el orden de las milésimas de barra.

Por lo tanto, los alumnos han representado, con símbolos, el proceso de reparto pero han tenido muchas dificultades para representar gráficamente la cantidad 2´125 barras de regaliz. Los alumnos de 5º B han dispuesto de poco tiempo para resolver la tarea nº 30.

Asistencia de alumnos

En el grupo 5º B faltan los alumnos A38 y A49. En el grupo 5º A asisten todos los alumnos.

Aspectos actitudinales

A pesar de ser este el último día lectivo del trimestre los alumnos han tenido buena actitud. El rendimiento baja considerablemente cuando se les encarga que realicen alguna tarea en sus casas.

Aspectos relacionados con la comprensión

Veamos los resultados obtenidos por los alumnos en las tareas nº 29 y nº 30:

Tarea 29	*5º A* BIEN	MAL	*5º B* BIEN	MAL
Simbolización del reparto	17	5 (A07, A13, A23, A37, A40)	20	0
Significado de las cifras del decimal	6	16	4	16
Representan con gráficos la longitud	12	10 (A03, A05, A07, A13, A32, A35, A36, A37, A40, A51)	13	7 (A02, A08, A12, A18, A20, A25, A34)

Tarea 30	*5º A* BIEN	MAL	*5º B* BIEN	MAL
Simbolización del reparto	21	1 (A32)	13	7 (A02, A06, A12, A18, A20, A25, A39)
Significado de las cifras del decimal	10	12	5	15
Representan con gráficos la longitud	8 (A05, A09, A10, A11, A16, A31, A33, A48)	14	6 (A01, A14, A15, A19, A24, A34)	14

La interpretación de los resultados nos sugiere las siguientes reflexiones:

1º Los alumnos conocen y manejan con facilidad la técnica de obtención de repartos realizados por fases, fraccionando las partes sobrante en 10 partes iguales y aplicando el criterio de la mayor parte.

2º En general, no han entendido la pregunta en la que les pide que expresen el significado de las cifras del número decimal que obtienen como resultado del reparto. El bajo rendimiento en esta pregunta los alumnos puede deberse a la fatiga de los alumnos en los últimos días lectivos del trimestre, y a la falta de costumbre en la justificación del significado de los contenidos matemáticos que trabajan.

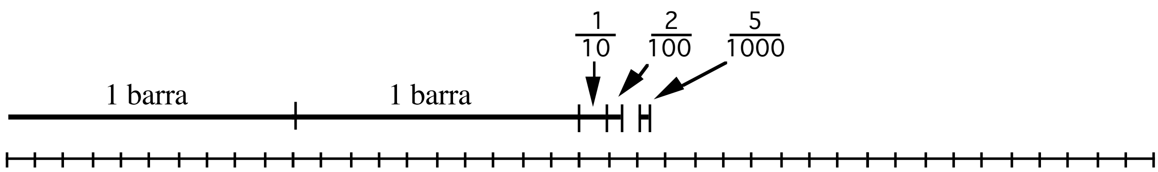
3º La representación gráfica del decimal como cantidad de longitud les presenta serias dificultades conceptuales. Cuando han representado 3´75 barras los alumnos se han ayudado del fraccionamiento de la unidad en 10 partes iguales, que aparece en la tarjeta de evaluación, y de la conversión 5 centésimas = 1/2 décima

La alumna A35, que suele realizar con éxito las tareas, representa una longitud de 3´95 barras. La alumna representa correctamente las 3 unidades y las 7 décimas, pero después añade 5 subunidades de longitud 1/2 décima. Es decir, confunde la centésima con 1/2 décima.

La alumna A14, que suele realizar con éxito las tareas, representa inicialmente una longitud de 4´2 barras porque confunde centésima con décima, y suma 5 a las 7 décimas. Como dispone de una buena comprensión de la fracción transforma la representación polinómica decimal en 3+3/4 y esta representación le permite dibujar correctamente la cantidad de longitud.

Se observará que las dificultades han aumentado cuando los alumnos han intentado representar gráficamente el número decimal 2´125. En esta tarea los conocimientos inestables de los alumnos se manifiestan, con mayor profusión, en errores.

Así, los alumnos A13, A22 y A37 de 5º A confunden décimas con centésimas. Los alumnos A08, A27 y A50 de 5º B y la alumna A40 de 5º A confunden 1 centésima con 1/2 décima, obviando la base decimal. Finalmente, dos alumnos de 5º A (A29 y A51) representan sobre décimas consecutivas las cantidades que obtienen en las sucesivas fases del reparto, de manera que en la gráfica de la longitud quedan "huecos":



Toma de decisiones

1º Los alumnos deben afianzar la técnica de obtención del decimal como resultado de un reparto efectuado por fases. También deben mejorar la técnica de representaciones gráficas de cantidades de longitud expresadas mediante decimales. Por ello se propone que, durante las vacaciones, resuelvan la siguiente tarea:

Números decimales y fracciones. Trabajo de Navidad. *Diciembre de 2000*

1º. Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada persona en los siguientes repartos:

a) " 9 barras de regaliz entre 10 personas".

b) " 22 barras de regaliz entre 25 personas".

c) " 7 barras de regaliz entre 8 personas".

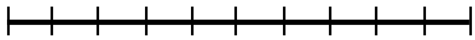
d) " 41 barras de regaliz entre 20 personas".

e) " 6 barras de regaliz entre 3 personas".

f) " 39 barras de regaliz entre 20 personas".

g) " 401 barras de regaliz entre 200 personas".

2º. Si la longitud de una barra de regaliz es:



Dibuja sobre las líneas, la longitud de las cantidades de regaliz que reciben las personas que participan en los repartos.

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

2º Proponemos la introducción de una nueva tarea (nº 31) que se realizará en la primera sesión del 2º trimestre. Con esta tarea queremos evaluar la comprensión que tienen los alumnos del reparto por fases. En el 2º apartado incidimos en este concepto cuando se pide encontrar las condiciones iniciales del reparto. Además, queremos observar si los alumnos reconocen que las expresiones fraccionaria (3/2) y decimal (1´5) expresan la misma cantidad.

Queremos proseguir la secuencia de enseñanza con una tarea asequible, en la que aparecen cantidades muy conocidas. Con esta tarea los alumnos se preparan para afrontar las siguientes que tienen un mayor grado de dificultad porque en ellas se conectan los dos sistemas de representación: fraccionario y decimal, y además los alumnos deben reconstruir las condiciones iniciales de los repartos.

TARJETA DE LA FICHA 31 Fecha: ________________

Cada una de las personas que participan en un reparto reciben 1´5 barras de regaliz.

Responde y justifica tu respuesta:

1º Expresa con una fracción la cantidad de regaliz que recibe cada una de las personas que participan en el reparto.

2º. Indica cuántas barras había antes de hacer el reparto y cuántas personas han participado en el reparto.

3º. Expresa con un número decimal la cantidad de regaliz que recibe cada una de las personas que participan en el reparto.

Día 9-1-2001 (Trigésimo tercera sesión)

<u>Plan previsto.</u>

1º. Recoger y evaluar, al menos un apartado, del trabajo de Navidad.

2º. Resolver y evaluar la tarea nº 31.

<u>Ejecución</u>

Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. Hay 16 alumnos de grupo 5º A que entregan la tarea de Navidad. La alumna A13 sale a la pizarra a resolver el apartado b) de esta tarea; mientras tanto sus compañeros atienden y anotan la resolución en sus cuadernos. La alumna A22 solicita salir a la pizarra para representar de forma gráfica la longitud 0´88 de barra.

Los alumnos han afrontado la resolución de la tarea nº 31. Los alumnos entregan la tarea al profesor para su valoración inmediata, de modo que si no está bien resuelta persisten en el intento de resolución. Los alumnos han dispuesto de 15 minutos para resolver esta tarea; después se ha procedido a su evaluación. La alumna A23 que no ha sabido resolver el tercer apartado sale a la pizarra y, con alguna ayuda, consigue resolver la tarea.

Al comienzo de la sesión de clase en 5º B el profesor recoge el trabajo de Navidad. Sólo lo entregan seis alumnos, los demás dicen haberlo dejado olvidado en sus casas. El profesor les recuerda que deberán traerla al día siguiente y les advierte que si no la traen resuelta se quedarán a trabajarla durante los recreos.

La alumna A14 sale a la pizarra a resolver el apartado d) de la tarea de Navidad. El alumno A38, que había adelantado una semana el comienzo de las vacaciones, solicita salir a la pizarra para representar de forma gráfica la longitud 2´05 de barra y representa correctamente esta cantidad de longitud.

Después los alumnos afrontan, durante 15 minutos, la resolución de la tarea nº 31. Termina la sesión y no queda tiempo para realizar una evaluación conjunta de la tarea, que se realizará al comienzo de la siguiente sesión. Los alumnos que han tenido dificultades se han quedado en el aula unos minutos, durante el tiempo de recreo, hasta que han conseguido resolverla correctamente.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º A. En el grupo 5º B falta los alumnos A12 y A27.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos han seguido con interés las explicaciones del profesor y las intervenciones de sus compañeros. Han mostrado buena disposición al trabajo durante la resolución de la tarea nº 31. Esta buena disposición contrasta con el escaso interés que ha suscitado en los alumnos la resolución del trabajo de Navidad.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
La técnica de obtención de la representación polinómica decimal asociada a un reparto no está consolidada. Algunos alumnos no recuerdan este procedimiento después del descanso vacacional. Para ejercitar esta técnica se había propuesto la resolución del trabajo de Navidad. Durante las sesiones siguientes todos los alumnos deberán entregar este trabajo que además debe estar bien resuelto.

Los resultados obtenidos en la tarea nº 31 indican que los alumnos comprenden el significado de un reparto realizado en dos fases y que saben conectar las representación fraccionaria y decimal en el reparto "3 barras entre 2 personas".

Han cometido incorrecciones o han necesitado ayuda, en esta tarea, los alumnos: A07, A23, A32, A40, A48 y A51 de 5º A y los alumnos A02, A04, A17, A38 y A30 de 5º B. Sin embargo, apenas se han detectado errores conceptuales. El alumno A30 comete este tipo de error cuando escribe: "había 1 barras antes de hacer el reparto, han participado 2 personas en el reparto".

<u>Toma de decisiones</u>
Los primeros minutos de las siguientes sesiones vamos a dedicarlas a resolver algunos apartados del trabajo de Navidad. Cuando los alumnos entregan la tarea el profesor les indica los apartados que están mal resueltos y les propone que intenten resolverlos en sus casas. Por este motivo si se evalúa en el aula algún apartado los alumnos que tienen pendiente resolverlo se ven ayudamos y, en cierta forma, incentivados para afrontar otros apartados que todavía les quedan por resolver.

Día 10-1-2001 (Trigésimo cuarta sesión)
<u>Plan previsto.</u>
En el grupo 5º A:
1º. Evaluar, al menos un apartado, del trabajo de Navidad.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 32.

En el grupo 5º B:
1º. Evaluar, al menos un apartado, del trabajo de Navidad.
2º. Evaluar la tarea nº 31.
3º. Resolver y evaluar la tarea nº 32.

Ejecución
Comienza las sesión de clase a las 9h. en 5ª A. Los alumnos reciben el trabajo de Navidad corregido, de modo que los alumnos saben qué apartados deben volver a resolver. Y reciben el encargo de traerla resuelta a la siguiente sesión. El alumno A48 sale a la pizarra para resolver el apartado c).

Durante 15 minutos los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 32. Un pequeño grupo de alumnos resuelve muy pronto, y de forma correcta, esta tarea. A estos alumnos se les propone la resolución de la siguiente tarea.

Para realizar la evaluación conjunta de la tarea sale a la pizarra el alumno A36 que había tenido dificultades durante la resolución. El profesor propone a los alumnos que escriban en sus cuadernos el proceso de resolución de la tarea porque les permitirá recordar el significado del número decimal 2´5 como resultado de un reparto realizado en dos fases que se ha descrito con detalle.

Los alumnos del grupo 5º B dicen tener dificultades en la resolución del trabajo de Navidad. El profesor solicita a la alumna A15 que salga a la pizarra a resolver el apartado f) y a la alumna A17 que resuelva el apartado g). En ambos repartos, se incide en las cantidades que se reparten en cada fase y en los significados de las cifras que forman el número decimal. Los alumnos escriben en sus cuadernos el proceso simbólico y los significados de las fases de los repartos.

Los últimos minutos de la sesión se dedican a realizar la evaluación conjunta de la tarea nº 31 que no se había realizado durante la sesión anterior. Sale a la pizarra el alumno A30 que había cometido algunos errores. Este alumno tiene dificultades a la hora de encontrar la notación decimal correspondiente al reparto "3 barras entre 2 personas".

En el grupo 5º B no ha quedado tiempo para resolver la tarea nº 32.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º A. En el grupo 5º B faltan los alumnos A08, A12 y A27.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una buena disposición al trabajo.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 32 aparecen en la tabla:

Tarea 32	*5º A*	
	BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	18	4 (A07, A23, A36, A51)
Representan con gráficos la longitud	20	2 (A03,A23)
Paso del decimal a la fracción	17	5 (A03, A07, A23, A36,A37)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	16	6 (A03, A07, A23, A37,A48, A51)

Se observa que la mayoría de los alumnos comprenden el significado de las cifras del número decimal 2´5 y saben representar gráficamente esta longitud. Los alumnos de este grupo han realizado progresos considerables que se manifiestan en la mejora de resultados al compararlos con los obtenidos en las tareas nº 29 y 30.

Cinco alumnos no han sabido expresar el número decimal mediante una fracción. Estos alumnos han dejado la pregunta en blanco y, en consecuencia, no conocemos el origen de sus dificultades. No obstante, pensamos que la dificultad radica en que no saben expresar el decimal como suma de fracciones decimales.

De los 17 alumnos que aportan como solución la fracción 5/2, ocho alumnos no indican como han obtenido la respuesta, y nueve (A05, A10, A11, A21, A31, A32, A33, A35 y A40) obtienen la fracción operando con las fracciones decimales:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{5}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

El número de alumnos que justifica como han encontrado las condiciones iniciales del reparto es todavía menor. La alumna A10 utiliza la idea de proporcionalidad en el siguiente sentido: "si cada persona recibe 2´5 barras de regaliz, dos personas recibirán 5 barras". El alumno A11 procede sumando 2´5 y 2´5. Y los alumnos A32, A33 y A40 operan con las fracciones $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}$. El resto de los alumnos no explica como ha obtenido la respuesta.

A pesar de que son pocos los alumnos que justifican las respuestas se observan estrategias valiosas que surgen del trabajo con el modelo de reparto.

Día 11-1-2001 (Trigésimo quinta sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Resolver y evaluar la tarea nº 33.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 34.

En el grupo 5º B:
1º. Resolver y evaluar la tarea nº 32.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 33.

Ejecución
Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. El profesor entrega la tarea de Navidad a los alumnos que deben modificar algunos apartados. Después, los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 33. A los alumnos que la resuelven con éxito se les propone la realización de la siguiente tarea. Pasados 15 minutos el profesor recoge la tarea nº 33 y se procede a realizar su evaluación.

El profesor solicita que la alumna A23 salga a la pizarra. Esta alumna sabe expresar los significados de las cifras que componen el número decimal 0´75 y representa correctamente esta cantidad de longitud de barra de regaliz. Sin embargo, tiene dificultades para encontrar la notación fraccionaria que corresponde a esta cantidad. El profesor le propone utilizar la representación polinómica decimal y calcular la suma:

$$\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$$

La tercera parte de los alumnos que encuentran la fracción $\frac{75}{100}$ no saben simplificar esta fracción y obtener $\frac{3}{4}$.

Para resolver el apartado 4º de la tarea nº 33 sale a la pizarra la alumna A22 que indica que las condiciones iniciales del reparto son "una barra y media entre 2 personas" y aporta el siguiente razonamiento:

"Si hay dos personas y cada persona recibe 7 décimos y 5 centésimas, 7 décimos y 7 décimos son 14 décimos y dos medios de décimo hacen 15 décimos, que es una barra y media".

El profesor felicita a esta alumna y le recomienda que exprese el reparto con barras enteras. La alumna escribe "3 barras entre 4 personas" y el profesor recuerda el significado de los términos de la fracción $\frac{3}{4}$ en esta situación de reparto.

Un grupo de alumnos (A09, A10, A13, A16, A22, A29, A31, A33 y A35) ha realizado correctamente la tarea nº 34. El profesor propone que los alumnos que no la han terminado en el aula la resuelvan como trabajo para casa. Dos alumnas (A10 y A35) que han terminado con éxito las tareas han expresado con una fracción la cantidad de peso que viene escrita en un paquete de Nesquik (3´5 Kgrs.).

El profesor entrega la tarea de Navidad a los alumnos del grupo 5º B que deben modificar algunos apartados. Después, los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 32. A los alumnos que la resuelven con éxito se les propone la realización de la siguiente tarea. El profesor observa que los alumnos tienen dificultades para resolver los apartados 3º y 4º de esta tarea. Pasados 15 minutos solicita al alumno A52 que salga a la pizarra para evaluar esta tarea. Dado que los resultados son deficientes se les permite conservar la tarjeta de evaluación durante la evaluación de la tarea.

Este alumno sabe expresar los significados de las cifras que componen el número decimal 2´5 y representa correctamente esta cantidad de longitud de barra de regaliz. Afirma que la fracción es 5/2 sin dar ninguna explicación, sólo comprueba con la técnica algorítmica de la división que el resultado del reparto " 5 barras entre 2 personas" es 2´5 barras. Cuando el profesor le pide justificar cómo ha conjeturado este reparto el alumno dice que ha pensado en dos personas y que en total reciben el doble, es decir, 5 barras.

La alumna A17 sale a la pizarra para conectar la representación decimal con la fraccionaria mediante la representación polinómica decimal del reparto.

Antes de concluir la clase los alumnos han trabajado, durante unos minutos, la tarea nº 33 que deberán resolver en sus casas como trabajo para el fin de semana. Tres alumnos (A01, A14 y A34) concluyen con éxito la tarea.

<u>Asistencia de alumnos</u>
En el grupo 5º A falta la alumna A47. En el grupo 5º B faltan los alumnos A08, A12 y A27.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos han mostrado buena disposición al trabajo durante la resolución de las tareas propuestas. El alumno A30 ha mostrado una actitud apática: no ha sabido resolver los apartados 3º y 4º de la tarea nº 32 y además no ha escrito en su cuaderno la solución correcta que se ha mostrado en la pizarra. El profesor la ha censurado su actitud y le ha obligado a permanecer en el aula unos minutos, durante el tiempo de recreo, para que intentase resolver correctamente la tarea. El profesor mientras tanto ha trabajado con el alumno A49 que es uno de los alumnos que se ausentó 4 sesiones antes de concluir el primer trimestre y tiene dificultades para resolver estas tareas.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 33 aparecen en la tabla:

Tarea 33	*5º A*	
	BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	17	5 (A07, A16, A36, A48, A51)
Representan con gráficos la longitud	18	4 (A07, A23, A36, A51)
Paso del decimal a la fracción	16	6 (A03, A07, A23, A36,A37, A51)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	16	6 (A03, A05, A07, A23, A32, A51)

En cuanto a la conexión de la notación decimal con la fraccionaria (apartado 3º de la tarea) se observa que la mayoría de alumnos de 5º A saben expresar el decimal mediante su representación polinómica decimal. Cuatro de los seis alumnos que han errado en esta cuestión han sabido expresar el decimal como suma de fracciones decimales, pero dos de ellos (A03 y A36) no han sumado, y otros dos (A07 y A37) se confunden al realizar esta operación y suman numeradores y denominadores.

De los 16 alumnos de 5º A que saben expresar con una fracción el número decimal 0´75 cinco alumnos expresan la fracción $\frac{75}{100}$, y los 11 restantes expresan la fracción simplificada $\frac{3}{4}$. Este último grupo de alumnos utiliza la misma estrategia de resolución: expresan el decimal como suma de fracciones decimales y, después, operan y simplifican.

En cuanto a la búsqueda de las condiciones iniciales del reparto los alumnos de 5º A han utilizado varias estrategias: 12 alumnos han recordado que una fracción expresa el resultado de un reparto que se realiza en una fase, 3 alumnos (A22, A36 y A37) parten del número decimal y proceden duplicando dos veces esta cantidad; el alumno A48 procede operando, con éxito, $\frac{75}{100}$ x 4, y la alumna A05 procede sumando $\frac{75}{100}+\frac{75}{100}$ pero se confunde al realizar la operación.

La alumna A32 muestra una escasa comprensión cuando afirma que inicialmente se han repartido "4 barras para 3 personas". Los otros 4 alumnos (A03, A07, A23 y A51) no contestan.

En este momento de la secuencia de enseñanza los alumnos A03, A07, A23, A32, A36, A37 y A51 tienen un nivel bajo de comprensión del número decimal. Los alumnos A07, A36 y A37 han cometido errores cuando operan con fracciones que nos preocupan porque dos de ellos han realizado la adición de fracciones sumando numeradores y denominadores. Sin embargo, no han aparecido errores conceptuales relevantes asociados a la idea de número decimal.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B al resolver la tarea 32 aparecen en la tabla siguiente. Como los alumnos han tenido grandes dificultades para resolver esta tarea se les ha permitido tener la tarjeta de evaluación de la tarea cuando se ha realizado la evaluación conjunta. Posiblemente los datos que se presentan muestran un nivel de comprensión superior del que poseen los alumnos. Por ejemplo, sabemos que hay más de cuatro alumnos que tienen dificultades para conectar la representación decimal y la fraccionaria.

Tarea 32	*5º B*	
	BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	14	8 (A06, A17, A18, A20, A39, A30, A49, A52)
Representan con gráficos la longitud	14	8 (A02, A17, A18, A19, A26, A38, A39, A49)
Paso del decimal a la fracción	18	4 (A06, A20, A30, A49)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	12	10 (A02, A04, A06, A17, A18, A20, A25, A39, A30, A49)

Un grupo de nueve alumnos (A02, A04, A06, A17, A18, A20, A39, A30 y A49) muestran una mala comprensión del proceso de reparto. Veamos algunas de las respuestas erróneas:

La alumna A04 responde bien los 3 primeros apartados pero cuando busca las condiciones iniciales del reparto dice que es "10 barras para 2 personas".

El alumno A06 piensa que 2´5 es la cantidad que hay antes de hacer el reparto, porque escribe:

"El 2 significa las dos barras que tenemos para repartir. Y el 5 significa que un 1/2 para repartir mas"

La alumna A17 no sabe reconocer las cantidades que intervienen antes y después de realizar un reparto. Cuando busca las condiciones iniciales del reparto escribe "han participado 2 personas - había 2 barras y media"

La alumna A20 piensa que en la expresión 2´5 "El 2 significa el número de barras. El 5 el número de personas"

El alumno A39 piensa que: "En el reparto han participado 2 personas. Antes de hacer el reparto había 2 barras" y no justifica la respuesta.

Y el alumno A30 tampoco comprende el significado del reparto, porque afirma sin dar ninguna justificación: "abian 2 barras y $\frac{5}{10}$ abian 2 personas"

Toma de decisiones
Nueve alumnos del grupo 5º B han cometido errores conceptuales durante la resolución de la tarea nº 32. Las dificultades apuntan a una mala comprensión del significado del reparto. Para determinar con mayor precisión el origen de estos errores se propone que uno de estos alumnos (A06) ejemplifique, en la siguiente sesión, la situación de reparto de la tarea con ayuda del material.

Día 15-1-2001 (Trigésimo sexta sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Resolver y evaluar la tarea nº 34.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 35.

En el grupo 5º B:
1º. Volver a evaluar la tarea nº 32
2º. Evaluar la tarea nº 33.
3º. Resolver y evaluar la tarea nº 34.

Ejecución
Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º B. El profesor entrega la tarea de Navidad a los alumnos que deben modificar algunos apartados. El profesor solicita que salga a la pizarra el alumno A06 que es uno de los alumnos que no recuerda el significado de un reparto. Estos alumnos confunden las cantidades que intervienen en el proceso del reparto. El profesor ha vuelto a recordar las cantidades que existen en los dos períodos temporales que acontecen en un reparto y ha utilizado material para resolver con este alumno el apartado 4º de esta tarea.

Después, los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 33. Ocho alumnos (A01, A14, A15, A19, A24, A27, A34 y A38) resuelven con éxito la tarea. Ante las dificultades manifestadas por los alumnos el profesor recoge la tarea nº 33 y propone realizar su evaluación. Los alumnos reciben la consigna de resolver la tarea en sus cuadernos de Matemáticas.

Cuando el profesor solicita que los alumnos representen de forma gráfica en sus cuadernos el número decimal 0'75, comprueba que los alumnos A17, A18, A20 y A30 no saben representar esta longitud. El profesor les ordena que representen con material esta cantidad de longitud, después saben representar gráficamente el decimal 0´75 en sus cuadernos.

Termina la sesión de clase sin terminar de evaluar los apartados nº 3 y 4 de esta tarea. El profesor entrega la tarea nº 33 a los alumnos que no la han resuelto correctamente, con la consigna de que la resuelvan en sus casas y la entreguen en la sesión siguiente.

La sesión de clase con el grupo 5º A comienza un poco más tarde del horario habitual. El profesor devuelve la tarea nº 34 a los alumnos que la habían resuelto durante la sesión anterior. Cuando los alumnos la terminan de resolver se procede a su evaluación conjunta.

La alumna A07 sale a la pizarra a resolver esta tarea. Esta alumna tiene dificultades para comprender el significado del reparto y, en concreto, para situar en el tiempo: antes o después del reparto, la cantidad de magnitud que recibe cada persona que participa en él. Con la ayuda de material la alumna encuentra las condiciones iniciales del reparto. Finalmente, obtiene la representación fraccionaria del decimal 2´50.

El profesor solicita que los alumnos comparen las cantidades 2´5 y 2´50; y formula la regla de equivalencia de la notación decimal. Antes de concluir la sesión, el profesor entrega a los alumnos la tarjeta de evaluación de la tarea nº 35 con la consigna de que la resuelvan en sus casas y la entreguen en la sesión de mañana.

Asistencia de alumnos
Falta a clase el alumno A37 del grupo 5º A. En el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de los dos grupos muestran buen comportamiento y disposición al trabajo en el aula. Sin embargo, no realizan las tareas que el profesor les propone realizar en sus casa. Como ejemplo de esta falta

de trabajo fuera del aula podemos indicar que menos de la mitad de los alumnos de ambos grupos ha entregado el trabajo de Navidad

Aspectos relacionados con la comprensión
Se han detectando dificultades conceptuales en los alumnos del grupo 5º B cuando han afrontado la resolución de la tarea nº 33. Los errores se localizan en la desconexión entre los sistemas de representación decimal y fraccionario, y en la reconstrucción de las condiciones iniciales del reparto cuando se conoce el resultado del mismo. Más de la mitad de los alumnos del grupo no ha sabido resolver los apartados 3º y 4º de la tarea nº 33. El porcentaje de alumnos de 5º A que muestra dificultades en esta misma tarea es del 25%. Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 34 aparecen en la tabla:

Tarea 34	*5º A* BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	18	4 (A23, A32, A36, A51)
Representan con gráficos la longitud	19	3 (A23, A32, A51)
Paso del decimal a la fracción	18	4 (A03, A23, A32, A51)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	18	4 (A03, A23, A32, A51)

Se observa que la mayoría de los alumnos han resuelto con éxito la tarea. Ningún alumno ha cometido errores. Sólo tres alumnos (A23, A32 y A51) no han entregado la tarea; y dos alumnos han dejado apartados sin resolver: la alumna A03 no resuelve los apartados 3º y 4º, y el alumno A36 no escribe los significados de las cifras del número decimal 2´50.

Los alumnos saben encontrar la fracción que expresa la misma cantidad de magnitud que 2´50 barras. Cinco alumnos (A07, A22, A28, A29 y A48) no explican como han obtenido la fracción 5/2 y por lo tanto es difícil evaluar su capacidad para conectar los dos sistemas de representación.

Algunos de los alumnos (A03, A07, A23, A32, A36, A37 y A51) que en la tarea anterior (nº 33) mostraban un bajo nivel de comprensión del número decimal han realizado progresos. Así los alumnos A07 y A37 han resuelto correctamente la tarea nº 34, mientras que el alumno A36 solo ha dejado sin contestar la pregunta formulada en el apartado nº 1, teniendo éxito en los restantes apartados.

Valoración
Después de que los alumnos del grupo 5º A han resuelto las tareas 32, 33 y 34 podemos afirmar que la mayoría de ellos ha realizado progresos en la comprensión del número decimal. Solo cuatro alumnos (A03, A23, A32 y A51) muestran un nivel de comprensión bajo.

Día 16-1-2001 (Trigésimo séptima sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 35.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 36.

En el grupo 5º B:
1º. Terminar de evaluar la tarea nº 33
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 34.

Ejecución
Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. El profesor entrega la tarea de Navidad a los alumnos que deben modificar algunos apartados y nombra a los alumnos que faltan por entregar este trabajo.
El profesor recoge la tarea nº 35. La mayoría de los alumnos ha sabido expresar con una fracción la cantidad 1´5 litros de agua porque el reconocimiento del decimal 0´5 como 1/2 les ha facilitado la resolución de la tarea. Esto no ha ocurrido en el 2º apartado. Aquí los alumnos no han identificado 0´2 como la fracción 1/5 y, en algunos casos, tampoco han trabajado con la representación polinómica que

subyace en el decimal 1´2.

El alumno A36, que no ha explicitado en la tarjeta de evaluación la estrategia utilizada, ha salido a la pizarra y ha resuelto correctamente la tarea.

A continuación, los alumnos han afrontado la resolución de la tarea nº 36. La situación vuelve a repetirse: algunos alumnos que tienen dificultades conceptuales para expresar el número decimal mediante la suma de fracciones decimales consiguen expresar con una fracción el decimal 0´25 pero tienen dificultades para resolver el 2º apartado de la tarea en el que el decimal es 0´375.

Para ayudar a estos alumnos el profesor recoge las tareas de los alumnos que la han terminado (A09, A11, A13, A23, A31, A33 y A36) y procede a evaluar la primera parte de la tarea. La alumna A32 solicita salir a la pizarra y resuelve, con alguna ayuda, este apartado.

Antes de concluir la sesión de clase el profesor propone que los alumnos terminen el 2º apartado de la tarea nº 36 en sus casas y lo traigan resuelto a la siguiente sesión.

Comienza la sesión de clase en el grupo de 5º B con la recogida de algunos trabajos de Navidad. El profesor devuelve esta tarea a algunos alumnos para que realicen algunas correcciones y recuerda que todavía hay alumnos que no han entregado este trabajo.

Después, el profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 33 y comprueba con desaliento que bastantes alumnos siguen sin saber resolver todos los apartados de esta tarea. Sólo nueve alumnos (A01, A06, A14, A15, A25, A27, A34, A38 y A39) han terminado con éxito la tarea.

El profesor solicita que salga a la pizarra el alumno A08 que no ha sabido resolver la tarea aunque suele realizar con éxito los trabajos. Este alumno resuelve los apartados 3º y 4º con pequeñas ayudas que le sugiere el profesor. Por ejemplo, para representar con una fracción el número decimal 0´75 ha necesitado recordarle la representación polinómica que subyace al número decimal; después ha sumado correctamente las fracciones. También ha recibido una indicación sobre la conveniencia de simplificar la fracción 75/100; y en el apartado 4º ha sido necesario indicarle que considere que han participado en el reparto 2 ó 4 personas. Entonces el alumno ha planteado la suma:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$$

y al observar que no queda un número natural ha realizado la suma:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}=3 \text{ barras}$$

A continuación, los alumnos han afrontado la resolución de la tarea nº 34. La situación vuelve a repetirse de nuevo: el grupo reducido de alumnos (A01, A14, A15, A19, A27, A34, A38 y A50) que muestran una buena comprensión resuelven de forma correcta y rápida la tarea, mientras que los restantes alumnos siguen teniendo dificultades para resolver los apartados 3º y 4º de la tarea.

Como faltan pocos minutos para terminar la sesión el profesor realiza una intervención general para recordar la representación polinómica asociada al número decimal 2´50 y propone que los alumnos terminen la tarea nº 34 en sus casas y la traigan resuelta a la siguiente sesión.

Asistencia de alumnos
Faltan a clase los alumnos A03 y A48 del grupo 5º A. En el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos actitudinales
Los alumnos del grupo 5º B se muestran apáticos. Algunos alumnos están menos motivados posiblemente porque perciben la mayor dificultad de las tareas nº 32, 33 y 34.

Aspectos relacionados con la comprensión:
Los resultados obtenidos por los alumnos de 5º A al resolver la tarea nº 35 son buenos. Solo hemos detectado un error conceptual: la alumna A03 iguala $0´5 = \frac{1}{5}$ y en el segundo apartado piensa que $0´2 = \frac{1}{2}$.
Dos alumnos (A21, A36) no han justificado la respuesta y cuatro alumnos (A16, A23, A32 y A51) no han resuelto al segundo apartado de la tarea.

Tarea 35	*5º A* Decimal *1´5*	Decimal *1´2*
Encuentra la fracción simplificada	13	7
Encuentra la fracción pero no la simplifica	5	6
Encuentra la fracción pero no lo justifica o comete errores en la justificación	3	4
Escribe una respuesta incorrecta	0	1
No escribe la respuesta	1	4

Los alumnos han utilizado diferentes estrategias. La más usual ha consistido en escribir la representación polinómica asociada a los números decimales ($1+\frac{5}{10}$ y $1+\frac{2}{10}$) y después operar con fracciones.

Algunos alumnos (A05, A09, A16, A22, A28, A29, A31 y A40) han pensado la unidad descompuesta en 2 medios y han convertido el decimal 1´5 en medios. La alumna A22 no ha tenido éxito cuando ha querido utilizar esta estrategia en el 2º apartado. Los alumnos A21 y A37 han seguido esta estrategia utilizando cuartos de la unidad y, en el 2º apartado han seguido la estrategia mayoritaria.

En el 2º apartado los alumnos han tenido más dificultades para conjeturar que 0´2 = $\frac{1}{5}$ y, por lo tanto, la mayoría han optado por utilizar la representación polinómica del decimal 1´2. Solo las alumnas A31 y A40 han pensado en esta relación

Algunos alumnos (A07, A29, A37) han utilizado representaciones gráficas acompañando a las representaciones simbólicas.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B al resolver la tarea 33 aparecen en la tabla:

Tarea 33	*5º B* BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	15	7 (A04, A19, A20, A24, A30, A49, A52)
Representan con gráficos la longitud	16	6 (A02, A04, A18, A19, A20, A49)
Paso del decimal a la fracción	13	9 (A02, A04, A08, A18, A19, A20, A26, A30, A52)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	9	13 (A02, A04, A06, A08, A17, A18, A20, A25, A26, A30, A49, A50, A52)

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B en la tarea nº 33 han sido peores que los obtenidos en la tarea nº 32, porque ha aumentado la dificultad de la tarea: ahora el número decimal (0´75) aparece como resultado de un reparto efectuado en tres fases. Sin embargo, podemos afirmar que algunos alumnos han realizado progresos. Así:

a) El alumno A06 aporta un significado correcto del decimal.

b) La alumna A17 sabe el significado del decimal y lo representa gráficamente. Su conocimiento del decimal todavía es inestable porque para expresar 0´75 como la fracción 3/4 utiliza referencias visuales y la idea de fracción.

c) El alumno A39 responde todos los apartados correctamente y aporta respuestas originales.

En los alumnos A02, A04, A18, A20, A30 y A49 no se observa una mejora de su nivel de comprensión. Mientras que los alumnos A19 y A26 han bajado su rendimiento en esta tarea.

Los 13 alumnos del grupo 5º B que encuentran la fracción que expresa el resultado del reparto utilizan estrategias muy diversas. Así, 6 alumnos (A06, A25, A34, A39, A49 y A50) expresan el decimal como suma de fracciones decimales y operan; 4 alumnos (A01, A14, A15 y A24) piensan el decimal como 75 centésimas; 2 alumnos (A17 y A38) parece que se ayudan del gráfico realizado en el apartado anterior, y una alumna (A27) conjetura la respuesta y después procede a realizar, de forma simbólica, el reparto de "3 barras entre 4 personas".

Los restantes alumnos de 5º B han tenido dos tipos de actuaciones: 3 alumnos (A18, A19 y A52) aportan la respuesta correcta pero sin dar ninguna justificación y 6 alumnos (A02, A04, A08, A20, A26 y A30) no responden a esta cuestión.

Los alumnos de grupo 5º B a pesar de obtener peores resultados en esta cuestión han utilizado un mayor número de estrategias. Así, los 4 alumnos (A19, A24, A27 y A38) utilizan la idea de proporcionalidad aunque no la explicitan. Otros dos alumnos (A14 y A34) conocen que una fracción expresa el resultado de un reparto que se realiza en una fase; otros dos alumnos (A01 y A39) realizan la multiplicación 0´75 x 4, y la alumna A14 procede sumando $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$ y convierte la fracción en el decimal 1´5. Esta alumna aporta la respuesta "1´5 barras para 2 personas".

Ocho alumnos de 5º B no han respondido a esta cuestión y cuatro han cometido errores que muestran dificultades conceptuales graves. Así, el alumno A52 comete el mismo error que la alumna A32, del grupo 5º A cuando cambia los significados del numerador y denominador de la fracción 3/4. Y los tres alumnos restantes (A18, A20 y A30) identificar la parte entera del decimal con el número de barras y la parte decimal con el número de personas que participan en el reparto.

Valoración
Durante estas últimas sesiones se observan progresos en la comprensión de los alumnos de 5º B. En este momento podemos realizar un retrato del nivel de comprensión del número decimal en el grupo 5º B fraccionando el número de alumnos en tres partes iguales: un tercio tiene una comprensión alta, otro tercio tiene una comprensión inestable y el otro tercio una comprensión deficiente.

Toma de decisiones:
Aunque la implementación de la secuencia de enseñanza en el grupo 5º B se retrasa con respecto a la del grupo 5º A vamos a mantener la propuesta diseñada porque consideramos prioritario relacionar los sistemas de representación fraccionario y decimal.

Día 17-1-2001 (Trigésimo octava sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 36.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 37.

En el grupo 5º B:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 34.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 35.

Ejecución
Al comienzo de la sesión de clase en 5º A el profesor recoge los trabajos de Navidad de algunos alumnos. También recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 36 y solicita que la alumna A22 que salga a la pizarra a resolver el 2º apartado de esta tarea.

El rendimiento de los alumnos en esta tarea ha sido alto. La mayoría de los alumnos saben expresar el decimal como 375/1000 aunque tienen dificultades para simplificar esta fracción. La alumna A22 no sabe expresar el decimal como suma de fracciones decimales y, después, opera con fracciones correctamente.

Es previsible que los alumnos tengan dificultades en la simplificación de fracciones. Se recordará que la obtención de fracciones equivalentes se ha enseñado mediante la técnica de multiplicar el numerador y denominador de la fracción por un mismo número. Somos conscientes de que el procedimiento de la simplificación de fracciones no ha sido suficientemente ejercitado. El profesor aconseja a los alumnos que cuando tengan que simplificar fracciones cuyo denominador sea 10, 100 o 1000 prueben a dividir el numerador y denominador de la fracción por 2 ó 5 dado que los números 10, 10 ó 1000 se forman multiplicando los factores 2 y 5.

Los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 37. Unos pocos alumnos ordenan las estaturas de los niños rápidamente pero la mayoría inventan reglas falsas que no saben explicar. El profesor utiliza las cañas para mostrar las longitudes 1´6 y 1´495. Los alumnos dan muestras de saber comparar estas dos cantidades de longitud.

Antes de concluir la sesión el profesor indica a los alumnos que terminen la tarea nº 37 en sus casas y entrega, a los alumnos que han terminado con éxito esta tarea (A09, A10, A31 y A35) la tarjeta de evaluación correspondiente a la tarea siguiente.

La sesión de clase con el grupo 5º B se ha suspendido porque los alumnos de 5º curso tenían una charla sobre el entorno natural de la Laguna de Gallocanta y no se ha podido celebrar la sesión en otro momento de la jornada.

Asistencia de alumnos
Faltan a clase los alumnos A03, A47 y A48 del grupo 5º A.

Aspectos actitudinales
Los alumnos del grupo 5º A muestran buen comportamiento de los alumnos y disposición al trabajo en el aula.

Aspectos relacionados con la comprensión:
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 36 indican un rendimiento muy alto. Como los alumnos se han llevado esta tarea a sus casas pueden haber recibido ayuda. Pensamos que este rendimiento no se corresponde con el nivel de comprensión de los alumnos. En la primera parte de la tarea todos los alumnos han respondido correctamente y, en la 2ª parte, solo dos alumnos (A22 y A51) han dado respuestas erróneas.

La estrategia mayoritaria ha consistido en escribir los decimales como suma de fracciones decimales y operar estas fracciones. En el primer apartado, como han trabajado con 0´25, que es un decimal conocido, tres alumnos (A09, A22 y A31) han procedido utilizando la conversión $0´25 = \frac{25}{100}$. El alumno A21 utiliza directamente que 25 es la cuarta parte de 100, y escribe:

"Como 1´00 es una unidad y $\frac{4}{4}$ es la unidad, $0´25 = \frac{1}{4}$ "

Día 18-1-2001 (Trigésimo novena sesión con 5º A y trigésimo octava con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 37.
2º. Resolver y evaluar la nº 38.

En el grupo 5º B:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 34.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 35.

Ejecución
Al comienzo de la sesión de clase en 5º A el profesor recoge la tarjeta de la ficha nº 37 y solicita que la alumna A22 que salga a la pizarra para representar gráficamente las estaturas de las personas que aparecen en el enunciado de la tarea. Se han utilizado las cañas para representar las estaturas de dos niños que aparecen en el enunciado de la tarea. La alumna ordena las estaturas y mientras tanto los alumnos realizan las representaciones gráficas en sus cuadernos. Después, diversos alumnos enuncian la regla para ordenar números decimales.

El profesor entrega a los alumnos la tarea nº 38, que consiste en ordenar decimales, con el encargo de que los alumnos la realicen en sus casas y la traigan resuelta a la sesión del día siguiente.

El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 34 al comienzo de la sesión de clase con el grupo 5º B, y solicita a la alumna A18 que salga a la pizarra a resolver esta tarea. Desea comprobar si la alumna ha aprendido a representar gráficamente, sobre la recta numérica, un número decimal. A pesar de haber tenido dificultades en la representación gráfica del decimal que aparece en la tarea nº 33 esta vez la alumna procede con acierto. En la resolución del apartado 3º recibe ayuda del profesor porque tiene dificultades para realizar la suma de fracciones.

Después los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 35. Algunos alumnos la resuelven pronto y de forma correcta. Estos alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la siguiente ficha. El profesor orienta de modo individual el trabajo de los alumnos y propone que éstos terminen las tareas en sus casas y que las traigan resueltas a la siguiente sesión de clase.

Asistencia de alumnos
Faltan a clase los alumnos A47 y A51 del grupo 5º A. En 5º B falta a clase el alumno A26.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. En particular, se observa que los alumnos del grupo 5º B han mejorado mucho su rendimiento, posiblemente porque han tenido más éxito en la resolución de la tarea nº 35. El profesor ha ponderado los éxitos de algunos alumnos y les ha animado a seguir trabajando de esta manera.

Aspectos relacionados con la comprensión:
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 37 aparecen en la tabla:

Tarea 37 *Valoración de la respuesta*	*5º A* Nº alumnos
Ordenan bien sin recibir ayuda	4
Ordenan bien, después de rectificar	13
Ordenan mal	4 (A05, A16, A22 y A28)

Estos resultados muestran que, a pesar de ser la primera tarea de ordenación de decimales, los alumnos no tienen excesivas dificultades conceptuales. Un error típico que consiste en ordenar en función del número de cifras decimales que contengan los números solo ha sido detectado en las alumnas A05 y A22.

En la siguiente tabla observamos las estrategias utilizadas por los alumnos que las han explicitado:

Tarea 37 *Estrategias*	*5º A* *Nº alumnos*
Comparando por fases: primero la parte entera; y si son iguales, se comparan las décimas; y así sucesivamente.	7
Añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras	4 (A03, A21, A29, A33)
Utiliza la equivalencia de fracciones: "Primero se pasa cada número decimal a una fracción, luego se compara los denominadores y si no están iguales se busca fracciones equivalentes y se busca cuál es mayor o menor"	1 (A35)
Estrategia errónea: ordenar en función del número de cifras decimales que contengan los números	2
No la explicitan	7

Durante la evaluación conjunta de la tarea han aparecido las dos primeras estrategias. Los alumnos han formulado la regla de ordenación de decimales basada en la primera estrategia. Algunos alumnos han escrito en la tarjetas de evaluación reglas que están bien formuladas. Por ejemplo, el alumno A48 escribe:

"*Primero se mira las barras enteras, si son iguales se miran las décimas, si son iguales las centésimas y así sucesivamente*"

El alumno A11 escribe:

"*Mirar primero si tienen metros enteros, si los tienen iguales mira en las décimas el número mayor y haz lo mismo con todas las cifras hasta que lo sepas ordenar*"

Los alumnos del grupo 5º B han resuelto con gran dificultad las tareas nº 32 y 33 que trabajan la conexión entre las representaciones fraccionaria y decimal de un reparto. Los resultados han mejorado notablemente en la tarea nº 34. Los alumnos han tenido grandes dificultades para resolver estas tareas y hemos necesitado dedicarles cuatro sesiones de clase. Estas tareas plantean cuestiones más conceptuales que procedimentales puesto que con ellas se pretende mejorar la comprensión de:

1º los significados de las cifras del número decimal

2º la representación gráfica del decimal

3º la fracción que expresa la misma cantidad de magnitud que el decimal

4º la acción de repartir, porque a partir del resultado de un reparto los alumnos deben reconstruir las condiciones iniciales en las que se ha realizado el mismo.

Los resultados obtenidos por los alumnos de 5º B en la tarea nº 34 muestran un mayor grado de comprensión que se manifiesta en la calidad de las respuestas dadas. Por ejemplo, 13 alumnos justifican la respuesta dada en el apartado 3º y nueve justifican la dada en el apartado 4º. Este último grupo de alumnos (A01, A08, A14, A15, A19, A24, A27, A34 y A50) suele resolver las tareas con éxito y muestran tener un mayor nivel de comprensión.

Tarea 34	*5º B*	
	BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	17	4 (A20, A38, A50, A52)
Representan con gráficos la longitud	17	4 (A02, A04, A20, A38)
Paso del decimal a la fracción	16	5 (A04, A06, A20, A39, A30)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	17	4 (A04, A06, A20, A39)

La tipología de los errores cometidos por los alumnos que disponen de un nivel de comprensión bajo del número decimal ha disminuido. Estos alumnos o bien dejan la pregunta sin contestar o cometen un error catalogado como de menor gravedad conceptual. Por ejemplo, ningún alumno ha afirmado en la tarea nº 34 que la parte decimal del número 2´50 coincide con el número de personas que participan en el reparto. Los alumnos A02, A04, A12, A20, A26, A30 y A49 tienen una escasa comprensión del número decimal.

Se ha producido un cambio de actitud y ha aumentado el rendimiento de los alumnos del grupo 5º B cuando han resuelto la tarea nº 35. Puede haber influido la presentación de esta tarea que es más sintética y motivadora que las anteriores. Ahora bien, esta tarea no es elemental porque la resolución correcta de la misma exige a los alumnos:

1º Representar el número decimal como suma de fracciones decimales.

2º Sumar las fracciones decimales.

3º Utilizar la equivalencia de fracciones para simplificar la fracción resultado de la suma.

Las mayores dificultades han acontecido en la actividad de simplificación de fracciones, porque los alumnos no sienten la necesidad de expresar la fracción irreducible. También es cierto que los alumnos han ejercitado poco la técnica de simplificación de fracciones. Los alumnos están más familiarizados con la técnica de obtención de fracciones equivalentes que consiste en multiplicar el numerador y denominador de una fracción por un mismo número.

Día 19-1-2001 (Cuadragésima sesión con 5º A y trigésimo novena con 5º B)

<u>Plan previsto.</u>

En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 38.
2º. Resolver y evaluar la nº 39.

En el grupo 5º B:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 35.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 36.
3º Resolver la tarea nº 37

<u>Ejecución</u>

Comienza las sesiones de clase, a las 9 h., con el grupo 5º B. El profesor recoge algunos trabajos de Navidad y la tarjeta de evaluación de la tarea nº 36. Se procede a evaluar la tarea nº 35 con la ayuda de la alumna A19 que se confunde al resolver el primer apartado pero que presenta un procedimiento ingenioso para resolver el segundo apartado de la tarea. Expresa con una fracción el número decimal 1´2 Kgrs, sumando:

$$\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}$$

La alumna no sabe explicar que los cinco primeros sumandos forman la unidad, pero cuando el profesor le pregunta si era esto lo que había pensado, ésta asiente.

El profesor propone que los alumnos que no han entregado la tarea nº 36 dediquen unos minutos a su resolución. Como observa que bastantes alumnos no saben como afrontarla, el profesor realiza una intervención general y expresa, en la pizarra, el número decimal 0´25 como suma de fracciones decimales.

Los alumnos muestran ahora mejor disposición para resolver la segunda parte de la tarea nº 36 de manera que la mayoría de los alumnos (A02, A06, A08, A18, A20, A38, A30 y A49) concluyen con éxito esta tarea y pasan a afrontar la resolución de la tarea nº 37.

Algunos alumnos (A01, A04, A14, A15, A24, A25, A27 y A34) resuelven bien la tarea nº 37 y pasan a resolver la siguiente tarea referida a la ordenación de decimales.

Antes de concluir la sesión de clase el alumno A30 sale a la pizarra a resolver la segunda parte de la tarea nº 36. El profesor propone que los alumnos resuelvan, como trabajo para casa, la tarea nº 37 y, si la han terminado correctamente, la tarea nº 38.

A las 11 horas comienza la sesión de clase con el grupo 5º A. El profesor entrega la tarea nº 38 a los alumnos A09, A31, A35 y A36 que la habían terminado momentos antes de finalizar la sesión del día anterior y la habían entregado con incorrecciones. Recoge las tarjeta de evaluación correspondiente a esta tarea y solicita que salga a la pizarra la alumna A22 que no la ha traído resuelta. La alumna ordena los números decimales sin ninguna dificultad. Los alumnos saben ordenar números decimales. Algunos alumnos (A16 y A28) que, como la alumna A22, no la han realizado la tarea en sus casas proceden a realizarla rápidamente y con éxito en el aula. Sólo la alumna A32 muestra escasa comprensión.

Después los alumnos afrontan la tarea nº 40, que se trata de una situación problemática que sirve de introducción a la operación suma de decimales. Una confusión del profesor ha hecho que los alumnos no realicen la tarea nº 39. El objetivo de la tarea nº 39 es introducir la suma de decimales pero con cantidades de magnitud menores que las que aparecen en el enunciado de la tarea nº 40.

Los resultados obtenidos por los alumnos en la tarea nº 40 han minimizado el error del profesor, porque sólo cuatro alumnos (A03, A07, A32 y A51) han tenido dificultades para resolver la tarea. Para realizar la evaluación conjunta de la tarea sale a la pizarra la alumna A32. La alumna procede utilizando el algoritmo análogo al de la suma de decimales pero muestra escasa comprensión cuando se le pide que justifique las "llevadas" del algoritmo.

Los últimos quince minutos de la sesión se dedican a realizar tres partidas del juego "atrapar al número decimal". Los alumnos han disfrutado con el juego y han reforzado la técnica para representar gráficamente los números decimales sobre la recta numérica.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Faltan a clase los alumnos A46 y A47 del grupo 5º A. Falta a clase los alumnos A12 y A26 del grupo 5º B

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. En particular, se observa que algunos alumnos del grupo 5º B (A04, A06, A25, A39 y A52) que han tenido dificultades en otras muchas tareas han mejorado mucho su rendimiento. El profesor ha ponderado los éxitos de estos alumnos y les ha animado a seguir trabajando de esta manera.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión:</u>
El rendimiento de los alumnos de 5º B al resolver la tarea nº 35 y 36 es alto. Apenas hemos detectado errores conceptuales. No obstante, debemos advertir que la mayoría de los alumnos han concluido las dos tareas en sus hogares y que, posiblemente, han recibido ayuda externa.

En consecuencia, cabe pensar que tienen un nivel de comprensión inferior al que se presupone de la lectura de los datos que señalamos a continuación:

Tarea 35	*5º B* Decimal *1´5*	 Decimal *1´2*
Encuentra la fracción simplificada	17	18
Encuentra la fracción pero no la simplifica	2	1
Encuentra la fracción pero no lo justifica o comete errores en la justificación	0	2
Escribe una respuesta incorrecta	2	0

La mayoría de los alumnos han utilizado la misma estrategia: expresar la representación polinómica asociada a los números decimales ($1+\frac{5}{10}$ y $1+\frac{2}{10}$) y después operar con fracciones. Solo tres alumnas (A14, A24 y A34) han utilizado otra estrategia para expresar el decimal 1´5: descomponer este número en tres subunidades de 1/2. En el 2º apartado, para expresar el decimal 1´2, la alumna A14 encuentra la fracción pero no justifica su respuesta y las alumnas A24 y A34 utilizan gráficos y se sirven de fracciones decimales.

Los resultados obtenidos por los alumnos de 5º B en la tarea nº 36 son análogos a los de la tarea anterior:

Tarea 36	*5º B* Decimal *0´25*	 Decimal *0´375*
Encuentra la fracción simplificada	19	14
Encuentra la fracción pero no la simplifica	2	5
Encuentra la fracción pero no lo justifica o comete errores en la justificación	0	2
Escribe una respuesta incorrecta	0	0

Aunque los alumnos han recibido ayudas externas, el proceso simbólico que expresan los alumnos en la tarjeta de evaluación nos muestra un nivel de comprensión alto referido a la conexión entre el decimal y la fracción que contrasta con los datos obtenidos en las tareas precedentes.

Las estrategia mayoritaria, como en la tarea anterior, consiste en expresar el decimal como suma de fracciones decimales y, después, operar con las fracciones. Solo el alumno A02 utiliza, en el primer apartado, la idea de que 0´25 es la "mitad de medio litro" aunque, en el 2º apartado no sabe justificar la respuesta. Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 38 aparecen en la tabla:

Tarea 38 *Valoración de la respuesta*	*Nº alumnos de 5º A*
Ordenan bien sin recibir ayuda	13
Ordenan bien, después de rectificar	7
Ordenan mal	1 (A32)

Si comparamos estos resultados con los de la tarea nº 37 se observa que los alumnos ordenan los decimales con mayor celeridad y seguridad. Siete alumnos han precisado algún tipo de ayuda. Las dificultades se han centrado en la comparación de los decimales 10´3 y 10´21. En la siguiente tabla observamos las estrategias utilizadas por los alumnos que las han explicitado:

Tarea 38 *Estrategias*	*5º A* *Nº alumnos*
Comparando por fases: primero la parte entera; y si son iguales, se comparan las décimas; y así sucesivamente.	13
Añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras	2 (A03, A21)
Utiliza la equivalencia de fracciones: "Pasar los decimales a fracción y hacer fracciones equivalentes hasta que salga el mismo denominador igual y comparar"	1 (A35)
No la explicitan	5

Los alumnos tienden a utilizar una única estrategia, la de comparar por fases. De los cuatro alumnos (A03, A21, A29 y A33) que habían utilizado en la tarea nº 37 la estrategia de "añadir ceros a la parte decimal hasta que tengan el mismo número de cifras decimales" solo los dos primeros siguen utilizando el mismo procedimiento. La alumna A33 ha utilizado una estrategia novedosa: coloca los números en columna, alineados por la coma aunque no iguala las partes decimales con ceros.

Los resultados obtenidos por los alumnos de grupo 5º A en relación con la resolución de la tarea nº 40 inducen a pensar que los alumnos han recibido enseñanza de los algoritmos escritos de algunas operaciones con números decimales.

El conocimiento que tienen los alumnos de una técnicas operatorias no debe considerarse como garantía de comprensión conceptual. Los procedimientos de cálculo se consideran objetivo prioritario de la enseñanza escolar pero tales destrezas deben ir acompañadas de conocimientos conceptuales. La introducción prematura de estas destrezas puede obstaculizar el proceso de enseñanza. Esta situación se ha manifestado en el grupo 5º A cuando los alumnos no han reconocido la necesidad de justificar el algoritmo de la suma de decimales porque les parece superfluo recibir explicaciones sobre la justificación de un procedimiento de cálculo del que conocen su manejo.

Valoración.
Se confirma el aumento de rendimiento experimentado por los alumnos del grupo 5º B al resolver las tarea nº 35 y 36. Los alumnos dan muestras de comprender el significado del número decimal como resultado de una medida de cantidad de magnitud y saben expresar un número decimal, que no tenga más de tres cifras decimales, con una fracción.

La mayoría de los alumnos del grupo 5º A saben ordenar números decimales. No obstante, en el trabajo posterior sobre operaciones con números decimales los alumnos tendrán ocasión de reforzar la relación de orden de los números decimales.

Día 22-1-2001 (Cuadragésimo primera sesión con 5º A y cuadragésima con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
Resolver y evaluar la nº 41.

En el grupo 5º B:
Recoger y evaluar las tareas nº 37 y 38.

Ejecución:
Comienza la sesión de clase, a las 9 h., en el grupo 5º B. El profesor recoge las tarjetas de evaluación de las tareas nº 37 y 38 a los alumnos que las han resuelto satisfactoriamente. Se observa que bastantes alumnos no consiguen ordenar las estaturas de los seis que aparecen en la tarea nº 37. Los profesores orientan a algunos alumnos y, poco a poco, van resolviendo esta tarea y pasan a afrontar la siguiente tarea de ordenación de números decimales.

En la siguiente tarea los alumnos muestran menor grado de dificultad, a pesar de tener que volver a ordenar seis números. Sin duda, se han producido aprendizajes durante la resolución de tarea anterior. Un error muy extendido entre los alumnos ha sido considerar el decimal 10´3 menor que 10´21. Todos los alumnos, salvo los A12 y A52, han resuelto esta tarea.

El profesor para evaluar la tarea nº 37 ha utilizado las cañas y ha representado los decimales 1´6 (estatura de Manuel) y 1´495 (estatura de Oscar). No ha quedado tiempo para evaluar la tarea nº 38 y enunciar la regla de ordenación de números decimales.

Los alumnos del grupo 5º A afrontan la resolución de la tarea nº 41. Con esta tarea se pretende introducir el algoritmo de la resta de números decimales. Los alumnos han utilizado el algoritmo usual, salvo la alumna A35 que ha operado con fracciones. La alumna A10 ha justificado el algoritmo de la suma con fracciones pero no ha realizado lo mismo con el de la resta.

Algunos han tenido dificultades cuyas causas son más profundas que la gestión de la llevada en el algoritmo de resta. Las alumnas A07, A23 y A32 no han sabido evaluar las cantidades que intervienen en el enunciado de la tarea, porque han intentado restar a la cantidad menor la cantidad mayor.

El profesor ha presentado el algoritmo de la resta de decimales a partir de la representaciones con fracciones decimales y ha justificado la técnica de evitar las llevadas mediante el procedimiento de añadir al minuendo y sustraendo de la resta la misma potencia de la base decimal. Los alumnos no han sabido justificar el algoritmo de la resta de naturales con lo que la justificación de la resta de decimales difícilmente habrá sido comprendida por los alumnos.

Antes de terminar la sesión de clase el profesor entrega la tarjeta de evaluación correspondiente a la tarea nº 42 con el encargo de que la resuelvan en sus casa y la traigan a la siguiente sesión.

Asistencia de alumnos
Faltan a clase los alumnos A40, A47 y A51 del grupo 5º A. Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º B

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. Los alumnos del grupo 5º B están algo más apáticos que en días anteriores, posiblemente porque hoy es lunes y la sesión de clase se celebra a primera hora de la mañana.

Aspectos relacionados con la comprensión:
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B al resolver la tarea 37 aparecen en la tabla:

Tarea 37 *Valoración de la respuesta*	*Nº alumnos de 5º B*
Ordenan bien sin recibir ayuda	2
Ordenan bien después de rectificar	20
Ordenan mal	1

Estos resultados muestran que los alumnos han dudado durante la resolución de la tarea y han necesitado recibir sugerencias de los profesores. Hemos observado que algunos alumnos ordenan los decimales en función del número de cifras decimales que contengan, aunque este error solo ha quedado reflejado en la tarjeta de evaluación del alumno A52.

En la siguiente tabla observamos las estrategias utilizadas por los alumnos que las han explicitado:

Tarea 37 *Estrategias*	*5º B* *Nº alumnos*
Comparando por fases: primero la parte entera; y si son iguales, se comparan las décimas; y así sucesivamente.	8
Añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras	3 (A01, A08, A15)
Utiliza la equivalencia de fracciones: todas con denominador 1000	1 (A34)
Estrategia errónea: ordenar en función del número de cifras decimales que contengan los números	1 (A52)
No la explicitan	10

Los alumnos (A01, A08 y A15) utilizan una estrategia original que no ha sido sugerida por el profesor: añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras. Por ejemplo, el alumno A08 explica la regla de ordenación de decimales del siguiente modo:

"*Poner ceros hasta que todos los números sean iguales*"

Se observa que los alumnos que tienen un mayor nivel de comprensión utilizan estrategias más originales.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B al resolver la tarea 38 aparecen en la tabla:

Tarea 38 *Valoración de la respuesta*	*Nº alumnos de 5º B*
Ordenan bien sin recibir ayuda	11
Ordenan bien después de rectificar	10
Ordenan mal	2

Los alumnos han realizado aprendizajes durante la resolución de las tareas nº 37 y 38 de modo que rendimiento obtenido en la tarea nº 38 es superior. Los alumnos ordenan números decimales con mayor seguridad y ha disminuido el número de errores.

En la siguiente tabla observamos las estrategias utilizadas por los alumnos que las han explicitado:

Tarea 38 *Estrategias*	*5º B* *Nº alumnos*
Comparando por fases: primero la parte entera; y si son iguales, se comparan las décimas; y así sucesivamente.	14
Añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras	1 (A01)
No la explicitan	8

Del mismo modo que ha ocurrido en el grupo 5º A, cuando los alumnos de 5º B han adquirido un mayor dominio de la técnica de ordenación de decimales han optado por utilizar una única estrategia. Solo el alumno A01 ha mantenido la estrategia utilizada en la tarea anterior.

Valoración.
La mayoría de los alumnos del grupo 5º B saben ordenar números decimales. Queda por analizar el grado de comprensión de los ocho alumnos que no han explicitado la estrategia de ordenación de decimales. Por ello vamos a solicitar a los alumnos que formulen la regla para ordenar números decimales, durante la siguiente sesión.

Día 23-1-2001 (Cuadragésimo segunda sesión con 5º A y cuadragésimo primera con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Resolver y evaluar la nº 42.
2º. Resolver y evaluar la nº 43.

En el grupo 5º B:
1º. Evaluar la tarea nº 38.
2º. Resolver y evaluar la nº 39.
3º. Resolver y evaluar la nº 40.

Ejecución:
Comienza la sesión de clase, a las 9 h., en el grupo 5º A. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 42 a los alumnos que la han resuelto satisfactoriamente. Algunos alumnos (A03, A16 y A28) no han intentado resolver la tarea. Algunos otros, como las alumnas A05 y A32, no ha entendido o no han leído con atención el enunciado de la tarea. Los restantes alumnos han resuelto correctamente la primera parte de la tarea.

Los alumnos han tenido dificultades para interpretar el enunciado de la segunda parte de la tarea. Cuando el profesor ha explicado que el carpintero sólo podía utilizar planchas de longitud 0´5m. y 1´2m. los alumnos han dado muestras de saber resolver este segundo apartado de la tarea.

Para realizar una evaluación conjunta de la tarea nº 42 sale a la pizarra la alumna A35 que, sabe resolver los problemas utilizando la representación fraccionaria, pero se muestra insegura cuando emplea números decimales. Además, en este caso la alumna comprende que debe utilizar la notación decimal porque se trata de un procedimiento más rápido y, en consecuencia, le permite ahorrar tiempo y esfuerzo.

En la segunda mitad de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 43. Se pretende introducir el significado y la técnica de la multiplicación por potencias de 10. Para dotar de significado a la multiplicación de un número decimal por un número natural se propone una situación problemática de reiteración de un reparto.

Se han observado dificultades para expresar el resultado del reparto "3 barras para 8 personas". Algunos alumnos no se acuerdan, o se confunden, al realizar el procedimiento de obtención de la expresión decimal. El profesor ha solicitado a la alumna A32 que realice este reparto por fases, fraccionando las partes sobrantes en 10 partes iguales. Cuando la alumna obtiene la expresión decimal el profesor no da ninguna otra indicación y propone que concluyan esta tarea en sus casas y la traigan resuelta a la siguiente sesión.

Al final de la sesión sólo la alumna A10 ha resuelto con éxito la tarea nº 43, después de haber propuesto con anterioridad el siguiente procedimiento de cálculo equivocado:

$$0'375 \times 10 = 0'3750$$

La aparición de este procedimiento, que ha sido propuesto por la mayoría de los alumnos, se debe a la influencia de la regla que conocen los alumnos para multiplicar un número natural por potencias de diez. Los alumnos tienden a trasladar procedimientos de cálculo que conocen de los naturales, aún en situaciones inadecuadas.

A las 10 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º B. El profesor solicita que salga a la pizarra la alumna A50 para proceder a la evaluación conjunta de la tarea nº 38. Esta alumna había cometido un error en la tarea nº 37, que no había corregido posteriormente durante la sesión de clase del día anterior. La alumna sabe ordenar los números, pero tiene dificultades para expresar correctamente la regla para ordenar decimales. Mientras tanto algunos alumnos se muestran inquietos y desoyen las explicaciones del profesor para conseguir formular de forma consensuada la regla.

El profesor opta por dictar a los alumnos la siguiente regla de ordenación de números decimales: "Para ordenar números decimales comparamos las cifras que corresponden a las unidades de mayor orden. Si una de las cifras que se comparan es mayor el número que contenga esta cifra será el mayor. Y si las cifras del mismo orden son iguales se pasa a comparar las cifras del orden de unidades inmediatamente inferior. Y así, sucesivamente". Después, explica la regla con la ayuda de los números: 10´3 ; 10´30 y 10´21.

En la segunda mitad de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 39. Se pretende introducir el significado y la técnica de la suma de números decimales. La mayoría de los alumnos concluyen con éxito y de forma rápida la tarea dado que conocen el algoritmo de la suma de decimales. Algunos alumnos (A06, A08, A14, A26, A34) han utilizado la representación fraccionaria subyacente al decimal y han resuelto, con algunas ayudas, la tarea.

Según van terminando correctamente la tarea pasan a resolver la tarea nº 40. La mayoría de los alumnos, a excepción de los alumnos A12, A15, A39, A30 y A52, concluyen con éxito la tarea.

Antes de terminar la sesión se realiza la evaluación conjunta de la tarea nº 39. Sale a la pizarra el alumno A52, que está bloqueado y afirma no saber resolver este problema. El alumno tiene dificultades para expresar los números decimales como suma de fracciones decimales; entiende el procedimiento para sumar fracciones y, después, realiza la suma con los números decimales.

Finalmente el profesor entrega la tarjeta de evaluación de la tarea nº 41 para que los alumnos trabajen la tarea en sus casas y la traigan resuelta a la siguiente sesión de clase.

Asistencia de alumnos
Faltan a clase los alumnos A47 y A51 del grupo 5º A. Asisten a clase todos los alumnos de 5º B

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula.

Aspectos relacionados con la comprensión
Respecto a la resolución de la tarea nº 39 efectuada por los alumnos de 5º B hemos observado que:

1º. Los alumnos entienden el significado de la operación suma de decimales porque la han identificado al resolver situación problemática.

2º. Los alumnos conocen el algoritmo escrito usual de la suma antes de ser presentado en el aula. Cabe pensar que han recibido enseñanza previa o que han aprendido el manejo de estos procedimientos de cálculo por enculturación, debido a que se trata de un conocimiento socialmente útil y a la semejanza con los algoritmos de naturales.
Ahora bien, el conocimiento que tienen los alumnos de una técnicas operatorias no debe considerarse como garantía de comprensión conceptual. Los procedimientos de cálculo se consideran objetivo prioritario de la enseñanza escolar, pero tales destrezas deben ir acompañadas de conocimientos conceptuales.

3º Los alumnos no reconocen la necesidad de justificar el algoritmo de la suma de decimales porque les parece superfluo justificar el fundamento de un procedimiento de cálculo del que conocen su manejo.

La enseñanza de las operaciones con números decimales presenta un problema peculiar, a saber, los procedimientos de cálculo con decimales son análogos a los realizados con naturales. Si los alumnos reciben enseñanza de las técnicas operatorias utilizando referencias continuas a los procedimientos de cálculo con naturales, del tipo: "se hace como si no llevasen coma" se estarán creando obstáculos de enseñanza porque tal proceder propicia en los alumnos concepciones erróneas sobre el número decimal al percibirlo como dos números naturales separados por una coma.

Sabemos que los números decimales se inventaron para operar de forma parecida a como se hace con los naturales, pero si la enseñanza escolar de los números decimales se centra en resaltar las analogías con los números naturales se corre el riesgo de trasladar significados, no deseables, entre los conjuntos numéricos de los naturales y los racionales que dan lugar a conflictos originados por la aplicación de propiedades específicas de los números naturales en circunstancias inadecuadas.

Concretamos nuestra apuesta por la enseñanza de los conceptos matemáticos desde la comprensión estableciendo una ruptura entre los conjuntos numéricos de los naturales y los racionales. Esta última estructura numérica resuelve el problema del reparto y de la medida de magnitudes continuas mientras que los números naturales se muestran ineficaces para esta tarea.

4º. La mayoría de los alumnos han optado por utilizar la misma estrategia: disponer los sumandos o restandos uno debajo del otro, alineados por la coma, y proceder como en la suma de naturales.

Los alumnos del grupo 5º A han identificado las operaciones de suma y resta en la tarea nº 42. Además han operado correctamente. Todos los alumnos operan con la notación decimal, salvo la alumna A35 que ha utilizado la suma de fracciones decimales.

Día 24-1-2001 (Cuadragésimo tercera sesión con 5º A y cuadragésimo segunda con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la nº 43.
2º. Resolver y evaluar la nº 44.

En el grupo 5º B:
1º. Evaluar la tarea nº 40.
2º. Recoger y evaluar la nº 41.
3º. Resolver y evaluar la nº 42.

Ejecución:
Comienza la sesión de clase, a las 9h., en el grupo 5º A. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 43 y procede a realizar la evaluación conjunta de la tarea.

Algunos alumnos para calcular la multiplicación 0´375 x 10 añaden un cero a la derecha. De esta forma obtienen como resultado de la multiplicación, 0´3750, que es el mismo número que actúa como multiplicando. Se observa que los alumnos tienden a trasladar procedimientos de cálculo que son válidos con naturales pero inadecuados para los decimales.

Para justificar el procedimiento de cálculo de la multiplicación de 0´375 x 10 el profesor escribe la multiplicación como suma reiterada, y hace observar a los alumnos que el resultado, 3´75, se ha obtenido trasladando la coma un lugar a la derecha.

Para justificar el resultado del cálculo 0´375 x 100, el profesor pensaba explicar el siguiente método:

$$\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000}$$

$$\times\ 100$$

$$\frac{300}{10}+\frac{700}{100}+\frac{500}{1000}=30+7+\frac{5}{10}=37{\acute{}}5$$

Sin embargo, el profesor ha optado por mostrar la regla que han utilizado correctamente bastantes alumnos que han recibido enseñanza sobre operaciones con números decimales. El profesor ha considerado oportuno posponer hasta la evaluación de la siguiente tarea la justificación de esta regla para el caso que el multiplicador sea 100 ó 1000.

Después los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 44, que tiene una estructura análoga a la anterior. Los alumnos resuelven con facilidad la tarea y según van terminando se les propone la resolución de la siguiente tarea. La dificultad de la tarea nº 44 se centra en la formulación escrita de la regla para multiplicar por número decimal por potencias de 10. Algunos alumnos confunden los dos procedimientos descritos, como la alumna A13 que escribe:

"*Multiplicar y correr la coma hacia la derecha como 0 haya*"

Antes de concluir la sesión algunos alumnos (A09, A10, A11, A22, A28, A31, A33, A35 y A37) han resuelto con éxito la tarea nº 45

A las 10 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º B. El profesor solicita que salga a la pizarra la alumna A15 para proceder a la evaluación conjunta de la tarea nº 40. Esta alumna ha sumado dos números decimales alineándolos por la derecha sin tener en cuenta los diferentes ordenes de unidades de las cifras que relacionaba. Sus propios compañeros le indican el error.

El profesor recoge la tarea nº 41. Algunos alumnos (A08, A15, A17, A18, A20, A30 y A52) dicen haberla dejado en sus casas y se les entrega una nueva tarjeta de evaluación para que procedan a resolverla en el aula. Los alumnos que terminan esta tarea resuelven la tarea nº 42.

El profesor ha realizado una intervención general para comentar el significado de algunos vocablos que aparecen en el enunciado de la tarea. Y ha modificado el segundo apartado de la tarea del siguiente modo:

"*b) ¿Puede hacer el soporte utilizando únicamente planchas de 0´5 y m y 1´2 m.?*".

Antes de terminar la sesión de clase la mayoría de los alumnos han realizado, con éxito, la tarea nº 42. Los alumnos que tienen dificultades para resolverla se quedan unos minutos del recreo con el profesor. Todos los alumnos han recibido el encargo de resolver en sus casas la tarea nº 43.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Faltan a clase los alumnos A03 y A47 del grupo 5º A. Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º B

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. Bastantes alumnos no realizan las tareas que se proponen para realizarlas en sus casas.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver las tareas nº 43 y 44 pueden inducir a engaño. El número de errores cometidos por los alumnos es bajo y 14 alumnos expresan correctamente la regla para multiplicar un número decimal por 10, 100 o 1000.

Sin embargo, la utilización generalizada de una única estrategia de resolución da indicios de escasa comprensión y de la traslación de procedimientos de cálculo de los números naturales. La estrategia consiste en encontrar el resultado del reparto "3 barras entre 8 personas" después, multiplicar por 10 y buscar el lugar adecuado donde situar la coma.

Solo tres alumnos han utilizado otras estrategias: los alumnos A16 y A33 multiplican la fracción 3/8 por 10, 100 ó 1000 y, después, convierten la fracción en decimal; y el alumno A11 encuentra la representación polinómica del reparto, suma las fracciones decimales y, después, multiplica por 10, 100 ó 1000. El alumno no indica cómo gestiona las igualdades:

$$\frac{375}{100} \text{ x } 10 = \frac{3750}{100} = 3´750$$

La estrategia utilizada por los alumnos descansa en el algoritmo de la multiplicación de números naturales cuya justificación matemática desconocen. En estas condiciones no sienten la necesidad de justificar este nuevo procedimiento de cálculo con decimales. La utilización de la multiplicación tradicional ocasiona conflictos a los alumnos que intentan formular la regla porque tiende a indicar las acciones que han realizado en la multiplicación. Así, la alumna A05 que desconoce la regla evita realizar procedimientos basados en repartos cuando escribe:

> "*<u>Multiplicar normal</u> pero poner el cero del 10 al final por 100 los dos ceros por 1000 los tres ceros*".

Si los alumnos utilizan las propiedades y técnicas de los números naturales se muestran seguros pero eluden la estructura polinómica fraccionaria que subyace en el decimal y, este proceder les crea dificultades de comprensión.

<u>Toma de decisiones.</u>
Las tareas nº 43, 44 y 45 sirven para introducir la regla para "situar la coma" al realizar multiplicaciones. Pensamos que la regla para "situar la coma" ha sido enseñada demasiado pronto. Sería deseable que los alumnos no recibieran enseñanza de las reglas para situar la coma en las operaciones con números decimales hasta que tales reglas sean justificadas mediante acciones realizadas en el modelo de aprendizaje, aunque con esta decisión se alarguen los tiempos de instrucción.

A la vista de los resultados obtenidos, conviene posponer la formulación de la regla de la multiplicación de un decimal por potencias de diez, hasta que los alumnos hayan realizado varios problemas. En tal caso, debemos introducir una nueva tarea para reforzar la técnica de este procedimiento de cálculo. Se propone resolver las tareas nº 45 y 46 antes que la nº 43 y 44; y en todas ellas justificar el procedimiento de cálculo de la multiplicación mediante la representación polinómica asociada al número decimal.
Somos conscientes de que este planteamiento metodológico alarga considerablemente el proceso de instrucción. A pesar de esta limitación, la enseñanza de los cálculos computacionales desde la comprensión reporta muchas más ventajas que inconvenientes. Como puntos fuertes destacamos que los alumnos reciben una enseñanza más crítica, de mayor riqueza conceptual, donde los algoritmos realizados con lápiz y papel asumen una nueva función: la de reforzar la comprensión de las estructuras numéricas y del sistema de numeración.

Día 25-1-2001 (Cuadragésimo cuarta sesión con 5º A y cuadragésimo tercera con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Evaluar la tarea nº 44
2º. Recoger y evaluar la nº 45.
2º. Resolver y evaluar la nº 46.

En el grupo 5º B:
1º. Evaluar las tareas nº 41 y 42.
2º. Recoger y evaluar la nº 43.

Ejecución:
Comienza la sesión de clase, a las 9 h., en el grupo 5º A. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 45 y procede a realizar la evaluación conjunta de las tareas nº 44 y 45.

El profesor realiza el reparto de "21 barras entre 20 personas" y utiliza la representación polinómica decimal del resultado del reparto para justificar la regla de la multiplicación de un número decimal por potencias de diez:

$$1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\times\ 10$$

$$10 + \frac{0}{10} + \frac{50}{100} = 10 + \frac{5}{10} = 10'5$$

Después de enunciar la regla de la multiplicación de un número decimal por potencias de diez, se pasa a evaluar la tarea nº 45. Se pretende justificar el algoritmo de la multiplicación de un decimal por un número natural. Para ello el profesor propone operar:

$$2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\times\ 8$$

$$16 + \frac{56}{10} + \frac{40}{100}$$

$$16 + \frac{56}{10} + \frac{4}{10} = 16 + \frac{60}{10} = 16 + 6 = 22$$

Después los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 46. Los alumnos resuelven con facilidad esta tarea, aunque bastantes alumnos se confunden al "colocar la coma". El profesor justifica el funcionamiento del algoritmo de la multiplicación 3´5 x 60 y propone a los alumnos como trabajo para casa que hagan lo mismo con la multiplicación 3´75 x 500:

$$3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\times\ 500$$

A las 10 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º B. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 43. Solo tres alumnos (A01, A15, A24) resuelven correctamente la tarea, los demás dicen no saber resolverla.

Antes de que el profesor ayude a los alumnos para que resuelvan esta tarea, procedemos a realizar la evaluación conjunta de las tareas nº 41 y 42. Se pretende justificar los algoritmos de la suma y de la resta de números decimales. Así en la tarea nº 41, el profesor plantea la siguiente suma de fracciones decimales:

$$\begin{array}{ll} & 3+\frac{7}{10}+\frac{5}{100} \\ + & 5+\frac{8}{10}+\frac{0}{100} \\ & 6+\frac{5}{10}+\frac{0}{100} \\ \hline & 14+\frac{20}{10}+\frac{5}{100} = 16+\frac{5}{100} = 16´05 \end{array}$$

Y después la resta:

$$\begin{array}{ll} & 20 \\ - & 16+\frac{0}{10}+\frac{5}{100} \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & 20+\frac{10}{10}+\frac{10}{100} \\ - & 17+\frac{1}{10}+\frac{5}{100} \\ \hline & 3+\frac{9}{10}+\frac{5}{100} \quad = \ 3´95 \end{array}$$

El profesor propone justificar los algoritmos de la suma y de resta con los datos del enunciado de la tarea nº 42. Después procede a ayudar a los alumnos en la resolución de la tarea nº 43. La alumna A17 sale a la pizarra y realiza el reparto "3 barras entre 8 personas". Para realizar la multiplicación 0´375 x 10 expresa el número decimal mediante la representación polinómica subyacente, de modo que el resultado de la multiplicación es 3´75

El profesor escribe 0´375 x 10 = 3´75 y propone a los alumnos que realicen las operaciones:

0´375 x 100 y 0´375 x 1000,

e inventen una regla para saber el resultado de estas multiplicaciones sin tener que realizar el cálculo.

Concluye la sesión de clase y los alumnos reciben el encargo de terminar de resolver en sus casas esta tarea y la tarea nº 44 que tiene una estructura análoga a la tarea nº 43.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Faltan a clase la alumna A47 del grupo 5º A. Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º B

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. Bastantes alumnos no realizan las tareas que se proponen para realizarlas en sus casas.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos han utilizado una única estrategia para realizar las operaciones que aparecen en las tareas nº 44 y 45. Los alumnos establecen analogías entre las operaciones con números decimales y números naturales, de modo que tienden a reproducir los algoritmos conocidos y evitan utilizar otras estrategias. De esta forma evitan expresar el decimal mediante su estructura polinómica fraccionaria subyacente, a pesar de que procedimiento les crea dificultades de comprensión.

La aparente sencillez de las técnicas de cálculo "análogas a las de naturales" les causa numerosos conflictos porque los alumnos que utilizan este procedimiento no disponen de mecanismos para controlar la bondad de sus producciones. De esta forma, los alumnos deciden donde colocar la coma en función de reglas que no han sido previamente justificadas y que, por lo tanto, no controlan.

En la primera parte de la tarea nº 46 la formulación del enunciado ha permitido que aparecieran otra estrategia de resolución basada en la idea de fracción. En la tarea los alumnos deben indicar los minutos que hay en 3´5 horas. Diez alumnos de 5º A (A05, A10, A11, A13, A23, A32, A37, A40, A48 y A51) han realizado la multiplicación reproduciendo el algoritmo de los naturales y situando correctamente la coma. Y otros diez alumnos (A09, A16, A21, A22, A28, A29, A31, A33, A35 y A36) han transformado 0´5 horas en media hora que saben que son 30 minutos y se los han añadido a 180 minutos. Cuatro de estos alumnos (A09, A16, A33 y A35) han utilizado los dos procedimientos de cálculo.
Sin embargo, ningún alumno ha utilizado la representación polinómica fraccionaria del número decimal. Sabemos que la utilización de esta estrategia es más costosa para los alumnos porque tiene una sintaxis más compleja. A pesar de ello, proponemos que los alumnos operen de forma transitoria, durante unas sesiones, con este sistema de representación en aras a mejorar la comprensión de las acciones que comportan los algoritmos de las operaciones aritméticas.

Día 26-1-2001 (Cuadragésimo quinta sesión con 5º A y cuadragésimo cuarta con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Resolver y evaluar la nº 47.
2º. Resolver y evaluar la nº 48.

En el grupo 5º B:
1º. Evaluar las tareas nº 43 y 44.
2º. Resolver y evaluar la nº 45.

Ejecución:
Comienza la sesión de clase, a las 9 h., en el grupo 5º B. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de las tareas nº 43 y 44 a los pocos alumnos (A01, A06, A14, A15, A19, A25, A27 y A34) que la han traído resuelta de sus casas. Algunos de estos alumnos cometen errores en su resolución. Se constata que los alumnos perciben las dos tareas como muy difíciles y que la ayuda que recibieron, durante la sesión anterior, para facilitar la resolución de la tarea nº 43 fue insuficiente.
El profesor toma la decisión de realizar con los alumnos la resolución de la tarea nº 44 y proponer como trabajo para casa la realización de la tarea nº 43. Al finalizar esta sesión de clase los alumnos A01, A14, A15, A19, A24, A25, A27 y A34 han terminado la tarea nº 43.
El profesor solicita que salga a la pizarra el alumno A52 para que realice el reparto de "21 barras entre 20 personas". El alumno que dice no saber hacer la tarea realiza correctamente el reparto.
Después, el profesor escribe en la pizarra la representación polinómica decimal del resultado de este reparto y procede a realizar la multiplicación por diez:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \times\ 10 \\ \hline 10 + \frac{0}{10} + \frac{50}{100} \end{array}$$

$$10 + \frac{5}{10} = 10´5$$

Después, procede a realizar la operación 1´05 x 100:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \times\ 100 \\ \hline 100 + \frac{0}{10} + \frac{500}{100} \end{array} = 100 + 5 = 105$$

Y, finalmente, la operación 1´05 x 1000:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \times\ 1000 \\ \hline 1000 + \frac{0}{10} + \frac{5000}{100} \end{array} = 1000 + 50 = 1050$$

El profesor coloca los resultados en una tabla.

	Multiplicado por 10	Multiplicado por 100	Multiplicado por 1000
1´05	**10´5**	**105**	**1050**

y solicita a diversos alumnos que enuncien la regla para multiplicar un número decimal por 10, 100 ó 1000, sin tener que realizar ninguna multiplicación.

Los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 45. A pesar de que no se ha introducido el algoritmo de la multiplicación de un número decimal por un número natural, los alumnos dan muestras de conocer el procedimiento de cálculo. El profesor propone que los alumnos realicen la multiplicación de dos formas diferentes y escribe en la pizarra:

$$\begin{array}{r} 2\,´7\ 5 \\ \times\qquad 8 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} \\ \times\qquad\qquad 8 \\ \hline \end{array}$$

Todos los alumnos resuelven, con éxito, la multiplicación con la notación decimal y la mitad de los alumnos operan correctamente con la representación fraccionaria decimal.

Los alumnos reciben el encargo de resolver la tarea nº 46 como trabajo para casa durante el fin de semana.

A las 11 h. 10m. comienza la sesión de clase con el grupo 5º A. El profesor entrega la tarjeta de evaluación de la tarea nº 47. En la tarea se enuncian dos problemas que se resuelven con la división de un número decimal entre un natural. Los alumnos no saben cómo resolver la tarea. Unos minutos más tarde el profesor ayuda a los alumnos y les indica que para realizar las divisiones 1´5 : 4 y 0´375 : 5 pueden obtener primero otras divisiones equivalentes que no tengan cifras decimales en el dividendo. Los alumnos dicen que esto es posible multiplicando el dividendo y el divisor de la primera operación por 10, y por 1000 en la segunda división. De esta forma las divisiones a efectuar son: 15 : 40 y 375 : 5000.

Los alumnos han tenido dificultades para realizar el cálculo de estas divisiones. Han cometido numerosos errores que fundamentalmente se deben a que no evocan el proceso de un reparto y además, tienden a abandonar la simbolización del reparto realizado por fases en el que las partes sobrantes se fraccionan en 10 partes iguales. Como el procedimiento del que han recibido enseñanza en este curso es análogo, pero no igual, al de la división con enteros los alumnos tienden a evitar escribir símbolos y por lo tanto pierden el control del orden de unidades de la fase en la que están realizando el reparto.

Los alumnos que resuelven correctamente la tarea afrontan la resolución de la tarea nº 48. Un grupo reducido de alumnos (A09, A10, A33 y A35) concluye con éxito esta tarea. Los restantes alumnos reciben el encargo de terminarla en sus casas, durante el fin de semana, y traerla resuelta a la siguiente sesión de clase.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Falta a clase la alumna A47 del grupo 5º A. Falta a clase el alumno A08 del grupo 5º B

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. Bastantes alumnos no realizan las tareas que se proponen para realizarlas en sus casas. Los alumnos trabajan en el aula, posiblemente debido al constante estímulo que reciben de los profesores. Sin embargo, el nivel de esfuerzo baja considerablemente cuando reciben el encargo de resolver las tareas en sus casas.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los alumnos del grupo 5º B siguen sin utilizar la representación polinómica asociada al decimal cuando han resuelto la tarea nº 43 a pesar de que el profesor les ha recomendado utilizarla y la ha ejemplificado durante la evaluación conjunta de la tarea nº 44. Por este motivo se les exige que utilicen esta estrategia para operar la multiplicación 2´75 x 8 que resuelve el problema enunciado en la tarea nº 45.

De hecho la exigencia impuesta a los alumnos de 5º B para que utilicen la representación polinómica del número decimal en la multiplicación 2´75 x 8 que resuelve el problema enunciado en la tarea nº 45 constituye una potencialidad de la propuesta de enseñanza porque la mitad de los alumnos han sabido calcular y justificar el procedimiento de cálculo.

Los alumnos del grupo 5º A, cuando resuelven la tarea 47, utilizan la estrategia que ha recomendado el profesor. Se recuerda que esta tarea es la primera que realizan sobre la división de un decimal entre un natural y los alumnos han solicitado ayuda. La estrategia utilizada consiste en multiplicar el dividendo y el divisor por una potencia de 10 hasta que ambos números sean naturales y, después, utilizar el algoritmo del proceso de reparto. Solo tres alumnos (A29, A31 y A36) han procedido directamente utilizando el algoritmo del reparto por fases.

El rendimiento de los alumnos en esta tarea es alto porque casi todos han resuelto correctamente los dos problemas propuestos, pero apuntamos dos deficiencias:

1º La mitad de los alumnos descuida la simbolización en el algoritmo del proceso de reparto, porque o no indica que el tamaño de las cantidades que va a repartir o bien no indica el tamaño de las partes que resulta del reparto.

2º La mayoría no indica en la solución la unidad con que viene medida la cantidad de magnitud.

Día 30-1-2001 (Cuadragésimo sexta sesión con 5º A y cuadragésimo quinta con 5º B)

Plan previsto.

En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la nº 48.
2º. Resolver y evaluar la nº 49.

En el grupo 5º B:
1º. Terminar de evaluar la tarea nº 45
2º. Recoger y evaluar la tarea nº 43.
3º. Recoger y evaluar la tarea nº 46.

Ejecución

A las 9 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º A. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 48 y observa que bastantes alumnos no la traen resuelta (A11, A21, A22, A28, A40 y A51) o bien mantienen los mismos errores que los escritos durante la sesión anterior (A29, A31, A37). De nuevo, se percibe falta motivación de los alumnos para realizar las tareas que se les propone resolver fuera del aula.

Varios alumnos salen a la pizarra para evaluar esta tarea. Así la alumna A13 realiza, con la ayuda del profesor, la división 125 : 10; el alumno A37 realiza la división 125 : 100 y la alumna A03 la división 125 : 1000. El profesor escribe en un cuadro los resultados obtenidos y diversos alumnos expresan la regla para dividir un número decimal entre 10, 100 ó 1000; y finalmente, escribe en la pizarra el enunciado de la regla.

Se observa que algunos alumnos tienen dificultades para resolver la división 125 : 10, posiblemente porque no saben justificar el algoritmo de la división en términos reparto de agrupamientos de potencias de diez. Consideran el algoritmo de la división de naturales y del reparto como dos procedimientos de cálculo completamente diferentes.

Después los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 49. Los alumnos no han tenido dificultades para identificar la división como la operación que resuelve la tarea. Las dificultades se han centrado en el procedimiento de cálculo de 1'5 : 0'25. El profesor ha recomendado a los alumnos que multipliquen el dividendo y el divisor por 100.

Concluye la sesión de clase y los alumnos reciben el encargo de realizar la segunda parte de la tarea nº 49 como trabajo para casa.

Comienza la sesión de clase, a las 10 h., en el grupo 5º B. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de las tareas nº 43 y 46 y observa que muy pocos alumnos han traído resueltas las tareas. Además, comprueba que bastantes alumnos siguen cometiendo errores en la resolución de la tarea nº 43. Antes de evaluar esta tarea, decide ejercitar primero el algoritmo de la multiplicación de un decimal por un número natural, y para ello propone realizar la evaluación de las tareas nº 45 y 46.

Para evaluar la tarea nº 45 sale a la pizarra el alumno A30, que resuelve correctamente la multiplicación 2'75 x 8; y procede a enunciar la regla de funcionamiento de este algoritmo. Para evaluar la tarea nº 46 sale a la pizarra el alumno A02 que realiza la multiplicación 3'5 x 60. Durante este tiempo el profesor ha permitido que los alumnos tengan la tarjeta de evaluación de la tarea nº 46 de manera que algunos alumnos, como el A52, han resuelto el apartado que se estaba evaluando en la pizarra y, además, el siguiente apartado.

Después, el profesor recoge la tarea nº 46 y solicita que salga a la pizarra el alumno A06 para resolver el segundo problema enunciado en esta tarea. Este alumno ha mejorado mucho su rendimiento en estas últimas sesiones y realiza bien el algoritmo de la multiplicación 500 x 3'75. El profesor cuestiona la conmutatividad de la multiplicación y, como observa que algunos niegan esta propiedad, pide al alumno A06 que realice el cálculo 3'75 x 500.

Mas tarde, los alumnos afrontan la resolución del primer problema de la tarea nº 47. Con esta tarea se pretende introducir el significado de la operación división de un decimal por un número natural. Sin embargo, algunos alumnos proceden aplicando la operación multiplicación. Se constata que los alumnos no leen con detenimiento los problemas y se apresuran a aplicar una operación, en este caso, la multiplicación porque las últimas fichas se resolvían con esta operación.

El profesor interviene para realizar una representación gráfica de las cantidades de longitud que aparecen en el problema y fomentar un debate con la intención de que unos compañeros informen a los otros de la operación que resuelve la tarea. Un segundo foco de dificultad se centra en la forma de realizar el procedimiento de cálculo. Algunos alumnos (A01 y A34) han recibido enseñanza previa de esta algoritmo y proceden manteniendo, sin realizar modificaciones, el número decimal en el dividendo.

El profesor propone suprimir la coma del número decimal que actúa como dividendo. Para ello pregunta a los alumnos por las acciones que se deberían realizar en el dividendo y divisor. Después de diferentes intervenciones sólo la alumna A34 aporta la respuesta correcta: multiplicar el dividendo y el divisor por 10. De esta forma los alumnos resuelven el reparto "15 metros en 40 partes" en vez del reparto "1'5 metros en 4 partes".

El profesor realiza el reparto y propone a los alumnos que resuelvan el segundo problema de tarea nº 47 como trabajo para casa.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º A. Falta a clase la alumna A14 del grupo 5º B.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos grupos muestran buen comportamiento y buena disposición al trabajo en el aula. Bastantes alumnos no realizan las tareas que el profesor propone para realizarlas como trabajo para casa.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los resultados obtenidos por los alumnos de 5º B en la resolución de la tarea nº 46 son bajos. Algo más de la mitad de los alumnos resuelven con éxito los problemas. Bastantes alumnos no han intentado resolver alguno de los dos problemas enunciados.

En este caso el problema radica en la escasa voluntad de algunos alumnos por resolver estas tareas. Entre los alumnos con dificultades de comprensión señalamos el caso del alumnos A02, A15 y A27 que no han sabido convertir 0´5 horas en minutos y el caso del alumno A38 que gestiona mal la regla para situar la coma. Los demás alumnos no cometen errores, simplemente no han resuelto la tarea.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A cuando resuelven la tarea nº 48 muestran que saben realizar repartos aunque la mitad de los alumnos no expresen con detalle la simbolización del proceso de reparto. Solo hemos detectado dificultades en los alumnos A29, A32, A36 y A51. El bajo rendimiento del alumno A29 puede deberse a falta de interés más que a dificultades de comprensión.

Los alumnos han tenido dificultades para expresar la regla de la división de un número natural o decimal por potencias de 10. Solo una cuarta parte de los alumnos ha expresado correctamente la regla. Algunos alumnos no han entendido el objetivo de la enseñanza de esta regla y, como en el caso de la multiplicación (tareas nº 43 y 44), pretenden aplicar el algoritmo de la división y, a la vez, aplicar la regla. Por este motivo, pensamos que sería conveniente posponer la introducción de esta regla, de manera que los alumnos resuelvan antes más situaciones problemáticas de medida. Se propone introducir una nueva tarea sobre la división de un número decimal por un natural antes de proponer la resolución de tarea nº 48.

Toma de decisiones:
Posponer la evaluación de la tarea nº 43 en el grupo 5º B, por los siguientes motivos:

1º Los alumnos de 5º B conocen la regla que se pretende introducir con la resolución de la tarea.

2º De la observación de los resultados de esta tarea en los dos grupos de docencia se concluye la conveniencia de resolver previamente las tareas de multiplicación de números decimales por un número natural.

3º Algunos alumnos les resulta muy complicado realizar, en una misma tarea, dos actividades de diferente índole: obtener la notación decimal resultado de un reparto y multiplicar por potencias de 10 el resultado del reparto.

Día 31-1-2001 (Cuadragésimo séptima sesión con 5º A y cuadragésimo sexta con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la nº 49.
2º. Resolver y evaluar la nº 50.

En el grupo 5º B:
1º. Terminar de evaluar la tarea nº 47.
2º. Resolver y evaluar la nº 48.

Ejecución
A las 9 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º A. El profesor recoge la tarjeta de la ficha nº 49 y observa que bastantes alumnos (A13, A22, A28, A29, A32 y A40) no han resuelto el segundo problema de la ficha. Otros alumnos (A03, A05, A09, A16, A23 y A36) no han sabido resolver el problema. Destaca el caso de la alumna A09 que realiza bien el procedimiento de calculo, pero escribe en el cociente 3 + 3 = 3´3. El error de esta alumna se debe a una mala simbolización del proceso o bien a una deficiente comprensión del sistema de numeración decimal de naturales.

La alumna A05 sale a la pizarra y realiza el algoritmo de la división 500 : 15 que es equivalente a la división inicial. El profesor aprovecha para informar a los alumnos de la existencia de números con infinitas cifras decimales.

Después los alumnos resuelven la tarea nº 50. Algunos de los alumnos terminan pronto la tarea, a pesar de tener tres apartados, y unos pocos necesitan ayuda. El profesor propone un nuevo problema, que escribe en la pizarra, para que lo resuelvan estos alumnos aventajados.

Comienza la sesión de clase, a las 10 h., en el grupo 5º B. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de las tareas nº 47 y observa que muy pocos alumnos (A06, A24, A27, A39 y A50) han traído resuelta la tarea.

El profesor toma la decisión de evaluar las dos problemas de la tarea nº 47, a pesar de que el primer problema se resolvió en la pizarra antes de finalizar la sesión del día anterior. Para volver a evaluar el primer problema sale a la pizarra la alumna A17 y la alumna A14 resuelve el segundo problema de la tarea nº 47.

La alumna A14 ha recibido enseñanza del algoritmo de la división de un decimal entre un natural y realiza el cálculo 0'375 : 5 sin modificar el dividendo. El profesor por coherencia con el procedimiento utilizado hasta este momento le recomienda encontrar otro reparto equivalente en el que no haya números decimales. La alumna escribe 375 : 5000 y realiza la división cometiendo algunas equivocaciones. Cabe preguntarnos cual de los dos procedimientos de cálculo resulta más sencillo a los alumnos: el que utiliza la alumna A14 o el que se les ha presentado a los alumnos.

Si analizamos el procedimiento de cálculo que utiliza la alumna A14 debemos pensar que procede del siguiente modo:

1º intenta repartir 0 unidades entre 5 personas, y afirma que no pueden recibir ninguna unidad.

2º transforma las 0 unidades en décimas y observa que tiene 3 décimas para repartir entre 5 personas y, en consecuencia, no puede dar ninguna décima.

3º transforma las 3 décimas en centésimas y observa que tiene 37 centésimas para repartir entre 5 personas, y da a cada persona 7 centésimas y le sobran 2 centésimas.
4º transforma las 2 centésimas en milésimas y observa que tiene 20 milésimas que, junto con las 5 milésimas, hacen 25 milésimas para repartir entre 5 personas, y da a cada persona 5 milésimas, y con ello concluye el reparto.

El procedimiento utilizado por la alumna, al igual que el enseñado, requiere un buena comprensión del sistema de numeración y de la idea de reparto. La única ventaja que presenta el algoritmo utilizado por la alumna es que las cantidades numéricas del dividendo y del divisor son menores. Sin embargo, nos hemos decantado por el otro procedimiento de cálculo porque:

1º deseamos anticiparnos a la estrategia que se utiliza cuando el dividendo y divisor son, a la vez, números decimales.

2º se pensaba aprovechar el conocimiento que los alumnos tienen del algoritmo de la división de naturales. Hasta el momento, algunos alumnos no han sabido relacionar los procedimientos de cálculo de repartos y el algoritmo de la división de naturales.

Después los alumnos han afrontado la resolución de la tarea nº 48. Bastantes alumnos han tenido dificultades para realizar el reparto "125 barras entre 10 personas". A los alumnos les resulta complejo realizar un reparto cuando hay más barras que personas; posiblemente tengan una escasa comprensión del sistema de numeración.

Antes de concluir la sesión de clase el alumno A02 solicita salir a la pizarra a realizar este reparto. Los alumnos reciben la consigna de terminar la tarea nº 48 y traerla resuelta a la siguiente sesión de clase.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Faltan a clase los alumnos A47 y A51 del grupo 5º A. Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º B.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos del grupo 5º A han tenido un rendimiento muy dispar en los dos problemas que han resuelto en la tarea nº 49. Todos los alumnos han sabido resolver el primer problema mientras que solo nueve alumnos han tenido éxito en el segundo problema. Este segundo problema tiene un mayor grado de dificultad que el primero debido a las cantidades que intervienen en el enunciado y no a la estructura semántica de los problemas que, en ambos casos, son del tipo agrupamiento. Pero, resulta sintomático que 9 alumnos no hayan aportado ninguna respuesta. Posiblemente algunos alumnos estén fatigados y les falte motivación y voluntad para afrontar el esfuerzo de resolver las tareas.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B cuando resuelven la tarea nº 47 muestran diferencias sustanciales en el nivel de comprensión del grupo. En esta tarea los alumnos deben realizar, por primera vez, dos divisiones cuyos dividendos son números decimales. Se esperaba que la simbolización del proceso de reparto, que ha sido enseñada a los alumnos, les permita resolver esta tarea. Diez alumnos (A01, A06, A08, A14, A15, A24, A27, A34, A39 y A50) han sabido utilizar correctamente este conocimiento, demostrando disponer de una buena comprensión del proceso de reparto. Por el contrario, siete alumnos (A02, A17, A18, A26, A38, A30 y A49) tienen un bajo nivel de comprensión.

Se observa que los alumnos de 5º B hay dos niveles de comprensión muy diferenciados. También han aparecido dos tipos de estrategias para realizar las divisiones. Así, doce alumnos (A02, A04, A06, A08, A12, A15, A18, A19, A25, A30, A49 y A52) han multiplicado el dividendo por potencias de 10 adecuadas para transformar éste número en natural y, después, han procedido con la simbolización del proceso del reparto. Mientras que ocho alumnos (A01, A14, A24, A27, A34, A38, A39 y A50) proceden directamente a realizar y simbolizar el proceso de reparto. Puede que estos últimos alumnos, que disponen de una buena comprensión, hayan recibido enseñanza previa de los algoritmos de la división de números decimales.

Apuntamos dos deficiencias que también fueron observadas en las respuestas dadas por los alumnos de 5º A en la tarea nº 47:

1º Los alumnos descuidan la simbolización del algoritmo del proceso de reparto, porque o no indica que el tamaño de las cantidades que va a repartir o bien no indica el tamaño de las partes que resulta del reparto.

2º Los alumnos no indican en la solución la unidad con que viene medida la cantidad de magnitud.

Toma de decisiones:
Las dificultades detectadas con el algoritmo de la división en los dos grupos y, en particular, en el grupo de 5º B recomiendan no realizar, en este grupo, la tarea 49 en la que los alumnos deben realizar divisiones cuyo divisor es un número decimal. Se propone evaluar la tarea nº 48, volver a realizar la tarea nº 43 en la que los alumnos habían tenido un rendimiento muy bajo y resolver la tarea nº 50.

Cuando en 6º curso de Educación Primaria se retome la experimentación deberemos incidir en la resolución de situaciones problemáticas en las que intervienen cantidades expresadas mediante la notación decimal y, en particular, la multiplicación y división de números decimales.

Día 2-2-2001 (Cuadragésimo séptima sesión en 5º B)
Plan previsto.
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 48.
2º. Evaluar la tarea nº 43.
3º. Resolver y evaluar la nº 50.

Ejecución
Comienza la sesión de clase a las 9 h. y procedemos a realizar la evaluación conjunta de la tarea nº 48. Los alumnos A18 y A49 escriben en la pizarra la representación simbólica de los procesos de los repartos. El alumno A08 formula verbalmente la regla para obtener el resultado de un reparto en el que el número de participantes sea una potencia de 10, sin necesidad de realizar el reparto. Este alumnos desconoce la función de la regla porque considera que primero hay que dividir y después situar la coma.

El profesor propone evaluar la tarea nº 43 y formular la regla para multiplicar un número decimal por una potencia de 10. Esta regla es análoga a la que se acaba de enunciar para la división de números decimales por una potencia de 10. Se recordará que los alumnos de este grupo habían tenido un rendimiento bajo en esta tarea.

Los alumnos afrontan la tarea nº 50. Bastantes alumnos terminan con éxito los tres apartados de la tarea. Las dificultades han aparecido al resolver el último apartado porque los alumnos deben calcular la división 18 : 1´2 y, algunos alumnos, no utilizan la estrategia de multiplicar el dividendo y el divisor por 10 para obtener otra división equivalente cuyos términos sean números naturales.

Antes de concluir esta última sesión los alumnos reciben un cuadernillo que, a modo de libro de texto, explica la introducción del número decimal como resultado de un reparto; amplia el significado del decimal como resultado de una medida, y explica el significado y cálculo de algunas operaciones con números decimales.

Asistencia de alumnos
Falta a clase el alumno A06 del grupo 5º B.

Aspectos actitudinales
Los alumnos muestran buen comportamiento y buena disposición al trabajo en el aula.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B cuando resuelven la tarea nº 48 muestran que saben realizar repartos los repartos "125 barras entre 10 personas" y "125 barras entre 100 personas". Sin embargo, la mitad de los alumnos no han sabido realizar el reparto "125 barras entre 1000 personas". Los alumnos A02, A12, A18, A20, A38, A49 y A52 han tenido un rendimiento bajo.

Los alumnos han tenido dificultades para expresar la regla de la división de un número natural o decimal por potencias de 10. Solo una cuarta parte de los alumnos ha expresado correctamente la regla. Algunos alumnos no han entendido el objetivo de la enseñanza de esta regla y, como en el caso de la multiplicación (tareas nº 43 y 44), pretenden aplicar el algoritmo de la división y, a la vez, aplicar la regla. Por este motivo, pensamos que sería conveniente posponer la introducción de esta regla.

Toma de decisiones:
Ya hemos indicado con anterioridad la conveniencia de posponer la presentación de las reglas que permiten calcular la multiplicación y división de un decimal por potencias de 10 de modo que los alumnos resuelvan situaciones problemáticas por otros procedimientos de cálculo para que éstos valoren la economía que supone la utilización de estas reglas. En concreto, teniendo en cuenta el mayor grado de dificultad de las tareas nº 43 y 44, proponemos resolver previamente las tareas nº 45 y nº 46.

Concluye la Primera Etapa de la Experimentación y consideramos que se han cubierto los objetivos previstos. Recordamos ahora que la división de números decimales no es un objetivo de enseñanza en 5º curso y que este concepto y su procedimiento de cálculo deberá ser deberá ser retomado en 6º curso de Educación Primaria. Ya hemos indicado anteriormente que la justificación de los algoritmos de cálculo de las operaciones aritméticas con números decimales constituye un obstáculo didáctico ocasionado por su semejanza con los algoritmos de números naturales y, también, por el desconocimiento que poseen los alumnos de las propiedades que justifican los algoritmos de números naturales.

ANEXO II.3: DIARIO DE CLASE DEL PRIMER CICLO Y DE LA SEGUNDA ETAPA

Día 8-3-2004 (Primera sesión)

Plan previsto.

Abordar la resolución de la ficha de trabajo nº 1 y nº 2. La primera tarea plantea la siguiente situación problemática.

Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared (la longitud de la cortina mide 1/2 de la unidad). La longitud de la barra queréis que sea igual que la largura de la cortina. ¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda la barra de la cortina que tenga la longitud deseada?

La segunda tarea tiene el mismo formato. Ahora los alumnos deben medir una barra (listón de madera) de longitud 3/4 de unidad.

Ejecución

Los alumnos han resuelto en el aula las dos primeras tareas.

Cuando los alumnos intentar resolver la primera situación problemática, por parejas, tan solo tienen en sus manos el listón que tiene una longitud igual a la de la barra de la cortina que tienen que medir.

El profesor establece un debate: pregunta a los alumnos cómo pueden comunicarse con el vendedor. En concreto pregunta: ¿qué hay que hacer para resolver este problema?. Si no responden, pregunta: ¿se trata de un problema de medida? Plantea la pregunta: ¿qué es lo que debemos medir?. Recuerda que un listón tiene otras cualidades que se pueden medir además de la longitud, como la forma geométrica, la rigidez, color, etc.; pero ahora nos preocupa la magnitud longitud.

Después, el profesor vuelve a preguntar: ¿qué necesitamos para medir? Se espera que los alumnos mencionen la unidad de medida. ¿El vendedor también debe tener alguna unidad de medida?. Si los alumnos no indican que necesitan disponer de la misma unidad de medida, el profesor preguntará: ¿qué unidad de medida tiene que utilizar el vendedor?.

En este momento cada pareja de alumnos recibe dos unidades de longitud (la tira unidad) y se les dice que el vendedor dispone de la misma unidad de medida. También reciben un modelo de carta para que se comuniquen, por escrito, con el vendedor.

Dado que los alumnos poseen conocimientos informales de la fracción, afirman deben pedirle al vendedor “la mitad de la barra". En este caso, el profesor exige a estos alumnos que le digan al vendedor como se consigue hacer la mitad de la barra. Nos interesa observar si los alumnos utilizan la idea de PARTIR o FRACCIONAR la barra en DOS PARTES IGUALES.

El profesor espera que los alumnos aporten la idea de realizar FRACCIONAMIENTOS IGUALES DE LA UNIDAD. Algunos alumno perciben como necesario el fraccionamiento en partes iguales de la unidad. En cualquier caso, el profesor comenta que es necesario utilizar FRACCIONAMIENTOS IGUALES DE LA UNIDAD cuando el resultado de una medida no sea un número entero de unidades. En este caso, se utilizan las PARTES IGUALES DE LA UNIDAD para poder medir. Estas partes iguales las llamaremos SUBUNIDADES, y propone utilizar la tira de papel para FRACCIONAR LA UNIDAD EN DOS PARTES IGUALES. Los alumnos cortan una de las dos cañas en partes iguales.

Las dos partes iguales reciben el nombre de SUBUNIDAD DE LONGITUD 1/2 DE LA UNIDAD. Y se lee "un medio". El profesor indica el significado del numerador y del denominador.

Los alumnos escriben la carta al vendedor de cortinas, donde indican la medida de la cantidad de longitud de la barra.

Después, los alumnos pasan a medir el listón de madera que materializa la barra de cortina (de longitud 3/4 de unidad). Finalmente reciben una segunda carta y escriben al vendedor la longitud de la cortina que precisan.

Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos

Los alumnos se muestran motivados y dispuestos al trabajo en el aula. Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
La resolución de la primera tarea ayuda a resolver la segunda tarea. Ahora bien, cuando los alumnos abordan el problema de la medida de cantidades continuas se enfrentan con un obstáculo epistemológico , por lo tanto, ineludible: no intuyen la necesidad de realizar fraccionamiento en partes iguales de la unidad. Sin embargo, cuando lo sugiere el profesor éstos dan muestras de comprender la finalidad de la estrategia del fraccionamiento igualitario de la unidad.

Hemos observado que algunos alumnos si que reconocen, por sí mismos, la necesidad de que en los procesos de medida exista una unidad común para comunicar el resultado de la medida de la cantidad.

Cuando los alumnos escriben la medida de la cantidad de longitud no utilizan las representaciones simbólicas habituales de la fracción; en su lugar, se sirven de expresiones naturales como mide:

"media unidad y un cuarto de unidad", o

"tres cuartos de unidad"

Los alumnos no escriben la fracción 3/4 unidad porque desconocen este sistema de representación. Es el profesor el que debe introducir la notación fraccionaria al proponer que la medida se realice UTILIZANDO SUBUNIDADES DE UN SOLO TIPO, es este caso, de longitud 1/4 de unidad.

Valoración
Los alumnos no reconocen la acción de fraccionar o dividir la unidad de longitud en partes iguales para comunicar al vendedor la longitud de la barra de la cortina. Esta acción no aparece en el aula cuando los alumnos intentan resolver las tareas. En estas condiciones, debe ser el profesor el que indique la acción del fraccionamiento en partes iguales de la unidad.

Toma de decisiones
Se propone comenzar la segunda sesión realizando una evaluación conjunta de la ficha de trabajo nº 2 para introducir la notación fraccionaria como resultado de la medida de una cantidad de magnitud; fijar los términos de la fracción y sus significados conceptuales. Con esta intención los alumnos cumplimentarán la ficha de trabajo nº 3.

Día 10-3-2004 (Segunda sesión)
Plan previsto.
1º Resolver la ficha de trabajo nº 3.
2º Resolver la ficha de trabajo nº 4.

Ejecución
Se resuelve y evalúa la ficha de trabajo nº 3. La primera mitad de la sesión de clase se ha dedicado a evaluar la tarea nº 2 realizada en la sesión precedente. Los alumnos cumplimentan la tarjeta de evaluación de la tarea nº 3 que sirve para repasar las acciones realizadas para medir un listón de longitud 3/4 de unidad. Los alumnos reciben la siguiente tarjeta de evaluación nº 3:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 3. Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

1º. Escribe la fracción que expresa la longitud del listón:

_____ **de unidad**

2º. Escribe como se lee la fracción: ______________________________

3º. Has fraccionado la unidad en _________ partes iguales.

4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ______________________________

5º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? ______________________________

En la evaluación conjunta de esta tarea, el profesor introduce la representación simbólica de la fracción, y los significados del numerador y del denominador:

La fracción se lee «tres cuartos», y se escribe $\frac{3}{4}\boldsymbol{u}$ *, e indica que la longitud de la barra de cortina se cubre con TRES subunidades iguales de longitud* $\frac{1}{4}\boldsymbol{u}$.

El denominador, 4, indica que las subunidades son de longitud $1/4$ *de unidad. Es decir, que las subunidades que cubren la longitud del objeto a medir se obtienen fraccionando la unidad en 4 partes iguales.*

El numerador, 3, indica el número de subunidades que hay que colocar una a continuación de la otra para obtener una longitud igual a la de la barra a medir.

Después de proceder a la evaluación conjunta de la tarea el profesor presenta a los alumnos un dispositivo para fraccionar la tira unidad en partes iguales, que se denomina ***fraccionador***. En dos paredes del aula están colgados sendos fraccionadotes. El profesor indica que para realizar algunos fraccionamientos como medios, cuartos o tercios no es necesario utilizar este dispositivo que resulta más adecuado para fraccionamientos menores. Además, les indica cómo realizar el fraccionamiento e la unidad en tres partes iguales.

Seguidamente, propone a los alumnos la resolución de la ficha de trabajo nº 4 que exige medir la longitud de un listón de madera (4/3 de unidad). Cada alumno dispone de un listón, de dos tiras de longitud la unidad y de una tarjeta de evaluación, análoga a la de la ficha nº 3, para que escriban el resultado de la medida y los significados de los términos de la fracción.

Termina la sesión de clase. No ha dado tiempo para evaluar conjuntamente la ficha de trabajo nº 4.

<u>Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos</u>
Los alumnos se muestran motivados y dispuestos al trabajo en el aula. Asisten a clase todos los alumnos.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos dan muestras de comprender el proceso de medida. Se observa que los alumnos más aventajados interpretan el denominador la fracción como "el tamaño de las partes de la unidad con el que se consigue medir el listón" y solo un alumno, B10, que posiblemente ha recibido enseñanza en su hogar, menciona la expresión usual: " partes iguales en las que hemos fraccionado la unidad". Se trata de un indicio de buena comprensión por parte de los alumnos, porque asocian la idea de denominador con "la longitud de la subunidad que permite medir el listón".

A pesar de que la resolución de la tarea ha estado guiada por los profesores los alumnos dan muestras de comprensión porque todos los alumnos han sabido explicar correctamente el procedimiento de medida de la barra en la carta que han escrito al vendedor de barras de cortinas.

Después de que los alumnos reciben enseñanza de los significados de la fracción y de los términos de ésta, reciben la consigna de escribir estos significados en sus cuadernos para que los guarden de forma permanente y puedan ser utilizados en otras tareas posteriores. Esta modificación metodológica no se aplicó en la Primera Etapa y puede ayudarles a recordar a los alumnos los significados introducidos en el aula.

Los alumnos han ejercitado la técnica de fraccionamiento de la unidad en tres partes iguales. Cuando afrontan la medida del listón de longitud 4/3 de la unidad, la mayoría de los escolares sabe medirlo. En el trabajo realizado por los escolares observamos que:

1º La mayoría de los alumnos saben expresar con símbolos la fracción. Solo tres alumnos, B02 y B13 y B20 no dan la respuesta correcta.
2º Los alumnos saben leer la fracción.
3º La mayoría de los alumnos saben que han fraccionado la unidad en 3 partes iguales. Algunos alumnos piensan que han fraccionado la unidad en 4 partes iguales.
4º Los alumnos tienen dificultades para expresar correctamente los significados del denominador y numerador de la fracción.

<u>Valoración</u>
Los alumnos tienen un conocimiento inestable de la fracción como resultado de la medida de cantidades de longitud. Esto es razonable porque estamos en los momentos iniciales de la secuencia de enseñanza. Las mayores dificultades aparecen en el momento de expresar correctamente los significados del denominador y numerador de la fracción.

Toma de decisiones
Se propone comenzar la tercera sesión realizando una evaluación conjunta de la ficha de trabajo nº 4 para introducir la notación fraccionaria como resultado de la medida de una cantidad de magnitud; fijar los términos de la fracción y sus significados conceptuales. Y, después, continuar con las siguientes tareas de medida de cantidades de longitud.

Día 11-3-2004 (Tercera sesión)
Plan previsto.
1º Evaluar la ficha de trabajo nº 4.
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 5.

Ejecución
Se procede a evaluar conjuntamente la ficha de evaluación nº 4, y se repasan las tareas precedentes:
Los alumnos escriben en sus cuadernos el significado de los términos de las fracciones que han aparecido en las tareas nº 1, 2, 3 y 4 como resultado de la medida de cantidades de longitud. El profesor escribe en la pizarra bajo el título de FRACCIONES el siguiente texto:

En la tarea nº 1 hemos medido un listón de longitud 1/2 de unidad. El denominador (2) indica que hemos fraccionado la unidad en 2 partes iguales. Y el numerador (1) indica que hemos tenido que colocar 1 subunidad para obtener una longitud igual a la de la barra a medir.

En la tarea nº 2 y nº 3 hemos medido un listón de longitud 3/4 de unidad. El denominador (4) indica que hemos fraccionado la unidad en 4 partes iguales. Y el numerador (3) indica que hemos tenido que colocar 3 subunidades, una a continuación de la otra, para obtener una longitud igual a la de la barra a medir.

En la tarea nº 4 hemos medido un listón de longitud 4/3 de unidad. El denominador (3) indica que hemos fraccionado la unidad en 3 partes iguales. Y el numerador (4) indica que hemos tenido que colocar 4 subunidades, una a continuación de la otra, para obtener una longitud igual a la de la barra a medir".

Después, los alumnos reciben la consigna de resolver la tarea nº 5 que exige medir un listón de madera de 5/4 de unidad. Cuando los alumnos cumplimentan la tarjeta de evaluación de la hoja nº 5, se procede a la evaluación conjunta de esta tarea.

Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos
Los alumnos se muestran motivados y dispuestos al trabajo en el aula. Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos saben medir el listón de longitud 5/4 de unidad y además leen correctamente esta cantidad. Además, los dos tercios de los alumnos expresan de forma correcta el significado de la fracción y de sus términos. Se detecta una mejora en el rendimiento de los escolares en relación con la Primera Etapa Experimental, especialmente en la comprensión del significado de la fracción. Pensamos que el aumento en el rendimiento de los escolares para expresar el significado de los términos de la fracción se justifica por dos motivos:

1º Durante la secuencia de enseñanza los alumnos escriben en sus cuadernos el significado del numerador y del denominador de la fracción que ha aparecido como resultado de la medida de longitud que han realizado en las tres primeras tareas.

2º Los alumnos realizan sobre la tira de papel de longitud la unidad diferentes fraccionamientos hasta que encuentran el fraccionamiento adecuado. Esta forma de proceder permite relacionar la unidad con las subunidades obtenidas a partir de aquella.

Sin embargo, hemos observado que cuatro alumnos (B06, B07, B08, B13) tienden a confundir el número de veces que han fraccionado la unidad y el número de subunidades que han colocado para cubrir la longitud del listón. En efecto, después de medir el listón de longitud 5/4 de unidad cuando responden a la cuestión: "¿en cuántas partes iguales has fraccionado la unidad?, olvidan que han necesitado fraccionar la unidad en 4 partes iguales y contestan "cinco partes" porque ven 5 subunidades, colocadas una a continuación de la otra, cubriendo la longitud del listón. Esta situación es transitoria y corresponde a una fase inicial caracterizada por una comprensión inestable del sistema de representación fraccionario.

Valoración
Hemos introducido en esta nueva Etapa de la Experimentación tres nuevas variables:

1º Los alumnos utilizan tiras de papel en lugar de cañas previamente fraccionadas. De esta forma se consigue que los alumnos relacionen, en todo momento, las subunidades con la unidad de medida.

2º Aconsejamos que los alumnos afronten la búsqueda de la subunidad que resuelve el problema de la medida DE FORMA SISTEMÁTICA, es decir, que prueben con la unidad de longitud, después con 1/2 de unidad, con 1/3 de unidad, y así sucesivamente.

Esta estrategia de carácter general, junto con la utilización de tiras de papel que los alumnos deben fraccionar en cada tarea, facilita la medida de la cantidad aunque retrasa la aparición de fracciones equivalentes. No consideramos prioritario que aparezca, en las primeras tareas de medida, la equivalencia de fracciones porque, posteriormente, surgirá este concepto de manera natural.

3º Los alumnos copian en sus cuadernos los significados de los términos de la fracción después de haber cumplimentado la tarjeta de evaluación de la tarea.

Toma de decisiones
La secuencia de enseñanza funciona bien. En consecuencia, no se proponen modificaciones.

Día 15-3-2004 (Cuarta sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 5BIS.
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 6.

Ejecución
Se cumple con el plan previsto. Los alumnos resuelven las fichas de trabajo nº 5BIS y nº 6 que indagan por las medidas los listones de longitud 2u y $\frac{6}{5}$ u, respectivamente.

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase B12, B13 y B16.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos saben medir el listón de 2 unidades de longitud. Las respuestas más interesantes han aparecido cuando el profesor ha solicitado que expresen con una fracción esta cantidad de longitud. Algunos alumnos han propuesto, inicialmente, fracciones como 6/3 u, 4/2 u, 8/4 u y 16/8 u. Finalmente algunos alumnos han propuesto la fracción 2/1 de unidad. El profesor ha recordado el significado de los términos de la fracción. En este caso, el hecho de que el denominador sea 1 indica que no ha sido necesario realizar ningún fraccionamiento de la unidad; y que la longitud del listón se cubre con 2 unidades completas.

Cuando los alumnos abordan la resolución de la tarea nº 6 se ven obligados a realizar, por primera vez, fraccionamientos de la unidad en cinco partes iguales. Los alumnos se ayudan del "fraccionador" para fraccionar la unidad en cinco partes iguales.

Todos alumnos saben medir el listón de longitud 6/5 de unidad, y saben expresar oralmente el resultado de la medida. Todos los alumnos, salvo B01 y B02, saben expresar correctamente los significados del numerador y del denominador.

Valoración
Los alumnos saben encontrar la representación fraccionaria que expresa la medida de cantidades de longitud. Además, saben expresar correctamente los significados del numerador y del denominador. Se observa que la tasa de éxito referida a esta unidad de comprensión va aumentando conforme los alumnos van resolviendo nuevas tareas.

La tasa de éxito referida a la medida de la cantidad de longitud es muy alta Por el contrario, los alumnos tienen graves dificultades para expresar el significado que dotan al numerador y denominador de la fracción.

Toma de decisiones
La secuencia de enseñanza funciona bien. El Equipo Investigador decide suprimir las tareas de comunicación en las que un grupo de alumnos cortan un listón de madera para que compañeros de otro grupo midan el listón que, previamente, han construido los del primer grupo. En la Primera Etapa detectamos que la gestión de estas situaciones de comunicación resulta muy compleja, producen cansancio en los alumnos y no reportan los beneficios esperados porque apenas aparece el concepto de equivalencia de fracciones.

En su lugar, proponemos efectuar una nueva tarea de medida directa (ficha de trabajo nº 6BIS) y proponer la resolución de nuevas tareas cortas de evaluación semántica fracciones propias e impropias.

Día 16-3-2004 (Quinta sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 6BIS.
2º Introducir las tareas de evaluación semántica.

Ejecución

Se cumple con el plan previsto. Los alumnos resuelven las fichas de trabajo nº 6BIS que indaga por la longitud de un listón, de $\frac{5}{6}$ u.

En la segunda parte de la sesión los alumnos resuelven tareas inversas a las de medida directa; se trata de *tareas de evaluación semántica* que consisten en construir listones de una determinada longitud.

En la Primera Etapa Experimental utilizamos cañas de plástico de diferentes subunidades para materializar cantidades de magnitud. Dado que disponemos de este material proponemos utilizar cañas de plástico previamente fraccionadas, para que los alumnos, por parejas, construyan las siguientes cantidades:

a) la unidad, 2/2 u, 3/3 u, …..

b) 3/4 u

c) 3/2 u

d) 2/3 u, 4/6 u.

Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos

Faltan a clase la alumna B03. Los alumnos han seguido la clase con interés. En la segunda parte de la sesión se realizan tareas cortas de evaluación semántica, con la intención de que los alumnos construyan cantidades de determinada longitud. Los alumnos han participado en el debate suscitado cuando aparece la misma cantidad de longitud asociada a la equivalencia de fracciones.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los alumnos muestran una buena comprensión de la fracción como resultado de la medida de la cantidad longitud. Todo los alumnos del grupo saben medir la cantidad de longitud que posee el listón de la ficha de trabajo nº 6BIS. El 90% de los alumnos del grupo saben expresar el significado de la fracción y de sus términos, porque solo un alumno B13 yerra al dotar de significado a la fracción, a pesar de mide correctamente.

En cuanto a las tareas de evaluación semántica se observa que los alumnos dudan entre pedir subunidades obtenidas al fraccionar la unidad en tantas partes iguales como indica el denominador, o bien, según indica el numerador. Esta dificultad atañe directamente al significado del numerador y denominador de la fracción. Por este motivo parece oportuno incidir en los significados del numerador y del denominador de la fracción y proponer nuevas tareas de evaluación semántica.

Valoración

La modificación metodológica que consiste en utilizar, como unidad, tiras de papel en lugar de cañas de plástico se ha mostrado muy eficaz en la propuesta de enseñanza. Cuando los alumnos utilizan tiras de papel se en obligados a realizar, en cada acción de medida, fraccionamientos de la unidad. Estas acciones ayudan a que los alumnos perciban la relación entre el tamaño de la unidad y de las subunidades que construyen con la intención de medir. Sin embargo, esta relación se desvirtúa cuando los alumnos utilizan como subunidades cañas de plástico previamente fraccionadas. En consecuencia, esta modificación del material ha sido muy provechosa porque permite a los alumnos distinguir entre el fraccionamiento de la unidad (denominador) y el número de subunidades que cubren la longitud del listón (numerador).

Por otra parte, el planteamiento de tareas de evaluación semántica incrementa la comprensión de los alumnos y permite al Equipo Investigador detectar dificultades en algunos alumnos que han dudado al interpretar la representación simbólica de la fracción cuando éstos debían solicitar el tipo y la cantidad de subunidades.

Toma de decisiones

Se consideran alcanzados los objetivos vinculados a las tareas de medida directa de cantidades de longitud. Antes de pasar al modelo de aprendizaje de superficie nos proponemos realizar nuevas tareas de evaluación semántica de la fracción como medida de la cantidad de longitud.

Día 17-3-2004 (Sexta sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 7.
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 8.

Ejecución

Se cumple la planificación prevista que consiste en resolver tareas cortas de evaluación semántica de fracciones propias e impropias. Se trata que los alumnos resuelvan las siguientes cuestiones de forma individual, sin recibir ayudas o influencias de sus compañeros. En la ficha de trabajo nº 7 se indaga por la construcción de un listón de longitud 5/3 u, y en la ficha nº 8 por la longitud 7/8 u. En esta Segunda Etapa se han introducido modificaciones en las Tarjetas de Evaluación. Mostramos a continuación las tarjetas de evaluación nº 7 y nº 8 que tiene un formato común:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 7

Quieres construir un listón de longitud $\frac{5}{3}$ de la unidad

¿En cuántas partes debes fraccionar la unidad? ____________________

¿Cuántas subunidades necesitas? ____________________

¿De qué longitud son las subunidades que necesitas? ____________________

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 8

Quieres construir un listón de longitud $\frac{7}{8}$ de la unidad

¿En cuántas partes debes fraccionar la unidad? ____________________

¿Cuántas subunidades necesitas? ____________________

¿De qué longitud son las subunidades que necesitas? ____________________

Asistencia de los alumnos

Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión

Las tareas de evaluación semántica de la fracción presentan a los alumnos mayores dificultades conceptuales que las tareas de medida directa de cantidades de magnitud longitud porque las primeras exigen del alumno realizar una interpretación de la representación simbólica de la fracción a través de un proceso mental sin la ayuda de un soporte físico concreto. En efecto, los alumnos inicialmente deben interpretar los términos de la fracción para resolver la tarea.

En las primeras tareas de evaluación semántica de la fracción, los alumnos interpretan con mayor dificultad las fracciones impropias que las fracciones propias. El 60% de los alumnos saben construir un listón de longitud 7/8 de unidad, mientras que el porcentaje de éxito baja hasta el 34% cuando el listón a construir viene dado por la fracción impropia 5/3 de unidad.

Valoración

En las tareas de medida directa, los alumnos sitúan en el mismo plano de dificultad la representación fraccionaria propia e impropia. Sin embargo, en las tareas de evaluación semántica los alumnos tienen más dificultades para dotar de significado a la fracción impropia que a la fracción propia. Parece razonable que la evaluación semántica de una fracción impropia sea una tarea más compleja que la de evaluar una fracción propia porque resulta obligado discriminar las unidades enteras y, después, proceder a la evaluación semántica de la fracción propia; sin embargo, los resultados hallados no aportan evidencias contundentes de este hecho.

Los alumnos obtienen un rendimiento muy alto en tareas de medida directa y, sin embargo, el rendimiento desciende cuando expresan los significados de los términos de la fracción. Se concluye que explicitar los significados del numerador y denominador de una fracción no es una tarea sencilla dado que los alumnos tienen que coordinar los tres objetos intervienen simultáneamente en los procesos de medida: la unidad, la subunidad que se construye y el objeto a medir.

En la Segunda Etapa se han introducido modificaciones metodológicas importantes que han posibilitado la obtención de mejores resultados que los alumnos de la Primera Etapa. En efecto, los alumnos de la Segunda Etapa han recibido enseñanza explícita de los significados del numerador y del denominador de la fracción de modo que tienen escrita esta información en sus cuadernos y pueden disponer de ella en el momento de resolver las tareas. Los alumnos de la Primera Etapa no disponían de esta información porque se deseaba que realizasen una interpretación personal del papel que juegan los términos de la fracción. En la Segunda Etapa, el profesor institucionaliza los significados del numerador y del denominador de la fracción al recoger y sintetizar las interpretaciones que realizan los escolares cuando resuelven las primeras tareas de medida.

Otra modificación importante consiste en la supresión de las cañas de plástico y la introducción de tiras de papel para representar la unidad, de modo que se perciba con claridad la vinculación entre el tamaño de las subunidades obtenidas a fraccionar la unidad en partes iguales.

Toma de decisiones

El modelo de medida con la magnitud longitud ha funcionado bien en la propuesta de enseñanza porque los resultados obtenidos son aceptables: todos los alumnos saben expresar, con una fracción, el resultado de la medida de cantidades de longitud; dan muestras de comprender los significados del numerador y del denominador de la fracción; y un porcentaje superior al 50% saben construir la cantidad de longitud que viene expresada por una fracción. En consecuencia, proponemos continuar con la secuencia de enseñanza pasando a trabajar el modelo de aprendizaje de superficie.

Día 18-3-2004 (Séptima sesión)

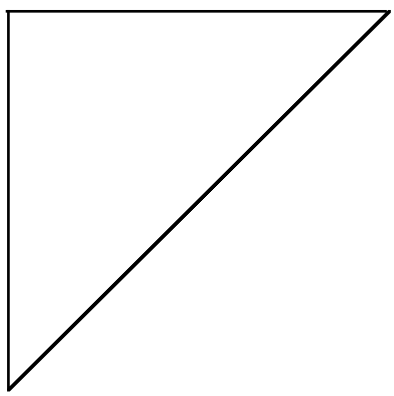
Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 9.
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 10.
3º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 11.

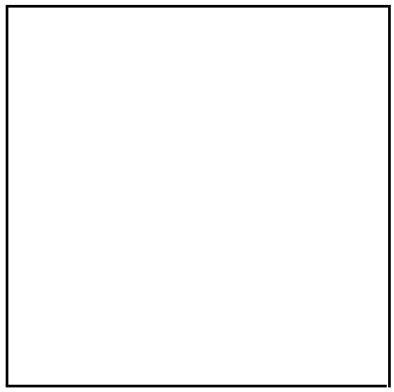
Ejecución

Los alumnos comienzan a medir cantidades de superficie. La tarea nº 9 es un conjunto de actividades de medida de cantidades de superficie. Definida la unidad de superficie, los alumnos construyen manteles de superficie 1/2 u, 1/3 u, 1/4 u y 1/8 u.

En la primera parte el profesor coordina la resolución de la tarea nº 9 proponiendo actividades cortas de medida y de construcción de cantidades de superficie muy elementales. En la actividad 9.1 los alumnos reciben el siguiente mantel:



Y les pregunta a los alumnos cual es la superficie del mantel. Cada alumno recibe dos unidades de medida como las que se muestra a continuación:

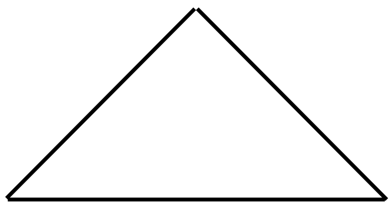


Los alumnos han resuelto con éxito esta primera actividad.

En la actividad 9.2 el profesor propone construir un mantel de superficie 1/2 unidad pero que tenga diferente forma que el anterior. Los alumnos doblan por la mitad la unidad de medida de forma rápida.

Después, el profesor propone comparar la superficie de los manteles construidos en las actividades 9.1 y 9.2. Los alumnos aportan diferentes formas de comparación y esto permite al profesor comentar que existen figuras que tienen diferente forma pero que tienen la misma cantidad de superficie.

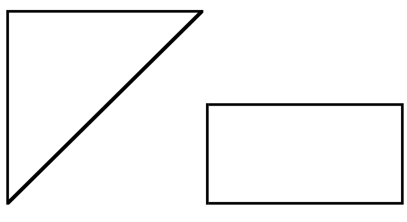
En la actividad 9.3, el profesor propone construir manteles de superficie 1/4 de unidad que tengan diferentes formas. La mayoría de los escolares propone inicialmente:



porque fraccionan el mantel de la actividad 9.1 en dos partes iguales.

Otros alumnos fraccionan la unidad partes iguales mediante ejes de simetría perpendiculares a los lados del cuadrado unidad. De esta forma obtienen un cuadrado de superficie 1/4 de unidad.
Ningún alumno ha construido un mantel de forma rectangular. Después de el profesor les recomienda que persistan en la búsqueda consiguen construirlo.

En la actividad 9.4 el profesor propone construir manteles de superficie 1/8 unidad que tengan diferente forma. Los alumnos construyen los siguientes manteles:



Todos los alumnos resuelven con éxito esta actividad.

En la actividad 9.5 el profesor propone construir manteles de superficie 1/3 unidad, e indica a los alumnos la forma de obtener esta cantidad de superficie mediante el plegado del papel que materializa la unidad. Los alumnos han necesitado ejercitar la técnica del fraccionamiento de la unidad en tres partes iguales.

En la actividad 9.6 los alumnos reciben unidades de superficie con la consigna de que construyan una cantidad de superficie de 1/6 de unidad. Para resolver esta tarea los alumnos han fraccionado la unidad en tres partes iguales y, después, han vuelto ha fraccionarlo en dos partes iguales. Finalmente, han evaluado esta cantidad de superficie al compararla con la unidad.

En la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de las fichas de trabajo nº 10 y nº 11. La ficha de trabajo nº 10 plantea medir un mantel de superficie 3/2 u. y, la ficha de trabajo nº 11 la de una cantidad de superficie de 15/2 unidad, que se corresponde con la cantidad de superficie de la mesa de trabajo de los alumnos.

Los alumnos saben medir la cantidad de superficie que indaga la ficha de trabajo nº 10. Los alumnos reciben un mantel rectangular, en soporte de papel, cuya superficie deben medir y, además, reciben dos unidades de superficie. Entre las soluciones de los alumnos aparecen diversas fracciones equivalentes como 6/4 u, 9/6 u y 12/8 u.

En la ficha de trabajo nº 11 los alumnos miden la superficie de la parte superior de su mesa de estudio, que mide 15/2 u. Los alumnos afirman, inicialmente, que la mesa mide "7 unidades y media". Cuando el profesor les sugiere que expresen la cantidad de superficie con una única subunidad los alumnos aportan la respuesta correcta.

Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo. Los alumnos muestran buena disposición hacia el trabajo propuesto. Además, la realización de actividades cortas con un elevado porcentaje de éxito ha motivado a los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Desde las primeras tareas de medida aparece profusamente el concepto de equivalencia de fracciones, que surge, de forma natural, cuando los alumnos utilizan diferentes fraccionamientos de la unidad. El hecho de que los alumnos construyan las subunidades con las que intentan completar el proceso de medida les ayuda a percibir la relación entre la cantidad de superficie de éstas y la de la unidad de medida y, en estas condiciones, aparecen con mayor facilidad ideas relativas a la equivalencia de fracciones.

Valoración
Las actividades de medida de cantidades de superficie mejoran la comprensión del sistema de representación fraccionario. Los alumnos se desenvuelven bien con el modelo de superficie. El conocimiento que tienen los alumnos de la fracción como resultado de la medida de cantidades de longitud favorece la realización correcta y rápida de tareas de medida de cantidades de superficie.

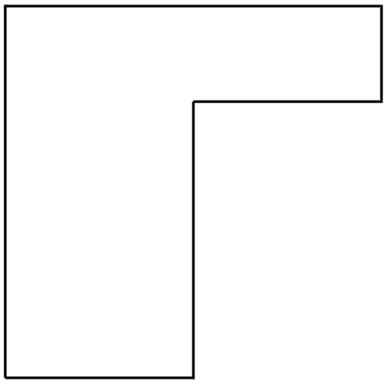
Día 22-3-2004 (Octava sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 12.
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 12BIS.

Ejecución
Se resuelve y evalúa la ficha de trabajo nº 12. Los alumnos reciben una cartulina cuadrada, de superficie 9/4*u*, y varias unidades de superficie. Además, reciben una tarjeta de evaluación para que respondan a las siguientes cuestiones:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 12
1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel:
——— de unidad
2º. Escribe como se lee la fracción: ____
3º. Has fraccionado la unidad en _____ partes iguales
4º ¿Qué indica el numerador de la fracción? ___________________________________
5º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? _________________________________

Durante la evaluación conjunta de la ficha de trabajo nº 12, la alumna B16 que no ha sabido medir la superficie del mantel resuelve la tarea en la pizarra.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven uno de las actividades que plantea la ficha de trabajo nº 12BIS. Esta ficha propone varias actividades de medida de cantidades de superficie. Antes de que concluya esta sesión los alumnos miden un nuevo un mantel (de superficie 5/8 u) pero no cumplimentan la tarjeta de evaluación porque no se dispone de tiempo:



La evaluación de esta tarea se realizará al comienzo de la siguiente sesión.

Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos
Los alumnos del grupo están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Falta a clase B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
Después de que los alumnos resuelven la tarea propuesta en la ficha de trabajo nº 12 cumplimentan la tarjeta de evaluación en la que expresan el resultado de la medida y los significados del numerador y del denominador de la fracción. Los resultados se muestran en la tabla adjunta:

Respuesta	Medir	%	Lectura de la fracción	%	Fraccionamiento de la unidad	%	Sgdo numerador	%	Sgdo denominador	%
no contesta	0	*0*	0	*0*	0	*0*	3	*16*	3	*16*
errónea	1	*5*	0	*0*	5	*26*	3	*16*	0	*0*
correcta	18	*95*	19	*100*	14	*74*	13	*68*	16	*84*

Todos los alumnos, salvo B16, encuentran la fracción correcta 9/4 de unidad. Además, cuatro alumnos (B06, B07, B13 y B20) tienen un conocimiento inestable de la fracción que les lleva a decir, erróneamente, que han fraccionado la de la unidad en 9 partes iguales.

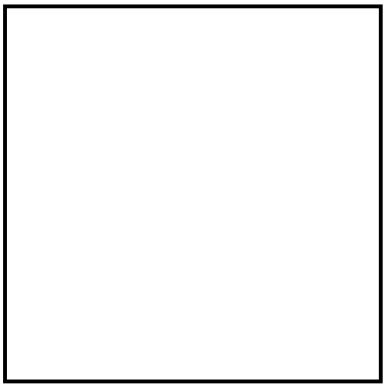
Los porcentajes de acierto referidos al significado del numerador y del denominador son altos e muestran una buena comprensión del significado de la fracción. Algunos de los errores detectados tienen que ver con dificultades de los alumnos para expresar por escrito sus ideas más que en aspectos conceptuales referidos a la fracción.

Las tareas de medida propician la aparición del concepto de equivalencia de fracciones. Dos alumnas (B12 y B18) aportan como solución la fracción 18/8 unidad.

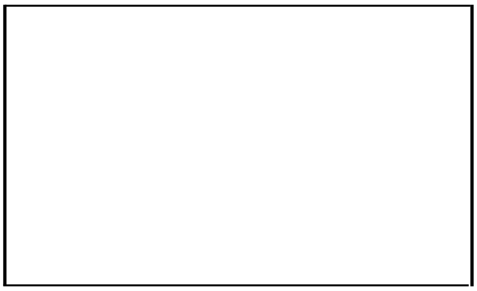
Toma de decisiones
Las dos primeras sesiones dedicadas al modelo de medida con la magnitud superficie resultan provechosas y no se observan problemas en la implementación de la fichas de trabajo. El Equipo de Investigación considera oportuno proponer nuevas tareas de medida de la magnitud superficie que exigen nuevos fraccionamientos de la unidad. Esta nuevas actividades de proponen en la ficha de trabajo nº 12BIS.

Día 23-3-2004 (Novena sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar las actividades de la ficha de trabajo nº 12BIS

Ejecución
Se resuelve y evalúa la ficha de trabajo nº 12BIS. En primer lugar, se procede a evaluar la actividad que propone medir la cantidad de superficie 5/8 u. Después, los alumnos reciben el encargo de medir nuevos manteles: de superficie 15/16 u, 2/3 u y 2 unidades, sabiendo que la unidad de superficie es:

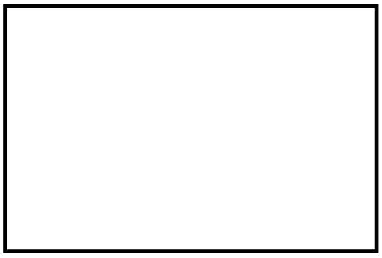


Todos los alumnos han sabido medir la cantidad de superficie del rectángulo (15/16*u*):

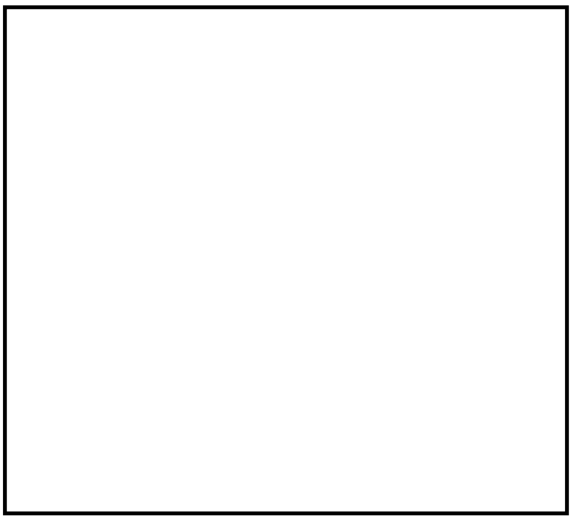


Cuando el profesor pregunta si los alumnos pueden expresar de otro modo diferente la fracción 15/16*u*, que expresa la medida de este mantel, algunos han aportado la solución 30/32*u*.

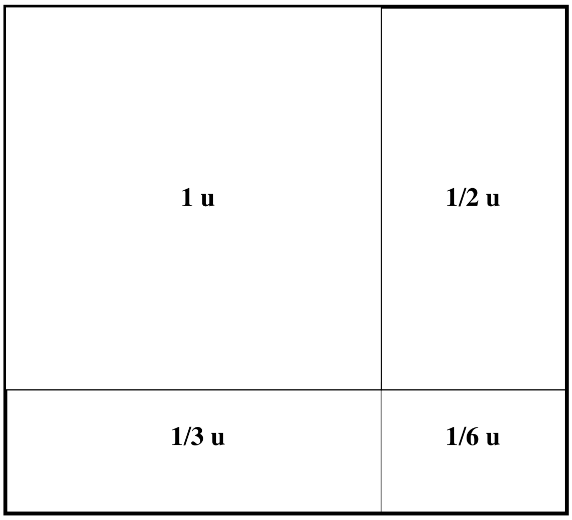
Después, los alumnos miden el siguiente mantel rectangular, de superficie 2/3 u:



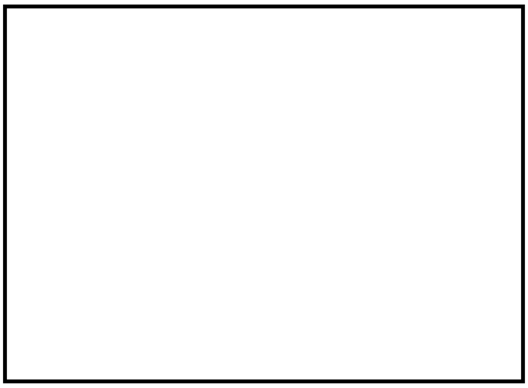
Finalmente, los alumnos miden el siguiente mantel rectangular:



La medida de esta cantidad de superficie exige realizar fraccionamientos de la unidad en 6 partes iguales, porque: $1 + 1/2 + 1/3 + 1/6 = 12/6 = 2$ u.



Los alumnos reciben varias unidades de superficie con el encargo de que midan la cantidad de superficie del siguiente mantel, que posee una superficie de 11/8 u.



Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos

Los alumnos del grupo están motivados y tienen buena disposición al trabajo. La realización de actividades cortas con un elevado porcentaje de éxito ha motivado a los alumnos. Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión

Cuando los alumnos resuelven las actividades de la tarea nº 12BIS no cumplimentan la tarjeta de evaluación. En este momento, interesa focalizar la atención del alumno en el proceso de medida y, en particular, en mejorar las destrezas del fraccionamiento en partes iguales de la unidad. Como pauta metodológica habitual, aunque todos los alumnos sepan medir el mantel, siempre sale a la pizarra un alumno que indica la estrategia que ha seguido para encontrar la subunidad con la que ha conseguido realizar la medida.

En general, los alumnos se muestran competentes en las tareas de medida de cantidades de superficie. El trabajo previo que han realizado desde el modelo de longitud contribuye a obtener buenos resultados en las tareas de medida con la magnitud superficie.

Toma de decisiones

La implementación de nuevas actividades de medida favorece la interacción de los alumnos y refuerza la técnica de medida; se trata de una opción muy adecuada. Se propone continuar con la secuencia de enseñanza prevista. Ahora bien, se decide proponer a los alumnos la Ficha de trabajo nº 15 antes que la nº 14. Ambas tareas tienen un formato común, y contienen actividades de medida y de evaluación semántica de la fracción; pero dado que la Ficha nº 14 trabaja la magnitud longitud y la Ficha nº 15 la magnitud superficie se decide comenzar con ésta última Ficha.

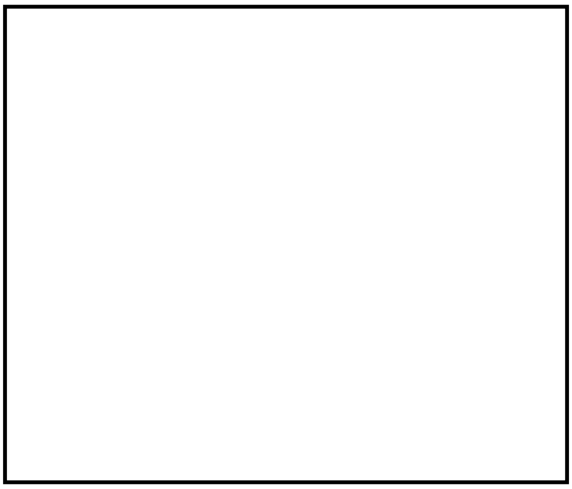
Día 26-3-2004 (Décima sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 13
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 15

Ejecución

Los alumnos reciben varias unidades de superficie, la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 13 y la siguiente cartulina rectangular con la consigna que medir la cantidad de superficie que posee (15/8 *u*):

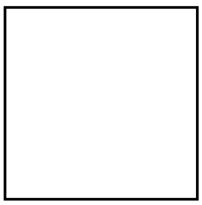


Cuando los alumnos entregan la tarjeta de evaluación, se procede a la evaluación conjunta de la Ficha nº 13. Con esta intención, sale a la pizarra la alumna B08 que no contesta a la cuestión referida al significado del denominador de la fracción que expresa el resultado de la medida.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 15. Esta ficha plantea dos actividades de medida y dos de evaluación semántica de la fracción. La novedad radica en que las actividades están formulada mediante un soporte gráfico: la unidad se representa gráficamente aunque los alumnos disponen de trozos de papel de la mima forma y cantidad de superficie que la unidad. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 15:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 15. FECHA: _______________

SI LA UNIDAD DE SUPERFICIE ES:



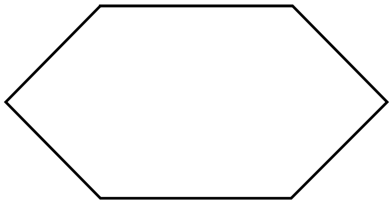
PRIMERA PREGUNTA:

EXPRESA, CON UNA FRACCIÓN, LA SUPERFICIE DE LA SIGUIENTE FIGURA:

SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES __________ DE LA UNIDAD.

SEGUNDA PREGUNTA:

EXPRESA, CON UNA FRACCIÓN, LA SUPERFICIE DE LA SIGUIENTE FIGURA:



SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES __________ DE LA UNIDAD.

TERCERA PREGUNTA:

Dibuja una figura cuya superficie sea $\frac{5}{4}$ de unidad.

Explica que has hecho para dibujar la figura: ______________________________

CUARTA PREGUNTA:

Dibuja una figura cuya superficie sea $\frac{4}{3}$ de unidad.

Explica que has hecho para dibujar la figura: ______________________________

Antes de concluir la sesión de clase, se les propone a los alumnos la tarea nº 16, que se les formula verbalmente y que consiste en construir “todos los manteles que puedan” y que cumplan las condiciones:

a) Tengan una superficie de 1/2 unidad
b) Tengan forma lo más regular posible (cuadrada o rectangular)

Los alumnos reciben varias unidades de superficie con la consigna de identifiquen la subunidad con la que construyen el mantel; y les propone que realicen esta tarea en sus casas.

Asistencia de los alumnos

Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión

Después de que los alumnos resuelven la tarea propuesta en la ficha de trabajo nº 13 cumplimentan la tarjeta de evaluación en la que expresan el resultado de la medida y los significados del numerador y del denominador de la fracción. Los alumnos obtienen buenos resultados que se muestran en la tabla adjunta:

Respuesta	Medir	*%*	Lectura de la fracción	*%*	Fraccionamiento de la unidad	*%*	Sgdo numerador	*%*	Sgdo denominador	*%*
no contesta	1	*5*	1	*5*	1	*5*	1	*5*	1	*5*
errónea	0	*0*	0	*0*	0	*0*	1	*5*	4	*20*
correcta	19	*95*	19	*95*	19	*95*	18	*90*	15	*75*

Los alumnos comprenden que la fracción expresa el resultado de la medida de cantidades de superficie y saben expresar por escrito los significados de los términos de la fracción. El porcentaje de respuestas correctas desciende en la última pregunta que indaga el significado del denominador de la fracción. Antes que a dificultades conceptuales, pensamos que el menor rendimiento de los alumnos en esta cuestión concreta se debe al cansancio de algunos alumnos que escriben con lentitud y desgana las respuestas. Uno de ellos, el alumno B20, se niega a responder por escrito a las preguntas que se formulan en la ficha.

La ficha de trabajo nº 15 introduce dos variables novedosas; de una parte, la presentación de la tarea es totalmente gráfica, incluida la presentación de la unidad de medida. Por otra parte, se ha modificado la cantidad de superficie de la unidad de medida que ahora pasa a tener menor cantidad de magnitud. Con estas modificaciones pretendemos que los alumnos utilicen representaciones gráficas y abandonen, gradualmente, el uso de materiales tangibles.

El uso de representaciones gráficas obliga a modificar el tamaño de la unidad. Este hecho pone de manifiesto el carácter arbitrario, pero a la vez fundamental, de la unidad de medida: los alumnos comprenden que lo importante son las acciones de fraccionamiento que realizan sobre la unidad de medida con independencia de la cantidad de magnitud que ésta posea. En estas nuevas condiciones, los alumnos saben medir y representar gráficamente cantidades de superficie que indaga la tarea nº 15

Los resultados de la tarea nº 15 indican que todos los alumnos del grupo saben medir la superficie de cantidades de magnitud 5/2 *u* y 6/4 *u*. En cuanto al rendimiento de los alumnos en las tareas de evaluación semántica, el 72% de los alumnos saben dibujar una figura de superficie 5/4 *u*, y el 67% de los alumnos saben dibujar una figura de superficie 4/3 *u*.

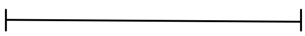
Valoración
Los porcentajes de éxito de los alumnos en tareas de evaluación semántica de la fracción como resultado de la medida de cantidades de magnitud superficie bajan con respecto a las tareas de medida directa lo que induce a pensar que las tareas de evaluación semántica son conceptualmente más complejas que las de medida directa.

Día 30-3-2004 (Undécima sesión)
Plan previsto
1º Evaluar la tarea nº 16 que consiste en construir figuras geométricas regulares que midan 1/2 unidad.
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 14

Ejecución
En la primera parte de la sesión los alumnos muestran manteles de superficie 1/2 unidad que han construido en sus casas. En esta tarea de construcción de cantidades de superficie aparecen múltiples soluciones, se ponen de manifiesto la equivalencia de fracciones; lo que favorece, en los alumnos, la comprensión del sistema de representación fraccionario.

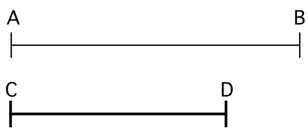
En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 14 en la que los alumnos deben medir y representan gráficamente cantidades de longitud utilizando otra unidad más pequeña que la que vienen usando habitualmente. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 14:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 14. FECHA: _______________

Si la unidad de longitud es: 

PRIMERA PREGUNTA

Expresa, con una fracción, la longitud del segmento que une los puntos C y D.

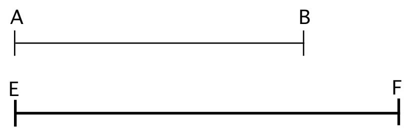


SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES _________ DE LA UNIDAD.

Explica que has hecho para medir: ____

SEGUNDA PREGUNTA

Expresa, con una fracción, la longitud del segmento que une los puntos E y F.

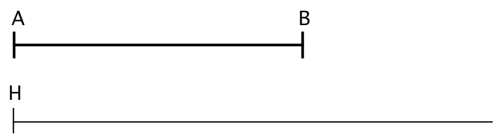


SOLUCIÓN: La fracción es __________ de la unidad.

Explica que has hecho para medir: ____

TERCERA PREGUNTA

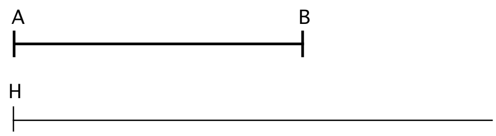
Dibuja, a partir del punto H, un segmento que mida una longitud de $\frac{5}{4}$ unidad.



Explica que has hecho para dibujar el segmento: ____

CUARTA PREGUNTA

Dibuja, a partir del punto H, un segmento que mida una longitud de $\frac{4}{3}$ unidad.



Explica que has hecho para dibujar el segmento: ____

<u>Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos</u>

Los alumnos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Los alumnos traen de sus casas "manteles", en soporte de papel, de superficie 1/2 unidad. Faltan a clase los alumnos B19 y B20.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>

Cuando los alumnos exponen los "manteles" que han construido e indican el tipo de subunidad utilizada, el profesor aprovecha para poner de manifiesto el concepto de equivalencia de fracciones. Esta tarea resulta especialmente adecuada para incidir en el concepto de equivalencia. Los alumnos han admitido con cierta naturalidad el hecho de que la misma cantidad de superficie tenga formas diferentes. Pensamos, por tanto, que el modelo superficie ofrece mayores posibilidades que el modelo longitud para asociar la fracción al resultado de la medida, por cuanto el alumno puede percibir que lo esencial de la medida es la cantidad y no la forma.

Los alumnos obtienen buenos resultados en la ficha de trabajo nº 14 que plantea dos actividades de medida directa y dos de evaluación semántica de fracciones impropias. Todos los alumnos del grupo saben medir las cantidades de longitud 3/4 *u* y 4/3 *u*. En cuanto al rendimiento de los alumnos en las tareas de evaluación semántica, el 67% de los alumnos saben dibujar segmentos de longitudes 5/4 *u*, y 4/3 *u*. Además los alumno dan explicaciones adecuadas de cómo han construido las cantidades de longitud. Por ejemplo, B13 escribe: "*Hice cuartos y me puse a medir hasta tener un segmento de cinco cuartos*". "*Hice tercios y me puse a medir hasta tener un segmento de cuatro tercios*"

Las tareas de evaluación semántica de la fracción presentan a los alumnos mayores dificultades conceptuales que las tareas de medida directa de cantidades de magnitud porque, inicialmente, los alumnos deben interpretar los términos de la fracción para resolver la tarea. Hay siete alumnos (B04, B05, B06, B08, B11,B14 y B16) que yerran en una o en las dos actividades de evaluación semántica de las fracciones $5/4u$ y $4/3u$.

Valoración

Los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación obtienen mejores resultados en las tareas de evaluación semántica que los alumnos de la Primera Etapa porque los alumnos de la Segunda Etapa han resuelto tareas de este tipo en un momento posterior de la secuencia de enseñanza. La experimentación de aula nos ha permitido constatar que existe transferencia de significados entre los modelos de medida de longitud y de superficie; que hace que los escolares mejoren su rendimiento conforme va avanzando la secuencia de enseñanza.

La inclusión de dos nuevas Fichas de Trabajo en la Segunda Etapa Experimental, donde las tareas de medida y de evaluación semántica se realizan sobre un soporte gráfico, han supuesto una mejora en el rendimiento de los alumnos de cuarto curso.

Las respuestas de los alumnos en las Fichas de evaluación semántica que se introducen en la Segunda Etapa ponen de manifiesto la conveniencia de utilizar representaciones gráficas porque:

a) favorecen la formación de ideas abstractas al enfatizar el carácter arbitrario de la unidad de medida, dado que en las tareas textuales ésta sufre cambia de tamaño, y

b) invitan al alumno a abandonar, de forma gradual, las acciones con objetos tangibles.

Toma de decisiones

La tarea nº 16 permite introducir, a partir de múltiples casos particulares, el concepto de equivalencia de fracciones. Después de haber procedido a la evaluación conjunta de esta tarea pensamos que los alumnos disponen de abundantes experiencias concretas para que conjeturen la relación existente entre el tamaño de la subunidad y el número de subunidades de una fracción que expresa la medida de una cantidad que permanece inalterable. En consecuencia, el Equipo Investigador decide suprimir la tarea nº 17 que tiene una formulación compleja y que obligó a dar demasiadas explicaciones a los alumnos de la Primera Etapa. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 17:

Encuentra TRES fracciones equivalentes a la fracción $\frac{6}{4}u$.

Indica cómo las has encontrado.

PRIMERA FRACCIÓN EQUIVALENTE:

Una fracción equivalente a $\frac{6}{4}$ de unidad es $\frac{\quad}{\quad}$ de unidad.

A) Si has utilizado materiales contesta las siguientes preguntas:

1. He construido un objeto de medida 6/4 de unidad.

La unidad que utilizo es: ____

2. He medido el objeto utilizando subunidades de medida $\frac{\quad}{\quad}$ de unidad

B) Si has obtenido la fracción equivalente de otra forma, sin utilizar materiales, explica como lo has hecho: ____

En su lugar, se propone la resolución de la Ficha de trabajo nº 18 cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 18. FECHA: _______________

Inventa una regla para encontrar MUCHAS fracciones equivalentes a la fracción $\frac{1}{2}$

La regla que he inventado es correcta porque ____

Día 1-4-2004 (Duodécima sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 18

2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 19

Ejecución

El profesor recuerda como en la sesión anterior los alumnos obtenían fracciones que se escribían de diferente modo pero que todas ellas tenían la misma cantidad de superficie, 1/2 unidad. El profeso institucionaliza el concepto de equivalencia de fracciones y los alumnos escriben en sus cuadernos:

Dos o más fracciones que se escriben de distinta forma pero expresan la medida de una misma cantidad se dicen que son fracciones equivalentes.

Ejemplo, las fracciones $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{4}$ *son equivalentes, y se escriben:* $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Después de que los alumnos escriben en sus cuadernos la definición de fracciones equivalentes, realizan la Ficha de trabajo nº 18 en la que se les pide que inventen una regla para encontrar muchas fracciones equivalentes a la fracción 1/2 unidad.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 19 cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 19. Fecha: ____________

Encuentra el numerador o el denominador de la fracción para que sean equivalentes las siguientes fracciones:

a)

$$\frac{1}{3} = \frac{\boxed{}}{6}$$

x 2

b)

: 3

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{\boxed{}}$$

c)

$$\frac{3}{2} = \frac{\boxed{}}{12}$$

d)

$$\frac{8}{12} = \frac{\boxed{}}{3}$$

Los alumnos escriben en sus cuadernos el enunciado de la regla: " Si multiplicas o divides el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número obtienes otra fracción equivalente".

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase los alumnos B19 y B20.

Aspectos relacionados con la comprensión
Para resolver la Ficha de trabajo la mayoría de los alumnos proceden duplicando el numerador y el denominador por un mismo número. La mayoría optan por multiplicar de forma reiterada por el número 2. Algunos admiten que el número que multiplica al numerador y al denominador puede ser cualquiera y no necesariamente el número 2. Ahora bien, hay alumnos que optan por estrategias aditivas e intentan obtener fracciones equivalentes sumando al numerador y al denominador un mismo número.

La tarea de conjeturar reglas de carácter simbólico excede las capacidades cognitivas de la mayoría de los alumnos de cuarto curso. Los profesores de aula han ayudado a los alumnos proponiéndoles que realicen nuevos fraccionamientos con una tira de papel de longitud 1/2 unidad. De esta forma los alumnos retoman el trabajo realizado con la magnitud superficie y están en condiciones de comprobar que una determinada cantidad de magnitud puede ser percibida de diferentes formas: como el doble, el triple, … de subunidades cuándo éstas son la mitad, la tercera parte, … más pequeñas que el tamaño de la subunidad de partida.

A pesar, de que la mitad de los alumnos no conjeturan la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada, entienden la regla cuando otros alumnos o el profesor la sugieren. Los alumnos de las comprenden el significado de equivalencia de fracciones porque saben encontrar fracciones equivalentes a una con la ayuda de material manipulativo. Los alumnos comprenden el significado de la equivalencia porque la secuencia de enseñanza implementada en cuarto curso contempla abundantes experiencias de búsqueda de fracciones equivalentes a una dada utilizando objetos que poseen cantidades de magnitud longitud y de superficie.

Los alumnos, incluso los que consiguen conjeturar la regla, se muestran reticentes a aportar argumentos sustentados en el modelo de aprendizaje. Por ejemplo, el alumno B10 que posee un nivel de comprensión alto, escribe la regla: “multiplica el numerador y denominador por el mismo número”; pero al explicar por qué la regla es correcta se apoya en igualdades simbólicas y evita los razonamientos sustentados en el modelo, cuando escribe:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4} \qquad \frac{1}{2}=\frac{3}{6} \qquad \frac{1}{2}=\frac{4}{8} \qquad \frac{1}{2}=\frac{5}{10}$$

Los alumnos recurren a la concisión y comodidad del lenguaje simbólico porque les resulta más complejo, utilizar el lenguaje natural, para argumentar sobre las acciones realizadas en el modelo de medida.

Los alumnos resuelven con aparente facilidad la ficha de trabajo nº 19 en la que deben encontrar fracciones equivalentes a unas dadas. Hay que tener en cuenta que dos de las actividades que se proponen llevan incorporadas indicaciones para facilitar la respuesta correcta de los alumnos. Sin embargo, estos buenos resultados no nos permiten conjeturar que éstos sean capaces de utilizar la equivalencia de fracciones para resolver problemas.

Valoración
Los alumnos conocen y saben aplicar la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada. La mayoría utiliza como estrategia la técnica de multiplicar el numerador y el denominador por 2, sin embargo pocos alumnos proponen multiplicar los términos de la fracción por otro número distinto de 2.

El hecho de que los alumnos sepan encontrar una fracción equivalente a una dada utilizando la técnica de multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número no debe hacernos pensar que los alumnos de cuarto curso tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones.

Toma de decisiones
En esta Segunda Etapa de la Experimentación se han introducido tres nuevas Fichas de trabajo: nº 19, 20 y 21 con el objetivo de que los alumnos refuercen la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada. Desde nuestro punto de vista, se trata de un tipo de trabajo simbólico que se sitúa al límite de las capacidades cognitivas de la mayoría de los alumnos de cuarto curso; sin embargo, deseamos indagar si la mejora de la técnica permite a los escolares tener operativo este concepto cuando tengan que comparar fracciones.

Mostramos, a continuación, las tarjetas de evaluación de las Fichas de trabajo: nº 20 y 21:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 20. Fecha: ____________

Encuentra el numerador o el denominador de la fracción para que sean equivalentes las siguientes fracciones:

a)

$$\frac{2}{5} = \frac{\square}{15}$$

b)

$$\frac{5}{10} = \frac{\square}{2}$$

c)

$$\frac{6}{4} = \frac{\square}{10}$$

d)

$$\frac{6}{4} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{10}$$

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 21. Fecha: ____________

Voy a escribir dos fracciones y tu debes encontrar fracciones equivalentes a las que he escrito pero que tengan el mismo denominador

a) $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$

d) $\frac{7}{5}$ $\frac{3}{2}$

e) $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{6}$

f) $\frac{13}{18}$ $\frac{3}{4}$

Día 2-4-2004 (Decimotercera sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 20

2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 21

Ejecución

En la primera parte de la sesión los alumnos resuelven la tarea nº 20. Los alumnos tienen dificultades para resolver el último apartado de esta tarea porque tienen que encontrar una fracción equivalente a 6/4 que tenga de denominador 10. Tan solo cuatro alumnos son capaces de resolver esta actividad, sin recibir ayuda de los profesores. Después a la evaluación conjunta de la tarea y sale la pizarra el alumno B01 que ha mostrado escaso interés por resolverla.

Dado que los alumnos se muestran intranquilos e inseguros después de comprobado que no saben resolver el último apartado de la Ficha de trabajo nº 20, el profesor decide posponer la implementación de la Ficha de trabajo nº 21 y en su lugar se propone la resolución de la Ficha nº 22 que indaga la comprensión de los escolares referida a la comparación de fracciones con iguales denominadores, cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 22. Fecha _________

"Tengo dos servilletas: una de superficie $\frac{3}{4}$ y otra de superficie $\frac{7}{4}$.

¿Cuál de las dos servilletas tiene mayor superficie?"

SOLUCIÓN: ____

He realizado un dibujo.

☐ Con la ayuda de materiales

☐ Sin la ayuda de materiales

He utilizado símbolos o razonamientos:

Asistencia de los alumnos

Faltan a clase los alumnos B17 y B19.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los alumnos gestionan con dificultad las representaciones simbólicas para obtener fracciones equivalentes a una dada. A pesar, de que en la Segunda Etapa, se ha aumentado el número de actividades de medida con diferentes fraccionamientos de la unidad, la gestión simbólica de la equivalencia resulta muy compleja para los alumnos de edades comprendidas entre los 9 y 10 años. En particular, ha resultado compleja la actividad c) de la Ficha de trabajo nº 20 porque la tarea exige primero simplificar las fracciones. El alumno B13 procede de modo inverso y primero amplifica y , después, simplifica:

$$\frac{6}{4} = \frac{30}{20} = \frac{15}{12}$$

Todos los alumnos del grupo saben comparar dos manteles de superficie 3/4*u* y 7/4*u*, cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 22. En la siguiente tabla podemos observar las estrategias utilizadas por los alumnos:

Ficha de trabajo nº 22	Nº alumnos	Nº alumnos
Resuelven bien con gráficos y razonamientos	3	
Resuelven bien con razonamientos	2	**12**
Resuelven bien con gráficos	7	
Resuelven mal. Dibuja mal	3	
Resuelven mal. Sin especificar	3	**6**

Aunque todos los alumnos dan la respuesta correcta hay seis alumnos (B01, B02, B06, B07, B08 y B20) que no la justifican la respuesta o lo hace de modo incorrecto.

Por otra parte, han aparecido estrategias adecuadas basadas en el significado de medida de la fracción. Así, B12 escribe: “porque 3/4 es menor que una unidad y 7/4 es más que una unidad”; B15 escribe: “porque 3/4 le falta otro cuarto para tener una unidad y 7/4 le falta un cuarto para tener dos unidades”; y B10 escribe: “cada subunidad es de la misma longitud, ¼, pero en la de 7/4 hay más cantidad de subunidades”.

Valoración
Los buenos resultados del trabajo realizado por los alumnos en la Ficha de trabajo nº 22 de comparación de fracciones con el mismo denominador se explican por la facilidad de la tarea pero, también, por los aprendizajes realizados por éstos a lo largo de la secuencia de enseñanza. Los alumnos han utilizado razonamientos adecuados sustentados en el concepto de fracción. La estrategia basada en la realización de representaciones gráficas ha sido utilizada con éxito por más de la mitad de los alumnos del grupo, sin que éstos hayan recibido enseñanza previa sobre la utilización de esta estrategia.

Toma de decisiones
Continuar con la secuencia de enseñanza referida a la comparación de fracciones y proponer la resolución de la Ficha de trabajo nº 21 de búsqueda de fracciones equivalentes a dos dadas y que, además, tengan un mismo denominador.

Día 5-4-2004 (Decimocuarta sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 23
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 21

Ejecución
En la primera parte de la sesión, los alumnos resuelven la tarea nº 23 en la que tienen que comparar listones cantidad de longitud 6/5*u* y 6/7*u*, cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 23. Fecha _________

"Has cortado dos listones de madera. La longitud de uno de ellos es $\frac{6}{5}$ de unidad y la del otro $\frac{6}{7}$ de unidad. ¿Qué listón es más corto?"

SOLUCIÓN: ______________________________

He realizado un dibujo.

☐ Con la ayuda de materiales

☐ Sin la ayuda de materiales

He utilizado símbolos o razonamientos:

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 21 que propone encontrar fracciones equivalentes a dos fracciones dadas de manera que además las fracciones equivalentes tengan el mismo denominador. La mayoría de los alumnos no entienden la tarea; no saben cómo afrontarla ni tampoco entienden qué se pretende con la resolución de esta tarea. Los alumnos difícilmente van a entender la necesidad de esta tarea hasta que no intenten resolver la ficha de trabajo nº 24 que exige comparar fracciones que tienen distintos numeradores y denominadores. Para ayudar a los alumnos el profesor resuelve, en la pizarra, la primera de las actividades de esta tarea. Inmediatamente después los alumnos intentan resolver las siguientes actividades. Termina la sesión de clase y la mayoría de los alumnos no ha terminado la tarea. Los alumnos reciben el encargo de terminar la tarea como trabajo para casa.

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
La Ficha de trabajo nº 23 que propone comparar fracciones que tienen el mismo numerador es más compleja que la de comparación de fracciones que tienen el mismo denominador. Sin embargo, los alumnos obtienen resultados aceptables en esta tarea. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

Tarea nº 23	Nº alumnos	Nº alumnos
Resuelven bien con gráficos y razonamientos	1	**12**
Resuelven bien con razonamientos	5	
Resuelven bien con gráficos	6	
Resuelven mal. Dibuja mal	3	**7**
Resuelven mal. Sin especificar	4	

Todos los alumnos aportan la respuesta correcta. Las dificultades aparecen en el momento de justificar sus respuestas. Siete alumnos (B03, B04, B06, B07, B16, B19 y B20) no la justifican de forma adecuada la respuesta. Cuatro de estos alumnos dan una justificación incompleta cuando escriben: "porque los séptimos son más cortos que los quintos" (B04, B06, B07 y B19), pero no indican que en ambas cantidades hay el mismo número de subunidades.

Los alumnos que justifican correctamente la respuesta utilizan preferentemente gráficos y razonamientos sustentados en el significado de fracción. Cabe destacar que, contrariamente a lo que ocurría en la Primera etapa, los alumnos ha seguido las recomendaciones de los profesores y han abandonado la estrategia basada en la utilización de materiales porque comprueban que otras estrategias como las representaciones gráficas o los razonamientos centrados acortan los tiempos de resolución de las tareas, dado que evitan el uso de materiales manipulativos.

También se detecta el progreso en la comprensión de algunos alumnos. Así, la alumna B11 que ha mostrado en otras tareas previas una comprensión inestable en esta Ficha aporta un razonamiento potente cuando escribe: El listón es más pequeño porque el de 6/7 no llega al de una unidad y el de 6/5 se pasa".

Valoración
Podemos concluir que los resultados obtenidos por los alumnos en la resolución de las Fichas de comparación de fracciones nº 21 y nº 23 son aceptables. Y lo que es más importante, observamos que, después de realizar la evaluación conjunta de una ficha, los alumnos resuelven mejor la siguiente ficha, a pesar de que presenta una mayor dificultad conceptual y, por lo tanto, se producen progresos observables en la secuencia de enseñanza.

Para resolver estas tareas la mayoría de los alumnos utiliza como estrategia la realización de representaciones gráficas y razonamientos sustentados en el significado de la fracción como medida. objetivo. Como era de esperar, los alumnos no disponen de un conocimiento conceptual de la noción de fracción equivalente, de modo que no son capaces de construir mentalmente fracciones equivalentes para resolver directamente las fichas de comparación de fracciones utilizando razonamientos. Este es un objetivo muy ambicioso y, los resultados muestran, que cae fuera de las capacidades mentales de la mayoría de los alumnos.

Toma de decisiones
En la siguiente sesión se trabajará la Ficha de trabajo nº 24 que exige comparar fracciones con diferentes numeradores y denominadores. Se procederá a evaluar la Ficha de trabajo nº 21 de búsqueda de fracciones equivalentes que los alumnos intentan resolver, sin éxito, en la sesión anterior.

Día 6-4-2004 (Decimoquinta sesión)
Plan previsto
1º Evaluar la ficha de trabajo nº 21
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 24

Ejecución
En la primera parte de la sesión se procede a la evaluación conjunta de la Ficha de trabajo nº 21.
En la segunda parte de la sesión los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 24 que propone comparar fracciones que poseen diferentes numeradores y denominadores, y cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 24. Fecha _________

Has comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de $\frac{5}{4}$ unidades y otra tiene una superficie de $\frac{4}{3}$ unidades. ¿Qué cartulina tiene menor superficie?

SOLUCIÓN: ____

He realizado un dibujo.

☐ Con la ayuda de materiales

☐ Sin la ayuda de materiales

He utilizado símbolos o razonamientos:

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
La ficha de trabajo nº 21 que plantea encontrar fracciones equivalentes a dos dadas y que tengan el mismo denominador resulta muy compleja a los escolares de cuarto curso. Los profesores de aula han dirigido el trabajo de los alumnos y han tenido que realizar indicaciones para que éstos puedan resolver las actividades que propone la tarea.

Los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación comprenden el significado de la comparación de fracciones que lo asocian a la comparación de cantidades de magnitud, porque obtienen porcentajes de éxito altos en las unidad de comprensión que indagan las argumentaciones utilizadas sobre el significado de la comparación de fracciones y las técnicas empleados para comparar las fracciones. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

Tarea nº 24	Nº alumnos	Nº alumnos
Resuelven bien con gráficos y razonamientos	4	**14**
Resuelven bien con razonamientos	7	
Resuelven bien con gráficos	4	
Resuelven mal. Dibuja mal	2	**5**
Resuelven mal. Sin especificar	3	

Del estudio de las estrategias que utilizan los alumnos al resolver esta tarea constatamos, como aspecto más relevante, que ninguno de los alumnos utiliza la equivalencia de fracciones para comparar las fracciones implicadas en la tarea. Los alumnos expresan ideas construidas sobre el modelo de medida utilizando alguna de las siguientes técnicas: construir las cantidades de magnitud a comparar, dibujar las cantidades y descomponer las cantidades de magnitud como suma de la unidad y una fracción unitaria. Estas estrategias las clasificamos en los siguientes tipos:

NI.- *No indica la estrategia*
M.- *Utilizando materiales*
G.- *Utilizando gráficos*
RM.- *Utilizando razonamientos basados en la idea de medida*
RE.- *Utilizando razonamientos basados en el concepto de equivalencia*

La siguiente tabla indica, en la primera fila, las estrategia utilizadas por los alumnos y, en la segunda fila, el éxito obtenido por los alumnos que utilizan una determinada estrategia:

	NI	**M**	**G**	**RM**
Estrategia utilizada	0 (**0**)	0 (**0**)	6 (**33**)	11 (**61**)
Éxito en la estrategia	-	-	4 (**66**)	10 (**90**)

Valoración
Los alumnos de cuarto curso asocian el orden entre fracciones con la comparación entre cantidades de magnitud. Los alumnos saben comparar fracciones que tienen diferentes numeradores y denominadores utilizando razonamientos construidos desde el modelo de medida: construir las cantidades de magnitud a comparar, dibujar las cantidades y descomponer las cantidades de magnitud como suma de la unidad y una fracción unitaria. Sin embargo, los alumnos no tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones porque no utilizan esta estrategia en las tareas de comparación de fracciones.

Las dificultades detectadas por los alumnos de cuarto curso al resolver la Ficha de trabajo nº 21 ponen de manifiesto las limitaciones de los alumnos para gestionar simbólicamente la equivalencia de fracciones. El concepto de equivalencia es básico para una buena comprensión del número racional porque sobre esta idea se fundamenta el cálculo simbólico con fracciones. Los objetivos referidos a la enseñanza de la equivalencia en cuarto curso se han alcanzado parcialmente porque los alumnos tienen dificultades para hacer operativo el significado de la equivalencia de fracciones en las tareas de ordenación de fracciones.

Toma de decisiones
La gestión simbólica de la equivalencia de fracciones es una habilidad que se sitúa en el límite de las capacidades cognitivas de los alumnos de curso curso. Por otra parte, la Primera Etapa de Experimentación

mostró que los alumnos, unos meses más tarde, eran capaces de gestionar con símbolos este concepto. En consecuencia, proponemos continuar con la secuencia de enseñanza y reforzar, en quinto curso, la operatividad de la equivalencia de fracciones.

En esta Segunda Etapa Experimental se han introducido modificaciones que afectan a la enseñanza de la equivalencia de fracciones; entre ellas destacamos las siguientes:

- se han propuesto un mayor número de experiencias con materiales tangibles para intentar que los alumnos conjeturen la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada; y
- se han introducido más actividades de búsqueda de fracciones equivalentes a una dada. A pesar de que los alumnos de cuarto curso resuelven estas tareas con la ayuda de los profesores, siguen sin tener operativo el concepto de equivalencia de fracciones.

Día 19-4-2004 (Decimosexta sesión)
<u>Plan previsto</u>
1º Repasar la técnica de comparación de fracciones; en particular, la la ficha de trabajo nº 24
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 25

<u>Ejecución</u>
Los alumnos se reincorporan a clase después de periodo de vacaciones correspondiente a Semana Santa. El profesor repasa la ficha de trabajo nº 24 que plantea comparar fracciones con diferentes numeradores y denominadores. Inmediatamente después los alumnos afrontan la resolución de la ficha de trabajo nº 25 que propone comparar la estatura de dos niños: uno mide 7/6 metros y otro mide 3/2 metros; y cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 25. Fecha _________

Un niño tiene una estatura de $\frac{7}{6}$ metros y una amiga mide $\frac{3}{2}$ metros. ¿Cuál de los dos niños es más alto?

SOLUCIÓN: ____

He realizado un dibujo.

☐ Con la ayuda de materiales
☐ Sin la ayuda de materiales

He utilizado símbolos o razonamientos:

<u>Asistencia de los alumnos</u>
Faltan a clase los alumnos B02, B14 y B15.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos saben comparar fracciones que tienen diferentes numeradores y denominadores. Todos los alumnos, excepto B07 y B20, saben encontrar la fracción mayor. Sin embargo, el dato más significativo es que cuatro alumnos saben aplicar el concepto de equivalencia de fracciones para poder compararlas. Los cuatro alumnos optan por encontrar fracciones equivalentes de denominador 12:

$$\frac{7}{6}=\frac{14}{12}$$
$$\frac{3}{2}=\frac{18}{12}$$

Además, la mayoría de los alumnos sabe resolver la tarea utilizando razonamientos o realizando gráficos. Aquellos que realizan razonamientos se les pide que representen de forma gráfica las longitudes. Y a los que utilizan gráficos correctamente se les pide que encuentren fracciones equivalentes con el mismo denominador para poder comparar las cantidades de longitud. En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

Tarea nº 25	Nº alumnos	Nº alumnos
Utilizan fracciones equivalentes (B09, B10, B17, B18)	4	**13**
Resuelven bien con razonamientos y con gráficos (B03, B05, B07, B11, B12, B19)	6	
Resuelven bien utilizando solo gráficos (B08, B13, B16)	3	
Resuelven mal. Dibujan mal o reciben ayuda (B01, B04, B07, B20)	4	**4**

Valoración
Cuando a los alumnos de cuarto curso se les sugiere que utilicen el concepto de equivalencia para comparar fracciones cuatro alumnos saben gestionarla de forma simbólica. Los restantes alumnos saben comparar las fracciones utilizando razonamientos o gráficos pero no tienen operativo la equivalencia de fracciones. La gestión simbólica de este concepto es una habilidad que se sitúa en el límite de las capacidades cognitivas de los alumnos de cuarto curso.

Día 21-4-2004 (Decimoséptima sesión)
Plan previsto
1º Resolución de actividades de medida de cantidades de magnitud discretas
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 26

Ejecución
Comienza la propuesta de enseñanza de la fracción como medida de una cantidad discreta. Los alumnos realizan manipulaciones con cubos de madera y de plástico que meten en una bolsa de plástico.

En primer lugar, se considera como unidad de medida la bolsa que contiene 3 cubos de madera y 3 piezas de plástico. Los alumnos deben responder a la pregunta, ¿qué parte de la bolsa son los cubos de madera?

En la segunda actividad, se considera que la unidad es la bolsa que contiene 6 cubos de madera y 3 de plástico. En esta caso, se espera que los alumnos deben responder a la pregunta, ¿qué parte de la bolsa son los cubos de madera?

Finalmente, se considera como unidad la bolsa que contiene 8 cubos de madera y 4 de plástico. En esta caso, se espera que los alumnos deben responder a la pregunta, ¿qué parte de la bolsa son los cubos de madera?

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 26, cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 25. Fecha _________

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 8 bombones. Expresa con una fracción la parte de bolsa que has comido.

Vas a resolver el problema de diferentes maneras:

La unidad es el número de bombones que hay en la bolsa.

1º Si fraccionas la unidad en 12 partes iguales, cada subunidad (es un bombón) es de medida $\frac{1}{12}$ de unidad.

SOLUCIÓN:

He comido ——— de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

2º Si fraccionas la unidad en 6 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 2 bombones) es de medida $\frac{1}{6}$ de la unidad.

SOLUCIÓN:

He comido ——— de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

3º Si fraccionas la unidad en 3 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 4 bombones) es de medida $\frac{1}{3}$ de la unidad.

SOLUCIÓN:

He comido $\frac{\quad}{\quad}$ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa.

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase el alumno B04.

Aspectos relacionados con la comprensión
La técnica de medida, con magnitudes discretas, se ha mostrado más compleja que en el caso de magnitudes continuas. Esto es debido a la naturaleza de la magnitud considerada: la unidad de medida está formada por un conjunto de objetos indistinguibles, cada uno de los cuales constituye la unidad básica en las actividades de recuento. Los alumnos disponen de policubos con los que representar los objetos de los enunciados de las tareas y, en estas condiciones, tienden a considerar el policubo como unidad de medida en lugar de la colección de policubos. En estas condiciones, los alumnos intentan resolver las tareas con números naturales y se reafirman en la idea de que con estos números sirven para resolver todos los problemas. El profesor ha tenido que realizar más intervenciones de las inicialmente previstas para familiarizar al alumno con la medida de magnitudes discretas. Los profesores han tenido que dirigir el trabajo de los escolares, porque los alumnos tienen dificultad para distinguir entre la unidad básica, el tamaño de cada subunidad y el fraccionamiento de la unidad.

No obstante, los alumnos saben expresar, con una fracción, la cantidad de una parte de una colección (unidad) formada por objetos discretos. Los datos de la Segunda Etapa de Experimentación muestran que todos los alumnos, salvo B08, resuelven correctamente la ficha de trabajo nº 26. Los alumnos utilizan correctamente la fracción para expresar la cardinalidad de una parte de la colección, si bien hay que tener en cuenta que algunos alumnos han recibido ayuda de otros compañeros.

Con la implementación de esta ficha de trabajo nº 26 se pretende que los alumnos adquieran el significado de la fracción como medida de la cardinalidad de una colección de objetos que se toma como unidad. Un segundo objetivo consiste en reforzar el significado del concepto de fracción equivalente cuando se realizan diferentes fraccionamientos de la unidad. Los resultados de esta primera tarea muestran una comprensión inestables de los alumnos referida a los dos objetivos descritos.

Toma de decisiones
En la siguiente sesión se va a proceder a resolver la ficha de trabajo nº 27 que tiene una estructura análoga a la ficha de trabajo nº 26. Ahora bien, se han realizado modificaciones en la tarjeta de valuación para que los alumnos escriban el significado del numerador y del denominador de la fracción. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 27. Fecha _________

Has comprado una caja que contiene 16 bombones. Has abierto la caja y has comido 12 bombones. Expresa, con una fracción, la parte de caja que has comido.

La unidad es el número de bombones que hay en la caja.

Vas a resolver el problema de diferentes maneras:

1º Si fraccionas la unidad en 16 partes iguales, la fracción que expresa la cantidad de bombones que hay en la caja es _______ de unidad.

El numerador significa ____

El denominador significa ____

2º Si fraccionas la unidad en 8 partes iguales, la fracción que expresa la cantidad de bombones que hay en la caja es _______ de unidad.

El numerador significa ____

El denominador significa ______________________________
3º Si fraccionas la unidad en 4 partes iguales, la fracción que expresa la cantidad de bombones que hay en la caja es _______ de unidad.
El numerador significa ______________________________
El denominador significa ______________________________

Día 22-4-2004 (Decimoctava sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 27

2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 28

Ejecución

En la primera parte de la sesión los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 27 que indaga por el significado de la fracción como medida de la cardinalidad y que refuerza el significado de la equivalencia de fracciones al considerar como tamaño de las subunidades diversos divisores del cardinal de la unidad.

En la segunda parte de la sesión se procede a la evaluar, de modo conjunto, la ficha de trabajo. Salen a la pizarra los alumnos B01, B04, B09 y B11 que han errado al asignarle significado a los términos de la fracción.

Termina la sesión de clase y da tiempo para abordar la resolución de la ficha de trabajo nº 28; su resolución se pospone hasta la siguiente sesión de clase.

Asistencia de los alumnos

Faltan a clase los alumnos B07, B13 y B20.

Aspectos relacionados con la comprensión

Todos los alumnos del grupo saben expresar con la fracción la medida de la cardinalidad. Además, todos saben obtener fracciones equivalentes cuando la ficha de trabajo les obliga a considerar otros fraccionamientos igualitarios de la unidad. Los alumnos han mejorado la comprensión si se comparan estos resultados con los obtenidos en la ficha de trabajo nº 26.

Cuatro alumnos han tenido dificultades para expresar, por escrito, el significado de los términos de la fracción. Estas dificultades en la comprensión de la fracción aparecen como consecuencia de:

a) la escasa relevancia que conceden los alumnos a la unidad de medida (caja, paquete o bolsa de objetos) dado que la confunden con la unidad básica (el objeto)

b) la confusión entre el fraccionamiento de la unidad y el tamaño de las subunidades. Algunos alumnos optan por hacer grupos de tantos objetos como indica el denominador. Por ejemplo, el alumno B04 responde correctamente a la tercera pregunta de la Ficha porque afirma que 1/4 de la caja es la fracción que expresa la parte de caja que queda después de haber comido 12 de los 16 bombones que contenía inicialmente la caja. Sin embargo, cuando se le pregunta por el significado del numerador contesta de forma errónea:

“*que no me he comido 1 unidad*”

Valoración

Las dificultades que muestran algunos alumnos para dotar de significado a los términos de la fracción que expresa la medida de una colección de objetos, cuando el atributo que se considera es la cardinalidad, son de origen epistemológico y guardan una estrecha relación con las característica específicas de la medida de cantidades discretas.

El Equipo Investigador introduce dos restricciones en el momento de plantear las tareas de medida de cantidades discretas con la intención de facilitar la interpretación y la resolución de las tareas de medida, y que son:

1º sugerir fraccionamientos adecuados de la unidad de medida en los enunciados de las tareas, y

2º interrogar por el cardinal de una colección que es un subconjunto de otra colección cuyo cardinal es la unidad de medida.

Con la primera restricción, además de facilitar a los alumnos la resolución de la tarea, se pretende reforzar el significado de la equivalencia de fracciones. Con la segunda restricción la pregunta que se formula en la

tareas de medida admite una expresión más cercana a las propuestas tradicionales de enseñanza, más sencilla de entender y cuya expresión es: "¿Qué parte de la unidad es …?"
Queda por indagar, en futuras fases experimentales, los efectos que produciría implementar tareas de medida de cardinalidad no sometidas a la segunda restricción, y que admiten enunciados como el siguiente:

"Si las cajas de bombones tienen 12 bombones,
¿cuántas cajas puedes llenar con 16 bombones?"

Toma de decisiones
Como la sesión de clase ha concluido sin disponer de tiempo para resolver la ficha nº 28, ésta se realizará en la siguiente sesión. En la siguiente sesión va a proponer tarea de evaluación semántica de la fracción que expresa la medida de la cardinalidad.

Día 26-4-2004 (Décimo novena sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 28
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 29

Ejecución
En la primera parte de la sesión los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 28 que indaga si los alumnos encuentran el cardinal de una parte de la colección cuando disponen de dos datos: el cardinal de la colección y la fracción que expresa la medida del cardinal de una parte de la colección. Ahora bien, cuando los alumnos realizan esta Ficha de trabajo no conocen la regla para calcular la "fracción de una cantidad" y, por lo tanto, no deseamos evaluar este procedimiento; lo que queremos es indagar la comprensión que poseen los alumnos de la fracción como resultado de la medida de la cardinalidad cuando:

1º Construyen el cardinal de la colección cuya medida expresa la fracción, y
2º Argumentan sobre los significados del numerador y denominador de la fracción.

También estamos interesados en estudiar si los alumnos son capaces de conjeturar la regla para calcular la fracción de una cantidad. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 28:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 28. Fecha _________

PRIMER PROBLEMA

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{1}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?*

Solución: He comido ____

Explica como has obtenido la solución: ____________________________________

SEGUNDO PROBLEMA

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{3}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?*

Solución: He comido ____

Explica como has obtenido la solución: ____________________________________

En la segunda parte de la sesión los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 29 que plantea una tarea de evaluación semántica de la fracción y que indaga por los significados de los términos de la fracción. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de esta ficha:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 29. Fecha _________

En mi clase estamos 25 alumnos en total entre niños y niñas. Si sabemos que los $\frac{4}{5}$ de los alumnos de la clase son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase? ¿Cuántos niños hay en la clase?

Solución: En la clase hay ________ niñas. En la clase hay ________ niños.

Explica como has obtenido la solución:____

Después de resolver el problema, contesta las preguntas:

1º ¿Cuál es la unidad de medida? ____

2º ¿Qué indica el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$?____

3º ¿Qué indica el numerador de la fracción $\frac{4}{5}$?____

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase la alumna B14.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos comprender el significado de la fracción como medida de la cardinalidad porque saben interpretar correctamente las fracciones ¼ y ¾ en la ficha de trabajo nº 28. Tan solo cuatro alumnos (B02, B06, B08 y B20) no consiguen justificar correctamente su respuesta. Los restantes alumnos aportan respuestas valiosas y bien fundamentadas, cundo resuelven esta primera tarea de evaluación semántica de la fracción.

Los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación obtienen mejores resultados que los de la primera Etapa. Las modificaciones metodológicas introducidas en la Segunda Etapa explican la mejora de los resultados: mientras los alumnos de la Primera Etapa utilizan representaciones gráficas, los alumnos de la Segunda Etapa disponen, si lo desean, de policubos como material manipulativo para resolver las tareas de evaluación semántica. La mejora en la comprensión se debe a los cambios metodológicos introducidos, que se concretan, principalmente, en potenciar el uso de material manipulativo y evitar el abandono prematuro de estrategias cercanas al modelo.

El porcentaje de éxito en la Ficha de trabajo nº 29 es superior al 90%. Todos los alumnos saben calcular la fracción de una cantidad; y solo dos alumnos (B02 y B20) no saben explicar, adecuadamente, los significados del numerador y denominador de la fracción 4/5.

Los alumnos de la Segunda Etapa razonan a partir del significado de la fracción como resultado de la medida de la cardinalidad. Casi todos los alumnos aportan argumentos valiosos, como el de la alumna B12 que en la ficha nº 29 escribe:

He hecho grupos de 5 con 5 niños y e quitado 4 grupos que son las niñas osea 20 chicas y 5 chicos (sic)

A pesar de que los alumnos de la Segunda Etapa no reciben enseñanza de la regla para calcular “la fracción de una cantidad” éstos son capaces de resolver, con acierto, las tareas de evaluación semántica.

Valoración
Los alumnos comprenden el significado de la fracción como resultado de la medida de la cardinalidad y saben construir una cantidad de magnitud a partir del conocimiento de la fracción que se suele denominar “cálculo de la fracción de una cantidad”, a pesar de que no han recibido enseñanza de la regla para calcular la fracción de una cantidad.

Toma de decisiones
El Equipo Investigador propone introducir dos nuevas fichas de trabajo que no se han implementado en la Primera Etapa. La Ficha de trabajo nº 29BIS contiene dos actividades: una de medida directa de la

cardinalidad y otra de evaluación semántica de la fracción. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 29BIS:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 29BIS. Fecha ________

PRIMER PROBLEMA

Has comprado una caja de quesitos de porciones que contiene 24 quesitos. Si has comido 16 quesitos, ¿qué parte de la caja has comido?

Solución: He comido ______________________ de la caja.

Explica como has obtenido la solución: ____

SEGUNDO PROBLEMA

Has comprado una caja del CASERIO que contiene 24 quesitos. Si has comido los $\frac{5}{6}$ de la caja, ¿cuántos quesitos has comido?

Solución: He comido ____

Explica como has obtenido la solución: ____

La Ficha de trabajo nº 30 plantea cinco actividades de evaluación semántica de la fracción en un mismo contexto. Se propone esta tarea con una doble intención: detectar si los alumnos son capaces de conjeturar la regla para calcular "la fracción de una cantidad" y, además, reforzar la técnica de obtención de "la fracción de una cantidad" cuya regla desconocen. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 30:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 30. Fecha __________

Tienes una bolsa con 12 caramelos, y $\frac{1}{4}$ de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?

Solución: Hay ____

Tienes una bolsa con 16 caramelos, y $\frac{3}{4}$ de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?

Solución: Hay ____

Tienes una bolsa con 15 caramelos, y $\frac{3}{5}$ de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?

Solución: Hay ____

Tienes una bolsa con 21 caramelos, y $\frac{2}{3}$ de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?

Solución: Hay ____

Tienes una bolsa con 24 caramelos, y $\frac{6}{6}$ de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?

Solución: Hay ____

Día 27-4-2004 (Vigésima sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 29BIS

2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 30

Ejecución

Los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 29 BIS que hemos introducido por primera vez en este curso y que comprende dos problemas. En el primero los alumnos deben "medir" que parte de una caja que contiene 24 quesitos son 16 quesitos. En el segundo problema los alumnos realizan la tarea inversa que consiste en realizar una evaluación semántica de la fracción 5/6 dado que en el enunciado se indica que se han comido los 5/6 de una caja de 24 quesitos y se pregunta por el número de quesitos que se han comido.

Los alumnos tienen dificultades para resolver esta Ficha de trabajo; en particular, la primera tarea que es de medida y no de evaluación semántica, como la que habían resuelto en la sesión del día anterior les causa mayores dificultades conceptuales. Después de que los profesores reconducen el trabajo de los alumnos, éstos son capaces de resolver las tareas que propone la Ficha nº 29BIS.

Cuando los alumnos resuelven la Ficha se procede a su evaluación conjunta. Termina la sesión de clase y no queda tiempo para afrontar la resolución de la tarea nº 30. Se resolverá en la siguiente sesión de clase.

Asistencia de los alumnos

Falta a clase el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión

En general, los alumnos se sienten desconcertados al abordar una tarea de medida cuando las tareas precedentes eran de evaluación semántica. Sin embargo, cuando lo profesores indican que se trata de una tarea de medida, los alumnos saben medir la cantidad discreta. En efecto, todos los alumnos, salvo dos (B05 y B07) obtienen la fracción que expresa la medida de la cardinalidad de la colección de quesitos.

Otro aspecto relevante de esta primera tarea de la Ficha nº 29BIS es la aparición de diversas fracciones equivalentes en las respuestas que aportan los alumnos. Así, en la siguiente tabla se muestran las fracciones que escriben los alumnos:

Fracciones equivalentes	Número de alumnos
4/6	10
8/12	4
2/3	2
16/24	2

La mayoría de los alumnos prefiere fraccionar la unidad en 6 partes iguales y, de esta forma, obtienen que han comido 4/6 de la caja. Este hecho, unido a la aparición de otras fracciones equivalentes, da muestras de una adecuada comprensión de la fracción y del papel que juegan los fraccionamientos igualitarios de la unidad.

Los alumnos reaccionan ante estímulos inmediatos. Así, cuando afrontan la segunda tarea de la Ficha nº 29BIS, algunos alumnos yerran y optan por expresar el número de quesitos que pregunta la tarea (5/6 de 24) mediante una fracción (B01 y B05). Otros cinco alumnos (B04, B06, B07, B14, B16) dan la respuesta correcta pero no la justifican o la justificación que aportan es inadecuada.

La mitad de los alumnos del grupo tienen un conocimiento inestable de la fracción como medida de la cardinalidad, a pesar de que disponen de ayudarse de material manipulativo para ayudarse en la resolución de las tareas. A los alumnos les resulta más complicado trabajar con la magnitud cardinalidad que con las magnitudes continuas de longitud y de superficie.

El 30% de los alumnos del grupo tiene una excelente comprensión de la fracción como medida de la cardinalidad porque son capaces de conjeturar la regla para calcular la "fracción de una cantidad" sin recibir la ayuda de los profesores. Los alumnos afrontan la segunda tarea de la Ficha nº 29BIS sin que conozcan la regla para calcular la "fracción de una cantidad". Cuando al final de la sesión se procede a la evaluación conjunta de la tarea, detectamos que siete alumnos (B03, B09, B10, B11, B13, B17 y B18) saben conjeturar la regla de obtención de la "fracción de una cantidad".

Valoración

Los datos obtenidos en la Ficha de trabajo nº 29BIS muestran que los alumnos interpretan la fracción con más dificultad en el modelo de la cardinalidad que en los modelos de magnitudes continuas porque tienen dificultades para identificar y discriminar las tarea de medida directa de las tareas de evaluación semántica de la fracción.

Entre los alumnos del grupo de clase se observan dos niveles de comprensión muy diferente: mientras que la mitad del grupo tiene un conocimiento inestable de la fracción, el otro medio grupo es capaz de conjeturar la regla para calcular la "fracción de una cantidad".

Toma de decisiones

Los resultados obtenidos en la segunda tarea de la Ficha de trabajo nº 29 BIS recomiendan reforzar la técnica de obtención de la "fracción de una cantidad" y, en consecuencia, plantear la resolución de las últimas fichas de trabajo (nº 30 y nº 31) de este Ciclo Experimental.

Día 28-4-2004 (Vigésimo primera sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 30

2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 31

Ejecución

En la primera parte de la sesión los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 30 con la que se pretende que éstos conjeturen la regla para calcular la "fracción de una cantidad".

Después de que se procede a la evaluación conjunta de esta ficha de trabajo, se procede a resolver la ficha de trabajo nº 31 que obliga a utilizar, de forma simbólica, la regla para calcular la "fracción de una cantidad" porque la unidad es una cantidad grande. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 31:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 31. Fecha __________

Tienes una bolsa con 245 canicas, y das a un amigo $\frac{3}{7}$ de las canicas. ¿Cuántas canicas le has dado?

Solución: Le has dado __________ canicas.

Explica como has obtenido la solución: ____________________

Después de resolver el problema, contesta las preguntas:

1º ¿Cuál es la unidad de medida? ____________________

2º ¿Qué indica el denominador de la fracción $\frac{3}{7}$? ____________________

3º ¿Qué indica el numerador de la fracción $\frac{3}{7}$? ____________________

Asistencia de los alumnos

Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Todos los alumnos del grupo saben resolver la ficha de trabajo nº 30. Además de resolver correctamente la tarea, nueve alumnos (B03, B06, B09, B10, B12, B13, B15, B17 y B18) saben conjeturar la regla de obtención de la "fracción de una cantidad". Después, en el momento de proceder a la evaluación conjunta de la tarea los profesores introducen la regla.

Los alumnos que no conjeturan la regla saben obtener la solución correcta de la tarea utilizando el significado de la fracción como medida y utilizando material manipulativo, en algunos casos. Los alumnos que poseen un mayor nivel de comprensión eluden el uso de materiales tangibles y se centran en el cálculo simbólico. Así, por ejemplo, la alumna B12 cuando resuelve la última tarea de la Ficha nº 30 escribe:

$$24 : 6 = 4 \qquad 4x\ 6 = 24$$

La cantidad que aparece en la enunciado de la Ficha de trabajo nº 31, 245 canicas, impide a los escolares utilizar material tangible. En estas condiciones, se desea evaluar la capacidad de los alumnos para calcular la fracción de una cantidad mediante procedimientos simbólicos. Además, dado que la tarjeta de evaluación de la ficha indaga por los significados de la fracción la resolución de la ficha aporta información sobre la comprensión de los alumnos.

Los alumnos obtienen resultados aceptables en la Ficha de trabajo nº 31: 14 alumnos (B01, B02, B03, B05, B09, B10, B12, B13, B14, B15, B17, B18, B19 y B20) que constituyen el 70% de los alumnos del grupo aplican correctamente la regla para calcular la fracción de una cantidad. Además, todos estos alumnos interpretan de forma adecuada la unidad, el numerador y el denominador de la fracción.

Valoración

El 30% de los alumnos de cuarto curso de la Segunda Etapa de Experimentación son capaces de conjeturar la regla para calcular "la fracción de una cantidad". Este hecho constituye una potencialidad de la propuesta de enseñanza porque se comprueba que los alumnos de edades tempranas pueden "adelantarse" y conjeturar determinados resultados matemáticos que están expresados con notaciones simbólicas.

Se han cubierto los objetivos que nos habíamos planteado con la enseñanza de la fracción como medida de la cardinalidad. A pesar de que este modelo plantea mayores dificultades conceptuales que los de las magnitudes continuas dado que no pertenece a la fenomenología histórica de la fracción; sin embargo, el hecho de introducirlo en un momento posterior de la secuencia de enseñanza permite reforzar el trabajo realizado desde los modelos de magnitudes continuas. En efecto, si observamos los resultados de esta última ficha de trabajo podemos comprobar que un 70% sabe escribir los significados de los términos de la fracción y, además, lo hacen de forma mucho más precisa a como lo hacían en las fichas de trabajo formuladas desde los modelos de longitud o de superficie. Sin duda, constatamos una mejoría en la capacidad de expresión de algunos alumnos conforme se ha ido desarrollando la secuencia de enseñanza, de modo que en ellos se percibe un progreso en la conceptualización de la fracción como resultado de una medida de cantidad de magnitud.

Toma de decisiones

Concluye la secuencia de enseñanza correspondiente al primer Ciclo de la Segunda Etapa Experimental. El Equipo Investigador recomienda a la profesora tutora del grupo que propongan a los alumnos, en otros momentos de período lectivo, algunas tareas similares a las de la Propuesta Didáctica para consolidar los aprendizajes realizados por los escolares.

ANEXO II.4: DIARIO DE CLASE DEL SEGUNDO CICLO Y DE LA SEGUNDA ETAPA

Día 18-11-2004 (Primera sesión)

<u>Plan previsto.</u>

Se prevé dedicar las tres primera sesiones a repasar el significado de fracción con significado de medida y, en particular, el concepto de equivalencia de fracciones. En estas sesiones los alumnos van a resolver las fichas de trabajo que denominamos tareas previas nº 1 a nº 6. En esta primera sesión se pretende recordar el significado de la fracción como medida, y resolver y evaluar la tareas previa nº 1.

<u>Ejecución</u>

La tarea previa nº 1 propone medir la cantidad de longitud de un listón de madera (3/4 de unidad). En primer lugar, comprueban que la longitud del listón es menor que la unidad. Después prueban a medir el listón con subunidades de longitud 1/2 unidad. Con la ayuda de una tira de papel de la misma longitud que la unidad los alumnos intentan medir el listón con subunidades de longitud 1/3 u. y 1/4 u. Después de que comprueban que la medida del listón es 3/4 unidad, el profesor propone que vuelvan a medir el listón con subunidades de longitud 1/8 unidad y el profesor plantea las siguientes cuestiones:

Pregunta 1: "Expresa de dos formas diferentes la longitud de los dos trenes que has construido"

Pregunta 2: "¿Por qué son equivalentes las fracciones que has escrito?"

Pregunta 3: "¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a las fracciones que has escrito?. Explica cómo la has obtenido."

Bastantes alumnos adelantan el resultado antes de proceder manipulando con las subunidades e indican que mide 6/8 de unidad. Cuando el profesor les pide explicar porque las fracciones 3/4 u y 6/8 u que se escriben de diferente manera tienen la misma longitud de un listón, los alumnos tienen a dar justificaciones de tipo operatorio (multiplicar el numerador y denominador por dos) y eluden explicaciones basadas en el modelo. Los alumnos argumentan en base a las acciones realizadas con el material y aportan justificaciones del siguiente tipo:

“Las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ son equivalentes porque como $\frac{1}{8}$ es la MITAD de $\frac{1}{4}$, cuando medimos con octavos necesitamos el DOBLE de estas subunidades que de cuartos para cubrir la longitud del listón”

Los escolares han escrito en sus cuadernos este razonamiento y, además, el siguiente gráfico:

x 2

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

x 2

Después los escolares miden el listón utilizando subunidades de longitud 1/12 u. y se procede de forma análoga como en el caso de la medida con subunidades de longitud 1/8 de unidad. Los escolares razonan la equivalencia de $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{12}$ en términos del modelo y el profesor escribe en la pizarra:

x 3

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

x 3

Los escolares escriben en su cuaderno esta nueva equivalencia y afrontan la resolución de la tarea previa nº 2.

Mostramos el enunciado de la tarea previa nº 2:

"Debes construir con las cañas, un listón de longitud 2/3 de la tira unidad. Sin deshacer el listón que has hecho, construye un listón de la misma longitud utilizando subunidades de 1/6 de la tira unidad"

Pregunta 1:
"Expresa con otra fracción diferente la longitud del listón que has construido"

Pregunta 2:

"¿Por qué la fracción que has escrito es equivalente a $\frac{2}{3}$*?"*

Pregunta 3:

"¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a la fracción $\frac{2}{3}$*?*

Explica cómo la has obtenido"

Para resolver esta tarea los alumnos disponen de material manipulativo. En primer lugar el profesor se asegura de que los escolares comprenden el significado de la fracción 2/3 u. como medida. Algunos alumnos confunden el significado de los términos de la fracción.

En la pregunta nº 1, cuando utilizan subunidades de longitud 1/6 de unidad, la mayoría de los alumnos adelantan el resultado de la fracción equivalente a 2/3 sin necesidad de emplear material manipulativo.

En la pregunta nº 2 los alumnos deben justificar la equivalencia de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$. La mayoría de los escolares aportan respuestas que eluden la justificación cuando afirman "porque tienen la misma longitud"; o bien, dan justificaciones basadas en cálculos operatorios cuando explican: "porque se multiplica el numerador y denominador por dos".

Muy pocos alumnos aportan justificaciones basadas en las acciones efectuadas sobre el modelo. El profesor les ayuda y solicita que escriban la respuesta que aporta algún alumno como:

"*Son equivalentes porque si los sextos son la MITAD de los tercios se necesitan el DOBLE de sextos que de tercios para completar la misma cantidad de longitud*"

En la pregunta nº 3 de la tarea previa nº 2 los alumnos encuentran con facilidad fracciones equivalentes a 2/3 u, porque proponen volver a medir la cantidad de longitud con subunidades de longitud 1/9 u, 1/12 u, 1/15 u, 1/18 u, …

<u>Aspectos actitucionales</u>
Los alumnos del grupo se muestran motivados y con gran disposición al trabajo.

<u>Asistencia de los alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos.

<u>Variaciones entre los alumnos que participan en la experimentación del Primer y Segundo Ciclo</u>
En esta Segunda Etapa de la Experimentación se mantiene la misma asignación de códigos a los alumnos que han participado en la experimentación de tercer y cuarto curso de Educación Primaria. Los 20 alumnos que participaron en los cursos anteriores permanecen 18 alumnos en el grupo de 5º curso, y los identificamos con los códigos B00 a B18; porque un alumno (B19) abandona el Colegio al comenzar 5º curso y otro alumno (B20) repite 4º curso de Educación Primaria.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos comprenden el significado de equivalencia de fracciones porque saben encontrar fracciones equivalentes a una con la ayuda de material manipulativo. Todos los alumnos del grupo, excepto B02, saben encontrar fracciones equivalentes a la que plantea la tarea previa nº 1. Este resultado era previsible porque la secuencia de enseñanza implementada en cuarto curso contempla abundantes experiencias de búsqueda de fracciones equivalentes a una dada utilizando objetos que poseen cantidades de magnitud longitud y de superficie.

Sin embargo, los alumnos tienen dificultades para justificar, desde el modelo de aprendizaje, por qué la fracción que han encontrado es equivalente. La mayoría de los alumnos aportan argumentos basados en la regla de obtención de fracciones equivalentes de este tipo:

"Porque multiplicando el numerador y el denominador por un mismo número sale una fracción equivalente" (B13)

Los alumnos se muestran reticentes a realizar argumentaciones basadas en el modelo de medida y, por lo tanto, optan por enunciar la regla de obtención de fracciones equivalentes.

Valoración

Los alumnos saben construir fracciones equivalentes a una dada utilizando como recurso didáctico materiales manipulativos. Sin embargo, tienen dificultades para expresar, oralmente y por escrito, las acciones que han realizado para obtener la fracción equivalente a una dada. En estas condiciones, evitan dar argumentos basados en el modelo de medida y optan por el lenguaje simbólico, mediante la formulación de la regla de obtención de fracciones equivalentes, para justificar la equivalencia.

Toma de decisiones

La importancia de la equivalencia de fracciones aconseja que las primeras sesiones de la secuencia de enseñanza en quinto curso se dediquen a reforzar la operatividad de este concepto. Las dos siguientes sesiones se van a dedicar a reforzar el concepto de equivalencia de fracciones.

Día 19-11-2004 (Segunda sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la tarea previa nº 2

2º Resolver y evaluar la tarea previa nº 3

Ejecución

El profesor presenta la tarea previa nº 2 y reparte a los alumnos unidades de superficie de 20 x 20 cm.

Uno de los alumnos (B02) que la ha necesitado recibir la ayuda de los profesores para resolver la tarea sale a la pizarra y con la ayuda del profesor, construye los manteles de superficie 3/2, 6/4, 9/6 y 12/8 de la unidad.

El profesor recuerda la regla de obtención de fracciones equivalentes y escribe en la pizarra:

x 2

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

x 2

x 3

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$$

x 3

$$\frac{3}{2} \xrightarrow[\times 4]{\times 4} \frac{12}{8} \qquad \frac{3}{2} = \frac{12}{8}$$

Algunos alumnos indican verbalmente otras fracciones equivalentes. Así, la alumna B08 dice que 21/14 u. es una fracción equivalente a 3/2.

En los últimos 20 minutos de la sesión, los escolares afrontan la resolución de la tarea previa nº 3. Los alumnos van a intentar resolver la tarea sin utilizar material manipulativo porque se les recomienda que encuentren fracciones equivalentes a las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ de modo que tengan el mismo denominador para poder compararlas. Aquellos alumnos que no sepan cómo afrontar la tarea recibirán dos tiras de papel de longitud la unidad.

Todos los alumnos del grupo, salvo el alumno B01, son capaces de utilizar la equivalencia de fracciones a nivel simbólico para comparar las fracciones que expresan la medida de cantidades de longitud.

Se ha realizado la evaluación conjunta de la tarea utilizando dos estrategias muy dispares:

1º Representando con tiras de papel de longitud una unidad las cantidades de longitud $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ de unidad, que utiliza el alumno B01.

2º Encontrando fracciones equivalentes utilizando la notación simbólica:

$$\frac{3}{4} \xrightarrow[\times 2]{\times 2} \frac{6}{8} \qquad \frac{3}{4} \xrightarrow[\times 3]{\times 3} \frac{9}{12} \qquad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{2}{3} \xrightarrow[\times 2]{\times 2} \frac{4}{6} \qquad \frac{2}{3} \xrightarrow[\times 4]{\times 4} \frac{8}{12} \qquad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

Antes de concluir la sesión de clase los alumnos reciben el encargo de resolver en sus casas la tarea previa nº 4 que tiene un formato análogo a la tarea previa nº 3, y cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA PREVIA 4. Fecha: ________

"Dados dos listones: uno de longitud $\frac{3}{4}$ y otro de longitud $\frac{5}{6}$ de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?"

Consigna:
No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ que tengan el mismo denominador.

SOLUCIÓN: El listón más largo mide ___________________

Para comparar los listones he hecho lo siguiente:

Asistencia de los alumnos
Falta a clase el alumno B04.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos dan muestran de tener operativo el concepto de equivalencia de fracciones en las tareas de comparación de fracciones. No obstante, la dificultad de este concepto recomienda reforzar esta técnica de carácter simbólico que es percibida por los alumnos como una técnica compleja y muy alejada de sus intuiciones primitivas.

Toma de decisiones
Se va a dedicar una sesión más a comparar fracciones para consolidar la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes. Se pretende realizar la evaluación conjunta de la tareas previa nº 4 que los alumnos deben traer resuelta de sus casas y después se propondrá la resolución de las tareas previa nº 5 y nº 6.

Día 22-11-2004 (Tercera sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la tarea previa nº 4
2º Resolver y evaluar la tarea previa nº 5
3º Resolver y evaluar la tarea previa nº 6

Ejecución
El profesor recoge las tarjetas de evaluación de la tarea previa nº 4. Todos los alumnos han traído resuelta la tarea. Además, todos utilizan adecuadamente la equivalencia de fracciones. Doce alumnos optan por reducir las fracciones con el denominador común 12; y otro 5 alumnos optan por reducir las fracciones con el denominador común 24. Los alumnos de mayor nivel de comprensión optan por esta segunda estrategia. Uno de estos alumnos (B10) sale a la pizarra y explica su respuesta:

$$\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$$
$$\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$$

Cuando el alumno B10 resuelve la tarea se pone de manifiesto que el listón $\frac{5}{6}$ es más largo que el listón $\frac{3}{4}$ y que le supera en $\frac{2}{24}$ de unidad.

Hay un grupo más numeroso de alumnos que utilizan cadenas de fracciones equivalentes hasta que consiguen encontrar fracciones con el mismo denominador. Esta técnica la ejemplifica el alumno B09 en la pizarra:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \boxed{\frac{9}{12}} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{5}{6}=\boxed{\frac{10}{12}}=\frac{15}{18}$$

El alumno escribe las cadenas de fracciones equivalentes y después recuadra las que tienen el mismo denominador. Finalmente, se pone de manifiesto que el listón $\frac{5}{6}$ es más largo que el listón $\frac{3}{4}$ y que le supera en $\frac{1}{12}$ de unidad.

El profesor pregunta si esto es posible y algunos alumnos (pocos) contestan que $\frac{1}{12}$ y $\frac{2}{24}$ son fracciones equivalentes. El profesor escribe en la pizarra:

$$\frac{1}{12} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}} \frac{2}{24}$$

Los alumnos resuelven de forma individual la tarea previa nº 5. Los dos tercios alumnos resuelve correctamente la tarea. La alumna B12 sale a la pizarra para resolver la tarea después de que el profesor haya recogido las tarjetas de evaluación. Los escolares escriben la respuesta en sus cuadernos.

El rendimiento de los alumnos ha descendido si se compara con los resultados de la tarea anterior debido, posiblemente, a la que fracciones implicadas son menos familiares a los alumnos que las de la tarea anterior. Cinco alumnos (B02, B03, B08, B12 y B14) han cometido errores o no han sabido aplicar la equivalencia de fracciones. La alumna B03 encuentra fracciones con el mismo numerador pero, después, no sabe compararlas.

Antes de concluir la sesión, el profesor les propone como trabajo para casa resolver la tarea previa nº 6 con el encargo de traerla resuelta a la siguiente sesión de clase:

“Tienes dos listones: uno de longitud $\frac{3}{8}$ y otro de longitud $\frac{7}{6}$ de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?".

<u>Asistencia de los alumnos</u>
Falta a clase el alumno B04.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos progresan en la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes a dos dadas y que, además, tengan el mismo denominador. Entre las estrategias que utilizan los alumnos destaca la de construir cadenas de fracciones equivalentes al multiplicar el numerador y denominador de las fracciones por los números 2, 3, 4, 5 y así sucesivamente, hasta comprobar que obtienen fracciones equivalentes con el mismo denominador.

<u>Valoración</u>
Se observa una mejora en la operatividad del concepto de fracción equivalente que se manifiesta en la búsqueda de fracciones equivalentes a una dada y en la justificación del procedimiento utilizado.

Sobre la justificación del procedimiento utilizado para encontrar fracciones equivalentes, los escolares tienen dificultades para expresar verbalmente las acciones que han realizado en el proceso de resolución. Posiblemente, estas dificultades de expresión hace que los alumnos justifiquen la fracción equivalente hallada a partir de cálculos numéricos, como multiplicar el numerador y denominador por un determinado número, sin hacer referencia a las acciones efectuadas sobre el modelos de aprendizaje. Por otra parte, los alumnos valoran la concisión del lenguaje simbólico y prefieren utilizar éste antes que el lenguaje natural.

Día 23-11-2004 (Cuarta sesión)

Plan previsto.

1º Recoger y evaluar la tarea previa nº 6
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 1
3º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 2

Ejecución

El profesor recoge la tarea previa nº 6. Tres alumnos (B01, B04 y B07) no la han traído resuelta. Dos de ellos (B01 y B07) dicen que la han dejado olvidada en sus casas y B04 dice haber faltado a las últimas sesiones de clase. Los alumnos B01 y B07 son invitados a salir a la pizarra a resolver esta tarea y, con la ayuda del profesor, encuentran fracciones equivalentes a ambas con distintos denominadores: utilizando subunidades de 1/48 de unidad y de 1/24 de unidad.

Los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 1 y se ponen a resolver la situación problemática que plantea la ficha de trabajo:

"Tengo dos listones de madera: uno mide los 4/3 de la tira unidad, y otro mide 2/3 de la tira unidad. Si colocamos un listón a continuación del otro, ¿cuánto mide el nuevo listón?"

Finalmente, los alumnos resuelven, en el aula, la tarea nº 2 que plantea el siguiente problema:

"Tienes un listón que mide 1/2 de la tira unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud 1tira unidad. Expresa con una fracción la longitud del nuevo listón que has construido"

Asistencia de los alumnos

Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los alumnos obtienen un rendimiento aceptable en las tareas previas dedicadas a ejercitar la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes a dos dadas y que, además, tengan el mismo denominador. Los dos tercios de los alumnos del grupo obtienen éxito en la tarea previa nº 6. Además de los dos alumnos no han realizado la tarea, hay tres (B02, B12 y B16) que cometen errores; los demás saben aplicar la equivalencia de fracciones para comparar cantidades de magnitud.

Los alumnos identifican las situaciones concretas que dan sentido a la operación suma de fracciones porque son análogas a las que utilizan con números naturales. Los escolares identifican la operación suma como aquella que resuelve la tarea nº 1. Además, los alumnos conjeturan la regla para sumar fracciones porque comprenden que para poder sumar es necesario que las subunidades sean del mismo tamaño. Solo los alumnos B07 y B14 no identifican a operación suma porque dan como respuesta la fracción mayor 4/3 de unidad.

Ahora bien, debemos realizar tres consideraciones:

1º referida al significado de la suma de fracciones: algunos alumnos han necesitado utilizar tiras de longitud 1/3 de unidad. Hay alumnos que se sienten muy inseguros si no utilizan material.
2º referida al concepto de equivalencia de fracciones: los alumnos no simplifican la fracción 6/3 u. El profesor ha sugerido a los alumnos que la fracción 6/3 u. es equivalente a 2 unidades.
3º referida a las representaciones gráficas que realizan los alumnos: los profesores han sugerido a los alumnos que representen gráficamente las cantidades de longitud. Esta recomendación se muestra muy acertada porque conecta las acciones físicas y las representaciones simbólicas.

Todos los alumnos del grupo resuelven correctamente la ficha de trabajo nº 2. Para resolver esta tarea los alumnos necesitan gestionar la unidad y considerarla como 2/2 para sumarla a 1/2. Los alumnos han utilizado diversas estrategias algunas de las cuales han ido sugeridas por los profesores:

1º utilizar material (el profesor ha colgado en la pizarra una tira de papel de longitud la unidad y a continuación una tira de 1/2 unidad) para percibir que en una unidad hay 2 subunidades de 1/2 y, después, sumar las subunidades.
2º realizar un gráfico, para mostrar que en una unidad hay 2 subunidades de 1/2 y, después, sumar las subunidades.
3º utilizar la equivalencia 1 = 2/2 = 1/2 + 1/2 y, después, operar 1/2 + 2/2

Valoración

Después de dedicar tres sesiones de clase se ha alcanzado el objetivo de reforzar el significado y operatividad de la equivalencia de fracciones. Los alumnos están en condiciones de afrontar las situaciones problemáticas que dan sentido a las operaciones con fracciones y que obligan a buscar técnicas de cálculo para las operaciones con fracciones.

La secuencia de enseñanza referida a la suma de fracciones se desarrolla según lo previsto. En estos momentos iniciales es previsible que los alumnos no se percaten de que están utilizando la equivalencia de fracciones cuando realizan la conversión $1\ u = 2/2\ u$ al resolver la Ficha de trabajo nº 2. Ninguno de los alumnos que utilizan la equivalencia de fracciones lo hacen constar en la tarjeta de evaluación, posiblemente porque no son conscientes de haberla utilizado. En este caso lo importante es que utilicen esta estrategia y que vayan abandonando gradualmente la dependencia del manejo de materiales manipulativos.

Toma de decisiones
Continuar con la planificación prevista.

Día 25-11-2004 (Quinta sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 3
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 4

Ejecución
Los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 3 que indaga si los alumnos dotan de significado a la operación suma de fracciones y, además, encuentran procedimientos de cálculo de la suma de fracciones con distinto denominador. La ficha de trabajo nº 3 plantea la situación problemática:

Tienes un listón que mide $\frac{1}{2}$ *de la tira unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud* $\frac{1}{3}$ *de la tira unidad. ¿Cuál es la longitud del nuevo listón que has construido?*
Si necesitas utilizar material puedes solicitarlo.

A pesar de que se les permite a los alumnos utilizar materiales tangibles, los profesores de aula recomiendan a los alumnos que no utilicen materiales para evitar el fenómeno pernicioso observado en la implementación de la Primera Etapa que consiste en que algunos alumnos que son capaces de gestionar con cálculos simbólicos la equivalencia de fracciones prefieren utilizar materiales con la consiguiente limitación en sus procesos de aprendizaje.

Después de que los alumnos resuelven la tarea se procede a la evaluación conjunta de la misma. El alumno B05 que comete el error de sumar numeradores y denominadores sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor, resuelve el problema.

Termina la sesión de clase y no queda tempo para afrontar la Ficha de trabajo nº 4. Se resolverá en la siguiente sesión de clase.

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los dos tercios de los alumnos de la Segunda Etapa identifican la suma de fracciones como la operación que resuelve el problema de la Ficha de trabajo nº 3.

Los alumnos de la Segunda Etapa utilizan procedimientos simbólicos basados en la equivalencia de fracciones para calcular la suma de las fracciones 1/2 u y 1/3 u. Dos tercios de estos alumnos realizan correctamente la suma de fracciones. En la tabla siguiente se detallan las estrategias utilizadas por los alumnos, y el número de alumnos que utiliza una determinada estrategia y que tienen éxito o fracaso al utilizar dicha estrategia:

	Sol. correcta	**Sol. incorrecta**
Material	**2** (B01, B13)	**1** (B06)
Equivalencia	**10** (B03, B08, B09, B10, B11, B12, B14, B15, B17, B18)	**4** (B04, B05, B07, B16)
No la resuelven		**1** (B02)
Totales	**12**	**6**

Los alumnos de la Segunda Etapa apenas realizan gráficos y son pocos los que se sirven de materiales tangibles. Esto es debido a que los profesores de aula han sugerido a los alumnos que eludan el uso de materiales manipulativos para evitar el fenómeno pernicioso observado en la implementación de la Primera Etapa que consiste en que algunos alumnos que son capaces de gestionar con cálculos simbólicos la equivalencia de fracciones prefieren utilizar materiales con la consiguiente limitación en sus procesos de aprendizaje. De esta manera se fuerza a los alumnos a utilizar representaciones simbólicas sustentadas en la equivalencia de fracciones.

La decisión de restringir a los alumnos el uso de materiales tangibles es acertada porque los alumnos obtienen un porcentaje de éxito elevado. Los alumnos que utilizan representaciones simbólicas obtienen porcentajes de éxito altos, mientras que los alumnos que utilizan objetos tangibles obtienen resultados peores. Esto quiere decir que los alumnos que tienen menor nivel de comprensión necesitan apoyarse en el material manipulativo y, aún así, esto no les garantiza el éxito en la tarea. Estos resultados sugieren pautas metodológicas para la gestión del material en el aula: el profesor debe vigilar el proceso de aprendizaje de cada alumno y tomar decisiones sobre el momento adecuado en el que el alumno debe abandonar el uso de materiales tangibles para forzar la aparición de estrategias conveniencia más avanzadas, dado que mientras que unos alumnos necesitan sustentar sus ideas a partir de la manipulación con objetos tangibles, para otros alumnos este tipo de actividad puede obstaculizar el aprendizaje de estrategias carácter simbólico.

Valoración
La metodología de enseñanza que sustenta la Propuesta Didáctica propugna que los alumnos utilicen representaciones simbólicas después de que, durante un determinado período temporal, realicen experiencias de medida con materiales tangibles y con el apoyo de representaciones gráficas. Posiblemente, estas actuaciones retrasan la utilización de cálculos simbólicos por parte de los alumnos, pero resultan particularmente provechosas porque hemos constatado que los alumnos apenas cometen errores conceptuales en el manejo de las representaciones simbólicas como sumar numeradores y denominadores. Esto es así porque el cálculo simbólico que gestionan los alumnos tiene un referente concreto en las acciones físicas que previamente han realizado en el modelo de aprendizaje. Los buenos resultados obtenidos por los alumnos de la Segunda Etapa, aconsejan mantener la propuesta didáctica inicial y recomendar a los alumnos que intenten resolver las situaciones problemáticas sin la ayuda de materiales manipulativos. Ahora bien, conviene alertar sobre los efectos que puede producir tal recomendación que se realiza para favorecer la aparición de estrategias de carácter simbólico y para acortar los períodos de instrucción; porque se corre el riesgo de que los alumnos se vean avocados a realizar cálculos simbólicos sin haber tenido suficientes experiencias previas con los objetos del modelo.

Día 26-11-2004 (Sexta sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 4
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 5

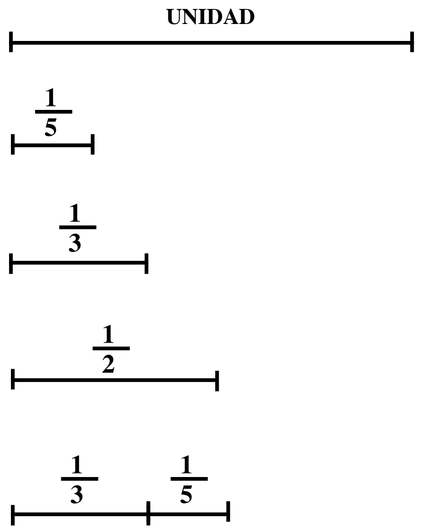
Ejecución
Los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 4 que indaga si los alumnos dotan de significado a la operación suma de fracciones y, además, encuentran procedimientos de cálculo de la suma de fracciones con distinto denominador. La ficha de trabajo nº 4 plantea la situación problemática siguiente:

Una empresa fabrica refrescos que vende en botellas de diferente capacidad: de $\frac{1}{5}$ *de litro, de* $\frac{1}{3}$ *de litro y de* $\frac{1}{2}$ *litro.*

Si bebes el contenido de dos botellas: una de $\frac{1}{5}$ *de litro y otra de* $\frac{1}{3}$ *de litro, ¿qué cantidad de refresco has bebido?*

La cantidad de refresco que has bebido, ¿cabe en una botella de $\frac{1}{2}$ *litro?*

Durante la evaluación de la Ficha de trabajo nº 4 el profesor ha mostrado la conveniencia de utilizar las representaciones gráficas, aún en este tipo de problemas que trabajan magnitudes difíciles de dibujar como la capacidad. En tal caso se aconseja pensar en otra magnitud como la longitud o la superficie, y proceder del siguiente modo:



Las representaciones gráficas permiten valorar la magnitud de las cantidades que intervienen en el problema y conjeturar resultados. En nuestro caso podemos adelantar que $\frac{1}{5}+\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$. La propuesta de enseñanza contempla la utilización de la equivalencia de fracciones para sumar las fracciones $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$, y después para comparar la suma con $\frac{1}{2}$. Esta técnica se ha ejemplificado en la pizarra. El alumno B05 que comete el error de sumar numeradores y denominadores sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor, resuelve el problema.

La resolución y evaluación de la tarea nº 4 ha llevado más tiempo del inicialmente esperado. Por este motivo se ha retrasado la resolución de la ficha de trabajo nº 5 que plantea la situación problemática siguiente para introducir la resta de fracciones:

Deseas empapelar una pared que tiene una superficie de 5 metros cuadrados. Si por la mañana has empapelado una superficie de $\frac{11}{4}$ metros cuadrados. ¿Cuánta superficie queda por empapelar?

Termina la sesión de clase y algunos alumnos no terminado la Ficha de trabajo nº 5. Estos alumnos reciben el encargo de terminar en sus casas la tarea y traerla resuelta a la siguiente sesión de clase. El profesor da indicaciones para facilitar su resolución como trabajo para casa; en concreto, entrega a cada uno de los alumnos 5 manteles cuadrados de 20 x 20 cm. que representan la unidad de superficie junto con la tarjeta de evaluación de la ficha y sugiere que deben expresar 5 unidades de superficie mediante subunidades de tamaño 1/4 de unidad. En la siguiente sesión se procederá a la evaluación conjunta de esta ficha de trabajo.

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
El 90% de los alumnos del grupo resuelven correctamente el problema de la Ficha de trabajo nº 4. El dato más significativo es que todos los alumnos utilizan como estrategia la equivalencia de fracciones. Ninguno de los alumnos utiliza representaciones gráficas para responder a la tarea. Aunque la estrategia utilizada por los alumnos es propia del nivel simbólico, éstos han entendido bien el enunciado del problema gracias a que el profesor, cuando ha presentado la tarea, les ha mostrado a los alumnos botellas de 1/5, 1/3 y 1/2 litro de capacidad. La percepción visual de la cantidades de magnitud que expresan las fracciones que intervienen en los problemas les ayuda a los alumnos en la resolución del problema. En este caso, se hace más necesario porque la magnitud capacidad no tiene referencias visuales tan claras como la longitud o la superficie.

Aproximadamente, la tercera parte de los alumnos confunden la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes con la operación multiplicación de una fracción por un número natural. En este momento de la secuencia de enseñanza los alumnos no han situaciones problemáticas que resuelve la multiplicación y, en estas condiciones, es razonable que no distingan entre la operación aritmética que resuelve un problema y como una técnica entre naturales para disminuir o aumentar el fraccionamiento de la unidad.

Valoración
En general, los alumnos saben resolver las situaciones problemáticas de suma de fracciones, a pesar de que algunos no identifican la operación suma en las tarjetas de evaluación de las fichas de trabajo. También hemos detectado que algunos alumnos interpretan que la operación es la equivalencia de fracciones, o la multiplicación debido a las acciones simbólicas que realizan para obtener fracciones equivalentes. No obstante, los alumnos evolucionan, conforme van resolviendo nuevas tareas, e identifican la operación suma de fracciones.

Toma de decisiones
Los alumnos comprenden las acciones básicas que formalizan la suma de fracciones porque se corresponden con las de la suma de naturales. Como era de esperar las dificultades aparecen en la simbolización de la equivalencia de fracciones que algunos identifican con la multiplicación de fracciones. Sin embargo, los alumnos perciben de modo natural que para sumar cantidades de magnitud, expresadas en la notación fraccionaria, se necesita que tales cantidades estén expresadas con respecto a una misma subunidad. Los modelos de medida se muestran apropiados para introducir el significado y cálculo de la suma de fracciones porque muy pocos alumnos cometen el error de sumar entre si numeradores y de denominadores de las fracciones implicadas en la suma.

En estas condiciones, se propone continuar con la implementación de la propuesta y abordar la enseñanza de la resta de fracciones.

Día 29-11-2004 (Séptima sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 5
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 6

Ejecución
El profesor recoge la la Ficha de trabajo nº 5. Todos los alumnos traen la tarea resulta. Cinco alumnos (B02, B04, B08, B14 y B16) no han resuelto correctamente esta tarea. Las dificultades de estos alumnos se han centrado en reconocer la cantidad 5 metros cuadrados como una fracción y expresa ésta mediante su equivalente 20/4 metros cuadrados.

Para evaluar esta tarea sale a la pizarra la alumna B14 que no ha sabido gestionar la equivalencia de fracciones. La alumna escribe en la pizarra la representación gráfica de las cantidades implicadas en el problema para que sus compañeros dejen, en sus cuadernos, constancia de la resolución de esta tarea.

En la segunda parte de la sesión se procede a la resolución de la Ficha de trabajo nº 6 cuyo enunciado es:

Tengo una caña de pescar que mide $\frac{7}{5}$ *metros y se ha partido en dos partes: una mide* $\frac{9}{10}$ *de metro. ¿Cuánto mide la otra parte de la caña?*

Antes de que los alumnos aborden la resolución de la tarea, el profesor aporta dos indicaciones:

1º que estudien que fracción es mayor: $\frac{7}{5}$ ó $\frac{9}{10}$

2º que realicen un dibujo de la caña de pescar y de los dos trozos en los que ha quedado partida.

La mayoría de los alumnos encuentran fracciones equivalentes con subunidades de longitud “un décimo”; salvo tres alumnos (B09, B17 y B18) que utilizan subunidades de 1/50 de metro. Para evaluar conjuntamente la tarea sale a la pizarra el alumno B07 que ha necesitado la ayuda de los profesores para resolver el problema.

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos, salvo el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la Ficha de trabajo nº 5 confirman la dificultad para expresar el número natural 5 con una fracción. El hecho de que tener que expresar el número natural mediante una representación fraccionaria ha supuesto una situación novedosa para los alumnos y deja entrever limitaciones conceptuales de éstos al gestionar un procedimiento simbólico que es ajeno a las técnica de cálculo que conocen y utilizan los alumnos.

Los resultados de la Ficha de trabajo nº 6 indican que los escolares progresan en los aprendizajes sobre la técnica de cálculo con fracciones. Solo tres alumnos (B02, B05, B07 y B08) yerran al gestionar la equivalencia de fracciones.

La técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada se ha focalizado en la estrategia de amplificación, mientras que la de simplificación se ha trabajo en menos ocasiones. Esto hace que ninguno de los alumnos simplifique las fracciones 5/10 de metro o 25/50 de metro hasta obtener 1/2 metro. Solo los alumnos B17 y B18 que poseen un nivel de comprensión alto utilizan esta estrategia y escriben la equivalencia: $\frac{25}{50} = \frac{5}{10}$.

Esta dificultad tiene su origen en la propia secuencia de enseñanza puesto que la justificación del proceso de obtención de fracciones equivalentes ha potenciado los fraccionamientos cada vez “más finos” de la unidad. En consecuencia, la aparición de esta dificultad estaba prevista y no es preocupante en este momento de enseñanza.

Toma de decisiones

Los alumnos progresan en la gestó simbólica de la equivalencia de fracciones. Se debe seguir reforzando la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada y prestar mayor atención a la técnica de simplificación de fracciones.

Con esta intención proponemos la resolución de una nueva tarea de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones que no se había implementado en la Primera Etapa de la Experimentación y cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TAREA DE REFUERZO DE CÁLCULO DE LAS OPERACIONES DE SUMA Y RESTA DE FRACCIONES.

Realiza las siguientes operaciones:

1º $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

2º $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

3º $\frac{7}{12} + \frac{1}{3}$

4º $\frac{7}{12} - \frac{1}{3}$

5º $2 + \frac{1}{4}$

6º $2 - \frac{1}{4}$

Día 1-12-2004 (Octava sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 7

2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones.

Ejecución

Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 7 que propone resolver el siguiente problema:

Quieres comprar aceitunas. La tendera te sirve $\frac{6}{5}$ *Kgr. de aceitunas. Expresa, con una fracción, el peso de aceitunas que debe añadir para servirte dos kilogramos de aceitunas.*

Cuando los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 7 se procede a su evaluación conjunta. El alumno B01 explica en la pizarra la representación gráfica que ha efectuado y, después, la alumna B03, que no ha sabido resolver el problema, sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor, utiliza la equivalencia de fracciones para ejemplificar esta estrategia.

En la segunda parte de la sesión los alumnos resuelven una nueva Ficha de trabajo de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones. Cuando los alumnos resuelven la tarea la entregan a los profesores. Termina la sesión de clase y no queda tiempo para evaluarla, de modo conjunto. Se procederá a su evaluación al comienzo de la siguiente sesión de clase.

Asistencia de los alumnos

Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los dos tercios de los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación encuentran la solución correcta del problema. Siete alumnos (B02, B03, B05, B07, B08, B14 y B16) han errado al resolver este problema. Todos los alumnos, excepto B01 que utiliza representaciones gráficas, se sirven de representaciones simbólicas y ponen en juego el concepto de equivalencia de fracciones. Cuatro de los alumnos de yerran cometen incorrecciones en las representaciones simbólicas pero obtiene la respuesta correcta.

El rendimiento de los alumnos en la resolución de esta tarea ha descendido levemente con respecto otras tareas anteriores debido, posiblemente, por las siguientes causas:

a) dificultades de los alumnos para convertir la cantidad expresada por el natural 2 Kgrs. en la representación fraccionaria 10/5 Kgrs.,

b) la estructura semántica del enunciado del problema. El enunciado del problema describe una acción aditiva (aceitunas que debe añadir) pero la operación que resuelve la ficha es una resta, y

c) la magnitud que se trabaja en el problema es el peso. Esta magnitud no evoca a los alumnos imágenes mentales tan claras como la magnitud longitud o superficie.

La mayoría de los alumnos que utilizan correctamente la equivalencia de fracciones no son concientes de que la aplican cuando establecen la conversión 2 Kgrs = $\frac{10}{5}$ Kgrs.

Valoración

Los modelos de medida se muestran apropiados para introducir el significado y cálculo de las operaciones suma y resta de fracciones. En nuestra propuesta didáctica la enseñanza de las operaciones con fracciones se fundamenta a partir de la resolución de problemas. Los alumnos comprenden las acciones básicas que formalizan la suma y resta de fracciones porque se corresponden con las de la suma y resta de naturales.

La para resolver las tareas, en la Primera Etapa de la Experimentación, potencia las estrategias de resolución mediante la acción de medir y dificulta la aparición de respuestas con cálculos con símbolos.

Los cambios metodológicos introducidos en el Segunda Etapa que han consistido en aconsejar a los alumnos que eviten la utilización de materiales tangibles y opten por estrategias mas eficaces como el uso de representaciones graficas y simbólicas se ha mostrado eficaz. Los alumnos de la Segunda Etapa aportan respuestas más uniformes basadas en la utilización de la equivalencia de fracciones.

Los alumnos de la Segunda Etapa tienen automatizado la técnica de la suma y resta de fracciones que consiste en buscar fracciones equivalentes con el mismo denominador. En general, todos los alumnos del grupo, excepto B02, han sabido calcular las seis operaciones que plantea la tarea de refuerzo. Hay que reseñar que los alumnos siguen sin aplicar la técnica de simplificación de fracciones para expresar el resultado con una fracción irreducible.

Día 2-12-2004 (Novena sesión)

Plan previsto.

1º Evaluar la Ficha de trabajo de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones.

2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 8.

Ejecución

Comienza la sesión de clase y se procede a evaluar la ficha de trabajo de refuerzo de la técnica para calcular la suma y resta de fracciones. Para que los alumnos tengan escrita, en sus cuadernos, la tarea y su proceso de resolución que fue resuelta pero no corregida en el aula durante la sesión de clase del día anterior, algunos alumnos salen a la pizarra y realizan las operaciones que propone la Ficha de refuerzo.

En la segunda parte de la sesión los alumnos Ficha de trabajo nº 8 que plantea las dos situaciones problemáticas siguientes:

Compras 12 latas de conserva. Cada lata de conserva pesa $\frac{2}{3}$ *Kgrs. ¿Cuánto pesan las 12 latas?*

Compras 36 latas de conserva. Cada lata de conserva pesa $\frac{2}{3}$ *Kgrs. ¿Cuánto pesan las 36 latas?*

Cuando los alumnos resuelven las tareas se procede a su evaluación. El alumno B06, que no identifica la multiplicación de una fracción por un número natural, sale la pizarra y resuelve amos problemas.

Asistencia de los alumnos

Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

La resolución de la Ficha de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones ha cumplido el objetivo previsto: mejorar las destrezas procedimentales.

Todos los alumnos resuelven correctamente las seis operaciones que plantea la Ficha de trabajo. Tan solo el alumno B02 no ha sabido resolverla, y dos alumnos B04 y B14 han tenido dificultades para operar:

$$2 + \frac{1}{4} \text{ y } 2 - \frac{1}{4}$$

Las dificultades se centran en percibir el natural como una fracción y en la dificultad para escribir: $2 = \frac{2}{1}$

Los alumnos no reconocen la necesidad de aplicar la técnica de simplificación de fracciones. No se detectan otras dificultades en la resolución de las tareas de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones.

Con la resolución de la Ficha de trabajo nº 8 pretendemos introducir la operación multiplicación de una fracción por un número natural. Los alumnos, llevados por la técnica de resolución de las tareas precedentes, han utilizado la equivalencia de fracciones cuando no era necesario. Los profesores han intervenido para orientar el trabajo de los alumnos de modo que les indica que están ante un nuevo tipo de problema. Gracias a esta indicación los alumnos perciben con facilidad la operación multiplicación porque trasladan del trabajo con números naturales el significado de la multiplicación como suma reiterada.

Los dos tercios de los alumnos del grupo resuelven los dos problemas propuestos en la Ficha de trabajo nº 8. Los alumnos reconocen la multiplicación de una fracción por un número natural como la suma reiterada de la fracción porque han escrito de modo natural la simbolización usual de la operación:

$$\frac{2}{3} \text{ x } 12$$

Las dificultades han aparecido al intentar simplificar la fracción $\frac{24}{3}$ y referir la cantidad a la unidad (kilos). Esta actividad exige de los alumnos percibir la cantidad como constituida por 24 subunidades de 1/3 de kilo y agrupar la cantidad en grupos de 3 subunidades para expresarla en kilos.

Queda por estudiar si al cambiar la magnitud peso por la magnitud longitud la dificultad de los problemas decrece. Dos enunciados alternativos de la Ficha de trabajo nº 8 son:

a) Para hacer un trabajo manual necesitáis 12 trozos de alambre. Cada trozo de alambre mide $\frac{2}{3}$ de metro. ¿Cuántos metros de alambre necesitáis comprar en la ferretería?

b) Para hacer un trabajo manual necesitáis 36 trozos de alambre. Cada trozo de alambre mide $\frac{2}{3}$ de metro. ¿Cuántos metros de alambre necesitáis comprar en la ferretería?

Valoración
Los alumnos identifican con facilidad el significado de suma reiterada de una cantidad con la operación multiplicación de una fracción por un número natural, a pesar de que se trata del primer problema que resuelven y que modeliza la operación multiplicación de una fracción por un número natural.

Toma de decisiones
Durante una semana y media se van a interrumpir las clases porque los alumnos van a disfrutar el puente de la Constitución y, además, tienen prevista una excursión a una de las estaciones de esquí de los Pirineos para practicar dicho deporte.

El profesor propone, como trabajo para que los alumnos realicen en sus casas durante estos días festivos, la resolución de la Ficha de trabajo nº 9, con la intención de dotar de significado y automatizar el algoritmo de la operación multiplicación de una fracción por un número natural. La Ficha de trabajo nº 9 se compone de dos problemas que mostramos a continuación:

1º. ¿Cuántos litros de agua mineral hay en una caja que contiene 12 botellas de $\frac{3}{2}$ de litro?

2º. El paso de un adulto es $\frac{5}{6}$ de metro y el un niño es $\frac{3}{4}$ de metro. Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la diferencia entre el paso del adulto y el paso del niño?

b) ¿Cuántos metros avanza el adulto en 12 pasos?

c) ¿Cuántos metros avanza el niño en 12 pasos?

Día 15-12-2004 (Décima sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 9.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 10.

Ejecución
En la primera parte de la sesión, el profesor recoge la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 9. Todos los alumnos han resuelto el primer problema de la tarea, pero algunos indican que no han sabido resolver el segundo problema. Para evaluar el primer problema sale a la pizarra el alumno B05 que simboliza mal la operación y que escribe la respuesta correcta porque se ha ayudado de la respuesta que aporta otro compañero suyo.

Para resolver el segundo problema sale a la pizarra el alumno B10 que posee un nivel de comprensión alto. Este alumno explica a sus compañeros dos estrategias de resolución:
1º. realización de gráficos y medida del resultado
2º. realizar una suma de sumandos repetidos tantas veces como indica el factor.

En la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 10 cuyo enunciado es el siguiente:

Quieres colocar el rodapié en un pasillo que mide 8 metros. Para ello has comprado 25 losetas de longitud $\frac{3}{10}$ *de metro. Las losetas se colocan una a continuación de la otra.*

PRIMERA PREGUNTA

Con las losetas que has comprado, ¿qué longitud del rodapié puedes colocar?

SEGUNDA PREGUNTA

¿Qué longitud que te sobra o te falta para colocar el rodapié?

TERCERA PREGUNTA

¿Tienes bastantes losetas para colocar todo el rodapié? SI ☐ NO ☐

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
El 72% de los alumnos del grupo resuelven correctamente el primer problema de la Ficha de trabajo nº 9. Cinco alumnos (B02, B04, B05, B08 y B13) no saben encontrar la respuesta correcta o bien cometen errores en la simbolización de la operación.

Hay tres alumnos que confunden la simbolización de la equivalencia de fracciones con la operación multiplicación de una fracción por un número natural.

Los alumnos siguen teniendo dificultades para simplificar las fracciones. En este caso, bastantes alumnos operan:

$$\frac{3}{2}x12 = \frac{36}{2}$$

pero después no simplifican esta fracción.

Los alumnos identifican las situaciones de suma reiterada que modeliza la multiplicación de una fracción por un número natural, y saben calcular el resultado de esta operación. La mayoría de los alumnos han resuelto correctamente los dos primeros apartados del segundo problema de la Ficha de trabajo nº 9. Las dificultades han aparecido al interpretar el apartado 3º del problema que obliga a los alumnos a evaluar la cantidad de longitud que anda el padre, la que anda el niño y conjeturar cuantos pasos debe andar el niño para superar al padre. El porcentaje de éxito en el tercer apartado desciende hasta el 50%.

Los resultados obtenidos en la Ficha de trabajo nº 10 ponen de manifiesto que los alumnos identifican con facilidad el significado de la multiplicación de una fracción por un número natural como suma reiterada de la cantidad de magnitud que expresa la fracción. Aproximadamente, el 80% de los alumnos de la segunda etapas identifican la operación y escriben la representación simbólica de la misma. Los alumnos utilizan, de forma mayoritaria, representaciones simbólicas para calcular la solución del problema. Además, el 75% de los alumnos son capaces de conjeturar y aplicar correctamente la regla de cálculo computacional de esta operación a pesar de no recibir enseñanza explícita de esta regla.

Entre las limitaciones en la comprensión de los alumnos detectamos dos aspectos susceptibles de mejora: a) algunos alumnos obvian la unidad de medida (B01, B05, B07, B11, B14, y b) dos alumnos siguen confundiendo la simbolización de operación multiplicación con la de la equivalencia de fracciones (B07, B14).

Valoración
La pauta metodológica adoptada en la implementación de esta propuesta y que consiste en que los alumnos resuelven los problemas sin conocer previamente los algoritmos de cálculo de las operaciones se ha mostrado eficaz porque obliga a los escolares a poner en juego estrategias de resolución de problemas que pueden afrontar gracias al conocimiento que poseen de la suma de fracciones.

Toma de decisiones
El equipo investigador considera cubierto el objetivo de enseñanza de la multiplicación de una fracción por un natural y decide abordar la enseñanza de la operación división de una fracción por un natural.

Día 17-12-2004 (Undécima sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 11.

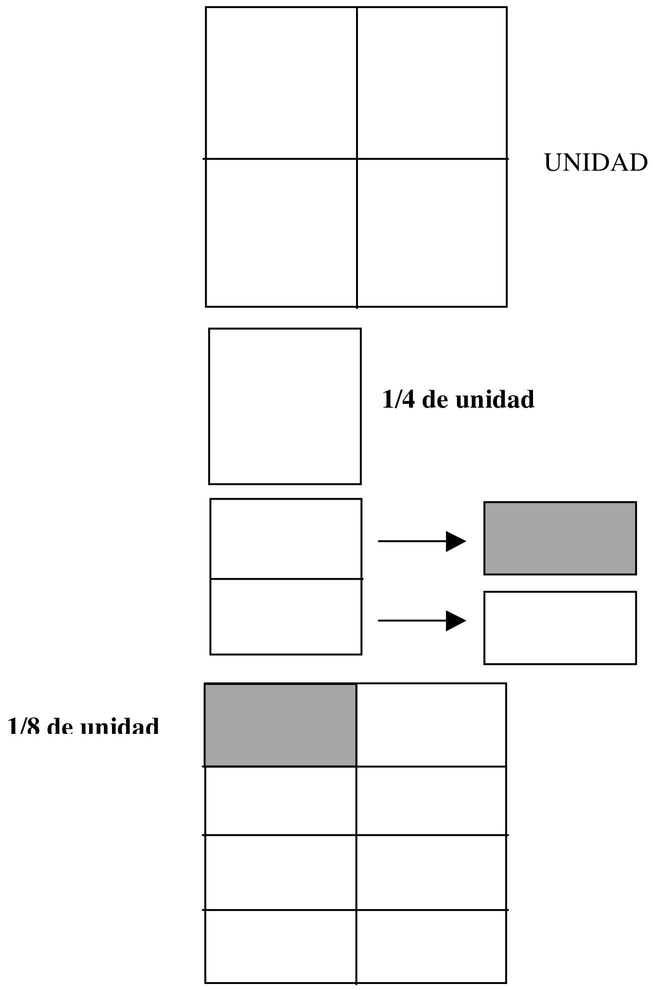
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 12.

Ejecución

El profesor propone a los alumnos resolver Ficha de trabajo nº 11 para introducir la operación división de una fracción entre un número natural:

Has cortado por la mitad, en dos partes iguales, un cristal de superficie $\frac{1}{4}$ *de unidad. ¿Cuánto mide la superficie de la mitad del cristal que has cortado?*

Antes de abordar la resolución de este problema, los alumnos reciben unidades cuadradas de superficie para construir un cristal de superficie 1/4 de unidad. Los alumnos saben resolver el problema aunque no identifican la operación división de una fracción por un número natural. Durante la evaluación conjunta de este problema el profesor utiliza representaciones gráficas para rememorar las acciones de medida que han realizado los alumnos:



Nuestra propuesta de enseñanza se caracteriza porque las reglas de cálculo que aplican los alumnos sean comprendidas por éstos. Es más, se pretende que las reglas las justifiquen los alumnos mediante las acciones que estos realizan con el modelo en el marco de la resolución de problemas. Por este motivo, el profesor decide verificar en el modelo de medida que "la mitad de 1/4 es 1/8". Del mismo modo presenta otra estrategia sustentada en la idea de reparto igualitario, utiliza identifica la operación e introduce la representación simbólica de la división:

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{2}{8} : 2 = \frac{2:2}{8} = \frac{1}{8} \text{ de unidad}$$

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 12 que plantea la resolución del siguiente problema:

Tienes una bola de plastilina que pesa $\frac{1}{2}$ *de unidad. Si con esta cantidad de plastilina construyes tres bolas iguales de plastilina. ¿Cuánto pesa cada una de las tres bolas de plastilina?*

Los alumnos no han utilizado material manipulativo en la resolución de la Ficha de trabajo nº 12 porque la cantidad de magnitud peso no les sugiere la utilización de materiales concretos. En estas condiciones, los alumnos apenas utilizan representaciones gráficas y, en su lugar, tienden a utilizan representaciones simbólicas de modo precipitado. En efecto, los alumnos utilizan la equivalencia de fracciones para obtener 3 subunidades de tamaño 1/6 de unidad con éxito desigual, porque los alumnos tan solo llevan resueltos dos problemas de división.

Antes de concluir la sesión de clase se procede a la evaluación conjunta de esta tarea. La alumna B11 que yerra en la simbolización de la operación sale a la pizarra y ejemplifica, con la ayuda del profesor, tres estrategias de resolución del problema: mediante gráficos, utilizando el fraccionamiento de la fracción unitaria y la idea de reparto igualitario.

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos del grupo tienen dificultades para gestionar el significado de la división asociado a la idea de reparto igualitario. En efecto, a pesar de que el profesor introduce esta estrategia de resolución al resolver el problema de la Ficha nº 11, la mayoría de los alumnos eluden esta estrategia cuando resuelven el problema de la Ficha nº 12. Cuando la cantidad a repartir o fraccionar n partes iguales es una fracción unitaria los alumnos prefieren utilizar el modelo de medida antes que el de reparto porque aquel es el que mejor conocen.

Los alumnos apenas utilizan materiales tangibles para representar las cantidades implicadas en los enunciados de los problemas y apenas utilizan representaciones gráficas y solo recurren a este tipo de representaciones cuando no disponen de ninguna otra estrategia.

El diseño de la propuesta de enseñanza prevé que los alumnos resuelvan ciertos tipos de problemas utilizando las estrategias que deseen, sin recibir indicación de la operación que soluciona el problema ni de la regla del algoritmo de cálculo de ésta operación. En el caso de la división de una fracción entre un número natural los alumnos reciben enseñanza de varias estrategias pero se les ofrece una regla algorítmica para calcular el resultado de la división. Es decir, deliberadamente, el profesor no institucionaliza la regla:

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{bxn}$$

Somos conscientes de la opción metodológica que hemos tomado, y que se concreta en retrasar hasta el próximo curso la institucionalización de la regla de cálculo de esta operación, dificulta la identificación de la operación. Sin embargo, como contrapartida favorece la puesta en juego de estrategias de resolución de problemas.

Cuando los alumnos resuelven los dos primeros problemas utilizan representaciones simbólicas, con éxito dispar, para expresar la idea de equivalencia de fracciones y para indicar la operación división porque, aproximadamente, la mitad de los alumnos son capaces de resolver los dos problemas.

Valoración
A pesar de que los escolares están más familiarizados con la estrategia sustentada en el modelo de medida antes que con la del modelo de reparto igualitario, los profesores enfatizan el uso de esta última estrategia por dos motivos: a) las sesiones próximas se va a introducir la fracción con el significado de cociente partitivo, y b) la estrategia de reparto igualitario se sustenta en la equivalencia de fracciones y, por lo tanto, refuerza este concepto fundamental del número racional.

Toma de decisiones
La secuencia se desarrolla según el plan previsto. No se proponen modificaciones de la propuesta didáctica.

Día 20-12-2004 (Duodécima sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 13.

2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 14.

Ejecución

En la primera parte de la sesión los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 13 que plantea la situación problemática siguiente:

De una tela de superficie $\frac{3}{2}$ *de unidad, quieres hacer 6 manteles iguales, sin que sobre ni falte tela. ¿Qué superficie tendrá cada uno de los manteles?*

Para proceder a la evaluación conjunta de esta tarea sale a la pizarra el alumno B09 que posee un nivel de comprensión alto pero que se ha confundido al expresar el resultado de la división.

En la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 14 que plantea la situación problemática siguiente:

Tienes una masa de pan de $\frac{5}{4}$ *de Kgrs. Con esta masa quieres hacer 10 panecillos iguales de modo que gastes toda la masa. ¿Cuánto pesará cada panecillo?*

Para proceder a la evaluación conjunta de esta tarea sale a la pizarra el alumno B07 que resuelve bien la tarea pero comete errores en la simbolización de la equivalencia de fracciones porque se ha pedido ayuda a uno de sus compañeros de aula.

Antes de concluir la sesión los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 15 con el encargo de que resuelvan, como trabajo para realizar en sus casas, el problema enunciado en la Ficha y que mostramos a continuación:

Un equipo de 4 atletas participa en una carrera de relevos que consiste en correr $\frac{2}{5}$ *de kilómetro. Si los cuatro atletas recorren la misma longitud, expresa con una fracción la cantidad de longitud que recorre cada uno.*

Asistencia de los alumnos

Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los alumnos de la Segunda Etapa comprenden el significado de la división de una fracción entre un número natural y saben encontrar el resultado de esta operación aunque no hayan recibido enseñanza del algoritmo convencional de la división.

La estrategia mayoritaria que utilizan los alumnos consiste en buscar una fracción equivalente que tenga como numerador una cantidad igual o múltiplo entero del divisor. En el caso del problema planteado en la Ficha de trabajo nº 13 algunos alumnos (B01, B03, B06, B08, B11) además de utilizar la equivalencia de fracciones, se ayudan de gráficos. Todos los alumnos, menos B02 y B09, resuelven correctamente el problema. En general, los alumnos dan muestras de comprender la estrategia basada en el reparto igualitario y son capaces de simbolizar, de forma adecuada, la equivalencia de fracciones. No obstante, persiste bastantes alumnos (B02, B04, B05, B07, B08, B09, B10, B13, B14, B15 y B17) la confusión entre la operación multiplicación de una fracción por un natural y la equivalencia de fracciones, porque indican que, además de la división, han utilizado la operación multiplicación.

Los alumnos obtienen buenos resultados cuando resuelven el problema que se enuncia en la Ficha de trabajo nº 14. Los dos tercios de los alumnos de la Segunda Etapa reconocen que la división es la operación que resuelve el problema y, además, este mismo porcentaje de alumnos encuentran la solución del problema utilizando el concepto de equivalencia de fracciones y el significado de reparto igualitario.

La gestión simbólica de la equivalencia de fracciones que realizan los escolares es un buen indicador para determinar la comprensión que poseen del concepto de fracción. En efecto, si estudiamos las respuestas de los alumnos que utilizan, de forma adecuada, la equivalencia de fracciones detectamos que el 86% de los alumnos de la Segunda Etapa identifican la operación división de una fracción entre un número natural. Los alumnos que gestionan de forma adecuada las representaciones simbólicas están más preparados para identificar la operación que resuelve el problema.

Conforme los alumnos del grupo han ido resolviendo las tareas observamos una mejor utilización de las representaciones simbólicas en la gestión de la equivalencia de fracciones y en la identificación de la operación división. Seis alumnos (B02, B04, B06, B07, B08 y B13) yerran al resolver el problema que se propone en la Ficha de trabajo nº 14.

Valoración
Los modelos de medida se muestran apropiados para introducir el significado y cálculo de la operación división de una fracción entre un número natural. Conviene tener en cuenta que las situaciones problemáticas planteadas son de cociente partitivo y que esta operación se ha enseñado, conjuntamente, desde los significados de medida y de cociente partitivo.

La pauta metodológica adoptada en la implementación de esta propuesta y que consiste en que los alumnos resuelven los problemas sin conocer previamente los algoritmos de cálculo de las operaciones se ha mostrado eficaz porque los alumnos son capaces de poner en juego, con éxito, estrategias de resolución de problemas.

El manejo de las representaciones simbólicas crea dificultades a los escolares. En particular, se detectan errores en la simbolización de la equivalencia de fracciones porque los alumnos confunden la técnica de obtención de fracciones equivalentes con la multiplicación de una fracción por un número natural.

Toma de decisiones
No se ha alcanzado plenamente el objetivo de que los alumnos de quinto curso de Educación Primaria efectúen representaciones simbólicas adecuadas, con fracciones, para resolver los problemas de división de una fracción por un natural. Se trata de un objetivo que precisa períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo y que hay que retomar en sexto curso de Educación Primaria. Proponemos continuar con la secuencia de enseñanza prevista y abordar, en sexto curso de Educación Primaria, los objetivos de institucionalizar los algoritmos de cálculo con fracciones y de reforzar las técnicas de cálculo de los algoritmos habituales.

No obstante, se decide dedicar una sesión más a reforzar el significado de las operaciones con fracciones y de las técnicas de cálculo de dichas operaciones. En la siguiente sesión se va a proceder a evaluar la Ficha de trabajo nº 15 y la Ficha de trabajo 15BIS que se compone de tres tareas cuyo enunciado se muestra a continuación:

1º. Para celebrar tu cumpleaños invitas a tus amigas a merendar pizza en tu casa. Sois 6 amigas, contándote tú. ¿Cuántas pizzas deberás comprar si quieres servir $\frac{2}{3}$ de pizza a cada una?

2º. Tres hermanos van a cenar. Tienen una tortilla de patata. Como dos de los hermanos se retrasan el otro hermano se sienta a la mesa y come $\frac{1}{4}$ de tortilla. Los otros dos hermanos deciden repartirse, en partes iguales, la cantidad sobrante. Se pregunta:

a) ¿Cuánta tortilla comerá cada uno de los hermanos que se han retrasado?
b) ¿Comen todos la misma cantidad de tortilla?. ¿Cuánta tortilla comen unos más que el otro?

3º. Jaime come $\frac{1}{3}$ de tarta y su hermana Ángela la cuarta parte del resto. Se pregunta:

a) ¿Cuánta tarta come Ángela?
b) ¿Cuánta tarta comen entre los dos hermanos?

Los alumnos reciben las tarjetas de evaluación Fichas de trabajo nº 15 y nº 15BIS con el encargo de que resuelvan las tareas que se proponen como trabajo para realizar en sus casas y que las traigan cumplimentadas a la siguiente sesión de clase.

Día 21-12-2004 (Décimo tercera sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 15.
2º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 15BIS.

Ejecución

Comienza la sesión de clase y el profesor recoge la Ficha de trabajo nº 15 procede a evaluar la tarea. Uno de los alumnos que no ha traído la tarea resuelta, B01, sale a la pizarra y resuelve el problema utilizando representaciones gráficas y representaciones simbólicas.

Después, el profesor recoge la Ficha de trabajo nº 15BIS. Además, del alumno B01, otros cinco alumnos (B02, B04, B07, B08 y B16) dicen que no la traen resuelta la Ficha porque no han sabido resolver los problemas que componen la tarea. Los alumnos B04, B07 y B08 salen a la pizarra para evaluar la Ficha de trabajo nº 15BIS y, con la ayuda del profesor, resuelven los tres problemas que componen la tarea.

Antes de concluir la sesión de clase los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de una nueva tarea con el encargo de que resuelvan, como trabajo para realizar en sus casas, durante las fiestas de navidad. Mostramos a continuación los enunciados de los problemas que componen esta tarea:

1º. Un comerciante de telas ha vendido la mitad de una pieza de tela y después vende la quinta parte de la misma pieza.

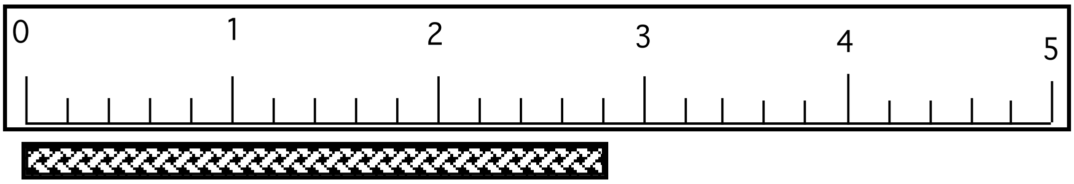
a) ¿Qué parte de la pieza ha vendido?

b) ¿Qué parte de la pieza le queda por vender?

c) Si la pieza tiene 20 metros, ¿qué longitud de tela queda por vender?

2º. Un pescadero vende los 3/4 de la mercancía y le quedan 15 Kgrs. por vender. ¿Cuántos kgrs. de mercancía tenía?

3º. Con la ayuda de la siguiente regla, mide la longitud de la cuerda:



Debes expresar el resultado de la medida con una fracción. Te recuerdo que la unidad es el segmento que va de 0 a 1.

4ª. Halla la suma: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$

Asistencia de alumnos

Asisten todos los alumnos.

Aspectos actitudinales

A pesar de ser este el último día lectivo del trimestre los alumnos han tenido buena actitud. No obstante, el inminente comienzo del período vacacional hace que el rendimiento de los alumnos baje considerablemente cuando se les encarga que realicen alguna tarea en sus casas.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los tres problemas que se plantean en la Ficha de trabajo nº 15BIS y el problema de la Ficha de trabajo nº 15 se resuelven con las operaciones de multiplicación y/o división de una fracción por un número natural. El problema nº 3 de la Ficha de trabajo nº 15BIS ha presentado mayores dificultades a los alumnos porque no han identificado la operación división. En la propuesta didáctica la mayoría de las situaciones trabajadas son de reparto; en cambio, la acción que plantea este problema es de disminución de la cantidad en partes iguales: “hacer la cuarta parte de una cantidad”. Los alumnos identifican la operación división con mayor facilidad en situaciones de reparto. Posiblemente, los alumnos hubieran obtenido mejores resultados si en el enunciado del problema se evoca una acción de reparto:

“Carmen come $\frac{1}{3}$ de tarta y el resto de la tarta lo reparte entre cuatro amigos. ¿Cuánta tarta come cada una de las amigos de Carmen?”

La formulación del problema nº 3:

3º. Jaime come $\frac{1}{3}$ *de tarta y su hermana Ángela la cuarta parte del resto. Se pregunta:*
a) ¿Cuánta tarta come Ángela?
b) ¿Cuánta tarta comen entre los dos hermanos?

plantea numerosas dificultades a los alumnos. Destacamos algunas de ellas:

a) en la comprensión del enunciado: "la cuarta parte del resto"
b) en la identificación de la operación porque no posee una estructura de reparto.
c) en el reconocimiento de la unidad (la tarta) y
d) en el calculo operatorio.

<u>Valoración</u>
A modo de resumen, exponemos algunas conclusiones parciales referidas a la enseñanza de las operaciones con fracciones.

En general, los alumnos han alcanzado los siguientes objetivos durante la fase de enseñanza referida a las operaciones con fracciones:

1º conceptualizan la fracción y sus términos como resultado de una medida.

2º comprenden que las fracciones equivalentes sirven para expresar de diferentes formas la misma cantidad de magnitud.

3º saben obtener fracciones equivalentes a una dada

4º identifican las acciones que justifican la existencia de la operaciones de suma, resta, multiplicación por un natural y división por un natural.

5º reconocen las situaciones en las que deben utilizar la equivalencia de fracciones. Por ejemplo, cuando:

a) deben comparar cantidades de magnitudes expresadas con diferentes subunidades de distinto tamaño.

b) deben sumar o restar cantidades de magnitudes expresadas con diferentes subunidades de distinto tamaño

c) deben expresar el resultado de la operación con una representación fraccionaria más sencilla.

La simplificación de fracciones plantea mayores dificultades porque en la secuencia de enseñanza hemos justificado la equivalencia a través de fraccionamientos, cada vez más finos, de la unidad. Con esta introducción los alumnos obtienen fracciones equivalentes con numeradores y denominadores múltiplos de los iniciales. El proceso de simplificación va en sentido contrario y consiste en agrupar fraccionamientos y número de subunidades, es decir, en dividir numerador y denominador por un divisor común. Por este motivo, la técnica de la simplificación les resulta menos familiar y, por lo tanto, susceptible de cometer mayor número de errores. En sexto curso se va incidir en este procedimiento cuando los alumnos hayan estudiado conceptos de divisibilidad de naturales.

d) deben repartir cantidades de magnitud, expresada por a subunidades de tamaño $\frac{1}{b}$, en un número de partes iguales (c) y el número de subunidades (a) no es múltiplo del número de partes iguales (c). Con símbolos: $\frac{a}{b} : c$

6º conocen y saben aplicar los procedimientos de cálculo de las cuatro operaciones con fracciones. No obstante, hemos detectado inseguridades en los automatismos de cálculo por falta de ejercitación. En sexto curso se deberá reforzar las destrezas computacionales con fracciones.

Durante la implementación de la propuesta hemos detectados las siguientes dificultades:

1º Utilización de la equivalencia de fracciones en situaciones inadecuadas, fundamentalmente cuando tienen que multiplicar una fracción por un número natural. El empleo habitual de la estrategia basada en la equivalencia para realizar otras operaciones les lleva a pensar que esta estrategia es adecuada para multiplicar una fracción por un número natural

2º Confusión entre la operación multiplicación o división y la técnica de obtención de fracciones equivalentes. Acontece esta dificultad a pesar de que, en la propuesta de enseñanza, hemos simbolizado de forma diferente las operaciones y la relación de equivalencia. Concluimos que el trabajo con representaciones simbólicas es complejo y de gran dificultad conceptual.

3º La simbolización del cálculo de la división presenta mayores dificultades que en el caso de la multiplicación. La estrategia mayoritaria que utilizan los alumnos consiste en buscar una fracción equivalente que tenga como numerador una cantidad igual o múltiplo entero del divisor. Esta estrategia es coherente con el significado de la división partitiva.

Hemos detectado claramente la influencia, en este caso perniciosa, de la división entera de números naturales. Por fortuna, son muy pocos los alumnos que proceden del siguiente modo:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3:2}{4} = \frac{1}{4}$$

4º En las tareas de repaso de operaciones con fracciones hemos introducido, deliberadamente, un tipo de problemas típicos de la secuencia de enseñanza de la fracción siguiendo el modelo parte- todo. Estos problemas no son propiamente de medida porque la magnitud no está bien definida (se habla de cantidad de tarta, pizza, de la pieza de tela) ni tampoco se especifica cual es la unidad de medida (una tarta, una pizza, una pieza de tela de tela).

Observamos que desde el modelo medida los problemas aritméticos con fracciones les resultan más sencillas a los escolares porque éstos reconocen con facilidad la magnitud y la unidad de medida. Concluimos que la transferencia entre los significados de los modelos de medida y de parte-todo no es inmediata. Ahora bien, pensamos que esta nueva tipología de problemas puede ser abordada desde el modelo medida si se precisa, con claridad, qué magnitud se trabaja y cuál es la unidad de medida.

Durante la implementación de la propuesta didáctica aconsejamos tres actuaciones que hemos incorporado en esta segunda etapa experimental:

1º Resolver las situaciones problemáticas con gráficos y material (en los casos que sea posible); y después traducir al lenguaje simbólico las acciones realizadas de modo gráfico o con material.

2º Mantener simbolizaciones diferenciadas en la obtención de fracciones equivalentes a una dada, del tipo:

$$\overset{\times 2}{}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$
$$\underset{\times 2}{}$$

3º Justificar los procedimientos de cálculo algorítmico de las operaciones desde el modelo de aprendizaje, es decir, sobre la base de las acciones que involucran la resolución del problema. Sirva de ejemplo la división de una fracción entre un número natural. La estrategia de resolución que ha aparecido en el aula, en las tareas de división partitiva, aconseja que los alumnos no reciban enseñanza del algoritmo tradicional de la división de una fracción entre un número natural. El procedimiento que se propone es el siguiente:

> *"Para dividir una fracción por un número natural debes hallar una fracción equivalente a la dada que tenga como numerador un número de subunidades que pueda ser repartido por completo en tantas partes como indica el número natural, y después debes realizar la división recordando la nueva medida de las subunidades"*

Toma de decisiones.

Hemos concluido las sesiones de enseñanza referidas a las operaciones con fracciones desde el modelo medida. En la próxima sesión, a la vuelta de las vacaciones de navidad, vamos a introducir un nuevo significado de la fracción: como resultado de un reparto igualitario.

Día 10-1-2005 (Décimo cuarta sesión)

Plan previsto.

1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo de refuerzo del significado y cálculo de las operaciones con fracciones.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 16.
3º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 17.

Ejecución

El profesor pregunta a los alumnos si han traído resuelta la Ficha de trabajo de refuerzo del significado y cálculo de las operaciones con fracciones. Varios alumnos afirman haberla dejado olvidada en sus casas. El profesor les indica que deben traerla a la sesión de clase del próximo día y que entonces se procederá a su evaluación conjunta en el aula.

A continuación los alumnos escriben en sus cuadernos el enunciado de la actividad siguiente:

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 2 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

El profesor pregunta: "¿Puede hacerse este reparto?"

El profesor recordará que, a veces, no es posible repartir en partes iguales determinadas cantidades de magnitud. Un ejemplo de esta situación ocurre cuando se desea formar dos grupos para jugar al "balón prisionero" y hay un número impar de personas. Pero cuando las cantidades de magnitud se pueden fraccionar entonces la división de números naturales no resuelve la situación porque podemos dar el resultado exacto de un reparto utilizando fracciones.

Después orienta: "Os recuerdo que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra y que las barras se pueden fraccionar"

Divide la pizarra en tres partes iguales por dos líneas verticales, y a la izquierda y a la derecha escribe:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO
Hay 3 barras y 2 niños		Cada niño recibe $\boxed{}$ barra

Simbolización de los tres momentos de reparto:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO
3 : 2	$3 : 2 = \frac{3}{1} : 2 = \frac{6}{2} : 2 = \frac{3}{2}$	Cada niño recibe $\frac{3}{2}$ de barra

Hemos decidido estudiar las limitaciones y potencialidades de la simbolización del reparto a:b, en vez de utilizar la caja de la división. Realizamos esta modificación para separar el proceso de reparto de la técnica de la división entera que conocen los alumnos. Además, en esta Segundo Etapa de la experimentación hemos incidido especialmente en el procedimiento de cálculo de una fracción por un número natural; y hemos utilizado la simbolización "de los dos puntos".

Sobre el proceso de reparto se recuerda a los alumnos que fraccionamos TODAS las barras de regaliz, es decir, que realizamos el reparto en UNA SOLA FASE.

También mostramos el proceso de reparto con representaciones gráficas. Sin embargo, los alumnos no reciben, de momento, ninguna te explicación sobre los significado de los términos de la fracción. En su lugar reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 16 con la consigna de cumplimentarla de inmediato. En sesiones posteriores, el profesor institucionalizará los dos significados de la fracción y de los términos de ésta.

Como reparto:
1º La fracción indica el resultado del reparto. Es la cantidad de barra de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto.

2º El numerador indica el número de barras que había antes de hacer el reparto.

3º El denominador indica el número de personas que participan en el reparto.

Como medida:
1º El denominador indica el tamaño de la subunidad con la que mide una determinada cantidad de magnitud mediante un número entero de subunidades.

2º El numerador indica el número de las subunidades que componen la cantidad de magnitud.

Más adelante, conviene que el profesor realice una intervención general para incidir en los siguientes aspectos:

1º El atributo o característica que nos interesa de las barras es la longitud. La magnitud que consideramos es la longitud de las barras de regaliz.

2º La unidad de medida es la longitud de una de las barras de regaliz. Todas las barras tienen la misma longitud.

3º El reparto lo realizamos en una sola fase, es decir, se fraccionan TODAS las barras, a la vez, en partes iguales.

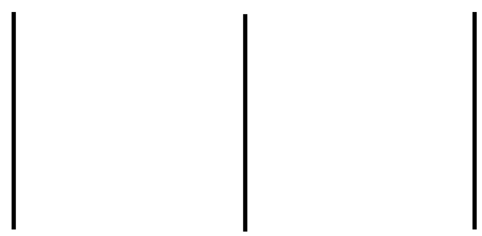
4º La fracción nos indica la cantidad de longitud de regaliz que recibe cada persona. El numerador y el denominador de la fracción se pueden definir con el significado de medida pero, si observamos las condiciones iniciales del reparto, vemos que el numerador es el número de barras de regaliz y el denominador el número de personas que participan en el reparto.

En la segunda parte de la sesión los alumnos resulten la Ficha de trabajo nº 17 que tiene el mismo diseño que la Ficha nº 16 y cuyo enunciado es el siguiente:

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 4 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:



2. Completad la tabla siguiente:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO
Hay 3 barras para 4 personas		RESULTADO DEL REPARTO
3 : 4		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ____

El denominador indica ____

Asistencia de alumnos
Asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión.
Los alumnos comprenden el significado del reparto. Los alumnos encuentran, con facilidad, el resultado de los repartos igualitarios que plantean las Fichas de trabajo nº 16 y nº 17.

A pesar de que los alumnos no han recibido enseñanza del significado de los términos de la fracción, éstos son capaces de dar respuestas atinadas sobre el significado de la fracción como resultado de un reparto. En cuanto al significado de la fracción y de los términos de la fracción que expresa el resultado del reparto, los resultados obtenidos por los alumnos indican que, en general, saben interpretar de forma adecuada las componentes de la representación fraccionaria. No obstante, hemos detectado tres tipos de deficiencias en las respuestas de los escolares, a saber:

- interferencias del entorno familiar de los alumnos que llevan a éstos a interpretar el numerador desde el significado parte-todo. Por ejemplo, el alumno B02 escribe "las partes que hemos cogido"
- incorrecciones en la formulación del significado de los términos de la fracción como resultado de una medida. Por ejemplo, el alumno B06 interpreta el numerador como "lo que tocan a los dos niños", y
- escasa presencia de formulaciones de los significados de los términos de la fracción a partir de las condiciones iniciales del reparto.

Los alumnos han tenido dificultades para simbolizar el proceso de reparto que plantea las Fichas de trabajo nº 16 y nº 17 porque son las primeras tareas en la que la fracción aparece como resultado de un reparto.

Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la Fichas de trabajo nº 17 muestra un nivel de comprensión inestable que es típico en los momentos iniciales de la secuencia de enseñanza. El 50% de los alumnos tiene un nivel de comprensión alto. Estos resultados quedan reflejados en la siguiente tabla:

Indicadores de comprensión	*Número de alumnos*
no sabe repartir con símbolos ni expresar correctamente los significados del numerador y del denominador	**5** (B02, B05, B07, B14 y B18)
sabe repartir con símbolos pero no expresa correctamente los significados del numerador y del denominador	**4** (B01, B08, B11 y B16)
sabe repartir con símbolos y expresar correctamente los significados del numerador y del denominador	**9** (B03, B04, B06, B09, B10, B12, B13, B15 y B17)

Valoración
Los alumnos de quinto curso dan muestras de comprender el proceso de reparto igualitario porque entienden que necesitan medir la cantidad de magnitud longitud que recibe cada persona y reconocen la necesidad de fraccionar las barras (tiras de papel) en partes iguales como una actividad previa y necesaria para poder medir y repartir.

En cuanto al significado de la fracción y de los términos de la fracción que expresa el resultado del reparto, los alumnos saben interpretar de forma adecuada los términos de la representación fraccionaria, pero tienden a expresarlos con ideas de medida antes que con ideas de reparto. En esta Segunda Etapa Experimental se toma la decisión de que los profesores de aula no institucionalicen los significados de los términos de la fracción hasta que algunos alumnos consigan interpretar los términos desde los significados de medida y de cociente partitivo. En estas condiciones los alumnos de la Segunda Etapa no se percatan de que el numerador indica el número de barras y el denominador el número de personas.

Las dificultades que se observan en los escolares para expresar los términos de la fracción en función de las condiciones iniciales del reparto tienen su origen en el trabajo que realizan en el modelo de aprendizaje. El hecho de que los alumnos estén más familiarizados con el modelo de medida les lleva a interpretar la fracción como el resultado del producto final y a olvidarse de las condiciones iniciales existentes en el momento anterior a la realización del reparto.

El modelo de cociente partitivo con la magnitud longitud y la técnica de reparto en una sola fase ha funcionado bien en la experimentación de aula. Los dos tercios de los alumnos de la Segunda Etapa utilizan correctamente representaciones simbólicas para expresar con una fracción el resultado del reparto igualitario.

Día 11-1-2005 (Décimo quinta sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 18.

2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 19.

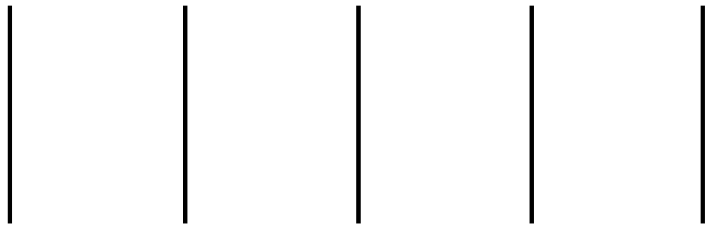
Ejecución

En la primera parte de la sesión los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 18 que plantea la situación problemática siguiente:

Vais a repartir 5 barras de regaliz entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:



2. Completad la tabla siguiente:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO
Hay 5 barras para 3 personas		RESULTADO DEL REPARTO
5 : 3		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ____

El denominador indica ____

En la segunda parte de la sesión los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 19 que plantea una situación problemática de reparto análoga a la de la Ficha anterior, solo que ahora los alumnos deben realizar el siguiente reparto igualitario:

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 5 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

Cuando los alumnos resuelven esta Ficha de trabajo se procede a la evaluación conjunta de la tarea. La alumna B14 que no sabido encontrar la fracción que expresa el resultado del reparto sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor y de su compañeros, resuelve la tarea.

Asistencia de alumnos

Asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Para analizar los resultados obtenidos por los alumnos al resolver las Fichas de trabajo nº 18 y nº 19 utilizamos dos unidades Análisis de la Comprensión del Contenido:

- Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la fracción que expresa el resultado del reparto igualitario y de los términos de la fracción, y
- Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto.

En la primera Unidad de Análisis consideramos los siguientes criterios:

1.- Interpretación errónea o inadecuada de las componentes del reparto

2.- Interpretación errónea o inadecuada de una de las componentes del reparto

3.- Interpretación correcta o bastante adecuada de las componentes del reparto.

En la segunda Unidad de Análisis consideramos los siguientes criterios:

1.- No encuentra la fracción, escribe una fracción incorrecta o es correcta pero no la justifica.

2.- Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas adecuadas y no utiliza representaciones simbólicas o son inadecuadas.

3.- Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas y representaciones simbólicas adecuadas.

Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la fracción	*Ficha de trabajo nº 18*	*Ficha de trabajo nº 19*
Interpretación errónea o inadecuada de las componentes del reparto	**0**	**2** (B05, B07)
Interpretación errónea o inadecuada de una de las componentes del reparto	**6** (B01, B02, B04, B07, B13 y B18)	**4** (B01, B02, B08 y B14)
Interpretación correcta o bastante adecuada de las componentes del reparto	**12** (B03, B05, B06, B08, B09, B10, B11, B12, B14 B15, B16 y B17)	**12** (B03, B04, B06, B09, B10, B11, B12, B13, B15, B16, B17 y B18)

Utilización de representaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto	*Ficha de trabajo nº 18*	*Ficha de trabajo nº 19*
No encuentra la fracción, escribe una fracción incorrecta o es correcta pero no la justifica	**5** (B02, B06, B13, B14 y B18)	**5** (B02, B05, B07, B14 y B18)
Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas adecuadas y no utiliza representaciones simbólicas o son inadecuadas	**1** (B05)	**0**
Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas y representaciones simbólicas adecuadas	**12** (B01, B03, B04, B07, B08, B09, B10, B11, B12, B15, B16 y B17)	**13** (B01, B03, B04, B06, B08, B09, B10, B11, B12, B13, B15, B16 y B17)

Valoración

Los alumnos de quinto curso obtienen resultados análogos en las Fichas de trabajo nº 18 y nº 19. Los dos tercios de los alumnos utilizan representaciones simbólicas adecuadas para expresar, con una fracción, el resultado de repartos igualitarios. El hecho de que el número de barras de regaliz sea mayor o menor que el número de personas que participan en el reparto no influye en los resultados obtenidos por los alumnos, es decir, los alumnos utilizan el mismo procedimiento aunque la fracción que indica el reparto sea propia o impropia.

Los alumnos poseen una comprensión limitada del significado e reparto porque cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 18 que plantea el reparto de “5 barras para 3 niños” no ponen en juego nuevas estrategias como la del reparto en varias fases que consiste en repartir una barra a cada niño y, después, repartir las 2 barras sobrantes.

A pesar que la secuencia de enseñanza funciona según lo previsto, debemos indicar que la idea de reparto es más compleja que la de medida de una cantidad continua. El caso de la alumna B18 que posee un nivel de comprensión alto confirma este hecho: esta alumna mantiene en estas tareas errores persistentes como consecuencia de que considera como unidad de medida la cantidad de longitud de todas las barras que se desean repartir en lugar de la cantidad de longitud de una barra.

Toma de decisiones
Dado que los alumnos obtienen resultados aceptables en las Fichas de búsqueda de la representación fraccionaria el Equipo de Investigación toma la decisión de plantear, en la siguiente sesión, la última tarea de búsqueda de la representación fraccionaria, y pasar a estudiar el concepto de equivalencia asociado a la fracción como resultado de repartos igualitarios

Día 13-1-2005 (Décimo sexta sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 20.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 21.

Ejecución
En la primera parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 20 que plantea una situación problemática de reparto análoga a la de las Fichas resueltas en las dos últimas sesiones, solo que ahora los alumnos deben realizar el siguiente reparto igualitario:

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

Cuando los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 20 sale a la pizarra el alumno B07 que no sabido encontrar la representación fraccionaria correcta. Este alumno, con la ayuda del profesor escribe la representación simbólica del reparto y los significados del numerador y del denominador de la fracción.

Antes de proceder a la resolución de la Ficha de trabajo nº 21 el profesor pregunta si todos los alumnos han resuelto la tarea de refuerzo de las operaciones con fracciones que se les propuso como trabajo para casas durante las fiestas de Navidad. Dado que son muy pocos los alumnos que no han traído resuelta la Tarea de refuerzo procedemos a su evaluación conjunta. En general, los alumnos tienen dificultades para resolver los dos primeros problemas cuyos enunciados recordamos:

1º. Un comerciante de telas ha vendido la mitad de una pieza de tela y después vende la quinta parte de la misma pieza.

a) ¿Qué parte de la pieza ha vendido?
b) ¿Qué parte de la pieza le queda por vender?
c) Si la pieza tiene 20 metros, ¿qué longitud de tela queda por vender?

2º. Un pescadero vende los 3/4 de la mercancía y le quedan 15 Kgrs. por vender. ¿Cuántos kgrs. de mercancía tenía?

Las dificultades de los alumnos se concretan en la incapacidad para identificar la unidad de medida. Pensamos que la estructura semántica del primer problema se asemeja más al trabajo con el modelo parte-todo que con el modelo medida, dado que la unidad de medida aparece desdibujada al no tratarse de unidades convencionales del Sistema Métrico Decimal. Obsérvese que el primer problema la unidad es la ”pieza de tela” en lugar de “metros de tela”.

El problema nº 2, tiene la dificultad añadida de los alumnos deben reconstruir la unidad de medida que el peso de toda la mercancía. Concluimos que la transferencia entre los significados de los modelos de medida y de parte-todo no es inmediata ni, mucho menos, evidente.

Los problemas que componen esta Tarea de refuerzo se corrigen durante la sesión de clase. No queda tiempo para plantear a los alumnos la resolución de Ficha de trabajo nº 21 que se trabajará al comienzo de la siguiente sesión de clase.

Asistencia de alumnos
Asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos saben encontrar el resultado del reparto de “*3 barras de regaliz entre 3 niños*”. Tan solo dos alumnos (B07 y B08) no encuentran la respuesta correcta. Los alumnos aportan una amplia variedad de soluciones en la Ficha de trabajo nº 20, que mostramos en la siguiente tabla:

Resultado del reparto en la Ficha nº 20	*Nº de alumnos*
1 barra	**5** B09, B11, B12, B13, B18
1/1 barra	**7** B02, B03, B05, B06, B10, B14, B16
3/3 barra	**4** B01, B04, B15, B17
1/3 barra	**1** B07
No responde	**1** B08

En general, los alumnos utilizan representaciones simbólicas adecuadas para encontrar el resultado del reparto. Se han observado tres técnicas:

a) la división de naturales. Estos alumnos (B01, B02, B05, B14) utilizan la caja convencional de la división para calcular 3 : 3

b) Fraccionar las 3 barras en tres partes iguales. Tres alumnos (B04, B15 y B17) fraccionan en tercios y escriben:

$$\frac{9}{3} : 3 = \frac{3}{3} = 1$$

c) El grupo más numeroso de alumnos (B03, B06, B09, B10, B11, B12, B13, B16 y B18) opta por no fraccionar ninguna de las tres barras. Esto es lo que explica el alumno B10 cuando escribe "no hace falta fraccionar" y simboliza:

$$\frac{3}{1} : 3 = \frac{1}{1} = 1$$

Las dos última técnicas se basan en la idea de fraccionamiento de la unidad, mientras que la primera los alumnos se sirven del conocimiento de la división de naturales como operación que modeliza las situaciones de reparto.

Los alumnos conocen el significado de la fracción y de los términos de ésta. Sin embargo, las características particulares de la tarea en la que se reparten 3 barras de regaliz entre 3 niños pone de manifiesto un aspecto novedoso: la mayoría de los alumnos no intentan dar un significado coherente a los términos de la fracción que obtienen como resultado del reparto. Los alumnos que aporta como resultado del reparto $\frac{1}{1}$ de barra optan por escribir frases esteriotipadas para expresar el significado del denominador. Solo el alumno B10 indica claramente que " no hace falta fraccionar".

Valoración

Conforme los alumnos resuelven tareas de reparto realizadas en una sola fase se observa que mejora la expresión de los significados del numerador y del denominador. Los escolares prefieren explicar los términos de la fracción con la idea de medida antes que con el significado de reparto. La mayoría de los alumnos asocia al denominador de la fracción que expresa el resultado del reparto "el número de partes iguales en que se fracciona la unidad", y al numerador "el número de partes que das a cada niño".

Toma de decisiones.

Para reforzar la técnica de reparto en una sola fase y profundizar en el concepto de equivalencia de fracciones proponemos la resolución de la Fichas de trabajo nº 21 y nº 22. En concreto la ficha nº 21 plantea realizar los repartos "2 barras entre 3 niños" y "4 barras entre 6 niños" y comparar ambos repartos. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 21:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA FICHA 21. Fecha: ______________

"Vais a repartir 2 barras de regaliz entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?"

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para resolver la tarea:

☐ He realizado el siguiente dibujo:

☐ He utilizado símbolos:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO RESULTADO

"Vais a repartir 4 barras de regaliz entre 6 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?"

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para resolver la tarea:

☐ He realizado el siguiente dibujo:

☐ He utilizado símbolos:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO RESULTADO

Día 14-1-2005 (Décimo séptima sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 21.

2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 22.

Ejecución

En la primera parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 21 que refuerza la técnica del reparto en una sola fase e introduce el concepto de equivalencia de fracciones asociado al significado de cociente partitivo. Los alumnos han solicitado de los profesores de aula numerosas explicaciones porque la Ficha nº 21 tiene un formato diferente que el de las Fichas precedentes.

Un grupo reducido de alumnos tiene dificultades para simbolizar correctamente los procesos de reparto. Los alumnos comprenden que los dos repartos que plantea esta tarea iguales porque en ambos repartos los participantes reciben la misma cantidad de regaliz. Para ejemplificar este resultado el profesor solicita a dos alumnos que salgan a la pizarra y que se repartan, de modo igualitario, tres tiras de papel. Después solicita la colaboración de otros dos alumnos para que se repartan otras tres tiras de papel. Finalmente, los cuatro alumnos se reparten seis tiras de papel; y los alumnos observan que los repartos “2 barras entre 3 niños” y “4 barras entre 6 niños” son iguales porque en ambos se reciben la misma cantidad de longitud, es decir , en los dos repartos las personas implicadas reciben la misma cantidad de tira de papel: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ de barra.

En la segunda parte de la sesión de clase los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de Ficha nº 22, que tiene un formato análogo, a la Ficha nº 21 y cuya primera pregunta propone realizar el reparto de "6 barras de regaliz entre 4 niños". El proceso de reparto deben hacerlo con gráficos y con símbolo. Cuando los alumnos resuelven este reparto, los alumnos afrontan la resolución de la segunda pregunta que propone realizar el reparto de "9 barras de regaliz entre 6 niños". Cuando los alumnos terminan el profesor les pregunta si en los dos repartos los niños reciben la misma cantidad de regaliz y que expliquen si esto es posible. Antes de concluir la sesión de clase se procede a realizar la evaluación conjunta de esta Ficha de trabajo.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten todos los alumnos.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los resultados obtenidos por los alumnos de quinto curso indican una mejora en la representación gráfica y simbólica del proceso del reparto efectuado en una fase. Los dos tercios de los alumnos saben expresar con una fracción el resultado de los repartos equivalente utilizando gráficos o representaciones simbólicas.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 22 son análogos a los de las tareas precedentes: 12 alumnos (B01, B03, B06, B07, B09, B10, B11, B12, B13, B15, B16, B17) utilizan representaciones simbólicas adecuadas, mientras que 6 alumnos (B02, B04, B05, B08, B14 y B18) cometen errores en las representaciones simbólicas, a pesar de que la mayoría escriben las fracciones correctas. En efecto, a lo largo de las últimas tareas se mantiene el porcentajes de éxito se mantienen pero aumenta la comprensión de los alumnos. Se puede observar como los alumnos B07, B10 y B16 que poseen diferentes niveles de comprensión optan por fraccionar las barras en dos partes iguales de modo que obtienen como solución de los repartos de "6 barras entre 4 niños" y de "9 barras entre 6 niños" la misma fracción 3/2 de barra.

Las representaciones gráficas que efectúan los alumnos son poco precisas. Todos los alumnos indican el fraccionamiento de las unidades o barras pero no designan con letras o símbolos a los participantes del reparto, ni tampoco marcan las cantidades de longitud que recibe cada uno de ellos. Solo los alumnos B07, B10, B11 y B16 realizan representaciones gráficas adecuadas cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 22. El Equipo investigador

<u>Valoración</u>
El modelo de cociente partitivo ha funcionado bien en la propuesta didáctica porque los alumnos son capaces de encontrar la representación fraccionaria que expresa el resultado del reparto. En este modelo el concepto de equivalencia de fracciones aparece en el aula de modo natural asociado a la igualdad de cantidad de magnitud que resulta de realizar un reparto igualitario.

La enseñanza de la fracción como resultado del reparto igualitario realizado en una sola fase ha sido eficaz porque los escolares dotan a la representación fraccionaria de un nuevo significado. Ahora bien, ha sido necesario dedicar cuatro sesiones de aula para ejercitar la técnica del reparto en una sola fase para conseguir que los dos tercios de los alumnos utilicen representaciones simbólicas adecuadas para reproducir la técnica del reparto en una fase. Poco a poco, durante estas cuatro sesiones los alumnos asignan a los términos de la fracción del significado de cociente partitivo a través de las condiciones iniciales del reparto porque, inicialmente, los alumnos se muestran reacios a aceptar este nuevo significado de la fracción dado que tienden a utilizar el significado de medida que es el único que conocen hasta este momento.

En general, los alumnos no se percatan de que el resultado del reparto es el mismo si aumentan o disminuyen el mismo número de veces el número de barras a repartir y el número de participantes en el reparto.

<u>Comentarios sobre las modificaciones efectuadas en la Segunda Etapa con respecto a la Propuesta implementada en la Primera Etapa:</u>
En esta Segunda Etapa de la Experimentación de la propuesta para quinto curso hemos introducido algunas variaciones que vamos a comentar:

1º No hemos utilizado las cañas de un metro y en su lugar hemos utilizado tiras de papel de un metro que simulan las barras de regaliz. Este material es más manejable, permite de forma rápida en fraccionamiento en partes iguales, y no distrae a los escolares.

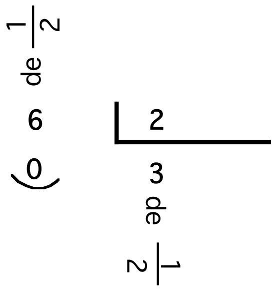
2º Hemos incidido en la ubicación temporal de las cantidades que intervienen en el reparto:

a) lo que recibe cada participante, <u>después</u> de realizar el reparto.

b) lo que tenían <u>antes</u> de comenzar el reparto.

3º Mayor atención y esmero en las representaciones gráficas utilizadas por los escolares. A los participantes en los repartos les hemos asignado letras (A, B, C, ….) de modo que los alumnos visualizan de forma gráfica la cantidad que recibe cada participante. No obstante, los alumnos se muestran reacios a utilizar esta notación para designar a las personas que participan en los repartos.

4º Utilización de la notación "dos puntos" en lugar de "la caja" para simbolizar el proceso del reparto. Para describir las condiciones iniciales de un reparto; utilizaremos el lenguaje natural, en lugar de utilizar ninguna de las dos notaciones.
Se recuerda que en la Primera Etapa los escolares simbolizaban el proceso del reparto " 3 barras entre 2 niños" del siguiente modo:



En la Segunda Etapa los alumnos escriben:

$$3 : 2 = \frac{6}{2} : 2 = \frac{6 : 2}{2} = \frac{3}{2} \text{ de barra}$$

Justificamos esta decisión por las siguientes razones:

a) Deslindar la acción de reparto con magnitudes continuas de la que se realiza con magnitudes discretas y que los alumnos resuelven mediante el algoritmo de la división entera. Durante el pasado curso hemos detectado influencias perniciosas como la imposibilidad de realizar repartos que manifestaban algunos alumnos cuando el número de barras es menor que el número de participantes. Sin duda la notación de "la caja de la división" les recordaba la división entera de naturales y les retrotraía a situaciones con objetos discretos.

b) Por coherencia con la división entera de naturales, porque la notación de la caja la utilizamos para realizar repartos de objetos discretos en <u>varias</u> fases. Se recuerda que en el trabajo con números naturales si la división se realiza en una sola fase utilizamos la notación "dos puntos"

c) la notación de los dos puntos la hemos utilizado, en sesiones anteriores de este curso, para simbolizar la operación división de una fracción por un número natural que solía estar asociada a acciones de repartos igualitarios.

d) la notación de los dos puntos es compatible con la simbolización de la equivalencia de fracciones y refuerza el trabajo realizado con fracciones equivalentes.

<u>Toma de decisiones.</u>
Dado que las representaciones gráficas que efectúan los alumnos son poco precisas el Equipo Investigador recomienda incidir en este aspecto en las siguientes tareas que se propongan a los alumnos. Se acuerda continuar con la implementación de la Propuesta y estudiar la relación de orden de fracciones desde el significado de cociente partitivo.

Día 17-1-2005 (Décimo octava sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 23.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 24.

<u>Ejecución</u>
En la primera parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 23 que propone comparar repartos en los que participan el mismo número de personas o bien se reparten el mismo número de barras. La Ficha de trabajo nº 23 contiene dos tareas de comparación, una de cada tipo, que enunciamos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 23. Fecha: _____________

Imagina que participas en el reparto de

" 2 barras de regaliz entre 3 personas"

y en el reparto de

" 4 barras de regaliz entre 3 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?.

SOLUCIÓN: ____

porque:

Imagina que participas en el reparto de

" 2 barras de regaliz entre 3 personas"

y en el reparto de

" 2 barras de regaliz entre 5 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?.

SOLUCIÓN: ____

porque:

Cuando los alumnos resuelven las tareas propuesta en la Ficha de trabajo nº 23 se procede a la evaluación conjunta de la tarea. Cuando quedan 15 minutos para concluir de clase los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 24 en la que deben comparar dos repartos en los que participan diferente número de personas y se reparten diferente número de barras de regaliz. Esta Ficha de trabajo plantea la comparación de dos parejas de repartos:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 24. Fecha: _____________

Imagina que participas en el reparto de

" 2 barras de regaliz entre 3 personas"

y en el reparto de

" 3 barras de regaliz entre 4 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?.

SOLUCIÓN: ____

porque:

Imagina que participas en el reparto de

" 3 barras de regaliz entre 2 personas"

y en el reparto de

" 5 barras de regaliz entre 4 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?.

SOLUCIÓN: ____

porque:

Los alumnos han resuelto la Ficha de trabajo nº 24 de forma precipitada, posiblemente porque han dispuesto de poco tiempo para resolver la tarea. Dado que esta Ficha de trabajo presenta mayores dificultades conceptuales que la Ficha precedente el profesor opta por recoger la tarjeta de evaluación para resolverla en una sesión posterior de clase.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos no tienen dificultad para comparar los repartos “2 barras entre 3 personas" y "4 barras entre 3 personas". Todos los alumnos, excepto B07, resuelven correctamente la primera tarea de la Ficha nº 23. Todos los alumnos se percatan de que no necesitan utilizar la equivalencia de fracciones para comparar las fracciones. No obstante, llama la atención que ninguno de los alumnos utiliza la unidad para comparar la fracción 2/3 y 3/4 de barra.

En la segunda parte de la Ficha de trabajo nº 23, cuando los alumnos comparan los repartos “2 barras entre 3 personas" y " 2 barras de regaliz entre 5 personas", no razonan teniendo en cuenta las condiciones iniciales de los repartos. En lugar de comparar directamente los repartos, los alumnos encuentran la fracción que expresa el resultado de los repartos implicados y, después, utilizan la equivalencia de fracciones. El 75% de los alumnos compara de forma correcta los repartos utilizando la equivalencia de fracciones. Sin embargo, no utilizan la idea de reparto para comparar directamente los repartos, sin tener que comparar las representaciones fraccionarias que expresan los resultados de los repartos.

Los alumnos han tenido dificultades al resolver las dos tareas de comparación de repartos que propone la Ficha de trabajo nº 24. La estrategia mayoritaria consiste en encontrar las fracciones que expresan los resultados de los repartos y, posteriormente, utilizar la equivalencia de fracciones para comparar las fracciones. La mitad de los alumnos (B01, B03, B09, B10, B11, B12, B16, B17 y B18) resuelven correctamente las tareas de la Ficha. La otra mitad comete errores al encontrar la representación fraccionaria (B05, B07, B08, B13, B14 y B15) o al comparar las fracciones (B02, B04, B06, y B14).

Valoración
Los alumnos saben comparar repartos que tienen mismo el número de personas o mismo número de barras a repartir. Solo la mitad de los alumnos ha sabido comparar repartos que tienen diferente numero de personas y de barras a repartir. Los alumnos han dispuesto de un plazo temporal escaso para resolver las tareas de la Ficha de trabajo nº 24.

Los alumnos prefieren simbolizar el proceso reparto para encontrar la representación fraccionaria antes conjeturar los términos de la fracción pensando en las condiciones iniciales del reparto. La resolución de tareas de refuerzo de la técnica del reparto en una fase lleva a los alumnos a utilizar esta técnica en detrimento de otras estrategias de resolución.

Toma de decisiones
Se acuerda proponer una nueva Ficha de trabajo nº 25 que no se ha implementado en la Primera Etapa de la Experimentación; que indaga la comprensión de los alumnos referida a la comparación de repartos que tienen diferente numero de personas y de barras a repartir. También se acuerda volver a proponer la resolución de la Ficha de trabajo nº 24 después de haber resuelto la Ficha de trabajo nº 25.

Día 19-1-2005 (Décimo novena sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 25.
2º Volver a resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 24.

Ejecución
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 25 que propone comparar repartos en los que participan un número diferente de personas y también se reparten un número diferente de barras. La Ficha de trabajo nº 25 contiene dos tareas de comparación de repartos que enunciamos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 25. Fecha: _____________

Imagina que participas en el reparto de

" 3 barras de regaliz entre 5 personas"

y en el reparto de

" 4 barras de regaliz entre 7 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ____

porque:

Imagina que participas en el reparto de

" 2 barras de regaliz entre 5 personas"

y en el reparto de

" 3 barras de regaliz entre 8 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ____

porque:

Cuando los alumnos resuelven las tareas propuesta en esta Ficha de trabajo se procede a la evaluación conjunta de las tareas. El alumno B05 que se confunde al encontrar la fracción que expresa el resultado de los repartos involucrados en la primera tarea de la Ficha sale a la pizarra, encuentra las fracciones y las compara utilizando el concepto de equivalencia. Este mismo alumno comparar gráficamente las cantidades 3/5 de barra y 4/7 de barra. Para proceder a la evaluación conjunta de la segunda tarea de la Ficha sale la pizarra la alumna B14 que ha requerido la ayuda de los profesores de aula. Termina la sesión de clase y no queda tiempo para afrontar la resolución de la Ficha de trabajo nº 24 que se realizará se abordará en otra sesión posterior.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos, salvo el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos, excepto B02, B05 y B14, saben comparar los repartos que propone la Ficha de trabajo nº 25. Todos los alumnos proceden hallando la representación fraccionaria y utilizando, posteriormente, la equivalencia de fracciones para comparar las fracciones.

Valoración
Los alumnos saben comparar fracciones que poseen diferentes numeradores y denominadores.

Cuando los alumnos comparan repartos que tienen el mismo número de personas (Ficha de trabajo nº 23) han aparecido diversas estrategias entre las que destaca la idea de reparto. Cuando los alumnos comparan repartos que tienen diferente numero de barras y el de personas (Fichas de trabajo nº 24 y 25) la estrategia canónica pasa a ser la búsqueda de fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. En efecto, todos los alumnos utilizan como estrategia básica la equivalencia de fracciones. Sin embargo, apenas utilizan ideas de reparto y las gráficas que efectúan para representar la cantidad de longitud que recibe cada persona son, en general, poco precisas. En general, los alumnos tienden a utilizar más el modelo de medida que el modelo de cociente partitivo en las tareas de comparación de fracciones: los alumnos de la Segunda Etapa solo utilizan la idea de reparto cuando comparan fracciones que tienen el mismo número de participantes

El modelo de cociente partitivo posee potencialidades que han pasado desapercibidas en la implementación de aula realizada con los escolares de quinto curso de Educación Primaria. En efecto, este modelo potencia la aparición de estrategias de gran riqueza conceptual como la de "compartir o socializar repartos" o utilizar el concepto de equivalencia de repartos. Los alumnos no son capaces de aplicar estas estrategias aún después de que los profesores de aula las han ejemplificado durante la evaluación conjunta de las fichas precedentes y han aconsejado su uso a los escolares. La gestión de estas estrategias exige de los alumnos ideas de proporcionalidad o de razón entre las cantidades que intervienen en el reparto: número de barras y número de personas; y todo parece indicar que estas ideas están muy alejadas de las capacidades cognitivas de los escolares de quinto curso de Educación Primaria.

Toma de decisiones
Se acuerda proseguir con la planificación prevista y pasar a estudiar la técnica del reparto en varias fases. Queda por plantear la resolución de la Ficha de trabajo nº 24 en la que los alumnos obtuvieron un rendimiento por debajo del esperado. En sesiones posteriores, se propondrá a los alumnos la resolución de esta Ficha de trabajo.

Día 20-1-2005 (Vigésima sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 26.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 27.

Ejecución

El profesor presenta la Ficha de trabajo nº 26 y orienta el trabajo de los alumnos para introducir la técnica del reparto en varias fases. Solicita que los alumnos escriban en sus cuadernos: "OTRA FORMA DE REALIZAR REPARTOS: REPARTOS EN VARIAS FASES"

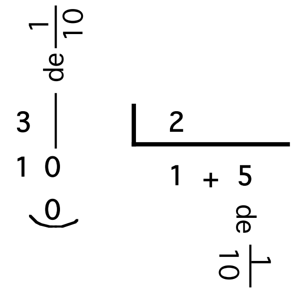
Después escribe en la pizarra: " Vamos a realizar el reparto de 3 barras entre 2 personas. Si realizamos el reparto en una sola fase (como lo hemos hecho hasta ahora) cada persona recibe $\frac{3}{2}$ de barra.

Ahora vamos a realizar el reparto de otra forma diferente: VAMOS A REPARTIR BARRAS ENTERAS Y, SI QUEDAN BARRAS SIN REPARTIR, FRACCIONAMOS LAS BARRAS EN DIEZ PARTES IGUALES, Y VOLVEMOS A REPARTIR LAS SUBUNIDADES DE LONGITUD $\frac{1}{10}$ DE BARRA.

El profesor entrega tres tiras de papel de la misma longitud que la barra-unidad con la consigna de que los alumnos fraccionen en 10 partes iguales una de las tres tiras.

Los alumnos saben realizar el reparto. La alumna B08 sale a la pizarra para realizar la representación gráfica del reparto y, después, escribe que cada persona recibe 1 + $\frac{5}{10}$ de barra.

El profesor escribe en la pizarra, de forma simbólica, el proceso del reparto por fases:



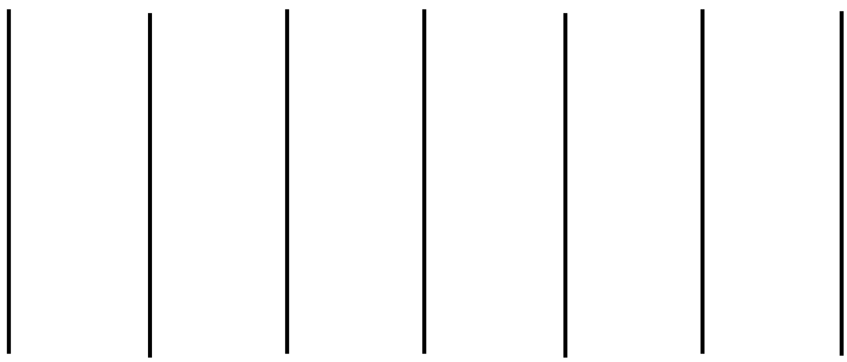
Los alumnos escriben el proceso gráfico y simbólico del reparto en la tarjeta de evaluación de la tarea nº 26. Los escolares conservan la tarjeta de evaluación para que les sirva de ayuda durante la resolución de la siguiente tarea. Antes de terminar la sesión de clase el profesor les entrega la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 27 con el encargo de que la resuelvan inmediatamente. Mostramos la tarjeta de evaluación de esta Ficha de trabajo:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 27. Fecha: _____________

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "7 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

$$7 \quad \underline{|\,5\quad\quad}$$

Cuando los alumnos concluyen la tarea se procede a la evaluación conjunta de la misma. El alumno B01 que efectúa representaciones gráficas adecuadas pero yerra al expresar el resultado del reaparto sale a la pizarra y resuelve correctamente la situación problemática.

Antes de que concluya la sesión de clase los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 28 con el encargo de resolver la tarea en sus casas durante el fin de semana.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos dan muestra de comprender la nueva técnica de reparto. El reparto por fases lo asumen con naturalidad. Les resulta más natural que el reparto en una sola fase. Sin embargo, muestran reticencias a fraccionar la barra sobrante en diez partes iguales. De hecho, los alumnos proponen, inicialmente, otros fraccionamientos no decimales de la barra. Hemos observado en los alumnos una escasa comprensión del papel que juegan los agrupamientos decimales (de base diez) en nuestro sistema de numeración.

Los alumnos siguen las orientaciones de los profesores de aula que recomiendan mayor grado de esmero y precisión en las representaciones gráficas que indican la cantidad de longitud que recibe cada participante. En efecto, los alumnos mejoran las representaciones gráficas y, además, designan con letras a cada uno de los participantes de modo que asocian, gráficamente, a cada participante la cantidad de longitud que éste recibe.

Todos los alumnos, excepto B01, encuentran la representación Polinómica Decimal asociada el reparto "7 barras de regaliz entre 5 personas" que indaga la Ficha de trabajo nº 27.

<u>Toma de decisiones</u>
La implementación de la propuesta de enseñanza funciona según lo previsto. Se van a dedicar varias sesiones a ejercitar la nueva técnica de reparto por fases. Al comienzo de la siguiente sesión se va a proponer a los alumnos la resolución de la Ficha de trabajo nº 24 que plantea la comparación de repartos dado que se trata de una tarea que los alumnos han realizado en las sesiones de esta semana, en la que obtuvieron resultados muy inferiores a las tareas de este mismo tipo.

Día 25-1-2005 (Vigésima sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 24.
2º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 28.

<u>Ejecución</u>
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 24. Ahora los alumnos obtienen mejores resultados que en la semana anterior, cuando intentaron resolverla por primera vez porque, en esta ocasión, los alumnos efectúan representaciones gráficas y simbólicas más precisas.

En la segunda parte de la sesión, el profesor recoge la tarjeta de evaluación de la ficha de trabajo nº 28. Todos los alumnos entregan la tarea al profesor, excepto B10 que la ha dejado olvidada en su casa. La tarjeta de evaluación de la ficha de trabajo nº 28 es análoga a la nº 27. Mostramos el enunciado de esta tarea:

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto " 4 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

Cuando los alumnos concluyen la tarea se procede a la evaluación conjunta de la misma. La alumna B03 que suele tener éxito al resolver las tareas yerra, en esta ocasión, porque procede fraccionando las barras en dos partes iguales. Esta alumna sale a la pizarra y resuelve correctamente la tarea.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos, salvo el alumno B15.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Todos los alumnos de la Segunda Etapa comprenden que la fracción expresa la medida de la cantidad de longitud que recibe cada participante de un reparto.

Los alumnos obtienen porcentajes de éxito altos, superiores al 78%, al resolver la Ficha de trabajo nº 24 que evalúa las representaciones simbólicas que efectúan los escolares cuando comparan los repartos.
La estrategia mayoritaria consiste en escribir las representaciones fraccionarias que expresan los resultados de los repartos y comparar las fracciones utilizando el concepto de equivalencia o razonamientos basados en la fracción con el significado de medida. Todos los alumnos de la Segunda Etapa utilizan esta estrategia. La mayoría de los alumnos que utilizan la equivalencia de fracciones resuelven con éxito las dos tareas de comparación de repartos que plantea la Ficha de trabajo nº 24.
La utilización de la equivalencia de fracciones resulta ser la estrategia más frecuente y con la que los alumnos alcanzan porcentajes de éxito elevados. Otras estrategias de gran riqueza conceptual como la de "compartir o socializar repartos" o utilizar el concepto de equivalencia de repartos resultan muy complejas para los alumnos porque tales estrategias incorporan el significado de razón que se estudia en cursos posteriores y que involucra ideas de proporcionalidad que caen fuera de las capacidades cognitivas de la mayoría de los escolares de quinto curso de Educación Primaria.

Cuando los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 28 en la que deben encontrar la representación polinómica decimal del reparto de "4 barras entre 5 personas" algunos alumnos indican que no pueden realizar el reparto porque no pueden dar barras enteras. Otros alumnos optan por fraccionar las barras en 5 partes iguales porque esta era la técnica que utilizaban en el reparto efectuado en una sola fase. Solo la alumna B03 opta por fraccionar las barras en dos partes iguales.

Los alumnos aprenden con facilidad la técnica del reparto en DOS fases. El reparto por fases les resulta más natural que el reparto en una sola fase, a pesar de que el reparto que propone la Ficha nº 28 plantea la dificultad de que el número de barras a repartir es menor que el de participantes en el reparto. El porcentaje de éxito es del 60%.

Toma de decisiones
Los alumnos progresan en la ejercitación de la técnica del reparto por fases. En esta Segunda Etapa experimental se detecta una mayor calidad de las representaciones gráficas que efectúan los alumnos, y que se manifiesta en el fraccionamiento, en 10 partes iguales, de tiras de papel cuya longitud es la de una barra de regaliz, y en la asignación de letras mayúsculas a cada una de las personas que participan en el reparto. Los resultados aceptables obtenidos hasta el momento aconsejan no introducir modificaciones en la propuesta de enseñanza.

Día 26-1-2005 (Vigésimo primera sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 29.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 30.

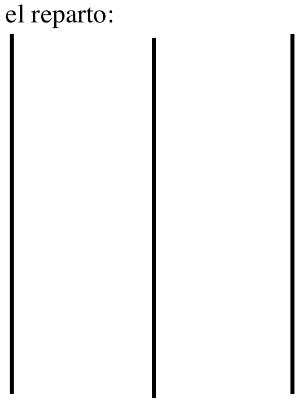
Ejecución
Los alumnos afrontan la resolución de la ficha de trabajo nº 29 que es análoga a la ficha nº 28 y cuyo enunciado mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 29. Fecha: _____________

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "3 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

3 | 5

Los alumnos dan muestras de comprender la técnica del reparto igualitario efectuado en dos fases porque no ha sido necesaria la intervención de los profesores de aula para orientar el trabajo de los alumnos.

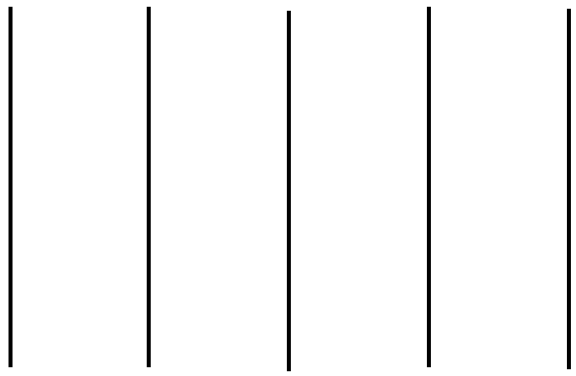
En la segunda parte de la sesión los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 30 que plantea un reparto que se realiza en tres fases y cuyo enunciado mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 30. Fecha: ____________

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto " 5 barras de regaliz entre 4 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

5 | 4

Esta tarea propone, por primera vez, un reparto que se realiza en TRES fases. Algunos alumnos tienen dificultades para representar de forma gráfica y simbólica la tercera fase de este reparto porque olvidan fraccionar las subunidades de un décimo en 10 partes iguales o porque desconocen que la longitud de tales fraccionamientos es un centésimo de la barra o unidad. Los profesores de aula han realizado una intervención de carácter general y entrega material a los escolares para que visualicen que la décima parte de un décimo de barra es un centésimo de barra.

Los alumnos escriben la respuesta en la tarjeta de evaluación de la tarea nº 30 y la entregan al profesor. Antes de concluir la sesión de clase, se procede a la evaluación conjunta de la tarea. Los alumnos escriben en sus cuadernos la respuesta de este reparto efectuado en tres fases y escriben reciben el encargo de realizar, como trabajo para sus casas, la tarea que consiste en repartir, mediante esta técnica, “3 barras de regaliz entre 4 personas”.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos obtienen buenos resultados cuando realizan, en dos fases, el reparto de "3 barras de regaliz entre 5 personas". El 78% de los alumnos realizan representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para encontrar la representación polinómica decimal que expresa el resultado del reparto. Solo cuatro alumnos (B01, B05, B14 y B16) cometen alguna incorrección.

Algunos alumnos utilizan la notación decimal para expresar el resultado del reparto porque el profesor adelantó la equivalencia entre la representación polinómica decimal y la notación decimal durante la evaluación conjunta de la ficha de trabajo nº 28.

Una de las causas de los errores detectados en las respuestas de los alumnos cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 30, que plantea un reparto en tres fases, radica en la escasa comprensión del papel que juegan los agrupamientos decimales en nuestro sistema de numeración escrito. Unos pocos alumnos de la Segunda Etapa tienen dificultades para comprender que la décima parte de un décimo de barra es una centésima parte de la barra.

A pesar de que la representación simbólica del proceso de reparto en tres fases es compleja, los alumnos obtienen buenos resultados: el 80% de los alumnos de la Segunda Etapa realizan representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para encontrar la representación polinómica decimal que expresa el resultado del reparto.

Valoración

El modelo de cociente partitivo con esta nueva técnica de reparto se ha mostrado válido para introducir la representación polinómica decimal asociada al reparto realizado en varias fases.

Los alumnos perciben con naturalidad que la acción de reparto puede ser efectuada con otra técnica diferente de la que conocen, y aprenden pronto cuales son las exigencias de la nueva técnica: el fraccionamiento decimal y de la asignación del mayor número posible de subunidades en cada fase del reparto.

Las representaciones gráficas se muestran muy eficaces en la secuencia de enseñanza porque evitan la utilización de material concreto que, en el caso del fraccionamiento en 100 partes iguales de la unidad, se gestiona con lentitud. Las representaciones gráficas favorecen la transición hacia las representaciones simbólicas y facilitan la evaluación de la comprensión que poseen los escolares de la técnica del reparto en varias fases.

La utilización de modelos estables contribuye a la mejora de la comprensión de los alumnos. Los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación han obtenido mejores resultados que los alumnos de la Primera Etapa porque, en el tercer curso de Educación Primaria, han recibido enseñanza de la división de números naturales desde el modelo de cociente partitivo modificado para el caso de magnitudes discretas. Los alumnos de la Segunda Etapa dan muestras de percibir la representación polinómica decimal como extensión de la división entera en el caso de la magnitud continua de longitud.

Toma de decisiones

En la siguiente sesión vamos a introducir la notación decimal. Este nuevo sistema de representación surge de la acción de reparto pero también indica una cantidad de magnitud: la longitud de barra de regaliz que recibe cada participante del reparto. Estos dos significados del número decimal deberán aparecer durante la evaluación conjunta de la tarea nº 31, en cuyo primer apartado leemos:

> Cuando has realizado repartos por fases y has fraccionado los trozos que sobran en 10 partes iguales, en el reparto " 3 barras de regaliz entre 2 personas"
>
> $$\text{cada persona recibe } 1 + \frac{5}{10} \text{ de barra,}$$
>
> y el número decimal que indica esta cantidad es 1'5

Proponemos la siguiente metodología de trabajo que comprende dos tipos de actividades:

Actividad I.- El profesor preguntará a los alumnos por el significado de 1´5 barras de regaliz. Se espera que los alumnos respondan que esta cantidad es el resultado de un reparto en el que cada persona recibe 1 barra y $\frac{5}{10}$ de barra.

Actividad II.- Cada alumno recibe dos tiras de papel de la misma longitud que la de la barra de regaliz, una de ellas fraccionada en 10 partes iguales. Los alumnos deben construir una cantidad de longitud de 1´5 barras o tiras de papel.

Estos dos tipos de actividades se realizarán con los números decimales 0´8, 0´6 y 1´25 de barra.

Día 27-1-2005 (Vigésimo segunda sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 31.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 32.

Ejecución.
En primer lugar se procede a evaluar la tarea propuesta como trabajo para casa y que consiste en repartir “3 barras para 4 personas”. La alumna B16 sale a la pizarra y realiza de forma simbólica el proceso de este reparto. El profesor ha llevado a clase listones de madera de esta longitud para que los alumnos comprueben que tal longitud se completa con 7 subunidades de longitud 1/10 de unidad y 5 subunidades de 1/100 de unidad.

Después los escolares resuelven la Ficha de trabajo nº 31 que conecta la representación polinómica decimal de un reparto y la notación decimal. La resolución de esta tarea ha estado dirigida por los profesores de aula. Esto hace que los alumnos resuelven con facilidad esta tarea. El profesor indica a los alumnos que guarden la tarjeta de evaluación de esta Ficha y que la peguen en sus cuadernos.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 32. En esta tarea los alumnos deben expresar de forma simbólica el resultado del reparto “15 barras para 4 niños” utilizando la representación fraccionaria y la notación decimal; y además deben representar gráficamente sobre una línea recta ambas representaciones simbólicas que expresan la longitud de regaliz que recibe cada niño.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 32. Fecha: _____________

Realiza el reparto"7 barras de regaliz entre 2 niños" de dos formas diferentes:

1º) Cuando fraccionas todas las barras en tantas partes iguales como el número de niños:

Expresa, con una fracción, el número de barras de regaliz que recibe cada niño.

SOLUCIÓN: *Cada niño recibe* *barras de regaliz*

2º) Cuando repartes barras enteras y fraccionas las barras o partes de barras sobrantes en diez:

7 | 2

Expresa, con un número decimal, el número de barras de regaliz que recibe cada niño.

SOLUCIÓN: *Cada niño recibe* *barras de regaliz*

3º) La longitud de una barra de regaliz es:

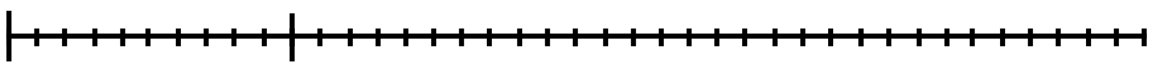
Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, la fracción que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

O

4º) La longitud de una barra de regaliz es:

Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, el número decimal que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

O



5º) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal

La parte entera es _____ *e indica que* ____

La cifra de las décimas es _____ *e indica que* ____

La cifra de las centésimas es _____ *e indica que* ____

La cifra de las milésimas es _____ *e indica que* ____

Esta Ficha de trabajo plantea dificultades a los escolares porque resulta densa y porque indaga sobre conocimientos conceptuales como el significado de las cifras del número decimal y sobre técnicas poco ejercitadas como la representación gráfica sobre la recta numérica de fracciones y números decimales. En estas condiciones, solo los alumnos de nivel de comprensión alto (B10, B15, B17 y B18) terminan la tarea. El profesor propone que los alumnos terminen esta tarea en sus casas durante el fin de semana y proceder a su evaluación conjunta al comienzo de la siguiente sesión.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los escolares dan muestras de comprender el convenio que conecta la Representación Polinómica Decimal de un reparto y la Notación Decimal, y la economía que signos que conlleva. El hecho de que este convenio, basado en criterio posicional, se aplique a repartos que los alumnos han realizado previamente favorece la comprensión del paso de la Representación Polinómica Decimal a la Notación Decimal

La resolución de la Ficha de trabajo nº 32 plantea serias dificultades a los alumnos porque tiene un formato novedoso. En particular, las preguntas referidas a las representaciones gráficas sobre la recta numérica y las que indagan sobre los significados de las cifras del número decimal han resultado difíciles a los alumnos. Los profesores de aula se han visto obligados a orientar el trabajo de los escolares. Por este motivo, no aportamos datos cuantitativos sobre el rendimiento de las alumnos en la Ficha de trabajo nº 32.

Toma de decisiones
Las preguntas que se formulan a alumnos sobre el significado de las cifras del número decimal aportan poca información del grado de comprensión que éstos poseen. Los alumnos suelen dar respuestas muy escuetas porque no están acostumbrados a que se les interrogue sobre el significado de los conceptos. En cambio, la observación de las representaciones gráficas del número decimal que los alumnos efectúan sobre la recta numérica aporta más información sobre la comprensión de los escolares.

En el momento en el que los alumnos resuelven la Ficha nº 32 constatamos dificultades en la gestión de la recta numérica asociadas a la propia complejidad del sistema de representación. La recta numérica es un sistema de representación complejo para los alumnos que requiere ser ejercitado durante periodos de enseñanza más amplios. El diseño inicial de la propuesta didáctica tiene en cuenta este hecho de modo que los escolares van seguir trabajando este sistema de representación cuando resuelvan Fichas de trabajo análogas a la Ficha nº 32.

Día 31-1-2005 (Vigésimo tercera sesión)
Plan previsto.
1º Evaluar la Ficha de trabajo nº 32.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 33.

Ejecución.
El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 32. Los alumnos la devuelven cumplimentada aunque persisten los errores en la representaciones gráficas sobre la recta numérica y la parquedad y escasa precisión de los significados que asocian a las cifras del número decimal. El alumno B04 que yerra al representar gráficamente la fracción 7/2 de barra y el decimal 3’5 de barra sale a la pizarra para mostrar la solución correcta de los apartados de la tarea.
En la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha nº 33 que tiene un formato análogo a la Ficha precedente y cuyo enunciado es:

Realiza el reparto" 15 barras de regaliz entre 4 niños" de dos formas diferentes.

Antes de concluir la sesión de clase la alumna B14 que yerra al encontrar las representaciones simbólicas y gráficas del reparto “15 barras de regaliz entre 4 niños" efectuado con las dos técnicas objeto de enseñanza sale a la pizarra y con la ayuda del profesor y de sus compañeros resuelve la tarea.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
El 75% de los alumnos saben encontrar la fracción y el número decimal que expresa el resultado del reparto “15 barras de regaliz entre 4 niños". Sin embargo, el porcentaje de éxito desciende hasta el 50% cuando representan sobre la recta numérica la fracción 15/4 barras y el número decimal 3’75 barras.

Los alumnos encuentran más dificultades para representar gráficamente la fracción que el número decimal resultado del reparto igualitario.

Toma de decisiones
A pesar de que se observan progresos en la comprensión de los alumnos, estas tareas plantean a éstos dificultades en la gestión de la recta numérica. Para reforzar este sistema de representación gráfico de la fracción y del número decimal, el Equipo de Investigación propone incorporar a la Propuesta de Enseñanza tres nuevos Fichas de trabajo (nº 34, nº 35 y nº 36) que se van a implementar en las siguientes tres sesiones.
Aunque la implementación de la secuencia de enseñanza en el grupo 5º B se retrasa con respecto a la del grupo 5º A vamos a mantener la propuesta diseñada porque consideramos prioritario relacionar los sistemas de representación fraccionario y decimal.

Día 1-2-2005 (Vigésimo cuarta sesión)
Plan previsto.
Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 34.

Ejecución.
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha nº 34 que tiene un formato análogo al de las Fichas precedentes (nº 32 y nº 33), y cuyo enunciado es:

Realiza el reparto "21 barras de regaliz entre 10 niños" de dos formas diferentes.

El alumno B05 que yerra al encontrar las representaciones simbólicas y gráficas del reparto “21 barras de regaliz entre 10 niños" efectuado con las dos técnicas objeto de enseñanza sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor y de sus compañeros, resuelve la tarea. Los alumnos copian en sus cuadernos el enunciado y la solución de los apartados planteados en la ficha de trabajo.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos dan muestras de comprender el reparto en una sola fase y en varias fases porque todos los alumnos, excepto B05, saben encontrar la fracción y el número decimal que expresa el resultado del reparto.

Todos alumnos saben representar gráficamente el número decimal 2´1 barras y solo tres alumnos (B04, B05 y B14) yerran al representar gráficamente la fracción 21/10 barras.

Valoración
Detectamos avances considerables en los aprendizajes efectuados por los alumnos de 5º curso. La mayoría de los alumnos encuentra las representaciones simbólicas y gráficas del reparto, y además escriben, de modo correcto, el significado de las cifras que componen el número decimal 2’1 barras. Ahora bien, debemos tener en cuenta que el reparto propuesto en la Ficha de trabajo nº 34 puede ser efectuado en solo dos fases, y esto hace disminuir el grado de dificultad de las tareas propuestas en la Ficha.

Día 2-2-2005 (Vigésimo quinta sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 35.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 36.

Ejecución.
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha nº 35 que tiene un formato análogo al de las Fichas precedentes (nº 32, nº 33 y nº 34), y cuyo enunciado es:

Realiza el reparto "9 barras de regaliz entre 5 niños" de dos formas diferentes.

El alumno B04 que yerra al encontrar las representaciones simbólicas y gráficas del reparto “9 barras de regaliz entre 5 niños" efectuado con las dos técnicas objeto de enseñanza sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor y de sus compañeros, resuelve la tarea.

Dado que los alumnos resuelven rápidamente las tareas propuestas en la Ficha de trabajo nº 35, el profesor propone la resolución de la Ficha de trabajo nº 36 que tiene un formato análogo al de las Fichas precedentes, y cuyo enunciado es:

Realiza el reparto "9 barras de regaliz entre 4 niños" de dos formas diferentes.

Antes de concluir la sesión de clase el profesor solicita a la alumna B14 que salga a la pizarra para efectuar el reparto “9 barras de regaliz entre 4 niños". Esta alumna se muestra muy insegura cuando busca las representaciones simbólicas que expresan el resultado de los repartos y que yerra en las representaciones gráficas que realiza. Los alumnos copian en sus cuadernos el enunciado y la solución de los apartados planteados en la ficha de trabajo nº 36.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos, excepto el alumno B15.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos dan muestras de comprender el reparto en una sola fase y en varias fases porque todos los alumnos, excepto B04, saben encontrar la fracción y el número decimal que expresa el resultado del reparto propuesto en la Ficha de trabajo nº 35.

La mitad de los alumnos del grupo de docencia tienen dificultades para representar gráficamente la fracción o el número decimal que expresa el resultado del reparto propuesto en la Ficha de trabajo nº 35. Cinco alumnos (B02, B04, B05, B14, B16) no saben representar gráficamente ni la fracción 9/5 barras ni el número decimal 1´8 barras; mientras que otros cinco alumnos (B03, B07, B11, B12, B13) representan correctamente el decimal 1´8 barras pero yerran al representar gráficamente la fracción 9/5 barras.

Los resultados obtenidos por los alumnos en las tareas propuestas en la Ficha nº 36 que plantea el reparto de "9 barras de regaliz entre 4 niños" son coherentes con los obtenidos en la Ficha precedente: los alumnos saben obtener la representación simbólica que expresa el resultado del reparto, saben expresar el significado de las cifras del número decimal, pero tienen dificultades para representar gráficamente sobre la recta numérica la fracción que expresa el resultado del reparto. La tercera parte de los alumnos (B02, B05, B06, B08, B09 y B14) yerra al representar la fracción 974 barras, mientras que todos los alumnos saben representar gráficamente el número decimal 2’25 barras.

<u>Valoración</u>
Los alumnos siguen teniendo dificultades para representar gráficamente sobre la recta numérica la cantidad de longitud que resulta de un reparto igualitario. En particular, los alumnos encuentran más difícil representar gráficamente la fracción, mientras que la notación decimal la perciben con mayor naturalidad como agregación de cantidades obtenidas al realizar fraccionamientos decimal e igualitarios de la unidad.

<u>Toma de decisiones</u>
El Equipo de Investigador acuerda proponer dos nuevas Fichas de trabajo (nº 37 y nº 38) que tienen por objeto reforzar la técnica simbólica de obtención de la Representación Polinómica Decimal asociada al reparto efectuado por fases. La Ficha de trabajo nº 38 incide en la paso de la representación fraccionaria a la notación decimal. Además, ambas Fichas refuerzan el sistema de representación de la recta numérica mediante tareas de representación gráfica de cantidades de longitud que vienen expresadas por números decimales. Mostramos a continuación los enunciados de ambas Fichas de trabajo.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 37. Fecha: ______________

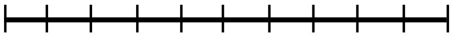
Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada persona en los siguientes repartos:

a) " 19 barras de regaliz entre 20 personas".

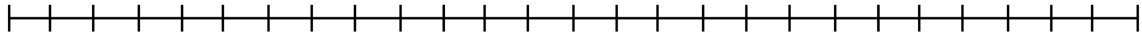
c) " 23 barras de regaliz entre 25 personas".

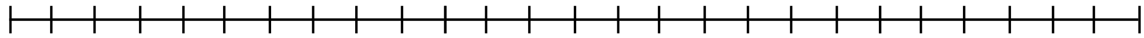
c) " 19 barras de regaliz entre 8 personas".

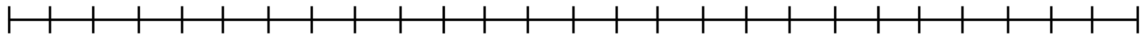
Si la longitud de una barra de regaliz es:



Dibuja sobre las líneas, la longitud de las cantidades de regaliz que reciben las personas que participan en los repartos.

a) 

b) 

c) 

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 38 Fecha: _____________

Expresa, con un número decimal, las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{2} =$

b) $\frac{8}{4} =$

c) $\frac{7}{4} =$

d) $\frac{2}{5} =$

e) $\frac{15}{5} =$

f) $\frac{3}{10} =$

g) $\frac{27}{10} =$

h) $\frac{3}{8} =$

i) $\frac{17}{8} =$

j) $\frac{33}{20} =$

k) $\frac{21}{8} =$

Si la unidad de longitud es:

dibuja, a partir de O, la cantidad de longitud que expresan los números decimales que acabas de obtener

a) ***O***

Día 3-2-2005 (Vigésimo sexta sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 37.

2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 38.

Ejecución.

En la primera parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 37. Cuando los alumnos resuelven la tarea se procede a su evaluación conjunta. Los alumnos B02, B07 y B16 que cometen errores salen a la pizarra y cada uno de ellos encuentra la Representación Polinómica Decimal de los tres repartos que se proponen en la Ficha nº 37.

En la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 38, que propone convertir 11 expresiones fraccionarias en números decimales y, después, representar gráficamente sobre la recta numérica las 11 expresiones numéricas halladas anteriormente.

Cuando los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 38 el profesor recoge las tarjetas de evaluación. Concluye la sesión de clase y la mitad de los alumnos no han terminado la tarea o bien está resuelta con algunos errores. El profesor permite que estos alumno subsanen los errores o bien la concluyan en sus casas, y les indica que los apartados de la Ficha serán evaluadas al comienzo de la siguiente sesión.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
La mayoría de los alumnos saben encontrar la expresión decimal que expresa el resultado de un reparto igualitario. Tan solo cuatro alumnos (B02, B04, B14 y B16) cometen yerran en alguno de los tres repartos que propone la Ficha de trabajo nº 37.

El 40% de los alumnos (B01, B02, B04, B05, B07, B08, B14 y B16) necesitan ayuda para representar sobre la recta numérica el número decimal 2’375 barras. No obstante, todos los alumnos saben representar sobre la recta numérica el número decimal 0’95 barras.

Valoración
En general, los alumnos dominan la técnica del reparto igualitario en varias fases porque aplican correctamente el algoritmo extendido de la división para encontrar el número decimal que expresa el resultado del reparto efectuado en varias fases.

La representación gráfica del decimal como cantidad de longitud sobre la recta numérica no es una tarea elemental. Esta tarea plantea a los alumnos serias dificultades conceptuales porque éstos deben realizar una evaluación semántica de las cifras del número decimal. La mayoría de los errores que cometen los alumnos al realizar la representación gráfica del decimal sobre la recta numérica se deben a una escasa comprensión de la base decimal y, en concreto, de las conversiones decimales entre los submúltiplos de la unidad.

Toma de decisiones
Representar gráficamente sobre la recta numérica cantidades de longitud expresadas mediante números decimales requieren períodos de enseñanza dilatados en el tiempo. Para evaluar los aprendizajes de los alumnos referidos a este sistema de representación y a la técnica del reparto en varias fases vamos a proponer la resolución de la Ficha de trabajo nº 36BIS que tiene un formato análogo al de las Fichas nº 32, nº 33, nº 34, nº 35 y nº 36, y cuyo enunciado es:

Realiza el reparto "17 barras de regaliz entre 8 niños” de dos formas diferentes.

Día 4-2-2005 (Vigésimo séptima sesión)
Plan previsto.
1º Evaluar la Ficha de trabajo nº 38.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 36BIS.

Ejecución
Los primeros veinte minutos de la sesión de clase se dedican a evaluar los apartados de la Ficha de trabajo nº 38 que tienen mayor dificultad conceptual. Los alumnos B01, B04, B05, B08 y B16 que no han terminado las tareas que propone la Ficha salen a la pizarra y encuentran las notaciones decimales que equivalen a las representaciones fraccionarias dadas en el enunciado de la Ficha.

Después los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 36BIS. Los alumnos resuelven pronto las tareas de la Ficha, lo que permite evaluar conjuntamente la Ficha de trabajo antes de concluir la sesión de clase.

Asistencia de alumnos y aspectos actitudinales
Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B06. Algunos alumnos, como B01, B04, B05, B08 y B16, que no habían terminado la Ficha nº 38 en la sesión de clase anterior no han terminado de resolver la Ficha de trabajo en sus casas. El comportamiento de los alumnos es muy bueno pero algunos alumnos se muestran pasivos y, más todavía, cundo reciben la consigna de realizar tareas fuera del aula.

Aspectos relacionados con la comprensión
El 83% de los alumnos de quinto curso saben encontrar el número decimal que expresa el resultado del reparto igualitario efectuado en varias fases: tres alumnos (B02, B14 y B16) suelen cometer errores al efectuar la técnica simbólica del reparto en varias fases.

El 72% de los alumnos de quinto curso saben representar gráficamente del número decimal sobre la recta numérica. Cinco alumnos (B01, B05, B08, B14 y B16) tienen dificultades para representar sobre números decimales con tres cifras decimales.

Todos los alumnos de la Segunda Etapa aplican correctamente el algoritmo extendido de la división para encontrar el número decimal que expresa el resultado del reparto efectuado en varias fases que plantea la

Ficha nº 36BIS. El porcentaje de éxito desciende hasta el 72% cuando los alumnos encuentran la fracción que expresa el resultado de este reparto. Este mismo porcentaje muestra el éxito de las argumentaciones adecuadas que utilizan los alumnos sobre el significado del número decimal 2'125 barras y de las cifras que lo componen.

El éxito de los alumnos desciende hasta el 60% cuando los alumnos representan sobre la recta numérica el número decimal 2'125 barras.

Valoración
Los alumnos tienen dificultades para representar gráficamente un número decimal que posee tres cifras decimales. La mayoría de los alumnos que realizan una representación gráfica correcta proceden dibujando los diferentes órdenes de unidades comenzando por las unidades de mayor tamaño.

Las dificultades conceptuales aparecen al gestionar los órdenes de unidades inferiores a la décima como consecuencia de limitaciones de comprensión en tres aspectos:

a) el sistema de numeración decimal
b) traslaciones entre las representaciones simbólicas del decimal y de la fracción decimal
c) las características sintácticas y semánticas del sistema de representación de la recta numérica.

La recta numérica es un sistema de representación que permite percibir el número decimal con una nueva sintaxis: es un punto sobre un segmento orientado. El dominio de este sistema de representación precisa una secuencia de enseñanza más larga que la implementada hasta el momento de resolver la Ficha, dado que los resultados obtenidos indican un conocimiento inestable de la recta numérica: la mayoría de los alumnos sabe representar números decimales con una sola cifra decimal, pero el porcentaje desciende hasta el 60% cuando han representado un número de tres cifras decimales.

Toma de decisiones
A pesar de que la gestión del sistema de representación de la recta numérica no está consolidada proponemos continuar con la planificación de la Propuesta de Enseñanza y reforzar el dominio de este sistema en momentos puntuales posteriores de la secuencia de enseñanza para no acumular retrasos en la temporalización de la Propuesta.

Día 7-2-2005 (Vigésimo octava sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 39.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 39BIS.

Ejecución.
En la primera parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 39 cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 39 Fecha: _____________

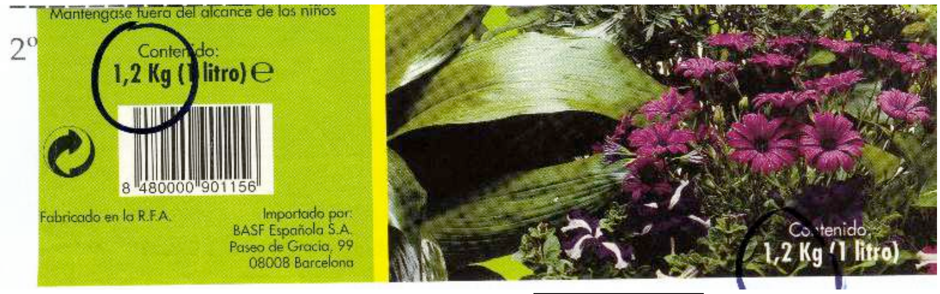
Expresa con una fracción las cantidades de magnitud que están escritas con números decimales.

1º.

SOLUCIÓN: [ ] de

He obtenido la fracción del siguiente modo:

____



SOLUCIÓN: de

He obtenido la fracción del siguiente modo:

Cuando los alumnos terminan la tarea, sale a la pizarra el alumno B06 que yerra al expresar la representación polinómica decimal del número 1'2 kgrs y, con la ayuda del profesor, conecta el decimal con la fracción.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 39BIS cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 39BIS Fecha: _____________

Expresa con una fracción (la más simplificada posible) los siguientes números decimales:

a) 0´5 =

b) 0´6 =

c) 2 =

d) 2´2 =

e) 1´4 =

f) 2´8 =

g) 3´5 =

h) 1´75 =

i) 1´25 =

Concluye la sesión de clase y la mitad de los alumnos no han terminado la Ficha de trabajo nº 39BIS. El profesor permite que los alumnos que no la han terminado se lleven a sus casas la tarjeta de evaluación y la devuelvan cumplimentada a la sesión del día siguiente.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos saben encontrar la fracción que viene dada por los decimales 1'5 litros y el 80% de los alumnos expresan correctamente el decimal 1'2 kilogramos. Los alumnos B02, B06 y B14 han necesitado la ayuda de los profesores para resolver con éxito la tarea.

La estrategia mayoritaria consiste en expresar el número decimal por medio de su Representación Polinómica Decimal y, después, operar la suma de fracciones decimales. Los alumnos olvidan simplificar las fracciones, pero cuando los profesores sugieren la aplicación de esta técnica saben aplicarla correctamente.

Valoración
La fracción y el número decimal se han introducido y conectado desde el modelo de cociente partitivo. La Ficha de trabajo nº 39 tiene como objetivo establecer el paso del número decimal a la fracción a partir de situaciones contextualizadas desde el modelo de medida.
La conexión entre notación fraccionaria y decimal se ha llevado a cabo mediante situaciones contextualizadas de medida. Si las situaciones problemáticas hubieran sido de reparto los alumnos tal vez hubieran optado por

la estrategia que consiste en percibir el resultado del reparto, que viene dado por un número decimal, como una razón y, haciendo uso de la idea de proporcionalidad, encontrar las condiciones iniciales del reparto que informan de los términos de fracción: número entero de barras de regaliz y de participantes en el reparto. Queda para futuras investigaciones estudiar qué efectos produciría introducir tareas de conversión entre la notación decimal y fraccionaria en contextos de reparto igualitario.

Toma de decisiones
La conversión del número decimal en fracción presenta dificultades a los escolares quinto curso de Educación Primaria que se manifiestan, fundamentalmente, en errores en la simbolización de las operaciones con fracciones decimales. Los resultados obtenidos por los alumnos son aceptables pero debemos tener en cuenta que los números decimales implicados en la Ficha de trabajo nº 39 son muy elementales dado que poseen tan solo una cifra decimal. En consecuencia, hemos optado por introducir la Ficha de trabajo nº 39BIS para reforzar la técnica de paso del número decimal a la fracción.

Día 8-2-2005 (Vigésimo novena sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 39BIS.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 40.

Ejecución.
El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 39BIS a los alumnos que no la habían terminado durante la sesión del día anterior. De los doce alumnos (B01, B02, B04, B05, B06, B07, B08, B11, B12, B13, B14 y B16) que debían terminar la tarea sólo la mitad de ellos (B04, B07, B08, B11, B12 y B13) traen la tarea bien resuelta.
Toda la sesión se dedica a resolver en la pizarra los ejercicios que propone la Ficha nº 39BIS. Los alumnos que no han devuelto resuelta la tarjeta de evaluación se encargar de resolver los ejercicios, y el resto de los alumnos escriben el proceso de resolución en sus cuadernos.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
La conversión del número decimal en fracción presenta dificultades a los alumnos de quinto curso de Educación Primaria que se manifiestan, fundamentalmente, en errores en la simbolización de las operaciones con fracciones decimales. Los alumnos no consideran relevante expresar la representación fraccionaria con una fracción irreducible. Hemos detectado errores al aplicar la técnica de simplificación de fracciones.

Toma de decisiones
La gestión simbólica de conversión del número decimal a la fracción es compleja porque exige de los alumnos la comprensión de la estructura polinómica decimal asociada al número decimal, el manejo operatorio de fracciones decimales y, finalmente, aplicar la técnica de simplificación de fracciones. Se acuerda dedicar una sesión más para reforzar la técnica de conversión entre ambas representaciones. En la siguiente sesión se plantea la resolución de la Ficha de trabajo nº 40 cuyo enunciado es el siguiente:

1º La capacidad de una botella de batido es 0´25 litros. Expresa con una fracción (la más simplificada posible) la capacidad de esta botella.

SOLUCIÓN: $\boxed{}$ *de*

*He obtenido la fracción del siguiente modo:*__________________________________

2º En la carnicería has comprado 0´375 Kgrs. de carne picada. Expresa con una fracción (la más simplificada posible) el peso de carne picada que has comprado.

SOLUCIÓN: $\boxed{}$ *de*

He obtenido la fracción del siguiente modo: __________________________________

Día 9-2-2005 (Trigésima sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 40.

Ejecución.
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 40. Cuando los alumnos resuelven los dos ejercicios se procede a su evaluación conjunta. Los alumnos B05 y B14 que cometen errores salen a la pizarra y resuelven, cada uno de ellos, el primer y segundo ejercicio que se plantean en la Ficha nº 40.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
El 75% de los alumnos sabe convertir el número decimal 0´25 en fracción. El porcentaje de acierto desciende hasta el 60% cuando convierten en fracción el número 0´375, como consecuencia de errores en la simplificación de fracciones. Hemos detectado dificultades en la simplificación de fracciones. Los alumnos están más familiarizados con la técnica de obtención de fracciones equivalentes por amplificación porque se trata de una técnica que posee una justificación más sencilla que la de la simplificación.

Valoración
Los alumnos dan muestras de comprender el significado del número decimal como resultado de una medida de cantidad de magnitud y saben expresar un número decimal, que no tenga más de tres cifras decimales, con una fracción.

Los alumnos no han cometido errores conceptuales. Por ejemplo, los alumnos no cometen errores graves como cambiar la coma del decimal por la barra de la fracción.

Toma de decisiones
Los alumnos de la Segunda Etapa de Experimentación obtienen resultados aceptables al resolver estas Fichas de trabajo de conversión del número decimal a la fracción. Sin embargo, la gestión adecuada de los procedimientos simbólicos de paso de un sistema de representación a otro precisa de períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo, que nuestra implementación de aula no contempla porque estamos comprometidos a respetar la programación del Centro. En consecuencia, estas técnicas de conversión entre notaciones decimales y fraccionarias deberán ser reforzadas en 6º curso de Educación Primaria para afianzar la simbolización de las técnica de paso entre ambos sistemas de representación.

Día 10-2-2005 (Trigésimo primera sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 41.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 42.

Ejecución.
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 41 que propone ordenar las estaturas de unos niños expresados con números decimales, y cuya tarjeta de evaluación es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 41 Fecha: ______________

Ordena de menor a mayor, la estatura de los siguientes niños:

Manuel	1´6	metros
Oscar	1´495	metros
Luís	1´510	metros
Enrique	1´5	metros
Antonio	1´51	metros
César	1´59	metros

SOLUCIÓN:
El niño de menor estatura es: ________________________________
____
____
____
____
El niño de mayor estatura es: ________________________________

Inventa una regla que sirva para ordenar números decimales: ______________________________________

Se trata de la primera tarea de comparación de números decimales que abordan los alumnos. Esto hace que inicialmente éstos se muestren inseguros, necesiten de explicaciones de los profesores y tengan que emplear más tiempo del previsto. Cuando los alumnos concluyen la tarea solo queda tiempo para evaluarla de forma conjunta, y no se aborda la resolución de la Ficha de trabajo nº 42 que se resolverá en la sesión del día siguiente.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
La mitad de los alumnos (B03, B05, B09, B10, B12, B13, B15, B17 y B18) sabe ordenar los números decimales que expresan las estaturas de unos niños. La otra mitad de los alumnos cometen errores entre los que destacamos los siguientes:

a) Ordenar según el número de cifras decimales. Este es el caso de B14 que ordena de menor a mayor comenzando por 1’5m y siguiendo por 1’6 m.
b) Dificultades en la comprensión del cero como cifra decimal. Este es el caso de B01 que considera que 1’51 es menor que 1´510.

La estrategia mayoritaria consiste en comparar cifra a cifra, comenzando por las unidades de mayor orden. La respuesta del alumno B13 ejemplifica esta estrategia:

"*… si tienes las misma unidades enteras eliges comparar las décimas, y si no las centésimas y el que tenga mayor unidad entera, décima o centésima es mayor*"

El alumno B10 opta por la estrategia que consiste en “añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras”. Este alumno aporta la siguiente regla:

“Mirar cuál es el número que más cifras tiene, y haz que los otros tengan el mismo número de cifras añadiendo ceros a la derecha, y ordena normal"

Valoración
La tarea de enunciar reglas resulta compleja a los escolares debido, fundamentalmente, a las dificultades que les plantea expresar por escrito sus ideas. Sin embargo, se trata de una actividad asequible para los escolares que presenta importantes potencialidades en el proceso de enseñanza y aprendizaje porque favorece la aparición de diversas estrategias que refuerzan la representación polinómica decimal que subyace al número decimal.

Toma de decisiones
En la implementación de la primera tarea de ordenación de decimales han aparecido los mismos conflictos cognitivos que se suscitaron en la Primera Etapa de la Experimentación. Proponemos continuar con la secuencia de enseñanza prevista que sigue fielmente la implementada en aquella Primera Etapa.

Día 11-2-2005 (Trigésimo segunda sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 42.

Ejecución.
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 42 que propone ordenar seis números decimales descontextualizados, y cuya tarjeta de evaluación es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 42 Fecha: _____________

Ordena de menor a mayor, los siguientes números decimales:

10,21 *10,3* *1,031* *10,30* *100,01* *0,975*

SOLUCIÓN:

El número decimal menor es: ______________________________

El número decimal mayor es: ______________________________

Inventa una regla que sirva para ordenar números decimales: ____________________________________

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos de la Segunda Etapa obtienen niveles de éxito altos, que supera el 80%, en la tareas de ordenación de números decimales que propone la Ficha de trabajo nº 42. Solo los alumnos B06, B07 y B14 han necesitado la ayuda de los profesores para ordenar los números.

Otro indicador del nivel de comprensión alto que muestran los alumnos lo aporta la escasa frecuencia con que aparece la estrategia errónea que consiste en ordenar según el número de cifras decimales que contengan los números decimales. Era previsible detectar este error al comparar los decimales 10´3 y 10´21; sin embargo, son pocas las respuestas erróneas de este tipo.

El 75% de los alumnos de la Segunda Etapa han sabido enunciar enunciado una regla correcta para ordenar números decimales. Solo los tres alumnos que han errado al ordenar los números decimales y la alumna B08 no han enunciado una regla correcta para ordenar decimales.

Los alumnos han puesto en juego dos estrategias para ordenar números decimales:
a) Comparar por fases: primero la parte entera; y si son iguales, se comparan las décimas; y así sucesivamente.
b) Añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras.

Los alumnos se mantienen fieles a la estrategia utilizada en la Ficha precedente: todos los alumnos, excepto B10, utilizan la estrategia que consiste en comparar cifra a cifra, comenzando por las unidades de mayor orden.

Valoración
Como consecuencia de la acción de enseñanza los alumnos han adquirido un mayor dominio de la técnica de ordenación de decimales que se manifiesta en la mayor celeridad y seguridad con que los alumnos ordenan números decimales en las tareas posteriores.

Los alumnos son capaces de conjeturar y formular reglas adecuadas que rigen el comportamiento de los números. El criterio metodológico de intervención en el aula que consiste en dejar que los alumnos inventen reglas para ordenar números decimales se ha mostrado eficaz en la secuencia de enseñanza.

Los resultados obtenidos en la Segunda Etapa de la Experimentación confirman que las tareas propuestas para la enseñanza del orden de números decimales están bien diseñadas y sirven para alcanzar los objetivos previstos.

Toma de decisiones
Dado que las Fichas propuestas para la enseñanza del orden de números decimales están bien diseñadas y sirven para alcanzar los objetivos previstos proponemos seguir con la secuencia de enseñanza y estudiar las operaciones con números decimales.

Día 14-2-2005 (Trigésimo tercera sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 43.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 44.

Ejecución.
En la primera parte de la sesión de clase los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 43 que plantea una situación problemática que resuelve la suma de números decimales. A través de la resolución de problemas se persigue que los alumnos identifiquen la operación suma de decimales y que utilicen el cálculo simbólico para cuantificar el resultado de la operación. Además, en cuanto a la gestión del algoritmo de la suma de números decimales, se pretende que los alumnos apliquen el procedimiento de cálculo y, en la medida de lo posible, que sean capaces de justificar el algoritmo a partir de las representaciones polinómicas decimales asociadas a los números decimales. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 43:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 43. Fecha: ______________

Un albañil ha colocado el rodapié de una habitación. Por la mañana ha colocado una longitud de 6´5 m. de rodapié y por la tarde coloca 3´8 m, ¿cuántos metros de rodapié ha colocado?

SOLUCIÓN: La longitud del rodapié que ha colocado es ___________________

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

$6'5 = 6 + \frac{5}{10}$

$3'8 =$

Indica cómo has resuelto el problema: ____

Los alumnos resuelven rápidamente el problema y se procede a su evaluación conjunta. La alumna B03 que yerra al operar con fracciones sale a la pizarra y aporta la solución correcta.

En la segunda parte de la sesión los alumnos abordan la resolución de la Ficha de trabajo nº 44 que plantea otra situación problemática que resuelve la suma de números decimales y cuyo enunciado es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 44. Fecha: ______________

Un grupo de amigas quedan para caminar dos veces al día. Por la mañana andan 4´5 Km. y por la tarde 3´75 Km. ¿Cuantos kilómetros caminan cada día?

SOLUCIÓN: Cada día caminan ___________________________________

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

4´5 =

3´75 =

Indica cómo has resuelto el problema: ____

El profesor recoge las tarjeta de evaluación según la van cumplimentando los alumnos y propone evaluar la tarea. El alumno B02 sale a la pizarra, y con la ayuda del profesor que le facilita tiras de papel para modelizar las cantidades que intervienen en el problema, consigue resolver la situación problemática.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos de la Segunda Etapa identifican la operación suma y saben calcular el resultado de la suma de números decimales. Todos los alumnos, excepto B03 y B14, saben resolver el problema que se propone en la Ficha de trabajo nº 43. Del mismo modo, el problema de la Ficha de trabajo nº 44 lo resuelven correctamente todos los alumnos, excepto B02.

Otra cuestión diferente es la capacidad de los alumnos para justificar el algoritmo de la suma de decimales a partir de sus representaciones polinómicas decimales asociadas. En la Primera Etapa de Experimentación pudimos observar que los alumnos de la Primera Etapa no reconocían la necesidad de justificar el algoritmo de la suma de decimales porque les parecía superfluo justificar un procedimiento de cálculo del que conocen su manejo debido a su semejanza con el de los números naturales. En esta Segunda Etapa, las modificaciones introducidas en los enunciados de las Fichas de trabajo fuerzan a que los alumnos escriban los números decimales como sumas de fracciones. Esta modificación hace que el 60% de los alumnos justifiquen el funcionamiento del algoritmo de la suma de decimales.

Valoración
Todos los alumnos de la segunda Etapa identifican la suma de decimales como la operación que resuelve las situaciones problemáticas enunciadas en las Fichas de trabajo nº 43 y nº 44. El 90% de estos alumnos saben aplicar el algoritmo usual de la suma de números decimales que consiste en escribir los sumandos en vertical, alineados por la coma decimal, y sumar como en el caso de número naturales.

Nuestra propuesta de enseñanza pretende que los alumnos conjeturen y justifiquen los algoritmos de las operaciones con decimales utilizando la Representación Polinómica Decimal asociada al número decimal porque de esta forma mejora la comprensión de los alumnos al disponer de mecanismos conceptuales de control de las manipulaciones simbólicas que efectúan en el algoritmo. Sin embargo, el parecido entre los algoritmos de cálculo de números decimales y los de números naturales constituye un obstáculo didáctico. Los alumnos, si no reciben consignas explícitas de actuación, tienden a aplicar los algoritmos usuales y no afrontan la justificación de los procedimientos de cálculo porque les resulta complejo y tedioso operar con fracciones decimales para justificar el funcionamiento de un procedimiento de cálculo que conocen por debido a su semejanza con el de números naturales.

Día 16-2-2005 (Trigésimo cuarta sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 45.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 46.

Ejecución.

En la primera parte de la sesión de clase los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 45 que plantea una situación problemática que resuelve la suma y resta de números decimales. A través de la resolución de problemas se persigue que los alumnos identifiquen la operación resta de decimales y que utilicen el cálculo simbólico para cuantificar el resultado de la operación. Además, en cuanto a la gestión del algoritmo de la resta de números decimales, se pretende que los alumnos apliquen el procedimiento de cálculo y, en la medida de lo posible, que sean capaces de justificar el algoritmo a partir de las representaciones polinómicas decimales asociadas a los números decimales. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 45:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 45. Fecha: ___________

Un carnicero vende una pieza de ternasco de 20 Kgrs. A los tres primeros clientes les vende 3´75 Kgrs.; 5´8Kgrs. y 6´5 Kgrs. ¿Cuántos Kgrs. de la pieza de ternasco le queda por vender?

SOLUCIÓN: Le queda para vender ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

3´75 =

5´8 =

6´5 =

Indica cómo has resuelto el problema: ____

Cuando los alumnos resuelven el problema se procede a su evaluación conjunta. La alumna B12 que opera, de forma adecuada, con fracciones sale a la pizarra y aporta la solución correcta.

En la segunda parte de la sesión los alumnos abordan la resolución de la Ficha de trabajo nº 46 que plantea otra situación problemática que resuelve la suma y resta de números decimales y cuyo enunciado es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 46. Fecha: ______________

Un carpintero debe hacer un soporte para un canalón de un tejado que tiene 4´1m. de largo. Dispone de planchas de 0´5m., 1´55m., 1´2m., 1´85m. y 0´7m. Ha subido al tejado dos planchas: una de 1´55m. y otra de 0´7m; y se da cuenta de que no es suficiente para sostener el canalón de 4´1m. ¿Qué plancha deberá subir ahora

SOLUCIÓN: La plancha que debe subir al tejado mide ____________________________

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

4´1 =	0´5 =
1´55 =	1´2 =
1´85 =	0´7 =

Indica cómo has resuelto el problema: ____

El profesor recoge las tarjeta de evaluación según la van cumplimentando los alumnos y propone evaluar la tarea. El alumno B05 que ha necesitado la ayuda de los profesores para resolver el problema sale a la pizarra e indica la solución de la situación problemática.

Asistencia de alumnos

Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B17.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos de la Segunda Etapa identifican la resta de decimales como la operación que resuelve las situación problemática propuestas en las Fichas de trabajo nº 45 y nº 46. Además, todos los alumnos saben aplicar el algoritmo usual de la resta de números decimales. No hemos detectado en las respuestas de los alumnos errores como descuidar la posición de la coma decimal y colocar los números en vertical y alineados por la derecha.

Nuestra propuesta de enseñanza pretende que los alumnos, además de que apliquen el algoritmo usual de la resta de decimales, conjeturen y justifiquen el algoritmo utilizando la Representación Polinómica Decimal asociada al número decimal. Sin embargo, solo la tercera parte de los alumnos (B03, B10, B12, B13, B15 y B18) de la Segunda Etapa siguen las consignas de los profesores y utilizan la representación fraccionaria para realizar la resta de decimales. Estos alumnos muestran una buena comprensión del número racional porque conectan mediante transformaciones simbólicas la representación fraccionaria y decimal.

Valoración
El modelo de medida funciona bien para dar sentido a la suma y a la resta de números decimales y para introducir el algoritmo usual de la suma y resta de números decimales como un procedimiento de cálculo más económico que el de la suma y resta de fracciones.

Los alumnos aprenden a manejar con rapidez los procedimientos de cálculo con decimales y saben aplicar los algoritmos usuales de la suma y de la resta de números decimales porque conocen que funciona de modo parecido al de los números naturales. No obstante, los conocimientos que poseen de las técnicas operatorias con números naturales no debería considerarse como garantía de comprensión conceptual. Por ejemplo, los alumnos no saben justificar el algoritmo de la resta de decimales con llevadas porque tampoco saben justificar la llevada en el algoritmo tradicional de la resta de naturales; y, sin embargo, saben restar números decimales.

La implementación de estas Fichas permiten cumplir parcialmente los objetivos previstos. Los alumnos saben dotar de significado a la operación resta de decimales y saben aplicar los procedimientos de cálculo de dicha operación. Sin embargo, los dos tercios de los alumnos no son capaces de justificar el algoritmo de la resta a partir de las representaciones fraccionarias asociadas al minuendo y sustraendo de la resta. Esta actuación requiere una revisión, en profundidad, de la enseñanza de los algoritmos escritos de números naturales que se realiza en todos los cursos de la Educación Primaria.

La enseñanza de los cálculos computacionales desde la comprensión reporta muchas más ventajas que inconvenientes. Como puntos fuertes destacamos que los alumnos reciben una enseñanza más crítica, de mayor riqueza conceptual, donde los algoritmos realizados con lápiz y papel asumen una nueva función: la de reforzar la comprensión de las estructuras numéricas y del sistema de numeración. Pero también presenta inconvenientes porque alarga considerablemente el proceso de instrucción y porque los cálculos con fracciones decimales resultan muy tediosos a los escolares dado que su sintaxis es más compleja. Estos dos factores han influido poderosamente en la Segunda Etapa de modo que solo la tercera parte de los escolares realizan la resta de decimales utilizando Representaciones Polinómicas Decimales.

Día 17-2-2005 (Trigésimo quinta sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 47.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 48.

Ejecución.
En la primera parte de la sesión de clase los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 47 que plantea una situación problemática de suma reiterada que resuelve la multiplicación de un número decimal por un número natural. A través de la resolución de problemas se persigue que los alumnos identifiquen esta operación resta de decimales y que utilicen el cálculo simbólico para cuantificar el resultado de la operación. Además, en cuanto a la gestión del algoritmo de la resta de números decimales, se pretende que los alumnos apliquen el procedimiento de cálculo y, en la medida de lo posible, que sean capaces de justificar el algoritmo de la multiplicación de un número decimal por un natural a partir de la representación polinómica decimal asociada al número decimal. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 47:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 47. Fecha: ______________

La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas consecutivas es de 2´75 metros?

SOLUCIÓN: La altura del edificio es ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

2´75 =

*Indica cómo has resuelto el problema:*____

Cuando los alumnos resuelven el problema se procede a su evaluación conjunta. El alumno B07 que no identifica la operación que resuelve el problema sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor, encuentra la solución correcta del problema.

En la segunda parte de la sesión los alumnos abordan la resolución de la Ficha de trabajo nº 48 que plantea dos situaciones problemáticas que se resuelven con la multiplicación de un número decimal por un natural, y cuyo enunciado es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 48. Fecha: ______________

La mejor marca olímpica de los 50 Km. marcha está próxima a 3´5 horas. ¿Cuántos minutos hay en 3´5 horas?

SOLUCIÓN: En 3´5 horas hay ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

3´5 =

Indica cómo has resuelto el problema:

____

He comprado 500 sobres. Cada sobre cuesta 0´05 euros. ¿Cuánto he gastado?

SOLUCIÓN: He gastado ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

0´05 =

Indica cómo has resuelto el problema:

El profesor recoge las tarjeta de evaluación según la van cumplimentando los alumnos y propone evaluar las dos situaciones problemáticas. La alumna B11 que ha necesitado la ayuda de los profesores para resolver el problema sale a la pizarra e indica la solución de la situación problemática. Termina la sesión de clase y no queda tiempo para evaluar el segundo problema de la ficha de trabajo nº 48. Se pospone su evaluación hasta el comienzo de la sesión del día siguiente.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Todos los alumnos, excepto el alumno B07, identifican la multiplicación de un decimal por un natural al resolver problemas que modelizan las situaciones problemáticas que se proponen en las Fichas de trabajo nº 47 y nº 48.

Todos los alumnos de la Segunda Etapa saben aplicar el algoritmo usual de la multiplicación de un número decimal por un natural. Los alumnos efectúan el cálculo como si se tratara de números naturales y, después, sitúan la coma sobre el resultado realizado con naturales. Los alumnos de la Segunda Etapa dan muestran de conocer la regla para "situar la coma" a pesar de que no han recibido enseñanza de dicha regla durante este curso.

Dado que los profesores de aula animan a los alumnos a que justifiquen el algoritmo escrito de la multiplicación, doce alumnos lo intentan. Entre las respuestas de estos alumnos, cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 47, aparecen dos estrategias diferentes:

a) Expresar el número decimal mediante su Representación Polinómica Decimal y multiplicar cada uno de las sumandos de la Representación Polinómica Decimal. Cuatro los alumnos (B13, B14, B15 y B18) de la Segunda Etapa utilizan esta estrategia.

b) Expresar el número decimal mediante su Representación Fraccionaria y multiplicar la fracción. Ocho alumnos (B03, B05, B09, B10, B11, B12, B16 y B18) de la Segunda Etapa, que se corresponden con el 45% de los alumnos, expresan el número decimal con una fracción y realizan correctamente la multiplicación. Estos alumnos no justifican el algoritmo usual de la multiplicación pero si que justifican la regla para "situar la coma" que consiste en multiplicar el decimal, que actúa como multiplicando, como si se tratase de un natural y, sobre el resultado de la multiplicación, desplazar la coma hacia la izquierda tantos lugares como cifras decimales tenga el multiplicando.

<u>Valoración</u>
Los alumnos identifican la operación multiplicación al resolver situaciones problemáticas en la que una cantidad de magnitud se repite un número entero de veces; y saben aplicar el procedimiento de cálculo usual de la multiplicación de un decimal por un natural.

La propuesta de enseñanza se plantea objetivos más ambiciosos como el de que los alumnos justifiquen los algoritmos de cálculo porque esta actividad mejora la comprensión del número racional al conectar la representación fraccionaria y la notación decimal. En el caso el algoritmo de la multiplicación este objetivo se alcanza parcialmente porque, aproximadamente, la mitad de los alumnos de las dos Etapas optan por la multiplicación de naturales y, después, aplicar la regla para "situar la coma" que conocen aunque no se haya institucionalizado en el aula; en lugar de expresar el decimal mediante su Representación Fraccionaria o su Representación Polinómica Decimal asociada y operar con estos símbolos para justificar la regla para "situar la coma" o bien justificar el algoritmo usual de la multiplicación.

<u>Toma de decisiones</u>
El Equipo de Investigación propone suprimir las Fichas de trabajo que en la Primera Etapa venían identificadas por nº 43 y nº 44 y que tenían por objetivo introducir la regla para "situar la coma". En este momento carece de sentido resolver estas Fichas dado que los alumnos conocen y saben aplicar dicha regla.

Día 18-2-2005 (Trigésimo sexta sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Evaluar la Ficha de trabajo nº 48.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 49.

<u>Ejecución</u>.
Al comenzar la sesión de clase se procede a evaluar la Ficha de trabajo nº 48 que contiene dos situaciones problemáticas que se resuelven con la multiplicación de un decimal por un número natural. Los alumnos B02 y B14 que no han sabio resolver estos problemas salen a la pizarra y los resuelven con la ayuda del profesor. Las alumnas resuelven los problemas utilizando dos estrategias: operando con números decimales y operando con fracciones decimales.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 49 que plantea dos situaciones problemáticas que se resuelven con la división de un número decimal por un natural, y cuyo enunciado es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 49. Fecha: _____________

Un carpintero corta un listón de 1´5 metros de longitud en cuatro partes iguales. ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes iguales?

SOLUCIÓN: La longitud de una de las partes del listón es __________________

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

1´5 =

Indica cómo has resuelto el problema:

____

Con 0´375 Kgrs. de carne picada haces 5 hamburguesas iguales. ¿Cuánto pesa cada una de las cinco hamburguesas?

SOLUCIÓN: Cada hamburguesa pesa ______________________________

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

0´375 =

Indica cómo has resuelto el problema:

El profesor recoge las tarjeta de evaluación según la van cumplimentando los alumnos y propone evaluar las dos situaciones problemáticas. Los alumnos B17 y B05 que han errado al resolver la primera y segunda situación problemática, respectivamente, salen a la pizarra y resuelven la ambos problemas.

Asistencia de alumnos
Faltan a clase los alumnos B02, B03 y B16.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos identifican la multiplicación de un número decimal por un natural como la operación que resuelve los problemas planteados en la Ficha de trabajo nº 48. El 80% de los alumnos de la Segunda Etapa saben aplicar el algoritmo de la multiplicación de un decimal por un natural. Sin embargo, solo tres alumnos (B03, B10 y B18) saben calcular el resultado de la operación utilizando fracciones decimales.

Los alumnos identifican la división de un número decimal por un natural como la operación que resuelve los problemas planteados en la Ficha de trabajo nº 49. El 80% de los alumnos de la Segunda Etapa comprenden que la división resuelve las situaciones problemáticas de reparto igualitario.

El 75% de los alumnos de la Segunda Etapa aplican correctamente el algoritmo de la división a pesar de que apenas utilizan representaciones polinómicas decimales para justificar el procedimiento de cálculo. Ahora bien, sólo cuatro alumnos (B10, B15, B17 y B18) justifican los algoritmos utilizados. Los alumnos B15 y B17 utilizan el algoritmo usual basado en el reparto por fases, y explicitan los órdenes de unidades que repartes en cada fase. Y los alumnos B10 y B18 utilizan una estrategia alternativa que consiste en realizar la división como si el dividendo fuera un natural y, posteriormente, dividir el resultado por la potencia de diez adecuada.

Excepto estos dos últimos alumnos, los demás no conjeturan la estrategia basada en la equivalencia de repartos para calcular la división de un decimal entre un natural. En la Segunda Etapa se realiza una modificación que afecta a la metodología de la propuesta didáctica y que se concreta en el que los alumnos no reciben indicaciones para que supriman las cifras decimales del dividendo.

Los datos obtenidos en la Segunda Etapa, en relación con la modificación metodológica que postula no sugerir a los escolares la supresión de las cifras decimales, aportan la siguiente información:

a) Los alumnos no conjeturan la regla de la supresión de las cifras decimales del dividendo y optan por operar directamente con el número decimal.

b) Los alumnos saben aplicar el algoritmo usual de la división sin necesidad de utilizar la regla de la supresión de las cifras decimales del dividendo.

c) Los alumnos aplican correctamente el algoritmo usual de la división pero descuidan la simbolización del tamaño de las cantidades que van a repartir, y del número y del tamaño de las partes que obtienen en cada fase del reparto.

d) La supresión o mantenimiento de la modificación introducida en la Segunda Etapa no produce variaciones importantes en el rendimiento de los alumnos de la Primera y Segunda Etapa.

Valoración
Los alumnos comprenden el significado de la multiplicación de un número decimal por un natural y saben aplicar el algoritmo usual de esta operación. En cambio, tienen grandes dificultades para justificar este algoritmo utilizando la Representación Fraccionaria o la Representación Polinómica Decimal: la semejanza de este algoritmo con el de la multiplicación de naturales constituye un obstáculo didáctico dado que de alumnos de esta Etapa optan por multiplicar como si se tratasen de naturales y, después, aplicar la regla para "situar la coma".

El modelo de cociente partitivo funciona bien para dar sentido a la división de un número decimal entre un natural y para enseñar el algoritmo usual de esta operación. A pesar de que el 75% de los alumnos saben aplicar el algoritmo, solo el 25% de los alumnos justifican el algoritmo usual de la división de un número decimal entre un natural. Los alumnos siguen teniendo dificultades para justificar este procedimiento de cálculo con decimales porque:

a) no perciben la necesidad de justificar los algoritmos de cálculo que conocen,

b) cuando efectúan el algoritmo de la división descuidan la simbolización del tamaño de las cantidades que van a repartir, y del número y del tamaño de las partes que obtienen en cada fase del reparto, y

c) el conocimiento que tienen los alumnos del algoritmo de la división de naturales y la semejanza entre este algoritmo y el de decimales constituye un obstáculo didáctico porque los alumnos centran su atención en las manipulaciones simbólicas y tienden a obviar el proceso de un reparto, o si lo evocan, no simbolizan los elementos del reparto realizado por fases.

Día 21-2-2005 (Trigésimo séptima sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 50

Ejecución.
En la primera parte de la sesión de clase los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 50 que plantea tres situaciones problemáticas de reparto con la intención de que los alumnos conjeturen la regla de la división de un número natural o decimal por potencias de 10. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 47:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 50. Fecha: _____________

Primera pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 10 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Segunda pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 100 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Tercera pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 1000 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Cuarta pregunta:

Completa la siguiente tabla:

	: 10	: 100	: 1000
125			

Inventa una regla para dividir un decimal por 10, 100 y 1000: ____________________________________

Los alumnos han tenido dificultades para conjeturar y expresar correctamente la regla de la división de un natural por una potencia de diez. Antes de concluir la sesión de clase se procede a evaluar la Ficha de trabajo. Sale a la pizarra el alumno B07 que yerra al resolver la tarea y, lo que es peor, apenas se ha esforzado en hallar la solución de la tarea. El resto de los alumnos escriben en sus cuadernos las respuestas de cada una de las preguntas que se formulan en la Ficha de trabajo.

Solo una cuarta parte de los alumnos ha expresado correctamente la regla. Algunos alumnos no han entendido el objetivo de la enseñanza de esta regla y, como en el caso de la multiplicación (tareas nº 43 y 44), pretenden aplicar el algoritmo de la división y, a la vez, aplicar la regla. Por este motivo, pensamos que sería conveniente posponer la introducción de esta regla.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B02.

Aspectos relacionados con la comprensión
Cuatro alumnos (B06, B07, B14 y B16) yerran al realizar alguna de las tres divisiones: 125 barras entre 10 personas, 125 barras entre 100 personas y125 barras entre 1000 personas. Los errores que cometen estos alumnos son puntuales, no son sistemáticos. Los restantes alumnos, que suponen el 78% de los alumnos del grupo, han sabido aplicar correctamente el algoritmo de la división.

Los dos tercios de los alumnos han sabido expresar correctamente la regla de la división de un natural por una potencia de diez. Los restantes alumnos dan muestras de comprender la regla pero no saben expresarla correctamente. Este es el caso de la alumna B08 que a pesar de que no expresa correctamente la regla parece que comprende la idea porque escribe:

“los ceros que hayan después corren la coma hacia la izquierda”

Valoración
De entre los alumnos que han sabido conjeturar una regla adecuada algunos alumnos expresan la regla con gran precisión. Este es el caso de los alumnos B9, B10 u B18 que escriben:

“lo que hay que hacer es poner el mismo número que el dividendo en el resultado y si en el divisor hay un 0 corres la coma un lugar hacia la izquierda, si hay dos 0 dos lugares hacia la izquierda, y así sucesivamente” (alumno B9)

“corre la coma hacia a izquierda tantos lugares como ceros haya. Si es multiplicación, a la derecha” (alumno B10)

“cuando lo divides para 10 te sale un resultado, cuando lo divides para 100 como tiene un 0 más que el 10 la coma la corres hacia la izquierda un número y cuando divides para 1000 como tiene 2 ceros más que el 10 corres la coma 2 lugares hacia la izquierda” (alumno B18)

Los alumnos son capaces de conjeturar reglas que expresan propiedades aritméticas como la de “situar la como” en multiplicaciones o divisiones si antes han realizado un trabajo previo de casos particulares que les permiten observar patrones y regularidades.

Día 22-2-2005 (Trigésimo octava sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 51

Ejecución
Los alumnos abordan la resolución de la Ficha de trabajo nº 51 que plantea tres situaciones problemáticas concatenadas con el objetivo de profundizar en el significado del producto de un número decimal por un natural, ejercitar el algoritmo de cálculo de esta operación e introducir, en los apartados segundo y tercero de la ficha, los procedimientos de cálculo de las operaciones multiplicación y división de dos números decimales. Mostramos a continuación el enunciado de la esta Ficha de trabajo:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 51. Fecha: ______________

Primera parte:

El médico le ha dicho a mi abuela que tiene que beber cada día 4 vasos de agua. La capacidad del vaso es 0´3 litros. ¿Cuántos litros de agua debe beber cada día?

SOLUCIÓN: Cada día debe beber ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Segunda parte:

La caja de agua mineral embotellada contiene 12 botellas de 1´5 litros. ¿Cuántos litros de agua hay en una caja?

SOLUCIÓN: En cada caja hay ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Tercera parte:

Si compro una caja de agua embotellada y solo la utilizo para que mi abuela beba la cantidad de agua que le dice el médico, ¿cuántos días durará la caja?

SOLUCIÓN: La caja durará ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Los alumnos no han tenido dificultades para resolver las dos primeras situaciones problemáticas formuladas en la Ficha. Solo dos alumnos (B04 y B05) no han identificado la multiplicación como la operación que resuelve las dos primeras situaciones problemáticas; y otros dos (B02 y B16) han errado al realizar algún algoritmo de cálculo escrito.

Los alumnos conocen el algoritmo usual de la multiplicación de dos números decimales, a pesar de que no han recibido enseñanza de este procedimiento de cálculo. Los alumnos multiplican los decimales como si fueran números naturales y, después, aplican la regla de situar la coma. En cambio, tienen dificultades para gestionar simbólicamente, en la tercera situación problemática, el cálculo de la división 18:1´2

Los alumnos desconocen la estrategia de multiplicar el dividendo y el divisor por 10 para obtener otra división equivalente cuyos términos son números naturales y, además, no son capaces de conjeturarla. Cuando los profesores de aula sugieren utilizar esta estrategia la mayoría de los alumnos comprenden que el resultado de la división no varía cuando se multiplica el dividendo o el divisor por un mismo número y, además, algunos alumnos saben utilizar de forma adecuada dicha estrategia.

Después se procede a la evaluación conjunta de la tarea. El alumno B05, que no identifica la operación que resuelve la primera situación problemática, sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor, resuelve las tres situaciones problemáticas.

Antes de concluir la sesión de clase los alumnos reciben un cuadernillo que, a modo de libro de texto, explica la introducción del número decimal como resultado de un reparto; amplia el significado del decimal como resultado de una medida, y explica el significado y cálculo de algunas operaciones con números decimales. Además, el profesor informa a los alumnos que, en las dos sesiones de clase, van a realizar una prueba de evaluación de los aprendizajes realizados durante la fase de implementación.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos tienen dificultades al resolver el último apartado que exige calcular la división 18 : 1´2 porque desconocen la estrategia de multiplicar el dividendo y el divisor por 10 para obtener otra división equivalente cuyos términos sean números naturales. Cundo los profesores de aula sugieren esta estrategia los alumnos dan muestran de comprensión pero, en general, son incapaces de conjeturarla.

La justificación de los algoritmos de cálculo de las operaciones aritméticas con números decimales constituye un obstáculo didáctico ocasionado por su semejanza con los algoritmos de números naturales y, también, por el desconocimiento que poseen los alumnos de las propiedades que justifican los algoritmos de números naturales.

La multiplicación y división de números decimales no es un objetivo de nuestra propuesta de enseñanza a implementar en 5º curso de Educación Primaria. Este conocimiento conceptual y sus procedimientos de cálculo deberán ser estudiado en la implementación de 6º curso de Educación Primaria con la incorporación de un nuevo significado del número racional, de razón.

<u>Toma de decisiones</u>
Concluye la Segunda Etapa de la Experimentación y consideramos que se han cubierto los objetivos

previstos. Antes de concluir la implementación de la propuesta de enseñanza se va a realizar una evaluación de los aprendizajes realizados por los alumnos. La evaluación se va a desarrollar en las dos últimas sesiones de la implementación de la propuesta didáctica.

Día 23-2-2005 (Trigésimo novena sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Primera parte de la prueba de evaluación de los aprendizajes

<u>Ejecución</u>
Los alumnos resuelven las primeras tres cuestiones de la prueba de evaluación que mostramos a continuación. La primera pregunta indaga si los alumnos comprenden la representación fraccionaria y decimal como resultado de la medida de cantidades de longitud:

1º Si la unidad de medida es

a) Expresa con una fracción la longitud del segmento AB

El segmento AB mide ________________

B) Expresa con un número decimal la longitud del segmento AB

El segmento AB mide ________________

La segunda pregunta indaga si los alumnos saben ordenar fracciones contextualizadas como cantidades de longitud y si saben cuantificar la diferencia entre dichas representaciones fraccionarias:

2º Tienes dos listones: uno tiene una longitud de $\frac{5}{4}$ *de unidad y otro una longitud* $\frac{6}{5}$ *de unidad. Justifica tu respuesta.*
Solución: ____

¿Qué diferencia de longitud hay entre los dos listones?
Solución: ____

La tercera pregunta indaga la comprensión de los alumnos de la representación fraccionaria y decimal como resultado del reparto igualitario de cantidades de longitud; mediante la simbolización del reparto y las representaciones gráficas que efectúan los alumnos y que están asociadas a ambas notaciones simbólicas:

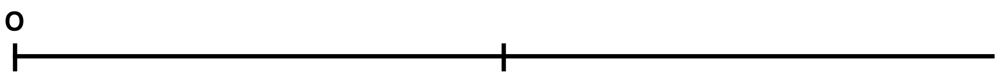
3º Cinco niños se reparten, en partes iguales, 6 barras de regaliz

A) Expresa, con una fracción, la cantidad de regaliz que recibe cada niño

Solución: ____

B) Si la longitud de la barra de regaliz es

dibuja, a partir de O, la fracción que indica la cantidad de regaliz que recibe cada niño:

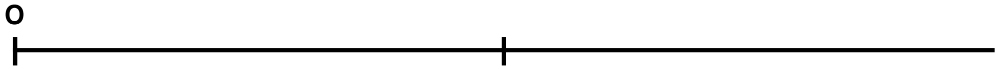


C) Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño:

Solución: ____

D) Si la longitud de la barra de regaliz es

dibuja, a partir de O, el número decimal que indica la cantidad de regaliz que recibe cada niño:



Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la primera pregunta indican que poseen una excelente comprensión de la fracción como medida de la cantidad de longitud: el 94% de los alumnos saben encontrar la fracción que mide la cantidad de longitud de un segmento que mide 5/4 unidades.

El 72% de los alumnos saben expresar, con un número decimal, la fracción 5/4 unidades. A pesar de que los alumnos disponen de tiras de papel de la misma longitud que la unidad, éstos optan por convertir la fracción en el número decimal en vez de medir directamente. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 1:

	Preg 1/ Medir	Preg 1/Paso de fracción a número decimal
R. incorrectas	1	5
R. correctas	17	13
% de R. incorrectas	*6*	*28*
% de R. correctas	*94*	*72*

Los alumnos saben comparar fracciones contextualizadas como medida de cantidades de longitud: el 90% de los alumnos saben comparar la longitud de los listones 5/4 y 6/5 de unidad. Además, todos los alumnos identifican la operación resta de fracciones para cuantificar la diferencia entre ambas cantidades de longitud. El porcentaje de éxito desciende hasta el 61% cuando los alumnos utilizan la equivalencia de fracciones para cuantificar la diferencia entre las cantidades de longitud. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 2:

	Preg 2/ Comparar fracciones	Preg 2/Cálculo de la resta de fracciones
R. incorrectas	2	7
R. correctas	16	11
% de R. incorrectas	*11*	*39*
% de R. correctas	*89*	*61*

Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la tercera pregunta indica que poseen una buena comprensión de la fracción y del número decimal que expresa el resultado del reparto igualitario de 6 barras de regaliz entre 5 niños: medida de la cantidad de longitud: el 83% de los alumnos saben encontrar la fracción que expresa el resultado del reparto y el 89% saben encontrar el número decimal que expresa el resultado del mismo reparto. El porcentaje de éxito desciende hasta el 72% y 67% cuando los alumnos representan gráficamente el resultado del reparto expresado mediante una fracción y un número decimal, respectivamente. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 3:

	Preg3/Fracción como reparto	Preg3/Decimal como reparto	Preg 3/ Representación gráfica de la fracción	Preg 3/ Representación gráfica del decimal
R. incorrectas	3	2	5	6
R. correctas	15	16	13	12
% de R. incorrectas	*17*	*11*	*28*	*33*
% de R. correctas	*83*	*89*	*72*	*67*

Valoración
Los alumnos poseen una comprensión adecuada de los modelos de medida y de cociente partitivo para dar significado a la fracción y al número decimal. El modelo de medida que ha sido objeto de enseñanza en los cursos de 4 y 5º de Educación Primaria evoca a los alumnos ideas más persistentes que el modelo de cociente partitivo que ha sido enseñando únicamente en 5º curso de Educación Primaria.

Los alumnos construyen la representación fraccionaria y decimal en las tareas de medida y de reparto igualitario. Los alumnos evalúan semánticamente, de forma adecuada, la fracción y el número decimal: los dos tercios de los alumnos saben representar gráficamente sobre la recta numérica la fracción y el número decimal.

Los alumnos comprenden que la fracción y el número decimal son representaciones simbólicas equivalentes de una misma cantidad de longitud porque en la primera pregunta los alumnos se sirven del conociendo de la fracción 5/4 u para convertir dicha fracción en la notación decimal equivalente.

Día 24-2-2005 (Cuadragésima sesión)
Plan previsto.
1º Segunda parte de la prueba de evaluación de los aprendizajes

Ejecución
La cuarta pregunta indaga por el significado y el cálculo computacional de la multiplicación de una fracción por un número natural, mediante la resolución del siguiente problema:

4º ¿Cuántos litros de agua hay en un lote que tiene 6 botellas de $\frac{3}{2}$ *de litro cada una?*
Solución: ____________________

La quinta pregunta indaga si los alumnos saben ordenar números decimales contextualizados como cantidades de longitud y si saben cuantificar la diferencia entre dichas notaciones decimales:

5º Dos amigas están comparando sus estaturas:
Lucía mide 1´6 metros, y
Maite mide 1´48 metros
a) ¿Cuál de las dos amigas es más alta?

Solución: ____________________ *porque* ____________________
b) ¿Cuánto mide más una que otra?

Solución: ____________________

La sexta pregunta indaga si los alumnos saben convertir un número decimal en su representación fraccionaria:

6º Expresa con una fracción, la más simplificada posible, el peso del paquete de Nesquik (3´5 Kgrs)

Solución: ____________________

La séptima pregunta indaga por el significado y el cálculo computacional de la división de una fracción entre un número natural, mediante la resolución del siguiente problema

7º Repartes el contenido de una botella de agua de $\frac{3}{2}$ *de litro en 6 vasos de modo que en cada vaso hay la misma cantidad de agua. ¿Qué cantidad de agua hay en cada vaso?*

Solución: ____________________

La octava pregunta indaga por la comprensión del número decimal asociado a una situación de reparto igualitario de una cantidad discreta, mediante la resolución del siguiente problema:

8º Si te dan la cuarta parte de 75 euros. ¿Cuántos euros te dan?

Solución: ____________________

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la cuarta pregunta indican que éstos comprenden el significado de la multiplicación de una fracción por un número natural: todos los alumnos, excepto B07, identifican la operación. Además todos, salvo B07 y B14, saben calcular el resultado de la operación 3/2 x 6. Tan solo hemos detectado algunas dificultades al simplificar la fracción 18/2 litros. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 4:

	Preg 4/ Identificación y cálculo de la multiplicación de una fracción por un natural
R. incorrectas	2
R. correctas	16
% de R. incorrectas	*11*
% de R. correctas	*89*

Los alumnos saben comparar números decimales contextualizadas como medida de cantidades de longitud: todos los alumnos, excepto B02, saben comparar la longitud de estaturas de dos niñas y todos ellos saben calcular la diferencia entre las estaturas de las niñas. Hemos detectado alguna dificultad cuando los alumnos convierten metros en centímetros. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 5:

	Preg 5/ Comparar números decimales	Preg 5/Identificación y cálculo de la resta de decimales
R. incorrectas	2	7
R. correctas	16	11
% de R. incorrectas	*11*	*39*
% de R. correctas	*89*	*61*

Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la sexta pregunta indica que los alumnos saben convertir el número decimal 3´5 kgrs en la fracción 7/2 kgrs. El 75% de los alumnos saben convertir el número decimal en su representación fraccionaria asociada. La mayoría de los alumnos conocen la representación polinómica decimal que subyace al número decimal. Hemos detectado dificultades para simplificar la fracción 35/10. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 6:

	Preg 6/ paso de la notación decimal a la representación fraccionaria
R. incorrectas	4 (B02, B04, B11, B16)
R. correctas	14
% de R. incorrectas	*22*
% de R. correctas	*78*

Las preguntas nº 7 y nº 8 indagan la comprensión de la operación de división de una fracción, en el problema nº 7; y de un número natural contextualizado como cantidad de dinero, en el problema nº 8. Se trata de evaluar si los alumnos identifican la operación división por un natural y si saben realizan los cálculos computacionales. Los alumnos identifican con facilidad la operación división. Mostramos a continuación los resultados de las preguntas nº 7 y nº 8:

	Preg7/Identifica la división	Preg7/Cálculo de la división	Preg8/Identifica la división	Preg8/Cálculo de la división
R. incorrectas	5	8	2	4
R. correctas	13	10	16	14
% de R. incorrectas	*28*	*44*	*11*	*22*
% de R. correctas	*72*	*56*	*89*	*78*

Los alumnos resuelven con mayor facilidad la división de números decimales que la división de fracciones. La mayoría de los alumnos (B03, B05, B08, B10, B13, B15, B16, B17 y B18) que identifican la operación cuando resuelven el problema nº 7 optan por calcular la división 1´5 : 6 antes que efectuar la operación 3/2:6. Solo dos alumnos (B09 y B12) operan con fracciones utilizando el concepto de equivalencia para calcular la división.

Los alumnos identifican la operación división en situaciones de reparto igualitario de cantidades de magnitud continua o en situaciones de distribución de cantidades de magnitud continua. Los alumnos obtienen porcentajes de éxito altos cuando dividen dos números naturales para obtener la notación decimal. Sin embargo, el porcentaje de éxito desciende hasta el 56% cuando dividen una fracción entre un número natural.

Valoración
Los modelos de medida y de cociente partitivo permiten plantean a los situaciones problemáticas para que éstos doten de significado a la fracción, al número decimal y a las operaciones con fracciones y números decimales. Desde ambos modelos los alumnos conectan la representación fraccionaria y la notación decimal. Los alumnos obtienen porcentajes de éxito aceptables en la prueba de evaluación que indaga por la comprensión del número racional positivo con significado de medida y de cociente partitivo.

Toma de decisiones
Damos por concluida la Segunda Etapa de la Experimentación porque se ha implementado la secuencia de enseñanza que contempla la planificación inicial.

ANEXO III

Resultados de la Experimentación

III.1 Fichas de Evaluación

III.2 Prueba del Primer Ciclo

III.3 Prueba del Segundo Ciclo

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 1.1

Medida de un listón de longitud 5/4 de unidad

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CCI. 1.1.1	CCI. 1.2.1	Fracción
A01	3	3	10/8
A02	1	3	5/4
A03	0	0	
A04	1	3	5/4
A05	3	3	5/4
A06	3	3	10/8
A07	2	3	10/8
A08	2	3	10/8
A09	1	3	5/4
A10	3	3	10/8
A11	3	3	5/4
A12	3	3	10/8
A13	3	3	10/8
A14	3	3	5/4
A15	0	0	
A16	1	1	4/4
A17	1	3	5/4
A18	1	3	5/4
A19	3	3	5/4
A20	2	3	10/8
A21	3	3	5/4
A22	1	3	10/8
A23	1	3	5/4
A24	2	3	10/8
A25	1	3	5/4
A26	1	3	5/4
A27	0	0	
A28	2	3	5/4
A29	1	3	5/4
A30	3	3	5/4
A31	2	3	5/4
A32	1	3	5/4
A33	0	0	
A34	0	0	
A35	1	3	5/4
A36	3	3	5/4
A37	2	3	5/4
A38	1	3	10/8
A39	1	3	5/4
A40	3	3	5/4

FE nº1.1	CCI. 1.1.1	CCI. 1.2.1
0	5	5
1	15	1
2	7	0
3	13	34
% de 0	12,5	12,5
% de 1	37,5	2,5
% de 2	17,5	0
% de 3	32,5	85

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CCI. 1.1.1	CCI. 1.2.1	Fracción
B01	3	3	5/4
B02	2	3	5/4
B03	3	3	5/4
B04	3	3	5/4
B05	2	3	5/4
B06	2	3	5/4
B07	2	3	5/4
B08	2	3	5/4
B09	3	3	5/4
B10	3	3	5/4
B11	3	3	5/4
B12	3	3	5/4
B13	3	3	5/4
B14	3	3	5/4
B15	3	3	5/4
B16	1	3	5/4
B17	3	3	5/4
B18	3	3	5/4

FE nº1.1	CCI. 1.1.1	CCI. 1.2.1
0	0	0
1	1	0
2	5	0
3	12	18
% de 0	0	0
% de 1	6	0
% de 2	28	0
% de 3	67	100

CC.I.1.1 Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida de un listón de longitud 5/4 de unidad

CC.I.2.1 Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida de un listón de longitud 5/4 de unidad

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 1.2

Medida de un listón de longitud 5/6 de unidad

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CCI. 1.1.2	CCI. 1.2.2
A01	3	3
A02	3	3
A03	1	1
A04	1	3
A05	1	3
A06	3	3
A07	1	3
A08	1	3
A09	3	3
A10	3	3
A11	3	3
A12	1	3
A13	3	3
A14	3	3
A15	0	0
A16	1	1
A17	2	3
A18	3	3
A19	3	3
A20	1	3
A21	2	3
A22	1	3
A23	1	2
A24	1	3
A25	1	3
A26	1	1
A27	0	0
A28	3	3
A29	2	3
A30	3	3
A31	1	3
A32	1	3
A33	0	0
A34	0	0
A35	1	1
A36	2	3
A37	1	3
A38	1	3
A39	1	1
A40	3	3

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CCI. 1.1.2	CCI. 1.2.2
B01	2	3
B02	3	3
B03	0	0
B04	2	3
B05	3	3
B06	3	3
B07	3	3
B08	3	3
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	1	3
B14	3	3
B15	3	3
B16	0	0
B17	3	3
B18	3	3

FE nº1.2	CCI. 1.1.2	CCI. 1.2.2
0	4	4
1	19	5
2	4	1
3	13	30
% de 0	10	10
% de 1	48	13
% de 2	10	3
% de 3	33	75

FE nº1.2	CCI. 1.1.2	CCI. 1.2.2
0	2	2
1	1	0
2	2	0
3	13	16
% de 0	11	11
% de 1	6	0
% de 2	11	0
% de 3	72	89

CC.I.1.2 Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida de un listón de longitud 5/6 de unidad

CC.I.2.2 Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida de un listón de longitud 5/6 de unidad

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 2

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. II.1 (4/7)	CC. II.1 (6/5)
A01	3	
A02	0	
A03	3	
A04	3	
A05		0
A06	2	
A07	3	
A08		1
A09		3
A10		3
A11	3	
A12		1
A13		3
A14	1	
A15		3
A16		3
A17	1	
A18		1
A19	1	
A20	1	
A21	3	
A22	3	
A23		1
A24		3
A25		1
A26		3
A27	0	
A28	3	
A29	1	
A30	2	
A31	3	
A32		1
A33		0
A34		1
A35		3
A36	3	
A37	3	
A38		1
A39	1	
A40		3

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. II.1 (7/8)	CC. II.1 (5/3)
B01	1	1
B02	1	1
B03	3	2
B04	1	1
B05	3	3
B06	3	1
B07	3	1
B08	1	1
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	1
B12	1	1
B13	1	1
B14	1	1
B15	3	1
B16	3	1
B17	3	3
B18	3	3

FE nº2	CC. II.1 (4/7)	CC. II.1 (6/5)
0	2	2
1	6	8
2	2	0
3	11	9
% de 0	10	11
% de 1	29	42
% de 2	10	0
% de 3	52	47

FE nº2	CC. II.1 (7/8)	CC. II.1 (5/3)
0	0	0
1	7	12
2	0	1
3	11	5
% de 0	0	0
% de 1	39	67
% de 2	0	6
% de 3	61	28

CC. II.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del numerador y denominador de la fracción

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 2BIS
Evaluación semantica de la fracción como medida de cantidades de longitud

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. II.2 (5/4)	CC. II.2 (4/3)
B01	3	3
B02	3	3
B03	3	3
B04	2	3
B05	2	1
B06	1	1
B07	3	3
B08	3	2
B09	3	3
B10	3	3
B11	1	1
B12	3	3
B13	3	3
B14	0	0
B15	3	3
B16	1	1
B17	3	3
B18	3	3

FE nº2BIS	CC. II.1 (5/4)	CC. II.1 (4/3)
0	1	1
1	3	4
2	2	1
3	12	12
% de 0	6	6
% de 1	17	22
% de 2	11	6
% de 3	67	67

CC. II.2 Razonamientos empleados para construir gráficamente una cantidad de magnitud longitud

Resultados de la Ficha de Evaluación nº 3

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. I.1	CC. I.2	Fracción
A01	3	3	15/8
A02	1	1	8/16
A03	2	3	15/8
A04	0	0	
A05	3	3	15/8
A06	1	3	15/8
A07	1	3	15/8
A08	3	3	15/8
A09	0	0	
A10	3	3	15/8
A11	3	3	15/8
A12	1	1	16/8
A13	2	3	15/8
A14	3	3	30/16
A15	3	3	30/16
A16	2	3	15/8
A17	2	3	30/16
A18	1	3	30/16
A19	1	3	30/16
A20	3	1	18/8
A21	2	3	15/8
A22	1	3	15/8
A23	0	0	
A24	0	0	
A25	1	3	15/8
A26	1	1	7/4
A27	1	3	15/8
A28	3	3	15/8
A29	3	3	15/8
A30	3	3	15/8
A31	3	3	15/8
A32	1	3	15/8
A33	3	3	15/8
A34	3	3	15/8
A35	1	3	15/8
A36	2	3	15/8
A37	1	3	15/8
A38	1	3	30/16
A39	1	1	
A40	2	3	15/8

FE nº3	CCI. 1.1	CCI. 1.2
0	4	4
1	15	5
2	7	0
3	14	31
% de 0	10	10
% de 1	38	13
% de 2	18	0
% de 3	35	78

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. I.1	CC. I.2	Fracción
B01	3	3	15/8
B02	1	3	15/8
B03	3	3	15/8
B04	3	3	30/16
B05	1	3	15/8
B06	2	3	15/8
B07	3	3	15/8
B08	1	3	15/8
B09	3	3	15/8
B10	3	3	15/8
B11	3	3	30/16
B12	3	3	30/16
B13	3	3	15/8
B14	3	3	15/8
B15	3	3	15/8
B16	1	3	15/8
B17	3	3	15/8
B18	3	3	15/8

FE nº3	CCI. 1.1	CCI. 1.2
0	0	0
1	4	0
2	1	0
3	13	18
% de 0	0	0
% de 1	22	0
% de 2	6	0
% de 3	72	100

CC.I.1.1 Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida de un mantel de superficie 15/8 de unidad

CC.I.2.1 Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida de un mantel de superficie 15/8 de unidad

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 4

Evaluación semantica de la fracción como medida de cantidades de superficie

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. II.2 (5/4)	CC. II.2 (4/3)
B01	3	1
B02	3	3
B03	3	3
B04	3	3
B05	3	3
B06	1	2
B07	1	1
B08	2	2
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	3	3
B14	1	1
B15	3	3
B16	1	1
B17	3	3
B18	3	3

FE nº4	CC. II.1 (5/4)	CC. II.1 (4/3)
0	0	0
1	4	4
2	1	2
3	13	12
% de 0	0	0
% de 1	22	22
% de 2	6	11
% de 3	72	67

CC. II.2 Razonamientos empleados para construir gráficamente una cantidad de magnitud superficie

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 5

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. V.1	CC. V.2
A01	2	3
A02	1	3
A03	0	0
A04	3	3
A05	2	3
A06	1	3
A07	1	3
A08	3	3
A09	3	3
A10	3	3
A11	2	3
A12	2	3
A13	2	3
A14	2	3
A15	2	3
A16	2	3
A17	2	3
A18	3	3
A19	2	3
A20	0	0
A21	3	3
A22	2	3
A23	1	1
A24	0	0
A25	2	3
A26	1	3
A27	2	3
A28	1	1
A29	3	3
A30	2	3
A31	2	3
A32	1	3
A33	3	3
A34	2	3
A35	2	3
A36	1	3
A37	2	3
A38	1	3
A39	1	3
A40	2	3

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. V.1	CC. V.2
B01	2	3
B02	1	1
B03	2	3
B04	2	3
B05	2	3
B06	2	3
B07	3	3
B08	2	3
B09	2	3
B10	2	3
B11	2	3
B12	3	3
B13	2	3
B14	2	3
B15	2	3
B16	2	3
B17	2	3
B18	2	3

FE nº 5	CC. V.1	CC. V.2
0	3	3
1	10	2
2	19	0
3	8	35
% de 0	8	8
% de 1	25	5
% de 2	48	0
% de 3	20	88

FE nº 5	CC. V.1	CC. V.2
0	0	0
1	1	1
2	15	0
3	2	17
% de 0	0	0
% de 1	6	6
% de 2	83	0
% de 3	11	94

CC. V.1 Argumentaciones sobre el significado de la equivalencia de fracciones
CC. V.2 Razonamientos empleados para construir fracciones equivalentes a otra dada

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 6
Comparar 5/4 de unidad y 4/3 de unidad

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VI.1	Estrategia	CC.VI.2
A01	3	G	3
A02	1	RM	1
A03	1	G	1
A04	1	NI	1
A05	1	G	1
A06	3	G	3
A07	3	G	3
A08	3	G	3
A09	3	RM	2
A10	3	G	3
A11	3	RM	3
A12	1	G	1
A13	3	RM	3
A14	3	G	3
A15	3	G	3
A16	3	M	3
A17	3	G	1
A18	3	NI	1
A19	3	NI	1
A20	3	M	3
A21	3	M	3
A22	3	G	1
A23	3	NI	1
A24	3	G	3
A25	3	G	1
A26	1	G	1
A27	3	RM	2
A28	3	M	3
A29	3	M	3
A30	3	G	3
A31	3	RM	3
A32	1	NI	1
A33	3	G	3
A34	3	G	3
A35	3	G	1
A36	3	G	3
A37	1	RM	1
A38	1	RM	1
A39	0	0	0
A40	3	G	3

FE nº 6	CC.VI.1	Estrategia	CC.VI.2
0	1		1
1	9		16
2	0		2
3	30		21
% de 0	*3*		*3*
% de 1	*23*		*40*
% de 2	*0*		*5*
% de 3	*75*		*53*

	Éxito	Estrategia
0	0	1
NI	0	5
M	5	5
G	13	21
RM	5	8
% de 0	*0*	*3*
% de NI	*0*	*13*
% de M	*100*	*13*
% de G	*62*	*53*
% de RM	*62*	*20*

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VI.1	Estrategia	CC.VI.2
B01	3	RM	3
B02	3	RM	2
B03	3	RM	3
B04	1	RM	1
B05	3	RM	3
B06	3	RM	3
B07	3	G	1
B08	3	G	3
B09	3	RM	3
B10	3	RM	3
B11	3	G	3
B12	3	RM	3
B13	3	G	2
B14	3	G	2
B15	0	0	0
B16	3	G	1
B17	3	RM	3
B18	3	RM	3

FE nº 6	CC.VI.1	Estrategia	CC.VI.2
0	1		1
1	1		3
2	0		3
3	16		11
% de 0	*6*		*6*
% de 1	*6*		*17*
% de 2	*0*		*17*
% de 3	*89*		*61*

	Éxito	Estrategia
0	0	1
NI	0	0
M	0	0
G	4	6
RM	10	11
% de 0	*0*	*6*
% de NI	*0*	*0*
% de M	*0*	*0*
% de G	*66*	*33*
% de RM	*90*	*61*

CC.VI.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la comparación de fracciones
CC.VI.2 Razonamientos empleados para comparar las fracciones

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales
G Utiliza gráficos
RM Utiliza razonamientos basados en la idea de medida

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 7
Comparar 4/5 de unidad y 5/6 de unidad

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. V.2	Estrategia
A01	3	RE
A02	0	-
A03	3	RE
A04	1	RE
A05	1	RE
A06	3	RE
A07	3	RE
A08	3	RE
A09	3	RE
A10	3	RE
A11	3	RE
A12	3	RE
A13	3	RE
A14	3	RE
A15	3	RE
A16	1	RE
A17	1	RE
A18	1	RE
A19	3	RE
A20	0	-
A21	3	G
A22	3	G
A23	3	RE
A24	3	RE
A25	1	RE
A26	1	RE
A27	3	RE
A28	1	G
A29	3	G
A30	3	RE
A31	3	RE
A32	1	RE
A33	3	RE
A34	3	RE
A35	3	RE
A36	1	G
A37	1	RE
A38	1	RE
A39	3	RE
A40	3	RE

FE nº 7	CC. V.2
0	2
1	12
2	0
3	26
% de 0	*5*
% de 1	*30*
% de 2	*0*
% de 3	*65*

	Éxito	Estrategia
0	0	0
NI	0	0
M	0	0
G	3	5
RE	23	33
% de 0		*0*
% de NI	*0*	*0*
% de M	*0*	*0*
% de G	*60*	*13*
% de RE	*70*	*83*

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. V.2	Estrategia
B01	3	RE
B02	1	RE
B03	2	RE
B04	0	-
B05	3	RE
B06	3	RE
B07	3	RE
B08	1	RE
B09	3	RE
B10	3	RE
B11	3	RE
B12	1	RE
B13	3	RE
B14	1	RE
B15	3	RE
B16	3	RE
B17	3	RE
B18	3	RE

FE nº 7	CC. V.2
0	1
1	4
2	1
3	12
% de 0	*6*
% de 1	*22*
% de 2	*6*
% de 3	*67*

	Éxito	Estrategia
0	0	1
NI	0	0
M	0	0
G	0	0
RE	13	17
% de 0		*6*
% de NI	*0*	*0*
% de M	0	*0*
% de G	0	*0*
% de RE	*76*	*94*

CC. V.2 Razonamientos utilizados sobre el uso de fracciones equivalentes en tareas de la comparación de fracciones

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales
G Utiliza gráficos
RE Utiliza razonamientos basados en el concepto de equivalencia

Resultados de la Ficha de Evaluación nº 8

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC. III.2
A01	3
A02	1
A03	3
A04	0
A05	3
A06	1
A07	1
A08	3
A09	3
A10	3
A11	3
A12	0
A13	3
A14	2
A15	3
A16	3
A17	2
A18	3
A19	1
A20	0
A21	3
A22	1
A23	3
A24	3
A25	0
A26	0
A27	3
A28	3
A29	3
A30	2
A31	1
A32	1
A33	3
A34	3
A35	3
A36	3
A37	3
A38	1
A39	0
A40	3

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC. III.2	CC. III.1
B01	3	1
B02	3	3
B03	3	3
B04	3	1
B05	3	3
B06	3	3
B07	0	0
B08	3	3
B09	3	1
B10	3	3
B11	3	1
B12	3	3
B13	0	0
B14	3	3
B15	3	3
B16	3	3
B17	3	3
B18	3	3

FE nº 8	CC. III.2
0	6
1	8
2	3
3	23
% de 0	15
% de 1	20
% de 2	8
% de 3	58

FE nº 8	CC. III.2	CC. III.1
0	2	2
1	0	4
2	0	0
3	16	12
% de 0	11	11
% de 1	0	22
% de 2	0	0
% de 3	89	67

CCIII.1: Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida
CCIII.2: Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 9

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC. IV.1	CC. IV.2
A01	2	3
A02	1	3
A03	1	3
A04	1	3
A05	1	1
A06	1	3
A07	3	3
A08	3	3
A09	1	3
A10	3	3
A11	3	3
A12	1	1
A13	1	1
A14	3	3
A15	3	3
A16	0	0
A17	3	3
A18	1	3
A19	2	3
A20	1	1
A21	1	3
A22	1	3
A23	2	3
A24	1	1
A25	1	3
A26	1	3
A27	3	3
A28	2	3
A29	2	3
A30	3	3
A31	3	3
A32	1	3
A33	3	3
A34	1	3
A35	2	3
A36	3	3
A37	2	3
A38	1	3
A39	1	1
A40	3	3

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC. IV.1	CC. IV.2
B01	3	3
B02	1	3
B03	3	3
B04	3	3
B05	3	3
B06	3	3
B07	3	3
B08	3	3
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	3	3
B14	0	0
B15	3	3
B16	3	3
B17	3	3
B18	3	3

FE nº 9	CC. IV.1	CC. IV.2
0	1	1
1	19	6
2	7	0
3	13	33
% de 0	3	3
% de 1	48	15
% de 2	18	0
% de 3	33	83

FE nº 9	CC. IV.1	CC. IV.2
0	1	1
1	1	0
2	0	0
3	16	17
% de 0	6	6
% de 1	6	0
% de 2	0	0
% de 3	89	94

CCIV.1: Argumentaciones sobre el significado del numerador y denominador de la fracción.
CCIV.2: Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para construir la cantidad de magnitud de cardinalidad.

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 10
Suma de fracciones

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.1.1	Estrategia	CC.VII.1.2
A01	3	E	3
A02	1	M	3
A03	1	M	1
A04	1	M	3
A05	3	E	3
A06	1	G	3
A07	3	E	3
A08	1	E	3
A09	3	E	3
A10	1	G	3
A11	3	E	3
A12	1	E	1
A13	3	E	3
A14	1	E	3
A15	3	E	3
A16	1	M	3
A17	1	M	1
A18	1	E	3
A19	1	M	3
A20	1	M	3
A21	1	M	3
A22	1	M	3
A23	1	M	1
A24	3	E	3
A25	3	E	3
A26	1	M	1
A27	1	E	3
A28	0	0	0
A29	1	G	3
A30	1	E	3
A31	3	G	3
A32	1	NI	1
A33	3	E	3
A34	3	E	3
A35	3	E	3
A36	0	0	0
A37	1	M	1
A38	3	E	3
A39	1	NI	1
A40	3	E	3

FE nº 10	CC.VII.1.1		CC.VII.1.2
0	2		2
1	23		8
2	0		0
3	15		30
% de 0	*5*		*5*
% de 1	*58*		*20*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*38*		*75*

		Estrategia	Éxito en E
0		2	
NI		2	0
M		12	7
G		4	4
E		20	19
% de 0		*5*	
% de NI		*5*	0
% de M		*30*	18
% de G		*10*	10
% de RE		*50*	48

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.1.1	Estrategia	CC.VII.1.2
B01	3	G	3
B02	1	NI	1
B03	3	E	3
B04	1	M	1
B05	1	M	1
B06	1	M	1
B07	1	M	1
B08	3	E	3
B09	3	E	3
B10	3	E	3
B11	3	E	3
B12	3	E	3
B13	3	E	3
B14	3	E	3
B15	3	E	3
B16	1	E	1
B17	3	E	3
B18	3	E	3

FE nº 10	CC.VII.1.1		CC.VII.1.2
0	0		0
1	6		6
2	0		0
3	12		12
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*33*		*33*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*67*		*67*

		Estrategia	Éxito en E
0		0	
NI		1	0
M		4	0
G		1	1
E		12	11
% de 0		*0*	
% de NI		*6*	0
% de M		*22*	0
% de G		*6*	6
% de RE		*67*	61

CCVII.1.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de suma de fracciones
CCVII.1.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado de la suma de fracciones

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales tangibles y mide
G Utiliza gráficos y mide
RE Utiliza razonamientos basados en el concepto de equivalencia

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 11
Resta de fracciones

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.2.1	Estrategia	CC.VII.2.2
A01	3	E	3
A02	1	G	1
A03	1	G	3
A04	1	G	1
A05	3	G	3
A06	1	G	1
A07	1	G	1
A08	1	G	1
A09	3	E	3
A10	3	E	3
A11	3	E	3
A12	3	G	1
A13	3	E	3
A14	3	E	3
A15	3	E	3
A16	3	E	3
A17	3	E	1
A18	3	E	3
A19	1	G	1
A20	1	E	1
A21	1	M	3
A22	1	M	3
A23	1	G	1
A24	3	E	3
A25	1	G	3
A26	1	G	3
A27	3	E	3
A28	3	E	3
A29	1	G	3
A30	1	NI	1
A31	3	E	3
A32	1	NI	1
A33	1	G	3
A34	3	E	3
A35	3	E	3
A36	1	NI	1
A37	3	E	3
A38	1	E	1
A39	1	NI	1
A40	1	G	3

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.2.1	Estrategia	CC.VII.2.2
B01	3	G	3
B02	1	NI	1
B03	1	NI	1
B04	3	E	3
B05	1	M	1
B06	3	E	3
B07	3	E	3
B08	1	E	1
B09	3	E	3
B10	3	E	3
B11	3	E	3
B12	3	E	3
B13	3	E	3
B14	1	NI	1
B15	3	E	3
B16	3	E	1
B17	3	E	3
B18	3	E	3

FE nº 11	CC.VII.2.1		CC.VII.2.2
0	0		0
1	21		15
2	0		0
3	19		25
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*53*		*38*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*48*		*63*
		Estrategia	Éxito en E
0		0	
NI		4	0
M		2	2
G		15	7
E		19	16
% de 0		*0*	
% de NI		*10*	0
% de M		*5*	5
% de G		*38*	18
% de E		*48*	40

FE nº 11	CC.VII.2.1		CC.VII.2.2
0	0		0
1	5		6
2	0		0
3	13		12
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*28*		*33*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*72*		*67*
		Estrategia	Éxito en E
0		0	
NI		3	0
M		1	0
G		1	1
E		13	11
% de 0		*0*	
% de NI		*17*	0
% de M		*6*	0
% de G		*6*	6
% de RE		*72*	61

CCVII.2.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la resta de fracciones
CCVII.2.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado de la resta de fracciones

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales tangibles y mide
G Utiliza gráficos y mide
RE Utiliza razonamientos basados en el concepto de equivalencia

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 12
Multiplicación de una fracción por un número natural

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.3.1	Estrategia	CC.VII.3.2
A01	3	E	3
A02	1	NI	1
A03	3	E	3
A04	1	E	3
A05	1	G	1
A06	1	NI	1
A07	1	NI	1
A08	3	E	3
A09	3	E	3
A10	3	E	3
A11	3	E	3
A12	3	E	1
A13	3	E	3
A14	3	E	3
A15	3	E	3
A16	3	E	3
A17	3	E	3
A18	3	E	3
A19	3	E	3
A20	1	NI	1
A21	3	E	3
A22	1	G	3
A23	3	E	3
A24	3	E	3
A25	3	E	3
A26	3	E	1
A27	3	E	3
A28	3	E	1
A29	3	E	3
A30	3	E	3
A31	3	E	3
A32	1	NI	1
A33	3	E	3
A34	3	E	3
A35	3	E	3
A36	3	E	3
A37	3	E	3
A38	3	E	1
A39	1	NI	1
A40	1	E	3

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.3.1	Estrategia	CC.VII.3.2
B01	3	E	3
B02	1	NI	1
B03	3	E	3
B04	3	E	3
B05	1	NI	1
B06	3	E	3
B07	3	E	1
B08	3	E	3
B09	3	E	3
B10	3	E	3
B11	1	NI	1
B12	3	E	3
B13	3	E	3
B14	3	E	1
B15	3	E	3
B16	3	E	3
B17	3	E	3
B18	3	E	3

FE n º12	CC.VII.3.1		CC.VII.3.2
0	0		0
1	10		11
2	0		0
3	30		29
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*25*		*28*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*75*		*73*

FE nº 12	CC.VII.3.1		CC.VII.3.2
0	0		0
1	3		5
2	0		0
3	15		13
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*17*		*28*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*83*		*72*

		Estrategia	Éxito en E
0		0	0
NI		6	0
M		0	0
G		2	1
E		32	28
% de 0		*0*	*0*
% de NI		*15*	0
% de M		*0*	0
% de G		*5*	3
% de E		*80*	70

		Estrategia	Éxito en E
0		0	0
NI		3	0
M		0	1
G		0	2
E		15	13
% de 0		*0*	*0*
% de NI		*17*	0
% de M		*0*	6
% de G		*0*	11
% de RE		*83*	72

CCVII.3.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del producto de una fracción por un número natural
CCVII.3.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado del producto de una fracción por un número natural

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales tangibles y mide
G Utiliza gráficos y mide
RE Utiliza razonamientos basados en el concepto de equivalencia

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 13
División de una fracción entre un número natural

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.4.1	Estrategia	CC.VII.4.2
A01	3	E	3
A02	3	G	1
A03	1	NI	1
A04	1	G	1
A05	1	G	3
A06	1	G	1
A07	3	E	3
A08	3	E	3
A09	3	E	3
A10	1	G	3
A11	3	E	3
A12	0	0	0
A13	1	E	3
A14	1	G	3
A15	1	G	3
A16	1	G	3
A17	1	G	1
A18	1	G	3
A19	3	E	3
A20	3	E	3
A21	1	G	3
A22	1	G	3
A23	1	G	1
A24	1	G	3
A25	1	G	1
A26	1	E	3
A27	3	E	3
A28	3	E	3
A29	1	E	3
A30	3	E	3
A31	1	E	3
A32	1	NI	1
A33	1	E	3
A34	1	E	3
A35	3	E	3
A36	0	0	0
A37	1	G	1
A38	3	E	3
A39	1	G	3
A40	1	G	3

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.4.1	Estrategia	CC.VII.4.2
B01	3	E	3
B02	1	NI	1
B03	3	E	3
B04	1	E	1
B05	1	NI	1
B06	1	E	1
B07	3	E	3
B08	1	NI	1
B09	3	E	3
B10	3	E	3
B11	3	E	3
B12	3	E	3
B13	3	E	3
B14	1	NI	1
B15	3	E	3
B16	3	E	3
B17	3	E	3
B18	3	E	3

FE nº13	CC.VII.4.1		CC.VII.4.2
0	2		2
1	25		9
2	0		0
3	13		29
% de 0	*5*		*5*
% de 1	*63*		*23*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*33*		*73*
		Estrategia	Éxito en E
0		0	0
NI		2	0
M		0	0
G		18	11
E		18	18
% de 0		*0*	0
% de NI		*5*	0
% de M		*0*	0
% de G		*45*	28
% de E		*45*	45

FE nº13	CC.VII.4.1		CC.VII.4.2
0	0		0
1	6		6
2	0		0
3	12		12
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*33*		*33*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*67*		*67*
		Estrategia	Éxito en E
0		0	0
NI		4	0
M		0	0
G		0	0
E		14	12
% de 0		*0*	0
% de NI		*22*	0
% de M		*0*	0
% de G		*0*	0
% de RE		*78*	67

CCVII.4.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del cociente de una fracción entre un número natural
CCVII.4.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado del cociente de una fracción entre un número natural

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales tangibles y mide
G Utiliza gráficos y mide
RE Utiliza razonamientos basados en el concepto de equivalencia

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 14
Reparto igualitario de 5 barras para 3 personas

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VIII.1	Estrategia	CC.VIII.2	Estrategia
A01	3	S	3	CI
A02	2	NI	1	CI
A03	2	G	1	CI
A04	2	S	1	Frac
A05	3	G	2	CI
A06	0	0	0	
A07	2	S	3	Frac
A08	2	G	2	CI
A09	3	S	3	CI
A10	3	G	2	CI
A11	3	S	3	CI
A12	0	0	0	
A13	3	S	3	CI
A14	3	S	3	CI
A15	3	G	1	CI
A16	2	G	2	Frac
A17	3	S	1	CI
A18	3	S	3	CI
A19	2	S	2	CI
A20	3	S	2	CI
A21	3	G	2	CI
A22	1	G	2	
A23	0	0	0	
A24	3	G	2	CI
A25	3	S	1	CI
A26	1	S	2	
A27	3	S	2	CI
A28	3	G	2	Frac
A29	1	S	3	
A30	2	G	2	CI
A31	3	S	3	CI
A32	3	S	3	CI
A33	3	S	3	CI
A34	3	S	3	CI
A35	3	S	3	Frac
A36	0	0	0	
A37	3	G	2	CI
A38	1	G	1	Frac
A39	1	NI	1	
A40	3	S	3	CI

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VIII.1	Estrategia	CC.VIII.2	Estrategia
B01	2	S	3	Frac
B02	2	S	1	Frac
B03	3	S	3	Frac
B04	2	S	3	Frac
B05	3	S	2	Frac
B06	3	S	1	Frac
B07	2	S	3	Frac
B08	3	S	3	Frac
B09	3	S	3	Frac
B10	3	S	3	Frac
B11	3	S	3	Frac
B12	3	S	3	Frac
B13	2	S	1	Frac
B14	3	S	1	Frac
B15	3	S	3	Frac
B16	3	S	3	Frac
B17	3	S	3	Frac
B18	2	S	1	Frac

FE nº14	CC.VIII.1	CC.VIII.2
0	4	4
1	5	8
2	8	14
3	23	14
% de 0	*10*	*10*
% de 1	*13*	*20*
% de 2	*20*	*35*
% de 3	*58*	*35*

FE nº14	CC.VIII.1	CC.VIII.2
0	0	0
1	0	5
2	6	1
3	12	12
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*0*	*28*
% de 2	*33*	*6*
% de 3	*67*	*67*

CCVIII.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la fracción que expresa el resultado del reparto y de los términos de la fracción
CCVIII.2 Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto igualitario

Criterios de la Unidad de Análisis de la Comprensión del Contenido CC.VIII.1:
0 *Falta a clase*
1 *Interpretación errónea o inadecuada de las componentes del reparto*
2 *Interpretación errónea o inadecuada de una de las componentes del reparto*
3 *Interpretación correcta o bastante adecuada de las componentes del reparto.*

Criterios de la Unidad de Análisis de la Comprensión del Contenido CC.VIII.2:
0 *Falta a clase*
1 *No encuentra la fracción, escribe una fracción incorrecta o es correcta pero no la justifica*
2 *Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas adecuadas y no utiliza representaciones simbólicas o son inadecuadas*
3 *Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas y representaciones simbólicas adecuadas*

Cuando los alumnos escriben los significados del numerador y del denominador optan por:
Frac *Interpretar los términos como resultado de la medida del resultado del reparto igualitario*
CI *Interpretar los términos como las condiciones iniciales del reparto igualitario*

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 15
Dos tareas de comparación de repartos

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.IX.1	CC.IX.2a	CC.IX.2b	Estrategia
A01	3	3	3	E
A02	0	0	0	0
A03	1	1	1	R
A04	3	2	1	G
A05	3	3	3	G
A06	3	3	3	E
A07	1	1	1	G
A08	3	3	3	E
A09	3	3	3	E
A10	3	3	3	E
A11	3	3	3	E
A12	0	0	0	0
A13	3	3	3	E
A14	3	3	3	E
A15	3	3	3	E
A16	3	3	3	E
A17	1	1	1	R
A18	2	2	1	G
A19	3	3	3	E
A20	2	2	1	G
A21	3	3	3	G
A22	3	3	3	E
A23	3	1	2	G
A24	0	1	1	NI
A25	3	3	1	E
A26	3	3	1	E
A27	3	3	3	E
A28	3	3	2	G
A29	3	3	3	G
A30	0	0	0	0
A31	3	3	3	E
A32	3	2	2	G
A33	2	3	3	E
A34	3	3	3	E
A35	3	3	3	E
A36	0	1	1	R
A37	3	3	3	E
A38	3	3	3	E
A39	0	1	1	R
A40	3	3	3	E

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.IX.1	CC.IX.2a	CC.IX.2b	Estrategia
B01	3	3	3	E
B02	3	3	3	E
B03	3	3	3	E
B04	3	3	3	E
B05	3	3	3	E
B06	3	3	3	E
B07	3	3	3	E
B08	3	3	3	E
B09	3	3	3	E
B10	3	3	3	E
B11	3	2	1	G
B12	3	3	3	E
B13	3	3	1	E
B14	3	2	1	E
B15	3	3	3	E
B16	3	3	1	G
B17	3	3	3	E
B18	3	3	3	E

FE nº15	CC.IX.1	CC.IX.2a	CC.IX.2b
0	6	3	3
1	3	7	11
2	3	4	3
3	28	26	23
% de 0	*15*	*8*	*8*
% de 1	*8*	*18*	*28*
% de 2	*8*	*10*	*8*
% de 3	*70*	*65*	*58*

FE nº15	CC.IX.1	CC.IX.2a	CC.IX.2b
0	0	0	0
1	0	0	4
2	0	2	0
3	18	16	14
% de 0	*0*	*0*	*0*
% de 1	*0*	*0*	*22*
% de 2	*0*	*11*	*0*
% de 3	*100*	*89*	*78*

		Estrategia
0		3
NI		1
G		10
R		4
E		22
% de 0		*8*
% de NI		*3*
% de G		*25*
% de R		*10*
% de E		*55*

		Estrategia
0		0
NI		0
G		2
R		0
E		16
% de 0		*0*
% de NI		*0*
% de G		*11*
% de R		*0*
% de E		*89*

CCIX.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de fracción mayor o menor que otra
CCIX.2 Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para comparar dos fracciones

Criterios de las estrategias utilizadas por los alumnos:
NI *No lo indican*
G *Utlizan gráficos*
R *Utlizan razonamientos basados en el reparto*
E *Utilizan la equivalencia de fracciones para comparar repartos*

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 16

Representación Polinómica Decimal del reparto de 5 barras para 4 personas

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.X.1	CC.X.2
A01	1	3
A02	2	1
A03	0	0
A04	0	0
A05	1	3
A06	2	3
A07	3	3
A08	2	3
A09	1	3
A10	3	3
A11	3	3
A12	2	2
A13	1	3
A14	2	3
A15	1	2
A16	3	3
A17	3	3
A18	2	3
A19	3	3
A20	1	2
A21	3	3
A22	3	1
A23	3	3
A24	2	3
A25	1	3
A26	2	1
A27	2	3
A28	3	2
A29	3	3
A30	1	3
A31	3	3
A32	0	0
A33	2	3
A34	3	3
A35	1	2
A36	0	0
A37	3	3
A38	0	0
A39	2	3
A40	3	2

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.X.1	CC.X.2
B01	3	2
B02	2	1
B03	2	3
B04	3	3
B05	3	1
B06	3	3
B07	3	3
B08	3	3
B09	2	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	3	3
B14	2	3
B15	3	3
B16	3	3
B17	3	3
B18	3	3

FE nº 16	CC.X.1	CC.X.2
0	5	5
1	9	3
2	11	6
3	15	26
% de 0	*13*	*13*
% de 1	*23*	*8*
% de 2	*28*	*15*
% de 3	*38*	*65*

FE nº 16	CC.X.1	CC.X.2
0	0	0
1	0	2
2	4	1
3	14	15
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*0*	*11*
% de 2	*22*	*6*
% de 3	*78*	*83*

CCX.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del reparto igualitario que se efectúa en varias fases y con fraccionamientos en 10 partes iguales

CCX.2 Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto en varias fases, con fraccionamientos en 10 partes iguales

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 17

La notación decimal del resultado del reparto igualitario de 17 barras para 8 personas

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.XI.2	CC.XII.1	CC.XII.2
A01	3	3	1
A02	1	1	1
A03	3	3	1
A04	0	0	0
A05	3	3	3
A06	1	1	1
A07	5	3	1
A08	3	1	2
A09	3	3	3
A10	3	3	3
A11	3	3	3
A12	1	1	1
A13	3	3	1
A14	3	3	3
A15	3	3	3
A16	3	3	3
A17	3	1	1
A18	0	0	0
A19	3	3	3
A20	0	0	0
A21	3	3	1
A22	3	3	1
A23	3	1	1
A24	3	2	3
A25	0	0	0
A26	3	1	1
A27	3	3	1
A28	3	3	2
A29	3	3	1
A30	3	3	2
A31	3	3	3
A32	0	0	0
A33	3	3	3
A34	3	3	3
A35	3	3	1
A36	3	1	1
A37	3	3	1
A38	0	0	0
A39	0	0	0
A40	3	3	2

FE nº 17	CC.XI.2	CC.XII.1	CC.XII.2
0	7	7	7
1	3	8	17
2	0	1	4
3	29	24	12
% de 0	*18*	*18*	*18*
% de 1	*8*	*20*	*43*
% de 2	*0*	*3*	*10*
% de 3	*73*	*60*	*30*

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.XI.2	CC.XII.1	CC.XII.2
B01	3	3	1
B02	3	3	3
B03	3	3	3
B04	3	3	3
B05	3	3	1
B06	0	0	0
B07	3	3	1
B08	3	1	1
B09	3	1	3
B10	3	3	3
B11	3	3	3
B12	3	3	3
B13	3	3	3
B14	3	1	1
B15	3	3	3
B16	3	1	1
B17	3	3	3
B18	3	3	3

FE nº 17	CC.XI.2	CC.XII.1	CC.XII.2
0	1	1	1
1	0	4	6
2	0	0	0
3	17	13	11
% de 0	*6*	*6*	*6*
% de 1	*0*	*22*	*33*
% de 2	*0*	*0*	*0*
% de 3	*94*	*72*	*61*

CC.XI.2 Utilización de representaciones simbólicas adecuadas para expresar, con un número decimal, el resultado del reparto
CC.XII.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del número decimal y de las cifras que lo componen
CC.XII.2 Utilización de representaciones gráficas adecuadas para expresar, con un número decimal, el resultado del reparto

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 18

Conversiones de dos números decimales en sus representaciopnes fraccionarias

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XIII.1.1º	CC.XIII.1.2º	CC.XIII.2.1º		CC.XIII.2.2º	
A01	3	3	3	RPD	3	RPD
A02	2	2	3	F	1	
A03	3	3	3	F	3	RPD
A04	3	3	3	RPD	3	RPD
A05	3	3	3	F	3	RPD
A06	3	3	3	RPD	3	RPD
A07	3	3	2	RPD	3	RPD
A08	3	3	3	RPD	3	RPD
A09	3	3	3	F	3	RPD
A10	3	3	2	RPD	2	RPD
A11	3	3	3	RPD	3	RPD
A12	0	0	0		0	
A13	1	3	1		3	RPD
A14	3	2	3	F	1	
A15	3	3	3	RPD	3	RPD
A16	3	1	3	F	1	
A17	3	3	3	RPD	3	RPD
A18	3	3	1	RPD	1	RPD
A19	1	3	1	F	3	F
A20	3	3	2	RPD	2	RPD
A21	3	1	2	F	1	
A22	3	1	3	F	1	
A23	1	1	1		1	
A24	3	3	3	F	3	F
A25	3	3	2	RPD	2	RPD
A26	0	0	0		0	
A27	3	3	2	RPD	1	RPD
A28	3	3	3	F	2	RPD
A29	3	3	3	F	2	F
A30	3	3	3	RPD	3	RPD
A31	3	3	3	F	3	F
A32	1	1	1		1	
A33	3	3	2	RPD	2	RPD
A34	3	3	3	F	3	F
A35	3	3	3	RPD	3	RPD
A36	1	1	1		1	
A37	3	3	3	F	3	F
A38	3	3	3	F	1	
A39	1	1	1		1	
A40	3	3	3	F	3	F

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XIII.1.1º	CC.XIII.1.2º	CC.XIII.2.1º		CC.XIII.2.2º	
B01	3	3	3	RPD	3	RPD
B02	3	3	1	RPD	1	RPD
B03	3	3	3	RPD	3	RPD
B04	3	3	3	RPD	3	RPD
B05	3	3	3	RPD	3	RPD
B06	3	3	1	RPD	1	RPD
B07	3	3	3	RPD	3	RPD
B08	3	3	3	RPD	3	RPD
B09	3	3	3	RPD	3	RPD
B10	3	3	3	RPD	3	RPD
B11	3	3	3	RPD	3	RPD
B12	3	3	3	RPD	3	RPD
B13	3	3	3	RPD	3	RPD
B14	3	3	1	RPD	1	RPD
B15	0	0	0		0	
B16	3	3	3	RPD	3	RPD
B17	3	3	3	RPD	3	RPD
B18	3	3	3	RPD	3	RPD

FE nº 18	CC.XIII.1.1º	CC.XIII.1.2º	CC.XIII.2.1º		CC.XIII.2.2º
0	2	2	2		2
1	6	7	7		12
2	1	2	7		6
3	31	29	24		20
% de 0	*5*	*5*	*5*		*5*
% de 1	*15*	*18*	*18*		*30*
% de 2	*3*	*5*	*18*		*15*
% de 3	*78*	*73*	*60*		*50*

FE nº 18	CC.XIII.1.1º	CC.XIII.1.2º	CC.XIII.2.1º		CC.XIII.2.2º
0	1	1	1		1
1	0	0	3		3
2	0	0	0		0
3	17	17	14		14
% de 0	*6*	*6*	*6*		*6*
% de 1	*0*	*0*	*17*		*17*
% de 2	*0*	*0*	*0*		*0*
% de 3	*94*	*94*	*78*		*78*

Estrategia		1º		*2º*
En blanco		7		12
F	Escribe directamente la fracción	17		7
RPD	Escribe la R.P.D. asociada al decimal	16		21
% en blanco		*18*		*30*
% F		*43*		*18*
% RPD		*40*		*53*

CCXIII.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del número decimal como suma de fracciones decimales

CCXIII.2 Utilización de representaciones simbólicas adecuadas para obtener la fracción decimal de un número decimal

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 19
Orden de números decimales

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XIV.1	CC.XIV.2
A01	3	3
A02	3	3
A03	3	1
A04	1	1
A05	3	3
A06	3	1
A07	3	1
A08	3	3
A09	3	3
A10	3	3
A11	3	3
A12	3	1
A13	3	1
A14	3	3
A15	3	1
A16	3	3
A17	2	3
A18	2	2
A19	3	3
A20	3	3
A21	3	2
A22	3	3
A23	3	2
A24	3	2
A25	3	2
A26	3	2
A27	3	3
A28	3	3
A29	3	1
A30	3	3
A31	2	2
A32	1	1
A33	3	3
A34	3	3
A35	3	2
A36	3	1
A37	3	2
A38	3	3
A39	3	1
A40	3	3

FE nº 19	CC.XIV.1	CC.XIV.2
0	0	0
1	2	11
2	3	9
3	35	20
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*5*	*28*
% de 2	*8*	*23*
% de 3	*88*	*50*

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XIV.1	CC.XIV.2
B01	3	3
B02	3	3
B03	3	3
B04	3	3
B05	3	3
B06	2	1
B07	1	1
B08	3	2
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	3	3
B14	2	1
B15	3	3
B16	3	3
B17	3	3
B18	3	3

FE nº 19	CC.XIV.1	CC.XIV.2
0	0	0
1	1	3
2	2	1
3	15	14
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*6*	*17*
% de 2	*11*	*6*
% de 3	*83*	*78*

CCXIV.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del orden de números decimales
CCXIV.2 Conjetura y justificación de reglas adecuadas para ordenar números decimales

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 20
Suma de números decimales

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.1.1	CC.XV.1.2
A01	3	2
A02	3	1
A03	3	2
A04	3	1
A05	3	2
A06	0	0
A07	3	2
A08	3	2
A09	3	2
A10	3	3
A11	3	2
A12	3	2
A13	3	2
A14	3	3
A15	3	1
A16	3	2
A17	3	2
A18	3	2
A19	3	2
A20	3	1
A21	3	2
A22	3	2
A23	3	2
A24	3	2
A25	3	2
A26	3	2
A27	3	2
A28	3	2
A29	3	2
A30	3	2
A31	3	2
A32	1	1
A33	3	2
A34	3	2
A35	3	3
A36	3	2
A37	3	2
A38	3	2
A39	3	2
A40	3	2

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.1.1	CC.XV.1.2
B01	3	3
B02	1	1
B03	3	3
B04	3	2
B05	3	3
B06	3	3
B07	3	2
B08	3	2
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	2
B12	3	3
B13	3	3
B14	3	2
B15	3	3
B16	3	2
B17	3	3
B18	3	3

FE nº 20	CC.XV.1.1	CC.XV.1.2
0	1	1
1	1	5
2	0	31
3	38	3
% de 0	*3*	*3*
% de 1	*3*	*13*
% de 2	*0*	*78*
% de 3	*95*	*8*

FE nº 20	CC.XV.1.1	CC.XV.1.2
0	0	0
1	1	1
2	0	6
3	17	11
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*6*	*6*
% de 2	*0*	*33*
% de 3	*94*	*61*

CC.XV.1.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de suma de números decimales
CC.XV.1.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado de la suma de números decimales

Criterios de la Unidad de la Comprensión del Contenido CC.XVI.1.2:
0 *Falta a clase*
1 *No aplican correctamente el algoritmo*
2 *Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica*
3 *Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica*

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 21
Resta de números decimales

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.2.1	CC.XV.2.2
A01	3	2
A02	1	1
A03	3	2
A04	3	1
A05	3	2
A06	3	2
A07	3	2
A08	3	2
A09	3	2
A10	3	2
A11	3	2
A12	3	2
A13	3	2
A14	3	2
A15	3	2
A16	3	2
A17	3	2
A18	3	2
A19	3	2
A20	3	2
A21	3	2
A22	3	2
A23	3	2
A24	3	2
A25	3	2
A26	3	2
A27	3	2
A28	3	2
A29	3	2
A30	3	1
A31	3	2
A32	3	1
A33	3	2
A34	3	2
A35	3	3
A36	3	2
A37	3	2
A38	3	1
A39	3	2
A40	3	2

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.2.1	CC.XV.2.2
B01	3	2
B02	3	2
B03	3	2
B04	3	2
B05	3	2
B06	3	2
B07	3	2
B08	3	2
B09	3	2
B10	3	3
B11	3	2
B12	3	3
B13	3	3
B14	3	2
B15	3	3
B16	3	2
B17	0	0
B18	3	2

FE Nº 21	CC.XV.2.1	CC.XV.2.2
0	0	0
1	1	5
2	0	34
3	39	1
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*3*	*13*
% de 2	*0*	*85*
% de 3	*98*	*3*

FE Nº 21	CC.XV.2.1	CC.XV.2.2
0	1	1
1	0	0
2	0	13
3	17	4
% de 0	*6*	*6*
% de 1	*0*	*0*
% de 2	*0*	*72*
% de 3	*94*	*22*

CC.XV.2.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de resta de números decimales
CC.XV.2.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado de la resta de números decimales

Criterios de la Unidad de la Comprensión del Contenido CC.XV.2.2:
0 *Falta a clase*
1 *No aplican correctamente el algoritmo*
2 *Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica*
3 *Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica*

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 22
Multiplicación de un número decimal por un número natural

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.I.1.1	CC.XVI.1.2
A01	3	3
A02	3	2
A03	3	2
A04	3	1
A05	3	1
A06	3	3
A07	3	2
A08	3	2
A09	3	2
A10	3	2
A11	3	2
A12	3	2
A13	3	2
A14	3	3
A15	3	3
A16	3	2
A17	3	3
A18	3	3
A19	3	2
A20	3	2
A21	3	2
A22	3	2
A23	3	2
A24	3	3
A25	3	2
A26	3	2
A27	3	2
A28	3	2
A29	3	2
A30	3	2
A31	3	2
A32	3	1
A33	3	2
A34	3	3
A35	3	2
A36	3	2
A37	3	2
A38	3	3
A39	3	2
A40	3	2

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.I.1.1	CC.XVI.1.2
B01	3	2
B02	3	2
B03	3	3
B04	3	2
B05	3	3
B06	3	2
B07	3	2
B08	3	2
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	3	2
B14	3	3
B15	3	2
B16	3	3
B17	3	2
B18	3	2

FE Nº 22	CC.XV.I.1.1	CC.XVI.1.2
0	0	0
1	0	3
2	0	28
3	40	9
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*0*	*8*
% de 2	*0*	*70*
% de 3	*100*	*23*

FE Nº 22	CC.XV.I.1.1	CC.XVI.1.2
0	0	0
1	0	0
2	0	10
3	18	8
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*0*	*0*
% de 2	*0*	*56*
% de 3	*100*	*44*

CCXVI.1.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del producto de un número decimal por un número natural
CCXVI.1.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado del producto de un número decimal por un número natural

Criterios de la Unidad de la Comprensión del Contenido CC.XVI.1.2:

0 *Falta a clase*
1 *No aplican correctamente el algoritmo*
2 *Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica*
3 *Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica*

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 23
División de un número decimal entre un número natural

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CCXVI.2.1	CCXVI.2.2	Estrat
A01	3	2	se
A02	1	1	
A03	3	2	e
A04	1	1	
A05	3	3	e
A06	3	2	se
A07	3	2	e
A08	3	3	e
A09	3	3	e
A10	3	3	e
A11	3	3	e
A12	1	1	
A13	3	3	e
A14	3	2	se
A15	3	3	e
A16	3	3	e
A17	1	1	
A18	1	1	
A19	3	1	
A20	3	1	se
A21	3	3	e
A22	3	3	e
A23	3	2	e
A24	3	2	se
A25	1	1	
A26	1	1	
A27	3	2	se
A28	3	2	e
A29	3	1	se
A30	1	1	
A31	3	2	se
A32	3	1	e
A33	3	3	e
A34	3	2	se
A35	3	3	e
A36	3	2	se
A37	3	1	e
A38	3	1	se
A39	3	2	se
A40	3	3	e

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CCXVI.2.1	CCXVI.2.2	Estrat
B01	3	2	se
B02	0	0	
B03	0	0	
B04	3	2	se
B05	3	2	se
B06	3	2	se
B07	3	1	se
B08	3	2	se
B09	3	2	se
B10	3	3	e
B11	3	2	se
B12	3	2	se
B13	3	2	se
B14	1	1	se
B15	3	3	se
B16	0	0	
B17	3	3	se
B18	3	3	e

FE Nº 23	CCXVI.2.1	CCXVI.2.2
0	0	0
1	8	14
2	0	13
3	32	13
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*20*	*35*
% de 2	*0*	*33*
% de 3	*80*	*33*

FE Nº 23	CCXVI.2.1	CCXVI.2.2
0	3	3
1	1	2
2	0	9
3	14	4
% de 0	*17*	*17*
% de 1	*6*	*11*
% de 2	*0*	*50*
% de 3	*78*	*22*

Estrategia		Frec	Éxito (criterio 2 ó 3)
e		*19*	17
se		*12*	9
% e		*48*	90
% se		30	75

CCXVI.2.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del cociente de un número decimal por un número natural
CCXVI.2.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado del cociente de un número decimal por un número natural

Criterios de la Unidad de la Comprensión del Contenido CC.XVI.2.2:
0 *Falta a clase*
1 *No aplican correctamente el algoritmo*
2 *Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica*
3 *Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica*

Estrategia
e División utilizando la equivalencia de decimales al modificar el dividendo y el divisor
se División sin utilizar la equivalencia de decimales

Resultados de la Pregunta Nº 1 de la Prueba de Evaluación del Primer Ciclo de la Experimentación
Medida de cantidades de magnitud continuas

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Longitud	Superficie
A01	3	
A02		1
A03		3
A04	1	
A05	3	
A06	1	
A07		2
A08	1	
A09	3	
A10		1
A11		3
A12		3
A13		3
A14		2
A15	3	
A16	3	
A17		2
A18	2	
A19	2	
A20	1	
A21	2	
A22	1	
A23		1
A24		3
A25	1	
A26		2
A27	2	
A28		3
A29	3	
A30		3
A31	3	
A32	1	
A33	3	
A34		3
A35		2
A36	3	
A37		3
A38	2	
A39		2
A40		3

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Longitud	Superficie
B01	3	
B02	3	
B03		0
B04		2
B05	2	
B06		2
B07		1
B08		1
B09		2
B10	0	
B11	2	
B12	2	
B13		3
B14	1	
B15	3	
B16		2
B17		3
B18	3	

Preg 1	Longitud	Superficie	Totales
0	0	0	0
1	7	3	10
2	5	6	11
3	9	10	19
% de 0	*0*	*0*	*0*
% de 1	*33*	*16*	*25*
% de 2	*24*	*32*	*28*
% de 3	*43*	*53*	*48*

Preg 1	Longitud	Superficie	Totales
0	1	1	2
1	1	2	3
2	3	4	7
3	4	2	6
% de 0			
% de 1	*13*	*25*	*19*
% de 2	*38*	*50*	*44*
% de 3	*50*	*25*	*38*

Criterios de valoración:

0 falta a clase
1 mide mal
2 mide bien pero no sabe explicar el significado de los términos de la fracción
3 mide bien y sabe explicar el significado de los términos de la fracción

Resultados de la Pregunta Nº 2 de la Prueba de Evaluación del Primer Ciclo de la Experimentación
Evaluación semántica de la fracción que expresa el resultado de la medida de una cantidad de magnitud continua

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Longitud	Superficie
A01	2	
A02		1
A03		1
A04	1	
A05	3	
A06	3	
A07		1
A08	3	
A09	3	
A10		3
A11		3
A12		1
A13		1
A14		3
A15	3	
A16	2	
A17		3
A18	1	
A19	2	
A20	2	
A21	1	
A22	2	
A23		3
A24		3
A25	1	
A26		2
A27	2	
A28		3
A29	2	
A30		2
A31	3	
A32	1	
A33	3	
A34		3
A35		3
A36	3	
A37		2
A38	3	
A39		1
A40		1

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Longitud	Superficie
B01	1	
B02	1	
B03		0
B04		1
B05	3	
B06		3
B07		1
B08		1
B09		1
B10	0	
B11	2	
B12	3	
B13		1
B14	3	
B15	3	
B16		2
B17		3
B18	3	

Preg 2	Longitud	Superficie	Totales
0	0	0	0
1	5	7	12
2	7	3	10
3	9	9	18
% de 0	*0*	*0*	*0*
% de 1	*24*	*37*	*30*
% de 2	*33*	*16*	*25*
% de 3	*43*	*47*	*45*

Preg 2	Longitud	Superficie	Totales
0	1	1	2
1	2	5	7
2	1	1	2
3	5	2	7
% de 0			
% de 1	*25*	*63*	*44*
% de 2	*13*	*13*	*13*
% de 3	*63*	*25*	*44*

Criterios de valoración:

0 falta a clase
1 dibuja mal la cantidad de magnitud
2 dibuja bien la cantidad de magnitud pero no explica la respuesta
3 dibuja bien la cantidad de magnitud y aporta explicaciones adecuadas

Resultados de la Pregunta Nº 3 de la Prueba de Evaluación del Primer Ciclo de la Experimentación
Evaluación semántica de la fracción que expresa el resultado de la medida de una cantidad de magnitud continua

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Comparación	Estrategia
A01	3	G
A02	1	NI
A03	2	NI
A04	1	NI
A05	3	R
A06	1	R
A07	1	NI
A08	3	G
A09	3	R
A10	3	G
A11	3	R
A12	1	NI
A13	1	R
A14	2	G
A15	1	G
A16	1	NI
A17	2	NI
A18	1	G
A19	1	NI
A20	2	G
A21	3	R
A22	3	G
A23	1	R
A24	2	G
A25	1	G
A26	1	G
A27	2	NI
A28	1	R
A29	1	R
A30	2	G
A31	3	R
A32	1	NI
A33	3	R
A34	3	R
A35	1	NI
A36	1	R
A37	2	R
A38	3	R
A39	1	NI
A40	1	NI

Preg 3	Comparación
0	0
1	20
2	8
3	12
% de 0	*0*
% de 1	*50*
% de 2	*20*
% de 3	*30*

	Estrategia
NI	13
G	12
R	15
E	0

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Comparación	Estrategia
B01	1	NI
B02	1	NI
B03	0	0
B04	2	NI
B05	3	R
B06	1	NI
B07	3	R
B08	2	NI
B09	2	NI
B10	0	0
B11	1	NI
B12	3	R
B13	3	G
B14	1	R
B15	3	R
B16	2	NI
B17	3	R
B18	3	G

Preg 3	Comparación
0	2
1	5
2	4
3	7
% de 0	
% de 1	*31*
% de 2	*25*
% de 3	*44*

	Estrategia
NI	8
G	2
R	6
E	0

Criterios de valoración:

- **0** falta a clase
- **1** comete errores al comparar dos fracciones impropias
- **2** sabe comparar las fracciones impropias pero no justifica la respuesta
- **3** sabe comparar las fracciones impropias y justificar la respuesta

Estrategias:

- **NI** no indica la estrategia
- **G** representa gráficamente las cantidades
- **R** razona sobre el significado de la fracción como medida
- **E** utiliza la equivalencia de fracciones

Resultados de la Pregunta Nº 1 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación
Obtención de fracciones equivalentes a una dada

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Equivalencia
A01	3
A02	1
A03	3
A04	1
A05	3
A06	3
A07	2
A08	3
A09	3
A10	3
A11	3
A12	1
A13	1
A14	1
A15	3
A16	1
A17	1
A18	1
A19	2
A20	1
A21	2
A22	2
A23	3
A24	3
A25	1
A26	1
A27	3
A28	2
A29	1
A30	1
A31	3
A32	1
A33	3
A34	3
A35	3
A36	1
A37	3
A38	1
A39	1
A40	2

Preg 1	Equivalencia
0	0
1	17
2	6
3	17
% de 0	*0*
% de 1	*43*
% de 2	*15*
% de 3	*43*

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Equivalencia
B01	3
B02	1
B03	3
B04	3
B05	3
B06	1
B07	3
B08	1
B09	3
B10	3
B11	3
B12	3
B13	3
B14	1
B15	3
B16	1
B17	3
B18	3

Preg 1	Equivalencia
0	0
1	5
2	0
3	13
% de 0	*0*
% de 1	*28*
% de 2	*0*
% de 3	*72*

Criterios de valoración:

0 falta a clase
1 no encuentra una fracción equivalente a la dada
2 encuentra una fracción equivalente pero no aporta explicaciones
3 encuentra una fracción equivalente y aporta explicaciones adecuadas

Resultados de la Pregunta Nº 2 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación
La fracción como resultado del reparto igualitario efectuado en una sola fase

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Propia	Impropia
A01		3
A02		2
A03		3
A04	1	
A05		3
A06		2
A07	3	
A08	1	
A09		2
A10		3
A11	3	
A12		1
A13		3
A14		3
A15	3	
A16	2	
A17	1	
A18	2	
A19		3
A20		3
A21		3
A22	3	
A23	3	
A24	2	
A25	2	
A26		1
A27		3
A28		3
A29	1	
A30	3	
A31	3	
A32		3
A33	3	
A34	1	
A35		3
A36		3
A37		2
A38		2
A39		1
A40		3

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Propia	Impropia
B01		3
B02	3	
B03	3	
B04	3	
B05		3
B06	3	
B07	2	
B08		3
B09		3
B10		3
B11		1
B12	3	
B13	3	
B14		1
B15	3	
B16		2
B17	3	
B18		3

Preg 2	Propia	Impropia	Totales
0	0	0	0
1	5	3	8
2	4	5	9
3	8	15	23
% de 0	*0*	*0*	*0*
% de 1	*29*	*13*	*20*
% de 2	*24*	*22*	*23*
% de 3	*47*	*65*	*58*

Preg 2	Propia	Impropia	Totales
0	0	0	0
1	0	2	2
2	1	1	2
3	8	6	14
% de 0			
% de 1	*0*	*22*	*11*
% de 2	*11*	*11*	*11*
% de 3	*89*	*67*	*78*

Criterios de valoración:

0 Falta a clase
1 No encuentra una fracción que expresa el resultado del reparto
2 Encuentra una fracción adecuada pero no la justifica o la justificación es errónea
3 Encuentra una fracción adecuada y aporta una justificación correcta

Resultados de la Pregunta Nº 3 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación
El número decimal como resultado del reparto igualitario efectuado en varias fases

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Propia	Impropia
A01		3
A02		1
A03		1
A04	3	
A05		1
A06		3
A07	1	
A08	1	
A09		3
A10		3
A11	3	
A12		1
A13		3
A14		3
A15	3	
A16	1	
A17	2	
A18		3
A19		2
A20		3
A21		3
A22	3	
A23	3	
A24	3	
A25	3	
A26		1
A27		3
A28		3
A29	1	
A30	3	
A31	1	
A32		1
A33	1	
A34	1	
A35		3
A36		3
A37		2
A38		1
A39		1
A40		3

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Propia	Impropia
B01		3
B02	1	
B03	3	
B04	3	
B05		3
B06	3	
B07	1	
B08		3
B09		3
B10		3
B11		3
B12	3	
B13	2	
B14		1
B15	3	
B16		1
B17	3	
B18		3

Preg 3	Propia	Impropia	Totales
0	0	0	0
1	7	8	15
2	1	2	3
3	8	14	22
% de 0	*0*	*0*	*0*
% de 1	*44*	*33*	*38*
% de 2	*6*	*8*	*8*
% de 3	*50*	*58*	*55*

Preg 3	Propia	Impropia	Totales
0	0	0	0
1	2	2	4
2	1	0	1
3	6	7	13
% de 0	0	0	0
% de 1	*22*	*22*	*22*
% de 2	*11*	*0*	*6*
% de 3	*67*	*78*	*72*

Criterios de valoración:

0 Falta a clase
1 No encuentra el número decimal que expresa el resultado del reparto
2 Encuentra el número decimal adecuado pero no lo justifica o la justificación es errónea
3 Encuentra el número decimal adecuado y aporta una justificación correcta

Resultados de la Pregunta Nº 4 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación
Conversión de la notación fraccionaria a la notación decimal

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Paso fracc a decimal
A01	3
A02	2
A03	1
A04	3
A05	3
A06	3
A07	1
A08	3
A09	3
A10	3
A11	3
A12	1
A13	3
A14	3
A15	3
A16	2
A17	3
A18	3
A19	3
A20	3
A21	3
A22	1
A23	1
A24	3
A25	3
A26	1
A27	3
A28	3
A29	3
A30	3
A31	2
A32	1
A33	3
A34	3
A35	3
A36	2
A37	3
A38	3
A39	1
A40	3

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Paso fracc a decimal
B01	3
B02	1
B03	3
B04	1
B05	1
B06	3
B07	3
B08	3
B09	3
B10	3
B11	3
B12	3
B13	3
B14	1
B15	3
B16	3
B17	3
B18	3

Preg 4	Paso fracc a decimal
0	0
1	8
2	4
3	28
% de 0	*0*
% de 1	*20*
% de 2	*10*
% de 3	*70*

Preg 4	Paso fracc a decimal
0	0
1	4
2	0
3	14
% de 0	*0*
% de 1	*22*
% de 2	*0*
% de 3	*78*

Criterios de valoración:

0 Falta a clase
1 No convierte la fracción en un número decimal
2 Convierte la fracción en un número decimal pero no justifica la respuesta o la justificación es errónea
3 Convierte la fracción en un número decimal y justifica la respuesta

Resultados de la Pregunta Nº 5 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación
Conversión de la notación decimal a la notación fraccionaria

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Paso decimal a fracc
A01	3
A02	3
A03	1
A04	3
A05	2
A06	1
A07	1
A08	3
A09	3
A10	3
A11	3
A12	1
A13	2
A14	3
A15	1
A16	3
A17	3
A18	1
A19	3
A20	1
A21	1
A22	2
A23	1
A24	3
A25	3
A26	3
A27	3
A28	1
A29	1
A30	3
A31	1
A32	1
A33	3
A34	3
A35	3
A36	1
A37	3
A38	1
A39	1
A40	2

Preg 5	Paso decimal a fracc
0	0
1	16
2	4
3	20
% de 0	*0*
% de 1	*40*
% de 2	*10*
% de 3	*50*

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Paso decimal a fracc
B01	3
B02	1
B03	3
B04	1
B05	2
B06	1
B07	3
B08	1
B09	3
B10	3
B11	3
B12	3
B13	3
B14	1
B15	3
B16	3
B17	3
B18	3

Preg 5	Paso decimal a fracc
0	0
1	5
2	1
3	12
% de 0	*0*
% de 1	*28*
% de 2	*6*
% de 3	*67*

Criterios de valoración:

0 Falta a clase
1 No el número decimal en una fracción
2 Convierte el número decimal en una fracción pero no justifica la respuesta o la justificación es errónea
3 Convierte el número decimal en una fracción y justifica la respuesta

ANEXO IV

Estudio Comparativo

IV.1 Datos cuantitativos del estudio

IV.2 Cuestionario

Datos cuantitativos del Estudio Comparativo entre Colegios

		Preguntas de la Prueba														
Alumno/a	**Procedencia**	**1**	**2.a**	**2.b**	**3.a**	**3.b**	**4.a**	**4.b**	**5**	**6**	**7.a**	**7.b**	**8**	**9**	**10**	**Media**
A01	Tío Jorge	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	9,3
A02	Tío Jorge	1	1	2	1	1	0	0	2	2	1	2	1	1	1	2,9
A04	Tío Jorge	2	1	1	1	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	1,4
A05	Tío Jorge	2	2	2	1	1	1	2	2	0	0	0	1	0	2	4,3
A06	Tío Jorge	2	1	2	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1,4
A11	Tío Jorge	2	1	2	0	0	1	2	2	2	2	2	0	2	2	6,4
A13	Tío Jorge	2	1	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2	1	2	7,9
A14	Tío Jorge	2	2	2	2	2	0	0	2	2	2	2	0	0	2	7,1
A16	Tío Jorge	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	1	1	2	6,4
A19	Tío Jorge	2	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	1	2	2	4,3
A21	Tío Jorge	2	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1	0	2	7,1
A22	Tío Jorge	2	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	0	0	2	5,0
A24	Tío Jorge	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	9,3
A27	Tío Jorge	2	1	2	0	0	1	2	2	0	2	2	2	2	2	6,4
A 28	Tío Jorge	2	1	2	2	0	2	2	2	2	2	2	1	1	0	6,4
A29	Tío Jorge	2	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1	1	2	5,0
A30	Tío Jorge	2	1	2	0	2	1	1	0	1	1	1	1	1	0	2,1
A31	Tío Jorge	2	2	2	2	2	0	0	2	2	2	2	1	1	2	7,1
A34	Tío Jorge	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	0	2	2	8,6
A36	Tío Jorge	2	2	2	2	2	1	1	0	2	2	1	2	1	2	6,4
A37	Tío Jorge	2	1	2	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	2	2,1
A40	Tío Jorge	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	2	0	1	2	5,7
A48	Tío Jorge	2	1	2	0	0	0	0	0	2	2	2	0	0	2	4,3
A49	Tío Jorge	2	1	1	2	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	5,7
C01	Cándido D.	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1,4
C02	Cándido D.	2	2	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	2,9
C03	Cándido D.	2	2	2	0	2	0	1	1	1	2	2	2	1	2	5,7
C04	Cándido D.	2	2	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1,4
C05	Cándido D.	2	2	1	0	2	0	1	1	1	2	0	0	0	2	3,6
C06	Cándido D.	1	1	2	1	2	0	0	0	2	2	2	2	1	2	5,0
C07	Cándido D.	2	2	0	1	1	0	0	0	2	2	0	0	0	2	3,6
C08	Cándido D.	2	2	2	1	0	1	0	0	1	2	0	0	0	0	2,9
C09	Cándido D.	2	1	1	1	1	0	0	0	2	1	1	1	1	2	2,1
C10	Cándido D.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	10,0
C11	Cándido D.	2	2	2	0	2	1	2	0	1	2	1	0	0	2	5,0
C12	Cándido D.	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	1	2	7,9
C13	Cándido D.	2	2	1	1	1	0	1	1	2	1	0	2	1	0	2,9
C14	Cándido D.	2	1	2	0	0	0	0	1	1	2	2	2	1	2	4,3
C15	Cándido D.	2	1	0	0	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2,1
C16	Cándido D.	2	1	1	1	0	1	2	1	1	2	2	0	0	2	3,6
C17	Cándido D.	2	1	1	1	1	1	1	0	1	2	1	1	1	2	2,1
C18	Cándido D.	2	1	0	1	1	1	0	0	2	0	1	1	1	1	1,4
C19	Cándido D.	2	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	2	1,4
C20	Cándido D.	1	2	2	1	0	1	0	0	1	2	1	0	0	0	2,1
C21	Cándido D.	2	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	2,1
C22	Cándido D.	2	2	0	1	1	2	2	0	1	2	2	2	1	2	5,7
C23	Cándido D.	2	2	2	1	1	0	0	0	1	2	0	0	0	1	2,9
D01	Cantín y G.	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7
D02	Cantín y G.	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7
D03	Cantín y G.	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7
D04	Cantín y G.	2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1,4
D05	Claretianas	2	1	1	0	2	1	1	0	1	2	1	2	0	2	3,6
D06	Escol. Calasanz	1	1	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7
D07	Gascón y Marín	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0,7
D08	Tenerias	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	2	0,7
D09	Tenerias	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1,4
D10	Tenerias	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	2	0,7
D11	Tenerias	1	1	0	1	0	0	0	0	2	1	0	0	1	0	0,7
D12	Tenerias	2	2	0	2	0	0	2	1	2	0	0	0	1	2	4,3
D13	Torre Ramona	2	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	2	1,4

		1	*2.a*	*2.b*	*3.a*	*3.b*	*4.a*	*4.b*	*5*	*6*	*7.a*	*7.b*	*8*	*9*	*10*	
G. Experimental	% de éxito	**96**	**33**	**88**	**46**	**50**	**21**	**50**	**54**	**71**	**67**	**71**	**25**	**25**	**79**	**5,5**
	% de fracaso	4	63	8	33	25	46	21	25	21	21	17	42	46	4	
	% en blanco	0	4	4	21	25	33	29	21	8	13	13	33	29	17	
G. Control	% de éxito	**81**	**39**	**31**	**8**	**19**	**8**	**19**	**3**	**25**	**44**	**19**	**22**	**3**	**67**	**2,8**
	% de fracaso	19	61	22	47	39	31	31	31	47	19	25	19	47	8	
	% en blanco	0	0	47	44	42	61	50	67	28	36	56	58	50	25	

Criterios:

0 No responde
1 Fracaso al contestar a la pregunta
2 Éxito al contestar a la pregunta

CUESTIONARIO

ALUMNO/A: ____ **GRUPO** _____

Colegio ____

MARCA CON UNA CRUZ

¿Cómo vas en matemáticas?	Muy mal	☐
	Mal	☐
	Regular	☐
	Bien	☐
	Muy Bien	☐
¿Te gustan las matemáticas?	Muy poco	☐
	Poco	☐
	Bastante	☐
	Mucho	☐

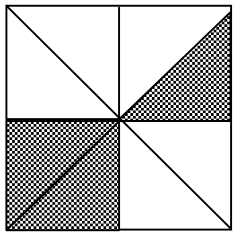
<u>ANTES DE COMENZAR LA PRUEBA, LEE LAS INDICACIONES SIGUIENTES:</u>

1º Utiliza exclusivamente bolígrafo o lapicero. No te hace falta nada más.

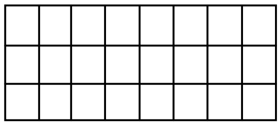
2º Realiza TODAS las operaciones en las hojas del cuestionario, NO UTILICES OTRAS HOJAS.

3º Hacer dibujos puede servirte de ayuda. Si utilizas DIBUJOS, realízalos en las hojas del cuestionario.

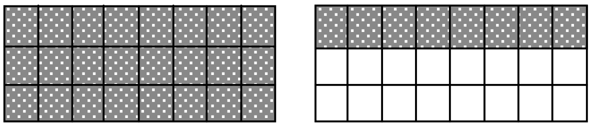
1.- ¿Qué parte de la figura está sombreada?



2.- Una tableta de chocolate tiene esta forma:



Si comes la cantidad de chocolate que está sombreada:

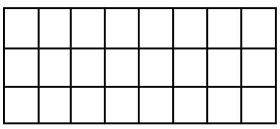


a) Expresa, con una fracción, la cantidad de chocolate que has comido.

b) Expresa esta cantidad de chocolate con otra fracción equivalente.

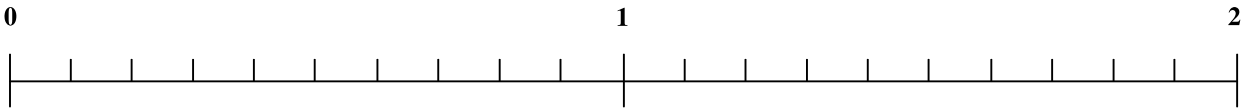
3.- a) Dibuja $\frac{7}{4}$ de tableta de chocolate.

Puedes utilizar como “todo” o unidad la tableta de chocolate de la pregunta anterior:

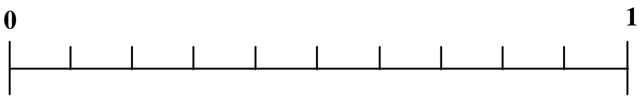


b) ¿Cómo explicarías a un amigo lo que significa la fracción $\frac{7}{4}$?

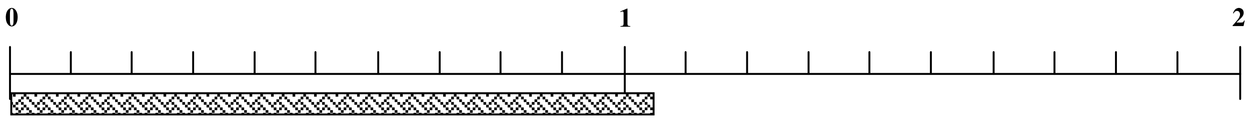
4.- En la regla que ves dibujada:



la **unidad** es la longitud entre 0 y 1**:**



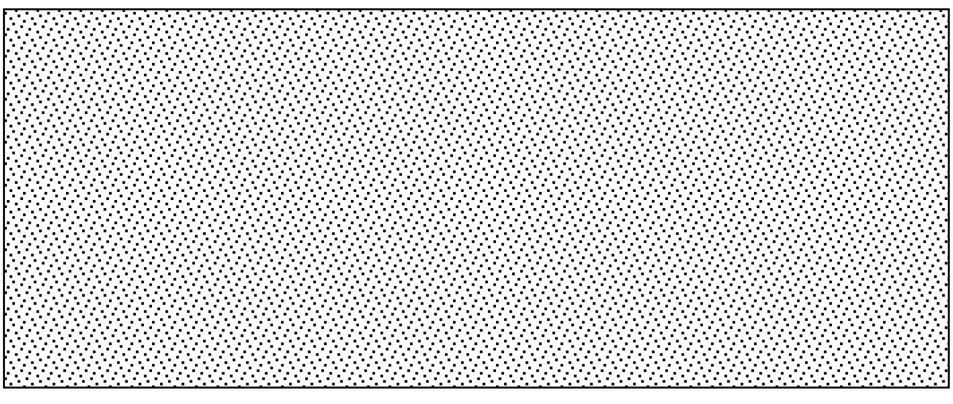
a) Expresa con una fracción, la longitud de la cuerda que está dibujada debajo de la regla. Indica cómo lo has hecho.



b) Expresa, con un número decimal, la longitud de la cuerda que está dibujada debajo de la regla. Indica cómo lo has hecho.

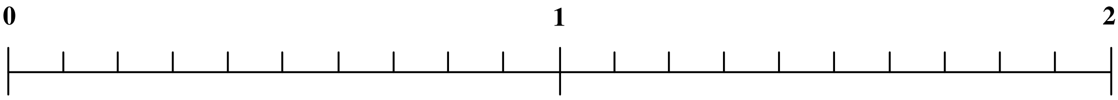
5.- Consideras como unidad de superficie 1 decímetro cuadrado que es la superficie del cuadrado de papel que se te entrega.

Expresa, con una fracción, la superficie del siguiente rectángulo:

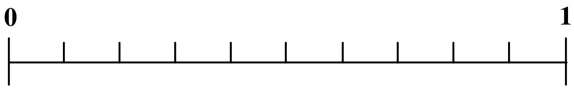


Indica cómo lo has hecho.

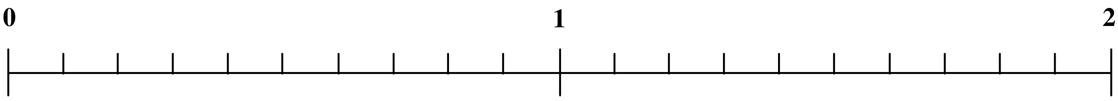
6.- En la regla que ves dibujada:



la **unidad** es la longitud entre 0 y 1**:**

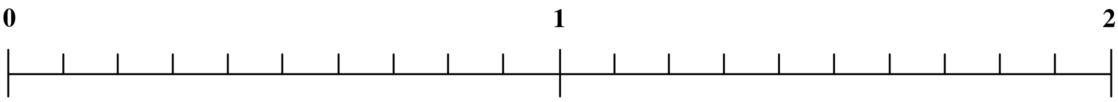


a) Dibuja sobre la regla un segmento de longitud $\frac{1}{2}$ unidad.

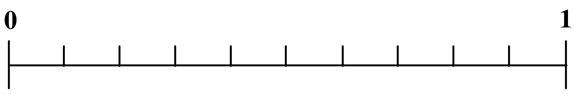


b) Indica qué has hecho para dibujar el segmento de longitud $\frac{1}{2}$ unidad.

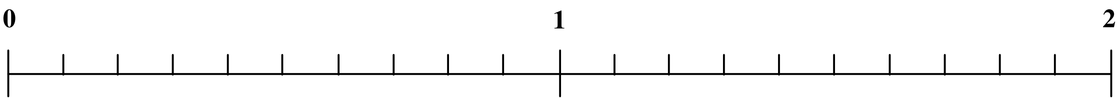
7.- En la regla que ves dibujada:



la **unidad** es la longitud entre 0 y 1**:**



a) Dibuja sobre la regla un segmento de longitud 0´95 unidades.



b) Indica el significado de las cifras del número decimal:

La cifra 0 significa que ____

____

La cifra 9 significa que ____

____

La cifra 5 significa que ____

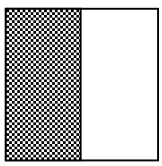
____

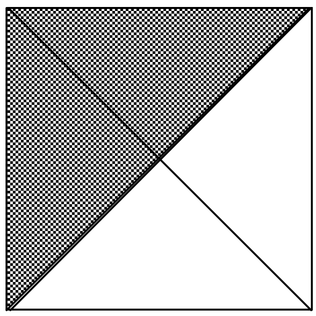
8.- Expresa, con una fracción, el número decimal 0´45. Indica cómo lo has hecho.

9.- Expresa, con un número decimal, la fracción $\frac{6}{5}$. Indica cómo lo has hecho.

10.- a) ¿Qué quiere decir que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ son equivalentes?

b) Las fracciones





$\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$, ¿son equivalentes?

Explica tu respuesta.

ANEXO V

Interacción Didáctica

ANEXO VI

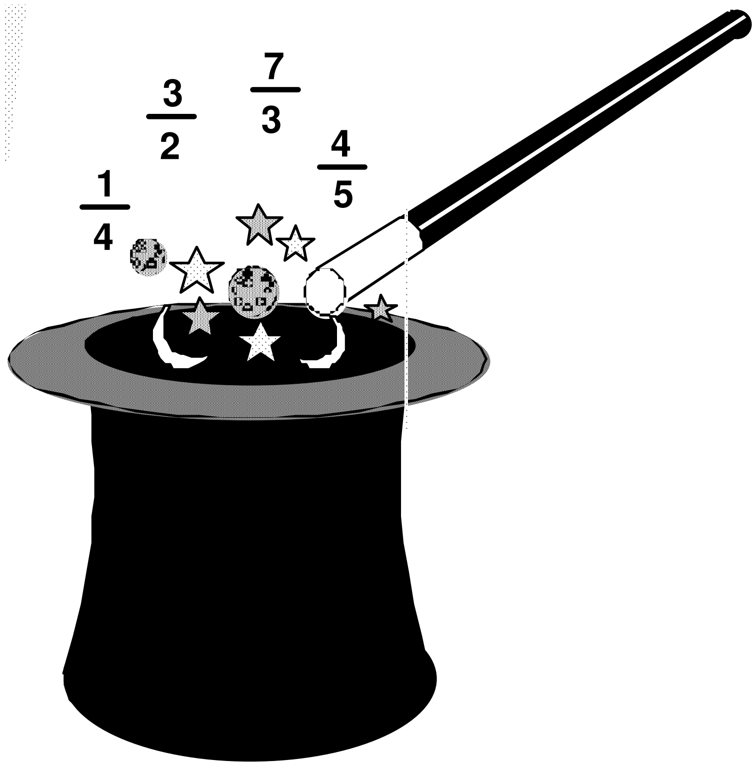
Material entregado a los alumnos

VI.1 Del Primer Ciclo

VI.2 Del Segundo Ciclo

FRACCIONES

Las FRACCIONES no salen de la chistera del mago, están en la mente de las personas porque las utilizamos para expresar cantidades



C.E.I.P. Tío Jorge

Curso 2003/04

Cuarto de Educación Primaria

Alumno/a:____________________________________

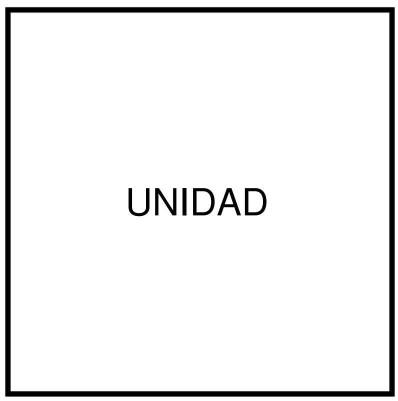
En clase hemos utilizado fracciones para comunicar el resultado de medidas de cantidades de longitud y de superficie.

Las fracciones sirven para expresar el resultado de la medida de cantidades de magnitud.

Recuerda que para medir has necesitado tener una UNIDAD de medida.

Para medir cantidades de longitud hemos utilizado como unidad una caña. Como la longitud de la caña-unidad no cabe en la página, dibujamos la caña-unidad del siguiente modo:

Para medir cantidades de superficie hemos utilizado como unidad un mantel de papel que tiene forma cuadrada. Como la superficie del mantel-unidad no cabe en la página la dibujamos del siguiente modo:



En una de las primeras tareas debías medir una barra de cortina que tenía una longitud de $\frac{3}{4}$ de la caña unidad. Recordarás que no sabías como medir la barra. Si colocabas la caña unidad junto a la barra te dabas cuenta que la barra era menor que la unidad, pero no conseguías medirla. Necesitabas hacer algo, ¿te acuerdas qué necesitabas hacer?

Si lo sabes, escríbelo ______________________________________

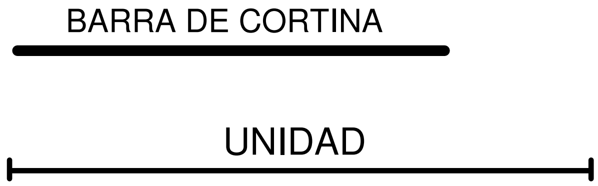
____

Si no lo sabes, encontrarás la solución en la página siguiente.

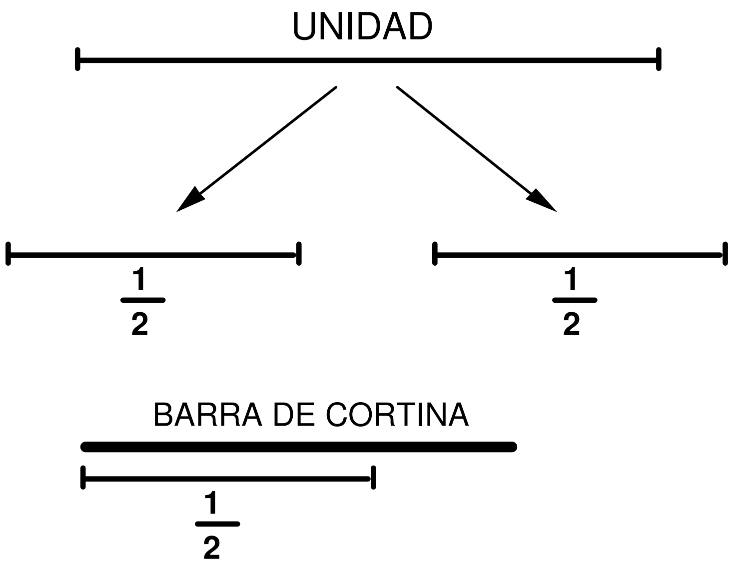
Para medir la longitud de la barra necesitas FRACCIONAR LA UNIDAD EN PARTES IGUALES, y deberás preguntarte:

¿en cuántas partes iguales debo fraccionar la unidad para que con algunas de estas partes consiga cubrir la longitud de la barra de cortina?.

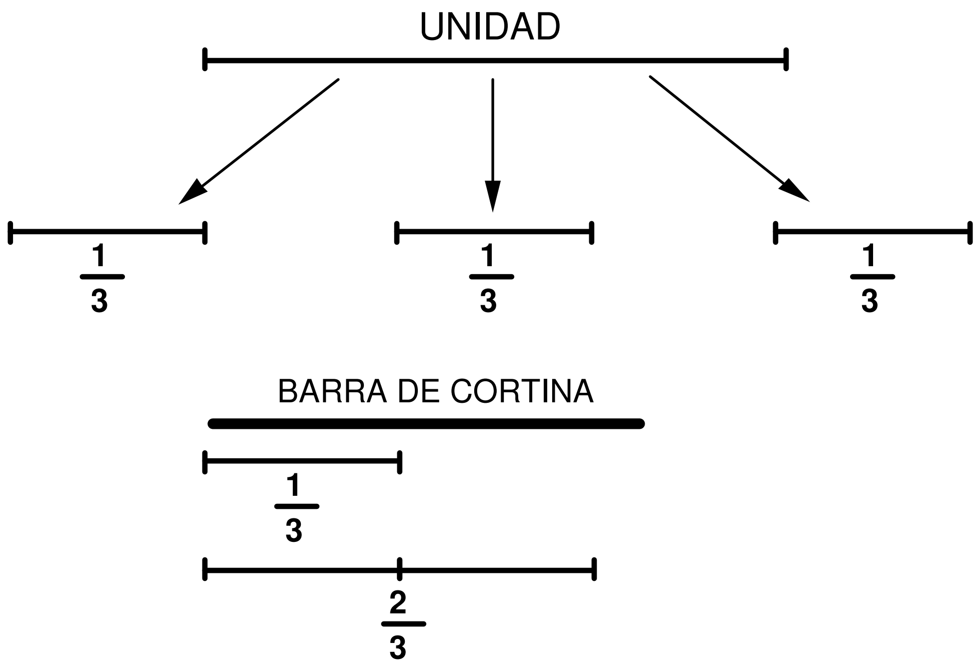
Veamos en cuántas partes debes fraccionar la unidad para medir la longitud de la barra de cortina:



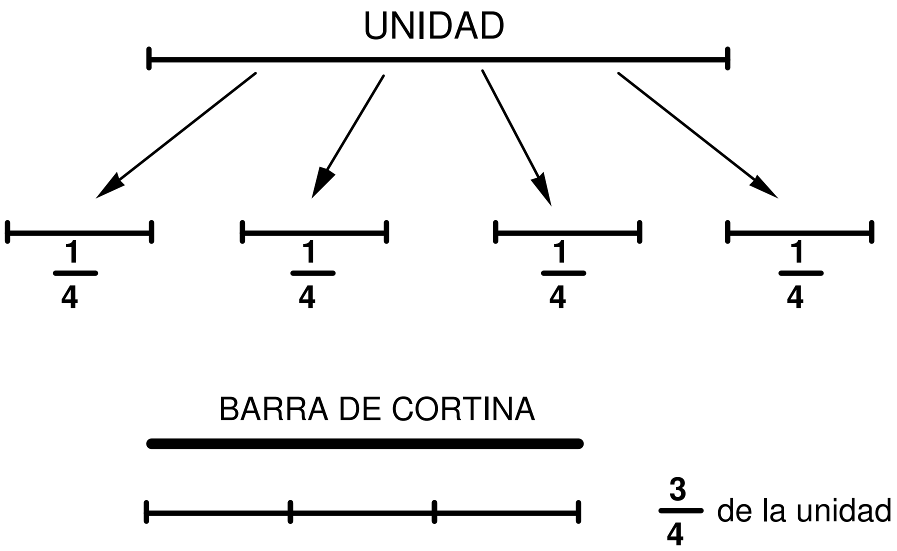
Si primero pruebas FRACCIONANDO LA UNIDAD en DOS PARTES IGUALES, no consigues medir la barra porque UNA subunidad de longitud $\frac{1}{2}$ de unidad es menor que la longitud de la barra y DOS subunidades de longitud $\frac{1}{2}$ de unidad es la unidad, y es mayor que la longitud de la barra.



Si después pruebas FRACCIONANDO LA UNIDAD en TRES PARTES IGUALES, no consigues medir la barra porque UNA subunidad de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad es menor que la longitud de la barra; DOS subunidades de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad es menor que la longitud de la barra, y TRES subunidades de longitud $\frac{1}{3}$ es la unidad, y es mayor que la longitud de la barra.



Finamente, si pruebas FRACCIONANDO LA UNIDAD en CUATRO PARTES IGUALES consigues medir la barra porque TRES subunidades de longitud $\frac{1}{4}$ de unidad cubren exactamente la longitud de la barra de cortina.



La fracción que expresa la longitud de la barra de cortina se lee «tres cuartos», y se escribe $\frac{3}{4}$ de unidad. Indica que la longitud de la barra de cortina se cubre con TRES subunidades iguales de longitud $\frac{1}{4}$ de unidad.

$$\begin{array}{rcl} & \mathbf{3} & \leftarrow \text{Numerador} \\ \text{Denominador} \rightarrow & \overline{\mathbf{4}} & \end{array}$$

Significado del numerador y denominador de una fracción cuando expresa el resultado de la medida de una cantidad de longitud.-

El **denominador** de una fracción indica el número de partes iguales en las que has fraccionado la unidad de longitud.

Por ejemplo, el denominador de la fracción $\frac{3}{4}$ indica que has fraccionado la unidad en 4 partes iguales. Es decir, que la unidad la has fraccionado en 4 subunidades iguales.

Cada subunidad tiene una longitud de $\frac{1}{4}$ de unidad. Con estas subunidades consigues cubrir la longitud de la barra de cortina.

El **numerador** de una fracción indica el número de subunidades que has tenido que colocar, una a continuación de la otra, para cubrir la longitud del objeto que estás midiendo.

Por ejemplo, el numerador de la fracción $\frac{3}{4}$ indica que has necesitado colocar 3 SUBUNIDADES de longitud $\frac{1}{4}$ para completar la longitud de la barra de cortina.

$$\begin{array}{rcl} & \mathbf{3} & \leftarrow \\ \rightarrow & \overline{\mathbf{4}} & \end{array}$$

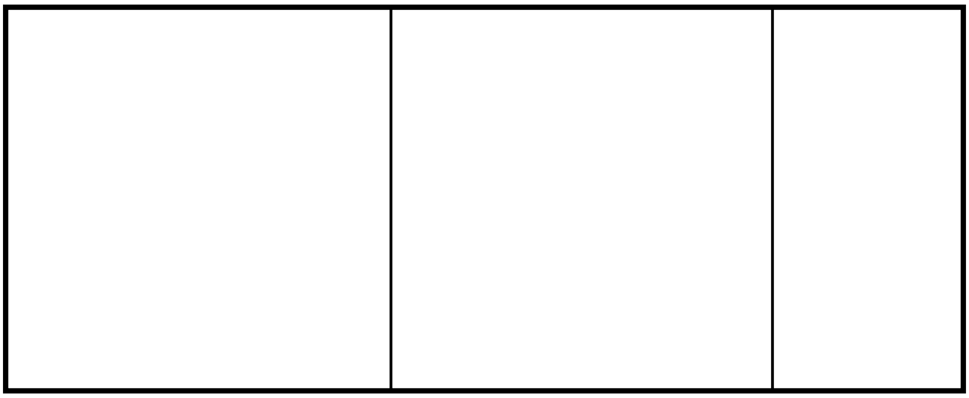
Numera:
Indica el número de subunidades que cubren la longitud del objeto que se mide.

Denomina:
Indica de qué longitud son las subunidades que utilizamos para medir.

Significado del numerador y denominador de una fracción cuando expresa el resultado de la medida de una cantidad de superficie

Si deseas medir la superficie de la figura:

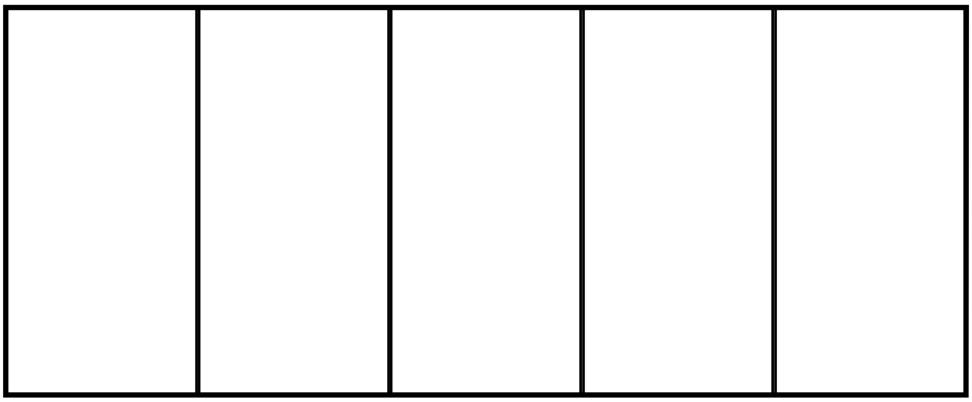
probarás llevando la unidad de medida sobre la figura:



y verás que la superficie de la figura es mayor que 2 unidades pero menor que 3 unidades.

El siguiente paso será fraccionar la unidad en dos subunidades iguales:

Observarás que con 5 subunidades de superficie $\frac{1}{2}$ de unidad consigues cubrir la superficie de la figura.



Por lo tanto, la figura tiene una superficie de $\frac{5}{2}$ de unidad.

El denominador de la fracción $\frac{5}{2}$ indica que has fraccionado la unidad en 2 subunidades iguales. Las subunidades con las que has conseguido cubrir la superficie de la figura tienen una superficie de $\frac{1}{2}$ de unidad.

El numerador de la fracción $\frac{5}{2}$ indica que has necesitado colocar 5 subunidades de superficie $\frac{1}{2}$ para cubrir la superficie de la figura.

El **denominador** de una fracción indica el número de partes iguales en las que has fraccionado la unidad de superficie. El **numerador** de una fracción indica el número de subunidades que has tenido que colocar, una a continuación de la otra, para cubrir la superficie del objeto que estás midiendo.

Ejercicio.- ¿Cuál es la medida de la superficie de la figura anterior si utilizas subunidades de superficie $\frac{1}{4}$ de unidad?.

Ahora intenta resolver el ejercicio. La respuesta la encontrarás en la página siguiente.

Fracciones equivalentes

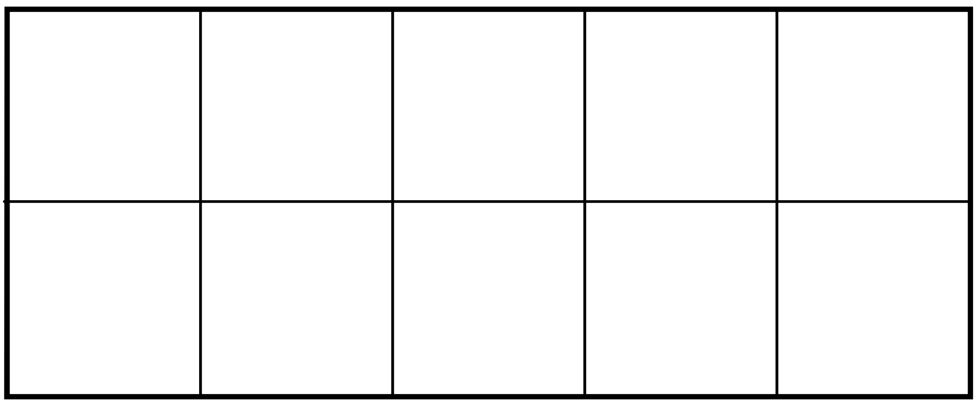
Has visto que el resultado de la medida de un mismo objeto puede ser expresado con fracciones que se escriben de diferente forma.

Por ejemplo, has visto que la superficie de la figura:

es $\frac{5}{2}$ de unidad, si utilizas subunidades de superficie $\frac{1}{2}$ de unidad.

Pero si has resuelto bien el ejercicio anterior habrás obtenido que la superficie de la figura es $\frac{10}{4}$ de unidad cuando utilizas subunidades de superficie $\frac{1}{4}$ de unidad.

En efecto:



Habrás observado que las fracciones $\frac{5}{2}$ y $\frac{10}{4}$ expresan la misma cantidad de superficie pero se escriben de diferente forma, porque has medido utilizando diferentes fraccionamientos de la unidad.

Estas fracciones se llaman **equivalentes**. Se coloca el signo "igual" entre las fracciones equivalentes:

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$$

Las fracciones $\frac{5}{2}$ de unidad y $\frac{10}{4}$ de unidad son equivalentes porque si fraccionas por la mitad las subunidades de $\frac{1}{2}$ obtienes subunidades de longitud $\frac{1}{4}$ de unidad y necesitas colocar el doble de subunidades para cubrir la misma cantidad de superficie.

$$\frac{5}{2} \underset{\text{x }2}{\overset{\text{x }2}{=}} \frac{10}{4}$$

Existen más fracciones equivalentes a $\frac{5}{2}$.

Para obtener fracciones equivalentes a una dada basta con multiplicar o dividir el numerador y denominador de la fracción por un mismo número.

Así, algunas fracciones equivalentes a $\frac{5}{2}$ son $\frac{10}{4}$, $\frac{30}{12}$ y $\frac{15}{6}$:

$$\frac{5}{2} \underset{\text{x }2}{\overset{\text{x }2}{=}} \frac{10}{4} \underset{\text{x }3}{\overset{\text{x }3}{=}} \frac{30}{12} \underset{:\,2}{\overset{:\,2}{=}} \frac{15}{6}$$

Comparación de fracciones

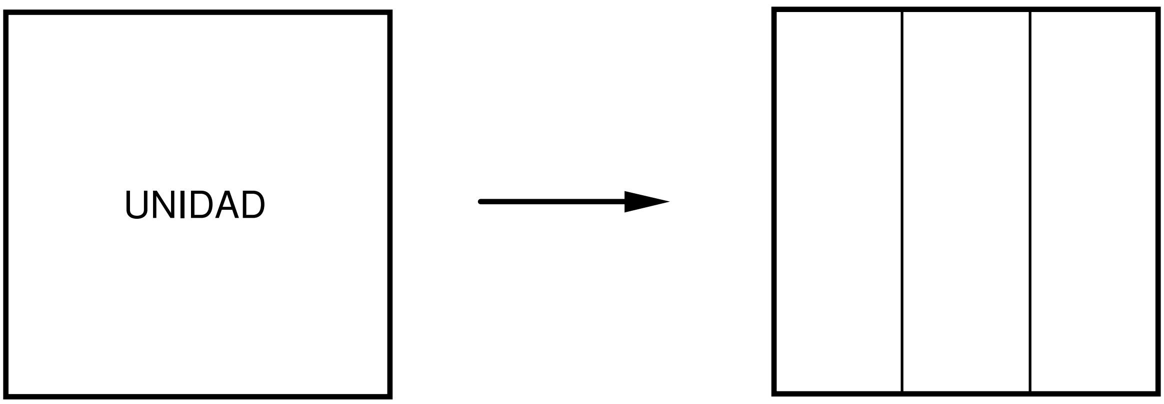
En ocasiones necesitamos saber si un objeto tiene más o menos cantidad de magnitud que otro objeto, es decir, necesitamos comparar cantidades de magnitud. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1º (comparación de fracciones con el mismo denominador)

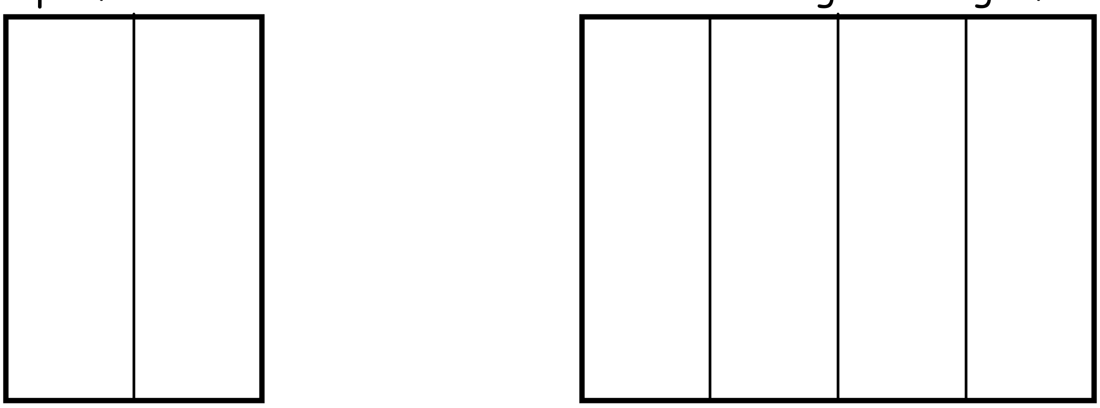
Has comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de $\frac{2}{3}$ de unidad y otra tiene una superficie de $\frac{4}{3}$ de unidad. ¿Qué cartulina tiene menor superficie?

Para resolver este problema puedes utilizar dos estrategias de resolución: realizar gráficos o realizar un razonamiento, pensando en la idea de fracción.

Si realizas gráficos, deberás dibujar la superficie de las dos cartulinas y después compararlas con la vista. Hay que fraccionar la unidad de superficie en tres partes iguales:



La superficie de las cartulinas se observa en los siguientes gráficos:



$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$

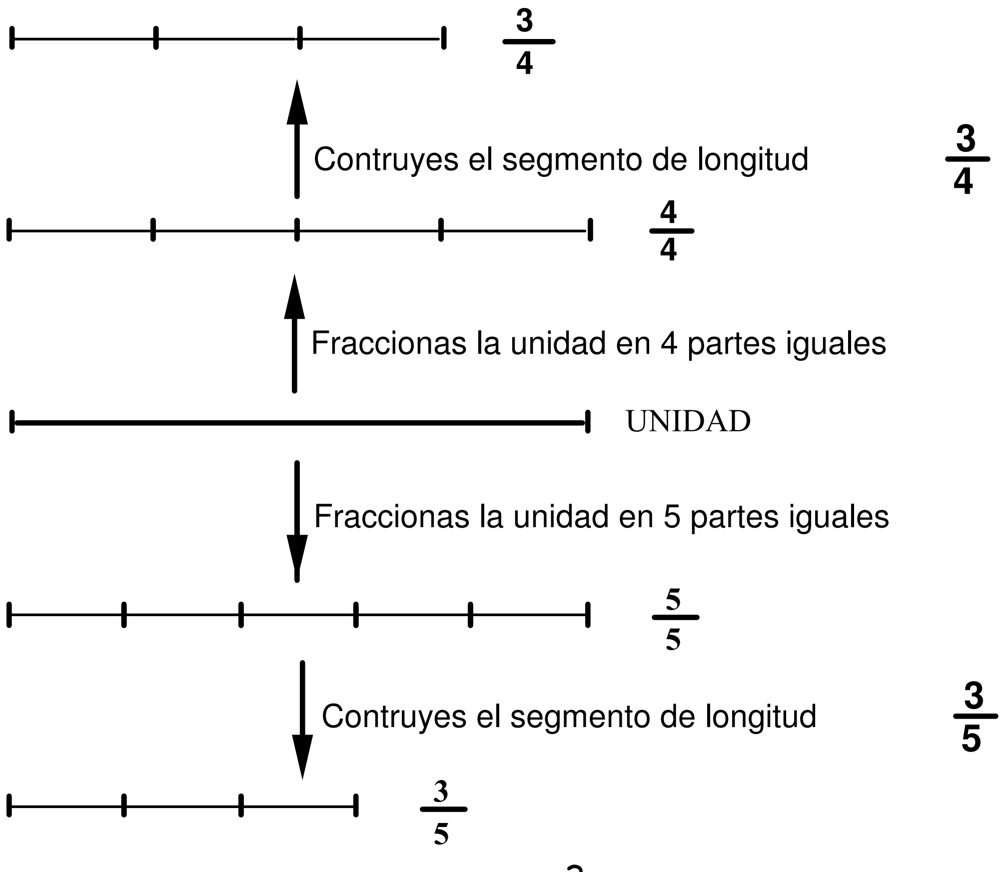
También puedes comparar la superficie de las cartulinas realizando el razonamiento siguiente:

"Como la superficie de las dos cartulinas se cubre con subunidades del mismo tamaño (de $\frac{1}{3}$ de unidad), tendrá menor superficie la cartulina que se cubra con un número menor subunidades".

Ejemplo 2º (comparación de fracciones con el mismo numerador)

Has cortado dos listones de madera. La longitud de uno de ellos es $\frac{3}{5}$ de unidad y la del otro $\frac{3}{4}$ de unidad. ¿Qué listón es más largo?.

Si para resolver el problema realizas gráficos, deberás dibujar la longitud de los dos listones y después compararlas con la vista:



Y observas que el listón de longitud $\frac{3}{4}$ de unidad es más largo que el listón de longitud $\frac{3}{5}$ de unidad.

También puedes resolver el problema realizando el razonamiento siguiente:

"Como la longitud de los dos listones se cubre con el mismo número de subunidades (tres), tiene mayor longitud el listón que se cubre con subunidades más largas. En este caso, la subunidad de longitud $\frac{1}{4}$ es mayor que la subunidad de longitud $\frac{1}{5}$. Por esto, el listón de longitud $\frac{3}{4}$ de unidad es más largo que el listón de $\frac{3}{5}$ de unidad".

Ejemplo 3º (comparación de fracciones con distinto numerador y distinto denominador)

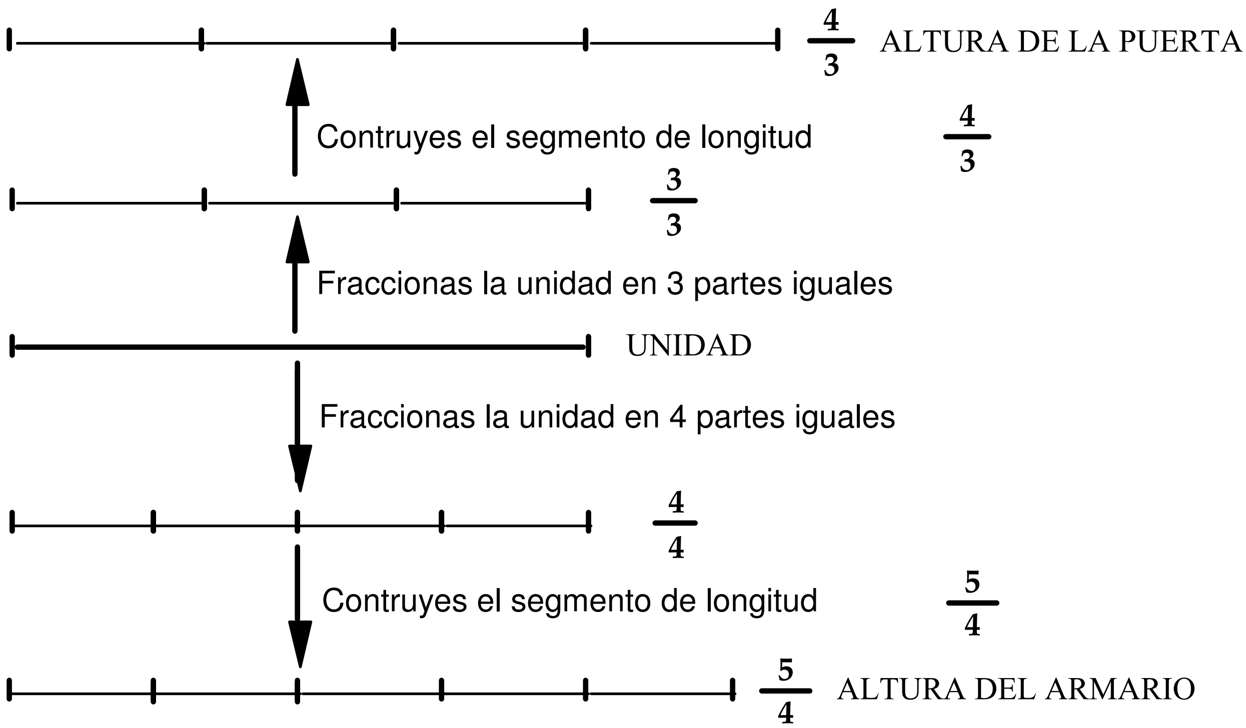
Necesitas trasladar un armario que tiene una altura de $\frac{5}{4}$ de unidad y deseas saber si puede pasar por una puerta que tiene una altura de $\frac{4}{3}$ de unidad, sin tener que inclinar o volcar el armario. ¿Cabe el armario por la puerta?.

Para resolver este problema puedes utilizar dos estrategias de resolución: realizar gráficos o utilizar la equivalencia de fracciones.

Ejercicio: Compara las fracciones $\frac{5}{4}$ de unidad y $\frac{4}{3}$ de unidad utilizando gráficos. Recuerda que la unidad de medida de longitud es:

Ahora intenta resolver el ejercicio. La respuesta la encontrarás en la página siguiente.

Seguro que has sabido dibujar la longitud de la altura del armario y la longitud de la altura de la puerta, y después compararlas con la vista:



Habrás visto que la altura de la puerta es mayor que la altura del armario. Es decir, el armario puede pasar por la puerta sin necesidad de inclinarlo o volcarlo.

A veces es difícil comparar las cantidades de magnitud utilizando gráficos. Esto ocurre cuando las fracciones que expresan las cantidades están muy próximas. En estos casos, te aconsejo que compares las fracciones utilizando la equivalencia de fracciones.

Para resolver este problema deberás utilizar tus conocimientos sobre equivalencia de fracciones y encontrar fracciones equivalentes a $\frac{5}{4}$ y a $\frac{4}{3}$ que tengan el mismo denominador. Inténtalo:

$$\frac{5}{4} = \frac{\square}{\square}$$

x 3

$$\frac{4}{3} = \frac{\square}{\square}$$

x 4

Has utilizado la equivalencia para escribir las dos fracciones con el mismo denominador:

$\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$ unidades, que es la altura del armario, y

$\frac{4}{3} = \frac{16}{12}$ unidades, que es la altura de la puerta.

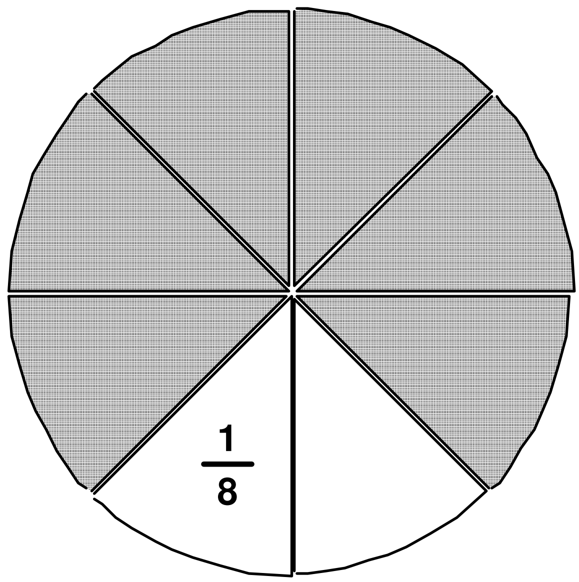
Ahora puedes comparar las fracciones, y ver que la altura del armario es menor que la altura de la puerta. Por lo tanto, el armario cabe por la puerta, sin inclinarlo ni volcarlo.

La fracción como medida de cantidades discretas (de objetos sueltos)

En ocasiones nos interesa medir el NÚMERO DE OBJETOS SUELTOS que hay en una parte de una colección cuando tomamos como unidad el número de objetos que tiene una colección.

Veamos un ejemplo. Vamos a considerar como UNIDAD DE MEDIDA EL NÚMERO DE QUESITOS QUE HAY EN UNA CAJA DE 8 QUESITOS.
Nos comemos 6 quesitos y nos preguntamos:

¿Cuánto mide la parte de caja que hemos comido?.



La fracción que mide la parte de caja que hemos comido es $\frac{6}{8}$ de la caja.

El denominador de la fracción indica el número de partes iguales en las que está fraccionada la unidad. La subunidad que tomamos es un quesito, porque vemos la caja fraccionada en 8 partes iguales. Cada quesito es $\frac{1}{8}$ del NÚMERO DE QUESITOS DE LA CAJA.

El numerador de la fracción indica el número de subunidades que hay en la parte de la colección que se quiere medir. En este caso queremos medir 6 quesitos.

Equivalencia de fracciones cuando expresan medidas de cantidades discretas

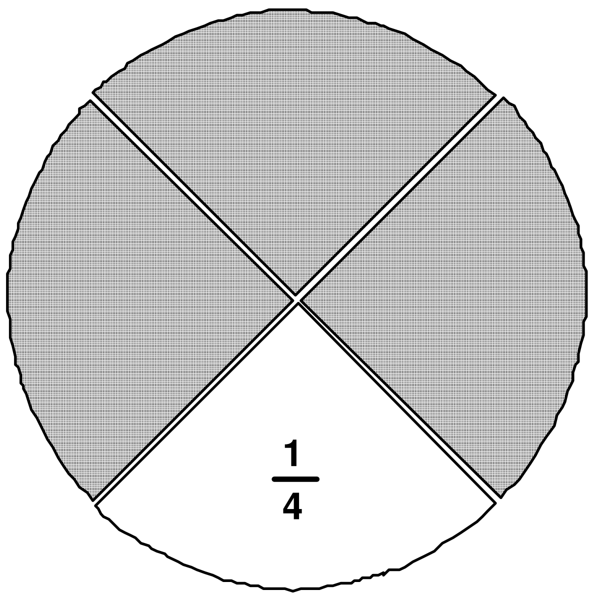
Seguimos pensando en el problema anterior y nos preguntamos: ¿podemos expresar, con otra fracción distinta a $\frac{6}{8}$ de la caja, la medida de la parte de caja de quesitos que hemos comido?.

Si fraccionamos la unidad (el número de quesitos de la caja) en 4 partes iguales, las subunidades son de tamaño $\frac{1}{4}$de la unidad. Cada subunidad está formada por 2 quesitos.

La fracción que mide la parte de caja que hemos comido es $\frac{3}{4}$de la caja, porque:

1º Hemos fraccionado la unidad en 4 partes iguales (denominador), y

2º hemos necesitado contar 3 subunidades (numerador) para contar los quesitos que hemos comido.



Las fracciones $\frac{6}{8}$ de caja y $\frac{3}{4}$ de caja son equivalentes, porque en $\frac{6}{8}$ consideramos como subunidad un quesito, que es $\frac{1}{8}$ de la unidad; mientras que en $\frac{3}{4}$ consideramos como subunidad 2 quesitos, que es $\frac{1}{4}$ de la unidad.

Como en $\frac{3}{4}$ las subunidades son el doble de tamaño que en $\frac{6}{8}$, necesitaremos la mitad de subunidades para contar los quesitos que hemos comido.

Fracción de una cantidad discreta

Hasta ahora hemos realizado tareas de medida en las que debemos encontrar la fracción que expresa la medida de una parte de una colección de objetos sueltos o discretos:

DATOS	INCÓGNITA
La unidad que es el número de objetos totales de la colección. El número de objetos que hay en una parte de la unidad	La fracción que mide el número de objetos que hay en una parte de la unidad.

Vamos a resolver otro tipo de tareas: queremos saber el número de objetos que hay en una parte de una colección y sabemos la fracción que expresa el resultado de la medida de esa parte de la colección de objetos sueltos y conocemos, también, la unidad:

DATOS	INCÓGNITA
La unidad que es el número de objetos totales de la colección. La fracción que mide el número de objetos que hay en una parte de la unidad.	El número de objetos que hay en una parte de la unidad

Para ver un ejemplo de este tipo de tareas, resolvemos el problema:

En tu clase estáis 24 alumnos en total entre niños y niñas. Si sabemos que los $\frac{2}{3}$ de los alumnos de la clase son niñas. ¿Cuántas niñas hay en tu clase?.

DATOS	INCÓGNITA
La unidad es el número de alumnos. Son 24 alumnos. La fracción $\frac{2}{3}$ que mide el número de niñas.	El número de niñas que hay en la clase.

La fracción $\frac{2}{3}$ tiene el significado de medida: indica que el número de niñas que hay en la clase coincide con el de DOS subunidades que se forman al fraccionar la unidad de medida en TRES partes iguales.

Así, al fraccionar el número de alumnos de la clase en tres partes iguales hay 8 alumnos en cada subunidad, y como el número de niñas es DOS veces el de la subunidad, en total hay $2 \times 8 = 16$ niñas.

Estas acciones puedes escribirlas como:

$$\frac{2}{3} \text{ de } 24 = (24 : 3) \times 2$$

Regla para calcular la fracción de una cantidad discreta:

Para calcular la fracción de una cantidad discreta basta dividir la cantidad entre el denominador de la fracción, y multiplicar el resultado por el numerador de la fracción.

Para ejercitar la regla anterior te propongo la resolución del problema siguiente:

Un niño recibe una propina de 20 euros cada mes. Decide ahorrar los $\frac{3}{10}$ de la propina, y gastar el resto. ¿Cuántos euros piensa ahorrar?. ¿Cuántos euros va a gastar?

Encontrarás escrita la solución del problema en la página siguiente.

Solución del problema.-

Dinero que ahorra:

$$\frac{3}{10} \text{ de } 20 = (20 : 10) \times 3 = 2 \times 3 = 6 \text{ euros.}$$

Dinero que gasta: 20 - 6 = 14 euros.

También puedes calcular $\frac{7}{10}$ de 20 = (20 : 10) x 7 = 14 euros

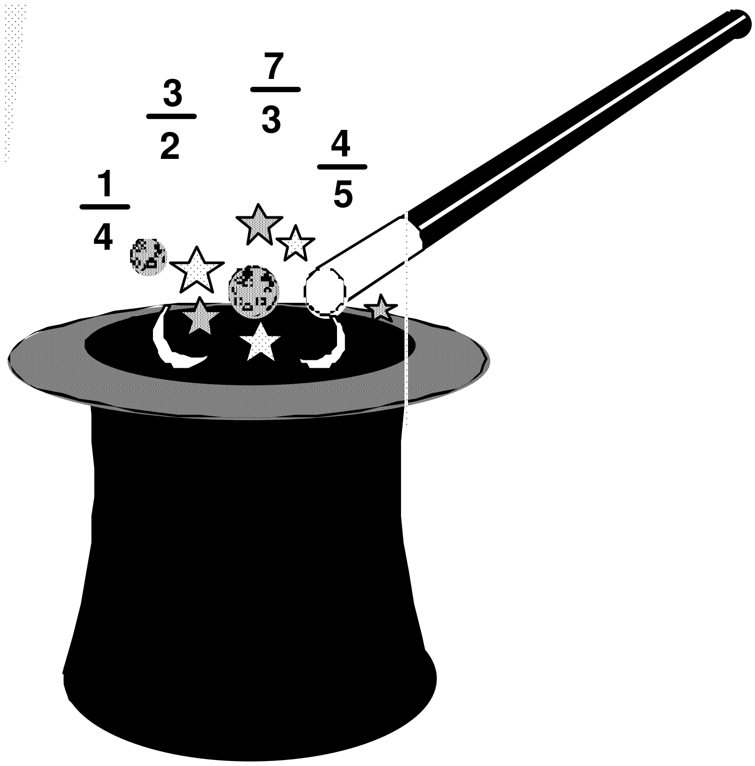
Respuestas: Ahorra 6 euros y gasta 14 euros.

Si necesitas unidades de longitud o de superficie puedes recortarlas

UNIDAD DE LONGITUD	UNIDAD DE LONGITUD
UNIDAD DE LONGITUD	UNIDAD DE LONGITUD

UNIDAD DE SUPERFICIE	UNIDAD DE SUPERFICIE
UNIDAD DE SUPERFICIE	UNIDAD DE SUPERFICIE

FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES



OPERACIONES CON FRACCIONES

LA FRACCIÓN COMO RESULTADO DE UN REPARTO Y LOS NÚMEROS DECIMALES

C.E.I.P. Tío Jorge

Curso 2004/05

Quinto de Educación Primaria

Alumno/a:________________________________

OPERACIONES CON FRACCIONES

Contenidos:

SUMA DE FRACCIONES

Imagina que tienes dos cantidades de una determinada magnitud, por ejemplo listones de madera, y que sabes la medida de la longitud de cada listón: $\frac{4}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de unidad.

Imagina que quieres saber la medida de la cantidad de longitud del listón que construyes al unir los dos listones cuando uno lo colocas a continuación del otro.

Si no conoces una operación, que se llama suma de fracciones, deberás hacer lo siguiente:
1º. Coger los dos listones con tus manos y colocar uno a continuación del otro.
2º Medir la longitud del nuevo listón que has construido.

Pero si sabes sumar fracciones podrás calcular la medida del nuevo listón sin tener que realizar ninguna medida. Ni siquiera necesitarás tocar los listones, sólo debes pensar lo siguiente:

1º Imaginarte los dos listones colocados uno a continuación del otro.
2º Razonar del siguiente modo: "como un listón ocupa 4 subunidades de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad y el otro ocupa 2 subunidades de la misma longitud, entre los dos ocupan 6 subunidades de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad"

Cuando piensas de esta forma estás realizando la operación suma de fracciones y se escribe: $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3}$
Recuerda que $\frac{6}{3}$ de unidad son 2 unidades.

Caso de la suma de fracciones que tienen distinto denominador:
Vamos a resolver un problema en el que las medidas de las cantidades de magnitud son fracciones que no tienen el mismo denominador:

"*Tienes un listón que mide* $\frac{1}{2}$ *de la caña unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud* $\frac{1}{3}$ *de la caña unidad. ¿Cuál es la longitud del nuevo listón que has construido?"*

Para poder realizar el razonamiento que hemos hecho antes es necesario que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ tengan el mismo denominador.

1º. Tendrás que encontrar fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ que tengan como denominador 6 (2 x 3 = 6) porque la subunidad $\frac{1}{6}$ cabe un número entero de veces en las subunidades $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

Con este denominador podrás encontrar una fracción equivalente a $\frac{1}{2}$ y otra fracción equivalente a $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

porque si utilizas la subunidad $\frac{1}{6}$, que cabe tres veces en la subunidad $\frac{1}{2}$, necesitarás el triple de subunidades.

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

porque si utilizas la subunidad $\frac{1}{6}$, que cabe dos veces en la subunidad $\frac{1}{3}$, necesitarás el doble de subunidades.

2º Razonar del siguiente modo: "como un listón ocupa 3 subunidades de longitud $\frac{1}{6}$ y el otro ocupa 2 subunidades de la misma longitud, entre los dos ocupan 5 subunidades de longitud $\frac{1}{6}$ de unidad"

Cuando piensas de esta forma estás realizando la operación suma de fracciones y se escribe: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ de unidad.

Regla para sumar fracciones:

Para sumar dos fracciones deberás buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador (si de entrada las fracciones no tienen el mismo denominador). El resultado de la suma será otra fracción que tiene como denominador el mismo que el de las fracciones dadas y como numerador la suma de los numeradores de las fracciones dadas.

RESTA DE FRACCIONES

"*Imagina que tienes un listón de madera que tiene una longitud de $\frac{7}{5}$ metros. Has cortado el listón de manera que un trozo mide $\frac{9}{10}$ metros. ¿Cuánto mide la longitud del otro trozo de listón?*"

Para resolver este problema, si no conoces la operación resta de fracciones, deberás hacer lo siguiente:

1º. Tener en la mano el listón de $\frac{7}{5}$ metros.
2º. Medir sobre este listón la longitud de $\frac{9}{10}$ metros.
3º. Medir la longitud del trozo de listón sobrante.

Pero si sabes restar fracciones podrás calcular la medida del nuevo listón sin tener que realizar ninguna medida. Ni siquiera necesitarás tocar los listones, sólo debes pensar lo siguiente:

1º Imaginarte que el listón cuya longitud deseas calcular está colocado a continuación del que mide $\frac{9}{10}$ metros, y que juntos miden $\frac{7}{5}$ metros.
2º Expresar las cantidades de longitud $\frac{7}{5}$ y $\frac{9}{10}$ respecto a una misma subunidad (mismo denominador)
3º Recordar que la longitud del trozo de listón sobrante será la resta del número de subunidades que tiene el listón grande menos el número de subunidades que tiene el listón pequeño.

Una fracción equivalente a $\frac{7}{5}$ es $\frac{14}{10}$, porque si para cubrir la longitud $\frac{7}{5}$ utilizas la subunidad $\frac{1}{10}$, que cabe dos veces en la subunidad $\frac{1}{5}$, necesitarás el doble de subunidades.

Ahora ya puedes realizar la resta. La longitud del listón sobrante es:

$$\frac{7}{5} - \frac{9}{10} = \frac{14}{10} - \frac{9}{10} = \frac{5}{10} \text{ metros}$$

Recuerda que $\frac{5}{10}$ es equivalente a $\frac{1}{2}$ metro.

Regla para restar fracciones:
Para restar dos fracciones deberás buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador (si de entrada las fracciones no tienen el mismo denominador). El resultado de la resta será otra fracción que tiene como denominador el mismo que el de las fracciones dadas y como numerador la resta de los numeradores de las fracciones dadas.

MULTIPLICACIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL

En ocasiones se nos plantean situaciones en las que hay que sumar repetidas veces una misma cantidad de magnitud. Veamos un ejemplo en el que la cantidad que se repite es una fracción, $\frac{1}{3}$, la magnitud que se utiliza es la capacidad y la unidad de medida es el litro.

Problema: "Compras un pack de 24 latas de refresco de $\frac{1}{3}$ de litro cada una. ¿Cuántos litros de refresco has comprado?"

Para resolver este problema necesitas sumar 24 veces la fracción $\frac{1}{3}$ de litro.
Y para no tener que escribir una suma de 24 sumandos iguales:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+$$

$$+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

se inventó una nueva operación que se escribe

$$24 \times \frac{1}{3}$$

El cálculo de esta operación se realiza del siguiente modo. Como todas las fracciones tienen el mismo denominador podemos realizar la suma razonando que:
1º en el denominador se escribe 3, porque todas las subunidades indican la capacidad de la lata de refresco.
2º en el numerador se escribe 24 x 1, porque se repite 24 veces el número de subunidades de la fracción (1).

Regla para multiplicar una fracción por un número natural:
El resultado de la multiplicación de una fracción por un número natural será otra fracción que tiene como denominador el mismo que el de la fracción y como numerador la multiplicación del numerador de la fracción por el número natural.

DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL

En ocasiones se nos plantean situaciones en las que una cantidad de magnitud hay que dividirla, fraccionarla o repartirla entre un número de partes iguales. Veamos un ejemplo, en el que la cantidad que se divide es una fracción, $\frac{1}{2}$ metro.

Problema: "Quieres partir un listón de madera de longitud $\frac{1}{2}$ metro en tres trozos iguales. ¿Cuál es la longitud de los trozos de listón que has obtenido?"

Podemos resolver este problema hallando una fracción equivalente a $\frac{1}{2}$ cuyo numerador sea 3 subunidades. Porque necesitamos ver la longitud descompuesta en 3 subunidades que serán de menor longitud que $\frac{1}{2}$ metro. Vamos a explicar esta estrategia. La fracción $\frac{1}{2}$ metro podemos pensarla como la cantidad de longitud que se compone de que 3 subunidades aunque sean algo más cortas (de longitud $\frac{1}{6}$ metro).

Así pues, vamos a utilizar la equivalencia de fracciones para obtener tres trozos iguales de un listón de longitud $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times 3}{2\times 3} = \frac{3}{6}$$

Ahora podemos realizar la división:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{3} \ \text{de } \frac{1}{6} & \mathbf{3} \\ \cline{2-2} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}$$

Esta operación, que llamamos división, la escribimos del siguiente modo:

$$\frac{1}{2} : 3 = \frac{3}{6} : 3 = \frac{3:3}{6} = \frac{1}{6}$$

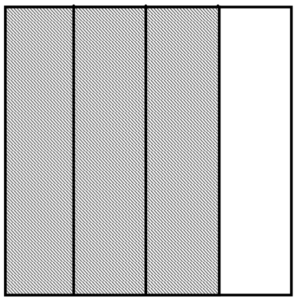
Si los 3 trozos de longitud $\frac{1}{6}$ se dividen en tres partes iguales queda un sólo trozo de longitud $\frac{1}{6}$ metro.

Vamos a plantear y resolver otro problema, en el que la cantidad que se divide es una fracción, $\frac{3}{4}$, y la magnitud que se utiliza es la superficie.

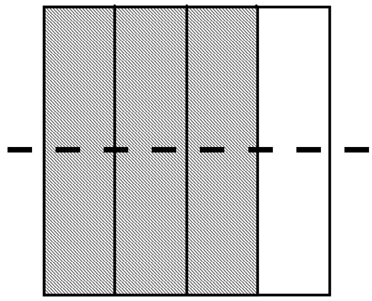
Problema: "De un mantel que tiene una superficie de $\frac{3}{4}$ de unidad, quieres sacar dos manteles iguales, sin que sobre ni falte mantel. ¿Cuál es la medida de la superficie del mantel que has obtenido?"

La fracción $\frac{3}{4}$ indica que la superficie del mantel se cubre con 3 subunidades de superficie $\frac{1}{4}$ de unidad. Como tenemos que dividir la fracción $\frac{3}{4}$ en dos partes iguales, tendremos que disponer, al menos, de 6 subunidades aunque sean de menor superficie que $\frac{1}{4}$ de unidad. Para ello deberemos hallar una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$ cuyo numerador sea 6 subunidades:

Gráfico de la fracción:



Si fraccionamos la unidad en 2 partes iguales:



$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Ahora podemos realizar la división:

$$\begin{array}{l|l} 6 \text{ de } \frac{1}{8} & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

Nos vamos a ir acostumbrando a escribir y realizar la operación división del siguiente modo:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{6}{8} : 2 = \frac{6:2}{8} = \frac{3}{8}$$

La superficie del mantel es $\frac{3}{8}$ de unidad.

Regla para dividir una fracción por un número natural:

Para dividir una fracción por un número natural debes hallar una fracción equivalente a la dada que tenga como numerador un número de subunidades que pueda ser dividido por el número natural y después debes realizar la división recordando la nueva medida de las subunidades.

LA FRACCIÓN COMO RESULTADO DE UN REPARTO

Y LOS NÚMEROS DECIMALES

Contenidos:

Repartos igualitarios

Hasta ahora, cuando vemos escrita u oímos nombrar una fracción pensamos que está indicando el resultado de la medida de una cantidad de magnitud. Por ejemplo, en la carnicería puedes escuchar a un cliente pedir $\frac{3}{4}$ de Kgr. de ternasco.

Vamos a estudiar un nuevo significado de la fracción: como resultado de un reparto. Los objetos que se van a repartir son barras de regaliz. El material que utilizamos para sustituir a las barras de regaliz son tiras de papel que se pueden fraccionar con facilidad.

Otro dato importante es el número de personas que participan en el reparto.

<u>Antes</u> de realizar un reparto debe haber:

- Un número de barras de regaliz, todas de la misma longitud.
- Un número de personas que se van a repartir las barras de regaliz

<u>Después</u> de realizar el reparto, la fracción expresa la cantidad de regaliz que recibe CADA UNA de las personas que participan en el reparto.

Como todas las barras que se van a repartir tienen la misma longitud, la unidad de medida de longitud va a ser la longitud de una de las barras. La fracción, que expresa el resultado de un reparto, es la medida de la longitud de regaliz que recibe cada una de las personas cuando se toma como unidad de medida la longitud de una barra de regaliz. Los repartos que vamos a realizar son igualitarios, porque cada persona recibirá la misma cantidad de regaliz.

Dos formas de realizar repartos

Vamos a realizar repartos igualitarios de dos formas diferentes:

a) Repartos realizados en una sola fase o etapa.

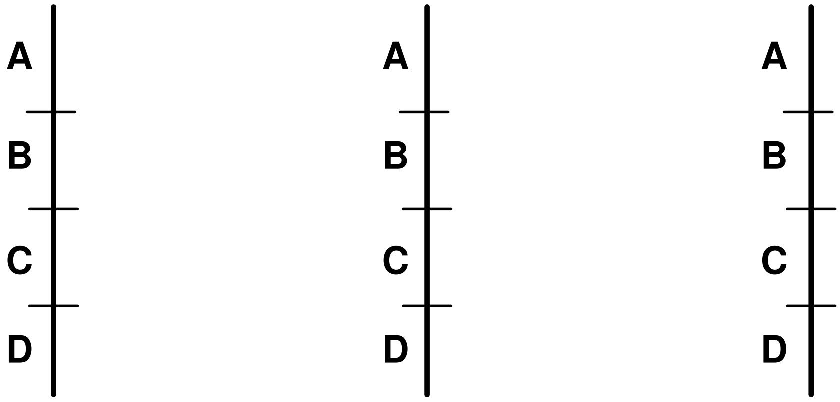
b) Repartos realizados en varias fases o etapas.

A) Repartos realizados en una sola fase o etapa.

El método que utilizamos para realizar el reparto "3 barras de regaliz entre 4 niños" en una sola fase consiste en fraccionar las 3 barras en tantas partes iguales como niños participen en el reparto.

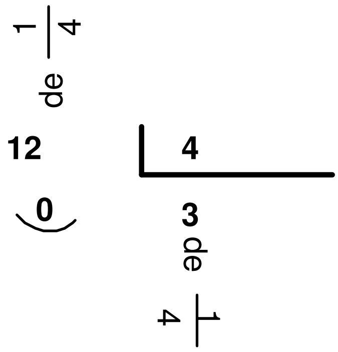
De esta forma obtenemos 12 trozos de longitud $\frac{1}{4}$ de barra, que los podemos repartir, de una sola vez, dando 3 trozos de trozos de longitud $\frac{1}{4}$ de barra a cada niño. Cada niño recibe $\frac{3}{4}$ de barra.

Gráficamente:



Niño **A**	Niño **B**	Niño **C**	Niño **D**
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

Con símbolos, el reparto "3 barras entre 4 niños" lo escribimos:



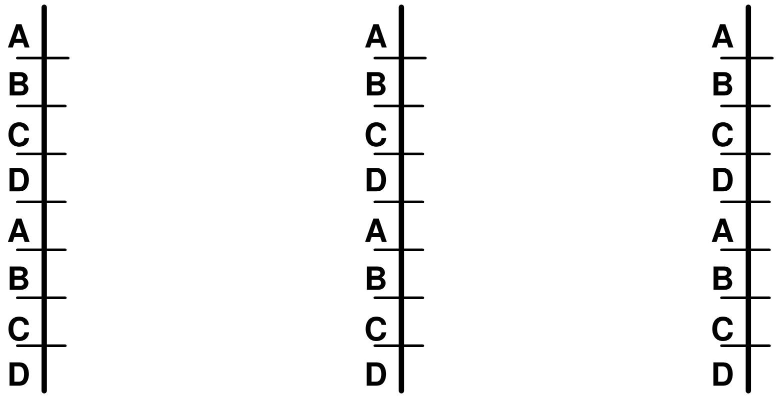
La fracción $\frac{3}{4}$ expresa la cantidad de longitud de regaliz que recibe cada niño que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 niños".

El numerador de la fracción indica el número de barras de regaliz que se van a ser repartidas, y el denominador indica el número de personas que participan en el reparto.

Otro método para realizar el reparto en una sola fase consiste en fraccionar las barras en un número de partes iguales que sea el doble, el triple, el cuádruple, ... del número de personas que haya. Por ejemplo, para realizar el reparto " 3 barras de regaliz entre 4 niños" en una sola fase podemos fraccionar cada barra en 8 partes iguales.

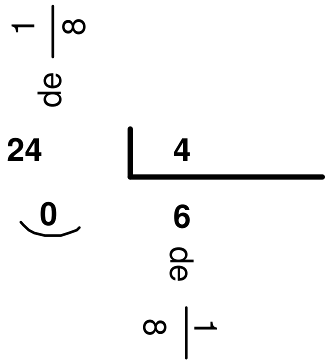
De esta forma obtenemos 24 trozos de longitud $\frac{1}{8}$ de barra, que los podemos repartir, de una sola vez, dando 6 trozos de trozos de longitud $\frac{1}{8}$ de barra a cada niño. Cada niño recibe $\frac{6}{8}$ de barra, que es una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$ de barra.

Gráficamente:



Niño A	Niño B	Niño C	Niño D
$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{8}$

Con símbolos, el reparto el reparto "3 barras entre 4 niños" lo escribimos:



La fracción $\frac{6}{8}$ expresa la cantidad de longitud de regaliz que recibe cada niño que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 niños".

El numerador de la fracción indica el <u>doble</u> del número de barras de regaliz que se van a ser repartidas, y el denominador indica el <u>doble</u> del número de personas que participan en el reparto.

Si hubiéramos realizado el reparto "6 barras de regaliz entre 8 niños" lo que recibiría cada uno de los niños es $\frac{6}{8}$ de barra. Vemos que en los repartos "3 barras de regaliz entre 4 niños" y "6 barras de regaliz entre 8 niños" los niños reciben la misma longitud de regaliz.

Los repartos en los que las personas reciben la misma longitud de regaliz se llaman <u>repartos</u> <u>iguales</u>.

Habrás observado que para obtener repartos iguales a uno dado, basta con duplicar, a la vez, el número de barras y el número de personas. También puedes triplicar, cuadruplicar, ... , a la vez, el número de barras y el número de personas.

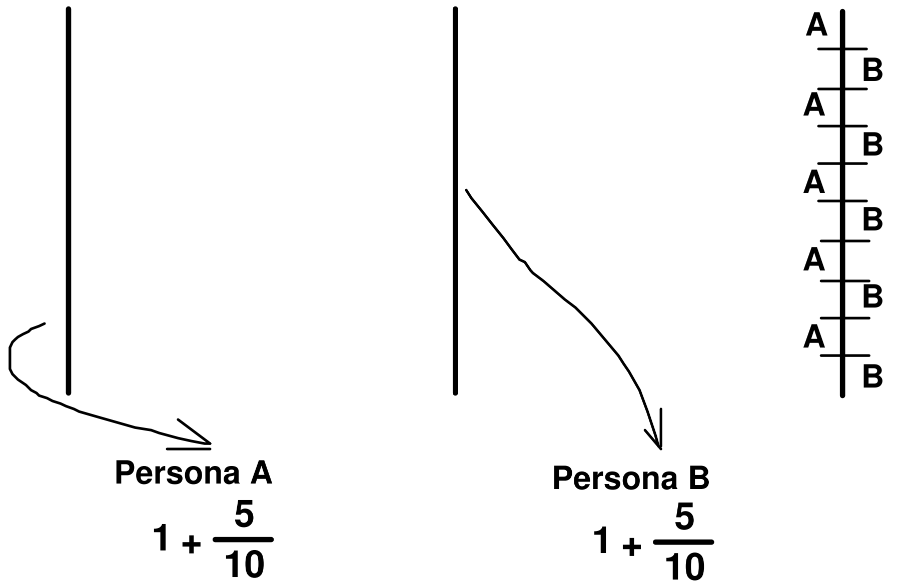
B) Repartos realizados en una varias fases o etapas.

El método que utilizamos para realizar un reparto por fases consiste en repartir, primero, las barras enteras cuando haya más barras que personas. Después las barras sobrantes se fraccionan en 10 partes iguales y se realiza una segunda fase del reparto. Si quedan trozos de barra sin repartir se vuelven a fraccionar en 10 partes iguales y se procede a realizar el reparto, y así sucesivamente hasta que no quedan trozos por repartir.

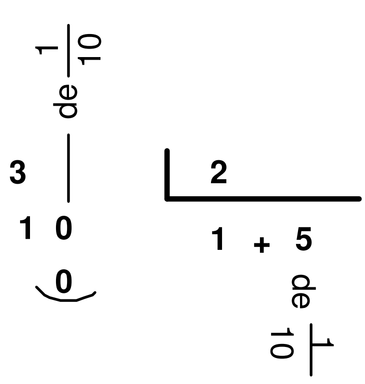
Para ver cómo se realiza un reparto por fases realizamos dos repartos: primero repartimos "3 barras de regaliz entre 2 personas" y, después "3 barras de regaliz entre 4 personas".

Para realizar el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas", en la primera fase cada persona recibe 1 barra de regaliz. Como queda una barra, para repartirla la fraccionamos en 10 partes iguales y ahora podemos dar 5 trozos de longitud $\frac{1}{10}$ de barra, en la segunda parte del reparto. Cada persona recibe 1 + $\frac{5}{10}$ de barra.

Gráficamente:

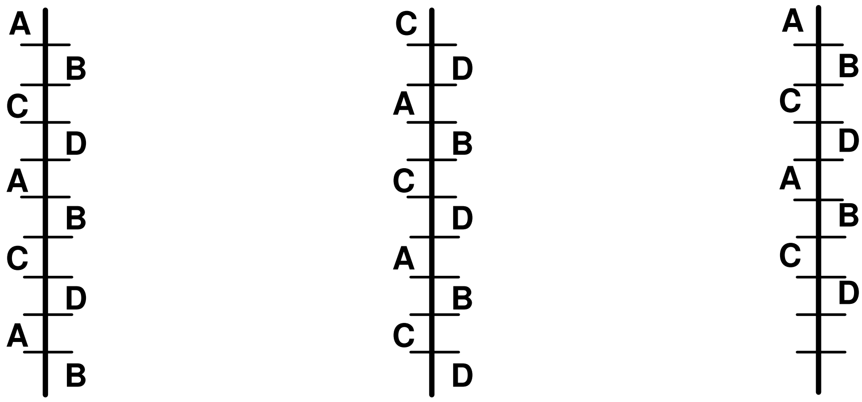


Con símbolos, el reparto "3 barras entre 2 personas" lo escribimos:

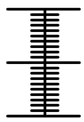


Veamos lo que reciben las personas en cada fase del reparto "3 barras de regaliz entre 4 personas":

En la primera fase del reparto cada persona recibe 0 barras de regaliz, porque no podemos dar barras enteras de regaliz.
En la segunda fase del reparto cada persona recibe $\frac{7}{10}$ de barra de regaliz, porque hemos fraccionado las tres barras en 10 partes iguales y hemos realizado una fase del reparto. Gráficamente:

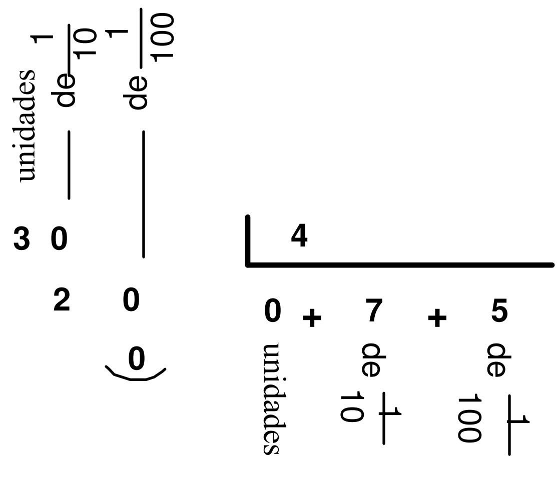


En la tercera fase del reparto cada persona recibe $\frac{5}{100}$ de barra de regaliz, porque se reparten 20 trozos de longitud $\frac{1}{100}$ de barra entre 4 personas:



Cada persona recibe 0 + $\frac{7}{10}$ + $\frac{5}{100}$ de barra.

Con símbolos, el reparto "3 barras entre 4 personas" lo escribimos:



El número decimal como resultado de un reparto

La cantidad de longitud de barra de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas" cuando se realiza el reparto en varias fases y se fraccionan los trozos sobrantes en 10 partes iguales viene dada por la suma de fracciones decimales: $1 + \frac{5}{10}$ de barra.

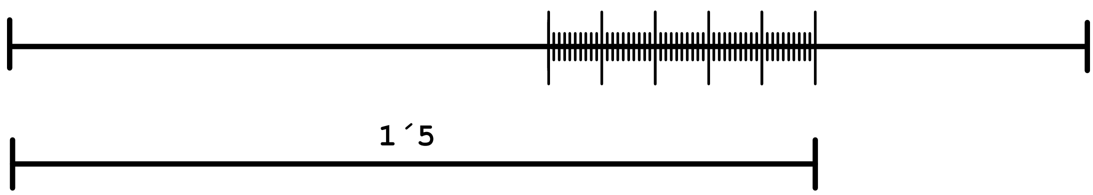
Podemos expresar esta suma de fracciones con el número decimal 1´5 de barra.

La cifra 1, que está a la izquierda de la coma, se llama <u>parte entera</u> del número decimal. La cifra 1 indica que cada persona recibe 1 barra de regaliz.

La cifra 5, que está a la derecha de la coma, se llama <u>parte decimal</u> del número decimal. La cifra 5 indica que cada persona recibe $\frac{5}{10}$ de barra de regaliz, y se llama <u>cifra de las décimas</u>.

Si la longitud de una barra de regaliz es:

el número decimal 1´5 de barra expresa la longitud de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas":



La cantidad de longitud de barra de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 personas" cuando se realiza el reparto en varias fases y se fraccionan los trozos sobrantes en 10 partes iguales viene dada por la suma de fracciones decimales: $0 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$ de barra.

Podemos expresar esta suma de fracciones con el número decimal 0´75 de barra.

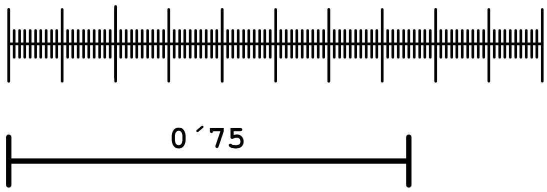
La cifra 0, que está a la izquierda de la coma, se llama <u>parte entera</u> del número decimal. La cifra 0 indica que las personas no reciben ninguna barra entera de regaliz.

La cifra 7, que está situada en el primer lugar a la derecha de la coma, indica que cada persona recibe $\frac{7}{10}$ de barra de regaliz, y se llama <u>cifra de las décimas</u>.

La cifra 5, que está situada en el segundo lugar a la derecha de la coma, indica que cada persona recibe $\frac{5}{100}$ de barra de regaliz, y se le llama <u>cifra de las centésimas</u>.

Si la longitud de una barra de regaliz es:

el número decimal 0´75 de barra expresa la longitud de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 personas":



Recordarás que en clase has realizado otros repartos y has obtenido los números decimales que indican lo que recibe cada persona que participa en el reparto.

Así, en los repartos:

"7 barras de regaliz entre 5 personas" cada persona recibe 1 + $\frac{4}{10}$ = 1´4 de barra.

"4 barras de regaliz entre 5 personas" cada persona recibe 0 + $\frac{8}{10}$ = 0´8 de barra.

"5 barras de regaliz entre 4 personas" cada persona recibe

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 1´25 \text{ de barra.}$$

"15 barras de regaliz entre 4 niños" cada persona recibe

$$3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} = 3´75 \text{ de barra.}$$

"17 barras de regaliz entre 8 niños" cada persona recibe

$$2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 2´125 \text{ de barra..}$$

El número decimal como resultado de una medida de cantidad de magnitud

Los números decimales se utilizan para expresar cantidades de magnitud.

Recordarás que en clase hemos visto botellas cuya capacidad venía expresada por un número decimal y otros productos cuyo peso venía expresado por un número decimal. En todos los casos debíais expresar el número decimal con una fracción.

1º Una botella de agua mineral de 1´5 litros se puede expresar con la fracción $\frac{3}{2}$ de litro, porque:

$$1'5 = 1 + \frac{5}{10} = \frac{10}{10} + \frac{5}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

2º Una botella de fertilizante que pesa 1´2 kilos se puede expresar con la fracción $\frac{6}{5}$ de kilo, porque:

$$1'2 = 1 + \frac{2}{10} = \frac{10}{10} + \frac{2}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

3º Un botellín de batido de 0´25 litros se puede expresar con la fracción $\frac{1}{4}$ de litro, porque:

$$0'25 = 0 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

4º Un paquete de carne picada que pesa 0´375 kilos se puede expresar con la fracción $\frac{3}{8}$ de kilo, porque:

$$0'375 = 0 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{375}{1000} = \frac{75}{200} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

Equivalencia de números decimales

Has visto al realizar las tareas que puedes expresar, con números decimales, el resultado de un reparto de diferentes formas. Recuerda que es lo mismo recibir 2'5 barras de regaliz que 2'50 barras de regaliz; y lo mismo que recibir 2´500 barras de regaliz. Es decir,

puedes quitar o añadir un cero en la <u>última</u> cifra de un número decimal y éste número no varía.

Ordenación de números decimales

Recuerda que hemos estudiado la siguiente regla que sirve para ordenar números decimales:

Para ordenar números decimales comparamos la parte entera de los números decimales. El que tenga mayor parte entera será el número decimal mayor. Si los números tienen la misma parte entera, entonces comparamos la cifra de las décimas, y será mayor el número que tenga la cifra de las décimas mayor. Si los números tienen la misma parte entera y la misma cifra de las décimas entonces comparamos la cifra de las centésimas, y será mayor el número que tenga la cifra de las centésimas mayor. Y así, sucesivamente.

Por ejemplo, si ordenas bien los números decimales 10´3 ; 10´21 y 1´031, obtendrás que: $1'031 < 10'21 < 10'3$.

Operaciones con números decimales

A) Suma de números decimales

Cuando necesitas añadir una cantidad de magnitud a otra cantidad de magnitud, o unir dos o más cantidades de magnitud utilizas la operación suma. Si las cantidades de magnitud están expresadas con números decimales utilizas la operación suma de números decimales.

Recuerda que has utilizado la operación suma para resolver el siguiente problema:
"Un grupo de amigas quedan para caminar dos veces al día. Por la mañana andan 4´5 Km. y por la tarde 3´75 Km. ¿Cuantos kilómetros caminan cada día?".

Para realizar el cálculo de la suma, podemos expresar los números decimales como suma de fracciones decimales y realizar la suma de fracciones:

$$\begin{array}{r} 3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} \\ + \quad 4 + \frac{5}{10} + \frac{0}{100} \\ \hline 7 + \frac{12}{10} + \frac{5}{100} \end{array}$$

$$7 + 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} \qquad \text{porque } \frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$$

$$8 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} \qquad \text{que es igual a } 8´25 \text{ Km.}$$

Sin embargo, podemos realizar la suma de decimales de un modo más sencillo, parecido al procedimiento que utilizas para sumar números naturales:

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ \mathbf{3´75} \\ + \quad \mathbf{4´5} \\ \hline \mathbf{8´25} \end{array}$$

Regla para sumar números decimales:

Se colocan los números decimales alineados por la coma. Se suman como si fuesen números naturales y, en el resultado, se coloca la coma debajo de la columna de las comas.

B) Resta de números decimales

Cuando necesitas quitar una cantidad de magnitud de otra cantidad de magnitud utilizas la operación resta. Si las cantidades de magnitud están expresadas con números decimales utilizas la operación resta de números decimales.

Recuerda que has utilizado la operación resta para resolver el siguiente problema:

"Un carnicero vende una pieza de ternasco de 20 Kgrs. A los tres primeros clientes les vende 3´75 Kgrs.; 5´8 Kgrs. y 6´5 Kgrs. ¿Cuántos Kgrs. de la pieza de ternasco le queda por vender?"

Para realizar el cálculo de la resta de las cantidades 20 Kgrs. y 16´05 Kgrs., podemos expresar los números decimales como suma de fracciones decimales y realizar la resta de fracciones:

$$\begin{array}{rl} & 20 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} \\ - & 16 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 20 + \frac{0}{10} + \frac{10}{100} \\ - & 16 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} \\ \hline \end{array}$$

porque $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ y al minuendo y al sustraendo hemos añadido $\frac{1}{10}$

$$\begin{array}{rl} & 20 + \frac{10}{10} + \frac{10}{100} \\ - & 17 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} \\ \hline \end{array}$$

porque $\frac{10}{10} = 1$ y al minuendo y sustraendo hemos añadido $\frac{10}{10} = 1$

Ahora podemos restar: $3 + \frac{9}{10} + \frac{5}{100}$ que es igual a 3´95 Kgrs.

Sin embargo, podemos realizar la resta de decimales de un modo más sencillo, parecido al procedimiento que utilizas para restar números naturales:

$$\begin{array}{rcccc} & & & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} \\ & \mathbf{2} & \mathbf{0´} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ - & \mathbf{1} & \mathbf{6´} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \hline & & \mathbf{3´} & \mathbf{9} & \mathbf{5} \end{array}$$

<u>*Regla para restar números decimales:*</u>

Se colocan los números decimales alineados por la coma. Se restan como si fuesen números naturales y, en el resultado, se coloca la coma debajo de la columna de las comas.

C) Multiplicación de un número decimal por un número natural

Cuando necesitas sumar un número de veces una misma cantidad de magnitud utilizas la operación multiplicación. Si la cantidad de magnitud está expresada con un número decimal utilizas la operación multiplicación de un número decimal por un número natural.

Recuerda que has utilizado la operación multiplicación de un número decimal por un número natural para resolver el siguiente problema:

"La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas consecutivas es de 2´75 metros?".

Para realizar el cálculo de la multiplicación 2´75 x 8, podemos expresar el número decimal como suma de fracciones decimales y realizar la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} 2 + \dfrac{7}{10} + \dfrac{5}{100} \\ \times 8 \\ \hline 16 + \dfrac{56}{10} + \dfrac{40}{100} \\ 16 + \dfrac{56}{10} + \dfrac{4}{10} \\ 16 + \dfrac{60}{10} \\ 16 + 6 \end{array} \qquad \text{que son 22 metros}$$

Sin embargo, podemos realizar la multiplicación de un modo más sencillo, parecido al procedimiento que utilizas para multiplicar números naturales:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 6\ \ 4\ } \\ \mathbf{2{\acute{}}75} \\ \times\ \mathbf{8} \\ \hline \mathbf{22{\acute{}}00} \end{array}$$

Regla para multiplicar un número decimal por un número natural:

Se realiza la multiplicación como si los dos números fueran naturales, y luego se corre la coma, desde la derecha, tantos lugares como cifras decimales tenga el número decimal.

D) Multiplicación de un número decimal por 10, 100 y 1000

Cuando necesitas sumar 10, 100 ó 1000 veces una cantidad de magnitud utilizas la operación multiplicación de un número decimal por 10, 100 ó 1000.

Recuerda que en una tarea has necesitado realizar la operación 1´05 x 10:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \times 10 \\ \hline 10 + \frac{0}{10} + \frac{50}{100} \end{array}$$

$$10 + \frac{5}{10}$$ que es igual a 10´5

Recuerda que, también, has necesitado realizar la operación 1´05 x 100:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \times 100 \\ \hline 100 + \frac{0}{10} + \frac{500}{100} \end{array}$$

$100 + 5$ que es igual a 105

Recuerda que, además, has necesitado realizar la operación 1´05 x 1000:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \times 1000 \\ \hline 1000 + \frac{0}{10} + \frac{5000}{100} \end{array}$$

$1000 + 500$ que es igual a 1050

Colocando los resultados en una tabla.

	Multiplicado por 10	Multiplicado por 100	Multiplicado por 1000
1´05	**10´5**	**105**	**1050**

podemos enunciar la siguiente regla:

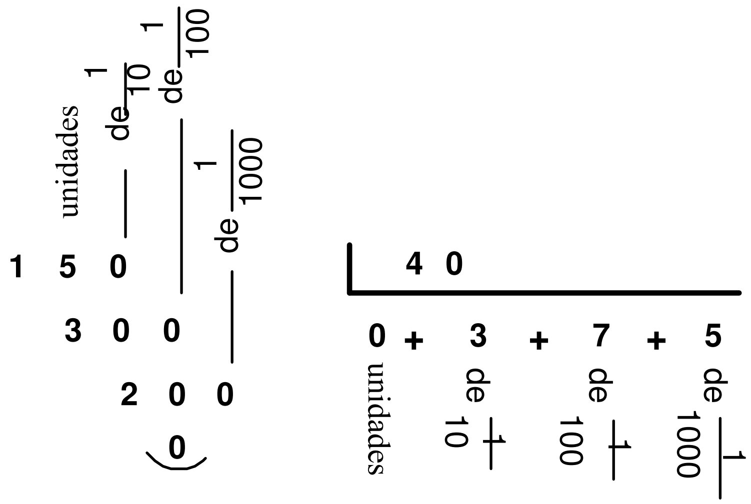
Para multiplicar un número decimal por 10, 100 ó 1000, no es necesario realizar ningún cálculo, basta correr la coma del número decimal, hacia la derecha, 1, 2 ó 3 posiciones, respectivamente.

E) División de un número decimal por un número natural

Cuando necesitas dividir, fraccionar o repartir una cantidad de magnitud, expresada por un número decimal, entre un número natural utilizas la operación división de un número decimal por un número natural.

Recuerda que has utilizado la operación división de un número decimal por un número natural para resolver el siguiente problema:
"Un carpintero corta un listón de 1´5 metros de longitud en cuatro partes iguales. ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes iguales?"

Para facilitar la división es mejor realizar el reparto "15 metros en 40 partes iguales" que es equivalente al reparto "1´5 metros en 4 partes iguales", porque hemos multiplicado por 10 los dos términos del reparto.



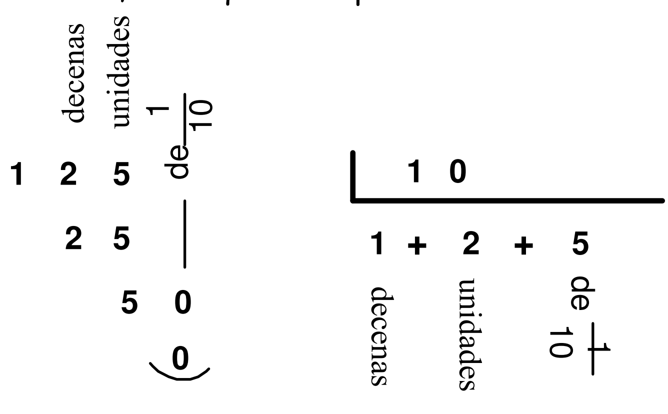
La longitud de cada listón es de 0´375 metros.

Regla para dividir un número decimal por un número natural:

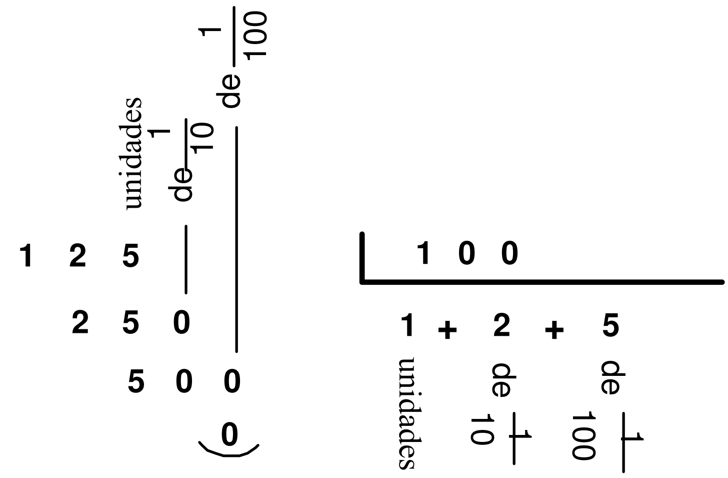
Para dividir un número decimal entre un número natural debemos multiplicar el número decimal y el número natural por 10, 100 ó 1000 hasta que el número decimal se convierta en un número natural, y después realizar el reparto como sabemos hacerlo.

F) División de un número decimal por 10, 100 y 1000

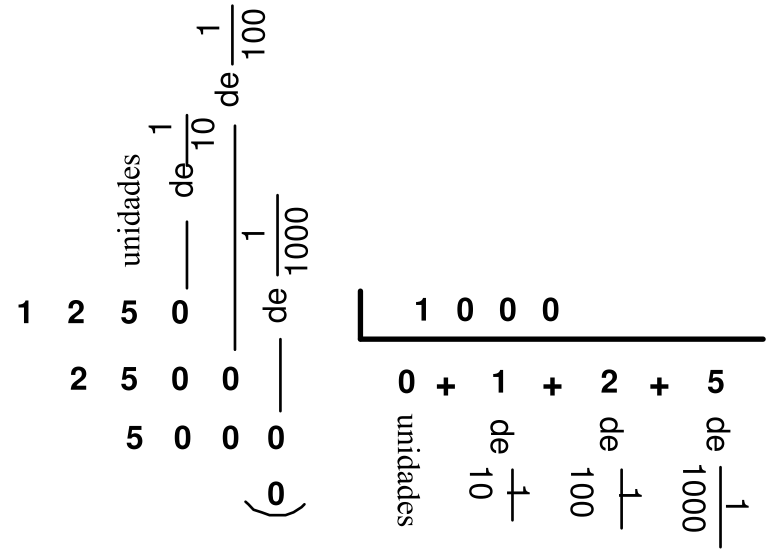
Recuerda que en una tarea has necesitado realizar el reparto "125 barras de regaliz entre 10 personas", en el que cada persona recibe 12´5 barras de regaliz:



Recuerda que en otro apartado de la misma tarea has necesitado realizar el reparto "125 barras de regaliz entre 100 personas", en el que cada persona recibe 1´25 barras de regaliz:



Recuerda que, finalmente, has necesitado realizar el reparto "125 barras de regaliz entre 1000 personas", en el que cada persona recibe 0´125 barras de regaliz:



Vamos a colocar estos resultados en una tabla.

	Dividido por 10	Dividido por 100	Dividido por 1000
125	**12´5**	**1´25**	**0´125**

Observa que para dividir un número decimal por 10, 100 ó 1000 no es necesario realizar el cálculo de la operación división, basta con aplicar la siguiente regla:

Para dividir un número decimal por 10, 100 ó 1000, no es necesario realizar ningún cálculo, basta correr la coma del número decimal, hacia la izquierda, 1, 2 ó 3 posiciones, respectivamente"