UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
Departamento de Matemáticas

Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente

Memoria presentada por

RAFAEL ESCOLANO VIZCARRA

para optar al Grado de Doctor por

la Universidad de Zaragoza,

dirigida por el Dr. JOSE Mª GAIRÍN SALLÁN

VOLUMEN II: ANEXOS

Zaragoza, Mayo de 2007

Índice general

VOLUMEN I

Capítulo IV. Diseño de la investigación

Capítulo V. Fase de Planificación

Capítulo VI. Fase de Acción

Capítulo VII. Fase de Observación y Reflexión

VOLUMEN II

ANEXOS

Anexo III. Resultados de la Experimentación

Anexo IV. Estudio Comparativo entre colegios

Anexo V. Interacción didáctica

Anexo VI. Material entregado a los alumnos

ANEXO I

Propuesta de Enseñanza

I.1 Del Primer Ciclo (4º curso)

II.2 Del Segundo Ciclo (5º curso)

En el Anexo I.1 se detalla la Propuesta Didáctica diseñada para enseñar el número racional positivo en 4º curso de Educación Primaria. En el Anexo I.2 se hace lo propio con la Propuesta Didáctica para 5º curso de Educación Primaria.
Dado que nuestra investigación contempla dos Etapas, es decir, la Propuesta Didáctica se vuelve a replicar en otro momento diferente; resulta necesario incorporar en cada uno de los Anexos las modificaciones incorporadas a la Propuesta en la fase de planificación de la Segunda Etapa. Por esta motivo dentro del Anexo I.1 y del Anexo I.2 aparece un apartado titulado" Modificación de la Propuesta Didáctica en la Segunda Etapa".

Propuesta didáctica para la enseñanza del número racional positivo en 4º curso de Educación Primaria

La propuesta didáctica para cuarto curso de Educación Primaria se articula en 21 sesiones de aula y se organiza en torno a cinco componentes curriculares: objetivos, contenidos, metodología, actividades propuestas y evaluación. La presentación se hace de forma secuencial, en el mismo orden en que se ha implementado.

Sesiones de enseñanza en 4º curso de Educación Primaria

Sesiones 1 a 6	Tema 1.- La fracción con significado de medida de cantidades de longitud Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 1 a nº 5
Sesiones 7 y 8	Tema 2.- La fracción con significado de medida de cantidades de masa Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 6 y nº 7
Sesiones 9 a 12	Tema 3.- La fracción con significado de medida de cantidades de superficie Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 8 a nº 12
Sesiones 13 y 14	Tema 4.- La equivalencia de fracciones Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 13 a nº 15
Sesiones 15 a 18	Tema 5.- Relaciones de orden entre fracciones Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 16 a nº 21
Sesiones 19 a 21	Tema 6.- La fracción con significado de medida de cantidades discretas Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 22 a nº 27

Tema 1: La fracción con significado de medida de cantidades de longitud

En las seis primeras sesiones de la secuencia de enseñanza se introduce la fracción desde el modelo de medida de cantidades de longitud.

SESIÓN NÚMERO 1

1. Objetivos de la sesión
Introducción de la medida de la magnitud longitud.

2. Contenidos

- Magnitud longitud (Los alumnos al resolver la tarea se despreocupan de otros atributos mensurables de la cortina y se concentran en la magnitud longitud, referida a la largura de la cortina).
- La imposibilidad de comunicación directa entre los alumnos y el hipotético vendedor obliga a los primeros a medir. Surge el problema de medida de la longitud y los aspectos clave a destacar:
  - elección de la unidad de medida
  - reiteración de la unidad de medida y de las subunidades de medida
  - expresión del resultado de la medida.
- El resultado de medida varía en función de las unidades y subunidades tomadas.

3. Metodología

• El profesor plantea el siguiente problema:

Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared (la longitud de la cortina mide 73,5 cm. si la unidad tiene 98 cm.). La longitud de la barra queréis que sea igual que la largura de la cortina. ¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda la barra de la cortina que tenga la longitud deseada?

• El profesor controla el trabajo de los alumnos y reorienta el mismo mediante dos intervenciones generales:

- Delimitar la magnitud que interesa destacar, concretar la cantidad de magnitud que debe medirse, necesidad de que el cliente y el vendedor utilicen una misma unidad de medida, y exigencia de crear subunidades.
- Poner de manifiesto la necesidad de expresar estas subunidades de longitud REFERIDAS A LA UNIDAD, indicando que se emplean unos nuevos números: LAS FRACCIONES. Nombrar a cada subunidad de acuerdo con un aspecto que sea relevante para la magnitud que estamos trabajando: la longitud (no lo es el color, la materia de la que están hechas, …). Es decir, se propone que cada subunidad se nombre según sea su medida referida a la caña – unidad.

• La tarea inicial y las derivadas de las intervenciones del profesor, se presenta a todo el grupo en general y para realizarlas se forman grupos de 2 alumnos.

• Al finalizar cada una de las tareas parciales se celebra un debate que el profesor utiliza para poner de manifiesto las exigencias de la tarea. Además, reformula la tarea en el sentido ya indicado.

4. Material

- En el aula se colgarán varias cortinas, todos de papel y de las mismas dimensiones que representan una cortina de longitud 75 cm.
- Cada grupo de dos alumnos recibe, al inicio de cada una de las tareas parciales, un modelo de carta para enviar al vendedor.
- Después de la primera reformulación de la tarea cada grupo recibe 2 cañas –unidad, y dos tiras de papel de 1 m. de longitud para que mediante doblado pueda construir subunidades de longitud $1/2^n$

5. Impresos para el alumno

Para completar la tarea el alumno debe cumplimentar cada una de las cartas que se le han entregado en el desarrollo de dicha tarea

1ª carta

A la atención del Sr. vendedor de barras de cortinas. Zaragoza, Estimado Sr. Vendedor: Deseo recibir en mi domicilio una barra de cortina que mida ____ Atentamente: Firmado: ________________________ y ______________________

2ª carta

A la atención del Sr. vendedor de barras de cortinas.

Zaragoza,

Estimado Sr. Vendedor:

Deseo recibir en mi domicilio una barra de cortina que mida una longitud de ________________ de unidad.

Atentamente:

Firmado: _______________________ y ______________________

SESIÓN NÚMERO 2

1. Objetivos de la sesión

Introducción de la medida de la magnitud longitud.

2. Contenidos

- El proceso de medida: el resultado de la medida varía en función de las unidades y subunidades tomadas.
- Introducción del sistema de representación de las fracciones:
- Necesidad de expresar el resultado de una medida de longitud con unos nuevos números.
- Significado de las fracciones unitarias: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 y 1/6 de la caña - unidad
- Representación oral y escrita de las fracciones unitarias.

3. Metodología

• El profesor interviene para sintetizar la sesión número 1 y destacar que *La fracción 1/2 unidad indica la longitud de media unidad o la mitad de la unidad*.

• El profesor propone que cada pareja de alumnos *construya y exprese, mediante la representación escrita y oral la longitud de las subunidades obtenidas al fraccionar la unidad en TRES, CUATRO, CINCO y SEIS partes de igual longitud*.

• Se propone finalizar la tarea de escribir al comerciante para solicitar la barra necesaria para sujetar la cortina.

• Los resultados de la tarea se expondrán en la pizarra dedicando especial atención a las nuevas expresiones orales y escritas que han introducido

4. Material

- Cada pareja de alumnos recibe 5 cañas y dos tiras de papel de 98 cm. Si necesitan más cañas lo pedirán al profesor. También utilizarán los cuadros de segmentos paralelos (habrá 6 colgados en las paredes del aula).
- Etiquetas
- Las subunidades construidas por los alumnos se agruparán, por tamaños, en papeleras o bandejas, de modo que los alumnos soliciten al profesor las subunidades que precisen. De esta forma, el profesor tiene información inmediata de las estrategias que emplea cada grupo

5. Impresos para el alumno

Se proporciona a cada pareja de alumnos un modelo de carta que deben cumplimentar

3ª carta

A la atención del Sr. vendedor de barras de cortinas.

Zaragoza,

Estimado Sr. Vendedor:

Deseo recibir en mi domicilio una barra de cortina que mida ______________________________ de unidad

Atentamente:

Firmado: ________________________ y ______________________

SESIÓN NÚMERO 3

1. Objetivos de la sesión
Construir fracciones para expresar el resultado de la medida en una sola fase.

2. Contenidos
- La fracción con el significado de medida de longitud
- Interpretación del numerador de la fracción
- Interpretación del denominador de la fracción

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea propuesta:

Expresad la longitud de la barra de la cortina con una fracción, UTILIZANDO SUBUNIDADES DE UN SOLO TIPO.

Escribid la longitud de la barra en la carta de pedido que os acabo de entregar.

• El profesor institucionalizará el resultado de la medida de la longitud de la cortina como 3/4 de unidad. Comentará que la fracción se lee «tres cuartos» y que la fracción indica que la longitud de la barra de cortina es TRES partes iguales de longitud 1/4 de unidad.
• El profesor institucionalizará el significado de la fracción y de los términos de ésta: numerador y denominador.
• El profesor enuncia una nueva tarea

Expresar la longitud del listón que os entrego con una FRACCIÓN

• Los alumnos trabajan por parejas.
• Los resultados de la tarea se expondrán en la pizarra dedicando especial atención a las nuevas expresiones orales y escritas que se han introducido.

4. Material
- Los alumnos pueden acceder libremente a las barquillas que contienen subunidades de diferentes tamaños
- Cada pareja de alumnos recibe un listón de tamaño 4/3 de unidad.

5. Impresos para el alumno
Cada pareja de alumnos reflejará en la tarjeta que se le entrega la medida del listón que ha entregado el profesor.

TARJETA DE LA FICHA Nº 2

ALUMNO/A:____

1º. Para medir el listón he probado con las siguientes **subunidades** de longitud**:**

1ª.________________ porque ____

2ª.________________ porque ____

3ª.________________ porque ____

2º. La longitud del listón es: ____

3º. Escribe como se lee la longitud del listón: ____

4º. ¿Cuál es la unidad de medida que has utilizado? ____
5ª. ¿Qué indica el numerador de la fracción: ____
6º. ¿Qué indica el denominador de la fracción?: ____

SESIÓN NÚMERO 4

1. Objetivos de la sesión
Construir el sistema de representación fraccionario.
Introducir el concepto de fracciones equivalentes.

2. Contenidos
- Significar la fracción como resultado de una medida.
- Significar los términos de la representación fraccionaria.
- Observar diferentes formas de expresar el resultado de la medida de una misma cantidad de longitud.

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea:
Expresar, con una fracción, la medida de tres listones de madera que os entrego.
• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual.
• Los resultados obtenidos se escribirán en la pizarra y serán analizados por los alumnos de la clase.

4. Material
- Se necesitan, al menos, 25 listones iguales de medidas 5/4, 5/6 y 2m. de longitud.
- También se necesitan para cada alumno: una caña unidad, diversas subunidades de la unidad.
- Al alumno que no tenga suficientes subunidades se les dará una o dos cañas unidad para que construya las subunidades que precise.
- Las subunidades estarán depositadas en barquillas. El alumno solicitará al profesor el tipo de subunidades y la cantidad de éstas que considere necesario.
- Los alumnos tienen en el aula de dos *fraccionadores* que son dispositivos para fraccionar unidad en partes iguales.
- Cada alumno recibirá una tarjeta de evaluación para que escriba las soluciones.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe completar la siguiente ficha:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 3 O FICHA EVALUACIÓN Nº 1
ALUMNO/A:____
MEDIDA DEL PRIMER LISTÓN:
1º. Escribe la fracción que expresa longitud del listón: __________ de unidad
2º. Escribe como se lee la longitud del listón: ____
3ª. Has fraccionado la unidad en _________ partes iguales.
4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ____
5º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? ____

SESIÓN NÚMERO 5

1. Objetivos de la sesión

Introducir el concepto de fracciones equivalentes.
Reforzar el significado de la fracción como resultado de una medida.
Realizar una evaluación semántica de la fracción.

2. Contenidos

- Significar la fracción como resultado de una medida.
- Significar los términos de la representación fraccionaria.
- Observar diferentes formas de expresar el resultado de la medida de una misma cantidad de longitud.

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea:

> *Os voy a entregar a cada grupo un sobre con un mensaje en su interior que os indica la longitud del listón que debéis construir. Cuando hayáis visto la longitud del listón volver a meter el mensaje en el sobre y guardarlo hasta que os lo pida. No digáis cuál es la medida del listón que vais a construir. Es un secreto.*
> *Después de que lo hayáis construido pasaréis el listón a otro grupo, que os indicaré, sin decirles cuanto mide. El trabajo del otro grupo será medir el listón.*
> *Vosotros también recibiréis un listón que deberéis medir.*
> *Podéis utilizar la unidad y la plantilla "de los medios" para obtener más subunidades si las necesitáis.*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven por parejas.
• Se dispone de listones para que midan los alumnos: 5/10, 12/8, 9/6 y 4/8 unidades. Como puede constatarse se utilizan fracciones que deliberadamente no están simplificadas.
• Se distribuyen los grupos de forma que quienes emiten y reciben los mensajes se encuentren lo suficientemente alejados como para no intercambiar ayudas.
• Cuando un grupo haya construido el listón de la longitud del mensaje, pasará el listón al grupo que le indique el profesor. Este grupo realizará la medida del listón y preguntará al grupo del que procede el mensaje si la medida del listón que han construido coincide con la que acaban de medir.
A su vez el grupo que había recibido el encargo del profesor para construir un listón de longitud determinada, procederá de forma análoga enviando el listón al grupo que le indique el profesor para que lo mida y, después, comprobar si la medida del listón efectuada coincide con la que aparecía en el mensaje que el profesor había enviado.
• Los resultados obtenidos se escribirán en la pizarra y serán analizados por los alumnos de la clase. Para posibilitar debates entre todos los alumnos el profesor escribirá en la pizarra la fracción indicada en uno de sus mensajes y las fracciones obtenidas por los tres grupos que han medido el mismo listón.
• Para concluir la sesión intervendrá el profesor para dar sentido a la equivalencia de fracciones y para simbolizar la igualdad entre fracciones que expresan la misma cantidad de magnitud.

4. Material

- El profesor dará a cada grupo un sobre con un mensaje en su interior en el que pide a cada grupo que construya un listón de una determinada longitud.
- Cada grupo dispone al comenzar la tarea de un listón de 2 m. de longitud y, como en las tareas anteriores, tiene a su disposición la unidad de medida, la plantilla para construir subunidades.

5. Impresos para el alumno

El profesor dará a cada grupo un sobre con este mensaje en su interior:

Mensaje destinado a: ________________________ y ______________________
"Tenéis que construir un listón de longitud __________ *de unidad*"
Leed y guardad este mensaje en el sobre.
Cuando hayáis construido el listón, se lo pasáis (el sobre os lo quedáis vosotros) al grupo formado por
________________________ y ______________________

Cuando este grupo haya medido vuestro listón deberéis abrir el sobre y comprobar si coincide la medida que han obtenido con la fracción de este mensaje.
MENSAJE ENVIADO POR EL PROFESOR

Una vez construido el listón, cada grupo envía el mensaje rellenado que se presenta abajo a la pareja indicada por el profesor:

Mensaje destinado a: ______________________________ y ____________________________
Con este mensaje os entrego un listón que tenéis que medir.
Escribid la longitud del listón y devolved este mensaje al profesor .
El listón mide: ____
MENSAJE ENVIADO POR _____________________ *y* _____________________

SESIÓN NÚMERO 6

1. Objetivo de la sesión
Evaluar semánticamente expresiones fraccionarias.

2. Contenidos
- La fracción con el significado de medida de longitud.
- Interpretación del numerador de la fracción.
- Interpretación del denominador de la fracción

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea propuesta:

Quieres construir un listón de longitud $\frac{5}{3}$ *de unidad. ¿Cuántas subunidades necesitas?¿De qué longitud son las subunidades que necesitas?*

Enunciados similares se formulan con las fracciones 6/5, 4/7 y 7/8.
• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual.
• Sobre un listón de longitud 2 unidades cada alumno marcará con un rotulador por dónde realizaría el corte para construir un listón de longitud la fracción dada.

4. Material
- Tarjetas de evaluación

5. Impresos para el alumno
Por cada una de las cuatro fracciones

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 5 O DE EVALUACIÓN Nº 2
ALUMNO:____
Quieres construir un listón de longitud $\frac{5}{3}$ de unidad
¿Cuántas subunidades necesitas? ____
¿De qué longitud son las subunidades que necesitas? ______________________________

Tema 2: La fracción con significado de medida de cantidades de masa

Las dos sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 7 y nº 8) se introduce la fracción desde el modelo de medida de cantidades de masa.

SESIÓN NÚMERO 7

1. Objetivos de la sesión
Percibir la necesidad de medir con respecto a un atributo o magnitud.
Expresar el resultado de una medida de peso mediante fracciones.
Expresar el resultado de una medida de peso con fracciones que no necesariamente sean unitarias.

2. Contenidos
- La fracción con el significado de medida de masa.
- Interpretación del numerador de la fracción.
- Interpretación del denominador de la fracción.

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea propuesta:

> *Aquí tenéis una pieza que podemos llamarle "estira-cordones" que se coloca en un extremo del cordón que sirve para correr y descorrer las cortinas. Suele ser una pieza de plástico y metal, generalmente de plomo, cuyo peso hace que el cordón esté tenso, y así facilitar la maniobra de asir (coger) el cordón.*
> *Deseáis encargar, por carta, estira-cordones como el que tenéis aquí. Escribid, en el folio que os entrego, lo que le dirías al vendedor para que os sirva estira-cordones como el que tenéis en la mesa.*

• El profesor controla el trabajo de los alumnos y reorienta el mismo mediante dos intervenciones generales:
- Establece una pastilla de plastilina como unidad de medida. Además introduce en el aula balanzas de dos platillos para uso de los grupos de alumnos.
- Concreta la tarea de alumnos señalando que el resultado de la medida, el que hay que escribir en el mensaje, debe hacerse con una única fracción.

• La tarea inicial y las derivadas de las intervenciones del profesor, se presenta a todo el grupo en general y para realizarlas se forman grupos de 4 alumnos.
• Al finalizar cada una de las tareas parciales se celebra un debate que el profesor utiliza para poner de manifiesto las exigencias de la tarea. Además, reformula la tarea en el sentido ya indicado.
• Cuando los alumnos hayan entregado la carta al profesor, los resultados de la tarea expondrán en la pizarra dedicando especial atención a las representaciones orales y escritas que se han introducido.

4. Material
- Conviene utilizar estira-cordones y unidades de medida de modo que el peso de un estira-cordón sea 5/4 de la unidad. Si se toma como unidad el peso de una pastilla de plastilina de 50 gramos, el plomo deberá pesar 62,5 gramos.

5. Impresos para el alumno
Cada grupo de alumnos recibe una carta para enviar al vendedor y una tarjeta de evaluación

Carta

A la atención del Sr. Vendedor:

Zaragoza,

Estimado Sr. Vendedor:

Deseo recibir en mi domicilio una caja de estira-cordones. Cada estira-cordón debe pesar _______________
Atentamente:

Firmado: ________________________ y ______________________

TARJETA DE LA FICHA 6

ALUMNOS:____

1º. Para medir el peso de un estira-cordón hemos probado con las siguientes **subunidades:**

1ª.________________ porque ______________________________________

2ª.________________ porque ______________________________________

2º. El peso de un estira-cordón viene expresado por la fracción: ______________________

3º. Escribe como se lee el peso de un estira-cordón: ____________________________

4º. ¿Cuál es la unidad de medida que has utilizado? ____________________________

5ª. ¿Qué indica el numerador de la fracción? _________________________________

6º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? _______________________________

SESIÓN NÚMERO 8

1. Objetivos de la sesión

Introducir el concepto de fracciones equivalentes
Reforzar el significado de la fracción como resultado de una medida de peso.
Manejar el sistema de representación introducido para las fracciones.

2. Contenidos

- La fracción con el significado de medida de peso
- Fracciones equivalentes

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea propuesta (Ficha de trabajo nº 7):

Os voy a entregar a cada grupo un sobre con un mensaje en su interior que os indica el peso de una bola de plastilina que debéis construir. Cuando hayáis leído el mensaje volved a meterlo en el sobre y guardadlo hasta que os lo pida. No digáis cuál es el peso de la bola de plastilina que vais a construir. Es un secreto.
Después de que lo hayáis construido pasaréis la bola a otro grupo, que os indicaré, sin decirles cuanto pesa. El trabajo del otro grupo será medir el peso de la bola.
Vosotros también recibiréis una bola de plastilina que deberéis pesar

• La tarea inicial y las derivadas de las intervenciones del profesor, se presenta a todo el grupo en general y para realizarlas se forman grupos de 4 alumnos.
• Al finalizar cada una de las tareas parciales se celebra un debate que el profesor utiliza para poner de manifiesto las exigencias de la tarea. Además, reformula la tarea en el sentido ya indicado.
• Cuando los alumnos hayan entregado la carta al profesor, los resultados de la tarea se expondrán en la pizarra dedicando especial atención a las representaciones orales y escritas que se han introducido.
• El profesor controla el trabajo de los alumnos e institucionaliza los resultados que han ido apareciendo en el sentido de que de las distintas formas de expresar el resultado de la medida es aconsejable utilizar la que tienen el denominador más pequeño.

4. Material

- 6 balanzas, una para cada grupo de 4 alumnos.
- 36 bloques de plastilina (3 bloques de plastilina para cada grupo)
- 6 sobres que contienen dos mensajes: uno del profesor y otro que deberán enviar a un determinado grupo con el mandato de pesar una bola de plastilina.

- Cuando los grupos estén pesando la bola de plastilina remitida por otro grupo, el profesor les ofrecerá más bloques de plastilina

5. Impresos para el alumno

Cada grupo de cuatro alumnos recibe de profesor una carta que contiene el mensaje que figura seguidamente, para que los alumnos lo cumplimenten y, a continuación, que cumplan las instrucciones siguientes:

Mensaje destinado a: ________________ ; ________________ ; ________________ y ________________

Tenéis que construir una bola de plastilina de peso ______________ *de unidad*

La unidad es el peso de un bloque de plastilina.

Leed y guardad este mensaje en el sobre.

Cuando hayáis construido la bola se la pasáis (el sobre os lo quedáis vosotros) al grupo formado por :

________________ ; ________________ ; ________________ y ________________

Cuando este grupo haya pesado vuestra bola deberéis abrir el sobre y comprobar si coincide la medida que han obtenido con la fracción de este mensaje.

MENSAJE ENVIADO POR EL PROFESOR

Impreso para que los alumnos de uno de los grupos lo cumplimenten y lo entreguen a otro grupo, que previamente les ha indicado el profesor:

Mensaje destinado a: ________________ ; ________________ ; ________________ y ________________

Con este mensaje os entrego una bola de plastilina que tenéis que pesar.

Escribid, con una fracción, el peso de la bola de plastilina y devolved este mensaje al profesor.

La bola pesa: ________________________ de unidad.

Mensaje enviado por : ________________ ; ________________ ; ________________ y ________________

Tema 3: La fracción con significado de medida de cantidades de superficie

En las cuatro sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 9 a nº 12) se introduce la fracción desde el modelo de medida de cantidades de superficie.

SESIÓN NÚMERO 9

1. Objetivos de la sesión

Medir cantidades de magnitud superficie cuya medida venga dada por una fracción unitaria.
Observar que figuras de diferente forma pueden poseer la misma cantidad de superficie.

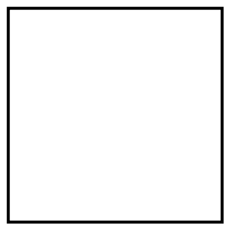
2. Contenidos

- La fracción con el significado de medida de superficie.

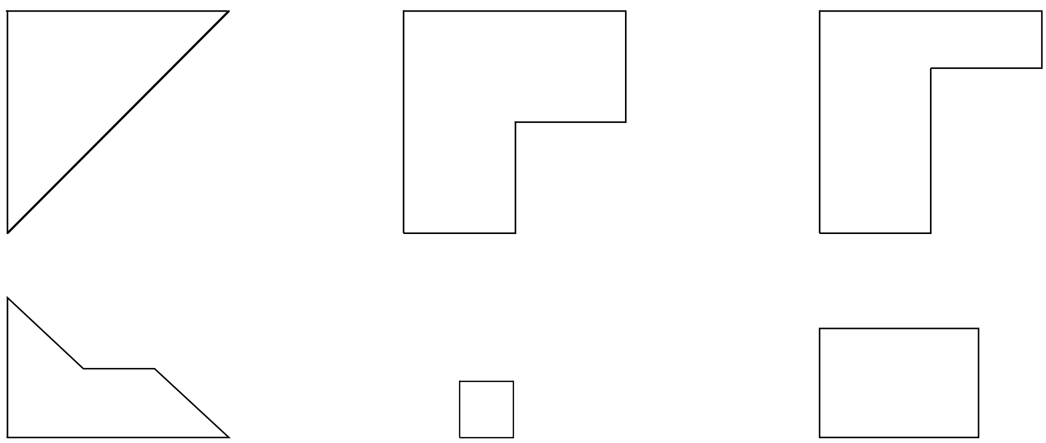
3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea propuesta (Ficha de Trabajo nº 8):

Consideras como unidad de superficie la medida de este mantel cuadrado (de 20 cm de lado, los alumnos disponen de la unidad de superficie, no conocen de la longitud del lado) *que denominamos UNIDAD DE SUPERFICIE.*



Tienes que medir la superficie de los siguientes manteles:



• La tarea se presenta a todo el grupo en general y para realizarla se forman grupos de dos alumnos.
• Todos los grupos miden la superficie de los seis manteles.

• El profesor enuncia la siguiente tarea:

Construye manteles de superficie 1/2 , 1/3 , 1/4 y 1/8 de unidad de superficie.

4. Material

- Los manteles se construyen con folios cuadrados de papel que aporta el profesor.
- Se puede utilizar papel de la misma superficie y forma que la unidad.

5. Impresos para el alumno.
En el mantel que se entrega a los alumnos, en la primera de la tareas, aparecerán escritas algunas preguntas como el nombre del alumno, la fracción que da la medida de la superficie y el significado del numerador y denominador de la fracción.

SESIÓN NÚMERO 10

1. Objetivos de la sesión
Que los alumnos perciban la magnitud superficie como cantidad de extensión.
Que los alumnos construyan cantidades de magnitud superficie cuya medida venga dada por una fracción unitaria.
Que los alumnos observen que figuras de diferente forma poseen la misma cantidad de superficie.

2. Contenidos
- Evaluación semántica de la fracción con significado de medida de superficie.
- Interpretación del numerador de la fracción.
- Interpretación del denominador de la fracción.

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea (Ficha de trabajo nº 9) propuesta:

Consideras como unidad de superficie la medida la de un mantel cuadrado como el que os entrego (cuadrado de 20 cm. de lado), que denominamos UNIDAD DE SUPERFICIE.
Construye manteles cuya superficie sea 1/4 de unidad de superficie. Ganará el equipo que construya más manteles, pero de formas distintas.
<u>Observación</u>*: Los manteles de la misma forma pero que estén colocados en diferente posición se considerarán como iguales.*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y para realizarla se forman grupos de DOS alumnos.
• El profesor preguntará a cada grupo el número de manteles que hayan construido. El grupo que aporte un mayor número de manteles expondrá sus soluciones y el resto de los alumnos verificará las respuestas.

4. Material.
- Los manteles se construyen con papel.
- Se pueden utilizar folios de tamaño A4.

5. Impresos para el alumno.
No se piden resultados escritos

SESIÓN NÚMERO 11

1. Objetivos de la sesión
Que los alumnos midan cantidades de magnitud superficie cuya medida venga dada por una fracción no necesariamente unitaria.

2. Contenidos
- Interpretación de las fracciones como resultado de la medida de cantidades de superficie.
- Interpretación del numerador de la fracción.
- Interpretación del denominador de la fracción.

3. Metodología
• El profesor enuncia la siguiente tarea (Ficha de Trabajo nº 10):

Quieres medir la superficie del mantel que os entrego (de dimensiones 30 x 25 cms., cuya superficie es 3/2 u). La unidad de superficie que sigues utilizando es la unidad de superficie definida en la sesión anterior. Expresa con una FRACCIÓN la superficie del mantel.

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente.

• Finalizada esta tarea el profesor enuncia la siguiente tarea (Ficha de Trabajo nº 11):

Os entrego una cartulina (de dimensiones 30 x 25 cm., cuya superficie es 15/8 u). Si consideras como unidad de medida la unidad de superficie (papel cuadrado de 20 cms. de lado*). Debéis expresar, con una fracción, la medida de la cantidad de superficie de la cartulina.*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente.

4. Material

- Cada alumno recibe un mantel que se construye con un folio A4 al que se le corta una tira longitudinal de 1 cm..
- Cada alumno recibe dos unidades de superficie.

Para la segunda tarea se precisa el siguiente material

- 100 unidades de superficie (4 unidades para cada alumno)
- Cartulinas de dimensiones 30 x 25 cm
- Cinta de cello.

5. Impresos para el alumno

Una vez finalizada esta tarea cada alumno debe cumplimentar la ficha de evaluación de los aprendizajes. Las dos Fichas de trabajo tienen el mismo formato; reproducimos seguidamente una de ellas:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 11 O FICHA DE EVALUACIÓN Nº 3

ALUMNO/A:____

1º. Escribe con una fracción la superficie de la cartulina: _____ **de unidad**

2º. Escribe como se lee la fracción: ______________________________________

3ª. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ______________________________

4º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? ____________________________

SESIÓN NÚMERO 12

1. Objetivos de la sesión

Reforzar el significado de la fracción como resultado de una medida de superficie.
Poner de manifiesto la equivalencia de fracciones en situaciones de medida de superficie.

2. Contenidos

- Interpretación de las fracciones como resultado de la medida de cantidades de superficie.
- Interpretación del numerador de la fracción
- Interpretación del denominador de la fracción

3. Metodología

• El profesor enuncia la siguiente tarea (Ficha de Trabajo nº 12):

Os voy a entregar a cada grupo un sobre en el que os encargo construir un mantel RECTANGULAR QUE, ADEMÁS, TENDRÁ LA FORMA MÁS CUADRADA POSIBLE. El mantel será de papel de una determinada cantidad de superficie que os indico mediante una fracción que he escrito y he colocado en un sobre. Cuando hayáis dibujado y recortado el mantel se lo pasaréis al grupo que os indico para que midan la superficie del mantel. Cuando este último grupo haya realizado la medida, abriréis el sobre y compararéis la fracción del sobre y la que resulta de medir el mantel.

En esta tarea vamos a considerar como unidad de medida una unidad que es cuatro veces más pequeña que la unidad que hemos empleado en las tareas anteriores. (La unidad actual es la superficie de un cuadrado de 10 cm. de lado*).*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos en grupos de DOS alumnos.

• Al finalizar la tarea el profesor aconseja expresar la medida de la superficie del mantel con la fracción de denominador menor, dado que de esta forma disminuye el error achacable al proceso de medida.

4. Material

- Cada grupo dispone al comenzar la tarea de un folio de tamaño A4.
- Cada grupo tiene a su disposición 6 unidades de medida de superficie.
- Tijeras
- Cinta de cello.

5. Impresos para el alumno

Cada grupo de cuatro alumnos recibe de profesor una carta que contiene el mensaje que figura seguidamente, para que los alumnos lo cumplimenten y, a continuación, que cumplan las instrucciones

Mensaje destinado a: ________________ y ________________

Tenéis que construir un mantel rectangular que tenga la forma más cuadrada posible y de superficie ______________ de unidad

Leed y guardad este mensaje en el sobre.

Cuando hayáis dibujado y recortado el mantel se la pasáis (el sobre os lo quedáis vosotros) al grupo formado por : ________________ y ________________

Cuando este grupo haya medido vuestro mantel deberéis abrir el sobre y comprobar si coincide la medida que han obtenido con la fracción de este mensaje.

MENSAJE ENVIADO POR EL PROFESOR

Impreso para que los alumnos de uno de los grupos lo cumplimenten y lo entreguen a otro grupo, que previamente les ha indicado el profesor:

Mensaje destinado a: ________________ y ________________

Os entrego un mantel que tenéis que medir.

Escribid la superficie del mantel, introducid este mensaje en el sobre y entregad el sobre al profesor.

El mantel mide: ________________________ unidades de superficie.

Mensaje enviado por : ________________ y ________________

Tema 4: La equivalencia de fracciones

Las dos sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 13 y nº 14) se estudia el concepto de equivalencia de fracciones. Se trata de que los escolares comprendan que la medida de una misma cantidad de magnitud puede expresarse con fracciones diferentes. Además, se pretende que avancen hacia la formulación de una regla que facilite la búsqueda de fracciones equivalentes a una dada.

SESIÓN NÚMERO 13

1. Objetivos de la sesión

Significado del concepto de fracciones equivalentes

Cálculo de fracciones equivalentes a una dada.

2. Contenidos

- Interpretación de las fracciones equivalentes como expresiones de la misma cantidad de magnitud.
- Técnica de búsqueda de fracciones equivalentes

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea propuesta (Ficha de trabajo nº 13):

Encuentra TRES fracciones equivalentes a la fracción 6/4. Indica cómo las has encontrado.

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de manera individual.

• Después de recoger las respuestas escritas de los alumnos, éstos expondrán en la pizarra las fracciones equivalentes encontradas indicando el procedimiento utilizado. Es importante que expongan las estrategias utilizadas dado que la secuencia de enseñanza pretende, de modo gradual, abandonar las estrategias más cercanas al modelo (manipulación de materiales) para dar paso a estrategias más abstractas y también más rápidas.

4. Material

- Los alumnos disponen del material manipulativo que han utilizado en tareas anteriores.
- Los alumnos tendrán la opción de elegir el tipo de material que deseen utilizar.
- Una tarjeta de evaluación con el enunciado de la tarea donde deben plasmar la resolución de la tarea.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente. Se le entregan 3 de estas tarjetas para que incluya, en cada una de ellas, cada una de las tres fracciones equivalentes que exige la tarea.

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 13

ALUMNO/A:____

Encuentra TRES fracciones equivalentes a la fracción 6/4. Indica cómo las has encontrado.

PRIMERA RESPUESTA:

Una fracción equivalente a 6/4 de unidad es: ____________________ de unidad.

A) Si **has utilizado materiales** contesta las siguientes preguntas:

1. He construido un objeto de medida 6/4 de unidad. La unidad que utilizo es: __________________
2. He fraccionado la unidad en ____________________________ subunidades
3. He completado la medida del objeto con _______________________ subunidades

B) Si **has obtenido la fracción equivalente de otra forma, sin utilizar materiales**, explica como lo has hecho: ____

SESIÓN NÚMERO 14

1. Objetivos de la sesión
Significado del concepto de fracciones equivalentes
Cálculo de fracciones equivalentes a una dada.

2. Contenidos
- Interpretación de las fracciones equivalentes como expresiones de la misma cantidad de magnitud.
- Técnica de búsqueda de fracciones equivalentes

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea propuesta (Ficha de trabajo nº 14):
Escribe CUATRO fracciones equivalentes a la fracción 2/4 e indica que has hecho para obtenerlas. No debéis utilizar material, pero si no sabéis como resolver la tarea podéis pedir el material que deseéis".
• El profesor enuncia la siguiente tarea complementaria de la anterior (Ficha de trabajo nº 15):
Indica cómo podrías encontrar CIEN fracciones equivalentes a la fracción 2/4. Debes inventar una regla para obtener fracciones equivalentes a una fracción dada.

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de manera individual.
• Al finalizar la tarea habrá una intervención del profesor, sustentada en todas las respuestas dadas por los alumnos, en la repasará el concepto de equivalencia de fracciones. Es importante representar de diferentes formas: verbales, gráficas y escritas, las acciones implicadas en la construcción de fracciones equivalentes.
• Una vez finaliza la ficha de trabajo nº 15 y comentadas las respuestas de los alumnos, el profesor institucionaliza una regla para encontrar fracciones equivalentes:

Dada una fracción se pueden obtener fracciones equivalentes a la dada si se multiplica o se divide el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número (2, 3, 4, 5, 6, ….).
De forma simbólica: $\frac{2}{4}=\frac{2x2}{4x2}=\frac{4}{8}$ $\qquad$ $\frac{2}{4}=\frac{2:2}{4:2}=\frac{1}{2}$

4. Material.
- En principio, los alumnos no utilizan material.
- Si algún alumno no sabe cómo resolver la tarea se le permitirá utilizar el material que solicite. El profesor dará el material a cada alumno que se lo pida y anotará que material utiliza.
- Una tarjeta de evaluación con el enunciado de la tarea donde deben plasmar la resolución de la tarea.

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno, en la primera parte de la tarea, debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 14
ALUMNO/A:____

PRIMERA FRACCIÓN

Una fracción equivalente a 2/4 es ________________________

Para encontrar la fracción equivalente:

☐ He pensado en la magnitud siguiente: ____________________ ,
he utilizado material y he hecho lo siguiente: ______________________________

☐ He pensado en la magnitud siguiente: ____________, y he realizado el siguiente dibujo:

☐ He pensado en la magnitud siguiente: ____________________ , y he realizado el siguiente razonamiento: ____

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para encontrar la fracción equivalente.

Se le entregan tres de estas tarjetas para que incluya, en cada una de ellas, cada una de las tres fracciones equivalentes que exige la tarea.

En la ficha de trabajo nº 15 los alumnos deben cumplimentar la siguiente ficha:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 15

ALUMNO/A:____

Inventa una regla para encontrar CIEN fracciones equivalentes a la fracción 2/4.

Para encontrar fracciones equivalentes a la fracción 2/4 he hecho______________________

La regla que he inventado es correcta porque ______________________________

Tema 5: Relaciones de orden entre fracciones

Las cuatro sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 16 a nº 20) se estudia la relación de orden entre fracciones. Los escolares han de determinar cuál de las dos fracciones dadas es mayor que la otra, sin que la comparación exija utilizar la equivalencia de fracciones. Además, se quiere avanzar en ideas de densidad respecto del orden intercalando varias fracciones entre dos dadas.

SESIÓN NÚMERO 15

1. Objetivos de la sesión

Que los alumnos adquieran estrategias para comparar fracciones.
Se pretende que abandonen las estrategias manipulativas y que los razonamientos utilizados se basen en el modelo de la medida desde alguna de las magnitudes estudiadas.

2. Contenidos

- Comparación de fracciones.
- Técnica de comparación de fracciones

3. Metodología

• El profesor interviene para recordar que la fracción expresa el resultado de la medida de una cantidad de alguna de las magnitudes utilizadas en las sesiones precedentes. Además, recuerda que la expresión de la medida no es única sino que existen muchas formas distintas de expresarla. La tarea que se emprende ahora es la de poder comparar fracciones.
• El profesor enuncia dos tareas:

Ficha nº 16.- Tengo dos servilletas: una de superficie $\frac{3}{4}$ *unidad y otra de superficie* $\frac{7}{4}$ *unidad. ¿Cuál de las dos servilletas tiene mayor superficie?.*

Ficha nº 17.- Has cortado dos listones de madera. La longitud de uno de ellos es $\frac{6}{5}$ *unidad y la del otro* $\frac{6}{7}$ *unidad. ¿Qué listón es más corto?*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de manera individual.
• Después de que los alumnos resuelvan, por escrito, la tarea el profesor solicitará a algunos de ellos que expongan de forma oral sus respuestas.
• Después de revisar los trabajos el profesor dedicará especial atención a los diferentes razonamientos que hayan utilizado los alumnos para ordenar fracciones.

4. Material

- En principio, los alumnos no utilizan material.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente para dar la respuesta a la Ficha nº 16:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 16 Fecha ___________
ALUMNO/A:______________________________
"Tengo dos servilletas: una de superficie $\frac{3}{4}$ *unidad y otra de superficie* $\frac{7}{4}$ *unidad. ¿Cuál de las dos servilletas tiene mayor superficie?"*
SOLUCIÓN: ______________________________

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para ordenar las fracciones.

- ☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ____________________
- ☐ He utilizado el siguiente dibujo:
- ☐ He realizado el siguiente razonamiento: ____________________

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente para dar la respuesta a la Ficha nº 17:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 17 Fecha ___________

ALUMNO/A:____________________

Has cortado dos listones de madera. La longitud de uno de ellos es $\frac{6}{5}$ *unidad y la del otro* $\frac{6}{7}$ *unidad.*

¿Qué listón es más corto?

SOLUCIÓN: ____________________

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para ordenar las fracciones.

- ☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ____________________
- ☐ He utilizado el siguiente dibujo:
- ☐ He realizado el siguiente razonamiento: ____________________

SESIÓN NÚMERO 16

1. Objetivos de la sesión

Significado de la ordenación de fracciones y de expresiones como "mayor que" y "menor que".
Encontrar diferentes procedimientos para ordenar fracciones

2. Contenidos

- Comparación de fracciones. Términos y símbolos
- Técnica de comparación de fracciones

3. Metodología

• El profesor enuncia dos tareas:

Ficha 18.- He comprado dos tuercas: una tiene un diámetro $\frac{3}{8}$ *de pulgada y otra es de* $\frac{1}{2}$ *pulgada. ¿Qué tuerca es la de menor diámetro?*

Ficha 19.- Has comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de $\frac{5}{4}$ *unidades y otra tiene una superficie de* $\frac{4}{3}$ *unidades. ¿Qué cartulina tiene menor superficie?*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de manera individual.
• Después de que los alumnos resuelvan, por escrito, la tarea el profesor solicitará a algunos de ellos que expongan de forma oral sus respuestas.
• El profesor recomendará a los alumnos la utilización de estrategias basadas en razonamientos.
• Al finalizar la revisión de las respuestas de los alumnos el profesor tendrá una intervención para recordar las diferentes estrategias para comparar fracciones (que también sirven para encontrar fracciones intermedias entre dos dadas): utilizando el material, realizando un gráfico, igualando denominadores, igualando numeradores y comparar con una fracción intermedia conocida.

4. Material

- En principio, los alumnos no utilizan material.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente para dar la respuesta a la Ficha nº 18:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 18 Fecha ___________

ALUMNO/A:____

He comprado dos tuercas: una tiene un diámetro $\frac{3}{8}$ *de pulgada y otra es de* $\frac{1}{2}$ *pulgada. ¿Qué tuerca es la que tiene menor diámetro?*

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para ordenar las fracciones.

- ☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ______________________________
- ☐ He utilizado el siguiente dibujo:
- ☐ He realizado el siguiente razonamiento: ______________________________________

En la Ficha nº 19 se entrega a los alumnos la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 19 O FICHA DE EVALUACIÓN Nº 6 Fecha ___________

ALUMNO/A:____

Has comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de $\frac{5}{4}$ *unidades y otra tiene una superficie de* $\frac{4}{3}$ *unidades. ¿Qué cartulina tiene menor superficie?*

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz las estrategias que hayas utilizado para ordenar las fracciones.

- ☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ______________________________
- ☐ He utilizado el siguiente dibujo:
- ☐ He realizado el siguiente razonamiento: ______________________________________

SESIÓN NÚMERO 17

1. Objetivos de la sesión

Consolidar los procedimientos de ordenación de fracciones. Los procedimientos manipulativos serán desechados por lentos.

Ampliar los procedimientos de ordenación de fracciones cuando éstas tengan denominadores primos entre sí.

Introducir el concepto de densidad de las fracciones: entre dos fracciones siempre existe otra fracción.

Introducir el sistema de representación de la recta numérica.

2. Contenidos

- Comparación de fracciones. Términos, símbolos y técnicas
- La densidad de las fracciones respecto del orden

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea propuesta (Ficha de trabajo nº 20):

Deberéis encontrar fracciones intermedias entre las fracciones 1/3 y 1. Las fracciones que sean equivalentes sólo se contabilizarán una vez. Disponéis de 15 minutos"

"Pasados los 15 minutos entregaréis la tarjeta de evaluación con el número de fracciones encontradas y la estrategia que habéis utilizado para hallarlas. Después, los grupos saldrán a la pizarra a escribir las fracciones comenzando por el grupo que mayor número de fracciones haya encontrado. Si un grupo escribe una fracción incorrecta pierde su turno y continúa el equipo que había encontrado un número inmediatamente menor. Ganará el PRIMER grupo que escriba más fracciones que cumplan las condiciones de la tarea.

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven en grupos de cuatro alumnos.
• Después de que los alumnos resuelvan, por escrito, la tarea el profesor solicitará a algunos de ellos que expongan de forma oral sus respuestas.
• El profesor recomendará a los alumnos la utilización de estrategias basadas en razonamientos.
• El profesor observará los diferentes procedimientos utilizados por éstos para la búsqueda de fracciones y preguntará a cada grupo el número de fracciones encontradas.
• Cada grupo entregará al profesor la tarjeta de evaluación con las fracciones que han encontrado, de modo que el profesor se convierte en el árbitro del juego.
• El representante del grupo que afirme haber encontrado mayor número de fracciones saldrá a la pizarra y las escribirá. El resto de los grupos comprobarán que cada una de las fracciones escritas cumple las condiciones de la tarea. Si alguna de las fracciones no esta comprendida entre 1/3 y 1 ese grupo ha perdido y su representante debe sentarse para dejar que un representante del grupo que le seguía en el número de fracciones halladas pase a la pizarra y las escriba. Y así, sucesivamente, hasta llegar al primer grupo que tenga las fracciones encontradas correctas.
• Los alumnos explicarán cómo han obtenido las fracciones. El profesor velará porque aparezcan todas las posibles estrategias.
• El profesor hará una intervención final para establecer diferencias entre los números naturales y las fracciones: números que se escriben de diferente forma pero que significan lo mismo y que entre dos fracciones siempre podemos encontrar otra. Además, el profesor situará sobre una semirrecta las fracciones que aportan los alumnos en la resolución de la tarea. Con este sistema de representación una fracción vendrá dada por un punto: el extremo del segmento que tiene el otro extremo en el origen de la semirrecta y la medida de su longitud es la fracción que se representa

4. Material

- Cada grupo dispondrá de listones de madera, de plastilina y balanza, de folios, y de las respectivas unidades de medida correspondientes a cada una de las magnitudes.

5. Impresos para el alumno

Cada grupo de cuatro alumnos debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente para dar la respuesta al juego propuesto por el profesor.

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 20 Fecha ____________

ALUMNOS: _______________, _______________, _______________ y _______________

	Estrategia utilizada			
Fracción entre 1/3 y 1	empleando material	igualando denominadores	igualando numeradores	otra
1º______________________	☐	☐	☐	☐
2º______________________	☐	☐	☐	☐
3º______________________	☐	☐	☐	☐
4º______________________	☐	☐	☐	☐
5º______________________	☐	☐	☐	☐
6º______________________	☐	☐	☐	☐

7º______________________	□	□	□	□
8º______________________	□	□	□	□
9º______________________	□	□	□	□
10º_____________________	□	□	□	□

Marca con una cruz las estrategias que hayáis utilizado para encontrar cada fracción.

SESIÓN NÚMERO 18

1. Objetivos de la sesión
Ordenar e intercalar fracciones entre dos dadas.

2. Contenidos
- La densidad de las fracciones respecto del orden

3. Metodología
• El profesor enuncia las tareas propuestas:
a) Ordena las fracciones 3/2 y 7/8 de unidad".
b) Encuentra OCHO fracciones que estén comprendidas entre 7/8 y 3/2 de unidad. Indica cómo has obtenido las fracciones"
c) ¿Cuántas fracciones hay entre 7/8 y 3/2?
• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual.
• Si lo desean los alumnos pueden utilizar material.
• Los alumnos según vayan terminando la tarea la entregarán al profesor para su evaluación. No obstante, cuando todos los alumnos la hayan realizado el profesor solicitará que algunos de ellos escriban los resultados en la pizarra y después procederá a una evaluación conjunta de las respuestas. Las soluciones de la tarea se escribirán en la pizarra empleando la representación de la recta numérica.
• Cuando aparezcan fracciones susceptibles de ser simplificadas el profesor indicará a los alumnos que las escriban de la forma más simplificada posible

4. Material.
- Cada alumno dispondrá de listones de madera, de plastilina y balanza, de folios, y de las respectivas unidades de medida correspondientes a cada una de las magnitudes.

5. Impresos para el alumno.
Cada grupo de cuatro alumnos debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 21 Fecha ____________

ALUMNO/A: ____

PRIMERA PREGUNTA:

Ordena las fracciones $\frac{3}{2}$ *y* $\frac{7}{8}$ *de unidad.*

SOLUCIÓN: La fracción $\frac{7}{8}$ es ____________ que $\frac{3}{2}$, porque: ______________________________

SEGUNDA PREGUNTA:

Encuentra OCHO fracciones que estén comprendidas entre $\frac{7}{8}$ *y* $\frac{3}{2}$ *de unidad*

Fracción	
1º_____________	porque ____
2º_____________	porque ____
3º_____________	porque ____
4º_____________	porque ____
5º_____________	porque ____
6º_____________	porque ____
7º_____________	porque ____
8º_____________	porque ____

Tema 6: La fracción con significado de medida de cantidades discretas

Las tres sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 19 a nº 21) se estudia la fracción como resultado de la medida de cantidades discretas. La magnitud cardinalidad presenta peculiaridades que aconsejan hacer un tratamiento específico de las mismas por razones de uso social. Los alumnos han de medir cantidades de magnitudes discretas y han de aplicar la técnica que facilita el cálculo de la fracción de una cantidad.

SESIÓN NÚMERO 19

1. Objetivos de la sesión.

Reconocer la cardinalidad como una nueva magnitud.

Introducir la fracción como medida de la cardinalidad

2. Contenidos

- La fracción para expresar la medida de la magnitud cardinalidad.

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea siguiente:

Ficha de Trabajo nº 22.- Has comprado una bolsa que contiene 6 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 3 bombones. ¿Qué parte de la bolsa has comido?"

Si lo deseáis, podéis utilizar los siguientes policubos que os entrego: tres de cada color.

Una vez enunciada la tarea el profesor hace una intervención general: en esta tarea tienes que MEDIR LA CANTIDAD DE BOMBONES QUE HAS COMIDO tomando como UNIDAD DE MEDIDA LA CANTIDAD DE BOMBONES QUE HAY EN LA BOLSA. En esta tarea no nos preocupa el peso, ni la longitud, ni la superficie de los bombones (pensamos que todos son iguales); lo que nos interesa de los bombones es la CANTIDAD de bombones que hay. La magnitud que consideramos se denomina cardinalidad.

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y el profesor la resuelve en la pizarra con las indicaciones que recibe de los alumnos..

• El profesor enuncia la tarea siguiente:

Ficha de Trabajo nº 23.- Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 8 bombones. ¿Qué parte de la bolsa has comido? Si lo deseáis, podéis utilizar los policubos

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual

4. Material.

- Centicubos o policubos.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar las dos tarjetas de evaluación. Ambas tienen el mismo formato. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de Trabajo nº 23:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 23 Fecha ____________
ALUMNO/A: ______________________________
Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 8 bombones.
¿Qué parte de la bolsa has comido?
Vas a resolver el problema de diferentes maneras: la unidad es el número de bombones que hay en la bolsa.
1º Si fraccionas la unidad en 12 partes iguales, cada subunidad (es un bombón) es de medida $\frac{1}{12}$ de unidad.
Y la solución es: he comido $\frac{\quad}{\quad}$ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

2º Si fraccionas la unidad en 6 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 2 bombones) es de medida $\frac{1}{6}$ de unidad.

Y la solución es: He comido ——— de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

3º Si fraccionas la unidad en 3 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 4 bombones) es de medida $\frac{1}{3}$ de unidad.

Y la solución es: he comido ——— de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

---

SESIÓN NÚMERO 20

1. Objetivos de la sesión

Construir el sistema de representación fraccionario en el modelo de medida con la magnitud cardinalidad.
Calcular la fracción de una cantidad discreta

2. Contenidos

- La fracción para expresar la medida de la magnitud cardinalidad.
- La fracción de una cantidad discreta

3. Metodología

• El profesor enuncia la tarea siguiente:

Ficha de Trabajo nº 24.- Has comprado una bolsa que contiene 16 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 12 bombones. ¿Qué parte de la bolsa que has comido?
Si lo deseáis, podéis utilizar los siguientes policubos que os entrego.

La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual

• Una vez finalizada esta tarea el profesor propone los dos problemas siguientes que constituyen la Ficha de trabajo nº 25:

Problema 1.- Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{1}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?.*

Problema 2.- Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{3}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?*

La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual

4. Material.

- Centicubos o policubos.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación, para dar respuesta a la Ficha de trabajo nº 24:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 24 O TARJETA DE EVALUACIÓN Nº 8 Fecha_________

ALUMNO/A:____

Has comprado una bolsa que contiene 16 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 12 bombones.

¿Qué parte de la bolsa has comido?

Vas a resolver el problema de diferentes maneras. La unidad es el número de bombones que hay en la bolsa.

1º Si fraccionas la unidad en 16 partes iguales, cada subunidad (es un bombón) es de medida $\frac{1}{16}$ de la unidad.
Y la solución es: he comido $\frac{\quad}{\quad}$ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

2º Si fraccionas la unidad en 8 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 2 bombones) es de medida $\frac{1}{8}$ de la unidad.
Y la solución es: he comido $\frac{\quad}{\quad}$ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

3º Si fraccionas la unidad en 4 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 4 bombones) es de medida $\frac{1}{4}$ de la unidad.
Y la solución es: he comido $\frac{\quad}{\quad}$ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

Después de resolver los dos problemas propuestos, los alumnos deben cumplimentar la tarjeta siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 25 Fecha___________
ALUMNO/A:____

PRIMER PROBLEMA

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{1}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?*

SOLUCIÓN: He comido ______________________________________

Explica cómo has obtenido la solución: ______________________________

SEGUNDO PROBLEMA

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{3}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?*

SOLUCIÓN: He comido ______________________________________

Explica cómo has obtenido la solución: ______________________________

SESIÓN NÚMERO 21

1. Objetivos de la sesión
Reconocer la cardinalidad como una nueva magnitud.
Calcular la fracción de una cantidad discreta.

2. Contenidos
- La fracción para expresar la medida de la magnitud cardinalidad.
- La fracción de una cantidad discreta

3. Metodología

• El profesor propone la tarea siguiente:

Ficha de Trabajo nº 26.- En mi clase estamos 25 alumnos en total entre niños y niñas. Si sabemos que los $\frac{4}{5}$ *de los alumnos de la clase son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase? ¿Cuántos niños hay en la clase?*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual.

• El profesor recomienda a los alumnos que no utilicen material y les recomienda realizar dibujos. Para orientarles escribe 25 círculos en la pizarra formando una distribución simétrica de 5 filas y 5 columnas.

• Una vez finalizada esta tarea el profesor propone la resolución del siguiente problema:

Ficha de Trabajo nº 27.- Tienes una bolsa con 245 canicas, y das a un amigo los $\frac{3}{7}$ *de las canicas. ¿Cuántas canicas le has dado?*

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven de forma individual.

4. Material.

- Centicubos o policubos.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar las siguientes tarjeta de evaluación que corresponden a la Fichas de Trabajo nº 26 y nº 27:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 26 O TARJETA DE EVALUACIÓN Nº 9

ALUMNO/A:______________________________

En mi clase estamos 25 alumnos en total entre niños y niñas. Si sabemos que los $\frac{4}{5}$ *de los alumnos de la clase son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase?. ¿Cuántos niños hay en la clase?*

SOLUCIÓN: En la clase hay ________ niñas. En la clase hay ________ niños.

Explica como has obtenido la solución: ______________________________

Después de resolver el problema, contesta las preguntas:

1º ¿Cuál es la unidad de medida? ______________________________

2º ¿Qué indica el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$? ______________________________

3º ¿Qué indica el numerador de la fracción $\frac{4}{5}$? ______________________________

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 27 FECHA ___________

ALUMNO/A:______________________________

Tienes una bolsa con 245 canicas, y das a un amigo los $\frac{3}{7}$ *de las canicas. ¿Cuántas canicas le has dado?*

SOLUCIÓN: Has dado ________ canicas.

Explica como has obtenido la solución: ______________________________

Después de resolver el problema, contesta las preguntas:

1º ¿Cuál es la unidad de medida? ______________________________

2º ¿Qué indica el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$?______________________________

3º ¿Qué indica el numerador de la fracción $\frac{4}{5}$? ______________________________

Modificación de la Propuesta Didáctica de 4º curso de Educación Primaria en la Segunda Etapa

La Propuesta Didáctica para cuarto curso de Educación Primaria, en la Segunda Etapa, se articula en 21 sesiones de aula que se muestran, de forma secuencial, en el mismo orden en que se han implementado:

Sesiones de enseñanza en 4º curso de Educación Primaria

Sesiones 1 a 6	Tema 1.- La fracción con significado de medida de cantidades de longitud Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 1 a nº 8
~~Sesiones 7 y 8~~	Tema 2.- La fracción con significado de medida de cantidades de masa Se suprime este tema de la Propuesta de la Segunda Etapa.
Sesiones 7 a 12	Tema 3.- La fracción con significado de medida de cantidades de superficie Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 9 a nº 16
Sesiones 13 a 16	Tema 4.- La equivalencia de fracciones Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 17 a nº 21
Sesiones 17 y 18	Tema 5.- Relaciones de orden entre fracciones Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 22 a nº 25
Sesiones 19 a 21	Tema 6.- La fracción con significado de medida de cantidades discretas Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 26 a nº 31

Tema 1: La fracción con significado de medida de cantidades de longitud

Se dedican 6 sesiones y se proponen 8 Fichas de Trabajo para introducir la fracción desde el modelo de medida de cantidades de longitud.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
1	**FT2E nº 1 nueva**	FT1E nº 1
2	**FT2E nº 2 = FT1E nº 1**	FT1E nº 1
3	**FT2E nº 2 = FT1E nº 1** **FT2E nº 3 = FT1E nº 2**	FT1E nº 1 FT1E nº 2
4	**FT2E nº 4 = FT1E nº 3**	FT1E nº 3
5	**FT2E nº 5 nueva** **FT2E nº 6 nueva**	FT1E nº 4
6	**FT2E nº 7 y nº 8 = FT1E nº 5**	FT1E nº 5

Con respecto a la Propuesta de la Primera Etapa se producen las modificaciones siguientes:

• En la sesión Nº 1, antes de proponer la Ficha de Trabajo nº 1, se plantea la siguiente situación problemática: *Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared (la longitud de la cortina mide 1/2 de la unidad). La longitud de la barra queréis que sea igual que la largura de la cortina. ¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda la barra de la cortina que tenga la longitud deseada?*

Esta tarea se presenta antes de que los alumnos resuelvan la situación análoga de medida de un listón (de longitud 3/4 de unidad) con la intención de que intuyan la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad de medida. Los alumnos utilizan materiales tangibles: tiras de papel de longitud la unidad y el listón de madera que deben medir. Sin embargo, no reciben impresos para escribir la solución.

• En la Segunda Etapa se introducen los siguientes cambios metodológicos:

1º Los alumnos utilizan tiras de papel en lugar de cañas previamente fraccionadas. De esta forma se consigue que los alumnos relacionen, en todo momento, el tamaño de las subunidades con el de la unidad de medida.

2º Se recomienda a los alumnos afronten la búsqueda de la subunidad que resuelve el problema de la medida DE FORMA SISTEMÁTICA, es decir, que prueben con la unidad de longitud, después con 1/2 de unidad, con 1/3 de unidad, y así sucesivamente.

3º Los alumnos copian en sus cuadernos los significados de los términos de la fracción después de haber cumplimentado la tarjeta de evaluación de la tarea.

• Se suprime la situación de comunicación (FT1E nº 4) que se propone en la sesión Nº 5 de la Primera Etapa y en su lugar se refuerza la técnica del fraccionamiento de la unidad en partes iguales y se proponen dos nuevas Ficha de Trabajo de medida, cuyos enunciados son:

Expresar, con una fracción, la medida del listón de madera que os entrego (de medida 6/5 unidades).

Expresar, con una fracción, la medida del listón de madera que os entrego (de medida 2 unidades).

Las tarjetas de tarjeta de evaluación de estas tareas tienen un formato común que mostramos a continuación:

TARJETA DE LA FICHA Nº 6 Fecha _____________
ALUMNO/A:____
1º. Escribe la fracción que expresa longitud del listón:
__________ de unidad
2º. Escribe como se lee la longitud del listón: _____________________________________
3ª. Has fraccionado la unidad en _________ partes iguales.
4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ____________________________________
5º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? __________________________________

• Las Fichas de Trabajo nº 7 y nº 8 son las tareas de evaluación semántica de la fracción que se corresponden con la FT1E nº 5 o Ficha de Evaluación nº 2 de la Primera Etapa.

Tema 2: La fracción con significado de medida de cantidades de masa

• Se suprime este tema de la Propuesta de la Segunda Etapa.

Tema 3: La fracción con significado de medida de cantidades de superficie

Se dedican 6 sesiones y se proponen 8 Fichas de Trabajo (nº 9 a nº 16) para introducir la fracción desde el modelo de medida de cantidades de superficie.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	**Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)**	**Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)**
7	**FT2E nº 9 = FT1E nº 8**	
8	**FT2E nº 10 = FT1E nº 9**	
9	**FT2E nº 11 = FT1E nº 10** **FT2E nº 12 = FT1E nº 11**	FT1E nº 8
10	**FT2E nº 13 nueva** **FT2E nº 14 nueva**	FT1E nº 9
11	**FT2E nº 15 nueva**	FT1E nº 10 FT1E nº 11
12	**FT2E nº 16 nueva**	FT1E nº 12

Con respecto a la Propuesta de la Primera Etapa se producen las modificaciones siguientes:

• La situación de comunicación (Ficha nº 12) de la Primera Etapa se suprime porque su gestión en el aula resulta compleja y se introducen cuatro nuevas tareas. En su lugar, se proponen cuatro nuevas tareas.

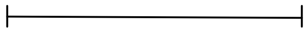
• La primera de las nuevas tareas (Ficha de Trabajo nº 13) plantea la situación de medida siguiente:

> *Os entrego una cartulina (cuya superficie es 11/8 u). Si consideras como unidad de medida la unidad de superficie* (papel cuadrado de 20 cms. de lado)*. Debéis expresar, con una fracción, la medida de la cantidad de superficie de la cartulina.*

La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente.

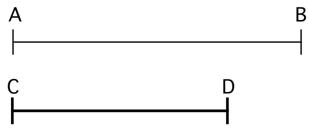
• La segunda y tercera tarea (Fichas de Trabajo nº 14 y nº 15) tienen un formato común y plantean actividades de medida y de evaluación semántica de la fracción. Cada una de estas fichas plantean dos actividades de medida y dos de evaluación semántica de la fracción. La novedad radica en que las actividades están formulada mediante un soporte gráfico: la unidad se representa gráficamente mediante un segmento, en el caso de la Ficha nº 14 que trabaja la magnitud longitud, o la figura de un cuadrado en el caso de la Ficha nº 15 que trabaja la magnitud superficie. A pesar de que las tareas están formuladas de forma gráfica, los alumnos disponen de trozos de papel de la misma forma y cantidad de magnitud que la unidad por si desean realizar acciones físicas.
La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente. Cuando concluyen las tareas, los alumnos cumplimentan las tarjetas de evaluación de las dos Fichas de trabajo que mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 14. FECHA: _______________

Si la unidad de longitud es: 

PRIMERA PREGUNTA

Expresa, con una fracción, la longitud del segmento que une los puntos C y D.

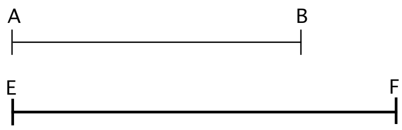


SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES __________ DE LA UNIDAD.

Explica que has hecho para medir: ____

SEGUNDA PREGUNTA

Expresa, con una fracción, la longitud del segmento que une los puntos E y F.

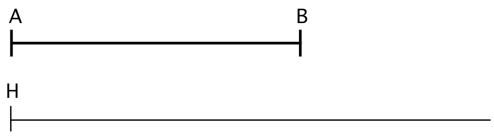


SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES __________ DE LA UNIDAD.

Explica que has hecho para medir: ____

TERCERA PREGUNTA

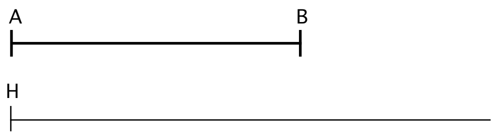
Dibuja, a partir del punto H, un segmento que mida una longitud de $\frac{5}{4}$ unidad.



Explica que has hecho para dibujar el segmento: ____

CUARTA PREGUNTA

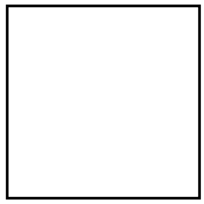
Dibuja, a partir del punto H, un segmento que mida una longitud de $\frac{4}{3}$ unidad.



Explica que has hecho para dibujar el segmento: ____

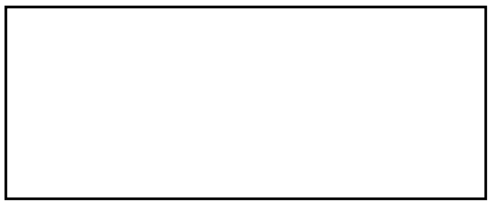
TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 15. FECHA: ______________

SI LA UNIDAD DE SUPERFICIE ES:



PRIMERA PREGUNTA:

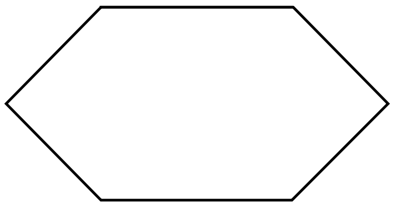
EXPRESA, CON UNA FRACCIÓN, LA SUPERFICIE DE LA SIGUIENTE FIGURA:



SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES _________ DE LA UNIDAD.

SEGUNDA PREGUNTA:

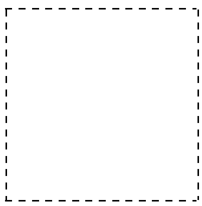
EXPRESA, CON UNA FRACCIÓN, LA SUPERFICIE DE LA SIGUIENTE FIGURA:



SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES _________ DE LA UNIDAD.

TERCERA PREGUNTA:

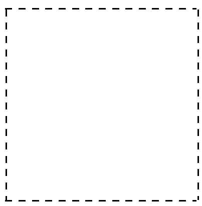
Dibuja una figura cuya superficie sea $\frac{5}{4}$ de unidad.



Explica que has hecho para dibujar la figura: ____

CUARTA PREGUNTA:

Dibuja una figura cuya superficie sea $\frac{4}{3}$ de unidad.



Explica que has hecho para dibujar la figura: ____

• La cuarta tarea (Fichas de Trabajo nº 16) plantea una actividad de evaluación semántica de la fracción como medida de la cantidad de superficie. La tarea se les formula verbalmente a los alumnos de siguiente modo:

Debes construir "todos los manteles que puedas" y que cumplan las condiciones siguientes:

a) Que tengan una superficie de 1/2 unidad

b) Que tengan forma lo más regular posible (cuadrada o rectangular)

Los alumnos reciben varias unidades de superficie con la consigna de que identifiquen la subunidad con la que construyen el mantel. Los alumnos deben resolver individualmente esta tarea en sus casas y traerla resuelta al comienzo de la siguiente sesión de clase.
Esta tarea prepara y anticipa la introducción del concepto de equivalencia de fracciones.

Tema 4: La equivalencia de fracciones

Se dedican 4 sesiones y se proponen 5 Fichas de Trabajo (nº 17 a nº 21) para introducir el concepto de equivalencia de fracciones. Se trata de que los escolares comprendan que la medida de una misma cantidad de magnitud puede expresarse con fracciones diferentes. Además, se pretende que avancen hacia la formulación de una regla que facilite la búsqueda de fracciones equivalentes a una dada

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
13	**FT2E nº 17 = FT1E nº 13**	FT1E nº 13
14	**FT2E nº 18 = FT1E nº 15**	FT1E nº 14 FT1E nº 15
15	**FT2E nº 19 nueva** **FT2E nº 20 nueva**	________________
16	**FT2E nº 21 nueva**	________________

Con respecto a la Propuesta de la Primera Etapa se producen las modificaciones siguientes:

• Se espera que la resolución de las Fichas FT2E nº 16 y FT2E nº 17 aporten suficiente base experimental para que los alumnos comprendan el concepto de equivalencia e intuyan la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada. Se mantiene la FT2E nº 18 que propone a los alumnos conjeturar la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada, pero se suprime la FT1E nº 14 porque la FT2E nº 16 cubre el mismo objetivo.

• Se proponen tres nuevas tareas. El objetivo de las dos primeras es enseñar la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada. Mostramos las tarjetas de evaluación de estas dos fichas:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 19. Fecha: ____________

ALUMNO/A: ____

Encuentra el numerador o el denominador de la fracción para que sean equivalentes las siguientes fracciones:

a)

$$\frac{1}{3} = \frac{\square}{6}$$

x 2

b)

: 3

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{\square}$$

c)

$$\frac{3}{2} = \frac{\square}{12}$$

d)

$$\frac{8}{12} = \frac{\square}{3}$$

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 20. Fecha: ____________

ALUMNO/A: ____

Encuentra el numerador o el denominador de la fracción para que sean equivalentes las siguientes fracciones:

a)

$$\frac{2}{5} = \frac{\square}{15}$$

b)

$$\frac{5}{10} = \frac{\square}{2}$$

c)

$$\frac{6}{4} = \frac{\square}{10}$$

d)

$$\frac{6}{4} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{10}$$

• La tercera tarea que se propone, en la Ficha de Trabajo nº 21, tiene como objetivo indagar si los alumnos son capaces de aplicar la equivalencia de fracciones y estar en disposición de utilizar esta estrategia simbólica en las tareas posteriores de comparación de cantidades de magnitud cuyas medidas vienen dadas con expresiones fraccionarias. Mostramos las tarjetas de evaluación de esta ficha:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 21. Fecha: ____________

ALUMNO/A: ____

Voy a escribir dos fracciones y tu debes encontrar fracciones equivalentes a las que he escrito pero que tengan el mismo denominador

a) $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$

d) $\frac{7}{5}$ $\frac{3}{2}$

e) $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{6}$

f) $\frac{13}{18}$ $\frac{3}{4}$

Los enunciados de estas tres últimas Fichas de se presentan a todo el grupo en general y los alumnos las resuelven, en el aula, de manera individual. Como de costumbre, al finalizar las tareas habrá una intervención del profesor, sustentada en todas las respuestas dadas por los alumnos, en la repasará el concepto de equivalencia de fracciones y la técnica simbólica de obtención de fracciones equivalentes a una dada.

Tema 5: Relaciones de orden entre fracciones

Se dedican 2 sesiones y se proponen 4 Fichas de Trabajo (nº 17 a nº 21) para estudiar la relación de orden entre fracciones. Los alumnos han de determinar cuál de las dos fracciones dadas es mayor que la otra, sin que la comparación exija utilizar la equivalencia de fracciones.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	**Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)**	**Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)**
15		FT1E nº 16 FT1E nº 17
16		FT1E nº 18 FT1E nº 19
17	**FT2E nº 22 = FT1E nº 16** **FT2E nº 23 = FT1E nº 17**	FT1E nº 19
18	**FT2E nº 24 = FT1E nº 19** **FT2E nº 25 nueva**	FT1E nº 20

Con respecto a la Propuesta de la Primera Etapa se producen las modificaciones siguientes:

• Se suprime la Ficha de trabajo nº 18 de la Primera Etapa porque el contexto del enunciado del problema que plantea es poco familiar para los alumnos. En su lugar se propone la FT2E nº 25 cuyo enunciado es:

Un niño tiene una estatura de $\frac{7}{6}$ *metros y una amiga mide* $\frac{3}{2}$ *metros. ¿Cuál de los dos niños es más alto?*

La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente. Cuando concluyen la tarea, los alumnos cumplimentan las tarjetas de evaluación de la Fichas de trabajo nº 25 que mostramos a continuación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 25. Fecha ____________

ALUMNO/A: ____

Un niño tiene una estatura de $\frac{7}{6}$ *metros y una amiga mide* $\frac{3}{2}$ *metros. ¿Cuál de los dos niños es más alto?*

SOLUCIÓN: ____

He realizado un dibujo.

☐ Con la ayuda de materiales

☐ Sin la ayuda de materiales

He utilizado símbolos o razonamientos:

• Se suprimen la Ficha de trabajo nº 19 y nº 20 de la Primera Etapa porque los alumnos de esta Etapa han tenido grandes dificultades para comprender la densidad respecto del orden de fracciones.

Tema 6: La fracción con significado de medida de cantidades discretas

Se dedican tres sesiones (nº 19 a nº 21) a estudiar la fracción como resultado de la medida de cantidades discretas. La magnitud cardinalidad presenta peculiaridades que aconsejan hacer un tratamiento específico de las mismas por razones de uso social. Los alumnos han de medir cantidades de magnitudes discretas y han de aplicar la técnica que facilita el cálculo de la fracción de una cantidad. Además, se pretende que los alumnos conjeturen la regla de obtención de cálculo de la fracción de una cantidad. Se prevé implementar7 fichas de trabajo.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
19	**FT2E nº 26 = FT1E nº 23** **FT2E nº 27 = FT1E nº 24**	FT1E nº 22 FT1E nº 23
20	**FT2E nº 28 = FT1E nº 25** **FT2E nº 29= FT1E nº 26**	FT1E nº 24 FT1E nº 25
21	**FT2E nº 30 nueva** **FT2E nº 31= FT1E nº 27**	FT1E nº 26 FT1E nº 27

Se producen pocas modificaciones en la Segunda Etapa con respecto a la planificación de la Primera Etapa. Hay dos modificaciones con respecto a la Propuesta de la Primera Etapa:

• La Ficha de trabajo nº 22 de la Primera Etapa la gestiona directamente el profesor con los alumnos. El grupo clase resuelve la situación problemática pero los alumnos no cumplimentan ninguna tarjeta de evaluación.

• Se introduce una nueva tarea, Ficha de Trabajo nº 30, que tiene por objeto que los alumnos conjeturen la regla para calcular la fracción de una cantidad. La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos la resuelven individualmente. Cuando los alumnos concluyen la tarea, cumplimentan la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 30 que mostramos a continuación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 30. Fecha ______________

ALUMNO/A:____

Tienes una bolsa con 12 caramelos, y $\frac{1}{4}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?*

SOLUCIÓN: Hay ____

Tienes una bolsa con 16 caramelos, y $\frac{3}{4}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?*

SOLUCIÓN: Hay ____

Tienes una bolsa con 15 caramelos, y $\frac{3}{5}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?*

SOLUCIÓN: Hay ____

Tienes una bolsa con 21 caramelos, y $\frac{2}{3}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?*

SOLUCIÓN: Hay ____

Tienes una bolsa con 24 caramelos, y $\frac{6}{6}$ *de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?*

SOLUCIÓN: Hay ____

Propuesta didáctica para la enseñanza del número racional positivo en 5º curso de Educación Primaria

La propuesta para quinto curso se articula en 41 sesiones de aula y se organiza en torno a cinco componentes curriculares: objetivos, contenidos, actividades propuestas, metodología y evaluación. La presentación se hace de forma secuencial, en el mismo orden en que se ha implementado.

Sesiones de enseñanza en 5º curso de Educación Primaria

Sesiones 1 a 3	Tema 0.- Tareas previas para profundizar en el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente. Se resuelven las Fichas de Trabajo previas nº 1 a nº 6
Sesiones 4 a 12	Tema 1.- Operaciones con fracciones desde el significado de medida. Significado y cálculo de la suma, resta de fracciones; y multiplicación y división por un número natural. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 1 a nº 13
Sesiones 13 a 20	Tema 2.- La fracción con significado de cociente partitivo. La fracción como resultado de un reparto realizado en una sola fase. Búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto y comparación de repartos realizados en una sola fase. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 14 a nº 23
Sesiones 21 a 24	Tema 3.- La fracción con significado de cociente partitivo. La representación polinómica decimal como resultado de un reparto realizado en varias fases. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 24 a nº 32
Sesiones 25 a 28	Tema 4.- La notación decimal. El número decimal como resultado de un reparto igualitario. El número decimal como resultado de la medida de cantidades de magnitud. Representación gráfica en la recta numérica. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 33 a nº 36
Sesiones 29 y 30	Tema 5. Conexión entre la notación decimal y la notación fraccionaria. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 37 y nº 38
Sesiones 31 y 32	Tema 6. Relación de orden entre números decimales Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 39 y nº 40
Sesiones 33 a 41	Tema 7.- Operaciones con números decimales. Significado y cálculo de la suma, resta de números decimales; y multiplicación y división por un número natural. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 41 a nº 51

Tema 0: Repaso del concepto de equivalencia de fracciones

Las tres primeras sesiones de la secuencia de enseñanza profundizan en el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente desde el significado de medida. Se ha considerado pertinente dedicar estas tres sesiones a reforzar el significado y cálculo de la equivalencia de fracciones porque los procedimientos de cálculo de las operaciones con fracciones se fracción se fundamentan en el concepto de equivalencia.

SESIÓN NÚMERO 1

1. Objetivos de la sesión

Profundizar sobre el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente.

2. Contenidos

- Significado de fracciones equivalentes
- Técnica de búsqueda y comprobación de fracciones equivalentes

3. Metodología

• El profesor enuncia las tareas propuestas a los alumnos:

Ficha previa nº 1.-

Debéis medir el listón (de longitud $\frac{3}{4}$ de la caña unidad) que os entrego.
Sin deshacer el tren de subunidades que has hecho, construye otro tren de la misma longitud utilizando subunidades de $\frac{1}{8}$ de la caña unidad.
Pregunta 1: "Expresa de dos formas diferentes la longitud de los dos trenes que has construido"
Pregunta 2: "¿Por qué son equivalentes las fracciones que has escrito?"
Pregunta 3: "¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a las fracciones que has escrito?. Explica cómo la has obtenido?

Ficha previa nº 2.-

Debéis medir el listón (de longitud $\frac{2}{3}$ de la caña unidad) que os entrego.
Sin deshacer el tren de subunidades que has hecho, construye otro tren de la misma longitud utilizando subunidades de $\frac{1}{6}$ de la caña unidad.
Pregunta 1: "Expresa de dos formas diferentes la longitud de los dos trenes que has construido"
Pregunta 2: "¿Por qué son equivalentes las fracciones que has escrito?"
Pregunta 3: "¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a las fracciones que has escrito?. Explica cómo la has obtenido?.

• Las tareas se presentan a todo el grupo en general y los alumnos las resuelven por parejas.

4. Material

- Los alumnos dispondrán de un listón de longitud $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$ de unidad, cañas-unidad y subunidades de diversas cantidades de longitud.

5. Impresos para el alumno

Para completar cada una de las tareas los alumnos deben cumplimentar la tarjeta de evaluación. Las tarjetas de evaluación de las dos Fichas tienen un formato común; mostramos la de la Ficha Previa nº 2:

TARJETA DE LA FICHA PREVIA Nº 2 FECHA ___________

ALUMNO/A:____

Debes construir con las cañas, un listón de longitud $\frac{2}{3}$ de la caña unidad. Sin deshacer el listón que has hecho, construye un listón de la misma longitud utilizando subunidades de $\frac{1}{6}$ de la caña unidad

Pregunta 1: Expresa con otra fracción diferente la longitud del listón que has construido

Pregunta 2: ¿Por qué la fracción que has escrito es equivalente a $\frac{2}{3}$? ______________________________

Pregunta 3: ¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a la fracción $\frac{2}{3}$?. Explica cómo la has obtenido.

SESIÓN NÚMERO 2

1. Objetivos de la sesión
Profundizar sobre el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente.

2. Contenidos
- Significado de fracciones equivalentes
- Técnica de búsqueda y comprobación de fracciones equivalentes

3. Metodología
• El profesor plantea, en la Ficha Previa nº 3; distintas tareas:

Tarea 1: Construye un mantel de superficie $\frac{3}{2}$ *de unidad utilizando subunidades de* $\frac{1}{4}$ *de unidad. Expresa con una fracción la superficie del mantel que acabas de construir*

Tarea 2: Construye un mantel de superficie $\frac{3}{2}$ *de unidad utilizando subunidades de* $\frac{1}{6}$ *de unidad. Expresa con una fracción la superficie del mantel que acabas de construir*

Tarea 3: :Construye un mantel de superficie $\frac{3}{2}$ *de unidad utilizando subunidades de* $\frac{1}{8}$ *de unidad. Expresa con una fracción la superficie del mantel que acabas de construir*

Tarea 4: En las tareas 1, 2 y 3 has encontrado tres fracciones equivalentes a $\frac{3}{2}$*. Escribe otras fracciones equivalentes a* $\frac{3}{2}$ *de la unidad*

• Las tareas se presenta a todo el grupo en general y los alumnos lo resuelven de forma individual.

• El profesor plantea, en la Ficha Previa nº 4; el siguiente problema:

Dados dos listones: uno de longitud $\frac{3}{4}$ *de unidad y otro de longitud* $\frac{2}{3}$ *de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*
No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$ que tengan el mismo denominador.

4. Material
- Los alumnos dispondrán de unidades de superficie y pliegos de papel para que construyan cantidades de superficie.

5. Impresos para el alumno
Para completar la tarea propuesta en la Ficha Previa nº 4, los alumnos deben cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA PREVIA Nº 4 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Dados dos listones: uno de longitud $\frac{3}{4}$ *de unidad y otro de longitud* $\frac{2}{3}$ *de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*
No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a 3/4 y *2/3* que tengan el mismo denominador.

SOLUCIÓN: El listón más largo mide ____

Para comparar los listones he hecho lo siguiente: ____________________________________

SESIÓN NÚMERO 3

1. Objetivos de la sesión
Profundizar sobre el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente.

2. Contenidos
- Significado de fracciones equivalentes
- Técnica de búsqueda y comprobación de fracciones equivalentes

3. Metodología
• El profesor plantea la resolución de la tarea siguiente:

Ficha Previa nº 5.- *Dados dos listones: uno de longitud* $\frac{3}{4}$ *y otro de longitud* $\frac{5}{6}$ *de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*

No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a 3/4 y 5/6 que tengan el mismo denominador

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos lo resuelven de forma individual.

• Cuando se haya resuelto la tarea anterior y se haya procedido a la evaluación conjunta de la tarea, el profesor plantea la resolución de la tarea siguiente:

Ficha Previa nº 6.- *Dados dos listones: uno de longitud* $\frac{4}{5}$ *y otro de longitud* $\frac{5}{6}$ *de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*

No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a 4/5 y 5/6 que tengan el mismo denominador

• La tarea se presenta a todo el grupo en general y los alumnos lo resuelven de forma individual.

4. Material
- Los alumnos dispondrán de unidades de superficie y pliegos de papel para que construyan cantidades de superficie.

5. Impresos para el alumno

Las tarjetas de evaluación de las Fichas Previas nº 5 y nº 6 tienen el mismo formato. Mostramos la tarjeta de la Ficha Previa nº 6:

TARJETA DE LA FICHA PREVIA Nº 6 Fecha: ____________
ALUMNO/A:____
Dados dos listones: uno de longitud $\frac{4}{5}$ *de unidad y otro de longitud* $\frac{5}{6}$ *de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*
No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a 4/5 y 5/6 que tengan el mismo denominador.
SOLUCIÓN: El listón más largo mide ______________________________
Para comparar los listones he hecho lo siguiente: ______________________

Tema 1: La fracción con significado de medida. Operaciones con fracciones

En las siguientes nueve sesiones de la secuencia de enseñanza se estudian las operaciones con fracciones asociadas a situaciones problemáticas de medida de cantidades de magnitud. Cuando los alumnos resuelven las correspondientes Fichas de Trabajo modelizan situaciones que dan sentido a las operaciones con fracciones: añadir cantidades, quitar cantidades, comparar cantidades, completar cantidades, reiterar cantidades de magnitud, repartir cantidades en partes iguales y fraccionar cantidades en partes iguales.

Concedemos gran importancia a las representaciones gráficas por cuanto posibilitan la transición entre las acciones realizadas con el material y las representaciones simbólicas. Para fomentar en los alumnos la realización de gráficos hemos modificado las tarjetas de las fichas de trabajo para que los alumnos, con independencia de la estrategia que utilicen, se vean obligados a representar gráficamente las fracciones involucradas en el enunciado de la tarea.

SESIÓN NÚMERO 4

1. Objetivos de la sesión

Significado y cálculo de la suma de fracciones.

2. Contenidos

- Introducir el significado de la suma de fracciones.
- Encontrar procedimientos de cálculo de la suma de fracciones con el mismo denominador.

3. Metodología.

• El profesor plantea la resolución de dos problemas. En primer lugar, propone el de la Ficha de Trabajo nº 1:

Problema 1.- Tengo dos listones de madera: uno mide los $\frac{4}{3}$ de la caña unidad, y otro mide $\frac{2}{3}$ de la caña unidad. Si colocamos un listón a continuación del otro, ¿cuánto mide el nuevo listón?

Y, después, cuando se haya evaluado esta tarea plantea la resolución de la Ficha de Trabajo nº 2:

Problema 2: Tienes un listón que mide $\frac{1}{2}$ de la caña unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud 1 caña unidad. Expresa, con una fracción, la longitud del nuevo listón que has construido.
Si necesitáis algún material podéis pedírmelo.

• El profesor controla el trabajo de los alumnos y reorienta el mismo mediante dos intervenciones generales:

- Primera intervención: El problema se puede resolver midiendo el listón que se obtiene al colocar uno de los listones a continuación del otro. Pero si se reconoce como suma de fracciones, no hace falta medir, pues : si tengo un listón que mide 4 trozos de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad y le añado otro listón que mide 2 trozos de la misma longitud, es como si tuviera un sólo listón de medida 6 trozos de longitud $\frac{1}{3}$. Surge así el algoritmo de suma de fracciones de igual denominador:

$$\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4+2}{3}$$

- Segunda intervención: El significado de la suma de dos o más fracciones es la medida de longitud (también una fracción) de un listón que se obtiene al unir, alineados y uno a continuación del otro, los listones iniciales cuyas longitudes son las fracciones de partida. El correspondiente algoritmo de cálculo se introduce a partir de la búsqueda de fracciones equivalentes a las dadas y que tengan igual denominador

• La tarea de la Ficha nº 1 se presenta a todo el grupo en general y para realizarla se forman grupos de 2 alumnos. La tarea de la Ficha nº 2 debe resolverla cada alumno individualmente.

• Cuando los alumnos resuelven cada una de las dos problemas, cumplimentan las respectivas tarjetas de evaluación. Inmediatamente después se celebra un debate que el profesor utiliza para institucionalizar el significado y el algoritmo de la suma de fracciones.

4. Material

- Los alumnos dispondrán, SI LO SOLICITAN AL PROFESOR, de cañas de tamaño la unidad y de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad para que puedan construir cantidades de longitud $\frac{4}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de unidad. También dispondrán de plantillas colgadas en la pared para fraccionar las cañas-unidad en partes iguales. Los alumnos que no utilicen este método dispondrán de tiras de papel de la misma longitud que la caña unidad para que obtengan las fracciones unitarias mediante el fraccionamiento de la tira.

5. Impresos para el alumno

Por cada una de las tareas que se le proponen, los alumnos han de cumplimentar una tarjeta de evaluación. Las dos tarjetas tienen el mismo formato; mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 2:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 2 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Tienes un listón que mide $\frac{1}{2}$ *de la caña unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud 1 caña unidad. Expresa, con una fracción, la longitud del nuevo listón que has construido.*

Si necesitas utilizar material puedes solicitarlo.

SOLUCIÓN: La longitud del listón es ___________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He medido el nuevo listón	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ___________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ___________________________

SESIÓN NÚMERO 5

1. Objetivos de la sesión

Significado y cálculo de la suma de fracciones

2. Contenidos

- Introducir el significado de la suma de fracciones.
- Encontrar procedimientos de cálculo de la suma de fracciones con distinto denominador.

3. Metodología

• El profesor plantea dos problemas:

Ficha de Trabajo nº 3.- Tienes un listón que mide $\frac{1}{2}$ *de la caña unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud* $\frac{1}{3}$ *de la caña unidad. ¿Cuál es la longitud del nuevo listón que has construido?*

Ficha de Trabajo nº 4.- Una empresa fabrica refrescos que vende en botellas de diferente capacidad: de $\frac{1}{5}$ *de litro, de* $\frac{1}{3}$ *de litro y de* $\frac{1}{2}$ *litro. Si bebes el contenido de dos botellas: una de* $\frac{1}{5}$ *de litro y otra de* $\frac{1}{3}$ *de litro, ¿qué cantidad de refresco has bebido? La cantidad de refresco que has bebido, ¿cabe en una botella de* $\frac{1}{2}$ *litro?*

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• Cuando los alumnos resuelven cada problema cumplimentan la tarjeta de evaluación y, después, se procede la evaluación conjunta de cada una de las tareas,
• Algunos alumnos exponen en la pizarra la estrategias de resolución utilizadas en cada problema, dedicando especial atención a las nuevas representaciones escritas de algoritmo de la suma de fracciones.

4. Material

- Los alumnos dispondrán, SI LO SOLICITAN AL PROFESOR, de cañas unidad y de trozos de caña de longitud 1/2 y 1/3 unidad para que puedan construir listones de longitud 3/6 y 2/6 de unidad. También dispondrán de plantillas colgadas en la pared para fraccionar las cañas-unidad en partes iguales. Los alumnos que no utilicen este método dispondrán de tiras de papel de la misma longitud que la caña unidad para que obtengan las fracciones unitarias mediante el fraccionamiento de la tira.
- En el segundo problema no se pone a disposición de los alumnos ningún material específico, por lo que el profesor prestará especial atención a los alumnos que solicitan material para comprobar como resuelven el problema cambiando la magnitud: ¿qué magnitud utilizan?; ¿vuelven a medir ?; ¿razonan con el significado de suma de fracciones?

5. Impresos para el alumno

En cada una de los problemas los alumnos deben cumplimentar una ficha similar a la que reproducimos correspondiente al problema propuesto en la Ficha de Trabajo nº 4:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 4 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Una empresa fabrica refrescos que vende en botellas de diferente capacidad: de $\frac{1}{5}$ *de litro, de* $\frac{1}{3}$ *de litro y de* $\frac{1}{2}$ *litro. Si bebes el contenido de dos botellas: una de* $\frac{1}{5}$ *de litro y otra de* $\frac{1}{3}$ *de litro, ¿qué cantidad de refresco has bebido?*

PRIMERA PREGUNTA

He bebido ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________

SEGUNDA PREGUNTA

La cantidad de refresco que has bebido, ¿cabe en una botella de $\frac{1}{2}$ *litro?* SI ☐ NO ☐

Explica por qué cabe o no cabe en una botella de 1/2 litro: ______________________________

SESIÓN NÚMERO 6

1. Objetivos de la sesión
Dar significado a la resta de fracciones.
Encontrar procedimientos de cálculo de la resta de fracciones con distinto denominador.

2. Contenidos
- Introducir el significado de la resta de fracciones.
- Procedimientos de cálculo de la resta de fracciones con distinto denominador.

3. Metodología
• El profesor enuncia el problema siguiente:

Ficha de Trabajo nº 5.- Deseas empapelar una pared que tiene una superficie de 5 metros cuadrados. Si por la mañana has empapelado una superficie de $\frac{11}{4}$ *metros cuadrados. ¿Cuánta superficie queda por empapelar?*

No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

• El profesor plantea el problema para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la resta de dos fracciones.
• El cálculo de la operación se justifica en la necesidad de encontrar la superficie de pared que añadida a 11/4 unidades complete las 5 unidades de superficie.
• No es aconsejable introducir la regla del algoritmo de la resta de fracciones de forma simbólica, pero si establecer el procedimiento para restar fracciones con diferente denominador:

1.- Reducir las fracciones a un mismo denominador.
2.- Restar los numeradores y dejar como denominador el común de ambas fracciones.

4. Material
- El profesor no ofrece ningún material para resolver la tarea. No obstante, tendrá preparado material para dárselo a quien lo solicite.

5. Impresos para el alumno
Los alumnos deben cumplimentar la tarjeta de evaluación que reproducimos a continuación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 5 Fecha: ______________

ALUMNO/A: ____

Deseas empapelar una pared que tiene una superficie de 5 metros cuadrados. Si por la mañana has empapelado una superficie de $\frac{11}{4}$ *metros cuadrados. ¿Cuánta superficie queda por empapelar?*

Consigna: No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

SOLUCIÓN: La superficie por empapelar es ______________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________

SESIÓN NÚMERO 7

1. Objetivos de la sesión
Dar significado a la resta de fracciones.
Encontrar procedimientos de cálculo de la resta de fracciones con distinto denominador.

2. Contenidos
- Introducir el significado de la resta de fracciones.
- Encontrar procedimientos de cálculo de la resta de fracciones con distinto denominador.

3. Metodología
• El profesor plantea el siguiente problema en la Ficha de Trabajo nº 6:

Quieres comprar aceitunas. La tendera te sirve $\frac{6}{5}$ *Kgr. de aceitunas. Expresa, con una fracción, el peso de aceitunas que debe añadir para servirte dos kilogramos de aceitunas.*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

• El profesor propone el problema para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la resta de dos fracciones.
• El cálculo de la operación se justifica por la necesidad de encontrar la cantidad de magnitud masa que añadida a 6/5 kgrs formen dos kgrs.
• No se aconseja introducir la regla del algoritmo de la resta de fracciones de forma simbólica.

4. Material
- El profesor no ofrece ningún material para resolver la tarea. No obstante, tendrá preparado material para dárselo a quien lo solicite

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 6 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Quieres comprar aceitunas. La tendera te sirve $\frac{6}{5}$ *Kgr. de aceitunas. Expresa, con una fracción, el peso de aceitunas que debe añadir para servirte dos kilogramos de aceitunas.*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

SOLUCIÓN: Debe añadir ____________________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: : ______________________________

SESIÓN NÚMERO 8

1. Objetivos de la sesión
Significado y cálculo del producto de una fracción por un número natural.

2. Contenidos
- Introducir el significado del producto de una fracción por un número natural.
- Inferir el algoritmo de cálculo de esta operación.

3. Metodología.
• El profesor plantea dos problemas en la misma Ficha de Trabajo nº 7:

Problema 1: Compráis 12 latas de conserva. Cada lata de conserva pesa $\frac{2}{3}$ Kgrs. ¿Cuánto pesan las 12 latas?

Problema 2: Compráis 36 latas de conserva. Cada lata de conserva pesa $\frac{2}{3}$ Kgrs. ¿Cuánto pesan las 36 latas?.

No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos para que éstos indiquen públicamente las estrategias utilizadas.
• El profesor establecerá el significado de la operación: la medida de una cantidad de magnitud que se construye al reiterar la cantidad de magnitud de partida tantas veces como indica el factor multiplicador.
• Para justificar el algoritmo de esta operación se procede observando que la fracción $\frac{a}{b}$ significa la medida de una cantidad de masa que puede considerarse como *a* trozos de cantidad de magnitud $\frac{1}{b}$ de unidad de masa. Si los *a* trozos se reiteran *n veces*, es como si hubiera $a \cdot n$ trozos de cantidad de magnitud $\frac{1}{b}$ de unidad.

4. Material
- El profesor no ofrece ningún material para resolver la tarea. No obstante, tendrá preparado material para dárselo a quien lo solicite

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta de evaluación por cada uno de los problemas propuestos. Estas tarjetas tienen el mismo formato; reproducimos la que corresponde al problema 1:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 7 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Compras 12 latas de conserva. Cada lata de conserva pesa $\frac{2}{3}$ Kgrs. ¿Cuánto pesan las 12 latas?

SOLUCIÓN: Las doce latas pesan _______________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: _______________________

Indica cómo has resuelto el problema: : ___________________________

SESIÓN NÚMERO 9

1. Objetivos de la sesión
Significado y cálculo del producto de una fracción por un número natural.

2. Contenidos
- Introducir el significado del producto de una fracción por un número natural.
- Inferir el algoritmo de cálculo de esta operación.

3. Metodología
• El profesor enuncia el siguiente problema en la Ficha de Trabajo nº 8:

Quieres colocar el rodapié en un pasillo que mide 8 metros. Para ello has comprado 25 losetas de longitud $\frac{3}{10}$ *de metro. Las losetas se colocan una a continuación de la otra. Con las losetas que has comprado, ¿qué longitud del rodapié puedes colocar?. Indica que longitud de rodapié te sobra o te falta por colocar el rodapié. ¿Tienes bastantes losetas para hacer todo el rodapié? Indica las losetas que te sobran o las que te faltan*

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.

4. Material
- El profesor no ofrece ningún material para resolver la tarea. No obstante, tendrá preparado material para dárselo a quien lo solicite

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 9 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Quieres colocar el rodapié en un pasillo que mide 8 metros. Para ello has comprado 25 losetas de longitud $\frac{3}{10}$ *de metro. Las losetas se colocan una a continuación de las otra.*

PRIMERA PREGUNTA

Con las losetas que has comprado, ¿qué longitud del rodapié puedes colocar?".

SOLUCIÓN: Puedo colocar una longitud de ______________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: : ______________________________

SEGUNDA PREGUNTA

¿Qué longitud que te sobra o te falta para colocar el rodapié?. ______________________

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: : ______________________________

TERCERA PREGUNTA

¿Tienes bastantes losetas para colocar todo el rodapié? SI ☐ NO ☐

Explica la respuesta: ______________________________________

SESIÓN NÚMERO 10

1. Objetivos de la sesión
Significado y cálculo del cociente entre una fracción unitaria y un número natural.

2. Contenidos

- Introducir el significado del cociente entre una fracción y un número natural.
- Inferir el algoritmo de cálculo de esta operación.

3. Metodología

• El profesor plantea dos problemas en las Fichas de Trabajo nº 9 y nº 10, respectivamente:

Ficha de Trabajo nº 9.- *Has cortado por la mitad, en dos partes iguales, un cristal de superficie* $\frac{1}{4}$ *de unidad. ¿Cuánto mide la superficie de la mitad del cristal que has cortado?*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

Ficha de Trabajo nº 10.- *Tienes una bola de plastilina que pesa* $\frac{1}{2}$ *de unidad. Si con esta cantidad de plastilina construyes tres bolas iguales de plastilina. ¿Cuánto pesa cada una de las tres bolas de plastilina?*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.

Comentario: En el problema de la Ficha nº 9 la operación división puede entenderse como "fraccionar por la mitad $\frac{1}{4}$ de unidad", es decir "hacer $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ unidad". En este caso la fracción $\frac{1}{2}$ actúa sobre la fracción $\frac{1}{4}$. El significado de la fracción $\frac{1}{2}$ no es el de una medida: es el de un ***operador*** que modifica una longitud. Sin embargo, no aconsejamos introducir la idea de operador ni la multiplicación de fracciones que será objeto de enseñanza en 6º curso de Educación Primaria; es decir, no consideramos pertinente introducir las representaciones simbólicas siguientes:

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{4} = \frac{1x1}{2x4} = \frac{1}{8} \text{ unidad}$$

En cambio, proponemos justificar desde el modelo de medida las expresiones siguientes:

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{2}{8} : 2 = \frac{2:2}{8} = \frac{1}{8} \text{ unidad}$$

porque la cantidad $\frac{1}{4}$ de unidad puede ser percibida como 2 subunidades de tamaño $\frac{1}{8}$ de unidad; y esta última cantidad pueden ser repartida fácilmente en 2 partes iguales.

• Se recomienda posponer la enseñanza del algoritmo de cálculo de esta operación porque puede ser introducida posteriormente, en este mismo curso, con mayores garantías de éxito cuando los alumnos hayan estudiado la fracción con el significado de cociente partitivo.
• A los alumnos que terminan las tareas se les pide que la resuelvan de otra manera, es decir, con otro procedimiento. De esta modo se espera que aparezcan nuevas estrategias. Por ejemplo, se espera que algunos alumnos hagan uso de su conocimiento de las fracciones unitarias y adelanten que la mitad de 1/4 de unidad es 1/8 de unidad.
• De inicio el profesor aconseja no utilizar materiales; no obstante, si algún alumno no sabe como resolver la tarea le permitirá utilizar el material que éste considere como necesario.

4. Material

- Cada alumno dispondrá de plastilina y la posibilidad de utilización de la balanza

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta por cada uno de los problemas propuestos. Ambas tarjetas tienen el mismo formato; reproducimos a continuación la que corresponde a la Ficha de Trabajo nº 10:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 10 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Tienes una bola de plastilina que pesa $\frac{1}{2}$ de unidad. Si con esta cantidad de plastilina construyes tres bolas iguales de plastilina. ¿Cuánto pesa cada una de las tres bolas de plastilina?

SOLUCIÓN: Cada bola de plastilina pesa ______________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: : ______________________________

SESIÓN NÚMERO 11

1. Objetivos de la sesión
Que los alumnos identifiquen el problema como división de una fracción por un número natural.
Que los alumnos formulen estrategias de procedimientos de cálculo de esta operación con fracciones no necesariamente unitarias

2. Contenidos
- Introducir el significado del cociente entre una fracción y un número natural.
- Inferir el algoritmo de cálculo de esta operación.

3. Metodología
• El profesor plantea los dos problemas siguientes:

Ficha de Trabajo nº 11.- *De un mantel que tiene una superficie de $\frac{3}{4}$ metros cuadrados, quieres sacar dos manteles iguales, sin que sobre ni falte mantel. ¿Cuál es la medida de la superficie del mantel que has obtenido?"*
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo

Ficha de Trabajo nº 12.- De una tela de superficie $\frac{3}{2}$ de unidad, quieres hacer 6 manteles iguales, sin que sobre ni falte tela. ¿Qué superficie tendrá cada uno de los manteles?
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• Cuando un alumno termine la tarea el profesor le animará a resolver el problema utilizando otra estrategia
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.
• El profesor no impondrá ninguna estrategia, aunque se aconseja la utilización de las estrategias que obligan al alumno a utilizar el lenguaje simbólico.

• A la vista de los resultado obtenidos en esta tarea y en las anteriores, se espera que los alumnos conjeturen el algoritmo de cálculo de la operación. Se recuerda que no se persigue la formulación de la técnica algorítmica; se pretende que los alumnos sepan obtener fracciones equivalentes al dividendo cuyo numerador tenga tantas subunidades como indique el divisor o número de partes iguales en las que hay que repartir o distribuir.
• De inicio el profesor les aconseja no utilizar materiales; no obstante, si algún alumno no sabe como resolver la tarea le permitirá utilizar el material que éste considere como necesario.

4. Material

- El profesor indica a sus alumnos que no utilicen material. Se intenta que los alumnos abandonen gradualmente las estrategias manipulativas. Los alumnos pueden tener dificultades derivadas de la prohibición de utilizar el material. En tal caso el profesor les proporcionará el material que los alumnos soliciten

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la correspondiente tarjeta. Ambas tarjetas poseen el mismo formato; mostramos la correspondiente a la Ficha nº 12:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 12 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

De una tela de superficie $\frac{3}{2}$ de unidad quieres hacer 6 manteles iguales, sin que sobre ni falte tela. ¿Qué superficie tendrá cada uno de los manteles?
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo"

SOLUCIÓN: Cada mantel tiene una superficie de ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________________

*Indica cómo has resuelto el problema:*____

SESIÓN NÚMERO 12

1. Objetivos de la sesión
Que los alumnos identifiquen el problema como división de una fracción por un número natural.
Que los alumnos formulen estrategias de procedimientos de cálculo de esta operación con fracciones no necesariamente unitarias

2. Contenidos
- Introducir el significado del cociente entre una fracción y un número natural.
- Inferir el algoritmo de cálculo de esta operación.

3. Metodología
• El profesor plantea el problema siguiente:

Ficha de Trabajo nº 13.- *Tenéis una masa de pan de $\frac{5}{4}$ Kgr. Con esta masa queremos hacer 10 panecillos iguales de modo que gastéis toda la masa. ¿Cuánto pesará cada panecillo?*

• El profesor propone el problema para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• Cuando un alumno termine la tarea el profesor le animará a resolver el problema utilizando otra estrategia
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.
• El profesor no impondrá ninguna estrategia, aunque se aconseja la utilización de las estrategias que obligan al alumno a utilizar el lenguaje simbólico.
• A la vista de los resultado obtenidos en esta tarea y en las anteriores, se espera que los alumnos conjeturen el algoritmo de cálculo de la operación. El profesor institucionaliza la siguiente regla:

> *Para dividir una fracción por un número natural debes hallar una fracción equivalente a la dada que tenga como numerador un número de subunidades que pueda ser dividido por el número natural y después debes realizar la división recordando la nueva medida de las subunidades.*

• De inicio el profesor les aconseja no utilizar materiales; no obstante, si algún alumno no sabe como resolver la tarea le permitirá utilizar el material que éste considere como necesario.

4. Material

- El profesor indica a sus alumnos que no utilicen material. Se intenta que los alumnos abandonen gradualmente las estrategias manipulativas. Los alumnos pueden tener dificultades derivadas de la prohibición de utilizar el material. En tal caso el profesor les proporcionará el material que los alumnos soliciten

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 13 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Tienes una masa de pan de $\frac{5}{4}$ *de Kgr. Con esta masa quieres hacer 10 panecillos iguales de modo que gastes toda la masa. ¿Cuánto pesará cada panecillo?*

No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

SOLUCIÓN: Cada panecillo pesa ______________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de superficie	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________

Tema 2: La fracción con significado de cociente partitivo

En las siguientes ocho sesiones de la secuencia de enseñanza los alumnos resuelven las Fichas de Trabajo y encuentran la fracción que expresa el resultado de un reparto igualitario efectuado en una fase utilizando procedimientos manipulativos, gráficos y simbólicos.

El modelo de aprendizaje de cociente partitivo que utilizamos viene caracterizado por cuatro variables:

objetos:	*barras de regaliz, todas de la misma la longitud.*
magnitud:	*longitud*
acción:	*reparto igualitario,*
técnicas de reparto:	*reparto en una fase*

El resultado del reparto viene expresado por la fracción $\frac{a}{b}$ *barras.*

La fracción admite una doble evaluación semántica. Por un lado posee el significado de medida e indica la cantidad de longitud de barra resultado del reparto. Y por otro lado expresa las condiciones iniciales del reparto; así, a es el número de barras de regaliz y b es el número de personas que van a participar en el reparto. Las cantidades a y b reciben el nombre de condiciones iniciales del reparto.

Sobre el proceso de reparto conviene recordar a los alumnos que:

a) Todas las barras se deben repartir.
b) Todas las barras deben tener la misma cantidad de longitud. La unidad es la cantidad de longitud que posee una de las barras.
c) Antes de simbolizar el reparto, deben realizarlo físicamente y además representar gráficamente el proceso de reparto.

En estas sesiones los alumnos reciben enseñanza de los siguientes conceptos referidos a la fracción como resultado de un reparto igualitario efectuado en una fase:

a) construcción del sistema de representación fraccionario con el significado de reparto igualitario.
b) comparación de repartos.
c) búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto conocido el resultado del mismo.

SESIÓN NÚMERO 13

1. Objetivos de la sesión

Que los alumnos analicen y apliquen la acción de repartir de forma igualitaria
Introducir la fracción con el significado de reparto, con el significado de cociente partitivo.

2. Contenidos

- Interpretar la acción de repartir objetos (barras) entre personas.
- Cuantificar el resultado de un reparto.
- Introducir la fracción como resultado de un reparto igualitario realizado en una sola fase.

3. Metodología

• El profesor plantea la tarea siguiente:

> *Ficha de Trabajo nº 14.- Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 4 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?*
> Os recuerdo que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra y que las barras se pueden fraccionar.

• El profesor propone la tarea para que los alumnos la resuelvan por parejas.
• Hay una intervención del profesor para aclarar que una fracción expresa la medida de un listón o segmento. Y también expresa el resultado de un reparto: la cantidad de barra de regaliza que recibe CADA UNA de las personas que participan en el reparto.
• El profesor animará a los alumnos a que expresen las representaciones orales, gráficas, escritas y simbólicas de las acciones que éstos realicen. Es interesante que aparezcan las representaciones gráficas del proceso de reparto para que poco a poco vayan sustituyendo a la utilización del material.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la correspondiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 13 Fecha: ______________

ALUMNOS/AS:____

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 4 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:

2. Completad la tabla siguiente:

SITUACIÓN PROBLEMA	FRACCIONAMIENTO DE LAS BARRAS	RESULTADO DEL REPARTO
Repartir 3 barras para 4 personas		
3 |_4___		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ____

El denominador indica ____

SESIÓN NÚMERO 14

1. Objetivos de la sesión

Que los alumnos analicen y apliquen la acción de repartir de forma igualitaria

Introducir la fracción con el significado de reparto, con el significado de cociente partitivo.

2. Contenidos

- Interpretar la acción de repartir objetos (barras) entre personas.
- Cuantificar el resultado de un reparto.
- Introducir la fracción como resultado de un reparto igualitario realizado en una sola fase.

3. Metodología.

• El profesor plantea la tarea siguiente:

Ficha de Trabajo nº 15.- *Vais a repartir 3 barras entre 2 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?*

Os recuerdo que el resultado de un reparto es la cantidad de regaliz que recibe cada uno de los individuos que participan en el reparto. Las barras se pueden fraccionar.

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.

• Hay una intervención del profesor enfatizando el significado de la acción de repartir en partes iguales: el resultado de un reparto igualitario es la cantidad de magnitud que recibe cada niño, y no la cantidad total a repartir.

• En la evaluación conjunta de la tarea conviene que aparezcan todas las soluciones y, en particular la que corresponde al reparto en una sola fase. A los alumnos que den como solución respuestas en varias fases el profesor les indicará que, a partir de ahora, cuando realicen repartos deben repartir las barras sobrantes, y para ello tendrán que fraccionar las barras, en partes iguales.

• El profesor animará a los alumnos a que expresen las representaciones orales, gráficas, escritas y simbólicas de las acciones que éstos realicen. Es interesante que aparezcan las representaciones gráficas del proceso de reparto para que poco a poco vayan sustituyendo a la utilización del material.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la correspondiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 15 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 2 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:

2. Completad la tabla siguiente:

SITUACIÓN PROBLEMA	FRACCIONAMIENTO DE LAS BARRAS	RESULTADO DEL REPARTO
Repartir 3 barras para 2 personas		
3 ⌊2		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ____

El denominador indica ____

SESIÓN NÚMERO 15

1. Objetivos de la sesión

Que los alumnos analicen y apliquen la acción de repartir de forma igualitaria
Introducir la fracción con el significado de reparto, con el significado de cociente partitivo.

2. Contenidos

- Interpretar la acción de repartir objetos (barras) entre personas.
- Cuantificar el resultado de un reparto.
- Introducir la fracción como resultado de un reparto igualitario realizado en una sola fase.
- Significado de la unidad en el modelo de reparto.

3. Metodología

• El profesor plantea las tareas siguientes, la segunda al finalizar la primera:

Ficha nº 16.- *Vais a repartir 5 barras entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?*
Ficha nº 17.- *Vais a repartir 3 barras entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?*
Os recuerdo que el resultado de un reparto es la cantidad de regaliz que recibe cada uno de los individuos que participan en el reparto. Las barras se pueden fraccionar

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• Hay una intervención del profesor enfatizando el significado de la acción de repartir en partes iguales: el resultado de un reparto igualitario es la cantidad de magnitud que recibe cada niño, y no la cantidad total a repartir.
• El profesor prestará especial atención a las estrategias utilizadas por los alumnos, así como a las representaciones orales y escritas. En la evaluación de la tarea interesa que aparezcan las estrategias y que las acciones realizadas con material sean representadas de forma gráfica.
• El profesor animará a los alumnos a que expresen las representaciones orales, gráficas, escritas y simbólicas de las acciones que éstos realicen. Es interesante que aparezcan las representaciones gráficas del proceso de reparto para que poco a poco vayan sustituyendo a la utilización del material.
• Interesa estar alerta a la solución $\frac{3}{3}$ de barra que deberá ser reinterpretada en términos de medida de longitud como 1 barra de regaliz.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar, por cada una de las tareas, la correspondiente tarjeta. Ambas tarjetas tienen el mismo formato; reproducimos la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 17:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 17 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:

2. Completad la tabla siguiente:

SITUACIÓN PROBLEMA	FRACCIONAMIENTO DE LAS BARRAS	RESULTADO DEL REPARTO
Repartir 3 barras para 2 personas		
3 |_3____		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ____

El denominador indica ____

SESIÓN NÚMERO 16

1. Objetivos de la sesión

Reconocer que repartos con condiciones iniciales diferentes (distinto número de barras y de personas) pueden dar el mismo resultado.

Reforzar el concepto de equivalencia de fracciones en el modelo de cociente partitivo.

2. Contenidos

- Concepto de equivalencia de fracciones en el modelo de cociente partitivo.

3. Metodología

• El profesor plantea las tareas siguientes, cada una de ellas la deben resolver unos alumnos determinados, de acuerdo con la siguiente distribución:

Grupo A (columnas impares): Vais a repartir 4 barras de regaliz entre 6 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

Grupo B (columnas pares): Vais a repartir 2 barras de regaliz entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.

• Hay una intervención del profesor haciendo notar que los repartos realizados por los dos grupos son iguales, y preguntará a la clase si esto es posible y en qué condiciones se da esta circunstancia.

• El profesor resumirá dos estrategias para comprobar la igualdad de los dos repartos:

1º Razonando que reciben igual cantidad de magnitud en los dos repartos, 2/3 y 4/6 respectivamente, porque las fracciones son equivalentes.

2º Razonando con la idea de reparto, sin necesidad de cuantificar el reparto: si se duplican las barras de regaliz y se duplican las personas, en ambos repartos recibirán la misma cantidad de magnitud. Conviene escenificar con los alumnos los dos repartos.

4. Material

- Cada alumno puede utilizar material manipulativo, si lo desea, o bien resolver la tarea utilizando representaciones gráficas, o bien, representaciones simbólicas

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta que corresponda a la tarea encomendada, y que tienen este formato:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 18 Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

Vais a repartir 4 barras de regaliz para 6 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Marca con una cruz el cuadro que indica lo que has hecho para resolver la tarea:

☐ He utilizado el material y he hecho lo siguiente: ____

☐ He realizado el siguiente dibujo:

☐ He utilizado símbolos:

2. Indica el significado de la fracción, del numerador y denominador de la FRACCIÓN ________________

SESIÓN NÚMERO 17

1. Objetivos de la sesión

Evaluar semánticamente la fracción como resultado de un reparto.
Comprender que diferentes condiciones iniciales de un reparto pueden dar el mismo resultado.
Reforzar la idea de repartos equivalentes.

2. Contenidos

- Encontrar las condiciones del reparto conocido su resultado.

3. Metodología

• El profesor enuncia el siguiente problema:

Ficha de Trabajo nº 19.- *Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe* $\frac{2}{3}$ *de barra. ¿Cuántas personas han participado en el reparto y cuántas barras de regaliz se han repartido?*

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.

• Hay una intervención del profesor para que se muestren todas las estrategias de resolución que han aparecido y, por si no lo han hecho, que se muestre la de multiplicar el resultado por el denominador (por el número de personas), o bien por un múltiplo de este denominador. Además, debe reiterar la idea de que un mismo resultado puede proceder de repartos en los que intervienen números diferentes de unidades y de personas.

4. Material

- Cada alumno puede utilizar material manipulativo, si lo desea, o bien resolver la tarea utilizando representaciones gráficas, o bien, representaciones simbólicas

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 19 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe $\frac{2}{3}$ *de barra. ¿Cuántas personas han participado en el reparto y cuántas barras de regaliz se han repartido?*

SOLUCIÓN:

Si participan 3 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es _____

Escribe el reparto: ☐ ☐

Si participan 6 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______

Escribe el reparto:

Si participan 9 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______

Escribe el reparto:

Si participan 12 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______

Escribe el reparto:

SESIÓN NÚMERO 18

1. Objetivos de la sesión

Evaluar semánticamente la fracción como resultado de un reparto.
Comprender que diferentes condiciones iniciales de un reparto pueden dar el mismo resultado.
Reforzar la idea de repartos equivalentes.

2. Contenidos

- Encontrar las condiciones del reparto conocido su resultado.

3. Metodología

• El profesor enuncia, de forma secuenciada, los siguientes problemas:

Ficha de Trabajo nº 20.- *Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe* $\frac{1}{2}$ *de barra. ¿Cuántas personas han participado en el reparto y cuántas barras de regaliz se han repartido?*

Ficha de Trabajo nº 21.- *Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe* $\frac{5}{4}$ *de barra. ¿Cuántas personas han participado en el reparto y cuántas barras de regaliz se han repartido?*

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.

4. Material

- Cada alumno puede utilizar material manipulativo, si lo desea, o bien resolver la tarea utilizando representaciones gráficas, o bien, representaciones simbólicas

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta por cada una de problemas, y de las que reproducimos la correspondiente a la Ficha nº 21:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 21 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Unas personas participan en el reparto igualitario de unas barras de regaliz. En el reparto cada persona recibe $\frac{5}{4}$ *de barra. ¿Cuántas personas han participado en el reparto y cuántas barras de regaliz se han repartido?*

SOLUCIÓN:

Si participan 4 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es _____ Escribe el reparto: Si participan 8 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______ Escribe el reparto: Si participan 12 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______ Escribe el reparto: Si participan 16 personas en el reparto, el número de barras de regaliz que se reparten es ______ Escribe el reparto:

SESIÓN NÚMERO 19

1. Objetivos de la sesión

Comparar repartos igualitarios.

Reforzar el significado del concepto de fracción asociado al resultado de un reparto igualitario.

2. Contenidos

- Relaciones de orden entre repartos.

3. Metodología

• El profesor enuncia, de forma secuenciada, los siguientes problemas que constituyen la Ficha nº 22:

Problema 1.- *Imagina que participas en el reparto "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto "4 barras de regaliz entre 3 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta.*

Problema 2.- *Imagina que participas en el reparto "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto "2 barras de regaliz entre 5 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta.*

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual y para que, posteriormente, los alumnos expongan sus razonamientos públicamente.

• El profesor coordinará el debate en el que los alumnos expondrán sus razonamientos. Conviene que los razonamientos basados en el reparto, sin apoyo de las técnicas del reparto, aparezcan en el aula.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 22 Fecha: _____________ ALUMNO/A:____ *Imagina que participas en el reparto de "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto de "4 barras de regaliz entre 3 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?* SOLUCIÓN: ____ porque ____

Imagina que participas en el reparto de "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto de "2 barras de regaliz entre 5 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ____

porque ____

SESIÓN NÚMERO 20

1. Objetivos de la sesión
Comparar repartos igualitarios.
Reforzar el significado del concepto de reparto.

2. Contenidos

- Relaciones de orden entre repartos.

3. Metodología.
• El profesor enuncia, de forma secuenciada, los siguientes problemas que constituyen la Ficha nº 23:

Problema 1.- *Imagina que participas en el reparto "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta.*

Problema 2.- *Imagina que participas en el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas" y en el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta.*

• El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual y para que, posteriormente, los alumnos expongan sus razonamientos públicamente.
• El profesor coordinará el debate en el que los alumnos expondrán sus razonamientos. Conviene poner de manifiesto las estrategias utilizadas por los alumnos. Si alguna de las estrategias descritas no son propuestas por los alumnos serán presentadas por el profesor:

- En particular, interesa que aparezca la estrategia que permite comparar repartos y establecer la equivalencia de repartos, y por lo tanto de fracciones, mediante razonamientos basados en el significado del reparto. Es decir, utilizar la equivalencia de repartos, igualando en ambos repartos el número de barras de regaliz o el número de personas.
- Otra estrategia que interesa que conozcan los alumnos es la de considerar las fracciones que expresan los resultados de los repartos que se desean comparar y, después, comparar las fracciones complementarias de la unidad. Esta estrategia posee un importante valor formativo, a pesar de que se trata de una estrategia es de carácter local porque no siempre las fracciones complementarias de la unidad se comparan más fácilmente.
- La estrategia que resulta más compleja es la de escenificar los repartos a comparar y utilizar la idea de "socializar repartos" o "compartir repartir". Como se trata de comparar los repartos «3 barras para 4 personas» y «2 barras para 3 personas», puede observarse que el reparto «3 barras para 4 personas» se obtiene del «2 barras para 3 personas» cuando acude una persona que lleva una barra de regaliz. Las tres personas que participan en el reparto de «2 barras para 3 personas» son "más pobres" que la persona que tiene una barra de regaliz. Si las tres personas "pobres" deciden compartir con la persona "rica" las barras se construye un reparto de «3 barras entre 4 personas» en el que las personas recibirán más cantidad de regaliz que la que recibían en el reparto de «2 barras para 3 personas»

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 23 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Imagina que participas en el reparto "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ____

porque ____

Imagina que participas en el reparto de "2 barras de regaliz entre 3 personas" y en el reparto de "2 barras de regaliz entre 5 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ____

porque ____

Tema 3: La Representación Polinómica Decimal

En las siguientes cuatro sesiones de la secuencia de enseñanza los alumnos resuelven las correspondientes tareas y encuentran la Representación Polinómica Decimal que expresa el resultado de un reparto igualitario efectuado en varias fases utilizando procedimientos manipulativos, gráficos y simbólicos.

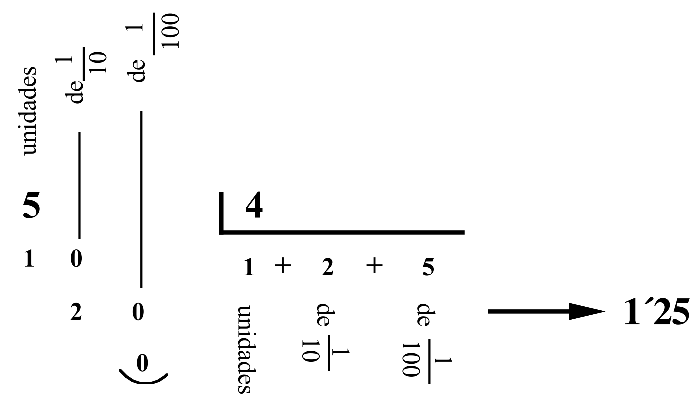
Se utiliza el modelo de aprendizaje de cociente partitivo modificando la técnica del reparto igualitario que ahora se realiza por fases, aplicando el criterio de la mayor parte que consiste en dar en cada fase del reparto la mayor cantidad posible, y fraccionando las partes sobrantes en diez partes iguales.
De esta forma el resultado del reparto aparece como una suma de partes enteras y partes alícuotas de la unidad cuyos tamaños son las sucesivas potencias de 1/10 de unidad. Esta suma recibe el nombre de representación polinómica decimal del reparto.

Ejemplificamos el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas" realizado con esta técnica:

Fase del reparto	***Acción***	***Cantidad que recibe cada persona***	***Cantidad que queda por repartir***
Primera	*Repartir*	*1 barra*	*1 barra*
Segunda	*Fraccionar en 10 partes iguales 1 barra y después repartir*	$\frac{2}{10}$ *de barra*	$\frac{2}{10}$ *de barra*
Tercera	*Fraccionar en 10 partes iguales* $\frac{2}{10}$ *de barra y después repartir*	$\frac{5}{100}$ *de barra*	*No sobra cantidad*

La representación polinómica decimal de este reparto es $1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ *barras de regaliz.*

Los alumnos simbolizan el proceso de reparto del siguiente modo:



SESIÓN NÚMERO 21

1. Objetivo de la sesión

Introducir la representación polinómica fraccionaria decimal como resultado de un reparto igualitario realizado en VARIAS FASES Y REALIZANDO FRACCIONAMIENTOS DE LAS BARRAS (O PARTES DE BARRA) EN 10 PARTES IGUALES.

2. Contenidos

- Sistema de representación polinómico decimal.

3. Metodología

• El profesor expone una nueva técnica de reparto:

Ahora, vamos a repartir barras de regaliz entre personas utilizando el siguiente método:

1º. Se reparten barras enteras, si es posible, dando a cada persona la mayor cantidad posible.

2º. Si quedan barras (o partes de barra) sin repartir se fraccionan las barras sobrantes (o partes de barra) en 10 partes iguales y se procede a realizar otra fase del reparto.

3º. Si quedan partes de barra sin repartir se vuelve a hacer lo mismo que hemos hecho en el apartado 2º, y así sucesivamente, hasta que no queden partes sobrantes.

• El profesor enuncia la tarea siguiente, que constituye la Ficha de Trabajo nº :

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto " 3 barras de regaliz entre 2 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales".
Os recuerdo que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra y que las barras se pueden fraccionar

• El profesor propone la tarea para que los alumnos los resuelvan por parejas y siguiendo las instrucciones que va exponiendo en la pizarra.

• El profesor coordinará el trabajo de los alumnos mediante tres indicaciones explícitas:

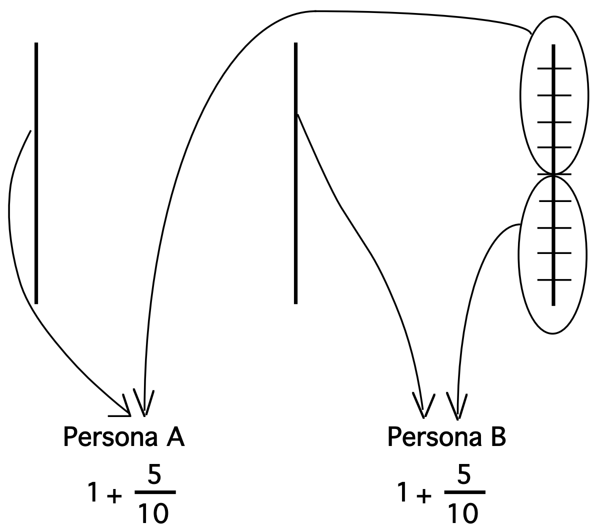
1. Indicar a los grupos de alumnos las acciones que deben realizar con el material manipulativo. Y que son:

   1.1 repartir una barra a cada una da las dos personas

   1.2 como no podemos dar más barras enteras, se fracciona la barra sobrante en DIEZ partes iguales.

   1.3 al repartir los diez trozos de longitud 1/10 de barra, cada persona recibe, en la segunda fase, 5 trozos de longitud 1/10 de barra. Y no quedan trozos sobrantes para repartir.

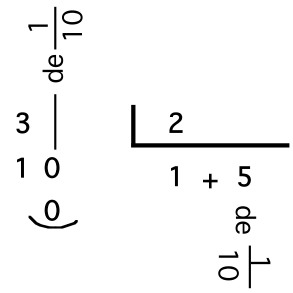
2. Representar gráficamente las acciones realizadas con el material.



3. Simbolizar el proceso del reparto, en el paso de la notación fraccionaria a la representación polinómica decimal.

Antes de introducir la representación decimal conviene mostrar que el resultado del reparto es una medida de cantidad de longitud. Así, vamos a dotar al número decimal de otro significado: el de medida de cantidades de magnitud. Este significado se introduce mediante la REPRESENTACIÓN POLINÓMICA DECIMAL asociada a la acción de reparto.

De forma simbólica:



El resultado del reparto es **1 + $\frac{5}{10}$ de barra**, que denominamos REPRESENTACIÓN POLINÓMICA DECIMAL.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 24 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:

2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

3 | 2

SESIÓN NÚMERO 22

1. Objetivo de la sesión

Introducir la representación polinómica fraccionaria decimal como resultado de un reparto igualitario realizado en VARIAS FASES Y REALIZANDO FRACCIONAMIENTOS DE LAS BARRAS (O PARTES DE BARRA) EN 10 PARTES IGUALES.

2. Contenidos

- Representación polinómica decimal.

3. Metodología.

• El profesor enuncia la tarea siguiente, que constituye la Ficha de Trabajo nº 25:

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto " 7 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

Os recuerdo que debéis realizar el reparto por fases, fraccionando en 10 partes iguales las barras (o trozos de barra) sobrantes, y que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra

• El profesor propone la tarea para que los alumnos la resuelvan de forma individual

• El profesor propone que algún alumno exponga el trabajo realizado con materiales manipulativos, de forma gráfica y, finalmente, de forma simbólica. Además, vuelve a indicar que estamos realizando un reparto por fases y ahora expresamos el resultado del reparto indicando, en cada sumando, lo que se da en cada fase del reparto.

Se propone evaluar la técnica de reparto en tres pasos:

1º Los alumnos indican verbalmente las acciones realizadas con el material manipulativo.
2º Los alumnos representar gráficamente, en la pizarra, las acciones realizadas con el material.
3º Los alumnos simbolizan el proceso del reparto. Algún alumno explicará el paso de la notación fraccionaria a la representación polinómica decimal.

4. Material

- Cañas que representan las barras de regaliz.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la siguiente tarjeta de evaluación:

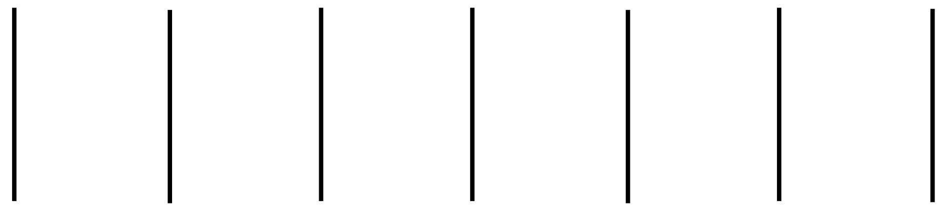
TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 25 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "7 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

7 |5

SESIÓN NÚMERO 23

1. Objetivo de la sesión
Introducir la representación polinómica fraccionaria decimal como resultado de un reparto igualitario realizado en VARIAS FASES Y REALIZANDO FRACCIONAMIENTOS DE LAS BARRAS (O PARTES DE BARRA) EN 10 PARTES IGUALES.

2. Contenidos

- Representación polinómica decimal.

3. Metodología

• El profesor enuncia la Ficha de Trabajo nº 26 que plantea las dos tareas siguientes:

Tarea 1.- *Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto " 4 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.*

Tarea 2.- *Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "3 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.*

Os recuerdo que debéis realizar el reparto por fases, fraccionando en 10 partes iguales las barras (o trozos de barra) sobrantes, y que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra

• El profesor propone la tarea para que los alumnos la resuelvan de forma individual

• El profesor propone que algún alumno exponga el trabajo realizado con materiales manipulativos, de forma gráfica y, finalmente, de forma simbólica.

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar, por cada una de las tareas una tarjeta similar a la que reproducimos de la tarea 1:

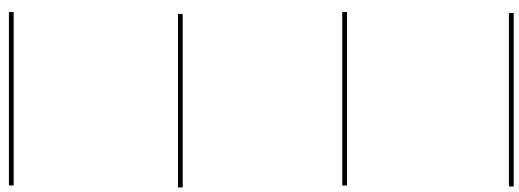
TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 26 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "4 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

4 ⌊5______

SESIÓN NÚMERO 24

1. Objetivos de la sesión
Introducir la representación polinómica fraccionaria decimal como resultado de un reparto igualitario realizado en VARIAS FASES Y REALIZANDO FRACCIONAMIENTOS DE LAS BARRAS (O PARTES DE BARRA) EN 10 PARTES IGUALES.

2. Contenidos

- Representación polinómica decimal.

3. Metodología.
• El profesor enuncia la siguiente tarea:

Ficha de Trabajo nº 27.- *Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.*

Os recuerdo que debéis realizar el reparto por fases, fraccionando en 10 partes iguales las barras (o trozos de barra) sobrantes, y que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra

• El profesor propone la tarea para que los alumnos la resuelvan de forma individual.
• El profesor propone que algún alumno exponga el trabajo realizado con materiales manipulativos, de forma gráfica y, finalmente, de forma simbólica.

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 27 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:

2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

$5 \ \underline{|\ 4 \quad}$

Tema 4: La Notación Decimal

En las siguientes cuatro sesiones de la secuencia de enseñanza los alumnos resuelven las tareas propuestas para obtener y dotar de significado al número decimal.

El número decimal se introduce desde el modelo de cociente partitivo a partir de la Representación Polinómica Decimal aplicando el criterio de economía en la representación escrita del resultado del reparto igualitario.

Se observa que la notación fraccionaria y la notación decimal tienen un mismo significado y surgen de simbolizar una misma acción, el reparto igualitario, con técnicas diferenciadas. Ambas representaciones admiten una misma evaluación semántica como cocientes partitivos, y poseen la misma estructura numérica subyacente, de la que informa la representación polinómica decimal asociada al reparto.
Por tanto, el número decimal expresa el resultado de un reparto igualitario efectuado en varias fases, y también expresa la medida de una cantidad de longitud. Para incidir en este segundo significado del número decimal proponemos representar números decimal sobre la recta numérica.

También se prevé realizar tareas de evaluación semántica del número decimal como resultado de un reparto igualitario en las que los escolares deben encontrar las condiciones iniciales de los repartos cuando conocen el número decimal que expresa el resultado del mismo. Estas tareas son exigentes porque indagan sobre los siguientes aspectos conceptuales:

1º la representación gráfica del decimal,
2º la acción de repartir, porque a partir del resultado de un reparto, expresado por un decimal, los alumnos deben reconstruir las condiciones iniciales en las que se ha realizado el mismo,
3º la fracción que expresa la misma cantidad de magnitud que viene dada por un decimal.

SESIÓN NÚMERO 25

1. Objetivos de la sesión

Introducir la notación decimal.
Conectar los significados de medida y reparto del número decimal
Evaluar semánticamente el número decimal.
Conectar la representación decimal y fraccionaria de repartos.

2. Contenidos

- Representación decimal de la cantidad de magnitud.

3. Metodología.

• El profesor hace una exposición general para introducir la notación decimal mediante un criterio de economía que sigue las pautas de nuestro sistema de numeración de números naturales.
• El profesor enuncia las siguientes tareas que comprenden la Ficha de Trabajo nº 28.

Tarea 1: El profesor pregunta a los alumnos por el significado de 1´5 barras de regaliz.
Tarea 2: El profesor entrega a cada alumno dos tiras de papel de la misma longitud que la de la barra de regaliz, una de ellas fraccionada en 10 partes iguales. Los alumnos deben construir una cantidad de longitud de 1´5 barras o tiras de papel.

• El profesor propone una serie de tareas similares para que los alumnos la resuelvan de forma individual. Las representaciones polinómicas decimales que aparecen en estas tareas son las que los alumnos han obtenido en las 5 Fichas precedentes al realizar repartos por fases con la técnica del fraccionamiento decimal.

• Después de introducir la notación decimal, el profesor plantea la resolución de la tarea siguiente que tiene por objetivo conectar los significados de medida y reparto del número decimal:

Ficha de Trabajo nº 29.- *Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño en el reparto "15 barras de regaliz entre 4 niños". Además, se pide indicar el significado de las cifras del número decimal; y dibujar sobre la recta numérica la cantidad de longitud que expresa el número decimal.*
• El profesor propone la tarea para que los alumnos la resuelvan de forma individual
• Cuando los alumnos han resuelto la tarea y cumplimentado la tarjeta de evaluación, el profesor propone que algún alumno exponga el trabajo realizado, y procede a realizar las aclaraciones oportunas.

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar, de forma consecutiva, cada una de las tarjetas que le entregará el profesor:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 28 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Cuando has realizado repartos por fases y has fraccionado los trozos que sobran en 10 partes iguales, en el reparto " 3 barras de regaliz entre 2 personas" cada persona recibe $1 + \frac{5}{10}$ *de barra, y el número decimal que indica esta cantidad es 1'5 barras.*

En el reparto " 7 barras de regaliz entre 5 personas" cada persona recibe $1 + \frac{4}{10}$ *de barra,*
y el número decimal que indica esta cantidad es ____

En el reparto " 4 barras de regaliz entre 5 personas" cada persona recibe $0 + \frac{8}{10}$ *de barra,*
y el número decimal que indica esta cantidad es ____

En el reparto " 3 barras de regaliz entre 5 personas" cada persona recibe $0 + \frac{6}{10}$ *de barra,*
y el número decimal que indica esta cantidad es ____

En el reparto " 5 barras de regaliz entre 4 personas" cada persona recibe $1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ *de barra,*
y el número decimal que indica esta cantidad es ____

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 29 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

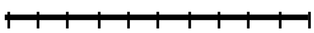
Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño en el reparto "15 barras de regaliz entre 4 niños".

SOLUCIÓN: ____

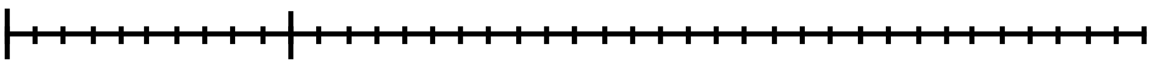
a) Indica, con símbolos, cómo haces el reparto

$$15 \quad \underline{|\ 4\quad\quad}$$

b) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal: ___________________________

c) Si la longitud de una barra de regaliz es: 

Dibuja sobre la línea, la longitud que indica la cantidad de regaliz que recibe cada niño:



SESIÓN NÚMERO 26

1. Objetivo de la sesión
Reforzar los dos significados del número decimal: como medida y como cociente partitivo.
Evaluar semánticamente el número decimal.
Conectar la representación decimal y fraccionaria de repartos.

2. Contenidos
- Representación decimal de la cantidad de magnitud.

3. Metodología
• El profesor enuncia las siguientes tareas:

Ficha de Trabajo nº 30.- *Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño en el reparto" 17 barras de regaliz entre 8 niños.*

• El profesor propone una serie de tareas en torno a la resolución de la tarea para que los alumnos las contesten, de forma individual, en la tarjeta que se les entrega. En concreto*, se pide indicar el significado de las cifras del número decimal; y dibujar sobre la recta numérica la cantidad de longitud que expresa el número decimal.*

• Seguidamente, se proponen una serie de tareas similares con los repartos que se indican:

Ficha de Trabajo nº 30BIS.- Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada persona en los siguientes repartos:

a) " 9 barras de regaliz entre 10 personas".
b) " 22 barras de regaliz entre 25 personas".
c) " 7 barras de regaliz entre 8 personas".
d) " 41 barras de regaliz entre 20 personas".
e) " 6 barras de regaliz entre 3 personas".
f) " 39 barras de regaliz entre 20 personas".
g) " 401 barras de regaliz entre 200 personas

• Las tareas formuladas en esta ultima Ficha de Trabajo que no sean resueltas por los alumnos, en el aula, se consideran trabajos para que los realicen en sus casas. Su posterior evaluación se llevará a cabo en próximas sesiones de clase.

4. Material
- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente, para cada una de las tareas. Todas poseen el mismo formato; mostramos la correspondiente a la Ficha de Trabajo nº 30:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 30 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño en el reparto "17 barras de regaliz entre 8 niños”.

SOLUCIÓN: ____

a) Indica, con símbolos, cómo haces el reparto

17 |8

b) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal: ___________________________

c) Si la longitud de una barra de regaliz es: 

Dibuja sobre la línea, la longitud que indica la cantidad de regaliz que recibe cada niño:

SESIÓN NÚMERO 27

1. Objetivos de la sesión

Reforzar los dos significados del número decimal: como medida y como cociente partitivo.
Evaluar semánticamente el número decimal.
Conectar la representación decimal y fraccionaria de repartos.
Realizar el paso de la notación decimal a la notación fraccionaria en el modelo de cociente.

2. Contenidos

- Representación decimal de la cantidad de magnitud resultante de un reparto.
- Representación fraccionaria de la cantidad de magnitud resultante de un reparto.
- Conexión entre las representaciones fraccionaria y decimal.

3. Metodología

• El profesor enuncia, sucesivamente, dos tareas correspondientes a determinar las condiciones de un reparto conocidos los resultados de los mismos: 1,5 y 2,5 barras de regaliz. La Ficha de Trabajo nº 31 indaga por las condiciones iniciales del reparto en el que los participantes reciben 1,5 barras, y por la notación fraccionaria que corresponde al numero decimal. En la Ficha de Trabajo nº 32 el problema se repite con el decimal 2,5 barras.

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

• El profesor modera el debate en el que los alumnos exponen las soluciones y las estrategias utilizadas. Además, valora la pertinencia de introducir las siguientes estrategias:

1. Sumar las fracciones e interpretar los términos de la fracción suma para obtener las condiciones iniciales del reparto: cada persona recibe 1,5 barras = $1 + \frac{5}{10} = \frac{10}{10} + \frac{5}{10} = \frac{15}{10}$ barras

Y sabemos que $\frac{15}{10}$ barras es el resultado de repartos del tipo "15 barras entre 10 personas" o "3 barras entre 2 personas"

2. Utilizando el concepto de reparto: como cada participante recibe $1 + \frac{5}{10}$ barras de regaliz, si suponemos que han participado 10 personas en el reparto la cantidad de regaliz que se han repartido es:

$$10 \text{ x } (1 + \frac{5}{10}) = 10 + 5 = 15 \text{ barras}$$

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno.

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente. Mostramos la de la Ficha nº 32:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 32 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

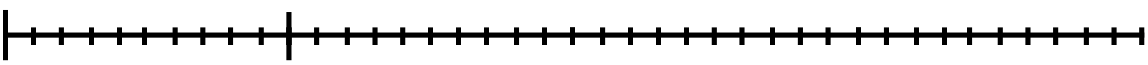
Cada una de las personas que participan en un reparto reciben 2´5 barras de regaliz.

Responde y justifica tu respuesta:

1º) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal: ____________________________

2º) Si la longitud de una barra de regaliz es: 

Dibuja sobre la línea, la longitud 2´5 barras:



3º) ¿Qué fracción expresa la cantidad de regaliz que recibe cada una de las personas que participan en el reparto?

4º) ¿Cuántas barras había antes de hacer el reparto y cuántas personas han participado en el reparto?

SESIÓN NÚMERO 28

1. Objetivos de la sesión
Reforzar los dos significados del número decimal: como medida y como cociente partitivo.
Evaluar semánticamente el número decimal.
Conectar la representación decimal y fraccionaria de repartos.
Realizar el paso de la notación decimal a la notación fraccionaria en el modelo de cociente.
Poner de manifiesto la equivalencia entre números decimales cuya cifra de menor orden es cero

2. Contenidos
- Representación decimal de la cantidad de magnitud resultante de un reparto.
- Representación fraccionaria de la cantidad de magnitud resultante de un reparto.
- Conexión entre las representaciones fraccionaria y decimal.

3. Metodología
• El profesor enuncia, sucesivamente, dos tareas correspondientes a determinar las condiciones de un reparto conocidos los resultados de los mismos: 0,75 y 2,50 barras de regaliz. La Ficha de Trabajo nº 33 indaga por las condiciones iniciales del reparto en el que los participantes reciben 0´75 barras, y por la notación fraccionaria que corresponde al numero decimal. En la Ficha de Trabajo nº 34 el problema se repite con el decimal 2´50 barras.
• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor modera el debate en el que los alumnos exponen las soluciones y las estrategias utilizadas.

4. Material
- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta siguiente, para cada una de las tareas, que son similares a las que figura en la tarjeta de la Ficha de Trabajo nº 33:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 33 Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

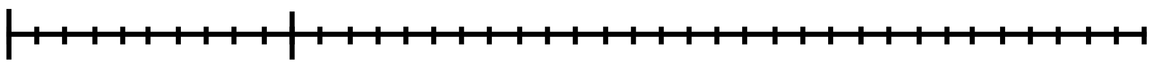
Cada una de las personas que participan en un reparto reciben 0´75 barras de regaliz.

Responde y justifica tu respuesta:

1º) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal: ___________________________

2º) Si la longitud de una barra de regaliz es: 

Dibuja sobre la línea, la longitud 0´75 barras:



3º) ¿Qué fracción expresa la cantidad de regaliz que recibe cada una de las personas que participan en el reparto?

4º) ¿Cuántas barras había antes de hacer el reparto y cuántas personas han participado en el reparto?

Tema 5: Conexión entre la notación decimal y la notación fraccionaria

En las dos sesiones de la secuencia de enseñanza (nº 29 y nº 30) los alumnos resuelven las correspondientes tareas con la finalidad de establecer conexiones entre la representación decimal y fraccionaria.

Sabemos que la notación fraccionaria y la notación decimal tienen un mismo significado y surgen de simbolizar una misma acción, el reparto igualitario, con técnicas diferenciadas. Ambas representaciones admiten una misma evaluación semántica como cocientes partitivos, y poseen la misma estructura numérica subyacente, de la que informa la representación polinómica decimal asociada al reparto.

Ahora se trata de establecer la conexión entre el número decimal y la fracción en contextos de medida que son diferentes de los de reparto. El nexo de unión entre ambas representaciones es la Representación Polinómica Decimal.

SESIÓN NÚMERO 29

1. Objetivos de la sesión

Evaluar semánticamente el número decimal desde los modelos de medida.
Conectar la representación decimal y fraccionaria desde los modelos de medida.
Realizar el paso de la notación decimal a la notación fraccionaria desde modelos de medida.

2. Contenidos

- El número decimal como resultado de la medida de cantidades de magnitud.

3. Metodología

• El profesor hace un breve exposición pública insistiendo en el significado de las notaciones fraccionaria y decimal: los números decimales expresan el resultado de un reparto. Los números decimales también expresan la medida de cantidades de magnitud. Así, cuando decimos que nuestra temperatura corporal es 36,5 grados centígrados, estamos afirmando que tenemos 36 grados y $\frac{5}{10}$ de grado. Esto quiere decir que si fraccionamos el grado centígrado en 10 partes iguales la temperatura es 36 grados y, además, 5 décimas de grado. Vamos a realizar algunas tareas para ejercitar el paso de número decimal a fracción en situaciones de medida de cantidades, diferentes de las de reparto

• El profesor enuncia, de forma secuenciada, estas dos tareas que constituyen la Ficha de Trabajo nº 35:

Tarea 1.- *La capacidad de una botella de agua de 1´5 litros. Expresa con una fracción la capacidad de la botella.*

Tarea 2.- *El contenido de botella de fertilizante pesa 1´2 Kgrs. Expresa con una fracción el peso del contenido de la botella.*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

• El profesor velará porque al menos aparezcan las siguientes estrategias de resolución:

1. Sumar las fracciones, dado que el resultado del reparto viene expresado por una fracción.

2. Utilizar el concepto de reparto: como cada participante recibe 1+ $\frac{5}{10}$ barras de regaliz, si suponemos que han participado 10 personas en el reparto la cantidad de regaliz que se han repartido es:

$$10 \text{ x } (1+ \frac{5}{10}) = 10 + 5 = 15 \text{ barras.}$$

Y el reparto de 15 barras para 10 personas se expresa por la fracción $\frac{15}{10}$ barras.

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 35 Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

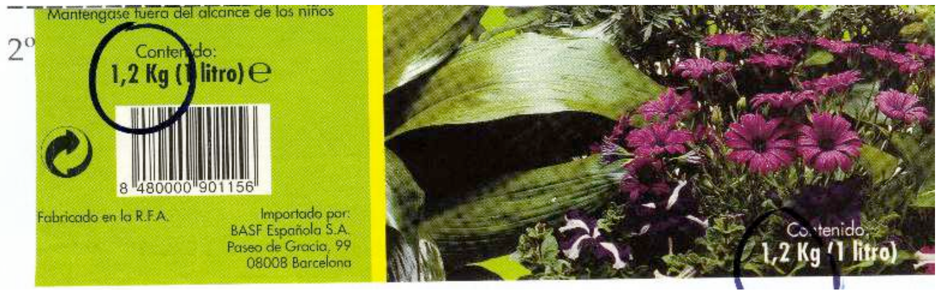
Expresa con una fracción las cantidades de magnitud que están escritas con números decimales.

1º.

SOLUCIÓN: $\boxed{}$ de ____________

*He obtenido la fracción del siguiente modo:*____

2º



SOLUCIÓN: $\boxed{}$ de ____________

He obtenido la fracción del siguiente modo: ____

SESIÓN NÚMERO 30

1. Objetivos de la sesión

Evaluar semánticamente el número decimal desde modelos de medida.
Conectar la representación decimal y fraccionaria desde modelos de medida.
Realizar el paso de la notación decimal a la notación fraccionaria desde modelos de medida..

2. Contenidos

- El número decimal como resultado de la medida de cantidades de magnitud.

3. Metodología.

• El profesor enuncia, de forma secuenciada, estas dos tareas que constituyen la Ficha de Trabajo nº 36:

Tarea 1.- *La capacidad de un botellín de zumo es 0,25 litros. Expresa con una fracción la capacidad de este botellín.*

Tarea 2.- *En la carnicería has comprado 0,375 Kgrs. de carne picada. Expresa con una fracción el peso de carne picada que has comprado.*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

4. Material

- No se entrega material salvo para algún alumno que lo solicite.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 36 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

1º. La capacidad de una botella de batido es 0´25 litros. Expresa con una fracción (la más simplificada posible) la capacidad de esta botella.

SOLUCIÓN: $\boxed{}$ de ____________

*He obtenido la fracción del siguiente modo:*____

2º En la carnicería has comprado 0´375 Kgrs. de carne picada. Expresa con una fracción (la más simplificada posible) el peso de carne picada que has comprado.

SOLUCIÓN: $\boxed{}$ de ____________

*He obtenido la fracción del siguiente modo:*____

Tema 6: Relación de orden entre números decimales
En las sesiones de la secuencia de enseñanza (nº 31 y nº 32) los alumnos resuelven las correspondientes tareas con la finalidad de ordenar cantidades de magnitud expresadas con números decimales y, además, de conjeturar reglas que permitan ordenar números decimales.

SESIÓN NÚMERO 31

1. Objetivos de la sesión
Ordenar cantidades de magnitud expresadas con números decimales

2. Contenidos
- Relaciones de orden entre notaciones decimales.

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea siguiente que constituye la Ficha de Trabajo nº 37:
Ordena de menor a mayor, la estatura de los siguientes niños:

Manuel	*1,51*	*metros*
Oscar	*1,495*	*metros*
Luis	*1,510*	*metros*
Enrique	*1,5*	*metros*
Antonio	*1,59*	*metros*
César	*1,509*	*metros*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor revisará públicamente las soluciones que van exponiendo los alumnos, así como las estrategias puestas en juego. Velará porque aparezca la estrategia consistente en ir comparando, en los diversos números, las unidades de mayor orden. Por ello, se comparan las cifras que ocupan los mismos lugares en cada número, empezando por las cifras que ocupan los lugares de mayor orden de magnitud.
• Conviene que el profesor anime a los alumnos para que enuncien la regla de comparación de números decimales.

4. Material
- Cañas de longitud la unidad.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 37 Fecha: _____________
ALUMNO/A:____

Ordena de menor a mayor, la estatura de los siguientes niños:

Manuel	*1´6*	*metros*
Oscar	*1´495*	*metros*
Luís	*1´510*	*metros*
Enrique	*1´5*	*metros*
Antonio	*1´51*	*metros*
César	*1´59*	*metros*

SOLUCIÓN:
El niño de menor estatura es: ______________________________
____
____
____
____
El niño de mayor estatura es: ______________________________

Inventa una regla que sirva para ordenar números decimales: ______________________________

SESIÓN NÚMERO 32

1. Objetivos de la sesión
Ordenar cantidades de magnitud expresadas con números decimales.
Conjeturar la regla para ordenar números decimales.

2. Contenidos
- Relaciones de orden entre notaciones decimales.

3. Metodología
• El profesor enuncia la tarea siguiente que constituye la Ficha de Trabajo nº 38:
Ordena de menor a mayor los siguientes números decimales:
10,21 10,3 1,031 10,30 100,01 0,975

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor revisará públicamente las soluciones que van exponiendo los alumnos, así como las estrategias puestas en juego.
• Conviene que el profesor anime a los alumnos para que enuncien la regla de comparación de números decimales.

4. Material
- Cañas de longitud la unidad.
- Tijeras.
- Plantilla para facilitar el fraccionamiento de las cañas en partes iguales..

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 38 Fecha: ______________
ALUMNO/A:____
Ordena de menor a mayor, los siguientes números decimales:
10,21 10,3 1,031 10,30 100,01 0,975

SOLUCIÓN:
El número decimal menor es: ________________________________

El número decimal mayor es: ________________________________

Inventa una regla que sirva para ordenar números decimales: ______________________________

Actividad complementaria: juego de adivinar un número decimal

Funcionamiento del juego
Los alumnos se dividen en grupos de cuatro. Se sortea entre los 6 grupos el orden de intervención. El profesor escribe un número decimal en un folio de manera que los alumnos no puedan ver el decimal escrito. Se trata de que los grupos adivinen el número decimal. Cuando los alumnos de un grupo intenten adivinar el número el profesor sólo les dirá si el número escrito es mayor, menor o igual que el numero "escondido".
Un representante de cada grupo situará sobre la recta numérica el número que, según ellos, es el "escondido".
Otro representante del grupo sitúa los números elegidos sobre la recta numérica que está dibujada en la tarjeta de evaluación que les entrega el profesor.
Gana el grupo que adivine el número decimal.

Actuaciones para desarrollar el juego

1) Para no alargar las partidas el profesor puede indicar, al comienzo de la partida, que el decimal esta comprendido entre determinados números naturales. Por ejemplo, les puede decir que el decimal está entre 0 y 1.

2) Interesa que el número "escondido" tenga al menos dos cifras decimales. De esta manera, si los alumnos empiezan a probar con números con una sola cifra decimal les aparecerá una situación conflictiva que juzgamos interesante por cuanto introduce la densidad de los números decimales. Veamos un ejemplo. Si el número desconocido es 0,27 y los alumnos van probando con números de una sola cifra decimal, es previsible que tengan el número acotado entre 0,2 y 0,3; y sin embargo, no hayan atrapado al decimal.

3) El profesor valorará las partidas que son necesarias realizar. Durante la primera partida observará las estrategias que utilizan los grupos para llevar el control de las diferentes cotas que encuadran al decimal "escondido". Y valorará si propone a los alumnos, antes de comenzar la segunda partida, la utilización de la recta numérica.

Objetivos

Ordenar números decimales.

Comprender que entre dos decimales siempre hay otro número decimal.

Situar números decimales sobre la recta numérica.

Metodología

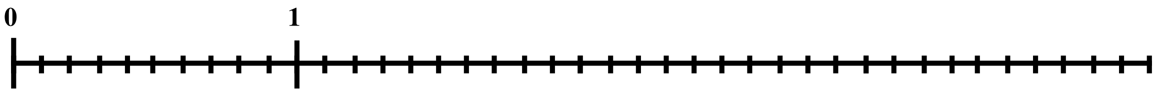
La tarea se presenta a todo el grupo en general. Los alumnos participan por equipos en el juego y escriben las sucesivas acotaciones en un folio que recogerá el profesor al finalizar la sesión. Tiempo dedicado al juego no está computado en la temporalización de la Propuesta Didáctica.

Cuando comienza la partida el profesor entrega un modelo para que los alumnos utilicen la recta numérica:

TARJETA DE EVALUACIÓN. **Juego de adivinar un número decimal.**

ALUMNOS: ____

Partida nº _____



Tema 7: Operaciones entre números decimales

En las nueve sesiones siguientes de la secuencia de enseñanza (nº 33 y nº 41) los alumnos resuelven las tareas correspondientes para estudiar el significado y los procedimientos de cálculo de las operaciones suma y resta de números decimales, y de la multiplicación y división de un número decimal por un número natural.

La enseñanza se centra en dos aspectos clave: el significado de las operaciones y la justificación de los algoritmos de cálculo de dichas operaciones.

El primer aspecto se trabaja a partir de la resolución de situaciones problemáticas en contextos de medida de cantidades de magnitud.

En cuanto al segundo aspecto, desde una perspectiva formativa que va más lejos de la función instrumental que tienen los algoritmos de cálculo, proponemos la enseñanza de los procedimientos de cálculo desde la comprensión. De esta forma, la enseñanza de los algoritmos de cálculo refuerza la comprensión de las estructuras numéricas y del sistema de numeración. Ejemplificamos justificar el método de trabajo que proponemos con el cálculo de la multiplicación 2´75x8 que resuelve el problema enunciado en la Ficha nº 45. Antes que los alumnos utilicen el procedimiento de "situar la coma":

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 7 & 5 \\ & & \text{x} & 8 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{y al situar la coma 22´00 metros}$$

Proponemos que procedan del siguiente modo:

$$2´75 = 2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\begin{array}{r} 2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} \\ x \quad 8 \\ \hline 16 \;+\; \frac{56}{10} + \frac{40}{100} \end{array}$$

Como $\frac{56}{10} = 5 + \frac{6}{10}$ y $\frac{40}{100} = \frac{4}{10}$

Y además, $\frac{6}{10} + \frac{4}{10} = 1$, entonces el resultado es 16 + 5 + 1 = 22 metros

---

SESIÓN NÚMERO 33

1. Objetivos de la sesión

Introducir el significado de la suma de números decimales.
Conjeturar y justificar el procedimientos de cálculo de la suma de decimales.

2. Contenidos

- Significado y cálculo de la suma de decimales.

3. Metodología

• El profesor enuncia, de forma secuenciada los problemas siguientes:

Ficha de Trabajo nº 39.- *Un albañil ha colocado el rodapié de una habitación. Por la mañana ha colocado una longitud de 6´5 m. de rodapié y por la tarde coloca 3´8 m, ¿cuántos metros de rodapié ha puesto?*

Ficha de Trabajo nº 40.- *Un grupo de amigas quedan para caminar dos veces al día. Por la mañana andan 4,5 Km. y por la tarde 3,75 Km. ¿Cuantos kilómetros caminan cada día?*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• Sobre el significado de la operación suma de decimales en el modelo longitud:

1. Para resolver este problema no es necesario identificar la operación suma de decimales: basta con volver a medir la longitud que se obtiene al colocar la longitud de un rodapié a continuación del otro rodapié. Como las cantidades son poco manejables los alumnos podrían optar por sumar, mentalmente, los metros "enteros" y escenificar con el material las longitudes menores que el metro. En este caso, no queda claro que los alumnos utilicen la operación suma para resolver la tarea.
2. Cuando los alumnos interpreten el problema como de suma de decimales, el profesor pregunta a la clase: ¿Tiene alguna ventaja reconocer este problema como de suma de decimales? La respuesta es afirmativa, dado que el proceso de resolución del problema es mucho más corto: no se necesita volver a medir, ni utilizar materiales. El proceso de resolución es mental, si se desea con apoyos gráficos, de modo que se conceptualiza la longitud del *rodapié suma* como la cantidad de longitud que se obtiene al unir, alineados y uno a continuación del otro, las cantidades de longitud de los rodapiés iniciales.
3. El cálculo de la operación se justifica con el significado de la suma de fracciones decimales: si tengo un rodapié que mide 6 m. y $\frac{5}{10}$ de m. y le añado otro que mide 3 m. y $\frac{8}{10}$ de m, es como si tuviera un sólo rodapié de medida $9 + \frac{5}{10} + \frac{8}{10}$ metros.

4. Material

- Los alumnos dispondrán, si lo solicitan al profesor, de trozos caña de longitud 1/10 y 1/100 de metro.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente por cada uno de los problemas propuestos:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 39 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Un albañil ha colocado el rodapié de una habitación. Por la mañana ha colocado una longitud de 6´5 m. de rodapié y por la tarde coloca 3´8 m, ¿cuántos metros de rodapié ha puesto?

SOLUCIÓN: La longitud del rodapié que ha colocado es __________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema ______________________________

SESIÓN NÚMERO 34

1. Objetivos de la sesión

Introducir el significado de la suma y resta de números decimales.
Conjeturar y justificar el procedimientos de cálculo de la resta de decimales.

2. Contenidos

- Significado y cálculo de la suma y resta de números decimales.

3. Metodología
• El profesor enuncia el problemas siguiente que constituye la Ficha de Trabajo nº 41:

Un carnicero vende una pieza de ternasco de 20 Kgrs. A los tres primeros clientes les vende 3,75 Kgrs.; 5,8 Kgrs. y 6,5 Kgrs. ¿Cuántos Kgrs. de la pieza de ternasco le queda por vender?

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor expondrá los diferentes procedimientos de cálculo y velará porque aparezca en el aula la justificación del algoritmo tradicional de la resta de decimales

4. Material
- Los alumnos dispondrán, si lo solicitan al profesor, de trozos caña de longitud 1/10 y 1/100 de metro.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 41 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Un carnicero vende una pieza de ternasco de 20 Kgrs. A los tres primeros clientes les vende 3,75 Kgrs.; 5,8 Kgrs. y 6,5 Kgrs. ¿Cuántos Kgrs. de la pieza de ternasco le queda por vender?

SOLUCIÓN: Le queda para vender ______________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema ______________________________

SESIÓN NÚMERO 35

1. Objetivos de la sesión
Introducir el significado de la suma y resta de números decimales.
Conjeturar y justificar el procedimientos de cálculo de la resta de decimales.

2. Contenidos
- Significado y cálculo de la suma y resta de números decimales.

3. Metodología
• El profesor enuncia el problema siguiente que constituye la Ficha de Trabajo nº 42:

Un carpintero debe hacer un soporte para un canalón de un tejado que tiene 3,2m. de largo. Dispone de planchas de 1m., 1,57m., 1,1m., 1,33m. y 0,3m. Ha subido al tejado dos planchas: una de 1,57m. y otra de 0,3m; y se da cuenta de que no es suficiente para sostener el canalón de 3,2m. ¿Qué plancha subir ahora?

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• Para dotar de significado de la operación suma y resta de decimales y para conjeturar y justificar el algoritmo tradicional de la resta de decimales

4. Material
- Los alumnos dispondrán, si lo solicitan al profesor, de trozos caña de longitud 1/10 y 1/100 de metro.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 42 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Un carpintero debe hacer un soporte para un canalón de un tejado que tiene 4´1m. de largo. Dispone de planchas de 0´5m., 1´55m., 1´2m., 1´85m. y 0´7m. Ha subido al tejado dos planchas: una de 1´55m. y otra de 0´7m; y se da cuenta de que no es suficiente para sostener el canalón de 4´1m.

a) ¿Qué plancha deberá subir ahora?

b)¿Puede hacer el soporte utilizando otras planchas?

SOLUCIÓN: La plancha que debe subir al tejado mide _______________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material (cañas)	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ____

Indica cómo has resuelto el problema ____

SESIÓN NÚMERO 36

1. Objetivos de la sesión
Introducir el significado del producto de un decimal por las potencias de 10.
Conjeturar y ejercitar los procedimientos de cálculo para multiplicar un decimal por 10, 100 y 1000.

2. Contenidos
- Producto de un decimal por las potencias de 10.

3. Metodología
• El profesor enuncia, de forma secuencial, los problemas siguientes:

Ficha de Trabajo nº 43.- *Imagina que eres una de las ocho personas que participa en el reparto de 3 barras de regaliz para 8 personas.*

1ª pregunta.- Si participas 10 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.
2ª pregunta.- Si participas 100 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.
3ª pregunta.- Si participas 1000 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

Ficha de Trabajo nº 44.- *Imagina que eres una de las 20 personas que participa en el reparto de 21 barras de regaliz entre 21 personas. Y que participas 10 veces en el mismo reparto. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.*
Completa la siguiente tabla:

	Multiplicado por 10	*Multiplicado por 100*	*Multiplicado por 1000*
Número decimal resultado del reparto 21 barras entre 20 personas:			

e inventa una regla para multiplicar un decimal por 10, 100 y 1000.

Os aconsejo que no utilicéis material, pero si no sabéis resolver la tarea de otro modo podéis solicitarlo.
• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

• El profesor presentará las soluciones aportadas por los alumnos. Finalmente, establecerá el significado de la operación: la medida de una cantidad de magnitud (resultado de un reparto) que se construye al reiterar la cantidad de magnitud de partida tantas veces como indica el factor multiplicador. El cálculo de la operación se justifica por dos vías:

1º. Realizando el reparto inicial y después reiterar 10 veces el resultado del reparto expresado por la suma de fracciones decimales. Es decir: $10 \times (\frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}) = 3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} = 3'75$
Aunque esta presentación no se corresponde con la del algoritmo tradicional, sirve para prepararlo y justificarlo.

2º. Antes de realizar el reparto inicial considerar qué ocurre si las personas participan 10 veces en el mismo reparto. En este caso, daría lo mismo que realizar el reparto de 30 barras para 8 personas. Esta segunda estrategia de resolución es poco probable que sea utilizada por los alumnos.

Para que los alumnos conjeturen la regla de la multiplicación por potencias de 10 conviene que el profesor escriba al finalizar la evaluación de la tarea una tabla del tipo:

	Multiplicado por 10	Multiplicado por 100	Multiplicado por 1000
0´375	**3´75**	**37´5**	**375**

4. Material

- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.
- Se pretende que los alumnos abandonen las estrategias basadas en la manipulación de materiales y vayan utilizando razonamientos que modelizan las operaciones aritméticas

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente por cada uno de los problemas propuestos. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de Trabajo nº 43:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 43 Fecha: _____________
ALUMNO/A:____

Imagina que eres una de las ocho personas que participa en el reparto de 3 barras de regaliz entre 8 personas.

Primera pregunta:

Si participas 10 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ______________________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________

Segunda pregunta:

Si participas 100 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ______________________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________

Tercera pregunta:

Si participas 1000 veces en el mismo reparto expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ______________________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________

Cuarta pregunta:

Completa la siguiente tabla:

	x 10	x 100	x 1000
Número decimal resultado del reparto 3 barras entre 8 personas			

Inventa una regla para multiplicar un decimal por 10, 100 y 1000: ______________________________

SESIÓN NÚMERO 37

1. Objetivos de la sesión
Introducir el significado del producto de un decimal por un número natural.
Conjeturar y ejercitar el algoritmo de cálculo de esta operación.

2. Contenidos
- Significado y cálculo del producto de un decimal por las potencias de 10.

3. Metodología.
• El profesor enuncia el problema siguiente, que constituye la Ficha de Trabajo nº 45:
La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas.
Os aconsejo que no utilicéis material, pero si no sabéis resolver la tarea de otro modo podéis solicitarlo.
• El profesor debe dejar claro que los números decimales expresan también medidas de magnitudes que no proceden, necesariamente, de acciones de reparto.
• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor presentará las soluciones aportadas por los alumnos. Finalmente, establecerá el significado de la operación: la medida de una cantidad de magnitud que se construye al reiterar la cantidad de magnitud de partida tantas veces como indica el factor multiplicador.
El cálculo de la operación se justifica con el significado de la suma de fracciones decimales: como la altura de cada planta es de 2´75 m. debemos reiterar 8 veces la cantidad de longitud expresada por la suma de fracciones decimales:

$$8 \text{ x } (2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}) = 16 + 8 \text{ x } \frac{7}{10} + 8 \text{ x } \frac{5}{100} = 16 + 5 + \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = 21 + \frac{10}{10} = 22 \text{ metros}$$

El profesor no propone el algoritmo de cálculo escrito arriba, más bien propone reiterar las centésimas, décimas y unidades del decimal 2,75 por separado, como paso previo a la introducción del algoritmo tradicional. Así:
8 x 5 centésimas = 40 centésimas = 4 décimas;; 8 x 7 décimas = 56 décimas = 5 unidades y 6 décimas
8 x 2 unidades = 16 unidades
En total, 21 unidades y 10 décimas = 22 unidades.

4. Material
- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.
- Se pretende que los alumnos abandonen las estrategias basadas en la manipulación de materiales y vayan utilizando razonamientos que modelizan las operaciones aritméticas

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 45 Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas consecutivas es de 2´75 metros?

SOLUCIÓN: La altura del edificio es ________________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ________________________________

Indica cómo has resuelto el problema ________________________________

SESIÓN NÚMERO 38

1. Objetivos de la sesión
Introducir el significado del producto de un decimal por un número natural.
Conjeturar y ejercitar el algoritmo de cálculo de esta operación.

2. Contenidos
- Significado y cálculo del producto de un decimal por un número natural.

3. Metodología
• El profesor enuncia los problemas siguientes que constituyen la Ficha de Trabajo nº 46:
Problema 1.- *La mejor marca olímpica de los 50 Km. marcha está próxima a 3,5 horas. ¿Cuántos minutos hay en 3'5 horas?*
Problema 2.- *He comprado 500 sobres. Cada sobre cuesta 3´75 ptas. ¿Cuánto he gastado*
Os aconsejo que no utilicéis material, pero si no sabéis resolver la tarea de otro modo podéis solicitarlo.
• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.
• El profesor presentará las soluciones aportadas por los alumnos y observará, en particular, la estrategias de resolución utilizadas por los alumnos.
Para realizar el cálculo de la operación multiplicación de un decimal por un natural se propone reiterar las centésimas, décimas y unidades del decimal por separado, como paso previo a la introducción del algoritmo tradicional.

4. Material
- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.

5. Impresos para el alumno.
Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 46 Fecha: ______________
ALUMNO/A:____

La mejor marca olímpica de los 50 Km. marcha está próxima a 3´5 horas. ¿Cuántos minutos hay en 3´5 horas?

SOLUCIÓN: En 3´5 horas hay ______________________________________

*Indica cómo has resuelto el problema:*______________________________________

He comprado 500 sobres. Cada sobre cuesta 3´75 ptas. ¿Cuánto he gastado?

SOLUCIÓN: He gastado ______________________________________

*Indica cómo has resuelto el problema:*______________________________________

SESIÓN NÚMERO 39

1. Objetivos de la sesión
Introducir el significado de la división de un decimal por un número natural.
Conjeturar y ejercitar el algoritmo de cálculo de esta operación.

2. Contenidos
- Significado y cálculo de la división de un decimal por un número natural.

3. Metodología.
• El profesor enuncia los problemas siguientes que constituyen la Ficha de Trabajo nº 47:
Problema 1.- *Un carpintero corta un listón de 1´5 metros de longitud en cuatro partes iguales. ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes iguales?*

Problema 2.- *Con 0´375 Kgrs. de carne picada haces 5 hamburguesas iguales. ¿Cuánto pesa cada una de las cinco hamburguesas?*

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

• El significado de la división de una cantidad de magnitud entre un número natural se conceptúa como la cantidad de magnitud que se obtiene al fraccionar en partes iguales, tantas como indique el número natural, la cantidad de magnitud del objeto inicial.

Para potenciar en los alumnos la utilización de estrategias más avanzadas que la de la utilización de material manipulativo, el profesor comentará con el grupo clase todas las estrategias utilizadas por los alumnos.

No se espera que los alumnos utilicen la notación fraccionaria para resolver la ficha. En tal caso, estos alumnos escribirán $\frac{3}{2} : 4$ para resolver la el problema nº 1.

Se espera que la mayoría de alumnos opten por utilizar el algoritmo "usual" de la división, que fue trabajado cuando se introdujo el número decimal con significado de reparto

4. Material

- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 47 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Un carpintero corta un listón de 1´5 metros de longitud en cuatro partes iguales. ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes iguales?

SOLUCIÓN: La longitud de una de las partes del listón es ________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Indica cómo has resuelto el problema ____________________________________

Con 0´375 Kgrs. de carne picada haces 5 hamburguesas iguales. ¿Cuánto pesa cada una de las cinco hamburguesas?

SOLUCIÓN: Cada hamburguesa pesa ________________________

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Indica cómo has resuelto el problema ____________________________________

SESIÓN NÚMERO 40

1. Objetivos de la sesión

Profundizar en el significado de la división de un número decimal por las potencias de 10.

Conjeturar el algoritmo de cálculo de la división de un número decimal por las potencias de 10.

2. Contenidos

- Significado y cálculo de la división de un decimal por las potencias de 10.

3. Metodología.

• El profesor enuncia los problemas siguientes que constituyen la Ficha de Trabajo nº 48:

Problema 1: Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 10 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes

Problema 2: Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 100 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes

Problema 3: Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 1000 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes

Problema 4: Completa la siguiente tabla:

	: 10	*: 100*	*: 1000*
125			

e inventa una regla para dividir un decimal por 10, 100 y 1000

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

4. Material

- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.

5. Impresos para el alumno

Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación siguiente:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 48 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Primera pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 10 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____________________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ____________________________________

Segunda pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 100 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____________________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ____________________________________

Tercera pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 1000 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____________________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ____________________________________

Cuarta pregunta:

Completa la siguiente tabla:

	: 10	: 100	: 1000
125			

Inventa una regla para dividir un decimal por 10, 100 y 1000: ______________________________

SESIÓN NÚMERO 41

1. Objetivos de la sesión
Introducir la división de dos números decimales desde el significado agrupamiento.
Conjeturar las modificaciones que deben sufrir el dividendo y el divisor para transformar la división de decimales en una división de números naturales.

2. Contenidos

- Significado y cálculo de la división de dos números decimales.

3. Metodología

• El profesor enuncia los problemas siguientes que constituyen la Ficha de Trabajo nº 49:

Problema 1.- *Quieres trocear un listón de madera de 1,5 m. para obtener el mayor número posible de listones de longitud 0,25 m. ¿Cuántos listones puedes obtener?*

Problema 2.- *Deseas embotellar 50 litros de mosto en botellas de 1,5 litros ¿Cuantas botellas puedes llenar?*

• Una vez finalizados estos problemas el profesor enuncia nuevos problemas que constituyen la Ficha de Trabajo nº 50:

Problema 1: El médico le ha dicho a mi abuela que tiene que beber cada día 4 vasos de agua. La capacidad del vaso es 0,3 litros. ¿Cuántos litros de agua debe beber cada día?

Problema 2: Las cajas de agua mineral embotellada suelen contener 12 botellas de 1,5 litros. ¿Cuántos litros de agua hay en una caja?

Problema 3: Si compro una caja de agua embotellada para que mi abuela beba la cantidad de agua que le recomienda el médico, ¿cuantos días durará la caja?

• Los alumnos resuelven las tareas de forma individual.

• La división aparece con la idea de agrupamiento, en el que las magnitudes que actúan como divisor y dividendo son del mismo tipo y están expresadas con respecto a la misma unidad de medida.

El profesor mostrará a los alumnos que el significado de la división no se corresponde con un reparto. La clasificación de la tipología de los problemas de multiplicación / división se hará en función de las magnitudes implicadas en los datos del problema.

Para que los alumnos puedan utilizar el algoritmo usual de la división se necesita suprimir las cifras decimales del divisor. Para ello se recurre al siguiente razonamiento basado en la proporcionalidad: el número de listones que se obtienen no varía si tenemos un listón de madera 100 veces mayor pero la longitud de cada trozo de listón también es 100 veces mayor.

Esta estrategia justifica y prepara la introducción de la técnica usual del algoritmo de la división que consiste en suprimir las partes decimales del dividendo y/o del divisor. Sin embargo, existen otras estrategias, de carácter más local, como recurrir a la resta reiterada o a la multiplicación; y que algunos alumnos pueden utilizar en la resolución de la Ficha nº 49. Así: 0,25 x 4 = 1;; 0,25 x 2 = 0,5 y sumando: 0,25 x 6 = 1,5
O bien, quitando uno a uno cada trozo del listón: 1,5 - 0,25 = 1,25;; 1,25 - 0,25 = 1;; 1 - 0,25 = 0,75
0,75 - 0,25 = 0,5;; 0,5 - 0,25 = 0,25;; 0,25 - 0,25 = 0

4. Material

- El profesor aconseja no utilizar material para resolver la tarea.
- No obstante, tendrá preparado cañas de 1m. de longitud para dárselas a quien lo solicite.

5. Impresos para el alumno
Cada alumno debe cumplimentar una tarjeta como la siguiente por cada una de las series de problemas que le entrega el profesor. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de Trabajo nº 50:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 50 Fecha: _____________
ALUMNO/A:____

Primera pregunta:
El médico le ha dicho a mi abuela que tiene que beber cada día 4 vasos de agua. La capacidad del vaso es 0´3 litros. ¿Cuántos litros de agua debe beber cada día?

SOLUCIÓN: Cada día debe beber ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: ______________________________

Segunda pregunta:

La caja de agua mineral embotellada contiene 12 botellas de 1´5 litros. ¿Cuántos litros de agua hay en una caja?

SOLUCIÓN: En cada caja hay ____

Indica cómo has resuelto el problema: ____

Tercera pregunta:

Si compro una caja de agua embotellada y solo la utilizo para que mi abuela beba la cantidad de agua que le dice el médico, ¿cuántos días durará la caja?

SOLUCIÓN: La caja durará ____

Indica cómo has resuelto el problema: ____

Modificación de la Propuesta Didáctica de 5º curso de Educación Primaria en la Segunda Etapa

La Propuesta Didáctica para quinto curso de Educación Primaria, en la Segunda Etapa, se articula en 41 sesiones de aula que se muestran, de forma secuencial, en el mismo orden en que se han implementado:

	Sesiones de enseñanza en 5º curso de Educación Primaria
Sesiones 1 a 3	Tema 0.- Tareas previas para profundizar en el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente. Se resuelven las Fichas de Trabajo previas nº 1 a nº 6
Sesiones 4 a 14	Tema 1.- Operaciones con fracciones desde el significado de medida. Significado y cálculo de la suma, resta de fracciones; y multiplicación y división por un número natural. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 1 a nº 15
Sesiones 15 a 21	Tema 2.- La fracción con significado de cociente partitivo. La fracción como resultado de un reparto realizado en una sola fase. Búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto y comparación de repartos realizados en una sola fase. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 16 a nº 25
Sesiones 22 a 25	Tema 3.- La fracción con significado de cociente partitivo. La representación polinómica decimal como resultado de un reparto realizado en varias fases. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 26 a nº 30
Sesiones 26 a 29	Tema 4.- La notación decimal. El número decimal como resultado de un reparto igualitario. El número decimal como resultado de la medida de cantidades de magnitud. Representación gráfica en la recta numérica. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 31 a nº 38
Sesiones 30 y 31	Tema 5. Conexión entre la notación decimal y la notación fraccionaria. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 39 y nº 40
Sesiones 32 y 33	Tema 6. Relación de orden entre números decimales Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 41 y nº 42
Sesiones 34 a 41	Tema 7.- Operaciones con números decimales. Significado y cálculo de la suma, resta de números decimales; y multiplicación y división por un número natural. Se resuelven las Fichas de Trabajo nº 43 a nº 53

Tema 0: Repaso del concepto de equivalencia de fracciones

Se dedican las tres primeras sesiones de la secuencia de enseñanza a profundizar en el significado y operatividad del concepto de fracción equivalente desde el significado de medida. Se ha considerado pertinente dedicar tres sesiones a reforzar el significado y cálculo de la equivalencia de fracciones porque los procedimientos de cálculo de las operaciones con fracciones se fracción se fundamentan en el concepto de equivalencia. Se proponen las mismas tareas que se han implementado en la Primera Etapa.

• No hay modificaciones en la planificación de la propuesta didáctica referida al Tema 0.

Tema 1: La fracción con significado de medida: Operaciones con fracciones

En las siguientes nueve sesiones de la secuencia de enseñanza se estudian las operaciones con fracciones asociadas a situaciones problemáticas de medida de cantidades de magnitud. Cuando los alumnos resuelven las correspondientes Fichas de Trabajo modelizan situaciones que dan sentido a las operaciones con fracciones: añadir cantidades, quitar cantidades, comparar cantidades, completar cantidades, reiterar cantidades de magnitud, repartir cantidades en partes iguales y fraccionar cantidades en partes iguales.

Se dedican 11 sesiones y se proponen 15 Fichas de Trabajo para introducir las operaciones con fracciones desde el modelo de medida de cantidades de magnitud.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
4	**FT2E nº 1 = FT1E nº 1** **FT2E nº 2 = FT1E nº 2**	FT1E nº 1 FT1E nº 2
5	**FT2E nº 3 = FT1E nº 3** **FT2E nº 4 = FT1E nº 4**	FT1E nº 3 (de evaluación) FT1E nº 4
6	**FT2E nº 5 = FT1E nº 5** **FT2E nº 6 nueva**	FT1E nº 5
7	**FT2E nº 7 = FT1E nº 6**	FT1E nº 6 (de evaluación)
8	**FT2E nº 8 = FT1E nº 7**	FT1E nº 7
9	**FT2E nº 9 nueva**	FT1E nº 8 (de evaluación)
10	**FT2E nº 10 = FT1E nº 8**	FT1E nº 9 FT1E nº 10
11	**FT2E nº 11 = FT1E nº 9** **FT2E nº 12 = FT1E nº 10**	FT1E nº 11 FT1E nº 12
12	**FT2E nº 13 = FT1E nº 12**	FT1E nº 13 (de evaluación)
13	**FT2E nº 14 = FT1E nº 13**	_________
14	**FT2E nº 15 nueva**	_________

Se observa que en la planificación de la Segunda Etapa contempla el aumento de dos sesiones con respecto a la de la Primera Etapa. Esto supone introducir tres nuevas Fichas de Trabajo, que mostramos a continuación.

• Se introduce la Ficha de Trabajo nº 6 que plantea el siguiente problema:

> *Tengo una caña de pescar que mide $\frac{7}{5}$ metros y se ha partido en dos partes: una mide $\frac{9}{10}$ de metro. ¿Cuánto mide la otra parte de la caña?*
> *No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.*

Con esta tarea se pretende reforzar la enseñanza del significado y del cálculo de la resta de fracciones.
• El profesor propone el problema para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
• El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.
• Cuando un alumno termine la tarea el profesor le entrega la siguiente tarjeta de evaluación para que haga una reflexión personal del proceso de resolución del problema:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 6 **Fecha** ______________
ALUMNO/A:____

Tengo una caña de pescar que mide $\frac{7}{5}$ metros y se ha partido en dos partes: una mide $\frac{9}{10}$ de metro. ¿Cuánto mide la otra parte de la caña?
No utilices material. Si no sabes resolver el problema sin utilizar el material, puedes solicitarlo.

SOLUCIÓN: La otra parte mide ____

Marca con una cruz las estrategias que has utilizado:

He utilizado material	SI ☐	NO ☐
He realizado una medida de longitud	SI ☐	NO ☐
He realizado un gráfico	SI ☐	NO ☐
He hallado fracciones equivalentes	SI ☐	NO ☐
He realizado una operación	SI ☐	NO ☐

Si has realizado alguna operación, escríbela: ______________________________

Indica cómo has resuelto el problema: : ______________________________

• Se introduce la Ficha de Trabajo nº 9 con el objetivo de que reforzar el significado y cálculo del producto de una fracción por un número natural. Esta Ficha plantea dos situaciones problemáticas. Además, con el segundo problema se pretende incidir en el significado y cálculo de la resta de fracciones.

Problema 1.- ¿Cuántos litros de agua mineral hay en una caja que contiene 12 botellas de $\frac{3}{2}$ de litro?

Problema 2.- El paso de un adulto es $\frac{5}{6}$ de metro y el un niño es $\frac{3}{4}$ de metro. Contesta las siguientes preguntas:

a) *¿Cuántos metros avanza el adulto en 12 pasos?*
b) *¿Cuántos metros avanza el niño en 12 pasos?*
c) *Si el adulto avanza 12 pasos, ¿cuál es el menor número de pasos que debe dar el niño para que camine más que el adulto?*

El profesor propone el problema para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.
Cuando los alumnos resuelvan los problemas el profesor les entrega una tarjeta de evaluación para que hagan una reflexión personal de los procesos de resolución realizados.

• Por último, se introduce la Ficha de Trabajo nº 15 con el objeto de reforzar el significado de las operaciones con fracciones y de las técnicas de cálculo de dichas operaciones. Esta Ficha se compone de cuatro problemas cuyos enunciados se muestran a continuación:

1º. Para celebrar tu cumpleaños invitas a tus amigas a merendar pizza en tu casa. Sois 6 amigas, contándote tú. ¿Cuántas pizzas deberás comprar si quieres servir $\frac{2}{3}$ de pizza a cada una?

2º. Tres hermanos van a cenar. Tienen una tortilla de patata. Como dos de los hermanos se retrasan el otro hermano se sienta a la mesa y come $\frac{1}{4}$ de tortilla. Los otros dos hermanos deciden repartirse, en partes iguales, la cantidad sobrante. Se pregunta:

a) ¿Cuánta tortilla comerá cada uno de los hermanos que se han retrasado?
b) ¿Comen todos la misma cantidad de tortilla?. ¿Cuánta tortilla comen unos más que el otro?

3º. Jaime come $\frac{1}{3}$ de tarta y su hermana Ángela la cuarta parte del resto. ¿Cuánta tarta come Ángela? ¿Cuánta tarta comen entre los dos hermanos?

4º. Un equipo de 4 atletas participa en una carrera de relevos que consiste en correr $\frac{2}{5}$ de kilómetro. Si los cuatro atletas recorren la misma longitud, expresa con una fracción la cantidad de longitud que recorre cada uno.

Como en la tareas anteriores, el profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
El profesor mostrará las soluciones aportadas por los alumnos y recalcará el significado de la operación, así como el correspondiente algoritmo.
La formulación de algunos de estos problemas se ha creído oportuno ocultar, deliberadamente, la magnitudes implicadas en los enunciados de los problemas. De esta forma, los problemas se asemejan a los formulados en la enseñanza sustentada en la relación parte-todo, y posiblemente permitirá indagar si los alumnos reconocen las magnitudes que entran en juego en los contextos de los problemas.
Cuando los alumnos resuelvan los problemas el profesor les entrega una tarjeta de evaluación para que hagan una reflexión personal de los procesos de resolución realizados.

Tema 2: La fracción con significado de cociente partitivo

Se dedican 7 sesiones y se proponen 10 Fichas de Trabajo para introducir la fracción desde el modelo de cociente partitivo cuando el reparto se realiza en una sola fase, utilizando procedimientos manipulativos, gráficos y simbólicos.
En estas sesiones los alumnos reciben enseñanza de los siguientes conceptos referidos a la fracción como resultado de un reparto igualitario efectuado en una fase:

a) construcción del sistema de representación fraccionario con el significado de reparto igualitario.
b) comparación de repartos.
c) búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto conocido el resultado del mismo.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
13	_________	FT1E nº 14
14	_________	FT1E nº 15
15	**FT2E nº 16 = FT1E nº 14**	FT1E nº 16 (de evaluación) FT1E nº 17
16	**FT2E nº 17 = FT1E nº 15**	FT1E nº 18
17	**FT2E nº 18 = FT1E nº 16** **FT2E nº 19 nueva**	FT1E nº 19
18	**FT2E nº 20 = FT1E nº 17** **FT2E nº 21 = FT1E nº 18**	FT1E nº 20 FT1E nº 21
19	**FT2E nº 22 nueva**	FT1E nº 22
20	**FT2E nº 23 = FT1E nº 22**	FT1E nº 23(de evaluación)
21	**FT2E nº 24 = FT1E nº 23** **FT2E nº 25 nueva**	_________

• En la Segunda Etapa se suprimen tres tareas (FT1E nº 19, 20 y 21) de búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto igualitario porque los alumnos de la Primera Etapa reconocen directamente que el numerador y denominador de la fracción coinciden, respectivamente, con el número de unidades y de personas que participan en el reparto; y, además, las estrategias de obtención de las condiciones iniciales resultan complejas a la mayoría de los alumnos.

• Se introducen tres nuevas tareas. La primera tarea, constituye la Ficha de Trabajo nº 19, refuerza la comprensión de la fracción como resultado de un reparto igualitario, y plantea el siguiente problema:
Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 5 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

- El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
- El profesor prestará especial atención a las estrategias utilizadas por los alumnos, así como a las representaciones orales y escritas. En la evaluación de la tarea interesa que aparezcan las estrategias y que las acciones realizadas con material sean representadas de forma gráfica.
- El profesor animará a los alumnos a que expresen las representaciones orales, gráficas, escritas y simbólicas de las acciones que éstos realicen. Es interesante que aparezcan las representaciones gráficas del proceso de reparto para que poco a poco vayan sustituyendo a la utilización del material.
- Los alumnos cumplimentan la siguiente tarjeta de evaluación, que se ha modificado con respecto a las de la Primera Etapa:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 19 Fecha: ______________

ALUMNO/A:____

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 5 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:

2. Completad la tabla siguiente:

ANTES DE HACER EL REPARTO	*COMO SE HACE EL REPARTO*	*DESPUÉS DE HACER EL REPARTO*
Hay 3 barras para 5 personas		RESULTADO DEL REPARTO
3:5		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ____

El denominador indica ____

• Se introduce la Ficha de Trabajo nº 22 para reforzar el significado de la equivalencia de fracciones. Esta tarea que tiene un formato análogo, a la Ficha nº 21 y cuya primera pregunta propone realizar el reparto de "*6 barras de regaliz entre 4 niños*". El proceso de reparto deben hacerlo con gráficos y con símbolo. Cuando los alumnos resuelven este reparto, los alumnos afrontan la resolución de la segunda pregunta que propone realizar el reparto de "*9 barras de regaliz entre 6 niños*".

- El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual.
- Hay una intervención del profesor haciendo notar que los repartos realizados por los dos grupos son iguales, y preguntará a la clase si esto es posible y en qué condiciones se da esta circunstancia.
- Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación que ha sido parcialmente modificada con respecto a la de la Primera Etapa; mostramos la que corresponde a la segunda pregunta:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 22 Fecha: _____________

ALUMNO/A:____

Vais a repartir 9 barras de regaliz para 6 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para resolver la tarea:

☐ He realizado el siguiente dibujo:

☐ He utilizado símbolos:

ANTES DE HACER EL REPARTO	*COMO SE HACE EL REPARTO*	*DESPUÉS DE HACER EL REPARTO*

• Por último, se introduce la Ficha de Trabajo nº 25 que refuerza la técnica de comparación de repartos. Se enuncian, de forma secuenciada, los siguientes problemas:

Problema 1.- *Imagina que participas en el reparto "3 barras de regaliz entre 5 personas" y en el reparto "4 barras de regaliz entre 7 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta.*

Problema 2.- *Imagina que participas en el reparto "2 barras de regaliz entre 5 personas" y en el reparto "3 barras de regaliz entre 8 personas" ¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz? Explica la respuesta.*

- El profesor propone los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual y para que, posteriormente, los alumnos expongan sus razonamientos públicamente.
- El profesor coordinará el debate en el que los alumnos expondrán sus razonamientos. Conviene poner de manifiesto las estrategias utilizadas por los alumnos. Si alguna de las estrategias descritas no son propuestas por los alumnos serán presentadas por el profesor.
- Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación que no ha sufrido modificaciones con respecto a la Primera Etapa.

<u>Comentarios sobre las modificaciones efectuadas en la Segunda Etapa con respecto a la planificación de la Propuesta de la Primera Etapa:</u>

En esta Segunda Etapa de la Experimentación de la Propuesta para quinto curso se introducen algunas variaciones que vamos a comentar:

1º En lugar de cañas de un metro se van a utilizar tiras de papel de un metro que simulan las barras de regaliz. Este material es más manejable, permite de forma rápida en fraccionamiento en partes iguales, y no distrae a los escolares.

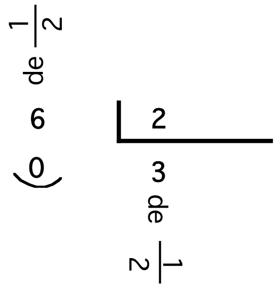
2º Se acuerda incidir en la ubicación temporal de las cantidades que intervienen en el reparto:

a) lo que recibe cada participante, <u>después</u> de realizar el reparto.

b) lo que tenían <u>antes</u> de comenzar el reparto.

3º Solicitar a los alumnos mayor atención y esmero en las representaciones gráficas que realizan. A los participantes en los repartos se les asignan letras (A, B, C, ….) para que los alumnos visualicen de forma gráfica la cantidad que recibe cada participante.

4º Utilizar la notación "dos puntos" en lugar de "la caja" para simbolizar el proceso del reparto. Para describir las condiciones iniciales de un reparto; se recomienda utilizar el lenguaje natural.
Se recuerda que en la Primera Etapa los escolares simbolizaban el proceso del reparto " 3 barras entre 2 niños" del siguiente modo:



En la Segunda Etapa los alumnos escriben:

$$3 : 2 = \frac{6}{2} : 2 = \frac{6:2}{2} = \frac{3}{2} \text{ de barra}$$

Justificamos esta decisión por las siguientes razones:

a) Deslindar la acción de reparto con magnitudes continuas de la que se realiza con magnitudes discretas y que los alumnos resuelven mediante el algoritmo de la división entera. Durante la Primera Etapa hemos detectado influencias perniciosas como la imposibilidad de realizar repartos que manifestaban algunos alumnos cuando el número de barras es menor que el número de participantes. Sin duda la notación de "la caja de la división" les recordaba la división entera de naturales y les retrotraía a situaciones con objetos discretos.
b) Por coherencia con la división entera de naturales, porque la notación de la caja la utilizamos para realizar repartos de objetos discretos en varias fases. Se recuerda que en el trabajo con números naturales si la división se realiza en una sola fase utilizamos la notación "dos puntos"
c) La notación de los dos puntos la hemos utilizado, en sesiones anteriores de este curso, para simbolizar la operación división de una fracción por un número natural que solía estar asociada a acciones de repartos igualitarios.
d) La notación de los dos puntos es compatible con la simbolización de la equivalencia de fracciones y refuerza el trabajo realizado con fracciones equivalentes.

Tema 3: La Representación Polinómica Decimal

Se dedican 4 sesiones y se proponen 5 Fichas de Trabajo para introducir la Representación Polinómica Decimal que expresa el resultado de un reparto igualitario efectuado en varias fases utilizando procedimientos manipulativos, gráficos y simbólicos.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
21	_________	FT1E nº 24
22	**FT2E nº 26 = FT1E nº 24**	FT1E nº 25
23	**FT2E nº 27 = FT1E nº 25**	FT1E nº 26
24	**FT2E nº 28 = FT1E nº 26a** **FT2E nº 29 = FT1E nº 26b**	FT1E nº 27 (de evaluación)
25	**FT2E nº 30 = FT1E nº 27**	_________

Como puede observarse en el cuadro anterior, no se hay modificaciones en la planificación de la Propuesta Didáctica referida a este Tema.

Tema 4: La Notación Decimal

Se dedican 4 sesiones y se proponen 8 Fichas de Trabajo para introducir y dotar de significado al número decimal.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	**Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)**	**Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)**
25	_________	FT1E nº 28 FT1E nº 29
26	**FT2E nº 31 = FT1E nº 28** **FT2E nº 32 nueva**	FT1E nº 30 (de evaluación) FT1E nº 30BIS
27	**FT2E nº 33 = FT1E nº 29** **FT2E nº 34 nueva**	FT1E nº 31 FT1E nº 32
28	**FT2E nº 35 = FT1E nº 30** **FT2E nº 36 nueva**	FT1E nº 33 FT1E nº 34
29	**FT2E nº 37 = FT1E nº 30BIS** **FT2E nº 38 nueva**	_________

Como puede observarse en el cuadro anterior, no se hay modificaciones en el número de sesiones y en el número de Fichas de Trabajo propuestas con respecto a la planificación de la Propuesta en la Primera Etapa Sin embargo, si que se ha modificado el contenido de las Fichas de Trabajo, según indicamos a continuación:

• Se suprimen 4 Fichas de la Primera Etapa, desde FT1E nº 31 hasta FT1E nº 34, que indagan por las condiciones iniciales de un reparto cuyo resultado es conocido y viene dado por un número decimal. La resolución de estas Fichas presentan grandes dificultades conceptuales a los alumnos de la Primera Etapa.

• En su lugar se modifican los enunciados de las 4 primeras Fichas propuestas en la Primera Etapa y se introducen 3 nuevas Fichas que tienen como objetivo:

- Conectar los significados de medida y reparto del número decimal
- Evaluar semánticamente el número decimal como medida de la cantidad de longitud
- Conectar la representación decimal y fraccionaria de repartos.

Las tres tareas que plantean realizar los siguientes repartos, utilizando las dos técnicas estudiadas:

Ficha de Trabajo nº 32.- *Realiza el reparto"7 barras de regaliz entre 2 niños" de dos formas diferentes.*

Ficha de Trabajo nº 34.- *Realiza el reparto"21 barras de regaliz entre 10 niños" de dos formas diferentes.*

Ficha de Trabajo nº 36.- *Realiza el reparto"9 barras de regaliz entre 4 niños" de dos formas diferentes.*

- El profesor propone, en sesiones diferentes, los problemas para que los alumnos los resuelvan de forma individual y para que, posteriormente, los alumnos expongan sus razonamientos públicamente.
- Cada alumno debe cumplimentar la tarjeta de evaluación que sufrido importantes modificaciones con respecto a la Primera Etapa. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 32:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 32 Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

***Realiza el reparto"7 barras de regaliz entre 2 niños" de dos formas diferentes**:*

1º) Cuando fraccionas todas las barras en tantas partes iguales como el número de niños:

Expresa, con una fracción, el número de barras de regaliz que recibe cada niño.

SOLUCIÓN: Cada niño recibe barras de regaliz.

2º) Cuando repartes barras enteras y fraccionas las barras o partes de barras sobrantes en diez:

7 |2

Expresa, con un número decimal, el número de barras de regaliz que recibe cada niño

SOLUCIÓN: Cada niño recibe barras de regaliz

3º) La longitud de una barra de regaliz es ________________

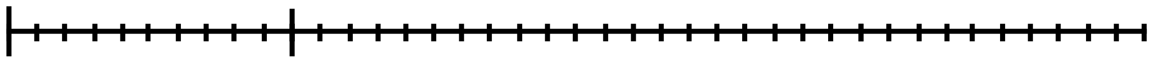
Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, la fracción que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

O

4º) La longitud de una barra de regaliz es 

Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, el número decimal que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

O



5º) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal

La parte entera es _____ e indica que ______________________________

La cifra de las centésimas es _____ e indica que ______________________________

La cifra de las milésimas es _____ e indica que ______________________________

• Se introduce la Ficha de Trabajo nº 38 con el objetivo de conectar la representación fraccionaria con la notación decimal. Mostramos la tarjeta de evaluación de esta tarea:

TARJETA DE LA FICHA DE TRABAJO Nº 38 Fecha: ____________

ALUMNO/A ____

Expresa, con un número decimal, las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{2} =$

b) $\frac{8}{4} =$

c) $\frac{7}{4} =$

d) $\frac{2}{5} =$

e) $\frac{15}{5} =$

f) $\frac{3}{10} =$

g) $\frac{27}{10} =$

h) $\frac{3}{8} =$

i) $\frac{17}{8} =$

j) $\frac{33}{20} =$

k) $\frac{21}{8} =$

Si la unidad de longitud es:

dibuja, a partir de O, la cantidad de longitud que expresan los números decimales que acabas de obtener:

a) ***O***

Tema 5: Conexión entre la notación decimal y la notación fraccionaria

En las dos sesiones de la secuencia de enseñanza (nº 30 y nº 31) los alumnos resuelven las correspondientes tareas con la finalidad de establecer conexiones entre la representación decimal y fraccionaria.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	**Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)**	**Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)**
29	_________	FT1E nº 35 (de evaluación)
30	**FT2E nº 39 = FT1E nº 35**	FT1E nº 36
31	**FT2E nº 40 = FT1E nº 36**	_________

Como puede observarse en el cuadro anterior, no se hay modificaciones en la planificación de la Propuesta Didáctica referida a este Tema.

Tema 6: Relación de orden entre números decimales

En las dos sesiones de la secuencia de enseñanza (nº 32 y nº 33) los alumnos resuelven dos tareas con la finalidad de ordenar cantidades de magnitud expresadas con números decimales y, además, de conjeturar reglas que permitan ordenar números decimales.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
30	_________	FT1E nº 37
32	**FT2E nº 41 = FT1E nº 37**	FT1E nº 38 (de evaluación)
33	**FT2E nº 42 = FT1E nº 38**	_________

Como puede observarse en el cuadro anterior, no se hay modificaciones en la planificación de la Propuesta Didáctica referida a este Tema.

Tema 7: Operaciones entre números decimales

Las últimas 7 sesiones de la secuencia de enseñanza (nº 34 a nº 41) se dedican a estudiar el significado y los procedimientos de cálculo de las operaciones suma y resta de números decimales, y de la multiplicación y división de un número decimal por un número natural.

El siguiente cuadro muestra las equivalencias entre las Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E) y las Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E):

SESIONES	Fichas de Trabajo propuestas en la Segunda Etapa (FT2E)	Fichas de Trabajo propuestas en la Primera Etapa (FT1E)
33	_________	FT1E nº 39 FT1E nº 40 (de evaluación)
34	**FT2E nº 43 = FT1E nº 39** **FT2E nº 44 = FT1E nº 40**	FT1E nº 41 (de evaluación)
35	**FT2E nº 45 = FT1E nº 41**	FT1E nº 42
36	**FT2E nº 46 = FT1E nº 42** **FT2E nº 47 = FT1E nº 45**	FT1E nº 43 FT1E nº 44
37	**FT2E nº 48 = FT1E nº 46**	FT1E nº 45 (de evaluación)
38	**FT2E nº 49 = FT1E nº 47**	FT1E nº 46
39	**FT2E nº 50 = FT1E nº 48**	FT1E nº 47 (de evaluación)
40	**FT2E nº 51 = FT1E nº 43** **FT2E nº 52 = FT1E nº 44**	FT1E nº 48
41	**FT2E nº 53 = FT1E nº 50**	FT1E nº 49 FT1E nº 50

• La Propuesta Didáctica, referida a este tema, contempla disminuir en una sesión de clase la planificación de la Segunda Etapa porque se suprime la Fichas de Trabajo nº 49 de la Primera Etapa que tiene por objeto conceptualizar la división de números decimales y, además, conjeturar las modificaciones que deben sufrir el dividendo y el divisor para transformar la división de decimales en una división de números naturales. La Propuesta Didáctica contiene suficientes contenidos por lo que no resulta oportuno introducir tareas cuyos objetivos no contempla la experimentación de aula.

• La Propuesta contempla implementar las restantes Fichas de Trabajo que componen la planificación de la Primera Etapa. La modificación más importante afecta al formato de las tarjetas de evaluación: se solicita a los alumnos que utilicen la representación polinómica decimal asociada al número decimal. A modo de ejemplo, mostramos la tarjeta de evaluación modificada que corresponde a la Ficha de Trabajo nº 43 de la Segunda Etapa o Ficha de Trabajo nº 39 de la Primera Etapa:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA FICHA Nº 43. Fecha: ______________

ALUMNO/A ____

Un albañil ha colocado el rodapié de una habitación. Por la mañana ha colocado una longitud de 6´5 m. de rodapié y por la tarde coloca 3´8 m, ¿cuántos metros de rodapié ha colocado?

SOLUCIÓN: La longitud del rodapié que ha colocado es ___________________

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

$$6'5 = 6 + \frac{5}{10}$$

$$3'8 =$$

Indica cómo has resuelto el problema: ____

• Otra modificación consiste en retrasar la implementación de las Fichas de Trabajo nº 43 y nº 44 de la Primera Etapa que tenían por objetivo introducir la regla para "situar la coma". La propuesta de enseñanza persigue que los alumnos justifiquen los algoritmos de cálculo con decimales utilizando sus representaciones polinómicas decimales asociadas. Para alcanzar este objetivo se recomienda posponer la enseñanza de la regla para "situar la coma" que los alumnos de la Primera Etapa sabían aplicar, cuando realizaban multiplicaciones de decimales, a pesar de que desconocían la justificación conceptual de dicha regla.

ANEXO II

Diarios de clase

ANEXO II: DIARIOS DE CLASE

Se muestran los diarios de clase correspondientes a la Primera Etapa y a la Segunda Etapa de la Experimentación. A su vez, en cada Etapa, hay dos diarios que se corresponden con el Primer Ciclo (cuarto curso de Educación Primaria) y Segundo Ciclo (quinto curso de Educación Primaria). En consecuencia, se detallan los siguientes cuatro diarios:

Anexo II.1: Diario de clase del Primer Ciclo y de la Primera Etapa

Anexo II.2: Diario de clase del Segundo Ciclo y de la Primera Etapa

Anexo II.3: Diario de clase del Primer Ciclo y de la Segunda Etapa

Anexo II.4: Diario de clase del Segundo Ciclo y de la Segunda Etapa

En todos los diarios, el desarrollo de cada una de las sesiones de clase se organiza atendiendo a los aspectos siguientes:

1.- Plan previsto
2.- Ejecución
3.- Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos
4.- Aspectos relacionados con la comprensión
5.- Valoración
6.- Toma de decisiones

ANEXO II.1: DIARIO DE CLASE DEL PRIMER CICLO Y DE LA PRIMERA ETAPA

Día 25-1-2000 (Primera sesión)

<u>Plan previsto.</u>

Abordar la resolución de la ficha de trabajo nº 1:

"Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared (la longitud de la cortina mide 3/4 de la unidad). La longitud de la barra queréis que sea igual que la largura de la cortina. ¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda la barra de la cortina que tenga la longitud deseada?".

Con esta tarea pretendemos que los alumnos intuyan y comprendan:

1. La utilidad de los números.-

Los números sirven para comunicar (transmitir) información. Con un número debemos comunicar al vendedor de barras de cortinas la longitud de la barra de cortina que nos debe mandar.

2. La necesidad de utilizar una unidad común.-

El comprador y vendedor para ponerse de acuerdo necesitan utilizar la misma unidad de longitud

3. La necesidad de fraccionar.-

Como lo único que tienen en común el comprador y vendedor es la unidad de medida, la comunicación indicará las acciones que deben efectuarse sobre la unidad: fraccionar o dividir la unidad en partes iguales.

<u>Ejecución</u>

En ambos grupos se han cumplido los objetivos 1 y 2; sin embargo, se constata que los alumnos no reconocen como evidente que la acción de fraccionar o dividir la unidad de longitud en partes iguales sirva para que el comprador comunique al vendedor la longitud de la barra de la cortina.

<u>Aspectos actitudinales</u>

En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

<u>Asistencia de alumnos</u>

Dos alumnos del grupo de 4º A faltan a clase (A37 y A40). En el grupo de 4º B faltan a clase tres alumnos (A41, A20 y A24).

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>

Los alumnos no son conscientes de la utilidad de los números para transmitir información. Subestiman el valor de los números cuando proponen, con reiteración, que el comprador se desplace hasta la tienda del vendedor con la barra o la cortina que se desea encargar. Después de una puesta en común entre los alumnos de ambos grupos, los alumnos muestran comprensión de la función de los números y de la necesidad de que el comprador y el vendedor dispongan de la misma unidad de medida.

La dificultad, que en esta primera sesión ha sido ineludible, se manifiesta cuando se les pregunta a los alumnos que indiquen las acciones que deberá realizar el comprador para comunicarse con el vendedor, en las condiciones que se plantean en la ficha. Aunque un alumno (del grupo de 4º B) expresa correctamente la medida de la barra y otros (de ambos grupos) proponen métodos que respetan las condiciones del enunciado de la tarea, ninguno sabe explicar la estrategia o el método que debe utilizar el comprador de la barra.

Valoración
Los alumnos no reconocen la acción de fraccionar o dividir la unidad de longitud en partes iguales para comunicar al vendedor la longitud de la barra de la cortina. La primera sesión concluye sin que el profesor indique la acción que debe efectuar el comprador de la barra. Se detecta que *los alumnos no perciben como evidente la acción de fraccionar en partes iguales*. Esta acción no aparece en el aula cuando los alumnos intentan resolver la ficha.

Toma de decisiones
Se propone comenzar la segunda sesión realizando una modificación, transitoria, de la longitud de la barra de la ficha 1 que, ahora, será de media unidad. Cada grupo recibirá una unidad de medida y dos cañas de 1/2 de unidad. El profesor pregunta: ¿Cuánto mide la longitud de la caña que os acabo de entregar?. ¿Cómo le pediríais, por carta, al vendedor para que os mande una barra de longitud de la caña que os acabo de entregar?.
Ante la posibilidad de que los alumnos no especifiquen las acciones que el comprador debería indicar al vendedor, el profesor preguntará: ¿Cómo indicará el comprador al vendedor las acciones que éste deberá realizar para que le construya la barra que el comprador desea?

Día 26-1-2000 (Segunda sesión)
Plan previsto.
Continuar con la resolución de la ficha 1, con el objetivo de que los alumnos intuyan y comprendan:
3. La necesidad de fraccionar la unidad.
4. Las técnicas de fraccionamiento y la nomenclatura de las subunidades de medida.

Si fraccionamos la unidad en dos partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un medio de unidad" y se escribe 1/2. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/2 de unidad.

Si fraccionamos la unidad en tres partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un tercio de unidad" y se escribe 1/3. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/3 de unidad.

Si fraccionamos la unidad en cuatro partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un cuarto de unidad" y se escribe 1/4. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/4 de unidad.

Ejecución
En ambos grupos se han cumplido los objetivos 3 y 4; éste último de manera parcial dado que la duración de la sesión de clase ha concluido con la construcción y definición de las subunidades de longitud 1/3.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

Asistencia de alumnos
Un alumno del grupo de 4º A falta a clase (A28) y dos alumnas se ausentan para asistir a clases de apoyo. En el grupo de 4º B faltan a clase dos alumnos (A41 y A24).

Aspectos relacionados con la comprensión
Con la modificación provisional de la ficha 1 descrita en el apartado "toma de decisiones" del diario correspondiente a la sesión anterior, los alumnos comentan de forma inmediata que la medida de la barra es "un medio de unidad". Sin embargo, como los alumnos siguen sin especificar las orientaciones que el comprador debería decir al vendedor para que le construya la barra deseada, el profesor les pregunta: ¿cómo indicará el comprador al vendedor las acciones que éste deberá realizar para que le construya la barra que el comprador desea?. Algunos alumnos que contestan a esta cuestión dicen que debería decirle "que parta la unidad en dos partes y que haga una barra de longitud una de las dos partes". En este momento el profesor aprovecha estas intervenciones para indicar que la acción a realizar es el fraccionamiento o división en partes iguales de la unidad.

Dado que la acción a realizar es el fraccionamiento, el profesor propone fraccionar la unidad en tres partes iguales y, posteriormente, definir la subunidad de longitud 1/3 de unidad. Los alumnos ejercitan la técnica de fraccionamiento con éxito, empleando tiras de papel de longitud la unidad.

Valoración
Con la modificación provisional realizada en el enunciado de la ficha 1 los alumnos han comprendido la necesidad de efectuar fraccionamientos iguales de la unidad de medida, dado que la unidad es el único objeto del que disponen los dos protagonistas del problema: el comprador y el vendedor, que necesitan comunicarse una medida de longitud.
En sucesivas secuencias de enseñanza se debería proponer la ficha 1 con una barra de cortina que midiese 1/2 de unidad. Y después plantear la ficha 1 tal y como aparece descrita en la programación.

Toma de decisiones
No se considera necesario proponer modificaciones en la propuesta de enseñanza.

Día 27-1-2000 (Tercera sesión)
Plan previsto.
Continuar con la resolución de la ficha 1, con el objetivo de que los alumnos intuyan y comprendan:

4. Las técnicas de fraccionamiento y la nomenclatura de las subunidades de medida.
Si fraccionamos la unidad en cuatro partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un cuarto de unidad" y se escribe 1/4. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/4 de unidad.
Si fraccionamos la unidad en cinco partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un quinto de unidad" y se escribe 1/5. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/5 de unidad.
Si fraccionamos la unidad en cuatro partes iguales, la longitud de una de las partes se denomina "un sexto de unidad" y se escribe 1/6. A la longitud de una de las partes le llamamos subunidad de longitud 1/6 de unidad.

5. La técnica de la medida.
Los alumnos van probando con diversas subunidades, de modo que colocando una misma subunidad, una a continuación de la otra, se complete la longitud de la barra de la cortina. En el problema de la ficha 1 son necesarias colocar 3 subunidades de longitud 1/4 de unidad.

6. La escritura y lectura del resultado de la medida.
La medida de la barra se escribe 3/4 de unidad, y se lee "tres cuartos" de unidad.
Ni al numerador ni al denominador conviene darle el status de número, dado que el número es propiamente la fracción 3/4. El numerador, que es 3, indica el número de subunidades que contiene la barra que se está midiendo.
El denominador, que es el 4, indica que la unidad ha sido fraccionada en 4 partes iguales. Es decir, que las subunidades con las que se ha medido la barra son de longitud 1/4 de unidad.

Ejecución
En ambos grupos se han cumplido los objetivos 4, 5 y 6. Queda por construir y definir las subunidades de longitudes 1/5 y 1/6. Ante la previsible falta de tiempo para cumplir con el plan previsto en esta sesión, el equipo de investigación ha decidido terminar la ficha 1 e introducir la escritura y lectura de la fracción.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

Asistencia de alumnos
Un alumno del grupo de 4º A falta a clase (A28). En el grupo de 4º B faltan a clase dos alumnos (A12 y A24).

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos de los dos grupos aprenden rápidamente a fraccionar la unidad en partes iguales. La construcción de subunidades, aunque no ocasiona dificultades conceptuales en los alumnos, requiere una mayor duración temporal de la que inicialmente se había propuesto en la programación de la secuencia de enseñanza.

Valoración
Los alumnos de ambos grupos, en general, muestran comprensión de las técnicas de fraccionamiento y de la medida de longitudes, y de la representación oral y escrita de la fracción.
Los alumnos de 4º B (en el grupo de 4º A no ha habido tiempo para recoger información escrita), antes de

recibir enseñanza de la representación escrita y oral de la fracción, aportan las siguientes respuestas de la medida de la longitud de la barra de la ficha de trabajo nº 1:

3 cuartos de unidad o tres cuartos de unidad (10 alumnos)
Tres trozos de un cuarto de unidad (7 alumnos)
3 subunidades de longitud 1/4 de unidad (2 alumnos)
Un cuarto (2 alumnos)

Resulta extraño que diez alumnos aporten como solución la representación oral canónica o usual de la fracción antes de haber recibido enseñanza de este aspecto de la fracción. Ello puede deberse a circunstancias como que algún alumno comente a otros la solución, o bien, a conocimientos informales de los alumnos sobre la fracción (fenómenos de enculturación).

Se puede afirmar que todos los alumnos conocen y aplican correctamente la técnica de la medida, y que eligen las subunidades adecuadas. Cuando algunos alumnos proponen que la medida de la barra es una subunidad de longitud 1/2 y otra de longitud 1/4, el profesor les comenta que la respuesta es correcta pero que tomaremos como acuerdo que la medida de cantidades de longitud vendrá expresada por <u>subunidades del mismo tipo</u>.

<u>Toma de decisiones</u>
El equipo de investigación es consciente de que existe un desfase temporal, equivalente a una sesión de clase, que se justifica en:

1. las dificultades que mostraron los alumnos en reconocer la acción de fraccionar como paso previo a la expresión de la medida de una cantidad de longitud que no sea múltiplo de la unidad.

2. las técnicas de fraccionamiento de la unidad y la construcción de subunidades requieren una dedicación durante un período temporal más prolongado.
Sin embargo, no se considera necesario realizar modificaciones en la propuesta de enseñanza.

Día 31-1-2000 (Cuarta sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º. Abordar la resolución de la ficha 2, con el objetivo de consolidar los aprendizajes realizados por los alumnos en las tres primeras sesiones.
2º. Construir y definir las subunidades de longitud 1/5 y 1/6 de la unidad.

<u>Ejecución</u>
En los dos grupos de docencia se resuelve la ficha 2 y se realizan las actividades de fraccionamiento de la unidad en 5 y 6 partes iguales. Respecto a la segunda tarea hay que constatar que no todos los grupos han conseguido fraccionar en 5 y 6 partes iguales la unidad. Los alumnos han utilizado las plantillas de segmentos paralelos y bandas de papel de longitud la unidad para facilitar el fraccionamiento de la unidad pero, dado que esta tarea requiere cierta precisión, los alumnos obtenían subunidades de diferentes longitudes. A pesar de ello, el equipo de investigación considera que el objetivo se ha cumplido dado que los alumnos saben como fraccionar en partes iguales la unidad aunque no tengan la suficiente habilidad ni hayan dispuesto de un período mayor de entrenamiento para manejar con destreza esta técnica.

<u>Aspectos actitudinales</u>
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

<u>Asistencia de alumnos</u>
En el grupo de 4º A faltan a clase dos alumnas (A03 y A05) y otras dos se ausentan para asistir a clases de apoyo. En el grupo de 4º B faltan a clase cuatro alumnos.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
En la ficha 2 se propone la medida de un listón de madera (de longitud 4/3 de la unidad). Esta es la segunda actividad de medida que realizan los alumnos. El objetivo de esta ficha es que los alumnos ejerciten la técnica de la medida, escriban y lean la fracción resultado de la medida y además, sepan interpretar correctamente los términos de la fracción. De la evaluación de las producciones de los alumnos cuando han resuelto esta ficha destacamos los siguientes aspectos:

1º. La mayoría de los alumnos miden correctamente la longitud del listón. Se puede afirmar que conocen la técnica de la medida de cantidades de longitud. El procedimiento más utilizado ha consistido en comparar la longitud del listón con la unidad de medida y medir la "parte sobrante". Para medir esta "parte sobrante" los alumnos piden al profesor subunidades de longitud 1/2, 1/3 y 1/4 de unidad. La mayoría de los alumnos no son sistemáticos al pedir las subunidades, es decir, no prueban primero con subunidades de longitud 1/2, después con las de 1/3, y así sucesivamente.

2ª. La estrategia mayoritaria seguida por los alumnos les lleva a proponer como solución "la unidad y un tercio" expresada de forma escrita. Pocos alumnos (tan sólo cinco alumnos del grupo 4º A) expresan la fracción con el símbolo 4/3. Otros alumnos no recuerdan el acuerdo tomado días atrás relativo a la obligación de expresar la medida con subunidades de la misma longitud y escriben que la medida es:

"Una unidad y un tercio"
"Una unidad y 1/3"
"Dos de 1/2 y un 1/3"
"Un entero y un tercio"
"1 y un tercio"

3º En general, los alumnos han tenido dificultades para interpretar las preguntas de la Tarjeta de la ficha 2. El equipo investigación detecta las siguientes deficiencias de esta tarjeta:
1) Tiene demasiadas preguntas: los alumnos dedican demasiado tiempo a cumplimentarla.
2) En la segunda pregunta debe quedar más claro que se pregunta por la representación simbólica de la fracción.
3) La ubicación de la pregunta 4ª (¿cuál es la unidad de medida?) no es adecuada. Como los alumnos ya han medido, tienen la tendencia a expresar como unidad la longitud del listón o bien la subunidad con la que han medido el listón.
En consecuencia, se propone modificar las siguientes tarjetas de evaluación: suprimir las preguntas 1ª y 4ª, y clarificar la pregunta 2ª.

4ª. En general, los alumnos tienen dificultades para contestar a las preguntas 5ª y 6ª relativas al significado del numerador y denominador. En este momento de la secuencia de enseñanza es previsible que esto ocurra: el conocimiento que muchos alumnos tienen de la fracción como medida es inestable. Además, el equipo investigador ha observado que bastantes alumnos no saben expresar con palabras adecuadas los significados correctos que tienen acerca del numerador y denominador de la fracción.

Valoración
Los alumnos de ambos grupos, en general, muestran comprensión de las técnicas de fraccionamiento y de la medida de longitudes, y de la representación oral y escrita de la fracción. Sin embargo, se debe profundizar en el significado de fracción como resultado de la medida y en la expresión adecuada de los significados del numerador y del denominador de la fracción.

Toma de decisiones
De acuerdo con lo indicado en el apartado anterior, se procede a modificar las tarjetas de las fichas que los alumnos deben cumplimentar después de haber medido cantidades de magnitud. Por ejemplo, modificamos la tarjeta de la ficha 2 tal como indicamos a continuación:

1º. Escribe la fracción que expresa la longitud del listón:

——— *de unidad*

2º. Escribe como se lee la fracción que expresa la longitud del listón: ________________________________

3ª. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ____

4º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? ____

En cuanto a la programación de la propuesta de la secuencia de enseñanza y, en concreto, en la ficha 3 de la sesión 4ª de la propuesta inicial se suprime una actividad de medida de un listón. En la propuesta inicial se planteaba la medida de tres listones de longitudes 5/4, 5/6 y 2 unidades. La observación del ritmo de trabajo de los alumnos en la implementación de las sesiones realizadas indica claramente que éstos no iban a tener tiempo suficiente para medir los tres listones. Por ello, se propone medir los listones que son más complejos: los de longitudes 5/6 y 2 unidades, respectivamente.

Día 1-2-2000 (Quinta sesión)

Plan previsto

Trabajar la ficha 3 de evaluación, con la actividad de medida de los listones de madera: primero el de longitud 5/6 de unidad y después el de longitud 2 unidades.

Ejecución

Los alumnos de los dos grupos resuelven la actividad de medida del primer listón (el de 5/6 de unidad) pero agotan el período temporal de la sesión realizando esta primera medición. Por este motivo no se aborda la medida del segundo listón.

Aspectos actitudinales

En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

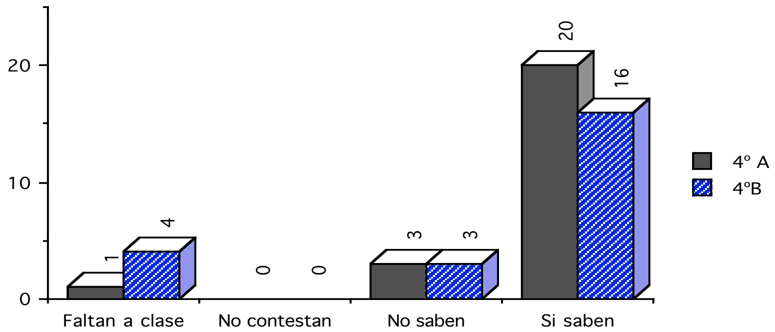
Asistencia de alumnos

En el grupo de 4º A falta a clase una alumna (A33). En el grupo de 4º B faltan a clase cuatro alumnas (A15, A27, A44 y A34)

Aspectos relacionados con la comprensión

Con carácter general puede decirse que los alumnos escriben correctamente la expresión simbólica de la fracción resultado de la medida del listón.

Expresan de forma simbólica la fracción



Unidades de comprensión

El mayor número de errores detectados en la segunda pregunta se debe a que los alumnos no han adquirido destreza en la lectura de fracciones. La propuesta pretende que los alumnos vayan conociendo como se nombran las fracciones mediante actividades de medida, sin proponer tareas específicas para adquirir esta destreza. De hecho esperamos que el número de respuestas correctas dadas por los alumnos en este ítem vayan creciendo a medida que realicen las siguientes fichas.

En los dos grupos, los alumnos tienen dificultades para expresar el significado de los términos de la fracción y por lo tanto de la propia fracción. El significado del denominador presenta mayor dificultad de comprensión que el del numerador. En el grupo de 4º A nueve alumnos saben expresar el significado del numerador frente a siete alumnos para el caso del denominador. En el grupo 4º B la tendencia se mantiene, siete alumnos expresan con corrección el significado del numerador frente a cinco que lo hacen en el caso del denominador.

Con la intención de justificar estos resultados, el equipo investigador propone tres hipótesis, no necesariamente incompatibles:

1º En relación con el diseño de la evaluación, cabe suponer que si se modifican los ítem 3º y 4º de la tarjeta de evaluación los resultados pueden mejorar. En algunos casos nos consta que determinados alumnos entienden los significados de los términos de la fracción y, sin embargo, no son capaces de expresar correctamente las ideas.

2º En relación a la propuesta de enseñanza, ésta no contempla la memorización de determinadas frases para que los alumnos las reciten cuando sean preguntados por los significados del numerador y denominador. La metodología que se sigue en esta propuesta es incompatible con tal proceder: resulta más enriquecedor para los alumnos, aunque también más complejo, que sean éstos los que realicen una interpretación personal del papel que juegan los términos de la fracción. Así, los alumnos para expresar el significado del denominador escriben frases como:

"veces en las que se corta la caña, paja, ... o sea cualquier material" (alumno A09)
"número de trozos que se han partido de la unidad" (alumno A10)
"el denominador indica de que tamaño son las subunidades" (alumno A11)
"la medida de las pajitas (subunidades)" (alumno A14)

3ª En relación con la gestión del material utilizado, se ha optado por escribir en cada subunidad la fracción unitaria, 1/n, que expresa su longitud con la intención de favorecer la actividad de medida. Esta decisión ha resultado operativa pero puede ocasionar una desconexión conceptual entre las subunidades rotuladas y separadas en cajas (que los alumnos manipulan con éxito como se manifiesta en los resultados obtenidos en la pregunta 1ª), y la unidad de medida de la que proceden aquellas a través de la técnica del fraccionamiento.
Ante esta coyuntura, el equipo investigador valoró la posibilidad de quitar el rótulo de las subunidades. Esta decisión hubiera dificultado la tarea de los alumnos y precisado de una ampliación del período temporal destinado a la realización de las fichas. Para fortalecer la conexión entre la unidad de medida y las subunidades obtenidas mediante su fraccionamiento en partes iguales se optó por la construcción de un mural en el que aparece la unidad sin descomponer y la unidad fraccionada en dos, tres, ..., nueve y diez partes iguales. Con la ayuda de este nuevo material, los alumnos recibirán una explicación al comienzo de la siguiente sesión, antes de proponer la siguiente ficha de trabajo de medida.

Valoración
Aunque se observan avances en cuanto a la adquisición del significado de fracción como resultado de la medida y de los significados del numerador y del denominador de la fracción, se debe seguir trabajando en este tópico, mientras que se realizan las actividades de medida propuestas en la ficha 3.

Toma de decisiones
Como se ha indicado en un apartado anterior se pretende concluir la ficha 3 en la siguiente sesión e introducir una explicación del profesor, con la ayuda del mural descrito con anterioridad, de modo que los alumnos perciban con mayor intensidad las relaciones existentes entre las diversas subunidades y la unidad de medida.
Dado que los alumnos han encontrado dificultades para significar los términos de la fracción 5/6 de unidad, el equipo investigador propone medir inicialmente la fracción 5/4 de unidad que tiene una representación simbólica más convencional que la de 2 unidades.

Día 2-2-2000 (Sexta sesión)

Plan previsto.
Terminar la ficha 3 de evaluación, con la actividad de medida de los listones de madera: primero el de longitud 5/4 de unidad y después, si da tiempo, el de longitud 2 unidades.

Ejecución
Los alumnos de los dos grupos resuelven la actividad de medida del primer listón (el de 5/4 de unidad) pero agotan el período temporal de la sesión realizando esta primera medición. Por este motivo no se aborda la medida del listón de 2 unidades.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Sin embargo, cuando el profesor les indica, al comienzo de la sesión, que van a realizar una medida de longitud algunos alumnos muestran un cierto cansancio. A pesar de esto, asumen la tarea y la realizan con agrado.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 4º A falta a clase una alumna (A33) y dos alumnas se ausentan para ir a clases de apoyo. En el grupo de 4º B faltan a clase cuatro alumnas (A15, A27, A44 y A34)

Aspectos relacionados con la comprensión
Durante los diez primeros minutos de la sesión; el profesor identifica diferentes tipos de subunidades, con la ayuda del mural en el que aparece la caña unidad descompuesta en diversas fracciones unitarias. El objetivo de esta intervención es relacionar la unidad de medida con la longitud de las subunidades y ver cómo dependen éstas del fraccionamiento realizado en la unidad. Después los alumnos miden el listón de longitud 5/4 de unidad y contestan a las preguntas de la tarjeta de evaluación.
Los resultados obtenidos por los alumnos son muy parecidos a los obtenidos en la actividad de medida realizada en la sesión anterior. En concreto, en ambos grupos, para las preguntas 1ª y 2ª se obtienen mejores resultados que los obtenidos en la ficha de la sesión anterior.

Número de alumnos que responden correctamente a las preguntas de la tarjeta de evaluación de la ficha 3:

	Listón 1 4º A	*Listón 2 4º A*	*Listón 1 4º B*	*Listón 2 4º B*
Escriben la fracción	**20** (87%)	**20** (95%)	**16** (89%)	**18** (100%)
Nombran la fracción	**15** (65%)	**15** (71%)	**15** (83%)	**16** (89%)
Significado de la fracción	**7** (30%)	**9** (43%)	**7** (39%)	**4** (22%)

Se siguen observando dificultades para contestar a las cuestiones sobre los significados de los términos de la fracción. Este hecho puede deberse a que los conocimientos que los alumnos utilizan para responder a las preguntas 1ª y 2ª surgen de la actividad manipulativa de la medida y los alumnos no están obligados a realizar otra interpretación de la fracción que no sea la del resultado de una medida. En cambio, para contestar a las cuestiones 3ª y 4ª es necesario realizar una interpretación de los significados del numerador y el denominador, y además saber expresar por escrito estas ideas.

Como se hizo en la sesión anterior, los alumnos han expresado públicamente los resultados obtenidos. En este caso algunos alumnos han trabajo con subunidades de tamaño 1/4 y otros con subunidades de tamaño 1/8 y han obtenido fracciones que se escriben de diferente forma: 5/4 y 10/8. El profesor ha intervenido para preguntarles si algunos alumnos se habían equivocado al medir. Después de varias intervenciones, los alumnos comprueban que las dos fracciones están bien escritas. El profesor les pregunta de nuevo que expliquen porqué la medida de una longitud puede escribirse con dos fracciones diferentes. En ambos grupos, algunos alumnos han aportado razonamientos valiosos. En particular, la alumna A09 indica que "son iguales porque un subunidad de 1/4 es lo mismo que 2 subunidades de 1/8, y que por lo tanto si el listón mide 5 de un cuarto también mide el doble (10) de un octavo". Como era presumible ha aparecido en los dos grupos por primera vez el concepto de equivalencia de fracciones.

<u>Valoración</u>
Los alumnos han mejorado su rendimiento en la fichas de medida de longitudes, en la escritura simbólica de la fracción y en la lectura de este nuevo sistema de representación. Aparentemente no se observan avances relativos a la comprensión de los significados del numerador y del denominador de la fracción. Por ello resulta imprescindible encontrar nuevos mecanismos de evaluación de los aprendizajes de este concepto en la línea que se ha sugerido en el apartado anterior.

<u>Toma de decisiones</u>
Dado que llevamos acumulado un retraso de dos sesiones respecto de la temporalización de la propuesta de enseñanza inicial, el equipo investigador suprime la medida del tercer listón de la ficha 3, que puede ser trabajo desde la medida de otra magnitud (masa o superficie). Así pues la siguiente sesión se dedicará a preparar la introducción del concepto de fracción equivalente.

Día 3-2-2000 (Séptima sesión)
<u>Plan previsto.</u>
Realizar la ficha 4 que plantea una situación de comunicación entre los alumnos para introducir la equivalencia de fracciones.

<u>Ejecución</u>
En ambos grupos los equipos formados por dos alumnos construyen un listón, realizan la medida de otro listón y, finalmente, valoran la bondad de las mediciones realizadas por el equipo con el que se ha intercambiado mensajes. Algún equipo (sólo dos, entre los seis grupos) no ha podido construir el listón. En esta ficha, el momento clave es el de la confrontación de los componentes de los equipos cuando comprueban que la fracción que obtienen como resultado de la medida del listón que han recibido no coincide con la medida del listón que habían cortado los componentes del otro equipo. A este momento, se ha llegado cuando el tiempo de clase se estaba agotando y los debates entre los diferentes equipos no se han podido escenificar de forma conjunta con todo el grupo de clase.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos asumen la realización de la ficha que se propone en esta sesión con mayor motivación. Se muestran expectantes ante el desarrollo de una tarea en la que se les anuncia que van a cortar un listón de madera para que otros compañeros midan el listón que han de construir. La realización de varias tareas similares como las realizadas en las dos sesiones precedentes tal vez hayan producido un cierto cansancio en algunos alumnos. En este sentido, se constata que cuatro alumnos del grupo 4º B muestran desgana en la realización de las tareas de clase. Esta apatía queda también plasmada en sus producciones escritas: no responden a algunas de las preguntas planteadas en las tarjetas de evaluación.

Asistencia de alumnos

En el grupo de 4º A faltan a clase tres alumnos (A46, A33 y A37). En el grupo de 4º B faltan a clase cuatro alumnos (A04, A15, A27 y A44)

Aspectos relacionados con la comprensión

En general, los equipos han sido capaces de señalar sobre un listón los extremos de otro listón cuya longitud se les hacia saber mediante una fracción escrita en un mensaje. Sólo dos equipos del grupo de 4º A no ha conseguido construir el listón.

Se observa que algunos alumnos dudan entre pedir subunidades obtenidas al fraccionar la unidad en tantas partes iguales como indique el denominador, o bien, según indique el numerador. Esta dificultad atañe directamente al significado del numerador y denominador de la fracción. Por este motivo parece oportuno valorar los significados del numerador y del denominador en la siguiente sesión.

La cantidad de fracciones equivalentes que han aparecido en esta ficha nos parece escasa. Las fracciones involucradas en ambos grupos son: 5/10, 4/8, 9/6 y 12/8 de unidad. Las fracciones equivalentes que han aparecido en el grupo 4º A han sido:

2/4 y 3/6 cuando han medido un listón de 5/10 de unidad

6/4 cuando han medido un listón de 9/6 de unidad

En el grupo 4º B han aparecido las fracciones:

3/6 cuando han medido un listón de 5/10 de unidad

3/6 cuando han medido un listón de 4/8 de unidad

3/2 cuando han medido un listón de 12/8 de unidad

La baja aparición de fracciones equivalentes pueden deberse a que los equipos emisores y receptores se han comunicado, sin desearlo, dado que los 12 equipos están situados muy próximos en el aula y es casi inevitable que el equipo receptor observe las subunidades con las que está trabajando el equipo emisor. Para evitar esta distorsión sería conveniente reducir el número de equipos y separar los equipos utilizando biombos.

Valoración

Ha sido interesante que los alumnos hayan realización una tarea, en cierta forma, contraria a la realizada en las fichas precedentes: construir un listón. De este modo el equipo investigador ha podido detectar dificultades en algunos alumnos que han dudado al interpretar la representación simbólica de la fracción cuando éstos debían solicitar el tipo y la cantidad de subunidades. En la siguiente sesión se procederá a realizar una evaluación del significado de los términos de la fracción. También, queda pendiente evaluar de forma conjunta, en el aula, los resultados obtenidos en la situación de comunicación trabajada durante esta sesión.

Toma de decisiones

Antes de continuar con la programación de la secuencia de enseñanza, se propone que en la siguiente sesión se evalúen dos aspectos:

1º) el significado que los alumnos dotan al numerador y denominador de la fracción, con la ayuda de la ficha nº 5.

2º) los resultados obtenidos por los alumnos en la situación de comunicación que han trabajado en esta sesión. Se pretende exponer y analizar el origen de las fracciones equivalentes encontradas por los alumnos.

Día 4-2-2000 (Octava sesión)

Plan previsto

El indicado en el párrafo anterior:

1º) Evaluar significado de que los alumnos dotan al numerador y al denominador

2º) Debatir los resultados obtenidos por los alumnos en la sesión anterior para poner de manifiesto la existencia de fracciones equivalentes.

Ejecución

Se cumple la planificación prevista que consiste en resolver tareas cortas de evaluación semántica de una fracción propia y otra impropia. Se trata que los alumnos resuelvan las siguientes cuestiones de forma individual, sin recibir ayudas o influencias de sus compañeros:

Quieres construir un listón de longitud $\frac{4}{7}$ de la unidad

¿Cuántas subunidades necesitas? ____

¿De qué longitud son las subunidades que necesitas? _______________________________

Quieres construir un listón de longitud $\frac{5}{3}$ de la unidad

¿Cuántas subunidades necesitas? ____

¿De qué longitud son las subunidades que necesitas? _______________________________

Aspectos actitudinales

Los alumnos de ambos grupos han seguido la clase con interés. En esta sesión el tiempo que los alumnos dedican a la realización material de tareas es menor, si se compara con la mayoría de las sesiones anteriores. En la segunda parte de la sesión se evaluará la situación de comunicación llevada a cabo en la sesión anterior. Se pretende que los alumnos intervengan para afirmar o negar, de modo razonado, si una fracción expresa la misma longitud que otra. Los alumnos de ambos grupos han participado en el debate suscitado alrededor de la equivalencia de fracciones.

Asistencia de alumnos

En el grupo de 4º A faltan a clase dos alumnas (A05 y A33). En el grupo de 4º B faltan a clase tres alumnos (A04, A27 y A44)

Aspectos relacionados con la comprensión

Respecto a la tarea de evaluación del significado que los alumnos poseen del numerador y del denominador de la fracción se constata una gran diferencia de rendimiento entre los grupos 4º A y 4º B: el grupo A obtiene mejores resultados que el grupo B.

Número de alumnos que responden correctamente a las preguntas de la tarjeta de evaluación de la ficha *3 y en la* ficha *de la sesión de hoy (octava):*

	Sesión 5ª en 4º A	Sesión 6ª en 4º A	Sesión 8ª en 4º A	Sesión 5ª en 4º B	Sesión 6ª en 4º B	Sesión 8ª en 4º B
Significado del numerador	10	9	17	9	6	16
Significado del denominador	9	9	15	5	4	5

Los resultados mejoran respecto a los obtenidos en las tarjetas de evaluación de la ficha 3. Esto puede deberse a varios factores:

1. Los alumnos han realizado más actividades de medida.
2. El diseño del instrumento de evaluación posibilita mejores resultados. En concreto:
   - 2.1. los alumnos tienen que escribir menos texto que en la tarjeta de evaluación de la tarea 3.
   - 2.2. puede serles de ayuda un mejor conocimiento de la representación oral de la fracción. A la pregunta: "Quieres construir un listón de longitud 4/7 de la unidad. ¿De qué longitud son las subunidades que necesitas?"; algunos alumnos contestan "séptimos"; posiblemente ayudados por la representación oral de la fracción "cuatro séptimos".

A pesar de que el diseño de la tarea posibilita la obtención de mejores resultados, muchos de los alumnos del grupo 4º B desconocen el significado de los términos de una fracción.

La revisión de la situación de comunicación se ha realizado con la ayuda de material. Se ha comenzado por estudiar la fracción 4/8 de unidad. Los alumnos, a indicación del profesor, han llevado sobre un listón de esta longitud 4 subunidades de longitud 1/8 de unidad. Después han ido expresando otras fracciones de la misma longitud y han cubierto la longitud del listón con subunidades de diversas longitudes. Una de las fracciones que ha aparecido es 5/10 con la que otros equipos habían construido un listón. También ha aparecido la fracción más simplificada 1/2, que permite encontrar otras fracciones equivalentes a 4/8 como 3/6; y que algunos alumnos se resistían a admitirla como "igual que 4/8".

En ninguno de los dos grupos ha habido tiempo para tratar las fracciones equivalentes a 12/8 ó 9/6 de la unidad.

Valoración
Teniendo en cuenta el número de intervenciones de los alumnos y la calidad de las mismas podemos suponer que éstos han comprendido que existen fracciones que se escriben de diferente forma pero que expresan la misma longitud.

Toma de decisiones
Continuar con la secuencia de enseñanza pasando a trabajar la magnitud masa.

Día 7-2-2000 (Novena sesión)
Plan previsto
En 4º A se pretende trabajar la ficha de pesar un tira-cordón.
En 4ª B se desea trabajar la misma ficha pero antes se evaluar el significado del numerador y denominador de una fracción con la magnitud longitud.

Ejecución
Se cumple la planificación realizada si bien hay que indicar que la ficha de evaluación que se realiza en 4º B no estaba prevista en la secuencia de enseñanza inicial.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos están motivados dado que se les propone trabajar formando equipos de cuatro alumnos utilizando el material propio de la magnitud masa: balanzas y pastillas de plastilina.

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A falta a clase una alumna (A07) y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el otro grupo asisten todos los alumnos, y se incorpora un nuevo alumno (A49).

Aspectos relacionados con la comprensión
Para pesar el tira-cordón los alumnos comprueban que pesa más que la unidad. Algunos grupos agregan una bola de plastilina a la unidad para nivelar la balanza cuando en el otro plato tienen el tira-cordón. Después realizan una conjetura sobre el masa de este trozo de plastilina y proceden a comprobarla. Alguno de los grupos que resuelven la tarea de esta forma concluyen escribiendo que la medida del tira -cordón es 1/4 de unidad. Cuando el profesor les coloca en un plato de la balanza un trozo de plastilina de 1/4 de unidad y en el otro plato el tira-cordón se perciben del error y contestan correctamente.
Algún grupo hace una bola de plastilina del mismo masa que el tira-cordón y afirma que ha resuelto la tarea. A estos grupos se les indica que la masa debe estar referida a la unidad de medida que es la pastilla de plastilina.
Aunque se han observado dificultades, todos los equipos de los dos grupos (excepto uno del grupo de 4º B) han terminado la ficha, dando la respuesta correcta.
Los alumnos, después de pesar, debían escribir el significado que asocian al numerador y denominador de la fracción que expresa la masa del tira-cordón (5/4 de unidad). Se observa que los alumnos siguen teniendo dificultades conceptuales referidas a la noción fracción y a los términos de ésta.

En el grupo 4º A se observa que tres equipos tienen dificultades para expresar el significado del numerador y denominador de la fracción 5/4. Este hecho contrasta con los resultados obtenidos por los alumnos de 4º A en la ficha de evaluación relativa a este concepto que realizaron el pasado viernes: la mayoría de los componentes de los equipos contestaron correctamente. Esto puede ser debido al diseño de aquella prueba, o bien, debido a las dificultades debidas al trabajo con la magnitud masa.

En el grupo 4º B se han puesto de manifiesto las mismas dificultades para expresar el significado de los términos de la fracción. Si bien en este grupo tales resultados eran esperados dado el bajo nivel de éxito que obtuvieron los alumnos en la ficha de evaluación realizada el pasado viernes. Debido a estos resultados el equipo de investigación propuso la repetición de una ficha análoga a la realizada en la sesión anterior, pero variando el orden de disposición de las dos preguntas y planteando fracciones impropias. Los resultados de esta prueba han mejorado de modo que se ha duplicado el número de respuestas correctas: diez alumnos han indicado el significado correcto del numerador y del denominador de una fracción.

Valoración
Los alumnos se han sentido inicialmente desconcertados porque no han tenido claro que deben fraccionar la unidad de medida, que en este caso es la pastilla de plastilina, en partes iguales. Cuando se les ha indicado o

han llegado por su cuenta a esta conclusión, la tarea se ha desarrollado sin mayores dificultades.

Toma de decisiones
Continuar con la secuencia de enseñanza pasando a trabajar la ficha que prepara la equivalencia de fracciones con la magnitud masa.

Día 8-2-2000 (décima sesión)
Plan previsto
En los dos grupos se pretende trabajar la situación de comunicación (ficha 7).

Ejecución
No se cumple el plan previsto dado que los alumnos del grupo 4ª A se sienten paralizados cuando intentan abordar la tarea. No saben cómo abordar la actividad de construir una bola de plastilina de masas 12/8 y 6/8 de unidad. El profesor realiza una intervención general a todo el grupo y pregunta a varios alumnos cómo construirían una bola de plastilina de masa 5/7 de la unidad. Ninguno de los alumnos preguntados responde correctamente. Ante esta situación el profesor suspende esta tarea y propone una análoga a la realizada en la sesión del día anterior que consiste en pesar una bisagra metálica (que pesa 7/8 de la unidad). Los alumnos intentan resolver esta nueva tarea cuando ha transcurrido media sesión y por lo tanto bastantes no disponen de tiempo para terminar la ficha.

En el grupo 4ª B, de entrada, los alumnos abordan la ficha alternativa propuesta en el grupo 4º A. En este grupo los alumnos terminan la ficha y cumplimentan la siguiente tarjeta de evaluación:

TAREA 7BIS

ALUMNOS: ________________________ *y* ________________________

________________________ *y* ________________________

La bisagra pesa ——— de unidad

¿Qué indica el numerador de la fracción? ________________________

¿Qué indica el denominador de la fracción? ________________________

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A asisten todos los alumnos y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el grupo 4º B falta a clase dos alumnos (A12 y A15)

Aspectos relacionados con la comprensión
Si se comparan las dos fichas que se han propuesto a los alumnos en esta sesión, podemos observar que la actividad de construir una bola de plastilina de la que los alumnos conocen su masa, expresado por una fracción, les resulta más compleja que la actividad de pesar un objeto.
Aunque los alumnos del grupo 4º A no han terminado de pesar la bisagra, han procedido a realizar fraccionamientos de la unidad de masa. No han terminado la ficha por varios motivos:

1. les ha faltado tiempo.
2. apenas tienen destreza en la realización de fraccionamientos
3. la masa de la bisagra se expresa con una fracción muy próxima a la unidad (7/8 de unidad)

Los alumnos de grupo 4ª A no han sabido cómo abordar la tarea cuando han intentado construir bolas de plastilina de masas 6/8 y 12/8 de unidad. Esta dificultad muestra una evidencia: el trabajo con la magnitud masa es más complejo que con la magnitud longitud. Los alumnos que intuyen como necesario el fraccionamiento de la unidad para medir cantidades de magnitud longitud ahora, con la masa, no reconocen la necesidad de fraccionar la unidad de masa.

Con la intención de analizar las causas de la dificultad se formulan dos hipótesis, para determinar si la presencia de la magnitud masa explica el fracaso en la realización de la ficha:
1º. La magnitud masa, que no aporta tantas percepciones visuales como la longitud, dificulta en los alumnos la toma de decisiones para enfrentarse a la resolución de la tarea.

2º. No se han consolidado los aprendizajes realizados por los alumnos relativos al significado de la fracción como resultado de la medida de una longitud.

Los alumnos del grupo de 4º B, que han trabajado por equipos la ficha necesitaron la ayuda de los profesores para concluir con éxito la tarea. La mayoría de los equipos han comprobado que la bisagra pesa menos que la unidad, pero después no saben cómo proseguir la tarea. Algunos equipos forman una bola de plastilina que equilibra la bisagra pero después proceden a fraccionar esta bola en vez de fraccionar la unidad de masa.

Conviene indicar que esta ficha es más compleja que la de pesar el tira-cordón que posibilita una estrategia de resolución aditiva, es decir, primero observan que la masa del tira-cordón es mayor que la unidad, de modo que separan esta masa en dos bolas de plastilina: una de la unidad y otra que completa la masa del tira-cordón; y, finalmente, proceden a pesar ésta última bola. En cambio, la estrategia más aconsejable para resolver la ficha de la bisagra es sustractiva: consiste en pesar la bola de plastilina que añadida a la bisagra pesa lo mismo que la unidad. Esta puede ser una de las razones que justificaría la falta de recursos mostrada por los alumnos en la resolución de la ficha.

Toma de decisiones
El equipo de investigación decide proponer en el grupo 4º A una ficha análoga a la que intentaron realizar sin éxito en la sesión anterior. Se pretende que las fichas tengan las mismas variables, a excepción de la magnitud que ahora será la longitud. El enunciado de la ficha y las condiciones en las que se propone a los alumnos son las siguientes:
El grupo de clase se divide en seis equipos de 4 alumnos cada uno. Tres de los equipos reciben un sobre cerrado en el que se les indica que construyan un listón de madera de longitud 6/8 de la unidad. Los restantes equipos reciben otro sobre cerrado en el que se les indica que deben construir un listón de 12/8 de la unidad.
Cada equipo dispone de tres cañas de longitud la unidad y pueden solicitar tiras de papel de longitud la unidad o utilizar los paneles de segmentos paralelos que están colgados en la pared. No se les ofrecen subunidades cortadas como en otras tareas realizadas con anterioridad, los alumnos deberán realizar el fraccionamiento de la unidad del mismo modo que lo realizan en las tareas con la magnitud masa. De esta manera se pretende que los alumnos realicen esta ficha en las mismas condiciones con las que han afrontado la ficha de la situación de comunicación con la magnitud masa.

Para contrastar resultados en el grupo 4º B se propone la situación de comunicación con la magnitud masa en la que, inicialmente, los alumnos deben construir bolas de plastilina de 6/8 y 12/8 de la unidad.

Día 9-2-2000 (undécima sesión)
Plan previsto
En los dos grupos se propone trabajar la situación de comunicación. En el grupo 4º A con la magnitud longitud y el grupo 4º B con la magnitud masa.

Ejecución
Los equipos de los dos grupos necesitan utilizar toda la duración de la sesión para construir el listón o la bola de plastilina. En el grupo de 4º B hay tres equipos que están en condiciones de afrontar la segunda parte de la ficha. Dos de estos equipos se "cruzan" las bolas de plastilina que han construido y consiguen pesarlas.

Asistencia de alumnos
En los grupo 4º A asisten todos los alumnos y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el 4º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
En general, se puede afirmar que los alumnos del grupo 4º A saben que deben realizar el fraccionamiento de la unidad de medida de longitud: los componentes de dos equipos se han levantado y han ido a utilizar los paneles de segmentos paralelos; y otros equipos han pedido al profesor tiras de papel para fraccionar.
Ahora bien, tres equipos han necesitado la ayuda del profesor para saber en cuántas partes debían fraccionar la unidad. Comentamos algunas actuaciones:

El equipo compuesto por los alumnos A05, A10, A32 y A36 que tienen que construir un listón de 6/8 deciden fraccionar la unidad en 6 partes iguales, pero cuando se les pregunta el motivo de su decisión entonces dicen que lo van a fraccionar en 8 partes.
El equipo compuesto por los alumnos A28 y A31 que tienen que construir un listón de 12/8 dicen que tienen que fraccionar la unidad en 12 partes iguales, pero que como no pueden porque en el panel de segmentos paralelos no se puede, entonces lo van a fraccionar en 8 partes.
El equipo compuesto por los alumnos A13, A21, A33 y A37 que tienen que construir un listón de 12/8

dicen que tienen que fraccionar la unidad en 12 partes iguales, y cuando el profesor les pide que expliquen la razón de esta decisión la alumna nº 7 pregunta: " Pero, ¿el numerador no indica en cuántas partes hay que fraccionarlo?"

La técnica del fraccionamiento no ha sido evaluada dado que el equipo investigador es consciente que los alumnos no tienen destreza en realizar fraccionamientos de la unidad y, en particular, fraccionar la unidad en ocho partes <u>iguales</u>.

Los equipos del grupo 4º B también han tenido dificultades para realizar la primera parte de la ficha: construir bolas de plastilina de masa 6/8 y 12/8. Sólo tres grupos han construido con éxito las bolas de plastilina de los masas indicadas:

El equipo formado por los alumnos A01, A12, A26 y A49 han conseguido construir la bola de masa 12/8 después de haber fracasado en el primer intento. Sin embargo, este equipo no ha podido intercambiar la bola con la del otro equipo que le correspondía dado que éste último ha conseguido construir la bola cuando terminaba la sesión.
El equipo formado por los alumnos A06, A08, A27 y A34 han terminado las dos fases de la ficha. Primero han construido la bola de masa 12/8 de la unidad y después han pesado una bola de 6/8 de unidad, dando como resultado de la medida 6/8 de la unidad, posiblemente porque han preguntado a los componentes del equipo emisor cuál es la masa de la bola. La respuesta natural hubiera sido 3/4 de la unidad.
El equipo formado por los alumnos A04, A20, A24 y A25 han terminado las dos fases de la ficha. Primero han construido la bola de masa 6/8 de la unidad y después han pesado una bola de 12/8 de unidad, dando como resultado de la medida 3/2 de la unidad.

Los otros tres equipos han recibido ayuda de los profesores y han terminado la primera fase de la ficha.

<u>Valoración</u>
Dado que el 50% de los equipos del grupo 4º A ha tenido dificultades para realizar con éxito esta ficha en la que se ha trabajado la magnitud longitud, al confundir el significado del numerador y denominador de la fracción, no podemos concluir que el origen de las dificultades observadas por los alumnos de ambos grupos al realizar las tareas radique en el trabajo con la magnitud masa. Mas bien, cabe suponer que:

1º. Los alumnos tienen más dificultades cuando resuelven fichas en las que interviene la magnitud masa que cuando interviene la magnitud longitud.

2º. El conocimiento que poseen los alumnos sobre el significado de la fracción no está consolidado, podemos decir que está en fase de acomodación. Y por ello, las dificultades de los alumnos en esta fase se manifiestan con más crudeza cuando trabajan con una magnitud más compleja, como es la masa.

La complejidad de la magnitud masa frente a la longitud viene dada porque:
1º. los alumnos han disfrutado de más experiencias previas con la magnitud longitud que con la magnitud masa.
2º. las acciones que realizan los alumnos con la longitud pueden ser percibidas y evaluadas con la vista, mientras que las realizadas con la masa no tienen una percepción visual tan clara. Tal vez sea ésta la razón de la desconexión entre las partes fraccionadas de la unidad y la unidad de masa que el equipo investigador ha observado en las conversaciones mantenidas con los alumnos. Ahora bien, este fenómeno también ha sido observado, aunque en un número menor de casos, cuando se ha trabajado la magnitud longitud.

De las interferencias entre la magnitud longitud y masa en la secuencia de enseñanza quedan muchos aspectos por investigar, y surgen preguntas como:
¿Se debería haber propuesto una secuencia de enseñanza de la fracción como medida de cantidades de magnitud longitud más extensa, antes de abordar la enseñanza de la fracción como medida de cantidades de masa?.
¿Cómo ha influido (de forma positiva, negativa o, tal vez, neutra) la enseñanza de la fracción como resultado de una medida de masa en los aprendizajes realizados por los alumnos del concepto de fracción como medida de la cantidad de longitud?.
¿Se debía haber suprimido la enseñanza de la fracción como medida de cantidades de masa?

El equipo investigador a partir de los datos recogidos en la ficha de evaluación de la sesión octava pensaba que los alumnos del grupo 4º A comprendían el significado de los términos de la fracción. Sin embargo, a partir de los resultados aparecidos en esta ficha, hay que cuestionar los resultados de aquella evaluación, puesto que en aquel momento los alumnos no tenían que construir realmente el listón: debían indicar la longitud de la subunidad que debían utilizar (sin necesidad de indicar el fraccionamiento de la unidad) y el número de subunidades. Además, la representación oral de la fracción les podía dar pautas para responder correctamente al ítem. Por ejemplo, si se les dice que deben construir un listón de 4/7 de unidad, al nombrar "cuatro séptimos" la propia representación oral de la fracción les indica que las subunidades serán de longitud "un séptimo" y que se necesitarán 4 subunidades.

En el grupo 4º B ha faltado tiempo para terminar la ficha y, por lo tanto, no han aparecido fracciones equivalentes mediante la observación de fracciones que se escriben de diferente forma pero que expresan la misma cantidad de masa. La resolución de la ficha ha mostrado de nuevo las dificultades mostradas por los alumnos del grupo 4º A cuando esta ficha les fue propuesta en la sesión décima.

Toma de decisiones

En ambos grupos continuar con la enseñanza de la fracción como resultado de la medida de la magnitud masa.

En la siguiente sesión se propone, para el grupo de 4º A, la situación de comunicación con las fracciones 9/6 y 6/4 de la unidad de masa. Para el grupo de 4º B revisar la situación de comunicación llevada a cabo en la sesión del día anterior.

Día 10-2-2000 (duodécima sesión)

Plan previsto

En el grupo de 4º A, trabajar la situación de comunicación para la magnitud masa con las fracciones 9/6 y 6/4 de la unidad. En el grupo 4º B se pretende revisar los resultados obtenidos por los alumnos en la ficha de situación de comunicación para el peso realizada en la sesión anterior.

Ejecución

Los equipos del grupo 4º A en la ficha de situación de comunicación con la masa realizan las dos fases de la ficha: construyen bolas de plastilina y pesan la que ha sido construida por otro grupo. Sin embargo, les falta tiempo para establecer entre ellos un debate sobre los resultados obtenidos.

En el grupo de 4º B el profesor comenta las producciones realizadas por los alumnos en la ficha de la sesión del día anterior. Como aparecen fracciones equivalentes el profesor propone la siguiente tarea:

"Os entrego una bola de plastilina que pesa 6/8 de la unidad. Debéis encontrar otra fracción, diferente de 6/8, que indique la masa de la bola de plastilina".

Todos los equipos terminan esta tarea. Hay tres equipos que acaban antes y reciben el encargo de construir bolas de plastilina de masa 6/4 y 9/6 de la unidad. Estos equipos también concluyen esta tarea.

El equipo formado por los alumnos A01, A12, A26 y A49 recibe la consigna de construir una bola de plastilina de masa 9/6 de la unidad. Realiza con éxito la tarea.

El equipo formado por los alumnos A02, A41, A38 y A30 recibe la consigna de construir una bola de plastilina de masa 6/4 de la unidad. Realiza con éxito la tarea, después de recibir ayuda del profesor.

El equipo formado por los alumnos A14, A15, A19 y A44 recibe la consigna de construir una bola de plastilina de masa 9/6 de la unidad. El profesor les indica cómo realizar la tarea.

Asistencia de alumnos

En los grupo 4º A falta una alumna (A46). En el 4º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Se observa una mejoría en los resultados obtenidos por los equipos del grupo 4º A dado que todos concluyen la tarea. Si bien, hay que indicar que todos los equipos han necesitado recibir alguna indicación de los profesores. En el comienzo de la tarea, varios equipos estaban paralizados: no sabían qué hacer. Cuando los profesores les han preguntado por el significado del denominador de la fracción han comenzado a resolver la tarea.

Con este tipo de ayuda, todos los equipos han construido las bolas de plastilina de masa 6/4 ó 9/6 de la unidad.

Cuando se han cruzado las bolas de plastilina, los equipos han comenzado a pesarlas. En esta fase de la tarea no han recibido ayuda de los profesores. Los equipos han recibido una tarjeta de evaluación para que escriban, con una fracción, la masa de la bola e indiquen los significados que asignan al numerador y denominador de la fracción.

Cuatro equipos expresan correctamente la masa de la bola: tres escriben la fracción 3/2 y uno la fracción 6/4. (Este último no se sabe si ha pesado la bola o ha escrito la fracción que se les indicaba en la carta para que procedieran a construir la bola de este peso).

En cuanto al significado de los términos de la fracción sólo dos equipos dan respuestas satisfactorias.

Se ha observado que la tarea de pesar una bola de plastilina es más compleja que la de pesar un objeto compacto, sin posibilidad de descomponerlo. La opción de descomponer el objeto a medir lleva a algunos alumnos a fraccionar el objeto a pesar, en lugar de la unidad de medida.

Valoración

Los resultados obtenidos por los equipos en esta tarea corroboran la hipótesis de que la magnitud masa es más compleja que la longitud porque no ofrece referencias visuales como esta última. Se observa que dos equipos escriben como resultado del peso 1/2 de unidad y , con longitud, posiblemente se hubieran percatado que la cantidad a medir es mayor que la unidad y por lo tanto hubieran rectificado. Otra circunstancia que se tuvo presente al diseñar esta tarea para trabajar con la magnitud masa es que las bolas que se han intercambiado los equipos son del mismo peso y ningún alumno parece haberse percatado.

Las actividades de construcción de una bola de plastilina y, en el caso de la longitud la construcción de listones, son más complejas que las tareas de medición directa, posiblemente porque los alumnos deben saber interpretar los términos de la fracción para poder comenzar la tarea.

Un ejemplo de las dificultades para interpretar el significado del numerador y denominador lo aporta el equipo del grupo 4º B formado por los alumnos A14, A15, A19 y A44 cuando intentan construir una bola de plastilina de masa 9/6 de la unidad. El profesor les pregunta como van a construir la bola y una alumna indica van a fraccionar la bola en 9 partes iguales. cuando el profesor les dice que expliquen porque debe ser en 9 partes no saben qué responder. El profesor les hace una pregunta más concreta: ¿en cuántas partes fraccionaríais la unidad para obtener una bola que pesara 1/6?. Contestan de inmediato que en 6 partes iguales. El profesor sigue preguntando: ¿Y para hacer una bola de 2/6 de unidad?. Las alumnas contestan en 6 partes y añadirían 2 de esas partes. El profesor les sigue preguntando: ¿Y para hacer una bola de 6/6 de la unidad?, y las alumnas contestan de modo correcto. Pero cuando el profesor les pregunta: ¿Y para hacer una bola de 7/6 de la unidad?, la alumna A15 responde que fraccionaría la unidad en 7 partes iguales. Esta alumna se ha inventado una regla: fraccionar la unidad en tantas partes como indique el número mayor. Sin embargo, esta alumna había contestado correctamente a las preguntas sobre el significado de los términos de la fracción para la magnitud longitud realizadas en la octava sesión.

Todo parece indicar que, en este caso, no ha habido transferencia de significados de la magnitud longitud a la magnitud masa. Es decir, los conocimientos adquiridos en el trabajo con la magnitud longitud no le han servido de ayuda para la magnitud masa.

Toma de decisiones

En el grupo 4º A se debe realizar una evaluación conjunta de las producciones de los alumnos realizadas durante esta sesión, que permita al profesor repasar el concepto de fracción equivalente.

En el grupo 4º B se puede comenzar el trabajo con la magnitud superficie, pero el equipo investigador propone dedicar la siguiente sesión a la construcción de bolas de plastilina cuyo peso venga dado por una determinada fracción, justificando tal decisión en dos motivos:

1. las dificultades observadas en todo el proceso de enseñanza con la magnitud masa.
2. llevar el desarrollo de la secuencia de enseñanza acompasado con el grupo 4º A.

Día 11-2-2000 (decimotercera sesión)

Plan previsto

En el grupo 4º A se pretende revisar los resultados obtenidos por los alumnos en la ficha de situación de comunicación para el peso realizada en la sesión anterior.

En el grupo de 4º B, se propone dos tareas nuevas. La primera tarea consiste en "construir una bola de plastilina de masa 4/3 unidades". A los equipos que terminen la tarea se les propone: "encontrar fracciones que se escriban de diferente forma pero que tengan el mismo peso que la bola de plastilina que han construido".

Ejecución

En 4º A se cumple con el plan previsto. Lo mismo ocurre en el grupo 4º B.

Los equipos del grupo 4º B al realizar la primera tarea solicitan la ayuda de los profesores. Sólo un grupo es autónomo y termina la tarea con celeridad. Cuando los equipos han construido la bola de plastilina reciben una tarjeta de evaluación para que escriban el significado del numerador y denominador de la fracción 4/3. Después se le propone la siguiente tarea y, tan sólo dos equipos, encuentran fracciones equivalentes. El profesor, antes de concluir la sesión, valora con todo el grupo las fracciones equivalentes que han aparecido.

Aspectos actitudinales

Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. La disposición de la clase en esta sesión ha variado: los alumnos no forman equipos porque se va a proceder a evaluar los resultados obtenidos en la sesión anterior.

Asistencia de alumnos
En los grupo 4º A asisten todos los alumnos y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el 4º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos de ambos grupos van adquiriendo destreza en las actividades de fraccionamiento de la unidad, que es una bola de plastilina, pero no tienen una imagen mental clara de las acciones que están realizando con el material. Por esta razón los alumnos muestran inseguridad cuando deben comenzar las tareas.

Los conocimientos adquiridos mediante las experiencias tenidas con la magnitud longitud no saben transferirlos, en general, a la magnitud masa. Un caso paradigmático es el de la alumna A09 que indica que las fracciones 6/4 y 3/2 son iguales, y cuando el profesor le pide que justifique esta igualdad, indica razonamientos de tipo aritmético: " porque 6 es el doble que 3 y 4 el doble que 2". El profesor le recuerda que días atrás dio un razonamiento para la longitud basado en las acciones realizadas con el material y le pide que haga ahora lo mismo con las bolas de plastilina. La alumna responde: "ahora no sabría hacerlo".
Según esto, los alumnos tienden a suplir la falta de comprensión inventando reglas que, en ocasiones, como esta que acabo de describir, son ciertas y en otras (como la descrita en la sesión anterior por la alumna A15) no lo son.

Los alumnos están en una fase de instrucción en la que necesitan visualizar las acciones que realizan con el material. Y estas acciones quedan más ocultas cuando trabajan con la magnitud masa. La longitud permite percepciones visuales más claras que la masa. La cantidad de longitud se observa con la vista como está descompuesta en subunidades o fraccionamientos de la unidad, y en el caso de la masa no es evidente que, por ejemplo, 3 bolitas de un tercio de la unidad "a simple vista" tengan el mismo peso que la bola de peso la unidad, como queda de manifiesto es la respuesta dada por la alumna A31.
Uno de los múltiples ejemplos de las dificultades observadas, puede verse en la grabación de video realizada en esta sesión. Tres componentes de un equipo del grupo 4º A (A05, A32 y A36) intentan pesar una bola de plastilina (cuyo peso es 3/2 de unidad). Proceden separando una bola de peso la unidad y, después, pesan la parte restante y comprueban que pesa 1/2 unidad. Los alumnos dicen que la bola pesa "una unidad y media". Cuando el profesor les pide que escriban, en la pizarra, con una fracción, en la el peso de la bola, después de varias consultas entre ellos escriben 1/2 de unidad.

Valoración
Se vuelve a poner de manifiesto que el trabajo con la magnitud masa presenta más dificultades que con la magnitud longitud. Como se ha indicado antes, no ha habido transferencia de significados de la magnitud longitud a la magnitud masa. Es decir, los conocimientos adquiridos en el trabajo con la magnitud longitud no le han servido de ayuda para la magnitud masa.

Sin embargo, sería prematuro dar contestación a las preguntas formuladas en la undécima sesión. Pensamos que hay que esperar a que se consoliden los conocimientos de los alumnos y a que reciban instrucción de la fracción como resultado de la medida de cantidades de superficie.

Toma de decisiones
Comenzar en la siguiente sesión el trabajo con la medida de la magnitud superficie.

Día 14-2-2000 (decimocuarta sesión)
Plan previsto
Trabajar la ficha 8 que ha sido modificada con el objetivo de introducir la fracción como medida de la cantidad de superficie. Se optado por ampliar la ficha 8 que denominamos ficha 8BIS y cuya resolución se propone a los alumnos como trabajo para casa.

Ejecución
En ambos grupos se cumple con el plan previsto.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Los alumnos han trabajado con agrado y se han mostrado muy participativos. Los alumnos han resuelto, de forma individual, siete tareas cortas pero muy intensas y, además, todos han intervenido en la evaluación conjunta de las tareas.

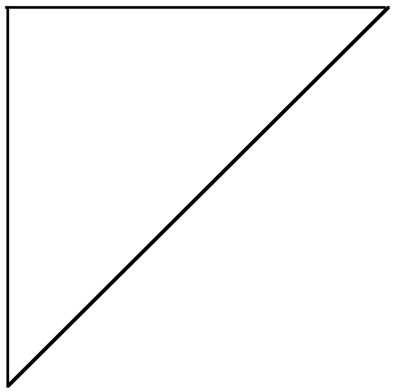
Asistencia de alumnos

En los grupo 4º A faltan dos alumnas (A07 y A23) y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el 4º B asisten todos los alumnos.

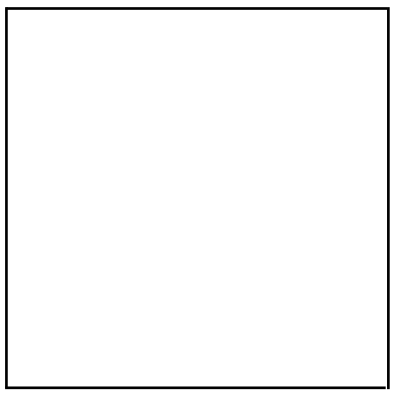
Aspectos relacionados con la comprensión

El desarrollo de la sesión en los dos grupos muestra que el trabajo con la magnitud superficie les resulta mucho más fácil que con la magnitud masa. Antes de realizar una valoración de las tareas realizadas en esta sesión conviene indicar la secuencia de actividades realizadas.

1º. Se distribuye a cada alumno el siguiente mantel:



Y se pregunta a los alumnos cual es la superficie del mantel. De forma deliberada, el profesor no les ha proporcionado la siguiente unidad de medida:

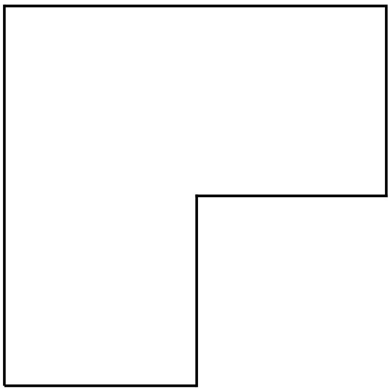


En los dos grupos, algunos alumnos han dado respuestas sin reparar en la necesidad de utilizar una unidad de medida. Cuando alguno ha preguntado por la unidad de medida el profesor les ha entregado una a cada alumno y han resuelto con éxito esta primera actividad.

2º. El profesor les propone doblar por la mitad la unidad de medida. Y cuando la han doblado les pregunta qué superficie tiene el mantel que han obtenido.
Antes de que expresen la solución, el profesor les sugiere que levanten la mano los que sepan cual es la superficie. En el grupo de 4º A tres alumnos no levantan la mano y cuando, se le solicita la medida a uno de ellos, contesta: "un cuarto". Esta respuesta obliga al profesor a plantear a estos alumnos, y al resto de la clase, la medida de media caña con la magnitud longitud y la construcción de un listón de 1/4 de la unidad.

Cuando se retoma el trabajo con la magnitud superficie, el profesor propone comparar la superficie de los manteles construidos en las actividades 1 y 2. Los alumnos aportan diferentes formas de comparación y esto permite al profesor comentar que existen figuras que tienen diferente forma pero que tienen la misma cantidad de superficie.

3º Cada alumno recibe un mantel con la consigna de que mida la superficie del mismo:



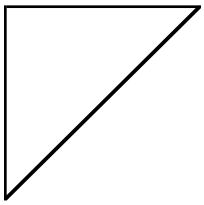
Los alumnos resuelven la tarea con éxito. Todos perciben como subunidad adecuada 1/4 de unidad, aunque aparecen dos estrategias diferentes que pueden simbolizarse mediante las operaciones:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \text{ ó } \frac{4}{4}-\frac{1}{4}$$

4º. Los alumnos reciben una unidad de medida y se les propone construir un mantel de superficie **1/3** de la unidad.

Todos los alumnos construyen el mantel, aunque algunos han necesitado ayuda. Algunos alumnos intentar construirlo realizando fraccionamientos por la mitad de la unidad.

5ª Los alumnos reciben el siguiente mantel con la consigna de medir su superficie:

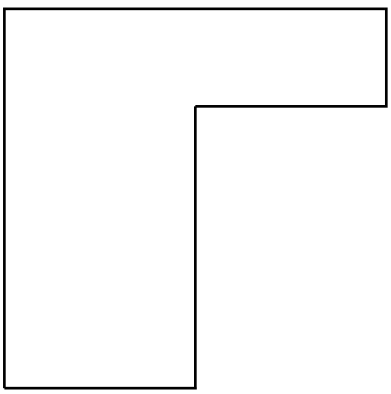


La mayoría de los alumnos resuelven con éxito esta actividad.

6ª Los alumnos reciben el siguiente mantel con la consigna de medir su superficie:

Esta actividad también la resuelven con éxito la mayoría de los alumnos.

7ª Los alumnos reciben el siguiente mantel con la consigna de medir su superficie:



A diferencia de las actividades anteriores, el profesor indica a los alumnos que escriban la superficie del mantel en lugar de expresarla verbalmente.

En el grupo de 4º A tan sólo tres alumnos dan respuestas erróneas: la alumna A10 indica $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; el alumno A29 indica $\frac{2}{4}$; y el alumno A28 indica $\frac{1}{10}$ porque inventa una regla equivocada por la que decida "sumar denominadores".

En el grupo de 4º B seis alumnos dan respuestas erróneas. Una de ellas (alumna A20) escribe bien "2 cuartos y un octavo" y más abajo escribe $\frac{2}{8}$. Los alumnos no han tenido dificultades para cubrir el mantel con subunidades, los errores han aparecido cuando en el momento de expresar con una fracción la cantidad de superficie.

Como tarea para casa se propone la ficha nº 9 que consiste en construir el mayor número de manteles de superficie $\frac{1}{4}$ de la unidad pero que tengan diferente forma. Para incentivar a los alumnos el profesor les dice que el que más manteles construya recibirá un premio.

Valoración

Los rendimiento de los alumnos en ambos grupos es alto. Es evidente que los alumnos van a obtener mayores niveles de éxito en el trabajo con la magnitud superficie si se compara con el peso.

Toma de decisiones

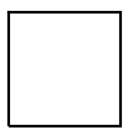
Para afianzar la técnica de la medida de superficie se propone la realización de actividades análogas a las propuestas en la ficha 8, de modo que la dificultad de éstas vaya creciendo y, además, aparezcan subunidades más pequeñas como **1/16** de unidad que admite representaciones geométricas sencillas. También se debe proceder a evaluar la ficha 8. Y, sino se agota la sesión, continuar con la programación de la secuencia de enseñanza.

Día 15-2-2000 (decimoquinta sesión)

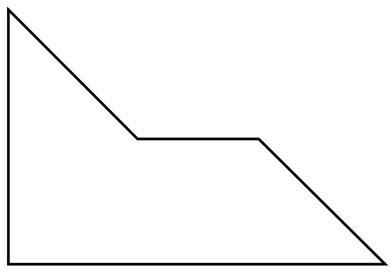
Plan previsto

Las actividades de medida que se piensan proponer en ambos grupos, consisten en calcular la superficie de los siguientes manteles:

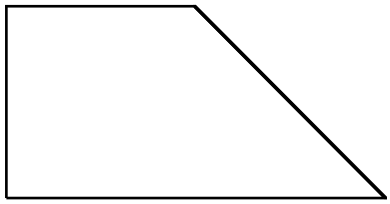
1º De superficie $\frac{1}{16}$ de unidad



2ª De superficie $\frac{1}{3}$ de unidad.



3º De superficie $\frac{3}{8}$ de unidad.



4º De superficie $\frac{3}{8}$ de unidad.

Ejecución
En el grupo 4º A no se evalúa la ficha nº 9 porque los alumnos no la han realizado, sólo han trabajado las actividades indicadas en el apartado anterior. En el grupo 4º B se ha evaluado la ficha nº 9 y se han realizado las actividades 1, 2 y 4 de las descritas en el apartado anterior.

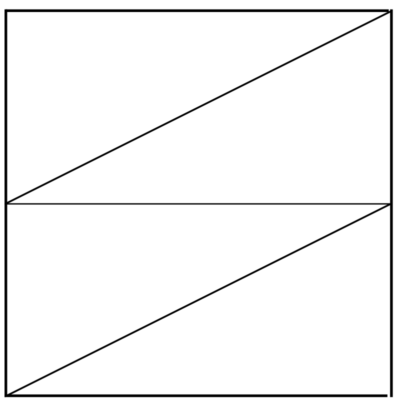
Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Sorprende que los alumnos el grupo 4º A no hayan resuelto la ficha propuesta para casa. Algunos alumnos dicen que no han tenido tiempo porque realizan actividades extraescolares. En el grupo de 4º B sólo cuatro alumnos han trabajado la ficha con resultados aceptables.

Asistencia de alumnos
En los grupo 4º A faltan dos alumnas (A09 y A23). En el 4º B asisten todos los alumnos.

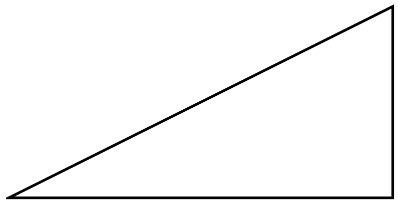
Aspectos relacionados con la comprensión
Por lo que se refiere a las actividades de medida de cantidades de superficie menores que la unidad los resultados por los alumnos de los dos grupos son buenos, por encima del 75% de tasa de éxito.

En el grupo 4º B se ha evaluado la ficha nº 9. La justificación de la construcción de los manteles ha posibilitado la introducción de fracciones equivalentes a **1/4** de unidad. Cuatro alumnos (A01, A15, A24 y A34) han aportado soluciones y, en particular, los dos primeros alumnos han realizado un buen trabajo. Mostramos algunas soluciones aportadas por los estos alumnos:

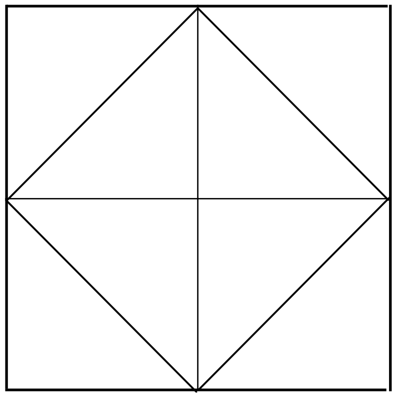
A) Si fraccionan la unidad en 4 partes iguales del siguiente modo:



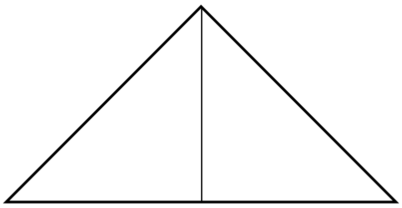
aparece la solución:

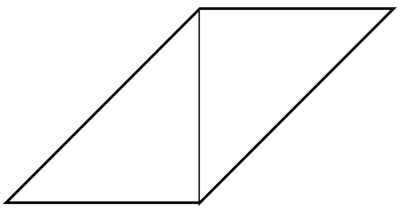


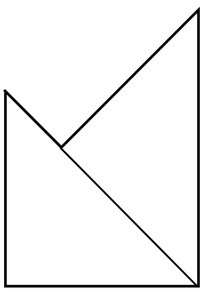
B) Si fraccionan la unidad en 8 partes iguales del siguiente modo:



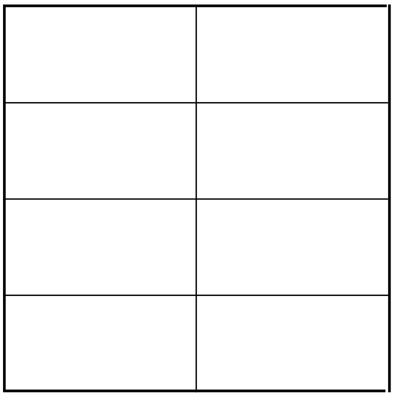
aparecen las soluciones:



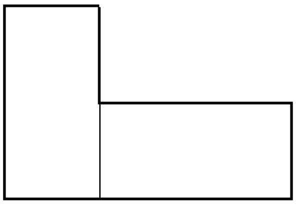


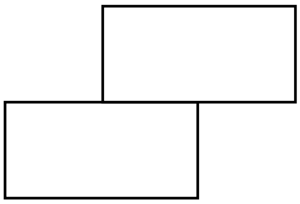


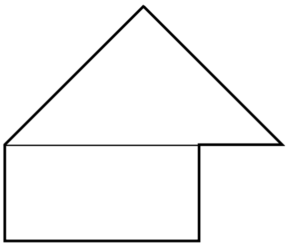
C) Si fraccionan la unidad en 8 partes iguales del siguiente modo:



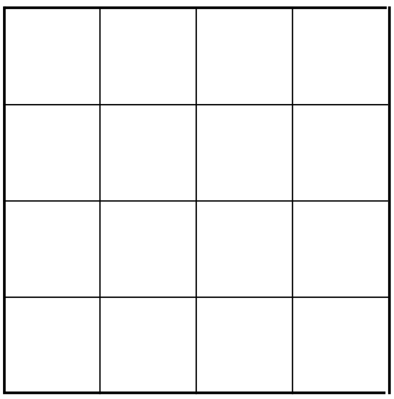
aparecen las soluciones:



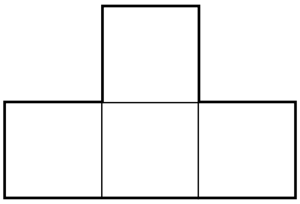




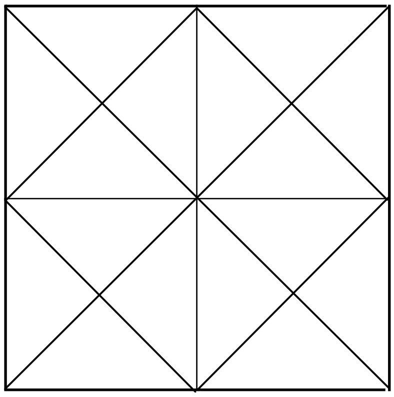
D) Si fraccionan la unidad en 16 partes iguales del siguiente modo:



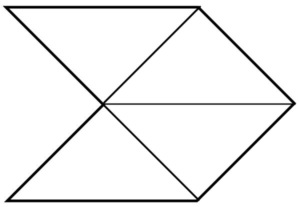
aparece una solución no repetida:

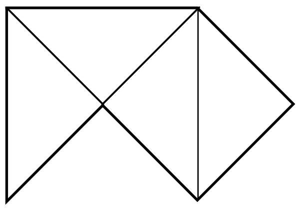


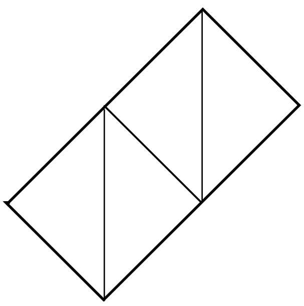
E) Si fraccionan la unidad en 16 partes iguales del siguiente modo:

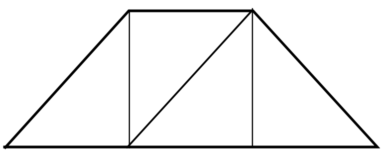


aparecen las soluciones:

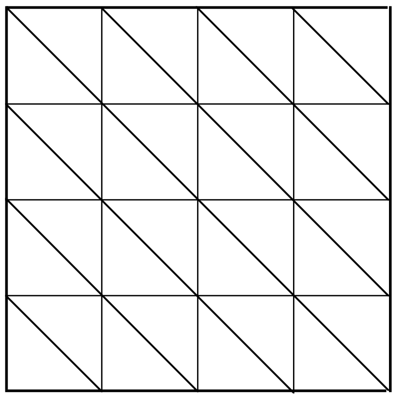




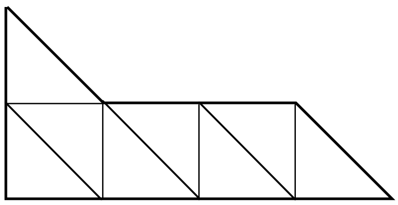


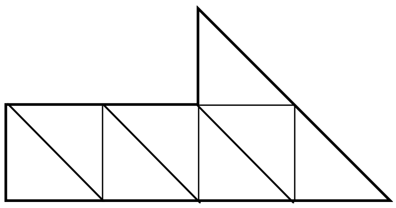


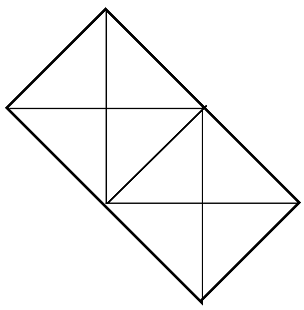
F) Si fraccionan la unidad en 32 partes iguales del siguiente modo:



aparecen las soluciones:







Se observa que este mantel rectangular aparece en el apartado E) cuando se fraccionaba en 16 partes iguales, por lo tanto $\frac{4}{16} = \frac{8}{32}$. Así, pues, aparece en múltiples ocasiones el concepto de fracciones equivalentes.

Toma de decisiones

Se propone continuar con la programación de la secuencia de enseñanza, con la propuesta de las fichas 10 y 11, en las que se debe medir la superficie de dos manteles que tienen una cantidad de superficie mayor que la unidad.

Día 16-2-2000 (decimosexta sesión)

Plan previsto

Proponer, resolver y evaluar las fichas 10 y 11. Con estas tareas se pretende que los alumnos realicen actividades de medida, aparezca la concepto de fracción equivalente y se incida en el significado de los términos de la fracción desde la magnitud superficie.

Ejecución
En ambos grupos se ha resuelto y evaluado la ficha 10. No se propone la resolución de la ficha 11 dado que se ha agotado el tiempo de la sesión entre la realización y la evaluación conjunta de la ficha 10.
La evaluación de la ficha 10 ha posibilitado la aparición de fracciones equivalentes a **3/2** de unidad. En ambos grupos el profesor ha introducido, de forma explícita, la noción de fracción equivalente, aprovechando que los alumnos han aportado diferentes fracciones como resultado de la medida de superficie de un mismo mantel. Así, el profesor ha recogido diversas respuestas de los alumnos, ha comprobado que las fracciones expresan la medida del mantel y ha escrito en la pizarra:

$$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\frac{12}{8}=\frac{24}{16}$$

El profesor ha preguntado a diferentes alumnos por el significado del numerador y denominador de las fracciones equivalentes que éstos han aportado. Se constatan dificultades en la expresión verbal y escrita de estos significados.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Los alumnos el grupo 4º A siguen sin resolver la ficha propuesta para casa el pasado lunes.

Asistencia de alumnos
En los grupo 4º A faltan tres alumnas (A09, A23 y A40) y dos alumnas se ausentan para ir a recibir clase de apoyo. En el grupo 4º B falta un alumno (A41).

Aspectos relacionados con la comprensión
Para valorar los resultados de los alumnos cuando han realizado las fichas 10 y 11 se debe conocer las condiciones en las que éstos han afrontado la tarea. Los alumnos han recibido un folio en la ficha 10 y una cartulina en la ficha 11 cuya superficie debían medir y dos unidades de superficie. Si precisaban más material el profesor les daba más unidades, pero nunca subunidades.

De este modo se desea que las subunidades sean construidas por los alumnos, para que exista una conexión clara entre las subunidades utilizadas y la unidad de medida. Como se recordará esta conexión no era percibida por algunos alumnos en el trabajo realizado con la magnitud longitud. En efecto, cuando los alumnos debían medir o construir un listón éstos utilizaban subunidades que estaban previamente fraccionadas. Este proceder facilitaba la realización de la tarea y acortaba los tiempos de resolución de las tareas, pero tenía el peligro de obviar la unidad de medida.

Esta organización de la ficha, obliga a los alumnos a construir la subunidades con las que van a probar si cubren la superficie a medir. Esta puede ser la razón por la que los alumnos han necesitado más tiempo del esperado para resolver la tarea. Sin embargo, pensamos que esta planificación mejora el proceso de enseñanza y, por otra parte, favorece la evaluación de los aprendizajes por cuanto aporta datos para un análisis más fiable, al proponer un problema de medida en un estado "más puro", con sólo dos objetos: la unidad de medida y el objeto a medir.

Respuestas dadas por los 19 alumnos del grupo 4º A referidas a la medida del mantel:

Soluciones	Varias fracciones equivalentes	3/2	6/4	12/8	2/3
Nº alumnos	1	1	9	4	4

Sobre el significado que los alumnos asignan a los términos de la fracción, nueve alumnos expresan correctamente los significados del numerador y del denominador (alumnos A10, A11, A13, A42, A21, A29, A33, A35 y A36)

Respuestas dadas por los 23 alumnos del grupo 4º B referidas a la medida del mantel:

Soluciones	Varias fracciones equivalentes	3/2	6/4	12/8	Erróneas
Nº alumnos	10	2	7	1	3

Sobre el significado que los alumnos asignan a los términos de la fracción, seis alumnos expresan correctamente los significados del numerador y del denominador (alumnos A01, A02, A18, A19, A45 y A30)

Valoración
La tasa de éxito, en ambos grupos, referida a la medida de la cantidad de superficie es alta. Por el contrario, los alumnos tienen graves dificultades para expresar el significado que dotan al numerador y denominador de

la fracción. Nos preguntamos si el origen de estas dificultades radica en un problema de expresión o tiene su origen en una comprensión incompleta o escasa. De momento, no podemos responder a esta cuestión, y posiblemente confluyan ambas razones. Sin embargo, una diferencia tan dispar entre las tasas de éxito de la medida de la cantidad de superficie y los significados de la fracción muestra la existencia de dificultades para expresar del significado de estos términos después de haber resuelto correctamente la ficha de medida. Además, la explicación de los significados del numerador y denominador de una fracción no es una tarea sencilla dado que intervienen simultáneamente tres objetos: la unidad, la subunidad que se construye y el objeto a medir.
Otro aspecto a considerar es el referido a las respuestas erróneas dadas por los alumnos de 4º A (A07, A31, A32 y A37). Lo curioso de este caso es que todos los alumnos que se equivocan aportan como solución 2/3 de unidad. En este caso, el error se justifica por el escaso significado que dan al numerador y denominador de una fracción. Los alumnos han cubierto el mantel con una unidad y media unidad. Puede que lleguen a verbalizar la situación como "tres subunidades de superficie media unidad" y, sin embargo, escriben la representación simbólica de la fracción de forma incorrecta. En este caso, los alumnos optan por situar los números 2 y 3, tal vez, al azar en los espacios reservados al numerador y denominador. Para que los alumnos dispongan de más esquemas conceptuales referidos a las fracciones se recomienda afrontar pronto el estudio de la ordenación de fracciones que les permite valorar si una fracción es mayor o menor que otra. En nuestro caso, el conocimiento de la relación de orden de las fracciones permitiría descartar la opción 2/3 por ser de menor superficie que la unidad, y nosotros buscamos fracciones mayores que unidad.
Finalmente, llama la atención que diez alumnos del grupo 4º B hayan optado por expresar el resultado de la cantidad de superficie con diversas fracciones equivalentes, y sin embargo, sólo un alumno del grupo 4º A procede de este modo. La razón de esta asimetría en las respuestas dadas por los dos grupos, posiblemente, se debe al proceso de instrucción, y en concreto, a que en el grupo 4º A no se ha realizado una evaluación conjunta de la ficha 8. Al evaluar aquella ficha con el grupo 4º B, durante la sesión anterior, se realizaron diversos fraccionamientos de la unidad que posibilitaban la construcción de nuevas formas de mantel manteniendo invariable la superficie de los mismos y, por lo tanto, se refuerza el concepto de fracción equivalente.

<u>Toma de decisiones</u>
Se propone continuar con la programación de la secuencia de enseñanza, con la propuesta de la ficha 11.

Día 17-2-2000 (decimoséptima sesión)
<u>Plan previsto</u>
Proponer, resolver y evaluar la ficha 11.

<u>Ejecución</u>
En ambos grupos se ha resuelto y evaluado la ficha 11. En el grupo 4º A los alumnos resuelven la siguiente tarea: "Debéis construir un mantel <u>rectangular</u> que tenga una superficie de **3/4** de unidad". En el grupo 4º B no queda tiempo para resolver esta tarea.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Los alumnos el grupo 4º A siguen sin resolver la ficha propuesta para casa el pasado lunes.

<u>Asistencia de alumnos</u>
En los grupo 4º A faltan dos alumnas (A09 y A23). En el grupo 4º B falta una alumna (A04).

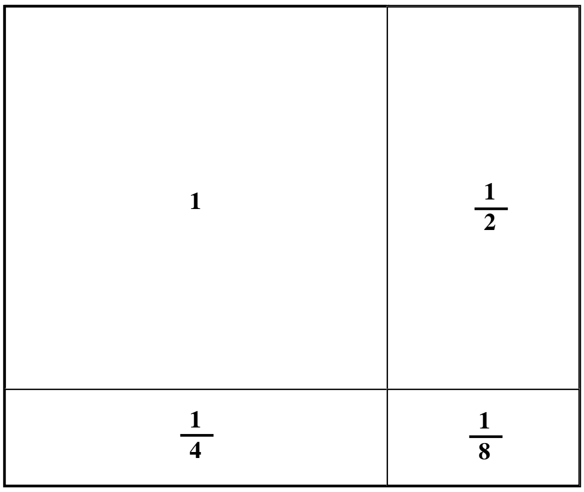
<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Esta ficha es análoga a la anterior en lo referente a estructura de la tarea y a las unidades de comprensión utilizadas para su evaluación, si bien, el grado de dificultad es ahora mayor. A pesar de esto, los resultados han mejorado con respecto a los obtenidos en la sesión anterior en el grupo 4º A. Todos los alumnos del grupo 4º A referidas a la medida de la cartulina: todos los alumnos contestan correctamente **15/8** de unidad.

Sobre el significado que los alumnos asignan a los términos de la fracción, diez alumnos expresan correctamente los significados del numerador y del denominador (alumnos A05, A10, A11, A13, A28, A29, A31, A33, A36 y A40)

Los 23 alumnos del grupo 4º B aportan las siguientes respuestas en la ficha 11:

Soluciones	Varias fracciones equivalentes	15/8	30/16	Erróneas	No contestan
Nº alumnos	3	7	6	4	3

Sobre el significado que los alumnos asignan a los términos de la fracción, siete alumnos expresan correctamente los significados del numerador y del denominador (alumnos A01, A08, A14, A15, A17, A34 y A30). En el momento de realizar la evaluación conjunta de la ficha el profesor describe en la pizarra la estrategia seguida por mayoría de los alumnos. La cantidad de superficie de la cartulina la obtienen mediante una descomposición con subunidades de **1/8 unidad**:

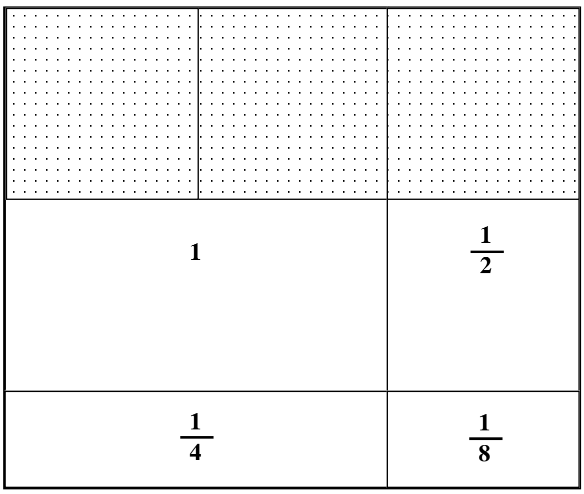


La alumna A22 dice: "He pensado en octavos porque es la subunidad más pequeña". De esta forma aparece como medida de la cartulina la fracción $\frac{15}{8}u$. En este mismo grupo, cuando el profesor les propone encontrar otra fracción que indique la misma superficie, sólo una alumna (A10) aporta la fracción $\frac{30}{16}u$.

El profesor vuelve a recordar la existencia de fracciones equivalentes y escribe en la pizarra: $\frac{15}{8}=\frac{30}{16}$

También les recuerda las acciones a realizar en el proceso de medida y las ilustra con el siguiente gráfico:

Respecto a la ficha resuelta en el grupo de 4º A, bastantes alumnos han construido un mantel cuya superficie es la fracción equivalente a 3/4. Una alumna (A13) ha llevado tres veces la subunidad de tamaño 1/4 sobre la cartulina y ha doblado ésta para mostrar el mantel a sus compañeros. La región punteada es el mantel construido por esta alumna:



Valoración
Los alumnos de ambos grupos han obtenido mejores resultados en la medida de la superficie del mantel propuesta en la ficha 11 si se compara con los de la ficha 10 y si, además, se tiene en cuenta que el grado de dificultad de la ficha 11 es superior a la de la ficha 10.

Los significados de los términos de la fracción que los alumnos expresan, por escrito, cuando resuelven la ficha 11 no mejoran substancialmente respecto de las respuestas dadas por los mismos escolares en la ficha 10. Y ello después de que en esta última ficha varios alumnos han expresado el significado del numerador y del denominador de la fracción 3/2 y de otras equivalentes. Los alumnos tienen dificultades para expresar los significados de los términos de la fracción aunque tengan éxito en la actividad de medida de la superficie del mantel.

Toma de decisiones
Se decide no resolver la ficha 12, que propone una situación de comunicación con la magnitud superficie, por tres motivos:
1. Las dos situaciones de comunicación trabajadas en sesiones anteriores no se han podido terminar por falta de tiempo necesario para que los alumnos terminen las actividades.
2. Los resultados obtenidos con la magnitud superficie son buenos y, además, ha aparecido en las fichas anteriores la noción de fracción equivalente.
3. La temporalización de la secuencia de enseñanza lleva un retraso considerable debido fundamentalmente a las dificultades que los alumnos han tenido con la magnitud peso.

En la siguiente sesión se trabajará la ficha 13 sobre la equivalencia de fracciones.

Día 18-2-2000 (decimoctava sesión)
Plan previsto
Proponer, resolver y evaluar la ficha 12. Proponer la resolución de la ficha 13 como trabajo para casa durante el fin de semana. Además, del fin de semana los alumnos dispondrán de un día más para resolver la ficha dado que el lunes, 21 de febrero, realizan una excursión y las sesiones de clase se retoman el día siguiente.

Ejecución
En ambos grupos se ha resuelto y evaluado la ficha 13.
Cuando los alumnos, en ambos grupos, han terminado la ficha se realiza una evaluación conjunta de la misma. El profesor pregunta a los alumnos que indiquen las fracciones encontradas y justifica la aparición de las mismas según los fraccionamientos realizados sobre la unidad. En este caso la unidad de medida que se considera es la de superficie. Las primeras fracciones equivalentes que nombran los alumnos son:

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8}$$

Una alumna (A31) aporta la fracción 15/10 y un alumno (A28) que conoce la regla de obtención de fracciones equivalentes a nivel simbólico, aunque no se ha explicitado en el aula, sugiere la fracción 48/32. Cuando el profesor le pide que justifique, pensando en la magnitud superficie o longitud, la obtención de esta fracción el alumno no sabe construirla en el modelo. El profesor la justifica utilizando la magnitud superficie e indica la conveniencia de comprender la regla de obtención de fracciones equivalentes.

A los alumnos se les propone como trabajo para casa que encuentren fracciones equivalentes a 1/4. El profesor les ofrece unidades de superficie y les indica que, si lo desean, pueden utilizarlas para resolver la ficha.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Los alumnos el grupo 4º A siguen sin resolver la ficha propuesta para casa el pasado lunes.

Asistencia de alumnos
En los grupo 4º A faltan tres alumnos (A09, A16 y A23). En el grupo 4º B falta una alumna (A25).

Aspectos relacionados con la comprensión
En primer lugar debemos indicar que los alumnos han tenido dificultades para interpretar la tarea a realizar por dos motivos:
1. El formato de la ficha es novedoso para ellos.
2. La ficha tiene más texto que la de otras fichas que han resuelto con anterioridad.

Para reconducir la resolución de la ficha el profesor lee en voz alta el enunciado y explica el objetivo de la misma. Después ofrece en el grupo 4º A la opción de utilizar el material para trabajar con la magnitud longitud, superficie o masa. A la vista de los resultados obtenidos en este grupo por los alumnos que trabajan con la magnitud masa, aconseja a los alumnos del grupo 4º B que utilicen la magnitud longitud o superficie, pero no la masa.

La práctica totalidad de los alumnos ha decidido utilizar algún tipo de material. Veámoslo en la siguiente tabla:

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
Razonamiento	1	1
Material de longitud	14	13
Material de superficie	2	4
Material de masa	4	0
Material no especificado	0	5
Total alumnos	*21*	*23*

El número de fracciones equivalentes correctas que han encontrado son:

Nº de fracciones equivalentes	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
3	9	8
2	2	4
1	4	7
0	6	4
Total alumnos	*21*	*23*

Para evaluar con qué magnitud tienen más éxito los alumnos de ambos grupo estudiamos el valor medio del número de fracciones equivalentes encontradas en función de la estrategia utilizada:

Estrategia utilizada	*Media de fracciones por alumno en 4º A*	*Media de fracciones por alumno en 4º B*
Razonamiento	3	3
Material de longitud	2	1,6
Material de superficie	2	2,75
Material de masa	0	-

Valoración

De la interpretación de estos datos obtenemos las siguientes conclusiones:

1. Que los pocos alumnos que han dado el salto hacia estrategias de resolución más abstractas, sin utilización del material, obtienen las tres fracciones equivalentes que solicitaba el enunciado de la ficha.
2. Que los alumnos se encuentran más familiarizados con el material para trabajar la magnitud longitud.
3. Que los pocos alumnos que resuelven la tarea pensando en la magnitud superficie obtienen tan buenos resultados, o incluso mejores, que los alumnos que utilizan la magnitud longitud.
4. Que se pone de manifiesto las dificultades de los alumnos cuando trabajan con la magnitud masa, de modo que ninguno de los cuatro alumnos del grupo 4º A consiguen obtener una sola fracción equivalente.

Como valoración general de la ficha confirmamos que los alumnos no están todavía en condiciones de abandonar las estrategias manipulativas, muy próximas al modelo. Y aunque muestran comprensión cuando otro compañero de clase explica que 6/4 es equivalente a 3/2 utilizando un razonamiento, muchos se sienten inseguros y demandan el material para resolver las fichas.

Queda por estudiar la influencia que la introducción de estrategias de representación gráfica en el proceso de enseñanza de fracciones equivalentes ejerce en el desarrollo conceptual de los alumnos, en el sentido de propiciar el salto hacia estrategias de resolución más abstractas y, por lo tanto, más alejadas de los modelos manipulativos. La estrategia consistente en la utilización de representaciones gráficas estaba contemplada en la propuesta de enseñanza pero no se ha introducido en este momento por falta de tiempo; no obstante, se va a trabajar en las sesiones siguientes cuando se trabaje el orden de fracciones.

En general, la mayoría de los alumnos de ambos grupos comprenden el sentido de la existencia de fracciones equivalentes a una dada y, además, mediante la utilización de material manipulativo, saben encontrar fracciones equivalentes.

Toma de decisiones
El equipo de investigación considera que tiene suficiente información sobre el conocimiento y destrezas que tienen los alumnos del concepto de fracción equivalente y dado el desfase que acumula la fase experimental se decide no proponer la resolución de la ficha 14 y proponer directamente la resolución de la ficha nº 15 que introduce la regla de obtención de fracciones equivalentes a nivel simbólico.

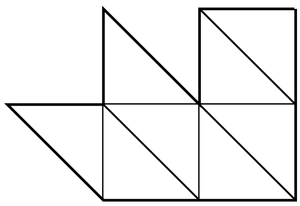
Con esta decisión se pretende ganar tiempo para desarrollar la mayor parte de la propuesta inicial de enseñanza. En la próxima sesión se va a evaluar los resultados de la ficha 13 en ambos grupos. Además, en el grupo 4º A se procederá a valorar una ficha pendiente desde hacia varias sesiones: la construcción de manteles de superficie 1/4 de unidad.

Día 22-2-2000 (decimonovena sesión)
Plan previsto
En ambos grupos evaluar la ficha 13. En el grupo 4º A se van revisar los manteles construidos por los alumnos de superficie 1/4 de unidad que proponía la ficha nº 9. Además, se prevé proponer la resolución de la ficha 15.

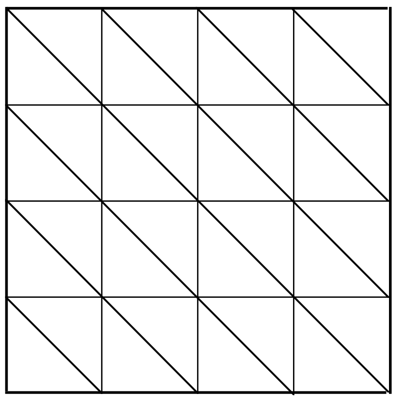
Ejecución
En el grupo 4º A se ha procedido a evaluar la ficha nº 9. Varios alumnos traen manteles (en particular el alumno A11 aporta muchas soluciones). Para cada mantel se comprueba si mide 1/4 de unidad y se estudia con qué fraccionamiento de la unidad se ha construido. De esta forma, se ponen de manifiesto fracciones equivalentes a 1/4 de unidad.

En el aula se han presentado los mismos manteles que los descritos en la sesión decimoquinta.

El alumno A11 presenta un nuevo tipo de mantel:



que se obtiene fraccionando la unidad en 32 partes iguales del siguiente modo:



En el grupo 4º B se han evaluado los resultados de la ficha 13, de modo que los alumnos proponen las fracciones y el profesor las justifica utilizando el material manipulativo de superficie:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{8}{32} = \frac{16}{64}$$

Después los alumnos afrontan la resolución de la ficha 15 modificada del siguiente modo:

Inventa una regla para encontrar MUCHAS fracciones equivalentes a la fracción $\frac{1}{4}$.

Para encontrar fracciones equivalentes a la fracción $\frac{1}{4}$ he hecho ___________________________________

Después de realizar una evaluación conjunta de la ficha el profesor formula la regla de obtención de fracciones equivalentes, que es la que escribe una alumna (A24): "Multiplicar el numerador y denominador por un mismo número", y que de forma completa se enuncia: " Si multiplicas o divides el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número obtienes otra fracción equivalente".

Como trabajo para casa les profesor propone, en ambos grupos, la siguiente ficha con el objetivo de ejercitar la regla de obtención de fracciones equivalentes:

Ficha 15 BIS.-

Encuentra el numerador o denominador de la fracción para que sea equivalentes las siguientes fracciones:

a) $\frac{4}{6} = \frac{10}{\square}$

b) $\frac{15}{12} = \frac{\square}{8}$

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos grupos están motivados y tienen buena disposición al trabajo.

<u>Asistencia de alumnos</u>
En el grupo 4º A asisten todos los alumnos y en el grupo 4º B falta un alumno (A38).

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
La mayoría de los alumnos de 4º B no saben que es una regla. Cuando reciben indicaciones por parte del profesor de la utilidad de enunciar una regla para la obtención de fracciones equivalentes, bastantes alumnos no dan un enunciado de tipo general, sino que más bien describen el modo con el que trabajan con los modelos manipulativos cuando buscan fracciones equivalentes.

Así pues, la ficha les ha resultado muy complicada de modo que los alumnos han tenido muy poco éxito. Estos datos quedan reflejados en la siguiente tabla:

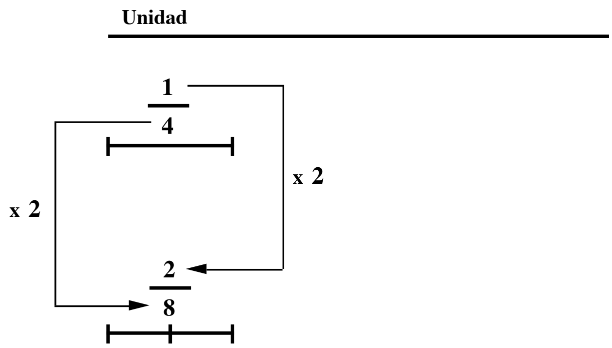
Respuestas	Enuncian una regla correcta	Enuncian una regla incompleta	Enuncian una regla incorrecta	Aportan explicaciones basadas en el modelo	No contestan
Nº alumnos	3	4	2	7	7

<u>Valoración</u>
De la interpretación de estos datos obtenemos las siguientes conclusiones:

1. La tarea de formular reglas generales excede la capacidad de los alumnos de este nivel educativo. Para afrontar este tipo de tareas se precisan capacidades de razonamiento como la generalización, la búsqueda de regularidades, etc. que no suelen poseer los alumnos de esta edad.

2 Se debería modificar la propuesta de enseñanza relativa a la regla de obtención de fracciones equivalentes de modo que los alumnos dispongan, además del material, de representaciones gráficas, que les puedan ayudar en el descubrimiento de la regla. Así se espera que los alumnos puedan realizar una conjetura, aunque no esté expresada con precisión, de la relación existente entre el numerador y denominador de dos fracciones equivalentes.

El razonamiento, basado en las experiencias manipulativas de los alumnos, puede venir ejemplificado en una representación gráfica con la magnitud longitud o superficie:



3. Para que los alumnos puedan conjeturar la regla de obtención de fracciones equivalentes se aconseja que el profesor realice las siguientes indicaciones:

"Hemos visto que algunas fracciones equivalentes a $\frac{1}{4}$ son: $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{4}{16}=\frac{8}{32}=\frac{16}{64}$

Recuerda que $\frac{2}{8}$ es equivalente a $\frac{1}{4}$, porque si partes por la mitad una subunidad de longitud $\frac{1}{4}$ tienes el DOBLE de subunidades que ahora son de longitud $\frac{1}{8}$. Y en una longitud de $\frac{1}{4}$ unidad tienes el DOBLE de subunidades de longitud $\frac{1}{8}$ unidad".

Toma de decisiones

Como en el grupo 4º A se ha revisado la tarea de construcción de manteles de superficie 1/4 de unidad ha faltado tiempo para proponer en el aula la resolución de la ficha 15. En principio esta ficha debería realizarse en la siguiente sesión pero los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 4º B aconsejan no proponer su resolución en el grupo 4º A y ganar tiempo para continuar con la secuencia de enseñanza que va desfasada en la temporalización. De esta forma en la siguiente sesión, la secuencia de enseñanza va a ir, de nuevo, acompasada en ambos grupos.

Día 23-2-2000 (vigésima sesión)

Plan previsto

En ambos grupos evaluar la ficha 15 BIS. Después está previsto comenzar la enseñanza del orden de fracciones con la propuesta de las fichas 15 y 16.

Ejecución

En ambos grupos se evalúa la ficha 15 BIS y, después, en el grupo 4º A el profesor propone que los alumnos formulen de forma verbal la regla de obtención de fracciones equivalentes.

El predominio de las estrategias aditivas frente a las multiplicativas se manifiesta en la respuesta dada por un alumno del grupo 4º A (A36) cuando escribe que 10/12 es equivalente a 4/6 y lo justifica diciendo que "he añadido 6 al numerador y al denominador"

Cuando el profesor pregunta al resto de los alumnos si está fracción es equivalente a 4/6 sólo una alumna (A09) aporta otra solución diferente:

$$\frac{10}{12}=\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$$

El profesor les pregunta si las fracciones $\frac{10}{12}$ y $\frac{10}{15}$ son iguales y por lo tanto, si las dos soluciones son correctas. Como la mayoría de los alumnos se encuentran desorientados, a la vista de la solución planteada por un alumno $\frac{4}{6}=\frac{10}{12}$, el profesor les propone encontrar el numerador de la siguiente fracción:

$$\frac{4}{6} = \frac{\square}{12}$$

Utilizando el material propio de la magnitud longitud los alumnos observan que $\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$

Y por lo tanto, la fracción $\frac{10}{12}$ no es equivalente ni a $\frac{8}{12}$ ni a $\frac{4}{6}$.

Con la ayuda del material se comprueba que la solución $\frac{10}{15}$ es correcta y el profesor propone a los alumnos que encuentren el razonamiento incorrecto por el que la mayoría asumía como fracción equivalente de $\frac{4}{6}$ la fracción $\frac{10}{12}$. De esta forma pretendemos que aparezca la estrategia multiplicativa que modeliza las acciones realizadas con el material.

Una alumna del grupo 4º A trae resuelta la segunda parte de la ficha, aportando como solución:

$$\frac{15}{12} = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$$

y justificando que como no podía pasar de "doceavos" a "octavo", se dio cuenta que 15 = 3 x 5 y que 12 = 3 x 4.

Como en los dos grupos de docencia la ficha ha sido resuelta por muy pocos alumnos el profesor la resuelve utilizando el material con el que se ha trabajado la magnitud longitud. Después propone que a los alumnos que formulen verbalmente la regla de obtención de fracciones equivalentes.

Los alumnos han resuelto la ficha 16 de comparación de fracciones pero no ha dado tiempo para realizar la evaluación conjunta de la ficha.

Asistencia de alumnos

En el grupo 4º A falta una alumna (A33) y dos alumnas se ausentan para asistir a clases de apoyo (A46 y A47). En el grupo 4º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Respecto de la ficha sobre equivalencia debemos constatar de nuevo que los alumnos han mostrado preferencia por la aplicación de estrategias aditivas en situaciones inapropiadas en las tareas de búsqueda de fracciones equivalentes.

Como era de esperar, esta tarea les ha resultado muy difícil por varias razones:

1. Las fracciones vienen representadas de forma simbólica y no hay referencia a ningún modelo manipulativo.
2. La fracción equivalente no se percibe con claridad pues en el primer ejercicio no se observa cual va a ser el factor (número natural) que multiplicado por 4 va a dar 10; y en el segundo ejercicio tampoco se sabe qué factor multiplicado por 8 va a dar 12.
3. No han realizado con anterioridad tareas de este mismo tipo.

El equipo de investigación valoró la dificultad de la ficha y decidió proponer esta ficha como trabajo fuera del aula con el objetivo de conectar las acciones manipulativas con la regla de obtención de fracciones equivalentes que es propia del lenguaje simbólico, durante la evaluación de la ficha.

Respecto al trabajo realizado por los alumnos en la resolución de la primera actividad relativa a la ordenación de fracción (ficha 15) los niveles de éxito en ambos grupos son muy altos: sólo una alumna (A05) de 4º A y dos alumnos (A06 y A14) de 4º B no ordena bien las fracciones. Cabe indicar que se trata de una ficha sencilla porque las dos fracciones a comparar poseen el mismo numerador.

Pero sin duda la potencialidad de esta ficha radica en el diseño de la tarjeta donde los alumnos escriben su respuesta y las estrategias utilizadas en la resolución. Los alumnos tienen la opción de utilizar materiales manipulativos, representaciones gráficas o directamente realizar razonamientos basados en el concepto de fracción.

Resulta altamente significativo que bastantes alumnos han recurrido a utilizar razonamientos o bien realizar representaciones gráficas sin haber recibido enseñanza de la utilización de esta última estrategia. Veámoslo en la siguiente tabla:

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
Con material	5	6
Con repr. gráficas	8	6
Con razonamientos	8	12
Total alumnos	*21*	*24*

Todas las estrategias basadas en razonamientos se basan en el concepto de fracción y sólo dos alumnas de 4º A (A09 y A10) aportan otro razonamiento basado en la existencia de la unidad como fracción intermedia entre ambas.

Valoración
Con la resolución conjunta de la ficha 15BIS con los grupos clase se consigue el objetivo propuesto: ejercitar la regla de obtención de fracciones equivalentes conectando la regla con las acciones realizadas con el modelo. A la vista del escaso número de alumnos que ha resuelto la ficha 15BIS el equipo de investigación observa que se debería haber intentado cubrir el mismo objetivo con la propuesta de tareas de menor grado de dificultad, como la siguiente:

FICHA 15BIS MODIFICADA
Encuentra el numerador o denominador de la fracción para que sea equivalentes las siguientes fracciones:

a) $\frac{2}{4} = \frac{3}{\square}$

b) $\frac{6}{2} = \frac{\square}{5}$

Se observará que, en estas tareas, se mantiene la necesidad de buscar una tercera fracción equivalente a la dada como paso intermedio para resolver la ficha. Se pretende obviar la propuesta de tareas que sean aplicación inmediata de la regla de obtención de fracciones equivalentes.

Los buenos resultados del trabajo realizado por los alumnos en la ficha 16 de comparación de fracciones se explican por la facilidad de la tarea pero, también, por los aprendizajes realizados por éstos a lo largo de la secuencia de enseñanza. Por un lado los alumnos han recibido enseñanza sobre el significado de la fracción como resultado de una medida y del concepto de fracciones equivalentes. Pero no menos importantes son los habilidades y estrategias metodológicas que los alumnos han aprendido a utilizar:

capacidad de comunicación de ideas matemáticas con otros compañeros
capacidad de rebatir argumentos y defender los razonamientos propios.
estrategias basadas en la búsqueda de regularidades
estrategias basadas en representaciones gráficas
capacidad de decisión entre diversos materiales manipulativos para resolver una tarea.
capacidad de decisión entre diversas estrategias de resolución.

En este aspecto la resolución de la ficha 16 permite a los alumnos optar entre diversas estrategias de resolución. En particular la estrategia basada en la realización de representaciones gráficas ha sido utilizada con éxito por una tercera parte de los alumnos de los dos grupos, sin que éstos hayan recibido enseñanza previa sobre la utilización de esta estrategia.

Toma de decisiones
Continuar con la secuencia de enseñanza y, en particular, trabajar los conocimientos y estrategias relativas al orden de fracciones.

Día 24-2-2000 (vigésimo primera sesión)

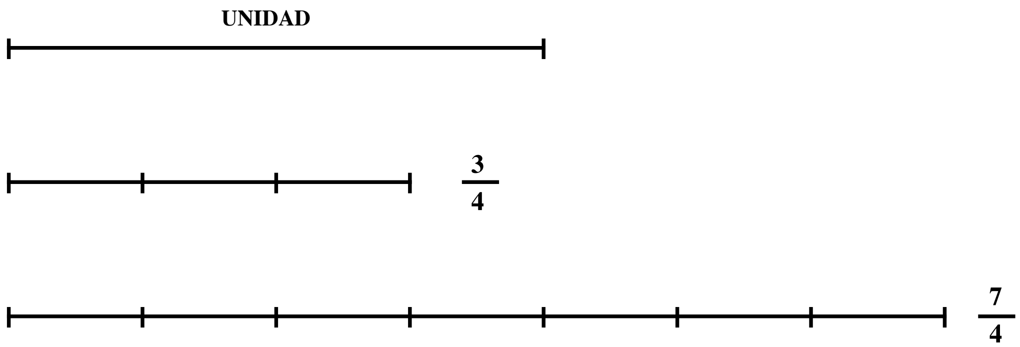
Plan previsto

En ambos grupos evaluar la ficha 16. Después está previsto resolver y evaluar las fichas 17 y 18.

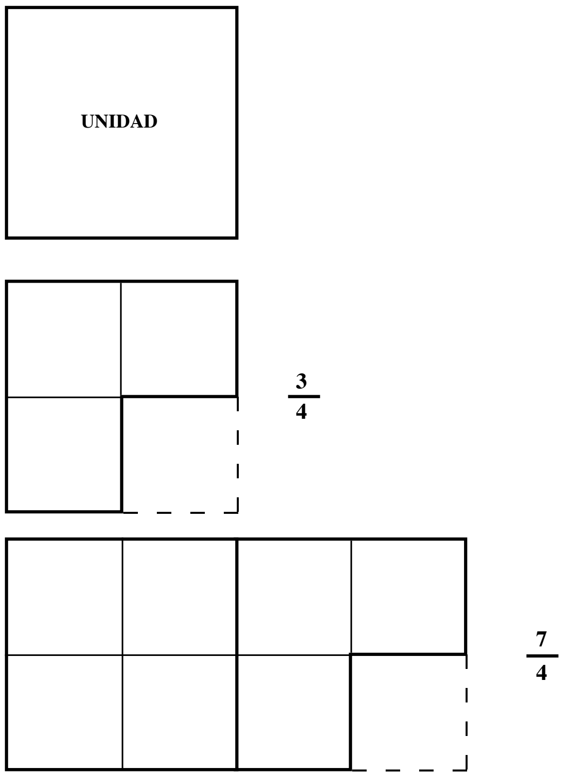
Ejecución

Se cumple con el plan previsto pero no da tiempo de evaluar la tarea 18. Los primeros minutos de la sesión de clase con cada uno de los dos grupos se emplean en evaluar la ficha 16, de modo que el profesor comenta las estrategias utilizadas por los alumnos para ejemplificar en la pizarra diversas representaciones gráficas y solicita a los alumnos que indiquen los razonamientos que han puesto en juego para resolver la tarea. Las representaciones gráficas descritas siguen los modelos de longitud y superficie.

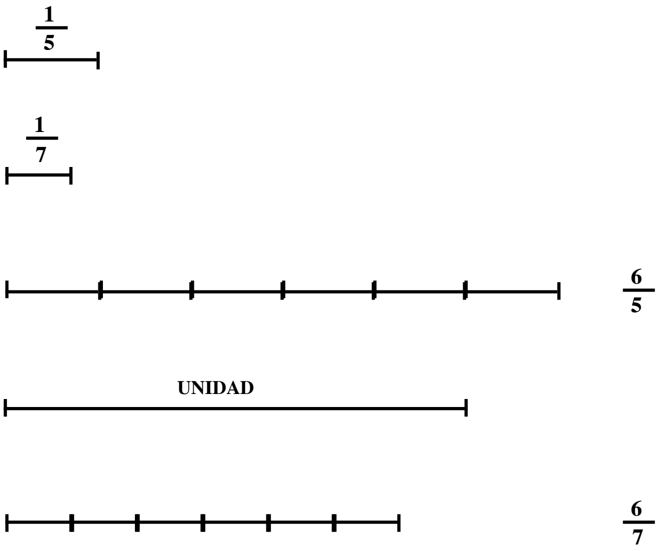
Las representaciones gráficas con la magnitud longitud son del tipo:



Las representaciones gráficas con la magnitud superficie son del tipo:



Cuando se realiza la evaluación de la ficha 17 el profesor vuelve a mostrar algunas de las representaciones gráficas que los alumnos aportan, casi siempre pensando en el modelo de medida de longitud:



El profesor propone a los alumnos que expliquen las estrategias basadas en razonamientos. Todas ellas se basan en el significado de fracción como medida y en la observación de que 1/7 es menor que 1/5. Una alumna del grupo de 4º A (A09) expone un razonamiento, más avanzado por comparación de las fracciones con la unidad.

Después los alumnos resuelven la ficha 18, pero apenas queda tiempo para realizar la evaluación conjunta en el aula. El profesor les entrega la tarjeta de evaluación de la ficha 19 y les propone que realicen esta tarea en casa durante el fin de semana (el viernes, 25 de febrero, se suspende la sesión de clase de matemáticas).

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A faltan dos alumnas (A23 y A33). En el grupo 4º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
En la ficha 17 los alumnos deben comparar dos fracciones que tienen el mismo numerador. Veamos los resultados obtenidos por los alumnos de los dos grupos:

Tipo de respuesta	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
Ordenan bien	11	17
Ordenan mal	9	4
No contestan	0	3
Total alumnos:	*20*	*24*

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º A*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
Con material	3	33%
Con repr. gráficas	10	40%
Con razonamientos	7	71%
Total alumnos:	*20*	

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º B*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
Con material	0	0%
Con repr. gráficas	15	27%
Con razonamientos	7	71%
Total alumnos:	*22*	

Se observa que los alumnos van abandonando las estrategias manipulativas por convicción propia al intentar ahorrar tiempo en la resolución de la ficha y porque siguen las indicaciones dadas por el profesor en el sentido de que utilicen otras estrategias más rápidas y, por lo tanto, más abstractas. También se observa que la calidad de las explicaciones dadas por los alumnos mejora conforme éstos utilizan estrategias más alejadas del modelo que se sustentan en representaciones gráficas y razonamientos.

La ficha 18 propone la comparación de dos fracciones que tienen diferentes numeradores y denominador: 1/2 y 3/8. Esta ficha presenta una dificultad, ajena al concepto que se pretende trabajar, y que radica en que algunos alumnos no saben qué es una tuerca y desconocen éstas se clasifican según su diámetro y que suele medirse con una unidad que no pertenece al sistema métrico decimal: la pulgada. Para que los alumnos realicen la tarea el profesor realiza un dibujo de la tuerca y del diámetro de ésta. Con esta explicación los alumnos resuelven la tarea pero se detectan dificultades en algunos alumnos que, cuando deciden utilizar una representación gráfica, tienden a confundir el dibujo de la tuerca con la representación gráfica de la longitud del diámetro de la tuerca. Veamos los resultados obtenidos por los alumnos en esta ficha:

Tipo de respuesta	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
Ordenan bien	18	10
Ordenan mal	1	6
No contestan	1	8
Total alumnos:	*20*	*24*

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º A*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
No la indican	1	0
Con material	5	100%
Con repr. gráficas	13	46%
Con razonamientos	1	100%
Total alumnos:	*20*	

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º B*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
No la indican	11	-
Con repr. gráficas	12	75%
Con razonamientos	1	100%
Total alumnos:	*24*	

Se observa que muy pocos alumnos resuelven la tarea utilizando razonamientos. Pensamos que esto se debe a que los alumnos tienen un conocimiento operativo de la noción de fracción equivalente, de modo que llegan a ver que $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ realizando dibujos o bien utilizando el material asociado a la longitud o a la superficie; sin embargo, los alumnos no tienen un conocimiento conceptual de la equivalencia de fracciones que les lleve a plantear estrategias más avanzadas y, por lo tanto, más próximas al nivel simbólico.

Valoración

Podemos concluir que los resultados obtenidos por los alumnos en la resolución de las fichas 17 y 18 son aceptables. Y lo que es más importante, observamos que, después de realizar la evaluación conjunta de una ficha, los alumnos resuelven mejor la siguiente ficha y, por lo tanto, se producen progresos observables en la secuencia de enseñanza.

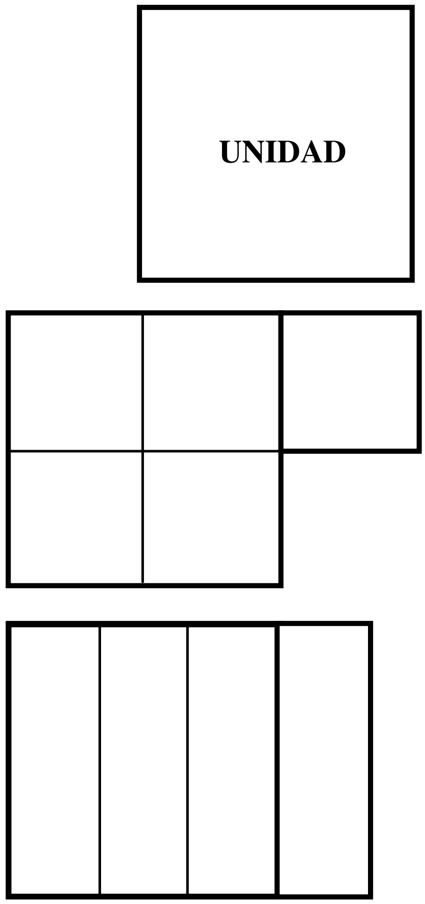
Como era de esperar, los alumnos no disponen de un conocimiento conceptual de la noción de fracción equivalente, de modo que no son capaces de construir mentalmente fracciones equivalentes para resolver directamente las fichas de comparación de fracciones utilizando razonamientos. Este es un objetivo muy ambicioso y, los resultados muestran, que cae fuera de las capacidades mentales de la mayoría de los alumnos.

Para resolver estas tareas la mayoría de los alumnos utiliza como estrategia la realización de representaciones gráficas. Se observa que el porcentaje de alumnos que ha utilizado con éxito esta estrategia, en la ficha 18, ha crecido respecto al de la ficha anterior. Cabe preguntarnos si los resultados hubieran sido mejores si en el enunciado de la ficha 18 no hubieran aparecido términos alejados del entorno vital de los alumnos como tuerca, diámetro o pulgada. Por esta razón consideramos conveniente proponer la ficha 19 que no presenta estas dificultades y que sirve para ejercitar los procedimientos de comparación de fracciones y las estrategias dirigidas a la consecución de este objetivo.

Toma de decisiones
En la siguiente sesión se trabajará la ficha 19 que exige comparar fracciones con diferentes numeradores y denominadores. Se procederá a evaluar esta tarea que el profesor ha propuesto a los alumnos de ambos grupos como trabajo para ser realizado en casa durante el fin de semana.

Día 28-2-2000 (vigésimo segunda sesión)
Plan previsto
En ambos grupos evaluar la ficha 18. Después está previsto resolver y evaluar la ficha 19.

Ejecución
Al evaluar la ficha 19 el profesor pondera las estrategias basadas en representaciones gráficas y razonamientos, y recomienda de nuevo el abandono de las estrategias manipulativas. En la pizarra escribe alguna de las representaciones gráficas dibujadas por algunos alumnos:



$\frac{5}{4}$

$\frac{4}{3}$

El profesor solicita que alguno de los alumnos que han dado una respuesta basada en razonamiento expliquen como han actuado. Todas las respuesta se fundamentan en la comparación de entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ dado que:

$$\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$
$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

Aunque no han aparecido estrategias más avanzadas basadas en la noción de equivalencia de fracciones el profesor muestra estas estrategias porque facilitan la resolución de la ficha 19 y, además, prepara la iniciación del tratamiento de las fracciones a nivel simbólico.

Si igualan denominadores: $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$

$\frac{4}{3} = \frac{16}{12}$

Y si igualan numeradores: $\frac{5}{4} = \frac{20}{16}$

$\frac{4}{3} = \frac{20}{15}$

Como los alumnos, en general, no han sabido realizar la ficha 19, el profesor explica cómo abordar ésta e introduce la representación de la recta numérica utilizando como soporte un listón de madera en el que se asigna un origen y se representan las fracciones como puntos de la recta. Después les indica que sigan trabajando la ficha y comenta que en la sesión del día siguiente se procederá a su evaluación.

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A se ausentan dos alumnas (A46 y A47) para asistir a clases de apoyo. En el grupo 4º B falta una alumna (A44).

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados de la ficha 19 son los siguientes:

Tipo de respuesta	*Nº alumnos 4º A*	*Nº alumnos 4º B*
Ordenan bien	19	17
Ordenan mal	3	4
No contestan	0	2
Total alumnos:	*22*	*23*

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º A*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
No la indican	2	0
Con material	5	80%
Con repr. gráficas	9	56%
Con razonamientos	6	66%
Total alumnos:	*22*	

Estrategia utilizada	*Nº alumnos 4º B*	*% de alumnos que dan una explicación correcta*
No la indican	6	-
Con repr. gráficas	14	50%
Con razonamientos	3	33%
Total alumnos:	*23*	

Aunque la mayoría de los alumnos de ambos grupos saben decir qué fracción tiene menor superficie (86% de los alumnos de 4º A y 74% de los alumnos de 4º B) el porcentaje de alumnos que saben justificar la respuesta decrece considerablemente: 64% en 4º A y 35% en 4º B.

Se observa un aumento en el número de alumnos que han utilizado con éxito razonamientos para resolver el problema. Estos razonamientos se basan en descomponer ambas fracciones: una en la unidad y un cuarto, y otra en la unidad y un tercio; y después, afirmar que un cuarto es menor que un tercio. Sin embargo, ningún alumno ha utilizado estrategias basadas en la equivalencia de fracciones, igualando denominadores o numeradores. Esta estrategia no la perciben los alumnos como natural y, sin duda, será un obstáculo para resolver la ficha 20 en la que a los alumnos se les pide que encuentren fracciones intermedias entre dos dadas.

Valoración
Durante la resolución de las tareas de comparación de fracciones las estrategias utilizadas por los alumnos

han evolucionado desde aquellas que están próximas a los modelos manipulativos a otras más evolucionadas como la representación gráfica y el razonamiento centrado en la idea de fracción. Dentro de esta última categoría han aparecido estrategias basadas en la comparación con fracciones conocidas, como la unidad y la media unidad. Sin embargo, ningún alumno ha utilizado la equivalencia de fracciones para conseguir que las fracciones a ordenar tengan el mismo numerador o denominador.

Aunque los alumnos de ambos grupos han recibido enseñanza de la estrategia basada en la equivalencia de fracciones no se muestran capaces de afrontar la tarea de encontrar fracciones intermedias entre dos dadas utilizando esta estrategia.

Toma de decisiones
Continuar con la propuesta de enseñanza. En la siguiente sesión se evaluará la ficha 19 que el profesor había propuesto a los alumnos de ambos grupos como trabajo para ser realizado en casa durante el fin de semana y que los alumnos habían manifestado no saber realizarla en la sesión de clase del día anterior.
El equipo de investigación sabedor de las dificultades que los alumnos van a tener para encontrar fracciones intermedias entre dos fracciones decide trabajar de forma conjunta con los alumnos la ficha 20 y proponer como trabajo para casa la realización de la ficha 21 que va a ser modificada.

Día 29-2-2000 (vigésimo tercera sesión)
Plan previsto
Realizar la evaluación conjunta de la ficha 20

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A se ausentan dos alumnas (A46 y A47) para asistir a clases de apoyo. En el grupo 4º B falta una alumna (A44).

Ejecución
Con la realización de esta ficha se pretende introducir las estrategias basadas en la equivalencia de fracciones para encontrar fracciones intermedias entre $\frac{1}{3}$ y la unidad.

En primer lugar el profesor propone utilizar la estrategia de igualar denominadores. Como la unidad puede expresarse como $\frac{3}{3}$, los alumnos no tienen dificultades para encontrar la fracción $\frac{2}{3}$ intermedia entre $\frac{1}{3}$ y la unidad.

$\frac{1}{3}$ $\quad$ $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ $\quad$ $\frac{3}{3} = 1$

Si fraccionamos la unidad en 6 partes iguales:

$\frac{2}{6}$ $\quad$ $\frac{6}{6} = 1$

$\frac{2}{6}$ $\quad$ $\frac{3}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$ $\quad$ $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\quad$ $\boldsymbol{\frac{5}{6}}$ $\quad$ $\frac{6}{6} = 1$

Si fraccionamos la unidad en 12 partes iguales:

$\frac{4}{12}$ $\quad$ $\frac{12}{12} = 1$

$\frac{4}{12}$ $\quad$ $\boldsymbol{\frac{5}{12}}$ $\quad$ $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\boldsymbol{\frac{7}{12}}$ $\quad$ $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{9}{12} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$ $\quad$ $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ $\quad$ $\boldsymbol{\frac{11}{12}}$ $\quad$ $\frac{12}{12} = 1$

El profesor no ha seguido realizando fraccionamientos diferentes de la unidad, ni tampoco ha ejemplificado la estrategia de igualar numeradores porque ha observado que muchos alumnos no sabían encontrar fracciones equivalentes. Los alumnos tienen más dificultad cuando simplifican una fracción que cuando realizan fraccionamientos "más finos" de la unidad para obtener fracciones equivalentes. Esto era de esperar porque las acciones realizadas con los modelos manipulativos consistían en volver a realizar fraccionamientos con mayor número de subunidades.

Otro tipo de error consiste en la utilización de estrategias aditivas para obtener fracciones equivalentes. Esta dificultad ha quedado bien reflejada en el alumno A29 que afirma que 8/11 es una fracción equivalente a 9/12. El profesor, para que los alumnos se percaten del error, expone en la pizarra lo siguiente:

$$\frac{1}{2} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$$

y pregunta si las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ son equivalentes. Finalmente recuerda que las acciones a utilizar son multiplicativas y no aditivas ni sustractivas.

El profesor les vuelve a proponer a los alumnos que encuentren una fracción equivalente a 9/12 lo más simplificada posible. Muy pocos alumnos encuentran fracciones equivalentes de este tipo; de modo que propone utilizar el material asociado a la magnitud longitud y, de forma manipulativa, obtienen la fracción equivalente a 9/12.

De forma paralela a la resolución de la ficha el profesor va escribiendo en la recta numérica las fracciones que los alumnos van obteniendo. Momentos antes de terminar la sesión de clase el profesor propone a los alumnos la ficha 21 para que la trabajen en casa durante las mini vacaciones denominadas "semana blanca".

Valoración

Aunque no se ha realizado una evaluación individual de los resultados de la ficha 20, podemos afirmar que la mayoría de los alumnos no saben resolver esta tarea. En nuestra opinión las dificultades se justifican:

1º. Por la forma de enunciar la ficha. No hay una situación problemática que permita utilizar los modelos que se han trabajado en las sesiones precedentes.

2º. Desconocen las estrategias de obtención de fracciones equivalentes basadas en la igualdad de denominadores o de numeradores. Y, aunque el profesor las ha ejemplificado en la sesión anterior, se trata de una estrategia que requiere un conocimiento conceptual de la fracción propia del nivel simbólico.

3º. El nivel medio de capacidad de abstracción de los alumnos de estas edades es incompatible con la utilización de estrategias que se sitúan en el nivel simbólico.

Toma de decisiones

Pensamos que se han cubierto los objetivos relativos a la equivalencia y comparación de las fracción, pero no se ha abordado la noción de densidad entre fracciones. El equipo de investigación es consciente de que los alumnos van a tener dificultades para comprender el concepto de densidad de fracciones. Por este motivo se ha modificado la ficha 21, eliminando la tercera cuestión que se refiere a este concepto. Mostramos a continuación la ficha 21 modificada:

TARJETA DE LA FICHA 21

ALUMNO/A:____

PRIMERA PREGUNTA:

Ordena las fracciones $\frac{3}{2}$ *y* $\frac{7}{8}$ *de unidad*

SOLUCIÓN: La fracción $\frac{7}{8}$ es ____________ que $\frac{3}{2}$, porque: ____________________________

SEGUNDA PREGUNTA:

Encuentra OCHO fracciones que estén comprendidas entre $\frac{7}{8}$ *y* $\frac{3}{2}$ *de unidad.*

Fracción

1º____________ porque ______________________________________

La temporalización de la propuesta prevé la implementación de 21 sesiones. En estas condiciones, con esta sesión deberíamos dar por concluida la secuencia de enseñanza; sin embargo, vamos a ampliar la secuencia dos o tres sesiones para trabajar la fracción como medida de la cantidad de objetos discretos. Consideramos imprescindible la inclusión de este significado de la fracción como medida, porque:
1º. Refuerza los significados de la fracción como medida.
2º. Es un objetivo de enseñanza de las matemáticas en el nivel de cuarto curso reflejado en el proyecto curricular de Centro.

Día 6-3-2000 (vigésimo cuarta sesión)
<u>Plan previsto</u>
Realizar la evaluación conjunta de la ficha 21. Iniciar la enseñanza desde el modelo de cardinalidad con la resolución de la ficha 22.

<u>Asistencia de alumnos</u>
En el grupo 4º A falta un alumno (A28). En el grupo 4º B falta un alumno (A26).

<u>Ejecución</u>
El profesor solicita la tarjeta de la ficha 21 pero bastantes alumnos de ambos grupos dicen que se la han dejado en su casa. El profesor les dice que la traigan en la siguiente sesión y procede a realizar preguntas a diferentes alumnos sobre las actividades propuestas en esta tarea.

La mayoría de los alumnos dan muestras de saber ordenar las fracciones $\frac{7}{8}$ y $\frac{3}{2}$. Cuando les pregunta que indiquen fracciones intermedias los alumnos aportan soluciones aisladas que suelen ser correctas. Sin embargo, al profesor le interesa que describan cómo se pueden obtener "familias" de fracciones intermedias.

Una alumna propone escribir la fracción $\frac{3}{2}$ como $\frac{12}{8}$ para proceder a localizar fracciones intermedias:

$$\frac{7}{8} \qquad \frac{8}{8} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{\frac{9}{8}} \qquad \frac{10}{8} = \mathbf{\frac{5}{4}} \qquad \mathbf{\frac{11}{8}} \qquad \frac{10}{8} = \frac{3}{2}$$

Estas fracciones se han representado con el material manipulativo de longitud sobre la recta numérica.

Después los alumnos perciben, con facilidad, la posibilidad de volver a fraccionar en dos partes iguales las subunidades de longitud $\frac{1}{8}$ de unidad. El profesor para ejemplificar las subunidades de medida $\frac{1}{16}$ ha utilizado el material asociado a la magnitud superficie y ha justificado la existencia de las fracciones intermedias:

$$\frac{14}{16} \quad \mathbf{\frac{15}{16}} \quad \frac{16}{16} = 1 \quad \mathbf{\frac{17}{16}} \quad \frac{18}{16} = \frac{9}{8} \quad \mathbf{\frac{19}{16}} \quad \frac{20}{16} = \frac{10}{8} \quad \mathbf{\frac{21}{16}} \quad \frac{22}{16} = \frac{11}{8} \quad \mathbf{\frac{23}{16}} \quad \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

El profesor les comenta que pueden encontrar muchas más fracciones entre $\frac{7}{8}$ y $\frac{3}{2}$.

En la segunda parte de la sesión de clase se introduce la fracción como medida de cantidades discretas. Para ello el profesor propone a los alumnos la realización conjunta de la ficha 22 cuyo enunciado mostramos a continuación:

> *"Has comprado una bolsa que contiene 6 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 3 bombones. ¿Qué parte de bolsa has comido?".*
>
> *Consigna: "Si lo deseáis, podéis utilizar los seis policubos que os entrego: tres de cada color"*

Antes de resolver la ficha el profesor ofrece la siguiente explicación: "En esta tarea tenéis que MEDIR LA CANTIDAD DE BOMBONES QUE HAS COMIDO tomando como UNIDAD DE MEDIDA LA CANTIDAD DE BOMBONES QUE HAY EN LA BOLSA. En esta tarea no nos preocupa la masa, ni la longitud, ni la superficie de los bombones (pensamos que todos son iguales); lo que nos interesa de los bombones es la CANTIDAD bombones que hay. La magnitud que consideramos se llama cardinalidad".

Para resolver la tarea los alumnos dicen han comido "la mitad de los bombones" o "media unidad". Cuando se les pregunta qué subunidad han considerado muestran extrañeza y algunos responden la unidad la han partido en dos grupos, de tres colores cada uno. Por lo tanto, la subunidad es de tamaño 1/2 bolsa porque ésta la han fraccionado en dos partes iguales, y la fracción que indica la parte de bolsa que han comido se puede percibir como una subunidad de medida 1/2 bolsa. También comer tres bombones puede ser percibido como comer 3 veces 1/6 de la cantidad de bombones que hay en la bolsa, es decir, 3/6 de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. En este caso la subunidad que se ha considerado es un bombón.

Aspectos relacionados con la comprensión
En la ficha 22, la unidad de medida viene dada por una colección de objetos que por su carácter discreto los alumnos la confunden con el objeto discreto, de modo que éste último es considerado como la unidad, ocasionando dificultades de comprensión.
Con esta tarea se pretende que los alumnos adquieran el significado de la fracción como medida de la cardinalidad de una colección de objetos que se toma como unidad. Un segundo objetivo consiste en reforzar el significado del concepto de fracción equivalente cuando se realizan diferentes fraccionamientos de la unidad.

Toma de decisiones
Los resultados de esta primera tarea muestra una escasa consecución del primer objetivo. Por este motivo, en la siguiente sesión se va a proceder a resolver las fichas 23 y 24 que son análogas a ésta.

Día 7-3-2000 (vigésimo quinta sesión)
Plan previsto
Introducir la fracción como medida de cantidades discretas. Resolver y evaluar la fichas 23, 24 y 25.

Asistencia de alumnos
En el grupo 4º A asisten todos los alumnos. En el grupo 4º B falta un alumno (A26).

Ejecución
Los alumnos resuelven la ficha nº 23 cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE LA FICHA Nº 23

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 8 bombones.

¿Qué parte de bolsa has comido?

Vas a resolver el problema de diferentes maneras:

La unidad es el número de bombones que hay en la bolsa.

1º Si fraccionas la unidad en 12 partes iguales, cada subunidad (es un bombón) es de medida 1/12 de la unidad.
Y la solución es:

He comido ―― de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

El profesor les entrega 12 policubos: 8 de color negro que representa los bombones que has comido y 4 de color blanco que representa los bombones que quedan sin comer, y les recuerda que la unidad son 12 bombones (policubos). Siguiendo la secuencia indicada en la tarea, pregunta:

1º. Si la unidad la fraccionamos en 12 partes iguales, ¿cuál es la doceava parte de la unidad?. Y, ¿qué parte de la bolsa de los bombones has comido?
Los alumnos contestan 8/12 de la unidad.

2º. Si la unidad la fraccionamos en 6 partes iguales, ¿cuál es la sexta parte de la unidad?. Después solicita que construyan con los policubos, la sexta parte de la unidad. Y, ¿qué parte de la bolsa de los bombones has comido?
Los alumnos contestan 4/6 de la unidad. Y el profesor solicita que indiquen el significado del numerador y del denominador de esta fracción. También pregunta: ¿qué relación hay entre las fracciones 8/12 y 4/6?

3º. Si la unidad la fraccionamos en 3 partes iguales, ¿cuál es la tercera parte de la unidad?. Después solicita que construyan con los policubos, la tercera parte de la unidad. Y, ¿qué parte de la bolsa de los bombones has comido?
Los alumnos contestan 2/3 de la unidad. Y el profesor solicita que indiquen el significado del numerador y del denominador de esta fracción. También pregunta: ¿qué relación hay entre las fracciones 8/12, 4/6 y 2/3?

Cuando se ha realizado la evaluación de la ficha 23 el profesor propone la resolución de las fichas 24 y 25. La ficha nº 24 tiene la misma estructura que la ficha de trabajo nº 23, y su enunciado es:

Has comprado una bolsa que contiene 16 bombones. Has abierto la bolsa y has comido12 bombones.

¿Qué parte de la bolsa has comido?

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los resultados de las ficha 23 y 24 indican que los alumnos del grupo 4º A saben expresar con una fracción la medida del cardinal de una colección de objetos discretos. La colección de objetos la consideramos como la unidad de medida y según se realicen diferentes fraccionamientos de la unidad obtenemos fracciones equivalentes. Así, en la ficha 24, el grupo de 4º A el 83% de los alumnos encuentra dos o tres fracciones equivalentes que expresan la medida. Sin embargo, en el grupo 4º B el porcentaje de éxito baja hasta el 43%.

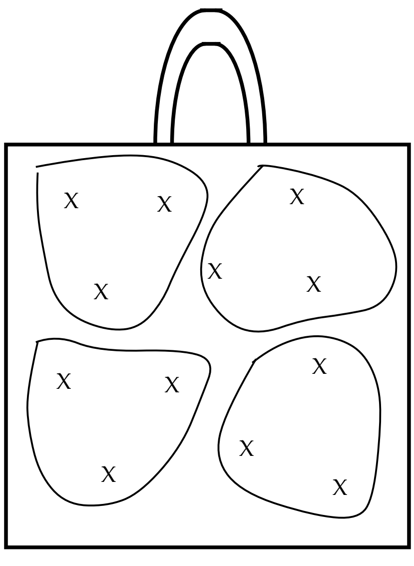
Si el objetivo de la ficha 24 es encontrar la fracción que indica la medida de una parte de una colección de objetos discretos, el objetivo de las ficha 25 es calcular el número de objetos de una parte de la colección o unidad cuya medida es una fracción dada. Esta actividad es conocida como cálculo de la fracción de un número. Los resultados obtenidos por los alumnos de ambos grupos cuando han resuelto la ficha 25 muestran un conocimiento operatorio aceptable de la fracción como medida de cantidades discretas. La tasa de éxito, en ambos grupos, se sitúa alrededor del 50%. Conviene recordar que es la primera ficha de este tipo que los alumnos realizan sin haber recibido enseñanza de la técnica que permite calcular la fracción de un número.

<u>Toma de decisiones</u>
Como la sesión de clase ha concluido sin disponer de tiempo para realizar una evaluación de la ficha 25, ésta se realizará en la siguiente sesión. En la siguiente sesión va a concluir la secuencia de enseñanza con la realización de dos últimas fichas de estructura análoga a las ficha 25, cuyo objetivo es ejercitar el cálculo de la fracción de un número y conceptualizar la fracción con el significado de medida de una parte de los objetos discretos de una colección o unidad.

Día 8-3-2000 (vigésimo sexta sesión)
<u>Plan previsto</u>
Evaluar la ficha 25, y resolver y evaluar las fichas 26 y 27.

<u>Asistencia de alumnos</u>
En el grupo 4º A faltan dos alumnos (A16 y A42) y se ausentan dos alumnas (A46 y A47) para asistir a clases de apoyo. En el grupo 4º B asisten todos los alumnos.

<u>Ejecución</u>



Para realizar una evaluación conjunta de la ficha 25 el profesor dibuja en la pizarra una bolsa con 12 cruces que representan los bombones, con la intención de introducir las representaciones gráficas y abandonar la utilización de los materiales manipulativos (policubos).

El profesor recuerda que la unidad son los 12 bombones. Para saber cuántos bombones son 1/4 de la bolsa, el profesor pregunta por el significado del denominador de la fracción 1/4. Cuando algunos alumnos explican que el denominador indica las partes iguales en las que se ha dividido la unidad, se dibuja el fraccionamiento de la unidad y se justifican los resultados obtenidos.

Cuando el profesor propone la resolución de la ficha 26 recomienda a los alumnos que no utilicen material manipulativo y que, en todo caso, realicen alguna representación gráfica.

Después de realizar una evaluación conjunta de la ficha 26 el profesor propone a los alumnos la resolución de la ficha 27, recomendándoles ante la elevada magnitud del dato que aparece en el enunciado que no utilicen material manipulativo ni dibujos para representar la cantidad de objetos a los que se refiere el dato.

En esta última sesión cada alumno recibe un cuadernillo, que a modo de libro de texto, les recuerda los contenidos de la fracción sobre los que han recibido enseñanza.

Aspectos relacionados con la comprensión

Del análisis de los respuestas dadas por los alumnos en las tarjetas de evaluación de las fichas 26 y 27 referidas al cálculo de la fracción de un número podemos concluir que los alumnos conocen y saben aplicar la regla o técnica operatoria. Recogemos estos datos en la siguiente tabla:

Fracción de un número	*Nº alumnos 4º A que saben calcular*	*% de aciertos*	*Nº alumnos 4º B que saben calcular*	*% de aciertos*
4/5 de 25	19	95%	19	79%
3/7 de 245	17	85%	18	75%
Total alumnos	*20*		*24*	

Los alumnos siguen teniendo dificultades para expresar correctamente los significados del numerador y denominador de la fracción. Como los estos significados son comunes en los cuatro modelos de enseñanza implementados de la fracción como resultado de una cantidad de magnitud, podemos afirmar que en este último modelo estos significados han sido expresados por un número similar de alumnos que los obtenidos en las fichas referidas a la magnitud longitud (ficha 3) o las referidas a la magnitud superficie (ficha 10 y 11). En estas fichas, y en las fichas 26 y 27, menos de la mitad de los alumnos de ambos grupos sabe expresar correctamente el significado de los dos términos de la fracción.

Sin embargo, se observa una mejoría en la capacidad de expresión de algunos alumnos conforme se ha ido desarrollando la secuencia de enseñanza, de modo que en ellos se percibe un progreso en la conceptualización de la fracción como resultado de una medida de cantidad de magnitud. En efecto, podemos comparar las respuestas dadas por la alumna A13 en las fichas 3, 11 y 27 sobre el significado del numerador y denominador de la fracción:

Significado del denominador.-

"La subunidad que has usado" en la ficha 3 cuando la longitud el listón era $\frac{5}{4}$ de unidad.

"En cuantos trozos tienes que partir la unidad" en la ficha 10 cuando la superficie de la cartulina era $\frac{15}{8}$ de unidad.

"Las veces que has fraccionado la unidad" en la ficha 23 cuando debía calcular los $\frac{3}{7}$ de una bolsa con 245 canicas.

Significado del numerador.-

"Cuantas pajitas has usado" en la ficha 3 cuando la longitud el listón era $\frac{5}{4}$ de unidad.

"El numero que tienes que usar" en la ficha 10 cuando la superficie de la cartulina era $\frac{15}{8}$ de unidad.

"Las veces que coges la cantidad que está fraccionada" en la ficha 23 cuando debía calcular los $\frac{3}{7}$ de una bolsa con 245 canicas.

En la producciones de esta alumna se percibe una mayor precisión terminológica según ha ido realizando tareas. Por ejemplo, en la ficha 3 emplea el término de subunidad que ha sido utilizado en la secuencia de enseñanza para referirnos a uno de fraccionamientos iguales de la unidad y, por lo tanto, la subunidad no es 4. En todo caso, podría haber escrito que la unidad la había fraccionado en 4 partes iguales.

Valoración
En las fichas 26 y 27 se ponen en juego conocimientos de naturaleza diferente: conceptos y procedimientos. Así, cuando los alumnos calculan la fracción de una cantidad discreta utilizan un conocimiento procedimental, y entonces obtienen mayor nivel de éxito que cuando, en las mismas fichas, son preguntados por el significado del numerador y denominador de la fracción. En ese momento se evalúa el conocimiento conceptual que los alumnos tienen del significado de la fracción y, en consecuencia, la tarea les resulta más compleja.

Es importante tener en cuenta la diferente naturaleza de los contenidos para interpretar los porcentajes de éxito tan dispares obtenidos por los alumnos cuando responden a varios apartados de una misma tarea. Como se ha indicado con anterioridad la tasa de éxito de la ficha 27 baja en el grupo 4º A del 85% al 45% ; y del 75% al 25% en el grupo de 4º B, dependiendo del tipo de conocimiento que interviene en la realización de la tarea.

Toma de decisiones
Aunque la secuencia de enseñanza relativa a la fracción ha concluido, el equipo investigador recomienda a los profesores tutores de ambos grupos que propongan a los alumnos, en otros momentos de período lectivo, algunas tareas similares a las de la Propuesta Didáctica para consolidar los aprendizajes realizados por los escolares.

ANEXO II.2: DIARIO DE CLASE DEL SEGUNDO CICLO Y DE LA PRIMERA ETAPA

Día 2-11-2000 (Primera sesión)

Plan previsto.

En esta sesión se repasa el concepto de fracción con significado de medida. Los resultados obtenidos en la evaluación realizada en los primeros días lectivos de este curso que evalúa los aprendizajes que sobre el concepto de fracción han adquirido los alumnos, después de la enseñanza recibida durante el curso pasado, muestra que no tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones. Por este motivo hemos diseñado tres sesiones de enseñanza del concepto de fracción equivalente.

Ejecución

El profesor ha recordado a los alumnos los siguientes aspectos referidos a la fracción como medida de cantidades de longitud:

1. La necesidad de tener una unidad de medida.
2. Cuando el resultado de la medida no es un número natural se precisa disponer de subunidades de la unidad que se obtienen al fraccionar en partes iguales la unidad de medida.
3. Con la ayuda del material (cañas de plástico) se ha ejemplificado la obtención de algunas fracciones unitarias.
4. Los alumnos han medido un listón de madera de longitud 3/4 unidad. Este listón ha servido de ayuda para realizar la ficha previa nº 1 en la que se solicita encontrar fracciones equivalentes a la fracción 3/4.

Los alumnos de los dos grupos de 5º curso han realizado las fichas previas 1 y 2 que tienen una estructura semejante. Al comienzo de la siguiente sesión se realizará una evaluación conjunta de la segunda ficha, en la que se propone encontrar fracciones equivalentes a 2/3.

Aspectos actitudinales

En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo.

Variaciones entre los alumnos que participan en la experimentación del Primer y Segundo Ciclo

Mantenemos la misma asignación de códigos a los alumnos que han participado en la experimentación de 4º curso. No obstante, cabe indicar que ha habido variaciones en los alumnos que participan en la experimentación.

Cinco alumnos no van a participar en la experimentación por diferentes motivos: 4 alumnos (A41, A42, A43 y A44) han abandonado el Centro de Enseñanza antes de comenzar 5º curso y uno (A45) repite 4º curso.

Por contra, destacamos que otros 5 alumnos, a los que designamos con los códigos A48, A49, A50, A51 y A52, se incorporan a la experimentación porque se han matriculado en el C.E.I.P. "Tío Jorge".

Asistencia de alumnos

Dos alumnos del grupo de 5º A faltan a clase (A03 y A47), en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Para hallar fracciones equivalentes a una dada los alumnos suelen proceder fraccionando por la mitad la longitud de la subunidad, expresada por el denominador de la fracción dada. Posiblemente actúan de esta manera porque perciben con más claridad que al fraccionar en dos partes iguales la subunidad se necesitan colocar el doble de subunidades; mientras que no admiten como técnica posible la realización de otros fraccionamientos.

Los alumnos manejan con soltura la regla de obtención de fracciones equivalentes, aunque muestran una tendencia muy marcada a multiplicar el numerador y denominador de la fracción por dos.

La mayoría de los alumnos saben escribir 4/6 como fracción equivalente de 2/3. De los 22 alumnos del grupo 5º A que realizan la ficha previa nº 2, 19 alumnos encuentran que 4/6 es equivalente a 2/3, y de éstos 12 encuentran además que 6/9 es equivalente a 2/3 y uno escribe que 8/12 es equivalente a 2/3. En el grupo 5º B los 22 alumnos que realizan la ficha escriben que 4/6 como fracción equivalente de 2/3, y 13 alumnos encuentran que 8/12 es equivalente a 2/3 y 4 alumnos escriben que 6/9 es equivalente a 2/3. Se observa que los alumnos de 5º B utilizan como estrategia de obtención de fracciones equivalentes la sucesiva duplicación de los numeradores y denominadores.

Los alumnos tienen dificultades para justificar en términos del modelo la equivalencia de las fracciones 2/3 y 4/6. Muy pocos alumnos justifican la equivalencia. Posiblemente las dificultades se deban a problemas de expresión más que de comprensión.

Sólo la alumna A10 razona en términos del modelo:

"Porque si coges un tercio, la mitad es un sexto y si coges dos sextos es un tercio. Por lo tanto, dos tercios es igual a cuatro sextos".

Y dos alumnas del grupo 5º B hacen un esfuerzo por justificar la equivalencia:

"Porque si lo partes por la mitaz $\frac{1}{3}$ *son sextos" (alumna A04)*

"Porque los tercios se parten por la mitad y te salen son sesto. Y son dos y dos cuatro" (alumna A18)

<u>Valoración</u>
Aunque los alumnos parecen manejar la regla de obtención de fracciones equivalentes conviene seguir incidiendo en el significado de la fracciones equivalentes y en procedimientos más sistemáticos de obtención de fracciones equivalentes como multiplicar el numerador y denominador por diferentes números naturales consecutivos.

<u>Toma de decisiones</u>
En la secuencia de enseñanza correspondiente a esta sesión estaba previsto ejemplificar con material (cañas) que la fracción 6/9 es equivalente a 2/3. No se ha podido verificar la equivalencia utilizando material porque ha faltado tiempo. Con esta actividad comenzaremos la siguiente sesión con la intención de justificar el procedimiento de obtención de fracciones equivalentes a una dada consistente en multiplicar el numerador y denominador por un número que no sea necesariamente dos (en este caso será tres).

Día 3-11-2000 (Segunda sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Realizar la evaluación conjunta de la ficha previa nº 2
2º Presentar la ficha previa nº 3 y proponer su resolución como trabajo para casa. La ficha consiste en construir un mantel de superficie 3/2 y hallar diversas fracciones equivalentes a esta fracción. El material utilizado, folios, permite que los alumnos trabajen esta ficha fuera del aula.
3º Realizar la ficha previa nº 4 para introducir la estrategia de hallar fracciones equivalentes con un mismo denominador común. Como los alumnos han resuelto la ficha sin utilizar el concepto de equivalencia de fracciones, el profesor propone resolver de nuevo la ficha como trabajo para casa, después de proceder a su resolución en la pizarra.

<u>Ejecución</u>
La mitad de la duración de la sesión se ha dedicado a realizar la evaluación conjunta de la ficha previa 2 y presentar la ficha previa 3. Para orientar a los alumnos en esta última ficha, que se propone como trabajo para casa, el profesor ha comprobado en el aula que los alumnos saben construir un mantel de superficie 3/2 de unidad.
En la segunda mitad de la sesión se aborda la ficha previa nº 4 en la que se deben comparar las fracciones 3/4 y 2/3. El profesor aprovecha el momento de la evaluación conjunta de la ficha para exponer las posibles estrategias de resolución:

1. Utilizar el material (cañas) para construir segmentos de longitud las fracciones dadas.
2. Utilizar el material para trabajar la superficie y construir manteles de cantidades de superficie las fracciones dadas.
3. Utilizar gráficos que representan las fracciones dadas.
4. Pensar en la fracción unitaria que es el complemento de la unidad y comparar las fracciones unitarias. Se observa que esta estrategia es de ámbito local y que sólo la ha mencionado una alumna del grupo 5º A (A09)
5. Hallar fracciones equivalentes a ambas fracciones.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos del grupo 5º A han estado más inquietos de lo habitual. Al comienzo de la sesión han mostrado su desagrado por el cambio realizado en su horario que les afecta a la materia de plástica. También ha podido influir que es viernes (último día lectivo de la semana) y el mal comportamiento de tres alumnos (A16, A28 y A29) que el profesor ha censurado varias veces durante la sesión. En el grupo 5º B no ha habido ninguna incidencia.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A han faltado a clase dos alumnos (A46 y A37), y en el grupo 5º B una alumna (A04).

Aspectos relacionados con la comprensión
Para resolver la ficha previa nº 4 que consiste en comparar cantidades expresadas por fracciones los alumnos utilizan como estrategia el uso de material (cañas) o la realización de gráficos. Cuando el profesor comenta a los alumnos las limitaciones de estas estrategias (necesidad de disponer de material, dificultades con la realización de gráficos si las fracciones están próximas) y les pide que busquen otros procedimientos de resolución, sólo un alumno del grupo 5º B (A01) propone encontrar fracciones equivalentes a las fracciones que se van a comparar de modo que tengan el mismo denominador.

El profesor ha escrito en la pizarra fracciones equivalentes a 3/4 y 2/3 utilizando subunidades de longitud 1/12 u. Como algunos alumnos no comprenden la razón de elegir subunidades de esta longitud el profesor propone la utilización de material. La ejemplificación con material de esta estrategia de resolución se ha visto dificultada debido a la falta de subunidades de caña de longitud 1/12 de unidad.

Valoración
El concepto de equivalencia de fracciones es clave para el desarrollo posterior de la secuencia de enseñanza de la fracción. Por otra parte, sabemos que presenta dificultades conceptuales como que una misma fracción pueda ser expresada de múltiples formas; y las derivadas de la búsqueda de fracciones equivalentes a unas dadas con la condición de que tengan los mismos denominadores.

Toma de decisiones
El profesor va a preparar 300 subunidades de longitud 1/12 u, que junto con las subunidades de longitud 1/3 y 1/4, permitirá justificar la elección de este denominador común. Después propondrá la resolución de las fichas previas 5 y 6.

Día 6-11-2000 (Tercera sesión)
Plan previsto.
1º Recoger las tarjetas de evaluación de las fichas previas nº 3 y nº 4.
2º Realizar una evaluación conjunta de las fichas previas nº 3 y 4. En el caso de la ficha nº 4 se desea ejemplificar la equivalencia con la ayuda de material.
3º Realizar la ficha previa nº 5 para ejercitar la estrategia de hallar fracciones equivalentes con un mismo denominador común

Ejecución
La mayor parte de la sesión se ha empleado en realizar la evaluación conjunta de la fichas previas 3 y 4.
Se ha procedido a evaluar la ficha 3 con la ayuda de varios manteles de superficie 3/2 u y la unidad.

Para realizar la evaluación de la ficha 4 el profesor ha preparado trozos de caña de 1/12 de subunidad para que los alumnos visualicen, con la ayuda del material, las equivalencias

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \text{ y } \frac{3}{4} = \frac{9}{12}.$$

Después, aprovechando que los alumnos tenían en sus mesas las subunidades de longitud 1/12 u. se les ha propuesto la resolución de la siguiente ficha, análoga a la que se estaba evaluando:

"*Dados dos listones: uno de longitud* $\frac{3}{4}$ *y otro de longitud* $\frac{5}{6}$ *de la caña unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?*"

No ha quedado tiempo para realizar la ficha previa nº 5 en la que se deben comparar dos fracciones, 4/5 y 5/6. Los alumnos reciben la tarjeta de evaluación correspondiente a esta ficha con el encargo de resolverla como trabajo para casa. La tarjeta se recogerá al comienzo de la siguiente sesión y después se procederá a su evaluación.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Sin embargo, algunos alumnos no realizan las fichas que debían resolver en sus casas o bien dicen que las han dejado olvidadas en sus hogares.
Para recordar a estos alumnos la obligación de resolver y traer a clase las fichas propuestas el profesor investigador, de acuerdo con los profesores de la asignatura, deciden que estos alumnos utilicen parte del

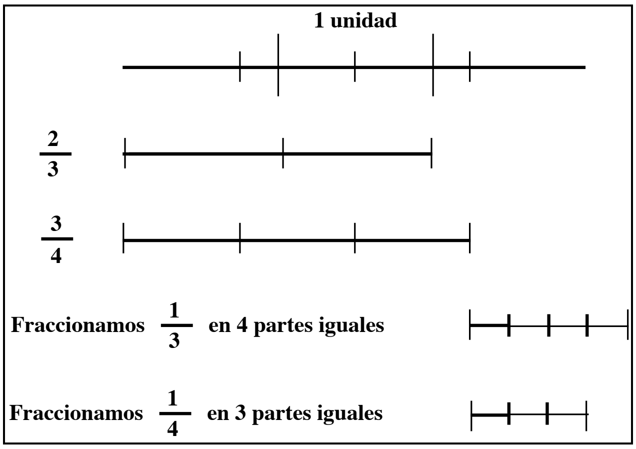
tiempo del recreo en resolver las fichas bajo la tutela del profesor investigador. Durante el recreo de este día el profesor ha ayudado a los alumnos A16, A23, A28 y A29 del grupo 5º A.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A faltan a clase tres alumnos (A46, A47 y A37); y en el grupo 5º B falta a clase el alumno A12.

Aspectos relacionados con la comprensión
Cuando los alumnos realizan las fichas en sus casas es difícil determinar el origen de los errores detectados: si son debidos a dificultades conceptuales o bien son achacables al poco interés mostrado en resolver la ficha.
Una cuarta parte de los alumnos del grupo 5º A ha tenido dificultades para resolver correctamente la ficha previa nº 3. Los alumnos de 5º A que resuelven mal o de modo incompleto la ficha 3 son: A03, A22, A23, A32, A48 y A51.
La mitad de los alumnos del grupo 5º B no han resuelto correctamente la ficha 3. Unos alumnos (A02, A15, A19, A24, A38, A50) han cometido errores y otros (A06, A20, A30, A49) no la han entregado.

Sobre los resultados de la ficha previa nº 4 destacamos un aspecto relevante: los alumnos perciben la equivalencia de fracciones como un concepto difícil y muy alejado de sus intuiciones primitivas. Después de dedicar dos sesiones de clase a trabajar la equivalencia de fracciones los alumnos se resisten a utilizar este concepto en la resolución de la ficha nº 4: sólo una quinta parte de los alumnos de 5º B y la tercera parte de 5º A utilizan la noción de equivalencia.
Sin embargo, como ha ocurrido en la ficha anterior, cuando el profesor ha explicado la estrategia de resolución de la ficha previa nº 4 basada en la búsqueda de fracciones equivalentes a aquellas que se desean comparar, los alumnos dan muestras de comprender el procedimiento utilizado. Ahora bien, cuando asumen, en solitario, la resolución de la ficha no se muestran seguros con esta estrategia y prefieren representar gráficamente las fracciones y proceder a una comparación visual de la cantidad de magnitud dibujada.
Somos conscientes de que la estrategia basada en la equivalencia de fracciones requiere capacidades cognitivas superiores porque requiere realizar operaciones simbólicas tales como la búsqueda de un denominador común. Por ello se espera que esta situación de desequilibrio conceptual que muestran los alumnos sea transitoria.
Un caso interesante observado en la respuestas dadas a la ficha previa nº 4 lo aporta la alumna A31 que utiliza la equivalencia para igualar numeradores en lugar de denominadores y, después, razona adecuadamente en términos del modelo.
La utilización de materiales para ejemplificar las acciones realizadas en la resolución de la ficha previa nº 4 ha mejorado la comprensión de la estrategia para comparar fracciones basada en la búsqueda de fracciones con un denominador común. Veamos cómo se ha utilizado el material:

Cada alumno ha recibido una caña unidad, tres subunidades de 1/3 u, cuatro subunidades de 1/4 u y doce subunidades de 1/12 u. Los alumnos reciben la consigna de colocar las doce subunidades de 1/12 u, una a continuación de la otra, en paralelo a la caña unidad. Del mismo modo formará dos "trenes" más: uno con tres subunidades de 1/3 u. y otro con cuatro subunidades de 1/4 u.
Después, les dice que quiten una subunidad de longitud 1/3 u. de un tren y otra subunidad de 1/4 u del otro tren. Les pide que indiquen las longitudes de los "trenes" y que expresen estas cantidades de longitud con subunidades de 1/12 de la unidad:



Los alumnos observarán que la longitud 2/3 u se cubre con 8 subunidades de 1/12 u. y que la longitud 3/4 u se cubre con 9 subunidades de 1/12 de la unidad. Se espera que los alumnos comprendan que la subunidad que han elegido es de longitud 1/12 u. porque cabe un número entero de veces en las subunidades de longitud 1/3 u. y 1/4 u.

Toma de decisiones
Se va a dedicar una sesión más a comparar fracciones para consolidar la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes. Primero se va a realizar la evaluación conjunta de la ficha previa nº 5 que los alumnos deben traer resuelta de sus casas y después se propondrá la resolución de las ficha previa nº 6. Esta última ficha la utilizaremos para evaluar los aprendizajes realizados durante estas sesiones.

También proponemos como trabajo para que los alumnos lo realicen en sus casas la resolución de una nueva tarea que denominamos *Ficha Previa 7* y cuyo enunciado mostramos a continuación:

a) "Ordena las fracciones $\frac{4}{3}$ *y* $\frac{5}{6}$ *de unidad".*

b) "Encuentra OCHO fracciones que estén comprendidas entre $\frac{5}{6}$ *y* $\frac{4}{3}$ *de unidad. Indica cómo has obtenido las fracciones"*

Día 7-11-2000 (Cuarta sesión)
Plan previsto.
1º Recoger la tarjeta de evaluación de las ficha previa nº 5.
2º Realizar la evaluación conjunta de la ficha previa nº 5.
3º Realizar la ficha previa nº 6 para ejercitar la estrategia de hallar fracciones equivalentes con un mismo denominador común.
4º Proponer como trabajo para casa la resolución de la ficha previa nº 7. Cada alumno recibe una tarjeta de evaluación de esta ficha.

Ejecución
La sesión de clase, en ambos grupos, se desarrolla según el plan previsto.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Sin embargo, algunos alumnos no realizan las fichas que debían resolver en sus casas o bien dicen que las han dejado olvidadas en sus hogares.

En el grupo 5º A las alumnas (A03, A46 y A47) no entregan la ficha nº 5, y en el grupo 5ª B no entregan la ficha los alumnos A02, A06, A12, A20, A38, A39, A30 y A49.

Durante el recreo el profesor ha ayudado a los alumnos A06, A12, A38, A39 y A49.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A asisten todos los alumnos, y en el grupo 5º B falta a clase el alumno A02.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados de la ficha previa nº 5 que los alumnos han realizado en sus casas son los siguientes:

	5º A		**5º B**	
	Sol. correcta	**Sol. incorrecta**	**Sol. correcta**	**Sol. incorrecta**
Equivalencia	**11**	**0**	**10**	**1** (A52)
Gráficos	**3** (A21, A22, A29)	**1** (A28)	**0**	**1** (A26)
No razona	**6** (A05, A16, A32, A36, A40, A51)		**4** (A04, A17, A18, A25)	
No entrega	**3** (A03, A46, A47)		**8** (A02, A06, A12, A20, A38, A39, A49, A52)	

Se observa que la mitad de los alumnos de ambos grupos utilizan correctamente el concepto de equivalencia, pero la otra mitad no sabe resolver la ficha.

Durante la evaluación de la ficha previa nº 5 el alumno A36, que todavía no utiliza la equivalencia de fracciones, aporta una estrategia válida, aunque de ámbito local, basada en la comparación de las fracciones unitarias que son el complemento de la unidad de las fracciones dadas. La alumna A24 parece expresar, por escrito en la tarjeta de evaluación de la ficha, la misma estrategia.

Vamos a analizar los resultados de la ficha de evaluación nº 5BIS que son más significativos que los obtenidos en la ficha anterior porque los alumnos la resuelven de modo individual en el aula, sin influencias externas, y por otro lado cabe suponer que están en mejores condiciones para resolver con éxito la ficha dado que acaban de recibir explicaciones sobre la resolución de la ficha previa nº 5. Los datos son los siguientes:

	5º A		**5º B**	
	Sol. correcta	**Sol. incorrecta**	**Sol. correcta**	**Sol. incorrecta**
Equivalencia	**16**	**3** (A28, A32, A51)	**13**	**3** (A17, A19, A38)
Gráficos	**1** (A05)	**1** (A36)	**0**	**1** (A12)
No razona	**3** (A03, A16, A47)		**4** (A04, A20, A30, A49)	
No entrega	**0**		**3** (A02 falta a clase), (A39, A52 en blanco)	

Las dos terceras partes de los alumnos de 5º A resuelven la ficha utilizando la estrategia recomendada: la equivalencia de fracciones.

Estos resultados muestran que va creciendo el número de alumnos utiliza con éxito estrategias más abstractas como la equivalencia de fracciones. Después de cuatro sesiones de clase más de la mitad de los alumnos de ambos grupos dan muestras de comprender y aplicar el concepto de equivalencia de fracciones.

Valoración

Hemos dedicado una sesión más de las previstas inicialmente para repasar el concepto de equivalencia de fracciones. Los alumnos recibieron enseñanza de este concepto durante la fase de implementación de la secuencia didáctica en 4º curso. En el curso pasado los alumnos han percibido la equivalencia como la posibilidad de expresar una misma fracción de diferentes formas pero no han adquirido un sentido operativo de este concepto. Pensamos que los alumnos de cuarto curso no disponen de capacidades cognitivas suficientes para afrontar la enseñanza de la equivalencia de fracciones a nivel simbólico. A la vista de esos resultados parciales pensamos que es aconsejable, en cuarto curso, la introducción de este concepto con la ayuda de materiales pero no se espera que los alumnos hagan los progresos necesarios para utilizar la equivalencia como estrategia para comparar fracciones.

Los resultados obtenidos por los alumnos de 5º curso en estas cuatro sesiones son esperanzadores. Es bien cierto, que en este momento de la secuencia de enseñanza hay alumnos de 5º curso que no tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones, pero ha habido un avance en el número de alumnos que asumen como estrategia de resolución de problemas la equivalencia de fracciones. Como la noción de equivalencia está presente en el cálculo operatorio con fracciones, tomamos como decisión continuar con la propuesta de enseñanza porque este concepto se reforzará con la resolución de las fichas sobre operaciones con fracciones.

Día 8-11-2000

Los alumnos realizan una excursión a Sierra de Guara. No hay sesiones de clase.

Día 9-11-2000 (Quinta sesión)

Plan previsto.

1º Recoger la tarjeta de evaluación de las ficha previa nº 7 y evaluar de modo individual, con cada alumno,

las soluciones que éste ha escrito.
2º Comenzar la enseñanza de la suma de fracciones con la realización de la ficha nº 1.
3º Evaluación de la ficha nº 1.
4º Resolución y evaluación de la ficha nº 2.

Ejecución
La sesión ha transcurrido según la planificación prevista.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Sin embargo, pocos alumnos han traído resuelta la ficha previa nº 7 y, algunos de ellos, no la han resuelto correctamente. El profesor devuelve la ficha a estos últimos y recuerda a los restantes que deben traerla resuelta en la siguiente sesión.
Durante el recreo el profesor ha orientado a las alumnas A05, A23, A32 y A53 en la resolución de la ficha previa nº 7.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A faltan los alumnos A03, A46, A47 y A36; en el grupo 5º B falta la alumna A15.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos del grupo 5º A resuelven correctamente la ficha nº 1 y sólo el alumno A02 de 5ª B no resuelve la ficha. Cabe suponer que este alumno se ha sentido inseguro al afrontar la resolución de la ficha a sabiendas de que faltó a la sesión de clase del día anterior.

Podemos concluir que los alumnos comprenden el significado de la suma de fracciones, cuando se enfrentan a situaciones problemáticas como la descrita en la ficha nº 1. Todos los alumnos han identificado el problema como de suma de fracciones y algunos de ellos (siete en 5º A) han expresado la representación canónica de la operación:

$$\frac{4}{3} + \frac{2}{3}$$

Sorprende que ningún alumno, ni siquiera los que utilizan la representación canónica de la operación suma, han procedido sumando numeradores y denominadores. Pensamos que la no aparición de esta estrategia errónea se debe a una buena comprensión del significado de la fracción. Así, los alumnos perciben $\frac{4}{3}$ como 4 subunidades de longitud 1/3 u, y saben que si añaden 2 subunidades de longitud 1/3 u, tendrán 6 subunidades de longitud 1/3 u.

Ahora bien, debemos realizar dos consideraciones:
1º referida al significado de la suma de fracciones: algunos alumnos han necesitado utilizar cañas de longitud 1/3 de unidad. Hay alumnos que se sienten muy inseguros si no utilizan material.
2º referida al concepto de equivalencia de fracciones: sólo una alumna (A10) indica que la fracción 6/3 u. es equivalente a 2 unidades.

Los alumnos de ambos grupos resuelven con éxito la ficha 2, sólo dos alumnas del grupo 5º A (A22 y A23) y un alumno del grupo 5º B (A02) dan respuestas erróneas.

En cuanto a las estrategias utilizadas se observan diferencias sustanciales entre los dos grupos: más de la mitad de los alumnos del grupo 5º A, trece, utilizan la equivalencia de fracciones, mientras que una tercera parte de los alumnos del grupo 5º B, siete, utiliza esta estrategia. Diez alumnos de este grupo han utilizado material para resolver la ficha.

La mitad de los alumnos de ambos grupos no identifican la operación realizada como una suma de fracciones aunque hayan resuelto correctamente la ficha.

Un dato relevante es que muy pocos alumnos (A11, A14 y A34) son conscientes de que están utilizando la estrategia basada en el concepto de fracción equivalente. Los otros alumnos que utilizan la equivalencia no la reconocen como estrategia de resolución en la tarjeta de evaluación de la ficha.

Valoración
En este momento de la secuencia de enseñanza no consideramos preocupante que los alumnos no identifiquen las estrategias que utilizan. Algunos alumnos que utilizan la equivalencia de fracciones no lo hacen constar en la tarjeta de evaluación posiblemente porque no son conscientes de haberla utilizado. En

este caso lo importante es que utilicen tal estrategia y vayan abandonando gradualmente la dependencia del manejo de materiales manipulativos.

Toma de decisiones
Continuar con la planificación prevista.

Día 10-11-2000 (Sexta sesión)
Plan previsto.
1º Recoger la tarjeta de evaluación de las ficha previa nº 7 y evaluar de modo individual, con cada alumno, las soluciones que éste ha escrito.
2º Resolución y evaluación de la ficha nº 3
3º Resolución y evaluación de la ficha nº 4.

Ejecución
El profesor ha recogido la ficha previa nº 7 a los alumnos que la han resuelto correctamente. Como bastantes alumnos tienen dificultades para resolverla el profesor hace una intervención general, dirigida a todos los alumnos de la clase, para explicar el procedimiento de búsqueda de fracciones comprendidas entre $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{3}$. Después les propone intentar de nuevo trabajar esta ficha en sus casas.

Se ha resuelto la ficha 3 y se ha realizado, en el aula, la evaluación conjunta de esta ficha. Sin embargo, el tiempo dedicado a orientar la resolución de la ficha previa nº 7 ha impedido resolver la segunda parte de la ficha nº 4 y proceder posteriormente a la evaluación conjunta de esta ficha. El profesor recoge esta ficha que entregará a los alumnos, al comienzo de la siguiente sesión, para que terminen de resolverla en el aula.

En la evaluación de la ficha 3 el profesor ha descrito las tres estrategias de resolución de la ficha: con el material asociado a la magnitud longitud, con representaciones gráficas o utilizando la equivalencia de fracciones. El profesor recomienda la utilización de esta última estrategia y para encontrar el denominador común a las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ propone establecer las siguientes cadenas de equivalencias:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Sin embargo, pocos alumnos han traído resuelta la ficha previa nº 7 y, algunos de ellos, no la han resuelto correctamente. El profesor devuelve la ficha a estos últimos y recuerda a los restantes que deben traerla resuelta en la siguiente sesión.
Durante el recreo el profesor ha ayudado a las alumnas A03, A07 y A09 en la resolución de la ficha nº 4.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A faltan los alumnos A28, A46 y A36; en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Vamos a valorar los resultados de la ficha 3 en la que los alumnos debían resolver un problema mediante la suma de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

Si nos atenemos a las soluciones dadas por los alumnos, los resultados son excepcionales. Sólo dos alumnos del grupo 5º A (A03 y A51) y uno de 5º B (A12) no resuelven correctamente la ficha. Ahora bien, estos resultados pueden ser engañosos. Más de la mitad de los alumnos que resuelven correctamente la ficha (19 en 5º A y 23 en 5º B) utilizan cañas para resolver la ficha. En efecto, 10 alumnos de 5º A y 15 de 5º B utilizan esta estrategia.

Hasta ahora la utilización de material ha tenido efectos positivos en la mejora de la comprensión de los alumnos. Sin embargo hemos detectado en esta ficha interferencias, entre los alumnos, en el momento en el que están resolviendo el problema como consecuencia de la utilización del material. Describimos este fenómeno: el alumno que no sabe resolver la ficha utilizando la equivalencia de fracciones o realizando gráficos solicita material y pide al profesor el tipo de subunidad que necesita. Se espera que el alumno le pida una subunidad de longitud $\frac{1}{2}$ unidad y otra de longitud $\frac{1}{3}$ unidad. El profesor le dará, también, una caña de longitud la unidad. El alumno muestra una buena comprensión cuando solicita al profesor SUBUNIDADES DE LONGITUD $\frac{1}{6}$ unidad, y con este material construye un tren con 5 subunidades de este tipo que iguala la longitud del tren formado por la caña de $\frac{1}{2}$ colocada a continuación de la de $\frac{1}{3}$. Hasta aquí la descripción ideal para que surja el aprendizaje en una situación de resolución de problemas con la ayuda de material manipulativo. El efecto pernicioso aparece cuando los alumnos, que no han reflexionado suficientemente sobre como deben fraccionar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ para solicitar al profesor una subunidad de longitud menor pero que esté contenida un número entero de veces en ambas subunidades, escuchan que otros piden "cañas de $\frac{1}{6}$". Estos alumnos piden y reciben subunidades de $\frac{1}{6}$ y comprueban que colocando 5 de éstas igualan la longitud $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; creen haber resuelto la ficha y no son conscientes de que la ayuda recibida les ha impedido realizar aprendizajes.

Los profesores hemos observado esta distorsión en ambos grupos aunque no sabemos precisar con certeza qué alumnos han sufrido estas interferencias. Para evitar tales influencias externas se va a restringir, en las siguientes fichas, la utilización de material.

También se ha observado que los alumnos identifican con dificultad la operación suma aunque sepan resolver la ficha: sólo 8 alumnos de 5º A y 6 de 5º B reconocen expresamente que está realizando una suma de fracciones. En este momento de la secuencia de enseñanza no consideramos preocupante que los alumnos no identifiquen la operación, porque dan muestras de comprender las acciones asociadas a la operación suma de fracciones.

Toma de decisiones

Continuar con la planificación prevista. Como los alumnos no han dispuesto del tiempo suficiente para terminar de resolver la ficha nº 4 el profesor recoge esta ficha que terminarán de resolverla al comienzo de la siguiente sesión.

Día 13-11-2000 (Séptima sesión)

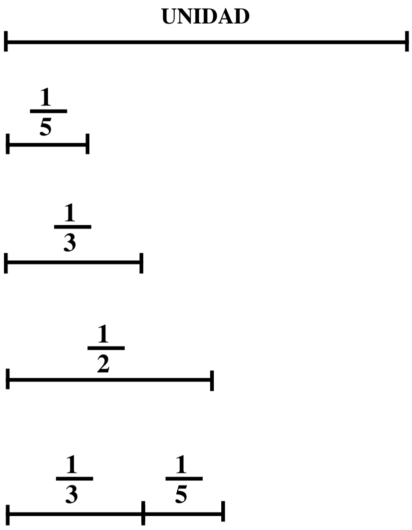
Plan previsto.

1º Recoger la tarjeta de evaluación de las ficha previa nº 7 y evaluar de modo individual, con cada alumno, las soluciones que éste ha escrito.
2º Terminar la resolución y proceder a evaluar la ficha nº 4
3º Resolución y evaluación de la ficha nº 5.

Ejecución

El profesor ha recogido la ficha previa nº 7 de los alumnos que la han traído resuelta y ha evaluado en su presencia la ficha. La mayoría de los alumnos que la entregan han encontrado bastantes fracciones intermedias y sólo deben realizar pequeñas correcciones. Si la ficha no está correctamente resuelta el profesor le propone intentar de nuevo resolverla como trabajo para casa.

En la evaluación de la ficha nº 4 el profesor ha mostrado la conveniencia de utilizar las representaciones gráficas, aún en este tipo de problemas que trabajan magnitudes difíciles de dibujar como la capacidad. En tal caso se aconseja pensar en otra magnitud como la longitud o la superficie, y proceder del siguiente modo:



Las representaciones gráficas permiten valorar la magnitud de las cantidades que intervienen en el problema y conjeturar resultados. En nuestro caso podemos adelantar que $\frac{1}{5}+\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$. La propuesta de enseñanza contempla la utilización de la equivalencia de fracciones para sumar las fracciones $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$, y después para comparar la suma con $\frac{1}{2}$. Esta técnica se ha ejemplificado en la pizarra.

La resolución y evaluación de la ficha nº 4 ha llevado más tiempo del inicialmente esperado. Por este motivo no se afronta la resolución de la ficha nº 5 en el aula. El profesor da indicaciones para facilitar su resolución como trabajo para casa, con el encargo de traer cumplimentada, a la siguiente sesión, la tarjeta de evaluación de esta ficha.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una gran motivación y disposición al trabajo. Durante el recreo el profesor ha ejemplificado con materiales de capacidad las cantidades que aparecen como soluciones en la resolución de la ficha nº 4. Asisten y ayudan a traspasar líquidos de unas botellas a otras algunos alumnos de los dos grupos de docencia de 5º curso.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A faltan los alumnos A47 y A36 ; en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
El trabajo de búsqueda de fracciones intermedias que se propone en la ficha previa nº 7, que antecede al concepto de densidad de fracciones, les resulta muy complicado a los alumnos. Estos saben resolver fichas en las que les dan dos fracciones con la consigna de ordenarlas. Sin embargo, se muestran muy inseguros en fichas, como esta, que tienen un abanico más amplio de estrategias de resolución aunque todas se basen en la equivalencia de fracciones.

Hasta este momento han resuelto con éxito la ficha previa nº 7 nueve alumnos de 5º A (A05, A07, A09, A10, A11, A23, A28, A31 y A33) y once del grupo 5º B (A01, A12, A14, A17, A18, A19, A24, A34, A38 , A49 y A52).

Las fracciones que aparecen en la ficha 4 expresan cantidades de capacidad. En la primera pregunta del problema los alumnos deben realizar la suma $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$. Y en la segunda parte deben explicar si la cantidad de capacidad de la suma que acabamos de escribir cabe en una botella de $\frac{1}{2}$ litro.

El rendimiento de los alumnos en las dos preguntas que se formulan en la ficha es alto, con mejores resultados en la primera que en la segunda pregunta. En el grupo 5º A 19 y 13 alumnos, respectivamente, escriben la solución correcta; en el grupo 5º B son 16 y 11 alumnos los que resuelven correctamente la ficha sin recibir ayuda de los profesores.

El dato más significativo es que todos los alumnos utilizan como estrategia la equivalencia de fracciones. Sólo tres alumnos, una del grupo 5º A (A10) y dos del grupo 5º B (A15 y A49) realizan gráficos para responder a la segunda pregunta de la ficha.

Para disponer de los datos más reales posibles hemos considerado con el código 0, no realizada la ficha, las respuestas de los alumnos que han recibido ayudas de los profesores. Teniendo en cuenta este aspecto y que los todos los alumnos han utilizado la estrategia basada en el cálculo simbólico, podemos afirmar que los resultados son muy satisfactorios.

Aunque la estrategia utilizada por los alumnos es propia del nivel simbólico, éstos han entendido bien el enunciado del problema gracias a que el profesor, cuando ha presentado la ficha, les ha mostrado a los alumnos botellas de $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ litro de capacidad.

La percepción visual de la cantidades de magnitud que expresan las fracciones que intervienen en los problemas les ayuda a los alumnos en la resolución del problema. En este caso, se hace más necesario porque la magnitud capacidad no tiene referencias visuales tan claras como la longitud o la superficie.

Se observa que los alumnos identifican con dificultad la operación suma aunque sepan resolver la ficha, si bien los resultados mejoran con respecto a la los de la ficha anterior: 14 alumnos de 5º A y 11 de 5º B reconocen expresamente que están realizando una suma de fracciones. Algunos alumnos afirman que la operación es la equivalencia de fracciones (A33), otros que se trata de la multiplicación (A37, A25) debido a las acciones que realizan para obtener fracciones equivalentes, otros formulan y realizan correctamente la suma de fracciones y en la tarjeta de evaluación indican que no han realizado ninguna operación (A05). Cuando el profesor realiza la evaluación de las fichas muestra la operación que resuelve el problema pero no comenta estos aspectos porque se pretende estudiar la evolución del proceso que siguen los alumnos en la identificación de las operaciones sin que reciban instrucciones específicas sobre el modo de cumplimentar la tarjeta de evaluación.

Cuando el profesor ha presentado la ficha nº 5 los alumnos encuentran dificultades para entender el enunciado del problema. El intercambio de opiniones con los alumnos deja entrever que las dificultades radican en dos puntos:
1º desconocen la unidad de superficie utilizada: el metro cuadrado
2º la cantidad 5 metros cuadrados que aparece en el enunciado no la identifican con una fracción.

Toma de decisiones
Hemos dedicado más tiempo del previsto a la resolución y evaluación conjunta de la ficha 4. Hemos presentado la ficha nº 5 que se debía resolver en el aula pero como no tenemos tiempo suficiente entregamos a cada uno de los alumnos 5 manteles cuadrados de 20 x 20 cm. que representan la unidad de superficie junto con la tarjeta de evaluación de la ficha y reciben el encargo de traerla resuelta a la siguiente sesión. La ficha 5BIS que estaba pensada para que los alumnos la realizaran en sus casas se trabajará en el aula durante la siguiente sesión.

Día 14-11-2000 (Octava sesión)
Plan previsto.
1º Recoger la tarjeta de evaluación de las ficha previa nº 7 y evaluar de modo individual, con cada alumno, las soluciones que estos hayan escrito.
2º Recoger y evaluar la ficha nº 5
3º Resolución y evaluación de la ficha nº 5BIS.

Ejecución
Se cumple el plan previsto. Los alumnos del grupo 5º A reciben el encargo de resolver la resta de fracciones:

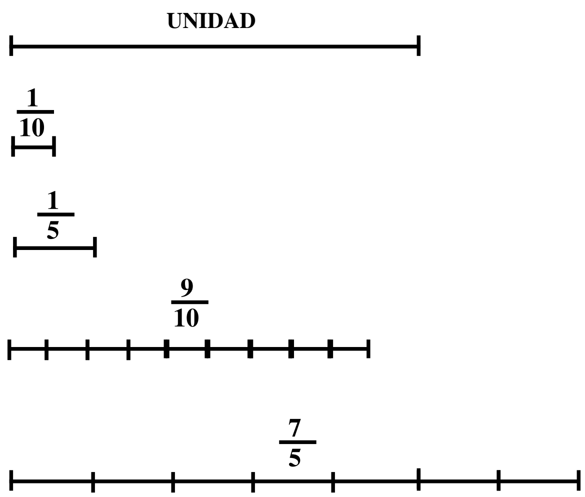
$$\frac{7}{5} - \frac{9}{10}$$

y además que inventen el enunciado de un problema que se resuelva mediante la anterior resta de fracciones. En el grupo 5º B no ha dado tiempo para plantear esta ficha de ejercitación del procedimiento de cálculo de la resta de fracciones.

En la evaluación de la ficha nº 5 el profesor ha utilizado tres estrategias: utilizar material (manteles), hacer gráficos (con longitud) y la equivalencia de fracciones.

Cuando procede a evaluar la ficha nº 5BIS, antes de utilizar la equivalencia de fracciones, el profesor recomienda representar gráficamente las fracciones que aparecen en el enunciado de la ficha. Sólo de esta forma pueden hacerse una idea de las cantidades que representan las fracciones y entender el enunciado del problema , antes de proceder a resolverlo.

Así:



Aspectos actitudinales
Hemos observado un comportamiento pasivo en algunos alumnos del grupo 5º B que se ha manifestado en dos momentos próximos en el tiempo: descuido al olvidar en sus casas la tarjeta de evaluación de la ficha 5 y falta de esfuerzo en la ficha 5BIS cuya resolución se ha afrontado en el aula. Estos alumnos son: A04, A20, A25, A26 y A38

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A falta el alumno A36; en el grupo 5º B faltan los alumnos A08 y A52

Aspectos relacionados con la comprensión
Vamos a centrarnos en analizar los resultados de la ficha 5BIS dado que ésta ha sido resuelta en el aula mientras que la ficha 5 ha sido trabajada fuera de ella y, por lo tanto, cabe suponer que los resultados están condicionados por factores externos que dificultan una valoración del grado de consecución de las unidades de comprensión. No obstante, estudiados los resultados de la ficha nº 5 hacemos las siguientes anotaciones:

1º Sobre los hábitos de estudio de los alumnos: cuando éstos se llevan fichas para resolverlas en sus casas algunos de ellos olvidan traerlas o las traen sin resolver. En este caso han sido 4 alumnos del grupo 5º A (A03, A21, A22 y A51) y 5 del grupo 5º B (A01, A04, A20, A25 y A26)

2º Sobre el nivel de éxito obtenido en la ficha: los 17 alumnos de cada grupo que la entregan dan la respuesta correcta. Ahora bien, 4 alumnos de 5º A (A13, A16, A29 y A37) y otros 4 de 5º B (A02, A12, A24 y A39) no justifican, cometen errores en la respuesta o han recibido ayuda de otras personas.

3º Sobre las estrategias utilizadas por los alumnos: existen diferencias sustanciales entre ambos grupos. A los alumnos de 5º B se les ha entregado manteles de 20 x 20 cm. para facilitarles la resolución del problema. Sin embargo, sólo un alumno de este grupo (A02) dice haberlos utilizado; el resto procede mediante la equivalencia de fracciones. En el otro grupo la presencia de material si que contribuye a que aparezcan otras estrategias diferentes de la equivalencia. Así:

Utilizan material 2 alumnos (A28 y A29)
Utilizan gráficos 6 alumnos (A05, A07, A16, A23, A35 y A37)
Utilizan la equivalencia de fracciones 9 alumnos (A09, A10, A11, A13, A31, A32, A33, A40 y A48)

A falta de otra explicación debemos pensar que bastantes alumnos de 5º B se han dejado olvidados los manteles en el aula y no han podido utilizar otras estrategias más acordes con su desarrollo cognitivo. A pesar de ello los resultados obtenidos son buenos, descontando la ayuda exterior que eventualmente hayan recibido.

Se concluye que cuando los alumnos disponen de material manipulativo utilizan una mayor variedad de estrategias, de modo que utilizan aquellas con las que se sienten más seguros. En este caso, algunos alumnos del grupo 5º A han abandonado la equivalencia de fracciones porque han utilizado gráficos posiblemente evocados por las acciones que han realizado con los manteles.

4º Sobre la identificación de la operación que resuelve el problema: 9 alumnos del grupo 5º A y 15 del grupo 5º B reconocen el significado de resta de fracciones. Recordemos que este es el primer problema de resta de fracciones que resuelven los alumnos. Este dato indica que los alumnos comprenden el significado de la resta de fracciones. El que haya más alumnos de 5º B que hayan reconocido la operación resta puede ser debido a la mayor utilización de la equivalencia de fracciones que obliga a representar de forma simbólica las fracciones y por lo tanto las relaciones que se establecen entre ellas.

Centrándonos en la ficha nº 5BIS los resultados siguen siendo satisfactorios aunque bajan con respecto a los obtenidos en la ficha anterior: en el grupo 5º A 17 alumnos saben resolver y explicar correctamente la solución, mientras que en el grupo 5º B hay 12 alumnos que actúan del mismo modo. En esta ficha se ha tomado la decisión de no dejar utilizar material manipulativo a los alumnos. De este modo se les ha forzado a utilizar el concepto de equivalencia.

En estas circunstancias no nos sorprendente que sólo una alumna (A35) haya resuelto el problema con la ayuda de gráficos. El resto de los alumnos ha utilizado la equivalencia de fracciones. La escasa utilización de gráficos hace que los alumnos afronten la ficha en el nivel simbólico, sin disponer de referencias visuales de las cantidades de longitud que indican las fracciones del enunciado del problema. Los alumnos se han situado en un nivel de abstracción superior, que no es el apropiado en este momento del proceso de instrucción, y que provoca la aparición de errores: alumnos que suman las fracciones en lugar de restarlas, alumnos que restan en el orden equivocado, etc. Para evitar estos errores se debe contextualizar el problema: realizar dibujos de las fracciones, ordenar las fracciones, realizar una estimación a priori de la magnitud del resultado y, finalmente, evaluar la solución en términos del modelo que se presenta en la propuesta didáctica.

Se observa que unos pocos alumnos han sumado las fracciones en vez de restarlas (A12 y A38); mientras una alumna (A15) ha restado las fracciones en el orden inapropiado.

Otra deficiencia observada en un grupo más numeroso de alumnos (A05, A16, A28, A29, A35, A37 y A40 y A19) consiste en que no reconocen la operación resta de dos fracciones. Estos alumnos resuelven la ficha con una resta, que simbolizan como $\frac{7}{5} - \frac{9}{10}$, y sin embargo en la tarjeta de evaluación escriben que no han realizado ninguna operación. Otros confunden la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes que se basa en la multiplicación con la operación que resuelve el problema.

Aparece otro resultado esperado: la práctica totalidad de los alumnos no saben simplificar fracciones. Muy pocos alumnos indican que 5/10 o bien 25/50 es igual a 1/2. Esta situación era previsible porque los alumnos no han recibido enseñanza de la técnica de simplificación. Hasta ahora, han recibido instrucción de la técnica de obtención de fracciones equivalentes basada en la multiplicación del numerador y denominador por un mismo número; sin embargo, no se les ha adiestrado en la modificación de la técnica basada en la división porque requiere conocimientos previos de divisibilidad que se estudiarán en el próximo curso. En este momento, los alumnos recibirán enseñanza de la técnica de simplificación.

En consecuencia, pensamos que las dificultades observadas por los alumnos en la ficha 5BIS tienen su origen en que las fracciones involucradas en el enunciado de la ficha no tienen para los alumnos una referencia tan clara de la cantidad de magnitud que representan como las implicadas en otras fichas anteriores. En efecto, los alumnos que no han percibido rápidamente que $\frac{7}{5}$ es mayor que $\frac{9}{10}$ comienzan a operar sin tener una conciencia clara de las cantidades de magnitud con las que están operando.

Para ayudar a los alumnos en la resolución de las tareas se propone recordar a los alumnos, en el momento de presentarles la ficha, la consigna: "antes de operar con símbolos realiza un dibujo de cada una de las fracciones que aparecen en el enunciado del problema".

Esta pauta es conocida por los alumnos porque es la que sigue el profesor cuando realiza la evaluación conjunta de las fichas: primero representa gráficamente las fracciones, identifica la operación que resuelve el problema y después aplica la equivalencia para calcular el resultado. Ahora lo que se pretende es que los alumnos no abandonen la estrategia de realizar gráficos porque les ayuda a identificar la operación que resuelve el problema y además les sirve de guía cuando operan con símbolos.

Toma de decisiones
Continuar con la planificación prevista. Y proponer en la siguiente sesión la resolución de fichas de ejercitación de la técnica operatoria de la resta de fracciones. Para ello se diseña la ficha 6BIS, que se compone de dos cuestiones:

1º. Compara las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$. Después réstale a la fracción mayor la fracción menor.

2º. Compara las fracciones $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{4}$. Después réstale a la fracción mayor la fracción menor

También hemos modificado la ficha nº 6, de modo que las cantidades que antes eran $\frac{5}{6}$ y 1 Kgr. ahora sean $\frac{6}{5}$ y 2 kgrs., respetando el resto del texto del enunciado del problema.

Día 15-11-2000 (Novena sesión)
Plan previsto.

1º Recoger, en el grupo de 5º A, el ejercicio que propone resolver la resta de fracciones $\frac{7}{4} - \frac{3}{8}$.

2º Resolución y evaluación de la ficha nº 6
3º Resolución y evaluación de la ficha nº 6BIS.

Ejecución
Se cumple el plan previsto, aunque no ha habido tiempo para evaluar la ficha nº 6BIS. La evaluación se realizará al comienzo de la siguiente sesión.

Aspectos actitudinales
La mayoría de los alumnos de 5º A traen resuelto el cálculo de la resta propuesto el día anterior. Durante el recreo ayudo a resolver la ficha 6BIS a las alumnas A03, A46 y A31 y al alumno A39 que ha mostrado actitud muy pasiva en la sesión de clase de hoy.

Asistencia de alumnos
Asisten todos los alumnos del grupo de 5º A; en el grupo 5º B falta el alumno A52.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados de obtenidos en la ficha nº 6 son análogos a los obtenidos en las fichas anteriores. Se esperaba mejores resultados porque las fracciones que intervienen en la ficha expresan cantidades más sencillas de evaluar que las que aparecen en la ficha 5BIS. Sin embargo, los alumnos han tenido dificultades para comprender el enunciado del problema debido a dos motivos:

1º la estructura semántica del enunciado del problema. El enunciado del problema describe una acción aditiva (aceitunas que debe añadir) pero la operación que resuelve la ficha es una resta.

2º la magnitud que se trabaja en el problema es el peso. Esta magnitud no evoca a los alumnos imágenes mentales tan claras como la magnitud longitud o superficie. El profesor cuando ha presentado la ficha ha aconsejado que piensen en la magnitud longitud para representar gráficamente las fracciones y valorar la cantidad de magnitud que representan. A pesar de estas recomendaciones algunos alumnos no han sabido considerar el kilogramo como unidad de medida y, mucho menos, realizar una transferencia de significados entre la magnitud peso y longitud, y asemejar un kilogramo con la unidad de longitud: la caña unidad.

La observación de lo acontecido en el grupo de 5º A muestra que algunos alumnos (A21, A22, A29, A48) que han solicitado materiales podrían tener éxito utilizando estrategias más avanzadas, como la realización de gráficos o la utilización de la equivalencia. Por ello el profesor no ha permitido la utilización de materiales cuando los alumnos de 5º B han afrontado la resolución de esta ficha. Así, pues las condiciones en las que los alumnos de 5º B han resuelto la ficha son más exigentes, y ello queda reflejado en los resultados que han obtenidos los alumnos de este grupo.

Mostramos a continuación los resultados de la ficha de trabajo nº 6:

	5º A		5º B	
	Sol. correcta	**Sol. incorrecta**	**Sol. correcta**	**Sol. incorrecta**
Totales	**20**	**4**	**14**	**9**
Material	**6** (A21, A22, A29, A32, A37, A48)	**2** (A07, A51)	**0**	**0**
Gráficos	**6**	**2** (A23, A36)	**5**	**3** (A06, A08, A19)
Equivalencia	**8**	**0**	**9**	**2** (A20, A38)
No la resuelven	**0**		**4** (A04, A39, A30, A49)	

Pensamos que gran parte de las dificultades observadas en la resolución de la ficha 6 radica en problemas para comprender la formulación de la ficha más que en errores de cálculo operatorio. Esta conjetura se confirma al estudiar los resultados obtenidos por los alumnos de los dos grupos en la ficha 6BIS. Sólo 7 alumnos del grupo 5º A (A03, A07, A28, A32, A47, A36, A51) y 4 de 5º B (A02, A04, A26, A39) no saben resolver la ficha 6BIS. Bien es verdad que a los alumnos que no han terminado la ficha 6BIS se les ha permitido llevársela a su casa con el encargo de traerla resuelta a la sesión siguiente. No obstante, la mayoría de los alumnos han dado muestras de conocer y aplicar la técnica operatoria basada en la equivalencia de fracciones.

Toma de decisiones.
La ficha 6 el la última para trabajar la operación resta de fracciones. Se trata de una ficha de evaluación que debería tener otra formulación semántica de modo que:
1º apareciera el significado de la resta de manera más nítida.
2º la magnitud que se trabaje en el problema sea la longitud o la superficie, no el peso.

Día 16-11-2000 (Décima sesión)
Plan previsto.
1º Evaluación de la ficha nº 6BIS
2º Resolución y evaluación de las fichas nº 7 y nº 7BIS.

Ejecución
Se cumple el plan previsto.
Al comienzo de la sesión se recoge la ficha 6BIS a los alumnos que no terminaron la ficha en la sesión del día anterior. En el aula del grupo 5º A el profesor solicita a un alumno (A29), que dice no saber hacer la ficha, que salga a la pizarra para resolver la primera cuestión.

Los alumnos abordan la resolución conjunta de las fichas 7 y 7BIS y, después de algunas intervenciones del profesor, se realiza una evaluación conjunta de la ficha. En la evaluación se enfatiza en la necesidad de realizar gráficos y/o de representar la suma de la misma cantidad de magnitud con tantos sumandos iguales como veces se repita el objeto que tenga el atributo medible.

Aspectos actitudinales
Los alumnos que debían resolver la ficha 6BIS la entregan al profesor. Este les ofrece ayudarles durante el recreo, si lo desean, a los pocos alumnos que no la han resuelto correctamente la ficha. Durante el recreo ayudo a resolver la segunda cuestión de la ficha 6BIS a las alumnos A03, A05, A32 y A36.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A falta las alumnas A07, A22 y A47 ; en el grupo 5º B falta el alumno A52.

Aspectos relacionados con la comprensión
Las fichas 7 y 7BIS han desconcertado a los alumnos de ambos grupos. Hemos detectado dos comportamientos que pasamos a analizar:

1º La escasa utilización de estrategias: sólo 3 alumnas (A03, A23 y A15) utilizan la suma reiterada (escribiendo 12 veces consecutivas la fracción) y una alumna de 5º A (A35) realiza un gráfico. Cabe la posibilidad que la ausencia de estrategias se deba a que en el problema se trabaja la magnitud peso que es de difícil representación gráfica. O también puede deberse a la preponderancia que conceden los alumnos a la estrategia basada en la equivalencia de fracciones.

2º Los alumnos que identifican la operación que resuelve el problema como la multiplicación, confunden el cálculo de esta operación con la técnica para encontrar fracciones equivalentes.

Así, la mayoría de los alumnos escriben como solución de la ficha nº 7 la fracción $\frac{24}{36}$. Aunque reconocen la operación $\frac{2}{3}$ x 12, escriben:

$$\frac{2}{3} \text{ x } 12 = \frac{2x12}{3x12} = \frac{24}{36}$$

Este error puede deberse a una mala simbolización de la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes, que ha sido detectada en algunos alumnos. Ahora bien, otros alumnos que no utilizaban una simbolización incorrecta también han planteado inicialmente la misma respuesta errónea.

Para "desmontar" esta concepción errónea de los alumnos, el profesor ha realizado una intervención durante la fase de realización de la ficha. Sin duda, las explicaciones aportadas por el profesor van a condicionar los resultados de la ficha. La intervención comienza con la propuesta de resolución de un problema más sencillo: "¿Cuánto pesan 2 latas de $\frac{2}{3}$ de Kgr. cada una?

Los alumnos afirman que deben sumar las fracciones, y el profesor escribe en la pizarra:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

El profesor pregunta al alumno A52 que calcule el resultado de la suma, y éste responde que es $\frac{4}{6}$.

Con la ayuda del material de longitud el profesor construye un segmento de longitud $\frac{4}{6}$ y argumenta con los alumnos del aula que esta fracción es equivalente a $\frac{2}{3}$. después escribe en la pizarra que:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Y pregunta al alumno si es posible que: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

El alumno parece convencerse que $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Y en ese momento el profesor propone que ellos mismos se pregunten qué ocurre si compran 3, 4, 5, ... , hasta 12 latas.

Tal vez los alumnos hayan identificado y simbolizado excesivamente pronto la operación multiplicación. Deberían haber pasado previamente por la estrategia de sumar reiteradamente la cantidad de magnitud (fracción) tantas veces como indique el multiplicador (número de veces).

Salvadas estas dificultades, con la ayuda de los profesores, la mayoría de los alumnos han resuelto correctamente las fichas. Se ha puesto de manifiesto otra dificultad que ya fue comentada en fichas anteriores: desconocimiento de la técnica de simplificación de fracciones. En este caso los alumnos han resuelto esta nueva dificultad haciendo grupos de tantas subunidades como indica el denominador para obtener unidades enteras. Algunos de ellos ha utilizado la división entera sin dar muestras de una adecuada comprensión de la introducción de esta técnica operatoria. Tanto es así, que bastantes alumnos identifican la división como la operación que resuelve la ficha.

Toma de decisiones.
Continuar con la planificación prevista. Y proponer en la siguiente sesión la resolución de una ficha para que los alumnos la trabajen en sus casa durante el fin de semana para reforzar la operación multiplicación de una fracción por un número natural. Para ello se diseña una ficha titulada "operaciones con fracciones", que se compone de tres cuestiones:

1º. ¿Cuántos litros de agua mineral hay en una caja que contiene 12 botellas de $\frac{3}{2}$ de litro?

2º. ¿Cuántos litros de batido de chocolate hay en un paquete que contiene 6 botellas de $\frac{1}{5}$ de litro?

3º. El paso de un adulto es $\frac{3}{4}$ de metro y el un niño es $\frac{2}{3}$ de metro. Se pregunta:

a) ¿Cuál es la diferencia entre el paso del adulto y el paso del niño?

b) ¿Cuántos metros avanza el adulto en 12 pasos?

c) ¿Cuántos metros avanza el niño en 12 pasos?

A la vista de los resultados obtenidos, pensamos que la propuesta didáctica debería incluir una ficha anterior a la nº 7 sobre la multiplicación por un natural más sencilla, de manera que no trabaje la magnitud masa y que el número natural o multiplicador sea inferior a la decena. Con esta última condición se pretende que los alumnos escriban, al menos, la solución como suma de fracciones iguales.

Día 17-11-2000 (Undécima sesión)
Plan previsto.
1º Resolución y evaluación de la ficha nº 8.
2º Resolución y evaluación de la ficha nº 9.
3ª Entregar la ficha "operaciones con fracciones" para que los alumnos la resuelvan durante el fin de semana como trabajo para casa.

Ejecución
Se cumple el plan previsto. En el grupo 5º B no ha habido tiempo para trabajar la ficha nº 9.
Al final de la sesión los alumnos reciben la ficha "operaciones con fracciones" para que la resuelvan durante el fin de semana como trabajo para casa.

Aspectos actitudinales
Algunos alumnos del grupo 5º A (A28 y A29) no han mostrado buena disposición al trabajo. El segundo alumno ha sido amonestado por su mal comportamiento. Este alumno ha permanecido castigado unos minutos en el aula, durante el recreo. En ese tiempo el profesor le ha explicado la ficha resuelta en clase y le ha aconsejado que mejore su actitud en clase.

En otros alumnos de ambos grupos se percibe cansancio, que se manifiesta en la desgana con que realizan las fichas. Afortunadamente se trata de un fenómeno que sólo se produce los viernes y además no afecta a todos los alumnos. En el grupo 5º A son A28 y A51 y los alumnos del grupo 5º B son A02, A06, A38, A39 y A52

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos de ambos grupos.

Aspectos relacionados con la comprensión
La mayoría de los alumnos escribe $\frac{3}{10} \times 25 = \frac{75}{10}$ pero no justifican la operación, ni comentan el significado que asignan a cada factor de la multiplicación. La respuesta más usual consiste en escribir una multiplicación sin dar ninguna explicación del razonamiento utilizado.

Esto hace que la evaluación de las estrategias utilizadas por los alumnos resulte complicada. Se propone modificar la tarjeta de evaluación de modo que los alumnos escriban los significados de los términos que intervienen en las operaciones multiplicación de una fracción por un natural y división de una fracción por un natural.

Los resultados de la primera pregunta de la ficha nº 8 son los siguientes:

	5º A		**5º B**	
	Sol. correcta	**Sol. incorrecta**	**Sol. correcta**	**Sol. incorrecta**
Totales	**18**	**6**	**15**	**8**
Escriben la multiplicación	**16**	**0**	**15**	**3** (A12, A26, A38)
Suma reiterada	**2** (A22, A35)	**1** (A05)	**0**	**0**
No la resuelven o reciben ayuda	**5** (A07, A28, A32, A47, A51)		**5** (A02, A06, A20, A39, A52)	

Los alumnos no han querido dibujar 25 losetas de $\frac{3}{10}$ de unidad y, por lo tanto, han utilizado representaciones simbólicas que no les evoca ninguna estrategia de resolución. Sería deseable que hubieran utilizado estrategias como la representación gráfica y la suma reiterada. Pensamos que algunos alumnos no están todavía preparados para abandonar el modelo y trabajar en el nivel simbólico.

Los resultados obtenidos por los alumnos en la segunda y tercera pregunta son peores. Las razones del bajo rendimiento en esta parte de la ficha pueden ser:

1º En la resolución del problema interviene la solución de la primera parte de la ficha.

2º Dificultad para evaluar la longitud $\frac{75}{10}$ m. para compararla con 8 m.

3º Fatiga o /y poco interés de algunos alumnos que se manifiesta al no escribir nada en la tarjeta de evaluación de la ficha.

En el grupo 5º A hay 11 alumnos (A03, A09, A10, A11, A13, A16, A31, A33, A35, A40 y A48) que resuelven correctamente la segunda pregunta de la ficha nº 8 y en el grupo 5º B son 5 los alumnos (A01, A14, A15, A27 y A34) que realizan con éxito la ficha.

Valoración.
La operación multiplicación de una fracción por un número natural creemos que no tiene excesiva dificultad conceptual. Sin embargo, los alumnos han abandonado demasiado pronto el modelo debido a que el dato de los enunciados de los problemas referido al número que actúa como factor multiplicador es demasiado grande para realizar gráficos o para proceder simbolizando la multiplicación como suma reiterada.

Toma de decisiones.
Deberemos modificar las fichas que trabajan este concepto e introducir una nueva para ir gradualmente aumentando la magnitud del factor multiplicador.

Día 20-11-2000 (Duodécima sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la ficha "operaciones con fracciones"
2º Resolución de la ficha nº 9 en el grupo 5º B y resolución de la ficha nº 10 en el grupo 5º A

Ejecución
En el grupo 5º B no ha habido tiempo para trabajar la ficha nº 9. Los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la ficha y un mantel de superficie unidad con el encargo de traerla cumplimentada a la siguiente sesión.

Comienza la sesión de clase a las 9 horas con el grupo 5º B. Toda la sesión se ha dedicado a resolver la ficha "operaciones con fracciones".

Han salido a la pizarra alumnos que no han sabido resolver los problemas planteados en esta ficha. Así, el alumno A52 resuelve el primer problema. Para descartar una mala interpretación del enunciado, el profesor le pide al alumno que lo lea en alto y que explique lo que le preguntan. Como el alumno se sigue mostrando pasivo el profesor le propone una estrategia: resolver un problema más sencillo que se enunciaría: ¿cuántos litros de agua hay en dos botellas de $\frac{3}{2}$ de litro?. Con la ayuda de sus compañeros resuelve el problema.

El problema nº 2 lo resuelve, en la pizarra, el alumno A38. Este alumno propone como método de cálculo de la suma de fracciones sumar numeradores y denominadores. El profesor ejemplifica, de nuevo, el absurdo al que se llega cuando se opera con este procedimiento erróneo: el total sería igual a una de las partes, siendo la otra no nula.

El apartado a) y b) del problema nº 3 lo resuelve el alumno A08, que suele realizar correctamente las fichas, pero se ha mostrado muy inseguro en las últimas fichas porque ha faltado varios días a clase. El apartado c) lo resuelve, con grandes dificultades, la alumna A25.

Como no ha habido tiempo para afrontar la ficha nº 9, los alumnos reciben la hoja de evaluación de esta ficha junto con unidades de superficie, de papel, con el encargo de resolverla en sus casas y traerla resuelta a la sesión del día siguiente.

En el grupo 5º A se proceda a realizar la evaluación conjunta de la ficha "operaciones con fracciones". Ninguno de los alumnos utiliza el procedimiento de cálculo erróneo consistente en sumar numeradores y denominadores para calcular la suma de fracciones. Para resolver los tres problemas salen a la pizarra los alumnos que han mostrado alguna dificultad en la resolución: los alumnos A03, A22 y A11 respectivamente.

La evaluación de los problemas de la ficha "operaciones con fracciones" sirve para mostrar las dos estrategias de resolución:

1º. realización de gráficos y medida del resultado

2º. realizar una suma de sumandos repetidos tantas veces como indica el factor.

En el grupo 5º A la evaluación de esta ficha ha concluido antes que el otro grupo y los alumnos han tenido tiempo para afrontar la ficha nº 10. La evaluación de esta ficha se realizará al comienzo de la siguiente sesión.

<u>Aspectos actitudinales</u>

Algunos alumnos del grupo 5º A (A03, A16, A21, A28, A32 y A51) y del grupo 5º B (A02, A06, A26, A38, A39, A30 y A49) no han traído resuelta la ficha "operaciones con fracciones".
Sin embargo, los alumnos de los dos grupos muestran buena disposición al trabajo en el aula que se manifiesta en el alto grado de atención que han prestado a las explicaciones del profesor y a las intervenciones de los compañeros.

<u>Asistencia de alumnos</u>

En el grupo de 5º A falta el alumno A36; en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>

Algunos alumnos han abandonado, demasiado pronto, la estrategia basada en representaciones gráficas. Tal vez hayan estado condicionados por el aumento del número de cantidades de magnitud. Por ejemplo, en el problema nº 1 habría que representar gráficamente la capacidad de 12 botellas. Como consecuencia algunos alumnos han resuelto los problemas operando con símbolos sin haber alcanzado el nivel cognitivo adecuado.

Por ejemplo, el alumno A06 muestra escasa comprensión del problema nº 1. Afirma que hay 18 litros de agua en una caja, pero escribe que:

$$\frac{3}{2} \text{ x } 12 = \frac{36}{24}$$

O la alumna A25 que escribe en la resolución del problema nº 3 que:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{1}$$

A pesar de los errores que acabamos de mostrar, la ficha ha sido resuelta correctamente por la mayoría de los alumnos.

Los alumnos del grupo 5º A han resuelto las fichas 9 y 10 sin que el profesor les haya comentado la existencia de una operación denominada división de una fracción por un número natural. Como era de esperar la mayoría de los alumnos no ha identificado la operación a pesar de que todos los alumnos han sabido resolverlas.

Algunos alumnos (A33) dicen que en la ficha nº 9 que para resolverlo "he hecho lógica". El desarrollo de la secuencia de enseñanza ha requerido realizar acciones que consisten en fraccionar cantidades expresadas por fracciones unitarias. Sin duda estos fraccionamientos que han realizado hacen que los alumnos perciban las fichas 9 y 10 como evidentes, dado que en ambas se propone el fraccionamiento de 1/2 en dos partes y en tres partes iguales, respectivamente.

Día 21-11-2000 (Decimotercera sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º Evaluar la ficha nº 10
2º Resolver y evaluar la ficha nº 11

En el grupo 5º B:
1º Recoger y evaluar la ficha nº 9
2º Resolver y evaluar la ficha nº 10

Ejecución
Se cumple con el plan previsto.
Como la implementación de la secuencia de enseñanza lleva un desfase aproximado de media sesión entre los dos grupos de docencia vamos a especificar, para cada grupo, aquello que ha ocurrido en cada aula.

En el grupo 5º A el profesor solicita a la alumna A33 que explique la respuesta que daba en la ficha nº 9 cuando justifica que la mitad de 1/4 es 1/8 "por lógica". La alumna afirma que lo sabe sin más. El profesor le pregunta a ella y al resto del grupo si sabe cuanto es la tercera parte de 1/3. Los alumnos contestan de inmediato que es 1/9. El profesor decide plantear otra división más compleja y les pregunta: ¿cuánto es la cuarta parte de 1/5? Los alumnos dicen, con acierto, que es 1/20. Cuando se les pregunta cómo lo han calculado algunos dicen: "multiplicando 4 por 5".

Nuestra propuesta de enseñanza se caracteriza porque las reglas de cálculo que aplican los alumnos sean comprendidas por éstos. Es más, se pretende que las reglas las justifiquen los alumnos mediante las acciones que estos realizan con el modelo en el marco de la resolución de problemas. Por este motivo, el profesor decide verificar en el modelo que "la mitad de 1/4 es 1/8" y pide a la alumna A31, que había resuelto mal la ficha nº 10, que salga a la pizarra y utilizando gráficos justifique este resultado.

Después el profesor solicita a la alumna A07 que resuelva, utilizando gráficos, la ficha nº 10 en la que se pregunta calcular "la tercera parte de 1/2". También solicita al alumno A37 que, en la pizarra, justifique que "la cuarta parte de 1/5 es 1/20". La estrategia utilizada en estos casos ha sido la realización de gráficos con el modelo longitud sin utilizar otras estrategias, más avanzadas, que aparecerán más tarde en esta misma sesión.

Cuando los alumnos del grupo 5º A han resuelto la ficha nº 11 se ha procedido a su evaluación. En este momento el profesor explica el significado de división de una fracción entre un número natural ejemplificando diversas situaciones de medida al fraccionar en partes iguales y en situaciones de reparto.

Se ha resuelto la ficha nº 11 utilizando dos estrategias que han utilizado los alumnos y que son:

a) realizar gráficos
b) utilizar la equivalencia de fracciones para disponer, en el numerador de la fracción, de tantos trozos como indica el número natural que actúa como divisor.

La estrategia basada en gráficos ha sido descrita por el profesor utilizando el modelo longitud y el modelo superficie. En este momento les ha recordado a los alumnos que en el curso pasado habían medido la superficie $\frac{3}{4}$: 2. La alumna A10 indica que ha utilizado otra estrategia y sale a exponerla en la pizarra. Esta estrategia se basa en la equivalencia de fracciones. Finalmente, el profesor utiliza un mantel de medida la unidad de superficie para ejemplificar el reparto de 3 subunidades de medida $\frac{1}{4}$ entre dos personas.

Al comienzo de la sesión de clase en el grupo 5º B los alumnos entregan la ficha nº 9. Tres alumnos (A06, A39 y A52) no la traen resuelta. La alumna A04, que hace mal la tarea, sale a la pizarra y la resuelve con la ayuda de sus compañeros.

El grupo afronta la resolución de la ficha nº 10. Cuando se procede a su evaluación el profesor explica el significado de la operación división y, posteriormente, el alumno A30 sale a la pizarra para describir la estrategia de resolución basada en la realización de dibujos con el modelo superficie. Otro alumno (A26) describe la misma estrategia con el modelo longitud. Finalmente, el alumno A01 explica a sus compañeros la estrategia basada en la equivalencia de fracciones.

El profesor ejemplifica esta última estrategia utilizando un mantel de papel de superficie la unidad planteando una situación problemática de reparto: "Quieres repartir un mantel de superficie 1/2 unidad entre 3 personas. ¿Qué superficie recibe cada persona?"

Hemos observado un fenómeno de "contaminación exterior" que pasamos a comentar: dos alumnas (A17 y A18 de 5º B) han recibido enseñanza del procedimiento de cálculo para la división. Durante la resolución de la ficha nº 10 las alumnas aplican correctamente el algoritmo y saben la respuesta pero no son capaces de utilizar ninguna de las estrategias que, tal vez, sin este "conocimiento externo" hubieran sido capaces de desarrollar

Aspectos actitudinales
Tres alumnos del grupo 5º B (A06, A39 y A52) no traen resuelta la ficha nº 9. Sin embargo, los alumnos de los dos grupos muestran buena disposición al trabajo en el aula que se manifiesta en el alto grado de atención que han prestado a las explicaciones del profesor y a las intervenciones de los compañeros.

Asistencia de alumnos
En el grupo de 5º A falta el alumno A36; en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
La estrategia dominante utilizada por los alumnos para dividir una fracción por un número natural es fraccionar la cantidad de magnitud en tantas partes iguales como indica el número natural y, después medir la cantidad de magnitud resultante.

Cuando la fracción es unitaria como ocurre en las fichas 9 y 10 la mayoría de los alumnos conocen a priori el resultado de la división porque han tenido experiencias de este tipo manipulando con tiras de papel en el curso pasado, y también realizando gráficos en diversas fichas que han resuelto durante este curso, en las sesiones anteriores.

Se observa la tendencia de algunos alumnos a utilizar razonamientos aditivos cuando resuelven la ficha nº 9. Por ejemplo los alumnos A03, A16 y A29 escriben que la solución es 1/8 porque:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

Los alumnos dan muestras de comprender la estrategia basada en representaciones gráficas, así como las explicaciones dadas por el profesor sobre el significado de la operación división de una fracción por un número natural. En este momento, es prematuro pronunciarnos sobre el grado de comprensión de la estrategia basada en la equivalencia de fracciones.

Tres alumnos (A01, A09 y A34) utilizan la estrategia basada en la equivalencia de fracciones para resolver la ficha nº 9, aunque no la explican con detalle. De estos tres alumnos, sólo A01, sigue utilizando esta estrategia. El resto de los alumnos de ambos grupos utiliza como estrategia de resolución la realización de gráficos. También hay que decir no se ha ejemplificado la estrategia basada en la equivalencia de fracciones hasta después de que los alumnos hayan resuelto la ficha nº 10.

También se ha observado que algunos alumnos del grupo 5º B no han entendido el enunciado del problema de la ficha nº 9. Tal vez fuera conveniente otra redacción alternativa del enunciado de la ficha: "Tienes una bola de plastilina que pesa 1/2 de unidad. Si fraccionas la bola en 3 partes iguales obtienes tres bolitas de plastilina. ¿Cuánto pesa cada una de las tres bolitas de plastilina?"

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A en la ficha nº 10 muestran que todos los alumnos, excepto A31, saben dar la solución correcta. Sin embargo, la realidad es que 9 alumnos (A03, A07, A22, A23, A29, A46, A32, A33 y A36) no han justificado la solución o bien han recibido ayuda de los profesores o de sus compañeros. Los 12 alumnos restantes utilizan como estrategia de resolución la realización de dibujos, salvo la alumna A09 que utiliza la equivalencia de fracciones

Vamos a valorar los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B en la ficha nº 10. Si atendemos únicamente a la solución del problema los datos son engañosos: sólo 3 alumnos no dan la respuesta correcta (A12, A39 y A52). Sin embargo, se realiza una mejor valoración del nivel de comprensión si se observa las estrategias utilizadas por los alumnos. La mitad del grupo, 11 alumnos, justifica adecuadamente la solución del problema. Uno de ellos (A01) emplea la equivalencia de fracciones y el resto un gráfico. La otra mitad del grupo no indica la estrategia utilizada y dos alumnas (A17 y A18) emplean la regla tradicional que les han enseñado en su casa.

Cuando los alumnos de ambos grupos han resuelto la ficha nº 10 todavía no habían recibido enseñanza de la estrategia basada en la equivalencia. En estas condiciones, lo previsible es que utilicen estrategias basadas en representaciones gráficas.

En la resolución de la ficha nº 11 se observan los efectos de la acción de enseñanza al aumentar considerablemente el número de alumnos (A05, A09, A10, A11, A13, A16, A21, A28, A29, A33) que utilizan la equivalencia de fracciones; mientras que sólo dos alumnas (A07 y A35) mantienen la estrategia basada en la realización de representaciones gráficas. Una alumna (A40) utiliza una estrategia diferente: divide primero la fracción unitaria 1/4 y después triplica el resultado. Sorprende que haya tantos alumnos de este grupo que utilicen la última estrategia que se les ha presentado.

Toma de decisiones

Se observa que los alumnos van realizando progresos en la resolución de situaciones problemáticas de reparto o de fraccionamiento en partes iguales de un cantidades de magnitud. Los alumnos identifican la operación división por un número natural y calculan el resultado representando, mayoritariamente, la cantidad de magnitud, fraccionando o repartiendo y, finalmente midiendo la cantidad resultante. Pensamos que necesitan más experiencias de este tipo para que pasen a utilizar estrategias más avanzadas como la equivalencia de fracciones. Con esta finalidad introducimos una nueva ficha denominada 12BIS:

"*Un equipo de 4 atletas participa en una carrera de relevos que consiste en correr* $\frac{2}{5}$ *de kilómetro. Si los cuatro atletas recorren la misma longitud, expresa con una fracción la cantidad de longitud que recorre cada uno*"

Día 22-11-2000 (Decimocuarta sesión)

Plan previsto.

En el grupo 5º A:

1º Resolver y evaluar la ficha nº 12

2º Resolver la ficha nº 12BIS

En el grupo 5º B:

1º Resolver y evaluar la ficha nº 11

2º Resolver la ficha nº 12

Ejecución

Los alumnos del grupo 5º A afrontan la resolución de la ficha 12. En la evaluación conjunta de la ficha colabora la alumna A32 para ejemplificar la estrategia basada en la equivalencia de fracciones. Sorprende que esta alumna, que suele obtener poco éxito en la resolución de tareas, haya comprendido y aplicado de forma tan rápida esta estrategia.

La alumna A03 sale a la pizarra para resolver la ficha utilizando gráficos con el modelo longitud. Y por último, el alumno A21 resuelve la ficha utilizando gráficos con el modelo superficie.

Después los alumnos afrontan la resolución de la ficha 12BIS. Bastantes alumnos terminan correctamente la ficha pero como algunos no la han podido resolver antes de terminar la sesión el profesor propone que la terminen en sus casa y que realicen el siguiente cálculo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

Los alumnos del grupo 5º B resuelven la ficha nº 11. Cuando se realiza la evaluación conjunta el profesor que observa que la alumna A20 no sabe calcular la suma de $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ le pide que salga a la pizarra. La alumna ejemplifica la estrategia basada en la realización de gráficos con el modelo superficie y con ayuda consigue calcular la suma de fracciones.

Para ejemplificar la estrategia basada en la equivalencia de fracciones que hasta ahora sólo utiliza el alumno A01 el profesor pide a la alumna A33 que salga a la pizarra en el convencimiento de que esta alumna ha utilizado esta estrategia. Sin embargo, la alumna realiza una variante de esta estrategia: utiliza la equivalencia y después un razonamiento aditivo. Afirma que la solución es $\frac{3}{8}$ porque:

$$\frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Después los alumnos afrontan la resolución de la ficha 12. Como algunos no la han resuelto antes de terminar la sesión el profesor propone que la terminen en sus casa y que realicen el siguiente cálculo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

Asistencia de alumnos

En el grupo de 5º A faltan los alumnos A47 y A36 ; en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B en la ficha nº 11 muestran que los alumnos de este grupo no utilizan la estrategia basada en la equivalencia a pesar de haberla ejemplificado, en la sesión anterior, durante la evaluación de la ficha nº 10. Sólo dos alumnos (A01 y A34) han utilizado esta estrategia, mientras que 12 alumnos han realizado con éxito la estrategia basada en la realización de gráficos. Ocho alumnos (A04, A12, A20, A26, A38, A39, A49 y A52) no justifican correctamente la respuesta o han necesitado ayuda para resolver la ficha.

A pesar de que los alumnos del grupo 5º B no se muestran seguros para utilizar la estrategia basadas en la equivalencia, los resultados de la ficha nº 11 han mejorado con respecto a los obtenidos en la ficha nº 10.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A en la ficha nº 12 muestran que los alumnos han abandonado la estrategia basada en la equivalencia de fracciones. Sólo cuatro alumnos (A09, A10, A11 y A32) utilizan esta estrategia frente a los diez alumnos que utilizaron esta estrategia para resolver la ficha nº 11, durante la sesión anterior. En aquella sesión se dio la circunstancia de que la alumna A10 y el profesor explicaron la estrategia basada en la equivalencia; y, pasados unos minutos, los alumnos resolvieron la ficha nº 11 en la que diez alumnos utilizaron la equivalencia de fracciones.

Este fenómeno indica que los alumnos son muy receptivos cuando reciben un estímulo próximo en el tiempo. Sin embargo, también se olvidan pronto de las estrategias que no han sido creadas por ellos y, en consecuencia, recelan de las estrategias impuestas por el profesor u otros alumnos. Para que un alumno asuma como propia una estrategia de resolución de un problema debe estar convencido de que obtiene una mejoría respecto a la estrategia utilizada hasta este momento.

Se observa una mejoría en las respuestas dadas por los alumnos del grupo 5º A en la ficha nº 12. El número de alumnos que ha necesitado ayuda o aporta una justificación incompleta ha bajado a 7 alumnos (A07, A23, A29, A46, A37, A48 y A52). Los restantes 11 alumnos resuelven con éxito la ficha utilizando gráficos, la mayoría con el modelo de superficie.

Toma de decisiones

Proponemos realizar una nueva ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones" que se compone de tres tareas:

1º. Para celebrar tu cumpleaños invitas a tus amigas a merendar pizza en tu casa. Sois 6 amigas, contándote tú. ¿Cuántas pizzas deberás comprar si quieres servir $\frac{2}{3}$ *de pizza a cada una?*

2º. Tres hermanos van a cenar. Tienen una tortilla de patata. Como dos de los hermanos se retrasan el *otro hermano se sienta a la mesa y come $\frac{1}{4}$ de tortilla. Los otros dos hermanos deciden repartirse, en partes iguales, la cantidad sobrante. Se pregunta:*

a) ¿Cuánta tortilla comerá cada uno de los hermanos que se han retrasado?

b) ¿Comen todos la misma cantidad de tortilla? ¿Cuánta tortilla comen unos más que el otro?

3º. Jaime come $\frac{1}{3}$ de tarta y su hermana Ángela la cuarta parte del resto. Se pregunta:

a) ¿Cuánta tarta come Ángela?

b) ¿Cuánta tarta comen entre los dos hermanos?

Día 23-11-2000 (Decimoquinta sesión)

<u>Plan previsto.</u>

En el grupo 5º A:

1º Recoger y evaluar la ficha nº 12BIS

2º Resolver la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones"

En el grupo 5º B:

1º Recoger y evaluar la ficha nº 12

2º Resolver y evaluar la ficha nº 12BIS

<u>Ejecución</u>

Todos los alumnos del grupo 5º A, salvo el A48, traen de sus casas resuelta la ficha nº 12BIS.

El alumno A37, que dice no saber operar la suma propuesta, sale a la pizarra y procede a realizar el cálculo.

Para realizar la evaluación conjunta de la ficha nº 12BIS el profesor solicita que la alumna A22, que no había justificado la solución de la ficha, salga a la pizarra y explique la estrategia utilizada. La alumna realiza un gráfico con el modelo superficie. Otra alumna (A35) ejemplifica la estrategia basada en gráficos con la magnitud longitud. Finalmente, el profesor comenta la estrategia basada en la equivalencia de fracciones.

Durante los 15 últimos minutos de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones". Cuatro alumnas (A09, A10, A35 y A40) resuelven correctamente los tres problemas de la ficha. Los demás alumnos reciben el encargo de traerla resuelta a la sesión.

A segunda hora de la mañana, comienza sesión de clase en el grupo 5º B. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la ficha nº 12 junto con el cálculo de la suma de fracciones $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$.

Se observan respuestas precipitadas y sin justificación alguna que muestran la desgana con que algunos alumnos realizan las fichas. Veamos la solución que aportan, sin justificación alguna, los siguientes alumnos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3}{9}\ \text{(A02, A12)}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\ \text{(A06, A20, A30)}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{6}\ \text{(A26)}$$

Además las alumnas A04 y A24 no entregan la ficha, los alumnos A25 y A39 no realizan el cálculo y las alumnas A17 y A18 dicen no saber realizar la suma. La alumna A17 sale a la pizarra y hace el cálculo utilizando como denominador común el número 24.

Otro indicador del escaso interés que ha suscitado la resolución de las fichas encomendadas por el profesor como trabajo de casa se manifiesta en el bajo rendimiento de los alumnos en el cálculo de la suma. Se trata de un ejercicio de consolidación de un procedimiento de cálculo sin dificultad conceptual alguna, que ha sido resuelto correctamente solamente por la mitad del grupo.

Para evaluar la ficha nº 12 sale a la pizarra el alumno A52 que manifiesta no saber resolver la tarea. El alumno utiliza como estrategia la realización de gráficos con el modelo superficie. Después de mostrar dificultades en la comprensión del significado de fracción consigue resolverla.

El profesor describe la otra estrategia basada en la equivalencia de fracciones y propone la resolución en el aula de la ficha nº 12BIS.

El alumno A01 realiza de inmediato la ficha y el profesor le propone la resolución de la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones". Los tres problemas de esta ficha los resuelve correctamente en 10 minutos. El profesor propone a todos los alumnos la resolución de esta última ficha como trabajo para realizar en sus casas.

No ha quedado tiempo para evaluar la ficha nº 12BIS con el grupo. Sin embargo, aprovechando que está lloviendo y los alumnos se quedan descansando en el aula, el profesor valora con los alumnos que lo desean las respuestas escritas en la tarjeta de evaluación.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Buen comportamiento en el aula pero se detecta poco esfuerzo en algunos alumnos del grupo 5º B. Por ejemplo, el alumno A06 tiene tal desinterés por resolver la ficha que ni siquiera pide ayuda a los profesores. El profesor le dice que resuelva la ficha en su casa y la traiga resuelta a la siguiente sesión.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Dos alumnos (A36 y A47) del grupo 5º A no asisten a clase y en el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Resulta complicado evaluar las unidades de comprensión de los alumnos del grupo 5º B en la resolución de la ficha nº 12, porque se trata de una ficha que ha sido propuesta como trabajo para casa y, en consecuencia, no se ha resuelto en el aula. Además de los factores externos, como ayudas de familiares o compañeros, se observa en bastantes alumnos desgana y falta de interés para realizar la ficha. Dos alumnos se dejan la tarjeta de la ficha en sus casa y 14 alumnos no resuelven bien la tarea por diferentes motivos: no justifican la respuesta dada, dan el resultado incorrecto o bien reciben ayuda externa.

Como aspecto positivo indicamos que aumenta el número de alumnos que utiliza la estrategia de resolución basada en la equivalencia de fracciones. Ahora son cinco los alumnos (A01, A08, A14, A27 y A34) que utilizan esta estrategia, algunos de ellos en combinación con la estrategia consistente en realizar gráficos.

Analizamos los resultados de los grupos de docencia en la ficha 12BIS. Se recuerda que esta ficha ha sido resuelta por los alumnos del grupo 5º B en el aula y los alumnos de 5º A la han resuelto en sus casas:

	5º A		*5º B*	
	Sol. correcta	*Sol. incorrecta*	*Sol. correcta*	*Sol. incorrecta*
Totales	**14**	**7**	**10**	**13**
Realizan gráficos	**7**	**-**	**2** (A24, A50)	**-**
Equivalencia de fracciones	**7**	**-**	**8** (A01, A08, A14, A15, A20, A27, A34, A49)	**1** (A02)
Confunden la operación	**1** (A03)		**2** (A12, A30)	
No justifican o mal justificado	**6** (A16, A22, A23, A28, A37 y A51)		**10** (A04, A06, A17, A18, A19, A25, A26, A38, A39, A52)	

Hemos considerado como erróneas las respuestas que estaban justificadas de modo incompleto o estaban mal justificadas, aunque la solución aportada por los alumnos coincida con la correcta.

Se observa que hay un mayor número de alumnos de 5º A que han utilizado la equivalencia de fracciones en la resolución de la ficha 12BIS. Son 9 alumnos (A09, A10, A11, A21, A31, A32, A35, A40 y A48) los que utilizan la equivalencia de fracciones. Hay 7 alumnos (A05, A07, A13, A21, A29, A31 y A33) que realizan gráficos. Dos de estos últimos alumnos (A21 y A31) utilizan ambas estrategias.

En el grupo 5º B, aunque algunos alumnos se pasen información entre ellos, los resultados muestran un aumento de la comprensión de la operación división de una fracción por un número natural, que se manifiesta en la utilización de mayor variedad de estrategias.

En ambos grupos la mejora de la comprensión se manifiesta por el empleo de la estrategia basada en la equivalencia de fracciones. Algunas alumnos que utilizan esta estrategia también justifican la respuesta realizando gráficos. Este es el caso de las alumnas A14, A15, A27 y A34 del grupo 5º B.

Toma de decisiones
En la siguiente sesión los alumnos van a resolver la última ficha referida a la operación división de una fracción entre un natural. Pretendemos con esta última ficha valorar los aprendizajes que los alumnos han realizado sobre esta operación.

También proponemos una nueva ficha titulada "problemas de ampliación de operaciones con fracciones" para que los alumnos los resuelvan las siguientes tareas como trabajo para casa:

1º. Un comerciante de telas ha vendido la mitad de una pieza de tela y después vende la quinta parte de la misma pieza.

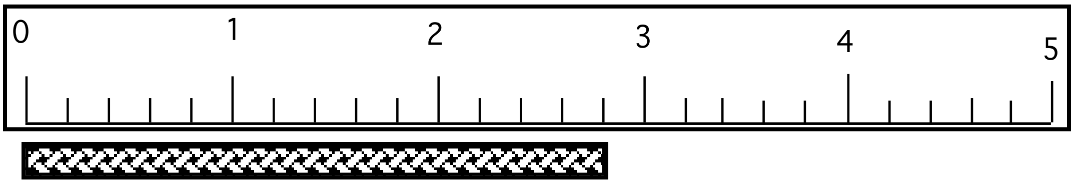
a) ¿Qué parte de la pieza ha vendido?

b) ¿Qué parte de la pieza le queda por vender?

c) Si la pieza tiene 20 metros, ¿qué longitud de tela queda por vender?

2º. Un pescadero vende los 3/4 de la mercancía y le quedan 15 Kgrs. por vender. ¿Cuántos kgrs. de mercancía tenía?

3º.- Con la ayuda de la siguiente regla, mide la longitud de la cuerda:



Debes expresar el resultado de la medida con una fracción. Te recuerdo que la unidad es el segmento que va de 0 a 1.

4ª. Halla la suma: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$

Día 24-11-2000 (Decimosexta sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º Resolver y evaluar la ficha nº 13
2º Recoger la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones" a los alumnos que resuelvan correctamente la tarea, y proponer a estos últimos la ficha "problemas de ampliación de operaciones con fracciones" para que sea resuelta como trabajo para casa.

En el grupo 5º B:
1º Evaluar la ficha nº 12BIS
2º Resolver y evaluar la ficha nº 13
3º Proponer la resolución de la ficha "problemas de ampliación de operaciones con fracciones" a los alumnos que hayan resuelto la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones"

Ejecución
Comienza la sesión del viernes, a primera hora de la mañana, con el grupo 5º B. El profesor pregunta al alumno A06 si ha resuelto la ficha 12BIS y dice habérsela dejado en casa. Para evaluar esta ficha el profesor pide la colaboración del alumno A30, que resuelve la ficha utilizando como estrategia la realización de gráficos con el modelo longitud.

Después los alumnos afrontan la resolución de la ficha nº 13. Los alumnos perciben esta tarea como sencilla; algunos dicen "es como la anterior". Todo indica que los alumnos identifican la operación que resuelve la ficha. Algunos alumnos la resuelven rápidamente. Según van terminando la ficha el profesor les propone la resolución de los tres problemas de la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones". Seis alumnas (A14, A15, A19, A24, A27 y A34) terminan con éxito esta tarea y reciben una nueva ficha "problemas de ampliación de operaciones con fracciones" para trabajarla durante el fin de semana. El alumno A01 que había resuelto la ficha titulada "problemas de operaciones con fracciones" ha estado trabajando la ficha de ampliación y sólo le queda terminar de resolver un problema.

La sesión del viernes comienza a las 11h.10m. en el aula de 5º A. Los alumnos afrontan la ficha nº 13. En la evaluación de la tarea sale a la pizarra la alumna A23 que da una respuesta errónea. Las dificultades de esta alumna radican en el conocimiento inestable del concepto de fracción que se manifiesta cuando utiliza el modelo longitud y decide fraccionar la unidad en 5 partes iguales para dibujar un segmento de longitud 5/4 u.

Cuando los alumnos van terminando la ficha nº 13 proceden a terminar de resolver la ficha "problemas de operaciones con fracciones". Antes de concluir la sesión ocho alumnos resuelven esta tarea (A05, A07, A11, A13, A21, A29, A33 y A48) que junto a las cuatro alumnas que la habían resuelto durante la sesión anterior hace que la mitad de los alumnos hayan resuelto la ficha. A todos estos alumnos se les propone la resolución de una nueva ficha "problemas de ampliación de operaciones con fracciones" para trabajarla durante el fin de semana.

<u>Aspectos actitudinales</u>
La mayoría de los alumnos de ambos grupos se sienten más motivados cuando el profesor les propone la realización de otras nuevas fichas según van terminando las precedentes. Hemos detectado, con agrado, este fenómeno en los dos grupos de docencia. La actitud de los alumnos ha sido muy activa. Esta metodología de trabajo ha funcionado bien; sin embargo cabe el peligro de que los alumnos no presten la dedicación deseable a las tareas a costa de primar la rapidez de la resolución en oposición al trabajo reflexivo durante el proceso de resolución.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Dos alumnos (A36 y A46) del grupo 5º A no asisten a clase y en el grupo 5º B falta el alumno A12.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
La estrategia mayoritaria para resolver la ficha 13 ha sido la realización de representaciones gráficas. Los resultados de los grupos de docencia en relación con las estrategias utilizadas son:

	5º A		*5º B*	
	Sol. correcta	*Sol. incorrecta*	*Sol. correcta*	*Sol. incorrecta*
Totales	**16**	**5**	**13**	**9**
Realizan gráficos	**9** (A05, A10, A16, A21, A22, A29, A47, A40, A48)	**5** (A03, A23, A32, A37, A51)	**7** (A14, A15, A24, A34, A30, A50, A52)	**6** (A04, A06, A17, A26, A39, A49)
Equivalencia de fracciones	**7** (A07, A09, A11, A13, A28, A31, A35)	**0**	**6** (A01, A08, A19, A20, A27, A38)	**3** (A02, A18, A25)
No justifican o mal justificado	**5**		**9**	

La práctica totalidad de los alumnos aportan la respuesta correcta e identifican correctamente la operación, aunque muchos alumnos no utilizan la representación simbólica $\frac{5}{4}: 10$. La secuencia de enseñanza no ha concedido relevancia a este aspecto de formalismo sintáctico. Pensamos que si los alumnos hubieran recibido la consigna de escribir esta representación en la tarjeta de evaluación éstos la hubieran incorporado a sus hábitos de escritura simbólica con muy poco esfuerzo. Se propone incidir sobre este aspecto en una futura fase de implementación.

Se observa que los alumnos tienen más recursos para resolver las fichas. Algunos alumnos utilizan las dos estrategias de resolución basadas en gráficos y el concepto de equivalencia de fracciones. Tres alumnos del grupo 5º A utilizan gráficos y la equivalencia de fracciones (A07, A28 y A35). En el grupo 5º B hay cinco alumnos (A08, A14, A19, A27 y A30) que muestran en la tarjeta de evaluación que han utilizado las dos estrategias.

Se observa que, poco a poco, conforme van realizando fichas los alumnos utilizan la estrategia basada en la equivalencia de fracciones de modo que perciben la cantidad de magnitud a fraccionar o repartir como compuesta por un número de subunidades que sea el mismo (o un múltiplo) del número que actúa como factor divisor. Observamos que otros alumnos no se encuentran seguros utilizando esta estrategia y proceden realizando gráficos de la cantidad de magnitud a fraccionar o repartir. No obstante, pensamos que los alumnos comprenden el significado de la operación y desarrollan capacidades para resolver problemas.

Si revisamos las fichas de los alumnos que no han justificado suficientemente la respuesta o que han recibido ayuda observamos que todos ellos han realizado gráficos, es decir, no se han paralizado ante la situación problemática descrita en la ficha y han sabido poner en marcha una estrategia de resolución de problemas.

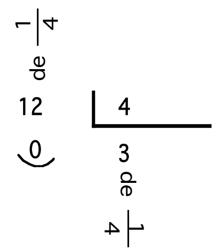
Toma de decisiones
Además de capacitar a los alumnos para que desarrollen el mayor número de estrategias, estamos particularmente interesados en que utilicen la estrategia basada en la equivalencia porque les va a servir, en un futuro muy próximo, para resolver problemas de repartos cuando en la secuencia de enseñanza se introduzca la fracción con el significado de reparto.

Día 27-11-2000 (Decimoséptima sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la tarea nº 14
2º Introducir un nuevo significado de la fracción: como resultado de un reparto igualitario.

Ejecución
A las 9 h. de la mañana comienza la sesión de clase en el grupo 5º B. El profesor dispone a los alumnos en equipos de 4 alumnos. Se forman 4 equipos de 4 alumnos y 2 equipos de 3 alumnos.

Se va a introducir un nuevo significado de la fracción: como resultado de un reparto igualitario. Cada grupo recibe 3 cañas y se formula verbalmente el enunciado de la tarea nº 14 que consiste en calcular la cantidad de regaliz que recibirá cada una de las cuatro personas que participan en el reparto.

Algunos equipos resuelven de inmediato resuelven mentalmente la tarea. Dos equipos necesitan ejemplificar el proceso de reparto con la ayuda de material manipulativo. Cuando los profesores han visto que todos los equipos sabían resolver la tarea les han entregado a los alumnos la tarjeta de evaluación de la tarea para que representen, de modo gráfico y simbólico, las acciones que han realizado con el material. Como era de esperar los alumnos saben representar gráficamente los fraccionamientos, en partes iguales, realizados en las barras, pero piden ayuda para representar de forma simbólica el proceso de reparto. El profesor explica el significado de reparto y de los términos de la fracción que muestra el resultado del reparto; y propone en la pizarra la siguiente representación del proceso de reparto:



Después los alumnos proceden a resolver, por equipos, la tarea nº 15. Sólo dos equipos solicitan material. Los alumnos encuentran con rapidez la fracción que indica el resultado del reparto aunque tienen dificultades para simbolizar el proceso de reparto y expresar con corrección los significados de los símbolos que aparecen en el reparto. Concluye la sesión de clase y no ha quedado tiempo para realizar una evaluación de la tarea. Se realizará al comienzo de la siguiente sesión.

En el grupo de 5º A se ha seguido la misma metodología de enseñanza. En este grupo de docencia no ha dado tiempo para resolver la tarea nº 15, posiblemente porque dos alumnos han formulado dos preguntas que vamos a comentar.

1º. La alumna A13 se sorprende de que podamos dar un significado distinto a la fracción 3/4. Parece que la alumna no admite que una misma representación simbólica tenga dos significados diferentes.

2º El alumno A29, después de haber realizado correctamente la tarea nº 14, afirma que esta tarea no tiene solución, porque la división

$$3 \,\underline{|\; 4 \quad\quad}$$

no puede realizarse.

Asistencia de alumnos
Dos alumnos (A36 y A47) del grupo 5º A no asisten a clase. En el grupo 5º B falta el alumno A06.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una buena disposición al trabajo. Los alumnos se muestran más motivados cuando utilizan materiales manipulativos. Sin embargo, dos de los equipos de 5º B no han sabido trabajar con esta nueva disposición de las mesas. Los componentes de equipo se han dedicado a hacerse reproches y a molestarse entre ellos; y los del otro equipos han mostrado muy poco interés por resolver la tarea.

Durante el recreo el profesor ha ayudado a algunos alumnos de los dos grupos a resolver la tarea "operaciones con fracciones"

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos entienden la acción que consiste en realizar repartos igualitarios. Han tenido múltiples experiencias en la realización de esta acción con números naturales. Pensamos que el rendimiento alto de los alumnos al enfrentarse a estas nuevas tareas se debe al conocimiento previo del significado de reparto con cantidades discretas y de la fracción como de medida de la magnitud longitud realizado en el curso anterior. La mayoría de los alumnos se ha ayudado de dibujos y ha resuelto con éxito las dos primeras tareas.

Como era de esperar las dificultades han aparecido cuando los alumnos escriben la representación simbólica del reparto o cuando expresan los significados de los términos de la fracción.

Los alumnos muestran una buena comprensión del significado del reparto, de modo que en esta primera sesión hemos realizado, en el grupo 5º B, la tarea nº 15 que estaba prevista resolver en la siguiente sesión.

Algunos alumnos (A11, A21, A31 y A33 de 5º A) han realizado, en la tarea nº 14, el reparto de "3 barras entre 4 personas" en dos fases: en la primera reparten media barra y en la segunda un cuarto de barra. El profesor les indica que el reparto está bien hecho pero que nos vamos a poner todos de acuerdo y vamos a realizar los repartos en una sola etapa, de modo que los trozos que se repartan tengan la misma longitud.

Toma de decisiones.
En el grupo 5º B se propone que antes de realizar la evaluación conjunta de la tarea nº 15, se recuerde el enunciado de la tarea nº 14 y plantear a los alumnos la pregunta que formula el alumno A29 sobre la imposibilidad de realizar la división de "3 barras para 4 niños".

En segundo lugar se propone, en los dos grupos de docencia, dibujar en la pizarra durante la fase de evaluación de las tareas los fraccionamientos de las barras. Sabemos que las representaciones gráficas juegan un papel importante en la transición de las acciones manipulativas a las representaciones simbólicas.

Día 28-11-2000 (Decimoctava sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º Resolver y evaluar la tarea nº 15
2º Resolver y evaluar la tarea nº 16

En el grupo 5º B:
1º Evaluar la tarea nº 15
2º Resolver y evaluar la tarea nº 16

Ejecución
Al comenzar la sesión de clase, en los dos grupos, el profesor hace dos comentarios:
1º Recuerda que todavía hay alumnos que no han entregado las tareas "operaciones con fracciones" y

"ampliación de operaciones con fracciones". Indica que durante el recreo el profesor estará en el aula de 5º B para evaluar de modo individual las tareas y ayudará a resolver los problemas que no sepan resolver los alumnos.
2º Informa que el viernes realizaremos una evaluación de los aprendizajes realizados sobre operaciones con fracciones. Los resultados de la prueba quedarán reflejados en el boletín de notas de los alumnos.

En el grupo 5º A los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 15 en la que se pide cuantificar el resultado del reparto de 3 barras entre 2 niños. Los alumnos no desean utilizar el material (las cañas) y concluyen con rapidez y acierto la tarea. Las dificultades han surgido en la representación simbólica del proceso de reparto. En la evaluación conjunta de la tarea el profesor establece el convenio de la simbolización del reparto:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2} \text{ de}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \text{ de } \tfrac{1}{2} \end{array}$$

El profesor incide en el significado de la fracción resultado del reparto, $\frac{3}{2}$ de barra, y de los términos de la fracción.

Después los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 16 en la que se les pide que cuantifiquen el resultado de 5 barras de regaliz entre 3 niños. La mayoría de los alumnos resuelven con éxito la tarea. Para evaluar la tarea el profesor solicita que el alumno A16, que no ha sabido simbolizar el proceso del reparto, salga a la pizarra a resolver la tarea.

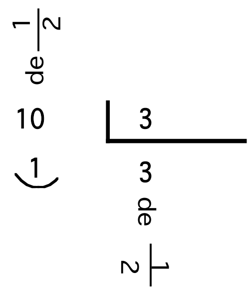
En el grupo 5º B comienza la sesión con una intervención del profesor para recordar las tareas resueltas en la sesión anterior. Escribe el enunciado de la tarea nº 14 en la que se pide cuantificar el reparto de 3 barras de regaliz entre 4 niños y traslada a los alumnos la pregunta que formula, durante la sesión del día anterior, el alumno A29: "¿se puede realizar el reparto de 3 entre 4 a pesar de que hay menos barras que personas?". Han intervenido algunos alumnos pero no han sabido dar una respuesta atinada que muestre las diferencias entre los conjuntos numéricos de los naturales y los racionales.

El profesor realiza la evaluación conjunta de la tarea nº 15. Indica a los alumnos que los fraccionamientos de la unidad (barras de regaliz) deben ser iguales, de la misma longitud; y aprovecha para establecer el convenio de la simbolización del reparto que hemos descrito anteriormente.

Los alumnos se muestran desorientados cuando intentan simbolizar el proceso del reparto que efectúan en la tarea nº 16. El profesor observa que algunos alumnos, como la alumna A18, que escribe:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$$

y realiza una intervención general para recordar el significado de los términos de la división entera. El profesor hace ver a los alumnos que quedan dos barras sin repartir y esto no es posible porque ahora debemos repartir TODAS las barras. Después pregunta si pueden realizar el reparto cuando fraccionan las 5 barras por la mitad. Los alumnos afirman que no, porque quedará una barra sin repartir. El profesor escribe la simbolización:



y pide a los alumnos que terminen de resolver la tarea.

Para evaluar la tarea nº 16 sale a la pizarra el alumno A38 que ha fraccionado cada barra en 6 partes iguales y que aporta como resultado del reparto la fracción $\frac{10}{6}$ de barra que es equivalente a $\frac{5}{3}$ de barra.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Dos alumnos (A36 y A48) del grupo 5º A no asisten a clase y en el grupo 5º B faltan tres alumnos: A06, A12 y A52.

<u>Aspectos actitudinales</u>
En ambos grupos se observa en los alumnos una buena disposición al trabajo. Durante el recreo el profesor ha ayudado a algunos alumnos de los dos grupos a resolver la tarea "operaciones con fracciones"

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Algunos alumnos realizan repartos en fases o etapas, aunque el profesor les ha recomendado que hagan los repartos en una sola fase, de modo que todos los fraccionamientos realizados tenga la misma cantidad de longitud. El alumno A28 realiza un reparto por fases en la tarea nº 16. Este alumno que da la respuesta correcta, actúa del siguiente modo: reparte tres barras sin fraccionarlas y las dos barras restantes las fracciona en tres partes iguales. El profesor le indica que ha repartido bien pero que debe proceder realizando todos los fraccionamientos iguales.

La mayoría de los alumnos resuelven las tareas de reparto con éxito. Esto hace que vayamos ganando tiempo en la temporalización de la propuesta de enseñanza. Como era de esperar hay dos focos en los que se concentran las dificultades: en la simbolización del proceso del reparto y en la formulación de los significados de la fracción que se obtiene como resultado del reparto.

Como los alumnos saben resolver las tareas utilizando gráficos evitan escribir la representación simbólica del proceso de reparto, a pesar el enunciado de la tareas exige simbolizar el proceso de reparto.

Se observa que algunos alumnos realizan la evaluación semántica de los términos de fracción desde el modelo medida. Los alumnos escriben, en la tarea nº 15, que el denominador indica "cuantas veces has fraccionado la unidad" y el numerador "cuantos trozos has cogido" (alumna A07), "trozos de regaliz que le ha tocado a cada uno" (alumna A23), "cuantos trozos de regaliz le damos a cada niño" (alumno A28), "el número de trozos de regaliz que hemos cogido para cada niño" (alumna A40).

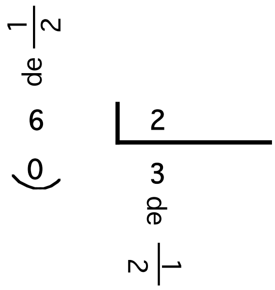
Las respuestas sobre el significado de los términos de la fracción dadas por los alumnos del grupo 5º B en la tarea nº 15 han sido escasamente reflexionadas y, en la mayoría de los casos, son erróneas.

Los alumnos siguen teniendo dificultades para expresar el significado de los términos de la fracción en la tarea nº 16, a pesar de que el profesor ha explicado el nuevo significado de la fracción al evaluar la tarea anterior. Los alumnos han recibido la siguiente explicación sobre los significado de los términos de la fracción:

1º La fracción indica la cantidad de barra de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto.
2º El numerador indica el número de barras que había antes de hacer el reparto.
3º El denominador indica el número de personas que participan en el reparto.

Hasta el momento ninguno de los alumnos que en la tarea nº 16 aportan como solución del reparto la fracción 10/6 barras cuestiona que el numerador ni denominador coincidan con las condiciones iniciales del reparto: 5 barras para 3 niños. El profesor ha preferido posponer hasta un momento posterior la cuestión de la igualdad de repartos. Si se diera tal circunstancia habría que adelantar la introducción de la noción de reparto equivalente.

Se observan fenómenos de colisión o confusión entre los dos significados de la fracción que conocen los alumnos. Así la alumna A22 ha tenido dificultades para simbolizar, con una fracción, la cantidad que obtiene en el reparto, de modo que después de simbolizar correctamente el proceso del reparto:



no reconoce que " 3 subunidades de longitud $\frac{1}{2}$ de barra" son $\frac{3}{2}$ de barra.

<u>Toma de decisiones.</u>
Dado que los alumnos necesitarán más tiempo para resolver la tarea nº 18 se propone comenzar la siguiente sesión con esta tarea, y proponer como trabajo para casa la resolución de la tarea nº 17. Esta última tarea tiene una estructura análoga a otras tareas realizadas con anterioridad y no se espera que los alumnos tengan dificultades para resolverla correctamente.

La alumna A50 ha realizado, en la tarea nº 16, el mismo fraccionamiento que el realizado por el alumno A28. Sin embargo, esta alumna aporta como solución de la tarea 1/2 de barra. Para que los alumnos observen un reparto en varias fases y, además, se percaten del tipo de error cometido por la alumna, se decide hacer un comentario general sobre esta tarea al comienzo de la siguiente sesión con el grupo de 5º B.

Día 29-11-2000 (Decimonovena sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Repasar las tareas nº 15 y 16.
2º Resolver y evaluar la tarea nº 18.
3º Proponer como trabajo para casa la resolución de la tarea nº 17.

<u>Ejecución</u>
Los alumnos han tardado más tiempo del esperado en la resolución de las dos partes de la tarea nº 18. En ambos grupos se ha evaluado la primera parte de la tarea pero ha faltado tiempo para evaluar la segunda parte e institucionalizar el concepto de repartos equivalentes. Queda pendiente para la siguiente sesión trabajar esta noción.

En el grupo de 5º A, nos encontramos con la sorpresa agradable de que la alumna A46, que tiene dificultades de aprendizaje, ha resuelto correctamente y sin ayuda la primera parte de la tarea nº 18. El profesor le pide que salga a la pizarra a mostrar la estrategia de resolución utilizada.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Tres alumnos (A36, A47 y A48) del grupo 5º A no asisten a clase y en el grupo 5º B falta el alumno A52.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos grupos han estado muy activos. Han mostrado interés por resolver la tarea nº 18 y esto ha quedado reflejado en el mayor nivel de éxito obtenido en esta tarea.
Durante el recreo el profesor ha ayudado a algunos alumnos de los dos grupos a resolver la tarea "operaciones con fracciones". Algunos alumnos están interesados en resolver problemas de esa tarea ante la inminencia de la prueba de evaluación que van a realizar el próximo viernes.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Todos los alumnos de los dos grupos de docencia indican que la cantidad de regaliz resultado de reparto "2 barras entre 3 niños" es 2/3 de barra. Sólo los alumnos A33 (de 5º A) y A38 (de 5º B) indican que el resultado del reparto es 4/6 de barra. Ninguno da una respuesta incorrecta.

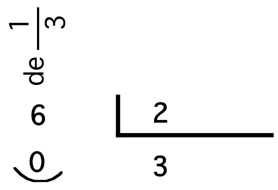
Cuando los alumnos cuantifican el reparto "4 barras entre 6 niños" la mayoría de los alumnos dan como respuesta 4/6 de barra, salvo 5 alumnos del grupo del grupo 5º A que escriben 2/3 de barra y la alumna A22 que da la respuesta incorrecta 3/3 de barra. En el grupo 5º B dos alumnas (A14 y A19) escriben 2/3 de barra y cuatro dan respuestas incorrectas como 6/4 y 24/6 de barra.

Para valorar el nivel de comprensión de los alumnos necesitamos otros indicadores, además del que hace referencia a la solución aportada por éstos. Vamos a interesarnos por las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver la tarea. Los alumnos han tenido la opción de utilizar material manipulativo pero han recibido la consigna de realizar representaciones gráficas y simbólicas. Muy pocos alumnos han utilizado material manipulable para resolver la tarea. La mayoría han realizado representaciones gráficas. Pensamos que el estudio de los gráficos realizados por los alumnos es un buen indicador para valorar el grado de comprensión que tienen éstos del proceso de reparto.

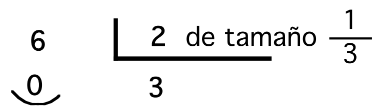
En el grupo 5º A hay 6 alumnos (A03, A07, A22, A32, A48 y A51) que tienen dificultades para entender el proceso del reparto. Hay 7 alumnos (A04, A06, A12, A25, A26, A49 y A52) del grupo 5º B que no justifican con gráficos adecuados el proceso de reparto a pesar de aportar la solución correcta. Tal proceder es un indicio de escasa comprensión conceptual.

Un tercer indicador del nivel de comprensión de los alumnos se basa en las representaciones simbólicas que efectúan los alumnos. En este apartado existen diferencias sustanciales entre los dos grupos. Los alumnos del grupo 5º B son mucho más descuidados en la simbolización, lo que les ocasiona mayor número de errores. Hay 5 alumnos (A04, A06, A12. A25 y A39) que no utilizan esta representación cuando reparten "4 barras entre 6 niños" y 14 alumnos que no escriben el tamaño de las subunidades que se reparten.

Se han observado errores en las representaciones simbólicas que utilizan alumnos que tienen una buena comprensión del significado de reparto. Así las alumnas A27 y A50 dividen el número de subunidades obtenidas al fraccionar 2 barras en 3 partes iguales, entre un número de trozos:



La alumna A31 comete el mismo tipo de error:



En el grupo 5º A hay 3 alumnos (A07, A22 y A48) que no escriben la representación simbólica, y 4 alumnos (A03, A31, A32 y A51) que realizan una representación errónea. Bastantes alumnos de 5º B han descuidado la representación simbólica del proceso de obtención del resultado del reparto.

Un último indicador del nivel de comprensión se obtiene del estudio de los significados que los alumnos asocian a la fracción y a sus términos. Los resultados de este indicador han mejorado con respecto al referido a la simbolización del proceso del reparto. El número de alumnos que no han expresado correctamente los significados es análogo al de alumnos que no han sabido justificar los gráficos realizados en el proceso del reparto.

Se observa con carácter general que los alumnos que no justifican los gráficos que efectúan cometen errores en la evaluación semántica de la fracción y de sus términos. Así, la alumna A22, que aporta como solución del reparto "4 barras entre 6 niños" la fracción 3/3 escribe:

"*La fracción indica el número de trocitos de regaliz que le toca a cada niño*".

"*El numerador indica el tamaño de los trocitos de regaliz que le toca a cada niño*".

El alumno A48 comprende el significado de la fracción como resultado de una medida, y escribe:

"*La fracción indica el resultado de la medida de una cantidad*".

"*El numerador indica el número de subunidades que he colocado*".

"*El denominador indica el número de partes iguales en los que has partido la unidad*"

Otros 7 alumnos de 5º A (A07, A16, A23, A28, A46, A33, A35) han asignado al denominador el mismo significado. Verdaderamente esta respuesta, sin ser la óptima, también es correcta porque los alumnos, para realizar el reparto, suelen proceder fraccionando la unidad (la barra) en tantas partes iguales como el número de niños que haya.

En ambos grupos se observa que los alumnos están influenciados por el significado de fracción estudiado con anterioridad. Se da la circunstancia que el significado de la fracción como reparto tiene una formulación verbal muy sencilla. Esto ha ayudado a elevar el nivel de éxito de la tarea.

Las dificultades mostradas para expresar los nuevos significados están asociadas, para un número reducido de alumnos de ambos grupos, con una escasa comprensión del significado de reparto; y para un número mayor de alumnos con la influencia del significado de la fracción como resultado de una medida. Algunos ejemplos de este último caso lo aportan las alumnas A19 y A50 cuando escriben:

"*El numerador indica las partes que se lleva cada uno*" *(alumna A19)*

"*El numerador indica cuantos trozos*" *(alumna A50)*

Podemos concluir que nivel de comprensión del significado de la fracción como resultado de un reparto y del proceso de obtención es aceptable en ambos grupos. En el grupo 5º A hay 6 alumnos (A03, A07, A22, A32, A48 y A51) que tienen una comprensión baja, mientras que en el grupo 5º B hay 10 alumnos (A04, A06, A12, A17, A18, A25, A26, A39, A49 y A52) que están en esta misma situación.

Toma de decisiones.
Aunque los resultados de la tarea nº 18 muestran una buena comprensión del significado de la fracción como resultado de un reparto, en las tareas siguientes, los alumnos deben mejorar la calidad de las representaciones simbólicas que utilizan. De momento vamos a seguir con la planificación prevista, que deberá ser modificada si los alumnos no utilizan con éxito las representaciones simbólicas del proceso del reparto, en las siguientes tareas.

Día 30-11-2000 (Vigésima sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 17.
2º Evaluar la Ficha de trabajo nº 18.
3º Proponer como trabajo para casa la resolución de la tarea nº 19.

Ejecución
Se cumple el plan previsto. Se ha procedido a recoger la tarea nº 17 y se ha realizado una evaluación conjunta de la tarea. Como la evaluación de esta tarea se ha realizado inmediatamente después de habérsela entregado al profesor, ha habido algunos aspectos interesantes que no se han comentado con los alumnos. Hubiera sido interesante que los alumnos que aportan como solución de la tarea 1 barra o la fracción 1/1 hubiesen explicado los significados que dotan al numerador y denominador de la fracción.

Durante la evaluación de la tarea nº 18 el profesor ha trabajado, con ambos grupos, la idea de equivalencia de repartos utilizando cañas y la colaboración de alumnos que han salido a la pizarra para ejemplificar repartos. Los alumnos afirman que los dos repartos involucrados en la tarea nº 18 son equivalentes porque las fracciones que indican los resultados de los repartos son equivalentes.

Finalmente, los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la tarea nº 19 para que la resuelvan en sus casas durante el fin de semana, dado que en la sesión del día siguiente, viernes, los alumnos van a realizar la prueba sobre operaciones con fracciones.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º A no asiste a clase el alumno A36. En el grupo 5º B asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos aportan una amplia variedad de soluciones en la tarea nº 17. Veámoslas en la siguiente tabla:

Tarea nº 17 Resultado del reparto	*5º A*	*5º B*
	Nº de alumnos	Nº de alumnos
1 barra	6	4

1/1 barra	3	3
2/2 barra	2	2
3/3 barra	8	5
1/3 barra	1	5
4/3 barras	0	1
No entregan	2	3

Ha habido 6 alumnos del grupo 5º A que han expresado mal la representación simbólica del reparto. Estos alumnos han optado por realizar fraccionamientos de las barras en dos o tres partes iguales, pero han intentado utilizar la representación simbólica que aparece en la tarjeta de evaluación:

$$3 \quad \underline{|\;3 \qquad\quad}$$

Lejos de servirles de ayuda, los alumnos no han considerado esta notación como la acción a realizar: "repartir 3 barras de regaliz entre 3 personas", porque esta simbolización les sugiere realizar un cálculo. La caja de la división la tienen asociada al procedimiento de cálculo de la división entera y ahora, cuando la ven escrita, intentan de inmediato realizar un cálculo con esta simbolización.

Los alumnos conocen el significado de la fracción y de los términos de ésta. Sin embargo, las características particulares de la tarea en la que se reparten 3 barras de regaliz entre 3 niños pone de manifiesto un aspecto novedoso: la mayoría de los alumnos no intentan dar un significado coherente a los términos de la fracción que obtienen como resultado del reparto. Veamos el caso de la alumna A35 que si que realiza este esfuerzo. La alumna indica que el resultado del reparto es $\frac{1}{1}$ y escribe:

"*El numerador indica el trozo que recibe cada niño*"

"*El denominador indica cómo tiene que ser la longitud de cada trozo de barra*"

Otra alumna (A10) que aporta la misma solución, escribe el significado del numerador:

"*El numerador indica cuántas barras de regaliz les toca a cada niño*"

pero no justifica que aparezca un 1 en el denominador:

"*El denominador indica cuántos niños van a participar en el reparto*"

Sólo escriben un significado coherente con la respuesta dada los alumnos que han optado por fraccionar las barras en tres partes iguales y, en consecuencia, dan como solución la fracción $\frac{3}{3}$ de barra.

En el grupo 5º B diez alumnos (A02, A12, A15, A17, A18, A25, A26, A38, A49 y A52) no han escrito correctamente la representación simbólica del reparto. Por esta razón los alumnos A02, A12, A17, A18, A25 y A26 dan soluciones erróneas; y los restantes aportan como solución la fracción $\frac{3}{3}$ (A15, A49 y A52) y la fracción $\frac{2}{2}$ (A38) sin justificar sus respuestas.

En este grupo se manifiestan, con mayor crudeza, las dificultades que tienen los alumnos para utilizar correctamente la representación simbólica del reparto. Como hemos indicado al estudiar los resultados del grupo 5º A en la tarea nº 17 la aparición de la representación:

$$3 \quad \underline{|\;3 \qquad\quad}$$

puede haberles inducido a error. Sin embargo, esta no es la única justificación de los errores cometidos por los seis alumnos del grupo 5º B que aportan como resultado del reparto las fracciones 1/3 y 4/3 de barra. Sin duda alguna han tenido que confluir las dificultades conceptuales con altas dosis de desidia para que los seis alumnos escriban estas soluciones como el resultado de repartir 3 barras de regaliz entre 3 niños.

Los alumnos de ambos grupos han dado muestras de comprender el concepto de reparto equivalente por analogía con el de fracción equivalente, cuando se ha realizado la evaluación conjunta de la tarea nº 18. Los alumnos han reconocido que en los repartos:

2 barras entre 3 niños
4 barras entre 6 niños

las personas implicadas reciben la misma cantidad de regaliz: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ de barra.

La propuesta de enseñanza pretende poner de manifiesto la potencia del significado de reparto. Por ello el profesor ha intentado que los alumnos perciban la equivalencia de repartos sin recurrir a cuantificar el resultado, es decir, sin que intervengan fracciones. La actividad ha consistido en pedir a tres alumnos que salgan a la pizarra a repartirse 2 barras. Después ha pedido a otros tres alumnos que hagan lo mismo. El profesor realiza la siguiente pregunta: "Si los dos grupos deciden juntarse y compartir las barras, ¿recibirán más cantidad de regaliz, menos o igual que antes?"

Inicialmente los alumnos dan respuestas contradictorias y, poco a poco, admiten que recibirán la misma cantidad de regaliz. Después el profesor solicita que salgan a la pizarra otros 3 alumnos para repartirse 2 barras de regaliz. Se forma un grupo de 9 personas que se van a repartir 6 barras de regaliz y cuando el profesor les formula la pregunta anterior los alumnos se muestran inicialmente muy inseguros en sus respuestas.

Con la intención de evaluar la conveniencia de la introducción de la técnica de comparación de fracciones basada en el significado de reparto en los casos en que las fracciones vengan expresadas con diferentes numeradores y denominadores, el profesor plantea a los alumnos una situación basada en "compartir" barras de regaliz. Para ello escenifica la situación de la siguiente manera:

1º Propone que salga a la pizarra un grupo de 3 alumnos que se van a repartir 2 barras de regaliz.
2º Pide que salga otro grupo de 2 personas que se van a repartir 2 barras de regaliz
3º Pregunta que grupo es más "rico" y que grupo es más "pobre"
4º Después pide a los dos grupos que "compartan" las barras, es decir que junten las barras y se junten las personas, para realizar después el reparto.
5º El profesor les pregunta: "En este último reparto, ¿recibirán más regaliz que el los anteriores? ¿Algún grupo sale ganando? ¿Alguno sale perdiendo? ¿Cuál?".

Esta situación se ha trabajado en los dos grupos pero no ha motivado en exceso a los alumnos. El profesor ha tenido que ir sugiriendo las respuestas, mientras que los alumnos asentían pero no intervenían con la contundencia que muestran cuando se sienten sabedores de la respuesta. Pensamos que el nivel cognitivo medio de los alumnos no es el adecuado para afrontar estas cuestiones. De momento, se toma como decisión no incidir en esta idea durante la secuencia de enseñanza.

<u>Toma de decisiones.</u>
Se propone modificar la tarjeta de evaluación de la tarea nº 17 de modo que no aparezca la representación simbólica**:**

$3 \;\; \underline{|\; 3 \quad\quad}$

En tareas próximas los alumnos van a comparar repartos con la intención de que refuercen el significado de la fracción y realicen una evaluación semántica de los términos de la fracción. En nuestro caso, no asumimos el objetivo de introducir nuevas estrategias de comparación basadas en la idea de "compartir repartir", aunque sería deseable por la riqueza conceptual que proporciona. En vista de que los alumnos han percibido como difícil esta primera aproximación a la estrategia que llamamos de "compartir repartos" hemos decidido no introducirla y estar alerta por si algún alumno la utiliza.

Día 1-12-2000 (Vigésimo primera sesión)
<u>Plan previsto.</u>
Se realiza en ambos grupos la prueba de evaluación sobre operaciones con fracciones.

<u>Asistencia de alumnos</u>
En el grupo 5º A falta a clase el alumno A36. En el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

<u>Ejecución</u>
La prueba la realizan, simultáneamente, los dos grupos de docencia durante la tercera sesión de clase de la

mañana, es decir, de 11h. 10m. a 12h. Todos los alumnos terminan antes de que concluya la sesión. Cuando los alumnos terminan la prueba el profesor entrega a los alumnos otro ejemplar del examen que han realizado, con la consigna de que lo traigan resuelto el próximo lunes.

Día 4-12-2000 (Vigésimo segunda sesión)

Plan previsto.

1º Recoger la réplica del examen realizado el pasado viernes.
2º Recoger y evaluar la tarea nº 19

Ejecución

Comienza las sesiones de clase, del lunes, con el grupo 5º B. El profesor recoge la réplica del examen realizado el pasado viernes y la tarjeta de evaluación de la tarea nº 19.

Para realizar la evaluación conjunta de la tarea nº 19 sale a la pizarra la alumna A19. La alumna, siguiendo las instrucciones del profesor, escribe la fracción 2/3 que es la cantidad de regaliz que recibe cada uno de los niños que han participado en el reparto. Como han participado 3 niños en el reparto, el profesor le pregunta cómo puede saber el número de barras de regaliz que se han repartido. Ni la alumna ni la mayoría de los alumnos saben resolver la cuestión propuesta.

El profesor decide ejemplificar esta situación. Para ello solicita la presencia de 3 alumnos que tienen, cada uno, 2 subunidades de longitud 1/3 de caña (barra). Cuando el profesor vuelve a plantear la cuestión anterior, la alumna escribe:

$$\frac{2}{3} \text{ x } 3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ barras}$$

Después, el profesor solicita a la alumna que complete la simbolización del reparto:

$$\square \qquad \underline{|\,\square \qquad}$$

la alumna se muestra insegura y afirma que el número de barras es 6.

Posiblemente, la alumna asocia la representación simbólica que está escrita en la pizarra al procedimiento de calculo del resultado del reparto y, tal vez, evoque la siguiente imagen mental:

$$\square \qquad \underline{|\,3 \qquad}$$

2
de
$\frac{1}{3}$

Cuando concluye la evaluación de la tarea nº 19 los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 20. Algunos alumnos dicen no entender el enunciado de esta tarea. El profesor realiza una intervención general para explicar el significado de las tres cantidades que intervienen en una situación de reparto, y lo ejemplifica con el reparto realizado en la tarea nº 19. Con esta explicación concluye la sesión de clase. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº20 aunque los alumnos no la hayan terminado.

Los alumnos del grupo 5º A muestran las mismas dificultades que los alumnos del grupo 5º B en la resolución de la tarea nº 19. El profesor pide al alumno A29 que salga a la pizarra para resolver la tarea. Después de ejemplificar el reparto con tres alumnos y utilizar material manipulativo el alumno obtiene que han sido 2 barras las que se han repartido.

De nuevo, como ha ocurrido en la sesión con el grupo 5º B, cuando el profesor ha solicitado a los alumnos que escriban el reparto los alumnos proponen:

$$6 \qquad \underline{|\,3 \qquad}$$

Cuando el profesor indica que el reparto correcto es:

$$2 \qquad \underline{|\,3 \qquad}$$

la alumna A34 dice que este reparto no puede hacerse porque el dividendo es menor que el divisor.

Ante las dificultades suscitadas durante la resolución de las tareas nº 19 y 20, el profesor decide posponer la resolución de la tarea nº 20.

<u>Asistencia de alumnos</u>
En el grupo 5º A falta a clase la alumna A47 y en el grupo 5º B falta la alumna A20.

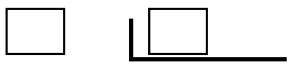
<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Pensamos que las dificultades observadas en la resolución de la tarea nº 19 se deben a dos razones: la mayor dificultad cognitiva de la tarea y el sistema de representación simbólico utilizado para designar el reparto.

Respecto al primer aspecto, se esperaba que la búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto, conocido el resultado del mismo, fuese una tarea más compleja que la tarea directa. Además, la formulación verbal de la tarea es de difícil comprensión para los alumnos porque confunden las cantidades de magnitud anteriores y posteriores en el momento de la realización del reparto.

Nuestra propuesta no tiene como objetivo ejercitar reglas para encontrar las condiciones iniciales de aquellos repartos de los que se conoce su resultado. El objeto de esta tarea es realizar una evaluación semántica del significado del reparto y reforzar el concepto de repartos equivalentes.

La mayor dificultad conceptual de la tarea se ha visto agravada con el diseño de una tarjeta de evaluación de la tarea nº 19 demasiado densa y en la que se utiliza un sistema de representación simbólico del reparto que les resulta extraño a los alumnos.

Los alumnos entienden la simbolización:



como la invitación a utilizar una técnica o procedimiento para calcular el resultado de un reparto. Y no lo entienden como la descripción de las condiciones iniciales de un reparto.

Los alumnos están acostumbrados a utilizar el símbolo de la caja para realizar el algoritmo de la división entera de números naturales. Por este motivo, la representación simbólica ha funcionado bien en las tareas precedentes, en las que los alumnos debían ejercitar el procedimiento para encontrar el resultado del reparto. Sin embargo, en la tarea nº 19 la representación simbólica tiene otra interpretación, más estática: fijar las condiciones iniciales de un reparto. Esta interpretación de la simbolización del reparto no ha sido entendida por los alumnos.

<u>Toma de decisiones.</u>
Las dificultades observadas en la resolución de la tarea nº 19 obligan a modificar las tarjetas de evaluación de esta tarea y de las siguientes, de modo que:

1º mantenemos la simbolización con la caja únicamente para realizar el procedimiento de obtención del resultado del reparto.

2º no vamos a utilizar símbolos específicos para la descripción de la condiciones iniciales de un reparto; utilizaremos el lenguaje natural.

3º vamos a enfatizar la ubicación temporal de las cantidades que intervienen en el reparto:

a) lo que recibe cada alumno, después de realizar el reparto.

b) lo que tenían antes de comenzar el reparto.

4º reducimos el número de repartos equivalentes que aparecen en la tarjeta de evaluación de la ficha.

Día 5-12-2000 (Vigésimo tercera sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Recoger la réplica del examen realizado el pasado viernes.
2º Resolver y evaluar la tarea nº 20.
2º Resolver y evaluar la tarea nº 21.
3º Proponer como trabajo para casa la resolución de la tarea nº 22.

Ejecución

La sesión de clase en ambos grupos comienza con la propuesta de resolución de la tarea nº 20 cuya redacción ha sido modificada. Para realizar la evaluación conjunta de la tarea sale a la pizarra la alumna A03 que ha escrito algunas incorrecciones en la tarjeta de evaluación. Para ayudar a esta alumna y a otros compañeros suyos que no han entendido el enunciado de la tarea, se ejemplifica el reparto con dos personas que reciben $\frac{1}{2}$ barra (caña) cada una. Cuando el profesor le formula la pregunta: "¿cuántas barras de regaliz teníamos antes de hacer el reparto?" la alumna responde correctamente que teníamos una barra. Después resuelve la tarea de modo gráfico la tarea y realiza la suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ barra}$$

La misma alumna intenta encontrar el número de barras que había antes de que se haya realizado el reparto entre 4 personas y cada una haya recibido 1/2 barra. De nuevo ha sido necesario utilizar el material manipulativo. Después la alumna ha realizado en la pizarra representaciones gráficas con el modelo longitud y, finalmente, representaciones simbólicas:

$$\frac{1}{2} \text{ x } 4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ barras}$$

El profesor escribe, en la pizarra, los repartos:

1 barra entre 2 personas
2 barras entre 4 personas

y explica que son repartos equivalentes porque en cada uno de ellos las personas reciben la misma cantidad de regaliz. Y solicita a los alumnos que indiquen otros repartos equivalentes. Los alumnos nombran los repartos siguientes:

3 barras entre 6 personas
4 barras entre 8 personas
5 barras entre 10 personas

Los alumnos del grupo 5º A afrontan la tarea nº 21 que es similar a la anterior con la diferencia de que ahora cada persona recibe 5/4 de barra. Termina la sesión de clase en este grupo sin quedar tiempo para evaluar la tarea nº 21. El profesor recoge esta tarea y entrega la siguiente para que los alumnos la resuelvan en sus casas durante el puente festivo de la Constitución y de la Inmaculada.

En la sesión con el grupo 5º B se desarrolla la misma secuencia de actividades que con el grupo de 5º A. Se deja sin evaluar la antigua ficha nº 20 y pasamos a proponer la resolución de esta misma ficha que tiene modificada su tarjeta.

Para realizar la evaluación conjunta de la tarea nº 20 sale a la pizarra la alumna A24 que no ha sabido resolver la segunda y la tercera parte de la tarea. Las actuaciones seguidas han sido las mismas que las descritas en el grupo 5º A, salvo lo referente al proceso de institucionalización del concepto de repartos equivalentes. Se deberá incidir en este aspecto cuando se realice la evaluación de la tarea nº 21.

Los alumnos han dispuesto de poco tiempo para resolver la siguiente tarea. Sólo dos alumnos (A01 y A15) de este grupo han terminado la tarea nº 21. El profesor decide que los alumnos se lleven esta tarea a sus casa para que la terminen de resolver durante el puente festivo y, además, les propone la resolución de la tarea nº 22.

Asistencia de alumnos

Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º A. En el grupo 5º B falta la alumna A34.

Aspectos actitudinales

Los alumnos del grupo 5º A han estado muy trabajadores. El esfuerzo dedicado en la resolución de la tarea nº 20 se manifiesta en el alto nivel de éxito alcanzado. Los alumnos del grupo 5º B han tenido un buen comportamiento pero no han mostrado el mismo interés que aquellos durante la resolución de la tarea.

Aspectos relacionados con la comprensión

Si comparamos el rendimiento obtenido por los alumnos de los dos grupos en la tarea nº 20 se observan diferencias sustanciales: los alumnos del grupo 5º A obtienen niveles de éxito muy superiores a los obtenidos por los alumnos de 5º B. Veamos los datos obtenidos:

Tarea nº 20	*5º A*		*5º B*	
	1ª parte	*2ª parte*	*1ª parte*	*2ª parte*
Número de alumnos que aportan una solución correcta y bien justificada	20	20	13	11
Número de alumnos que aportan una solución incorrecta o no justificada	3	3	8	10

Tarea nº 20	*5º A*	*5º B*
	3ª parte	*3ª parte*
Número de alumnos que encuentran repartos equivalentes a "un medio"	20	11
Número de alumnos que justifican correctamente los repartos hallados	14	5

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A muestran un nivel de comprensión posiblemente superior al que realmente poseen. El alto rendimiento de los alumnos en esta tarea puede deberse a la ayuda que han recibido algunos alumnos por parte del profesor y de otros compañeros dado que han dispuesto de un mayor plazo temporal para la resolución de esta ficha.

Por otra parte, resulta decepcionante el rendimiento obtenido por los alumnos del grupo 5º B. Del estudio de las respuestas dadas por los alumnos podemos avanzar como hipótesis más certera que algunos alumnos (A20, A25, A30 y A49) no han entendido el enunciado de la tarea y que otros alumnos confunden las tres cantidades que intervienen en los repartos. Por otro lado, resulta lógico, que estas dificultades conceptuales se agudicen cuando los alumnos se enfrentan a tareas más complejas, como la nº 20, que plantea el proceso inverso al realizado en tareas anteriores: dado el resultado de un reparto se pide encontrar las condiciones iniciales del reparto.

Con independencia del nivel de éxito obtenido por los alumnos, durante la resolución de la tarea han aparecido una gran variedad de estrategias que deberán ser comentadas en el aula.

Nº de alumnos que utilizan y justifican la siguientes estrategias en la tarea nº 20	*5º A*			*5º B*		
	1ª parte	2ª parte	3ª parte	1ª parte	2ª parte	3ª parte
Dibujos	9	9	7	1	3	2
Suma	5	2	0	8	6	0
Multiplicación	3	5	4	2	1	3
Razonamientos con repartos	3	4	3	2	1	0

Cuando los alumnos tienen una comprensión aceptable de la tarea a resolver tienden a utilizar, inicialmente, representaciones gráficas. Después, cuando los alumnos alcanzan una mejor comprensión suelen abandonar esta estrategia por otras, más rápidas, de carácter simbólico.

Toma de decisiones.
Se deciden tres actuaciones:

1º Explicar a los alumnos las tres cantidades que intervienen en todo proceso de reparto. Para ello se aconseja escribir en la pizarra el siguiente esquema temporal del reparto:

ANTES DE REALIZAR EL REPARTO, hay que tener en cuenta dos cantidades:

Número de barras de regaliz

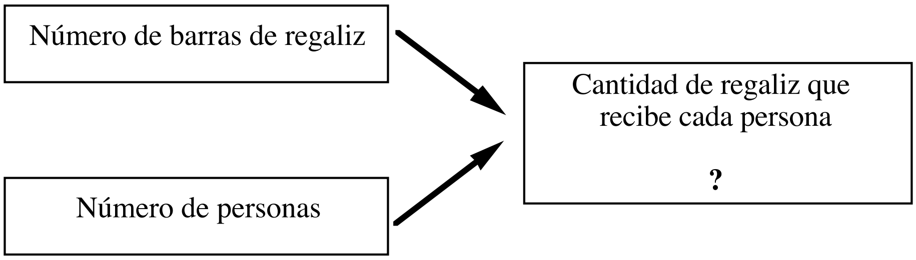
Número de personas que participan en el reparto

DESPUÉS DE REALIZAR EL REPARTO, hay que tener en cuenta:

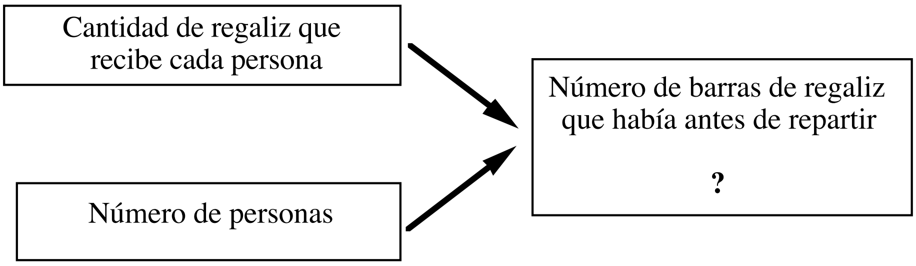
La cantidad de regaliz que recibe cada persona.

2º Ejemplificar los dos tipos de tareas resueltas:

a) Problema directo:



b) Problema inverso:



3º Presentar a los alumnos las diferentes estrategias que han utilizado en la resolución de la tarea nº 20.

Con estas actuaciones no pretendemos ejercitar a los alumnos en la resolución de este tipo de tareas. El objetivo es que los alumnos mejoren la comprensión que tienen del concepto de reparto igualitario.

Día 11-12-2000 (Vigésimo cuarta sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Entregar a los alumnos la réplica de la prueba efectuada por los alumnos el día 1 - 12 - 00, y realizar algunos comentarios sobre las respuestas dadas por los alumnos.
2º Explicar el significado de reparto.
3º Recoger y evaluar la tarea nº 21.

<u>Ejecución</u>
Comienza las sesiones de clase con el grupo 5º B. El profesor entrega a los alumnos la réplica de la prueba sobre operaciones con fracciones.

El alumno A49 sale a la pizarra para que realice la suma de fracciones que se propone en el problema nº 6. Este alumno había realizado la operación sumando numeradores y denominadores.

El profesor explica, a modo de repaso, las cantidades que intervienen en los dos momentos que suceden en un reparto. Con la ayuda de los alumnos A30, A27 y A19 se ejemplifica el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas". Aparecen las fracciones 5/4 y 10/8 barras como soluciones de este reparto.

No ha quedado tiempo para terminar la evaluación conjunta de la tarea nº 21. El profesor plantea a los alumnos la siguiente cuestión que se retomará al comienzo de la siguiente sesión:

"Si después de realizar un reparto cada persona recibe 5/4 de barra. Y se sabe que han participado 8 personas en el reparto, ¿cuántas barras de regaliz había antes de realizar el reparto?".

En el grupo 5º A se revisan algunos problemas de la prueba de operaciones con fracciones. La alumna A03 sale a la pizarra a realizar el primer problema y el alumno A37 a resolver el problema nº 3. Este alumno había sumado numeradores y denominadores para efectuar $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

El profesor explica el significado del reparto efectuado en una fase y ejemplifica las cantidades que intervienen en los dos momentos de un reparto, con el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas". Para realizar este reparto ha salido a la pizarra la alumna A31 que ha simbolizado de forma errónea el reparto:

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º A falta la alumna A47 y en el grupo 5º B falta la alumna A20.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos han mostrado buena disposición al trabajo.

Toma de decisiones.
1º A partir de esta sesión el profesor solicita que los alumnos utilicen el cuaderno de matemáticas para realizar anotaciones de algunas explicaciones o bien para realizar en él tareas de refuerzo o de ampliación cuando no se les entregue la tarjeta de evaluación.
2º. Dado que se han detectado dificultades de comprensión cuando los alumnos han afrontado la tarea de encontrar las condiciones iniciales de un reparto conocido el resultado del mismo, se decide realizar, con más detenimiento, la evaluación conjunta de la tarea 21.

Día 12-12-2000 (Vigésimo quinta sesión)
Plan previsto.
Evaluar la tarea nº 21.

Ejecución
En ambos grupos de docencia se procede a evaluar la tarea nº 21. Al comienzo de la sesión el profesor escribe en la pizarra una parte del enunciado de la tarea:
"Si después de realizar un reparto cada persona recibe 5/4 de barra. Y se sabe que han participado 8 personas en el reparto, ¿cuántas barras de regaliz había antes de realizar el reparto?".

El alumno A16 sale a la pizarra y escribe:

$$\frac{5}{4} \text{ x } 8 = \frac{40}{4} = 10 \text{ barras}$$

El alumno duda al simplificar $\frac{40}{4}$. Efectúa la división de 40 entre 4 y obtiene la respuesta correcta.

El alumno A21 que suele utilizar la estrategia basada en representaciones gráficas procede del siguiente modo: dibuja 8 barras, una para cada alumno, y después dibuja dos más fraccionando cada una de ellas en 4 partes iguales. El alumno afirma que con las 10 barras da $\frac{5}{4}$ de barra a cada una de las 8 personas.

El alumno A48 solicita salir a la pizarra porque ha resuelto la tarea de otro modo. Escribe:

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$$

pero no sabe justificar que las condiciones iniciales de un reparto en el que se reciba $\frac{10}{8}$ de barra son 10 barras y 8 personas.

El profesor aprovecha para recordar que en los repartos "5 barras entre 4 personas" y "10 barras entre 8 personas" son equivalentes porque las personas que participan en el reparto reciben la misma cantidad de magnitud. Después, plantea la siguiente tarea: "Encontrar tres repartos equivalentes al reparto "5 barras entre 4 personas".

La alumna A35 utiliza una estrategia multiplicativa:

$$\frac{5}{4} \text{ x } 8 = 10 \text{ barras}$$

$$\frac{5}{4} \times 12 = 15 \text{ barras}$$

$$\frac{5}{4} \times 16 = 20 \text{ barras}$$

La alumna A13 encuentra repartos equivalentes a partir de fracciones equivalentes, y escribe:

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \frac{20}{16} = \frac{40}{32}$$

Ahora bien, esta alumna no sabe justificar por qué los repartos que se obtienen son equivalentes.

La alumna A10 dice que los repartos "5 barras entre 4 personas" y "10 barras entre 8 personas" son equivalentes porque he multiplicado las barras y las personas por 2 y explica:

"*si haces el doble de todo obtienes lo mismo*".

El profesor desea que los restantes alumnos comprendan este razonamiento valioso y pregunta: "¿Entendéis lo que dice vuestra compañera?". Los alumnos afirman que no. Entonces el profesor escenifica con barras y alumnos dos repartos de "5 barras entre 4 personas". Propone construir el reparto "10 barras entre 8 personas" que acontece cuando las personas deciden compartir las barras que se van a repartir antes de realizar el reparto. En esta situación las personas que deciden compartir reciben la misma cantidad de regaliz que antes de juntarse. Esto es así porque las personas que deciden "compartir" son igualmente ricas.

Aprovechando que la alumna A05 ha escrito que "7 barras entre 6 personas" es equivalente a "5 barras entre 4 personas" y que la alumna A23 afirma que "10 barras entre 9 personas" es equivalente a "5 barras entre 4 personas" el profesor propone como trabajo para casa comparar los repartos:

"5 barras entre 4 personas"
"7 barras entre 6 personas"
"10 barras entre 9 personas"

En el grupo 5º B se ha realizado la evaluación conjunta de la tarea nº 21 y ha quedado pendiente la evaluación de la tercera parte de esta tarea. El profesor les pide a los alumnos que copien el enunciado en sus cuadernos e intenten resolverla en sus casas.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º A falta la alumna A03 y en el grupo 5º B falta la alumna A20.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos grupos han mostrado buena disposición al trabajo. Los alumnos han participado de forma activa en la exposición de estrategias de resolución de la tarea. En el grupo 5º A han aparecido estrategias más avanzadas como la sugerida por la alumna A10.

Toma de decisiones.
Consideramos oportuno reforzar las estrategias de obtención de las condiciones iniciales de un reparto realizado en una sola fase, así como valorar la introducción de la estrategia para comparar repartos basada en la idea de "compartir repartos".

Día 13-12-2000 (Vigésimo sexta sesión)
Plan previsto.
1º En el grupo 5º A resolver y evaluar la tarea propuesta al final de la sesión anterior.
En el grupo 5º B resolver y evaluar la tercera parte de tarea nº 21.

Ejecución
Los alumnos del grupo 5º A reciben al comienzo de la sesión la tarea nº 21 con el encargo de resolver el problema planteado en la sesión anterior que consiste en comparar los repartos:

"5 barras entre 4 personas"
"7 barras entre 6 personas"
"10 barras entre 9 personas"

Como la mayoría de los alumnos no lo ha traído resuelto en sus casas, lo trabajan en el aula durante unos minutos.

La alumna A22 muestra una escasa comprensión del resultado de un reparto cuando pregunta si debe ordenar los repartos por el número de barras o por el número de personas. El profesor realiza un intervención general para recordar el significado del resultado de un reparto.

El profesor pide a la alumna A05 que tiene dificultades para resolver esta tarea que salga a la pizarra. Como no sabe cómo afrontar la tarea le aconsejan sus compañeros que exprese con una fracción los resultados de los tres repartos. La alumna utiliza el procedimiento simbólico y obtiene las fracciones:

$$\frac{5}{4},\ \frac{7}{6} \text{ y } \frac{10}{9}$$

y procede a ordenarlas buscando un denominador común:

$$\frac{5}{4} = \frac{45}{36}$$
$$\frac{7}{6} = \frac{42}{36}$$
$$\frac{10}{9} = \frac{40}{36}$$

La alumna ordena los repartos a partir de las fracciones que indican sus resultados.

El profesor observa que, en este caso, se pueden ordenar las fracciones sin tener que encontrar fracciones equivalentes:

$$\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$
$$\frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$$
$$\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}$$

y después, comparar las fracciones unitarias.

El profesor intenta que aparezcan otras estrategias para comparar repartos basadas exclusivamente en la idea de reparto. Para ello les propone comparar los repartos:

"5 barras entre 4 personas"
y
"10 barras entre 9 personas"

sin utilizar las fracciones que indican los resultados de los repartos.

Algunos alumnos (A16, A31 y A09) vuelven a justificar la comparación con la idea de fracción. La alumna A10 razona correctamente del siguiente modo:

> "*En el reparto "5 barras entre 4 personas" las personas reciben más que en el reparto "10 barras entre 9 personas" porque "5 barras entre 4 personas" es lo mismo que "10 barras entre 8 personas", mientras que "10 barras entre 9 personas" es peor porque hay el mismo número de barras y hay una persona más*".

El profesor desea comprobar el grado de comprensión que los alumnos del grupo 5º A muestran cuando se les presenta la estrategia basada en "compartir repartos". Para ello solicita que los alumnos comparen los repartos:

"2 barras entre 2 personas"
y
"5 barras entre 4 personas"

Los alumnos afirman que el primer reparto es menor que el segundo reparto. El profesor les propone construir el reparto que se forma al compartir las barras los dos grupos de personas que participan en los dos repartos. El nuevo reparto es "7 barras entre 6 personas" y se trata de un reparto intermedio entre los dos escritos anteriormente.

Algunos alumnos indican que han entendido este razonamiento. Sin embargo, pensamos que esta estrategia utiliza razonamientos muy avanzados para la capacidad cognitiva actual de los alumnos.

Antes de concluir la sesión de clase, el profesor entrega a los alumnos la tarea nº 22 con el encargo de que la traigan resuelta a la siguiente sesión.

Los alumnos del grupo 5º B han recibido la tarea nº 21 con indicaciones para que intenten resolver los apartados mal resueltos. El tercer apartado coincide con la tarea propuesta al finalizar la sesión anterior.

Un grupo de siete alumnos (A04, A12, A18, A25, A26, A50 y A52) han tenido más dificultades de las esperadas para justificar correctamente sus respuestas, teniendo en cuenta que las soluciones de los apartados 1 y 2 las tenían escritas en sus cuadernos porque habían sido resueltas en la sesión de clase del día anterior. En este caso, además de baja compresión se observa en estos alumnos escaso interés por resolver la ficha.

Cuando los alumnos han ido acabando correctamente la tarea nº 21 el profesor les propone la resolución de la tarea nº 22.

Antes de terminar la sesión de clase se realiza la evaluación conjunta de la tercera parte de la tarea nº 21. La alumna nº 11 sale a la pizarra y propone, inicialmente, que un reparto equivalente a "5 barras entre 4 personas" es "15 barras entre 4 personas"

<u>Asistencia de alumnos</u>
En el grupo 5º A falta la alumna A47 y en el grupo 5º B falta la alumna A20.

<u>Aspectos actitudinales</u>
La profesora tutora del grupo 5º B no ha podido asistir a clase por encontrarse enferma y ello ha hecho que la gestión de la clase haya sido más compleja. Algunos alumnos de este grupo (A02, A12, A26 y A49) han tenido mala actitud durante la sesión y por ello el profesor les ha obligado a quedarse parte del recreo hasta que han terminado correctamente la tarea.

Aparte del mal comportamiento de un número reducido de alumnos, las diferencias de este grupo con el grupo 5º A son notables. Se observa que en la clase de 5º B el grupo de alumnos que realiza con éxito las tareas es menos numeroso que en la otra clase y además, los alumnos que componen este grupo no ejercen un liderazgo sobre el resto de sus compañeros.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Hemos dedicado tres sesiones a profundizar en el significado de la idea de reparto a partir de la resolución de la tarea nº 21. Este tiempo pudiera ser considerado excesivo pero ha permitido que los alumnos muestren estrategias de resolución muy valiosas.

Vamos a analizar las estrategias utilizadas por los alumnos de ambos grupos que resuelven correctamente los apartados de la tarea y justifican su respuesta:

Nº de alumnos que utilizan y justifican la siguientes <u>estrategias</u> en la tarea nº 21	*5º A* 1ª parte	2ª parte	*5º B* 1ª parte	2ª parte
Dibujos	6	5	4	4
Suma	4	1	1	1
Multiplicación	5	4	6	6
Conjetura y después comprueba	1	1	1	1
Razonamiento proporcionalidad	0	1	1	1
Totales	16	12	13	13

Nº de alumnos que utilizan y justifican la siguientes <u>estrategias</u> en la tarea nº 21	*5º A* 3ª parte	*5º B* 3ª parte
Equivalencia de fracciones	0	9
Equivalencia de repartos.	9	5
Conjetura y después comprueba	1	1
Dibujos	0	2
Totales	10	17

Los alumnos del grupo 5º B han dispuesto de una segunda oportunidad para revisar y modificar las respuestas Ello explica el mejor rendimiento alcanzado en los apartados 2 y 3 de esta tarea.

En este momento de la instrucción en el que se perfila la multiplicación de la fracción que indica el resultado de un reparto por el número de participantes como la estrategia mayoritaria por un criterio de economía, se da la circunstancia de que los alumnos con mejor nivel de comprensión utilizan estrategias más rudimentarias pero que manejan con soltura. Este es el caso de los alumnos A10, A21, A35 y A40 (de 5º A) y las alumnas A14, A19 y A34 (de 5º B) que utilizan representaciones gráficas. O el caso del alumno A11 (de 5º A) y de los alumnos A15 y A27 (de 5º B) que proceden conjeturando el resultado y después realizan la comprobación. O el caso de la alumna A09 de 5º A y el alumno A01 de 5º B que prefieren sumar la fracción tantas veces como indica el número de participantes.

Unos pocos alumnos encuentran repartos equivalentes al reparto "5 barras entre 4 personas" utilizando la idea de proporcionalidad. Así, la alumna A19 escribe:

"*15 barras de regaliz entre 12 personas*

20 barras de regaliz entre 16 personas

25 barras de regaliz entre 20 personas

son equivalentes porque las personas van de dos en dos y las barras de 5 en 5".

La alumna A14 una respuesta ingeniosa. Como su propósito es conocer las barras de regaliz que disponían 8 personas en un reparto en el que reciben $\frac{5}{4}$ de barra, descompone el resultado en una barra y un cuarto de barra y explica:

"Son $\frac{5}{4}$, la unidad son $\frac{4}{4}$ hay 8 barras de $\frac{4}{4}$ y $\frac{8}{4}$ sueltas ahi 2 barras, entonces 8 + 2 = 10 barras"

La actividad de comparación de repartos que se realiza en la grupo 5º A sirve para mostrar a los alumnos que las estrategias aditivas no son adecuadas para obtener repartos equivalentes. También se ha servido para verificar que la estrategia basada en "compartir repartos" está alejada de las capacidades cognitivas de los alumnos.

<u>Toma de decisiones.</u>
Las actividades sobre búsqueda de las condiciones iniciales de un reparto se han diseñado para realizar una evaluación semántica del reparto realizado en una sola fase. El objetivo de la secuencia de enseñanza no es ejercitar la técnica de obtención de las condiciones iniciales de un reparto. Se persigue que los alumnos mejoren la comprensión de la idea de reparto mas que consolidar determinados procedimientos. Con este mismo objetivo se han diseñado las tareas nº 22 y 23 de comparación de repartos, que van a resolver los alumnos en las sesiones siguientes.

Día 14-12-2000 (Vigésimo séptima sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 22.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 23

Ejecución

Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. Cuando el profesor recoge la tarea nº 22 observa que 10 alumnos (A03, A05, A07, A22, A28, A29, A31, A32, A40 y A51) no la traen resuelta de sus casas. Algunos de ellos dicen haberla dejado olvidada en su domicilio.

La alumna A33 que no ha sabido resolver la tarea sale a la pizarra y resuelve la primera parte de la tarea sin ninguna dificultad. Procede dibujando los resultados de los repartos "2 barras entre 3 personas" y "4 barras entre 3 personas". Después razona sobre el gráfico que $\frac{4}{3}$ es mayor que $\frac{2}{3}$

El profesor desea ver aparecer otras estrategias y para ello pregunta a los alumnos si han resuelto la tarea de otro modo diferente. El alumno A16 dice haber encontrado fracciones equivalentes:

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{12}{9}$$

El profesor le indica que no es necesario utilizar la equivalencia de fracciones. También interviene para comentar que el método utilizado hasta este momento consiste en calcular el resultado de los repartos y, después, comparar las fracciones que se han obtenido. Y de nuevo, les pregunta si saben resolver la tarea de otro modo diferente.

La alumna A09 razona utilizando el significado de reparto y otros alumnos (A10, A11, A13 y A31) hacen suyo este razonamiento. El profesor comenta que esta estrategia es válida y les dice que la escriban en sus cuadernos de matemáticas.

Para evaluar la segunda parte de la tarea sale a la pizarra la alumna A07. Escribe que en el reparto "2 barras entre 3 personas" cada persona recibe 2/3 de barra y que en el reparto "2 barras entre 5 personas" cada persona recibe 2/5 de barra. Después dibuja, con dificultad, las cantidades 2/5 y 2/3, las compara y expresa la comparación en términos de reparto.

La alumna A31 propone comparar las fracciones 2/5 y 2/3 con el significado de medida. El alumno A16, que ha utilizado la equivalencia de fracciones en el primer apartado, procede de modo análogo:

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

El profesor ha preguntado si ahora es posible resolver la tarea utilizando la idea de reparto. La alumna A09 razona que el reparto "2 barras entre 3 personas" es mayor "porque hay las mismas barras pero el número de personas es menor y entonces les toca más cantidad a cada uno".

Finalmente los alumnos del grupo 5º A resuelven la tarea nº 23. La mayoría de los alumnos la resuelve correctamente utilizando como estrategia la comparación de las fracciones asociadas a los repartos.

La sesión de clase con el grupo 5º B ha comenzado a las 15 horas porque los alumnos han realizado una excursión programada durante la jornada de mañana. Se ha cumplido con la planificación prevista y la sesión se ha desarrollado de forma análoga a la del grupo 5º A.

Para evaluar la primera parte de la tarea nº 22 sale a la pizarra la alumna A15. Procede hallando los resultados de ambos repartos, de forma gráfica y de forma simbólica; después establece la conexión entre la representación fraccionaria y el reparto.

Cuando el profesor pregunta a los alumnos si saben comparar los repartos sin utilizar la notación fraccionaria, sólo tres alumnos (A01, A34 y A38) proponen un razonamiento basado en la idea de reparto.

El profesor solicita que la alumna A04 salga a la pizarra para resolver la segunda parte de la ficha nº 22 porque no ha sabido resolver la tarea y mantiene una actitud pasiva. La alumna compara los repartos, con gran dificultad, utilizando la notación fraccionaria. De nuevo el profesor pregunta a los alumnos si conocen otro método de resolución basado en la idea de reparto. La alumna A17 ha expresado un razonamiento correcto que el profesor ha escrito en la pizarra para que los alumnos lo copien en sus cuadernos.

Finalmente los alumnos han afrontado la resolución de la tarea nº 23. Algunos alumnos han actuado con apatía (A06, A12, A25, A39, A49 y A50). Antes de terminar la sesión se realiza la evaluación de la primera parte de la ficha.

Algunos alumnos tienen un conocimiento inestable de la fracción como resultado de un reparto Así la alumna A17, que antes ha formulado un razonamiento valioso, ahora aporta un razonamiento incorrecto al escribir:

"*El reparto "5 barras entre 4 personas" es mayor que el reparto "4 barras entre 3 personas" porque hay más barras y más personas*".

Queda pendiente de evaluar la segunda parte de la ficha nº 23.

Asistencia de los alumnos
En el grupo 5º A falta la alumna A47 y en el grupo 5º B falta los alumnos A02 y A30.

Aspectos actitudinales
Se percibe cansancio en los alumnos de los dos grupos de docencia, posiblemente influya la duración de este trimestre y la proximidad de las fiestas de Navidad. Se incrementa el número de alumnos que no realizan las tareas encomendadas para casa y que en el aula las realizan con menor dedicación y esmero.

Aspectos relacionados con la comprensión
Veamos los resultados de las tareas nº 22 y 23, sobre comparación de repartos, y las estrategias utilizadas por los alumnos:

Tarea nº 22	*5º A*	*5º B*
Resuelven bien la tarea y justifican correctamente la respuesta.	15	11
Muestran algún tipo de dificultad	6	9
Totales	21	20

Tarea nº 23	*5º A*	*5º B*
Resuelven bien la tarea y justifican correctamente la respuesta.	16	10
Muestran algún tipo de dificultad	6	11
Totales	22	21

Los alumnos del grupo 5º A que han tenido alguna dificultad en la resolución de la tarea nº 22 son A03, A07, A29, A32, A33 y A37. Y los que han cometido errores en la tarea nº 23 son: A03, A07, A23, A32, A36 y A51.

Los alumnos del grupo 5º B que han tenido alguna dificultad en la resolución de la tarea nº 22 son A02, A04, A06, A12, A15, A17, A18, A30 y A52. Y los que han cometido errores en la tarea nº 23 son: A04, A12, A17, A18, A20, A24, A25, A26, A39, A49 y A52.

Nº de alumnos que utilizan correctamente las siguientes estrategias en la tarea nº 22	*5º A*	*5º B*
Comparación de fracciones o equivalencia de fracciones	7	3
Idea de reparto	5	4
Representaciones gráficas	3	4
Totales	15	11

Nº de alumnos que utilizan correctamente las siguientes <u>estrategias</u> en la tarea nº 23	*5º A*	*5º B*
Comparación de fracciones o equivalencia de fracciones	13	8
Idea de reparto	0	0
Representaciones gráficas	3	2
Totales	16	10

La naturaleza de los repartos que se trabajan en la tarea nº 22, en los que se comparan repartos con el mismo número de personas o de barras de regaliz, permite que algunos alumnos utilicen como estrategia la idea de reparto. Sin embargo, esta estrategia no saben gestionarla con los repartos que aparecen en la tarea nº 23. En otro momento de la secuencia de enseñanza se observó que los alumnos no estaban capacitados para utilizar la idea de "compartir" repartos como estrategia de comparación de repartos.

Como era previsible la mayoría de los alumnos proceden identificando las fracciones que expresan el resultado de los repartos y después comparan estas fracciones utilizando el concepto de equivalencia de fracciones. Los alumnos que utilizan representaciones gráficas suelen expresar, con una fracción, la cantidad de longitud que recibe cada persona en los dos repartos; y después comparan las longitud obtenidas en cada uno de los repartos.

Se observa que la mayoría de los alumnos que han utilizado las fracciones que expresan el resultado de los repartos, han sabido aplicar correctamente la equivalencia de fracciones. En este sentido se constatan progresos porque, al comienzo de las secuencia de enseñanza, los alumnos de 5º curso no tenían operativo el concepto de equivalencia de fracciones.

En la tarea nº 22, se han considerado como respuestas erróneas aquellas que no aportan ninguna justificación de la respuesta. En esta tarea seis alumnos dan una respuesta incorrecta o, aunque sea correcta, no la justifican adecuadamente.

Bastantes de los errores detectados en las tarjetas de evaluación correspondientes a la tarea nº 23 son de naturaleza conceptual y tienen su origen en la aplicación de reglas falsas como la que propone la alumna A17, cuando afirma que el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas" es menor que "5 barras de regaliz entre 4 personas" porque " 3 es menor que 5 y 2 es menor que 4". Los alumnos A36 y A39 afirman que los repartos son iguales porque, posiblemente, vinculan la equivalencia de fracciones a estrategias aditivas antes que a estrategias multiplicativas.

<u>Valoración:</u>
Podemos concluir que en la tarea de comparación de repartos nº 23 en la que los repartos a comparar tenían diferente número de barras y número de personas los alumnos han procedido comparando las fracciones que expresan los resultados de los repartos. Por este motivo han desaparecido las estrategias basadas en la idea de reparto que han sido utilizadas durante la resolución de la tarea nº 22. Sin embargo, observamos progresos en la consolidación de la noción de equivalencia cuando comparan fracciones.

Día 15-12-2000 (Vigésimo octava sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Evaluar la tarea nº 23
2º Resolver la tarea nº 24 en la que se realiza un reparto por fases y se fraccionan las cantidades sobrantes en 10 partes iguales

El objetivo de la sesión es introducir la representación polinómica decimal como paso previo a la introducción de la notación decimal. Los alumnos mediante la utilización de material van a proceder a repartir "3 barras de regaliz entre 2 personas" con la condición de que el reparto se realice por fases y que las cantidades sobrantes de cada fase se fraccionen en 10 partes iguales.

<u>Ejecución</u>
A las 9 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º B. Los 15 primeros minutos se dedican a evaluar la segunda parte de la tarea nº 23. Sale a la pizarra el alumno A52, que es una de las nueve personas que no supo resolver esta tarea. El alumno resuelve correctamente la tarea sin necesidad de recibir ayuda. Esta circunstancia ocurre con frecuencia: cuando los alumnos salen a la pizarra se sienten más motivados, muestran más atención y, en consecuencia, aumenta su rendimiento.

El alumno ha utilizado el procedimiento seguido por la mayoría de sus compañeros. Mediante representaciones gráficas ha obtenido que las cantidades que reciben las personas que participan en los repartos son $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{4}$ de barra. Después, utiliza la equivalencia de fracciones para comparar los repartos:

$$\frac{3}{2} = \frac{3x4}{2x4} = \frac{12}{8}$$
$$\frac{5}{4} = \frac{5x2}{4x2} = \frac{10}{8}$$

El profesor indica que también se pueden comparar las fracciones buscando fracciones equivalentes con denominador 4, es decir, comparando $\frac{6}{4}$ y $\frac{5}{4}$.

Después pregunta a los alumnos si saben comparar repartos utilizando únicamente la idea de reparto, sin recurrir a la comparación de fracciones. Algunos alumnos dicen que en un reparto cada persona recibe 1 barra y un cuarto de barra, mientras que en el otro reparto reciben 1 barra y media barra. El razonamiento es correcto pero están utilizando las fracciones como resultado de los repartos. En el grupo 5º B ningún alumno ha sabido razonar con el significado de reparto y en el grupo 5º A sólo una alumna (A10) ha dado un razonamiento válido:

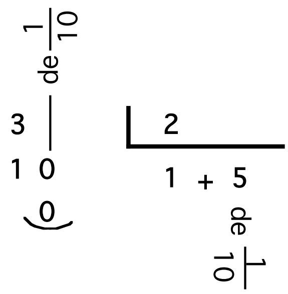
> "*Como el reparto "3 barras entre 2 personas" es lo mismo que el reparto "6 barras entre 4 personas", éste ultimo es mejor que el reparto "5 barras entre 4 personas" porque hay las mismas personas pero tienen una barra más*".

En el grupo 5º A se ha evaluado la tarea nº 23 siguiendo la misma secuencia de acciones que en el grupo 5º B. La alumna A03 ha resuelto la tarea correctamente con la ayuda de algunas indicaciones que le sugiere el profesor.

Antes de resolver la tarea nº 24 el profesor escribe en la pizarra el título del siguiente procedimiento de reparto: REPARTOS REALIZADOS EN VARIAS FASES. Los alumnos no reciben la tarjeta de evaluación de la tarea, escriben en su cuaderno este título y la siguiente tarea:

> "*Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales*"

Los alumnos han afrontado la tarea formando equipos de 2 personas. Cada equipo recibe 3 barras y una tira de papel de la misma longitud de las barras que está fraccionada en 10 partes iguales. El profesor ha guiado la resolución de esta nueva técnica de reparto, de modo que ha escrito en la pizarra las representaciones simbólicas trasladadas de las acciones que los alumnos realizan con el material:



El resultado del reparto que hemos aceptado como solución de la tarea es *1 +* $\frac{5}{10}$ *de barra.*

Algunos alumnos han intuido la aparición de los números decimales. También unos pocos alumnos de ambos grupos han sumado las fracciones y dan como resultado 15/10 de barra. El profesor ha preguntado si habíamos cometido algún error porque sabíamos de antemano que el resultado del reparto es 3/2 de barra. Los alumnos explican que no ha habido ningún error porque las fracciones 15/10 y 3/2 son equivalentes. El profesor vuelve a indicar que estamos realizando un reparto por fases y ahora vamos a expresar el resultado del reparto indicando, en cada sumando, *lo que recibe en cada fase*.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º B. En el grupo 5º A falta la alumna A46.

<u>Aspectos actitudinales</u>
La gestión de la clase en el grupo 5º B se torna más cómoda porque se ha incorporado la profesora después de haber estado dos días enferma.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos aprenden la técnica con facilidad. Sin embargo, hemos observado dificultades conceptuales en la comprensión del reparto por fases. A los alumnos les sorprende que una misma acción les lleve a obtener un resultado del reparto expresado de otra forma diferente.

También hemos observado que los alumnos tienen una escasa comprensión del papel que juegan los agrupamientos decimales (de base diez) en nuestro sistema de numeración. Después de realizar la tarea en ambos grupos el profesor ha preguntado si saben la razón de que los fraccionamientos se realicen en 10 partes iguales y no en otro número de partes diferente. Los alumnos no han sabido responder a esta cuestión y, lo que es peor, después de que el profesor ha justificado la existencia de los sistemas posicionales de base decimal, los alumnos no han intervenido. Este es un indicio de escasa comprensión, por parte de los alumnos, del concepto de sistema de numeración.

Día 18-12-2000 (Vigésimo novena sesión)
<u>Plan previsto.</u>
Resolver la tarea nº 25 y nº 26 en las que se realiza un reparto por fases y se fraccionan las cantidades sobrantes en 10 partes iguales

<u>Ejecución</u>
A las 9 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º B. Los primeros minutos se dedican a evaluar un problema del examen realizado el día 1 de diciembre. Sale a la pizarra la alumna A20 que había escrito en el examen y se había reafirmado, al volver a resolver el problema de comparar dos listones de madera, que "2/3 es lo mismo que 1/2". En esta ocasión la alumna no realiza el razonamiento incorrecto y, cuando se le pregunta por qué había dado esta respuesta incorrecta, la alumna argumenta que se había confundido al realizar los gráficos.

En los dos grupos de docencia se sigue la misma metodología de trabajo. Para resolver la tarea nº 25 los alumnos se colocan en grupos de cinco, alrededor de la mesa de uno de los alumnos del grupo. Cada grupo recibe 7 barras de regaliz (cañas).

Después de realizar la primera fase del reparto, algunos alumnos desprecian las dos barras de regaliz que quedan por repartir. Otros no recuerdan que deben fraccionar las dos barras en 10 partes iguales. Finalmente, todos los grupos obtienen la Representación Polinómica Decimal del reparto.

Los alumnos reciben la tarjeta de la ficha para que representen con gráficos las acciones realizadas con el material y, después, simbolicen el reparto. Como era de esperar, los alumnos realizan correctamente los gráficos pero tienen dificultades para simbolizar el proceso de reparto.

El profesor realiza la evaluación conjunta de la tarea nº 25 y propone a los alumnos la resolución de la tarea nº 26. Los alumnos disponen de poco tiempo para resolver la tarea. Por esta razón solo la concluyen los alumnos A09 y A10 de 5º A y los alumnos A01, A18, A27 y A34 de 5º B. El profesor propone que la terminen de resolver en sus casas. Al comienzo de la siguiente sesión se evaluará esta ficha.

<u>Asistencia de alumnos</u>
En el grupo 5º A faltan los alumnos A32 y A47; y en el grupo 5º B los alumnos A15, A38 y A49. Además estos dos últimos alumnos van a faltar durante toda la semana porque adelantan las vacaciones para viajar a sus países de origen.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Se observa que los alumnos están más inquietos. Posiblemente la cercanía de las fiestas navideñas influya en el ánimo y en la menor disposición al estudio.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos saben expresar de forma gráfica y simbólica el proceso del reparto. Veamos los resultados:

Tarea 25	*5º A*		*5º B*	
	BIEN	MAL	BIEN	MAL
Resultado del reparto	18	3 14/10 (A16)	19	1 (A30)
Con dibujos	16	5 (A03, A07, A29, A31 y A37)	10	10 fraccionan mal (A04, A12, A18, A20, A39) no indican como reparten en la 2º fase (A02, A06, A08, A26, A27)
Con símbolos	19	2 (A07, A23)	19	1 (A18)

Los errores detectados en las representaciones gráficas efectuadas por los alumnos de 5º A tienen su origen en un mal fraccionamiento de las barras sobrantes en 10 partes iguales. Algunos alumnos de 5º B han sido descuidados y no se han molestado en asignar, en la 2ª fase del reparto, los trozos fraccionados a cada una de las personas que participan en el reparto.

La representación simbólica del proceso de reparto no ha presentado dificultades. Esto no debe hacernos pensar que los alumnos comprenden el significado del reparto por fases.

Día 19-12-2000 (Trigésima sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la tarea nº 26
2º Resolver la tarea nº 26BIS
3º Resolver la tarea nº 27

Ejecución
Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. El profesor recoge la tarea nº 26, en la que se pedía repartir por fases "4 barras de regaliz entre 5 personas". Bastantes alumnos la resuelven correctamente. Solicita salir a la pizarra el alumno A28 que tiene dificultades para reconocer las barras sobrantes después de realizar la primera fase del reparto dado que en esta fase no se reparten barras enteras.

Después, los alumnos de ambos grupos han resuelto la tarea nº 26BIS que es análoga a la tarea anterior. Conforme los alumnos terminan con éxito esta tarea se les propone la resolución de la tarea nº 27 en la que los alumnos deben realizar un reparto en tres fases al repartir" 5 barras entre 4 personas". La dificultad de esta tarea radica en evaluar el tamaño de los trozos de barra que quedan cuando se realiza la 3ª fase del reparto. Cuando el profesor realiza indicaciones individuales algunos alumnos de ambos grupos (A09, A10, A31, A33 y A35 de 5º A y A01, A15, A19, A27, A34 y A50 de 5º B) resuelven la tarea.

Para orientar a los restantes alumnos el profesor realiza una intervención conjunta y pregunta a toda la clase: ¿cuál es la longitud del trozo de caña que se obtiene cuando se fracciona, en diez partes iguales, un trozo de tamaño 1/10 de la caña? Para facilitar la respuesta de los alumnos el profesor pregunta: ¿cuántos trozos que son la décima parte de 1/10 de barra hay en una barra? Una alumna de 5º A responde que hay 20 trozos; de nuevo aparecen las estrategias aditivas frente a las multiplicativas.

Cuando los alumnos de 5º A han resuelto la tarea nº 27 se procede a la evaluación conjunta de esta tarea. Como trabajo para realizar en sus casas les propone realizar el reparto "30 barras de regaliz para 8 personas".

En la clase de 5º B los alumnos resuelven la tarea nº 27 pero no ha quedado tiempo para proceder a evaluar conjuntamente los resultados de esta tarea.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º A falta la alumna A32; y en el grupo 5º B los alumnos A38 y A49.

Aspectos relacionados con la comprensión
Mostramos los resultados de las tareas nº 26 y 26BIS:

Tarea 26	*5º A* BIEN	MAL	*5º B* BIEN	MAL
Resultado del reparto	20	0	18	3 (A12, A17, A20)
Con dibujos	11	9 fraccionan mal (A13, A22, A35) no indican como reparten (A03, A07, A09, A33, A40) reparte entre diez personas (A37)	11	12 fraccionan mal (A12, A17, A20, A25) no indican como reparten (A01, A02, A08, A26, A27, A34, A39, A49)
Con símbolos	18	2 (A03, A07)	18	3 (A04, A20, A39)

Los alumnos obtienen con facilidad la nueva representación simbólica del reparto.

Las representaciones gráficas no son un criterio fiable para evaluar la comprensión del proceso de reparto realizado por fases. Algunos alumnos, como los A09, A13, A33, A35 y A40 de 5º A y A01, A27 y A34 de 5º B) han realizado los gráficos de forma descuidada y sabemos que comprenden el significado del reparto por fases. En el enunciado de las tareas se debería haber remarcado la necesidad de expresar con letras las personas implicadas en el reparto y por lo tanto, la conveniencia de que los alumnos muestren como asignan los trozos de tamaño las potencias de 1/10 a las personas que participan en el reparto.

Tarea 26BIS	*5º A* BIEN	MAL	*5º B* BIEN	MAL
Resultado del reparto	20	0	20	1 (A39)
Con dibujos	16	4 fraccionan mal (A13) no indican el reparto (A07, A35, A40)	12	11 fraccionan mal (A12, A14, A18, A20, A39) no indican el reparto (A01, A02, A04, A08, A26, A27)
Con símbolos	19	1 (A05)	19	2 (A12, A20)

Comparando las tablas de resultados de las tareas nº 26 y 26BIS se observa que los alumnos han progresado al resolver la tarea nº 26BIS que tiene una estructura análoga a la nº 26. Podemos afirmar que los alumnos comprenden la técnica de obtención de una representación polinómica decimal como resultado de un reparto efectuado por fases y en el que las cantidades sobrantes se fraccionan en 10 partes iguales.

Cuando los alumnos han realizado el reparto de "5 barras entre 4 personas" han dado muestras de comprender la técnica. La única dificultad ha surgido cuando han necesitado fraccionar décimas de barra en centésimas de barra.

Toma de decisiones

En la siguiente sesión vamos a introducir la notación decimal. Este nuevo sistema de representación surge de la acción de reparto pero también indica una cantidad de magnitud: la longitud de barra de regaliz que recibe cada participante del reparto. Estos dos significados del número decimal deberán aparecer durante la evaluación conjunta de la tarea nº 28, en cuyo primer apartado leemos:

> Cuando has realizado repartos por fases y has fraccionado los trozos que sobran en 10 partes iguales, en el reparto " 3 barras de regaliz entre 2 personas"
>
> $$\text{cada persona recibe } 1 + \frac{5}{10} \text{ de barra,}$$
>
> y el número decimal que indica esta cantidad es 1'5

Proponemos la siguiente metodología de trabajo que comprende dos tipos de actividades:

Actividad I.- El profesor preguntará a los alumnos por el significado de 1´5 barras de regaliz. Se espera que los alumnos respondan que esta cantidad es el resultado de un reparto en el que cada persona recibe 1 barra y $\frac{5}{10}$ de barra.

Actividad II.- Cada alumno recibe dos tiras de papel de la misma longitud que la de la barra de regaliz, una de ellas fraccionada en 10 partes iguales. Los alumnos deben construir una cantidad de longitud de 1´5 barras o tiras de papel.

Estos dos tipos de actividades se realizarán con los números decimales 0´8, 0´6 y 1´25 de barra.

Día 20-12-2000 (Trigésimo primera sesión)
Plan previsto.
En 5ºA:
1º Simbolizar el proceso del reparto de "30 barras entre 8 personas"
2º Resolver la tarea nº 28

En 5ºB:
1º Evaluar la tarea nº 27
2º Resolver la tarea nº 28

Ejecución
Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. La alumna A22 sale a la pizarra y reparte, por fases, "30 barras de regaliz entre 8 personas". Algunos alumnos han tenido dificultades para simbolizar el proceso de reparto, aunque otros no se han intentado resolver la tarea en sus casas.

A modo de repaso, el profesor solicita a la alumna A07 que simbolice el reparto "5 barras entre 4 personas". Mientras que la alumna ha obtenido la representación polinómica de este reparto el profesor ha ejemplificado el reparto utilizando material.

El debate que suscita el profesor sobre el significado de la representación polinómica decimal asociada a este reparto pone en evidencia dificultades de comprensión como lo muestra el alumno A37 cuando desconoce la cantidad de barras de regaliz que se obtienen al juntar las cantidades que reciben cada una de las 4 personas que participan en el reparto de 5 barras de regaliz.

El profesor ha entregado la tarjeta de la ficha nº 28. Los alumnos han dispuesto de 10 minutos para resolver la tarea y después se ha pasado a realizar una evaluación conjunta de la misma, proponiendo los dos tipos de actividades que se han comentado anteriormente.

En el aula de 5º B la secuencia de enseñanza se ha desarrollado de forma análoga a la del otro grupo de docencia. Al comienzo de la sesión se ha realizado la simbolización de la técnica del reparto "5 barras entre 4 personas". El profesor ha solicitado al alumno A39, que no había resuelto la tarea, que proceda a resolverla en la pizarra. El alumno ha salido con desgana y ha dicho que no deseaba resolverla. El profesor ha reprendido su actitud pero le ha permitido sentarse y ha tomado su lugar la alumna A19.

Los alumnos de ambos grupos se quedan con la tarjeta de la ficha nº 28 para que recuerden la conexión entre la representación polinómica de un reparto y la representación decimal. El profesor les entrega la tarjeta de evaluación de la tarea nº 29 para que resuelvan esta tarea en sus casas.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º B faltan los alumnos A04, A27, A38 y A49. En el grupo 5º A asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos de los dos grupos de docencia dan muestras de entender el significado de los símbolos que aparecen en la notación decimal.

Día 21-12-2000 (Trigésimo segunda sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la tarea nº 29
2º Resolver la tarea nº 30

Ejecución
Las sesiones de clase de hoy han estado condicionadas por la proximidad de las fiestas navideñas. Bastantes alumnos de ambos grupos no han traído resuelta la tarea nº 29. Uno de estos alumnos (A29) sale a la pizarra y resuelve correctamente la primera parte de la tarea, que consiste en realizar simbólicamente el reparto "15 barras entre 4 personas". El alumno A39, que se había negado a salir a la pizarra en las sesión del día anterior, ha representado gráficamente esta longitud.

Las mayores dificultades han aparecido en la segunda y tercera parte de la tarea. En la segunda parte los alumnos deben indicar el significado de las cifras del número decimal y, en la tercera parte, deben representar sobre una línea recta la longitud que indica el número decimal que es el resultado del reparto. Ambas actividades son novedosas para los alumnos, de modo que la mayoría no ha entendido la pregunta que se formula en el segundo apartado de la tarea. El profesor les ha dejado unos minutos para que intenten resolver estos apartados y, después, ha representado con tiras de papel la longitud 3´75 barras de regaliz.

Durante la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 30. Se trata de una tarea análoga a la anterior pero que tiene una dificultad mayor: el reparto requiere realizar una cuarta fase y, en consecuencia, la representación gráfica de la longitud de la cantidad de regaliz se complica al tener que evaluar hasta el orden de las milésimas de barra.

Por lo tanto, los alumnos han representado, con símbolos, el proceso de reparto pero han tenido muchas dificultades para representar gráficamente la cantidad 2´125 barras de regaliz. Los alumnos de 5º B han dispuesto de poco tiempo para resolver la tarea nº 30.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º B faltan los alumnos A38 y A49. En el grupo 5º A asisten todos los alumnos.

Aspectos actitudinales
A pesar de ser este el último día lectivo del trimestre los alumnos han tenido buena actitud. El rendimiento baja considerablemente cuando se les encarga que realicen alguna tarea en sus casas.

Aspectos relacionados con la comprensión
Veamos los resultados obtenidos por los alumnos en las tareas nº 29 y nº 30:

Tarea 29	*5º A* BIEN	MAL	*5º B* BIEN	MAL
Simbolización del reparto	17	5 (A07, A13, A23, A37, A40)	20	0
Significado de las cifras del decimal	6	16	4	16
Representan con gráficos la longitud	12	10 (A03, A05, A07, A13, A32, A35, A36, A37, A40, A51)	13	7 (A02, A08, A12, A18, A20, A25, A34)

Tarea 30	*5º A* BIEN	MAL	*5º B* BIEN	MAL
Simbolización del reparto	21	1 (A32)	13	7 (A02, A06, A12, A18, A20, A25, A39)
Significado de las cifras del decimal	10	12	5	15
Representan con gráficos la longitud	8 (A05, A09, A10, A11, A16, A31, A33, A48)	14	6 (A01, A14, A15, A19, A24, A34)	14

La interpretación de los resultados nos sugiere las siguientes reflexiones:

1º Los alumnos conocen y manejan con facilidad la técnica de obtención de repartos realizados por fases, fraccionando las partes sobrante en 10 partes iguales y aplicando el criterio de la mayor parte.

2º En general, no han entendido la pregunta en la que les pide que expresen el significado de las cifras del número decimal que obtienen como resultado del reparto. El bajo rendimiento en esta pregunta los alumnos puede deberse a la fatiga de los alumnos en los últimos días lectivos del trimestre, y a la falta de costumbre en la justificación del significado de los contenidos matemáticos que trabajan.

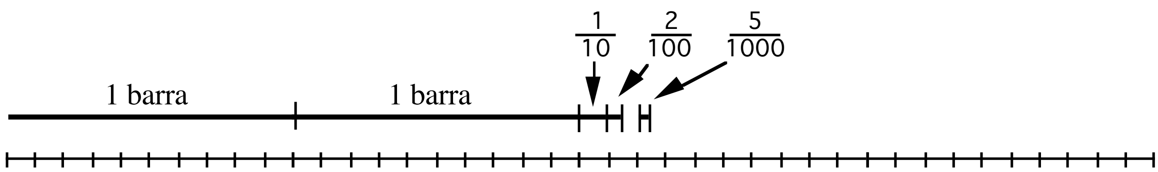
3º La representación gráfica del decimal como cantidad de longitud les presenta serias dificultades conceptuales. Cuando han representado 3´75 barras los alumnos se han ayudado del fraccionamiento de la unidad en 10 partes iguales, que aparece en la tarjeta de evaluación, y de la conversión 5 centésimas = 1/2 décima

La alumna A35, que suele realizar con éxito las tareas, representa una longitud de 3´95 barras. La alumna representa correctamente las 3 unidades y las 7 décimas, pero después añade 5 subunidades de longitud 1/2 décima. Es decir, confunde la centésima con 1/2 décima.

La alumna A14, que suele realizar con éxito las tareas, representa inicialmente una longitud de 4´2 barras porque confunde centésima con décima, y suma 5 a las 7 décimas. Como dispone de una buena comprensión de la fracción transforma la representación polinómica decimal en 3+3/4 y esta representación le permite dibujar correctamente la cantidad de longitud.

Se observará que las dificultades han aumentado cuando los alumnos han intentado representar gráficamente el número decimal 2´125. En esta tarea los conocimientos inestables de los alumnos se manifiestan, con mayor profusión, en errores.

Así, los alumnos A13, A22 y A37 de 5º A confunden décimas con centésimas. Los alumnos A08, A27 y A50 de 5º B y la alumna A40 de 5º A confunden 1 centésima con 1/2 décima, obviando la base decimal. Finalmente, dos alumnos de 5º A (A29 y A51) representan sobre décimas consecutivas las cantidades que obtienen en las sucesivas fases del reparto, de manera que en la gráfica de la longitud quedan "huecos":



<u>Toma de decisiones</u>
1º Los alumnos deben afianzar la técnica de obtención del decimal como resultado de un reparto efectuado por fases. También deben mejorar la técnica de representaciones gráficas de cantidades de longitud expresadas mediante decimales. Por ello se propone que, durante las vacaciones, resuelvan la siguiente tarea:

Números decimales y fracciones. Trabajo de Navidad. *Diciembre de 2000*

1º. Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada persona en los siguientes repartos:

a) " 9 barras de regaliz entre 10 personas".

b) " 22 barras de regaliz entre 25 personas".

c) " 7 barras de regaliz entre 8 personas".

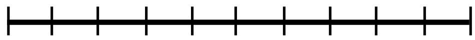
d) " 41 barras de regaliz entre 20 personas".

e) " 6 barras de regaliz entre 3 personas".

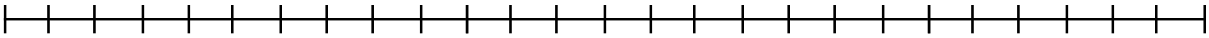
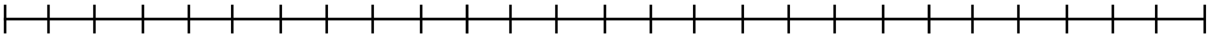
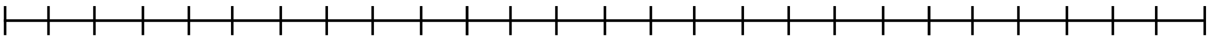
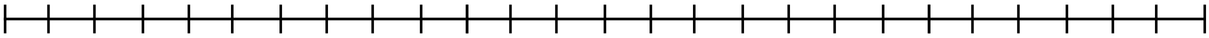
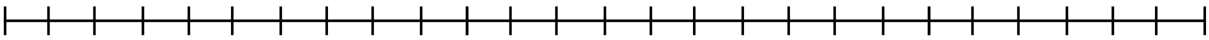
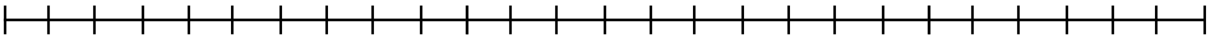
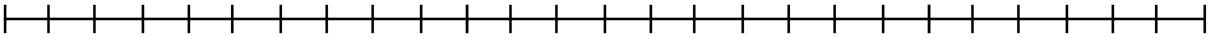
f) " 39 barras de regaliz entre 20 personas".

g) " 401 barras de regaliz entre 200 personas".

2º. Si la longitud de una barra de regaliz es:



Dibuja sobre las líneas, la longitud de las cantidades de regaliz que reciben las personas que participan en los repartos.

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)


2º Proponemos la introducción de una nueva tarea (nº 31) que se realizará en la primera sesión del 2º trimestre. Con esta tarea queremos evaluar la comprensión que tienen los alumnos del reparto por fases. En el 2º apartado incidimos en este concepto cuando se pide encontrar las condiciones iniciales del reparto. Además, queremos observar si los alumnos reconocen que las expresiones fraccionaria (3/2) y decimal (1´5) expresan la misma cantidad.

Queremos proseguir la secuencia de enseñanza con una tarea asequible, en la que aparecen cantidades muy conocidas. Con esta tarea los alumnos se preparan para afrontar las siguientes que tienen un mayor grado de dificultad porque en ellas se conectan los dos sistemas de representación: fraccionario y decimal, y además los alumnos deben reconstruir las condiciones iniciales de los repartos.

TARJETA DE LA FICHA 31 Fecha: _______________

Cada una de las personas que participan en un reparto reciben 1´5 barras de regaliz.

Responde y justifica tu respuesta:

1º Expresa con una fracción la cantidad de regaliz que recibe cada una de las personas que participan en el reparto.

2º. Indica cuántas barras había antes de hacer el reparto y cuántas personas han participado en el reparto.

3º. Expresa con un número decimal la cantidad de regaliz que recibe cada una de las personas que participan en el reparto.

Día 9-1-2001 (Trigésimo tercera sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º. Recoger y evaluar, al menos un apartado, del trabajo de Navidad.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 31.

<u>Ejecución</u>
Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. Hay 16 alumnos de grupo 5º A que entregan la tarea de Navidad. La alumna A13 sale a la pizarra a resolver el apartado b) de esta tarea; mientras tanto

sus compañeros atienden y anotan la resolución en sus cuadernos. La alumna A22 solicita salir a la pizarra para representar de forma gráfica la longitud 0´88 de barra.

Los alumnos han afrontado la resolución de la tarea nº 31. Los alumnos entregan la tarea al profesor para su valoración inmediata, de modo que si no está bien resuelta persisten en el intento de resolución. Los alumnos han dispuesto de 15 minutos para resolver esta tarea; después se ha procedido a su evaluación. La alumna A23 que no ha sabido resolver el tercer apartado sale a la pizarra y, con alguna ayuda, consigue resolver la tarea.

Al comienzo de la sesión de clase en 5º B el profesor recoge el trabajo de Navidad. Sólo lo entregan seis alumnos, los demás dicen haberlo dejado olvidado en sus casas. El profesor les recuerda que deberán traerla al día siguiente y les advierte que si no la traen resuelta se quedarán a trabajarla durante los recreos.

La alumna A14 sale a la pizarra a resolver el apartado d) de la tarea de Navidad. El alumno A38, que había adelantado una semana el comienzo de las vacaciones, solicita salir a la pizarra para representar de forma gráfica la longitud 2´05 de barra y representa correctamente esta cantidad de longitud.

Después los alumnos afrontan, durante 15 minutos, la resolución de la tarea nº 31. Termina la sesión y no queda tiempo para realizar una evaluación conjunta de la tarea, que se realizará al comienzo de la siguiente sesión. Los alumnos que han tenido dificultades se han quedado en el aula unos minutos, durante el tiempo de recreo, hasta que han conseguido resolverla correctamente.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º A. En el grupo 5º B falta los alumnos A12 y A27.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos han seguido con interés las explicaciones del profesor y las intervenciones de sus compañeros. Han mostrado buena disposición al trabajo durante la resolución de la tarea nº 31. Esta buena disposición contrasta con el escaso interés que ha suscitado en los alumnos la resolución del trabajo de Navidad.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
La técnica de obtención de la representación polinómica decimal asociada a un reparto no está consolidada. Algunos alumnos no recuerdan este procedimiento después del descanso vacacional. Para ejercitar esta técnica se había propuesto la resolución del trabajo de Navidad. Durante las sesiones siguientes todos los alumnos deberán entregar este trabajo que además debe estar bien resuelto.

Los resultados obtenidos en la tarea nº 31 indican que los alumnos comprenden el significado de un reparto realizado en dos fases y que saben conectar las representación fraccionaria y decimal en el reparto "3 barras entre 2 personas".

Han cometido incorrecciones o han necesitado ayuda, en esta tarea, los alumnos: A07, A23, A32, A40, A48 y A51 de 5º A y los alumnos A02, A04, A17, A38 y A30 de 5º B. Sin embargo, apenas se han detectado errores conceptuales. El alumno A30 comete este tipo de error cuando escribe: "había 1 barras antes de hacer el reparto, han participado 2 personas en el reparto".

<u>Toma de decisiones</u>
Los primeros minutos de las siguientes sesiones vamos a dedicarlas a resolver algunos apartados del trabajo de Navidad. Cuando los alumnos entregan la tarea el profesor les indica los apartados que están mal resueltos y les propone que intenten resolverlos en sus casas. Por este motivo si se evalúa en el aula algún apartado los alumnos que tienen pendiente resolverlo se ven ayudamos y, en cierta forma, incentivados para afrontar otros apartados que todavía les quedan por resolver.

Día 10-1-2001 (Trigésimo cuarta sesión)
<u>Plan previsto.</u>
En el grupo 5º A:
1º. Evaluar, al menos un apartado, del trabajo de Navidad.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 32.

En el grupo 5º B:
1º. Evaluar, al menos un apartado, del trabajo de Navidad.
2º. Evaluar la tarea nº 31.
3º. Resolver y evaluar la tarea nº 32.

Ejecución
Comienza las sesión de clase a las 9h. en 5ª A. Los alumnos reciben el trabajo de Navidad corregido, de modo que los alumnos saben qué apartados deben volver a resolver. Y reciben el encargo de traerla resuelta a la siguiente sesión. El alumno A48 sale a la pizarra para resolver el apartado c).

Durante 15 minutos los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 32. Un pequeño grupo de alumnos resuelve muy pronto, y de forma correcta, esta tarea. A estos alumnos se les propone la resolución de la siguiente tarea.

Para realizar la evaluación conjunta de la tarea sale a la pizarra el alumno A36 que había tenido dificultades durante la resolución. El profesor propone a los alumnos que escriban en sus cuadernos el proceso de resolución de la tarea porque les permitirá recordar el significado del número decimal 2´5 como resultado de un reparto realizado en dos fases que se ha descrito con detalle.

Los alumnos del grupo 5º B dicen tener dificultades en la resolución del trabajo de Navidad. El profesor solicita a la alumna A15 que salga a la pizarra a resolver el apartado f) y a la alumna A17 que resuelva el apartado g). En ambos repartos, se incide en las cantidades que se reparten en cada fase y en los significados de las cifras que forman el número decimal. Los alumnos escriben en sus cuadernos el proceso simbólico y los significados de las fases de los repartos.

Los últimos minutos de la sesión se dedican a realizar la evaluación conjunta de la tarea nº 31 que no se había realizado durante la sesión anterior. Sale a la pizarra el alumno A30 que había cometido algunos errores. Este alumno tiene dificultades a la hora de encontrar la notación decimal correspondiente al reparto "3 barras entre 2 personas".

En el grupo 5º B no ha quedado tiempo para resolver la tarea nº 32.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º A. En el grupo 5º B faltan los alumnos A08, A12 y A27.

Aspectos actitudinales
En ambos grupos se observa en los alumnos una buena disposición al trabajo.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 32 aparecen en la tabla:

Tarea 32	*5º A*	
	BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	18	4 (A07, A23, A36, A51)
Representan con gráficos la longitud	20	2 (A03,A23)
Paso del decimal a la fracción	17	5 (A03, A07, A23, A36,A37)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	16	6 (A03, A07, A23, A37,A48, A51)

Se observa que la mayoría de los alumnos comprenden el significado de las cifras del número decimal 2´5 y saben representar gráficamente esta longitud. Los alumnos de este grupo han realizado progresos considerables que se manifiestan en la mejora de resultados al compararlos con los obtenidos en las tareas nº 29 y 30.

Cinco alumnos no han sabido expresar el número decimal mediante una fracción. Estos alumnos han dejado la pregunta en blanco y, en consecuencia, no conocemos el origen de sus dificultades. No obstante, pensamos que la dificultad radica en que no saben expresar el decimal como suma de fracciones decimales.

De los 17 alumnos que aportan como solución la fracción 5/2, ocho alumnos no indican como han obtenido la respuesta, y nueve (A05, A10, A11, A21, A31, A32, A33, A35 y A40) obtienen la fracción operando con las fracciones decimales:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{5}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

El número de alumnos que justifica como han encontrado las condiciones iniciales del reparto es todavía menor. La alumna A10 utiliza la idea de proporcionalidad en el siguiente sentido: "si cada persona recibe 2´5 barras de regaliz, dos personas recibirán 5 barras". El alumno A11 procede sumando 2´5 y 2´5. Y los alumnos A32, A33 y A40 operan con las fracciones $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}$. El resto de los alumnos no explica como ha obtenido la respuesta.

A pesar de que son pocos los alumnos que justifican las respuestas se observan estrategias valiosas que surgen del trabajo con el modelo de reparto.

Día 11-1-2001 (Trigésimo quinta sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Resolver y evaluar la tarea nº 33.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 34.

En el grupo 5º B:
1º. Resolver y evaluar la tarea nº 32.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 33.

Ejecución
Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. El profesor entrega la tarea de Navidad a los alumnos que deben modificar algunos apartados. Después, los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 33. A los alumnos que la resuelven con éxito se les propone la realización de la siguiente tarea. Pasados 15 minutos el profesor recoge la tarea nº 33 y se procede a realizar su evaluación.

El profesor solicita que la alumna A23 salga a la pizarra. Esta alumna sabe expresar los significados de las cifras que componen el número decimal 0´75 y representa correctamente esta cantidad de longitud de barra de regaliz. Sin embargo, tiene dificultades para encontrar la notación fraccionaria que corresponde a esta cantidad. El profesor le propone utilizar la representación polinómica decimal y calcular la suma:

$$\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$$

La tercera parte de los alumnos que encuentran la fracción $\frac{75}{100}$ no saben simplificar esta fracción y obtener $\frac{3}{4}$.

Para resolver el apartado 4º de la tarea nº 33 sale a la pizarra la alumna A22 que indica que las condiciones iniciales del reparto son "una barra y media entre 2 personas" y aporta el siguiente razonamiento:

"Si hay dos personas y cada persona recibe 7 décimos y 5 centésimas, 7 décimos y 7 décimos son 14 décimos y dos medios de décimo hacen 15 décimos, que es una barra y media".

El profesor felicita a esta alumna y le recomienda que exprese el reparto con barras enteras. La alumna escribe "3 barras entre 4 personas" y el profesor recuerda el significado de los términos de la fracción $\frac{3}{4}$ en esta situación de reparto.

Un grupo de alumnos (A09, A10, A13, A16, A22, A29, A31, A33 y A35) ha realizado correctamente la tarea nº 34. El profesor propone que los alumnos que no la han terminado en el aula la resuelvan como trabajo para casa. Dos alumnas (A10 y A35) que han terminado con éxito las tareas han expresado con una fracción la cantidad de peso que viene escrita en un paquete de Nesquik (3´5 Kgrs.).

El profesor entrega la tarea de Navidad a los alumnos del grupo 5º B que deben modificar algunos apartados. Después, los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 32. A los alumnos que la resuelven con éxito se les propone la realización de la siguiente tarea. El profesor observa que los alumnos tienen dificultades para resolver los apartados 3º y 4º de esta tarea. Pasados 15 minutos solicita al alumno A52 que salga a la pizarra para evaluar esta tarea. Dado que los resultados son deficientes se les permite conservar la tarjeta de evaluación durante la evaluación de la tarea.

Este alumno sabe expresar los significados de las cifras que componen el número decimal 2´5 y representa correctamente esta cantidad de longitud de barra de regaliz. Afirma que la fracción es 5/2 sin dar ninguna explicación, sólo comprueba con la técnica algorítmica de la división que el resultado del reparto " 5 barras entre 2 personas" es 2´5 barras. Cuando el profesor le pide justificar cómo ha conjeturado este reparto el alumno dice que ha pensado en dos personas y que en total reciben el doble, es decir, 5 barras.

La alumna A17 sale a la pizarra para conectar la representación decimal con la fraccionaria mediante la representación polinómica decimal del reparto.

Antes de concluir la clase los alumnos han trabajado, durante unos minutos, la tarea nº 33 que deberán resolver en sus casas como trabajo para el fin de semana. Tres alumnos (A01, A14 y A34) concluyen con éxito la tarea.

Asistencia de alumnos
En el grupo 5º A falta la alumna A47. En el grupo 5º B faltan los alumnos A08, A12 y A27.

Aspectos actitudinales
Los alumnos han mostrado buena disposición al trabajo durante la resolución de las tareas propuestas. El alumno A30 ha mostrado una actitud apática: no ha sabido resolver los apartados 3º y 4º de la tarea nº 32 y además no ha escrito en su cuaderno la solución correcta que se ha mostrado en la pizarra. El profesor la ha censurado su actitud y le ha obligado a permanecer en el aula unos minutos, durante el tiempo de recreo, para que intentase resolver correctamente la tarea. El profesor mientras tanto ha trabajado con el alumno A49 que es uno de los alumnos que se ausentó 4 sesiones antes de concluir el primer trimestre y tiene dificultades para resolver estas tareas.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 33 aparecen en la tabla:

Tarea 33	*5º A*	
	BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	17	5 (A07, A16, A36, A48, A51)
Representan con gráficos la longitud	18	4 (A07, A23, A36, A51)
Paso del decimal a la fracción	16	6 (A03, A07, A23, A36,A37, A51)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	16	6 (A03, A05, A07, A23, A32, A51)

En cuanto a la conexión de la notación decimal con la fraccionaria (apartado 3º de la tarea) se observa que la mayoría de alumnos de 5º A saben expresar el decimal mediante su representación polinómica decimal. Cuatro de los seis alumnos que han errado en esta cuestión han sabido expresar el decimal como suma de fracciones decimales, pero dos de ellos (A03 y A36) no han sumado, y otros dos (A07 y A37) se confunden al realizar esta operación y suman numeradores y denominadores.

De los 16 alumnos de 5º A que saben expresar con una fracción el número decimal 0´75 cinco alumnos expresan la fracción $\frac{75}{100}$, y los 11 restantes expresan la fracción simplificada $\frac{3}{4}$. Este último grupo de alumnos utiliza la misma estrategia de resolución: expresan el decimal como suma de fracciones decimales y, después, operan y simplifican.

En cuanto a la búsqueda de las condiciones iniciales del reparto los alumnos de 5º A han utilizado varias estrategias: 12 alumnos han recordado que una fracción expresa el resultado de un reparto que se realiza en una fase, 3 alumnos (A22, A36 y A37) parten del número decimal y proceden duplicando dos veces esta cantidad; el alumno A48 procede operando, con éxito, $\frac{75}{100}$ x 4, y la alumna A05 procede sumando $\frac{75}{100}+\frac{75}{100}$ pero se confunde al realizar la operación.

La alumna A32 muestra una escasa comprensión cuando afirma que inicialmente se han repartido "4 barras para 3 personas". Los otros 4 alumnos (A03, A07, A23 y A51) no contestan.

En este momento de la secuencia de enseñanza los alumnos A03, A07, A23, A32, A36, A37 y A51 tienen un nivel bajo de comprensión del número decimal. Los alumnos A07, A36 y A37 han cometido errores cuando operan con fracciones que nos preocupan porque dos de ellos han realizado la adición de fracciones sumando numeradores y denominadores. Sin embargo, no han aparecido errores conceptuales relevantes asociados a la idea de número decimal.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B al resolver la tarea 32 aparecen en la tabla siguiente. Como los alumnos han tenido grandes dificultades para resolver esta tarea se les ha permitido tener la tarjeta de evaluación de la tarea cuando se ha realizado la evaluación conjunta. Posiblemente los datos que se presentan muestran un nivel de comprensión superior del que poseen los alumnos. Por ejemplo, sabemos que hay más de cuatro alumnos que tienen dificultades para conectar la representación decimal y la fraccionaria.

Tarea 32	*5º B*	
	BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	14	8 (A06, A17, A18, A20, A39, A30, A49, A52)
Representan con gráficos la longitud	14	8 (A02, A17, A18, A19, A26, A38, A39, A49)
Paso del decimal a la fracción	18	4 (A06, A20, A30, A49)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	12	10 (A02, A04, A06, A17, A18, A20, A25, A39, A30, A49)

Un grupo de nueve alumnos (A02, A04, A06, A17, A18, A20, A39, A30 y A49) muestran una mala comprensión del proceso de reparto. Veamos algunas de las respuestas erróneas:

La alumna A04 responde bien los 3 primeros apartados pero cuando busca las condiciones iniciales del reparto dice que es "10 barras para 2 personas".

El alumno A06 piensa que 2´5 es la cantidad que hay antes de hacer el reparto, porque escribe:

"El 2 significa las dos barras que tenemos para repartir. Y el 5 significa que un 1/2 para repartir mas"

La alumna A17 no sabe reconocer las cantidades que intervienen antes y después de realizar un reparto. Cuando busca las condiciones iniciales del reparto escribe "han participado 2 personas - había 2 barras y media"

La alumna A20 piensa que en la expresión 2´5 "El 2 significa el número de barras. El 5 el número de personas"

El alumno A39 piensa que: "En el reparto han participado 2 personas. Antes de hacer el reparto había 2 barras" y no justifica la respuesta.

Y el alumno A30 tampoco comprende el significado del reparto, porque afirma sin dar ninguna justificación: "abian 2 barras y $\frac{5}{10}$ abian 2 personas"

Toma de decisiones
Nueve alumnos del grupo 5º B han cometido errores conceptuales durante la resolución de la tarea nº 32. Las dificultades apuntan a una mala comprensión del significado del reparto. Para determinar con mayor precisión el origen de estos errores se propone que uno de estos alumnos (A06) ejemplifique, en la siguiente sesión, la situación de reparto de la tarea con ayuda del material.

Día 15-1-2001 (Trigésimo sexta sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Resolver y evaluar la tarea nº 34.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 35.

En el grupo 5º B:
1º. Volver a evaluar la tarea nº 32
2º. Evaluar la tarea nº 33.
3º. Resolver y evaluar la tarea nº 34.

Ejecución
Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º B. El profesor entrega la tarea de Navidad a los alumnos que deben modificar algunos apartados. El profesor solicita que salga a la pizarra el alumno A06 que es uno de los alumnos que no recuerda el significado de un reparto. Estos alumnos confunden las cantidades que intervienen en el proceso del reparto. El profesor ha vuelto a recordar las cantidades que existen en los dos períodos temporales que acontecen en un reparto y ha utilizado material para resolver con este alumno el apartado 4º de esta tarea.

Después, los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 33. Ocho alumnos (A01, A14, A15, A19, A24, A27, A34 y A38) resuelven con éxito la tarea. Ante las dificultades manifestadas por los alumnos el profesor recoge la tarea nº 33 y propone realizar su evaluación. Los alumnos reciben la consigna de resolver la tarea en sus cuadernos de Matemáticas.

Cuando el profesor solicita que los alumnos representen de forma gráfica en sus cuadernos el número decimal 0'75, comprueba que los alumnos A17, A18, A20 y A30 no saben representar esta longitud. El profesor les ordena que representen con material esta cantidad de longitud, después saben representar gráficamente el decimal 0´75 en sus cuadernos.

Termina la sesión de clase sin terminar de evaluar los apartados nº 3 y 4 de esta tarea. El profesor entrega la tarea nº 33 a los alumnos que no la han resuelto correctamente, con la consigna de que la resuelvan en sus casas y la entreguen en la sesión siguiente.

La sesión de clase con el grupo 5º A comienza un poco más tarde del horario habitual. El profesor devuelve la tarea nº 34 a los alumnos que la habían resuelto durante la sesión anterior. Cuando los alumnos la terminan de resolver se procede a su evaluación conjunta.

La alumna A07 sale a la pizarra a resolver esta tarea. Esta alumna tiene dificultades para comprender el significado del reparto y, en concreto, para situar en el tiempo: antes o después del reparto, la cantidad de magnitud que recibe cada persona que participa en él. Con la ayuda de material la alumna encuentra las condiciones iniciales del reparto. Finalmente, obtiene la representación fraccionaria del decimal 2´50.

El profesor solicita que los alumnos comparen las cantidades 2´5 y 2´50; y formula la regla de equivalencia de la notación decimal. Antes de concluir la sesión, el profesor entrega a los alumnos la tarjeta de evaluación de la tarea nº 35 con la consigna de que la resuelvan en sus casas y la entreguen en la sesión de mañana.

Asistencia de alumnos
Falta a clase el alumno A37 del grupo 5º A. En el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de los dos grupos muestran buen comportamiento y disposición al trabajo en el aula. Sin embargo, no realizan las tareas que el profesor les propone realizar en sus casa. Como ejemplo de esta falta

de trabajo fuera del aula podemos indicar que menos de la mitad de los alumnos de ambos grupos ha entregado el trabajo de Navidad

Aspectos relacionados con la comprensión
Se han detectando dificultades conceptuales en los alumnos del grupo 5º B cuando han afrontado la resolución de la tarea nº 33. Los errores se localizan en la desconexión entre los sistemas de representación decimal y fraccionario, y en la reconstrucción de las condiciones iniciales del reparto cuando se conoce el resultado del mismo. Más de la mitad de los alumnos del grupo no ha sabido resolver los apartados 3º y 4º de la tarea nº 33. El porcentaje de alumnos de 5º A que muestra dificultades en esta misma tarea es del 25%. Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 34 aparecen en la tabla:

Tarea 34	*5º A*	
	BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	18	4 (A23, A32, A36, A51)
Representan con gráficos la longitud	19	3 (A23, A32, A51)
Paso del decimal a la fracción	18	4 (A03, A23, A32, A51)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	18	4 (A03, A23, A32, A51)

Se observa que la mayoría de los alumnos han resuelto con éxito la tarea. Ningún alumno ha cometido errores. Sólo tres alumnos (A23, A32 y A51) no han entregado la tarea; y dos alumnos han dejado apartados sin resolver: la alumna A03 no resuelve los apartados 3º y 4º, y el alumno A36 no escribe los significados de las cifras del número decimal 2´50.

Los alumnos saben encontrar la fracción que expresa la misma cantidad de magnitud que 2´50 barras. Cinco alumnos (A07, A22, A28, A29 y A48) no explican como han obtenido la fracción 5/2 y por lo tanto es difícil evaluar su capacidad para conectar los dos sistemas de representación.

Algunos de los alumnos (A03, A07, A23, A32, A36, A37 y A51) que en la tarea anterior (nº 33) mostraban un bajo nivel de comprensión del número decimal han realizado progresos. Así los alumnos A07 y A37 han resuelto correctamente la tarea nº 34, mientras que el alumno A36 solo ha dejado sin contestar la pregunta formulada en el apartado nº 1, teniendo éxito en los restantes apartados.

Valoración
Después de que los alumnos del grupo 5º A han resuelto las tareas 32, 33 y 34 podemos afirmar que la mayoría de ellos ha realizado progresos en la comprensión del número decimal. Solo cuatro alumnos (A03, A23, A32 y A51) muestran un nivel de comprensión bajo.

Día 16-1-2001 (Trigésimo séptima sesión)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 35.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 36.

En el grupo 5º B:
1º. Terminar de evaluar la tarea nº 33
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 34.

Ejecución
Comienza la sesión de clase, a las 9 horas, con el grupo 5º A. El profesor entrega la tarea de Navidad a los alumnos que deben modificar algunos apartados y nombra a los alumnos que faltan por entregar este trabajo.
El profesor recoge la tarea nº 35. La mayoría de los alumnos ha sabido expresar con una fracción la cantidad 1´5 litros de agua porque el reconocimiento del decimal 0´5 como 1/2 les ha facilitado la resolución de la tarea. Esto no ha ocurrido en el 2º apartado. Aquí los alumnos no han identificado 0´2 como la fracción 1/5 y, en algunos casos, tampoco han trabajado con la representación polinómica que

subyace en el decimal 1´2.

El alumno A36, que no ha explicitado en la tarjeta de evaluación la estrategia utilizada, ha salido a la pizarra y ha resuelto correctamente la tarea.

A continuación, los alumnos han afrontado la resolución de la tarea nº 36. La situación vuelve a repetirse: algunos alumnos que tienen dificultades conceptuales para expresar el número decimal mediante la suma de fracciones decimales consiguen expresar con una fracción el decimal 0´25 pero tienen dificultades para resolver el 2º apartado de la tarea en el que el decimal es 0´375.

Para ayudar a estos alumnos el profesor recoge las tareas de los alumnos que la han terminado (A09, A11, A13, A23, A31, A33 y A36) y procede a evaluar la primera parte de la tarea. La alumna A32 solicita salir a la pizarra y resuelve, con alguna ayuda, este apartado.

Antes de concluir la sesión de clase el profesor propone que los alumnos terminen el 2º apartado de la tarea nº 36 en sus casas y lo traigan resuelto a la siguiente sesión.

Comienza la sesión de clase en el grupo de 5º B con la recogida de algunos trabajos de Navidad. El profesor devuelve esta tarea a algunos alumnos para que realicen algunas correcciones y recuerda que todavía hay alumnos que no han entregado este trabajo.

Después, el profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 33 y comprueba con desaliento que bastantes alumnos siguen sin saber resolver todos los apartados de esta tarea. Sólo nueve alumnos (A01, A06, A14, A15, A25, A27, A34, A38 y A39) han terminado con éxito la tarea.

El profesor solicita que salga a la pizarra el alumno A08 que no ha sabido resolver la tarea aunque suele realizar con éxito los trabajos. Este alumno resuelve los apartados 3º y 4º con pequeñas ayudas que le sugiere el profesor. Por ejemplo, para representar con una fracción el número decimal 0´75 ha necesitado recordarle la representación polinómica que subyace al número decimal; después ha sumado correctamente las fracciones. También ha recibido una indicación sobre la conveniencia de simplificar la fracción 75/100; y en el apartado 4º ha sido necesario indicarle que considere que han participado en el reparto 2 ó 4 personas. Entonces el alumno ha planteado la suma:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$$

y al observar que no queda un número natural ha realizado la suma:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}=3 \text{ barras}$$

A continuación, los alumnos han afrontado la resolución de la tarea nº 34. La situación vuelve a repetirse de nuevo: el grupo reducido de alumnos (A01, A14, A15, A19, A27, A34, A38 y A50) que muestran una buena comprensión resuelven de forma correcta y rápida la tarea, mientras que los restantes alumnos siguen teniendo dificultades para resolver los apartados 3º y 4º de la tarea.

Como faltan pocos minutos para terminar la sesión el profesor realiza una intervención general para recordar la representación polinómica asociada al número decimal 2´50 y propone que los alumnos terminen la tarea nº 34 en sus casas y la traigan resuelta a la siguiente sesión.

Asistencia de alumnos
Faltan a clase los alumnos A03 y A48 del grupo 5º A. En el grupo 5º B asisten todos los alumnos.

Aspectos actitudinales
Los alumnos del grupo 5º B se muestran apáticos. Algunos alumnos están menos motivados posiblemente porque perciben la mayor dificultad de las tareas nº 32, 33 y 34.

Aspectos relacionados con la comprensión:
Los resultados obtenidos por los alumnos de 5º A al resolver la tarea nº 35 son buenos. Solo hemos detectado un error conceptual: la alumna A03 iguala $0´5 = \frac{1}{5}$ y en el segundo apartado piensa que $0´2 = \frac{1}{2}$.
Dos alumnos (A21, A36) no han justificado la respuesta y cuatro alumnos (A16, A23, A32 y A51) no han resuelto al segundo apartado de la tarea.

Tarea 35	*5º A* Decimal *1´5*	Decimal *1´2*
Encuentra la fracción simplificada	13	7
Encuentra la fracción pero no la simplifica	5	6
Encuentra la fracción pero no lo justifica o comete errores en la justificación	3	4
Escribe una respuesta incorrecta	0	1
No escribe la respuesta	1	4

Los alumnos han utilizado diferentes estrategias. La más usual ha consistido en escribir la representación polinómica asociada a los números decimales ($1+\frac{5}{10}$ y $1+\frac{2}{10}$) y después operar con fracciones.

Algunos alumnos (A05, A09, A16, A22, A28, A29, A31 y A40) han pensado la unidad descompuesta en 2 medios y han convertido el decimal 1´5 en medios. La alumna A22 no ha tenido éxito cuando ha querido utilizar esta estrategia en el 2º apartado. Los alumnos A21 y A37 han seguido esta estrategia utilizando cuartos de la unidad y, en el 2º apartado han seguido la estrategia mayoritaria.

En el 2º apartado los alumnos han tenido más dificultades para conjeturar que 0´2 = $\frac{1}{5}$ y, por lo tanto, la mayoría han optado por utilizar la representación polinómica del decimal 1´2. Solo las alumnas A31 y A40 han pensado en esta relación

Algunos alumnos (A07, A29, A37) han utilizado representaciones gráficas acompañando a las representaciones simbólicas.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B al resolver la tarea 33 aparecen en la tabla:

Tarea 33	*5º B* BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	15	7 (A04, A19, A20, A24, A30, A49, A52)
Representan con gráficos la longitud	16	6 (A02, A04, A18, A19, A20, A49)
Paso del decimal a la fracción	13	9 (A02, A04, A08, A18, A19, A20, A26, A30, A52)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	9	13 (A02, A04, A06, A08, A17, A18, A20, A25, A26, A30, A49, A50, A52)

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B en la tarea nº 33 han sido peores que los obtenidos en la tarea nº 32, porque ha aumentado la dificultad de la tarea: ahora el número decimal (0´75) aparece como resultado de un reparto efectuado en tres fases. Sin embargo, podemos afirmar que algunos alumnos han realizado progresos. Así:

a) El alumno A06 aporta un significado correcto del decimal.

b) La alumna A17 sabe el significado del decimal y lo representa gráficamente. Su conocimiento del decimal todavía es inestable porque para expresar 0´75 como la fracción 3/4 utiliza referencias visuales y la idea de fracción.

c) El alumno A39 responde todos los apartados correctamente y aporta respuestas originales.

En los alumnos A02, A04, A18, A20, A30 y A49 no se observa una mejora de su nivel de comprensión. Mientras que los alumnos A19 y A26 han bajado su rendimiento en esta tarea.

Los 13 alumnos del grupo 5º B que encuentran la fracción que expresa el resultado del reparto utilizan estrategias muy diversas. Así, 6 alumnos (A06, A25, A34, A39, A49 y A50) expresan el decimal como suma de fracciones decimales y operan; 4 alumnos (A01, A14, A15 y A24) piensan el decimal como 75 centésimas; 2 alumnos (A17 y A38) parece que se ayudan del gráfico realizado en el apartado anterior, y una alumna (A27) conjetura la respuesta y después procede a realizar, de forma simbólica, el reparto de "3 barras entre 4 personas".

Los restantes alumnos de 5º B han tenido dos tipos de actuaciones: 3 alumnos (A18, A19 y A52) aportan la respuesta correcta pero sin dar ninguna justificación y 6 alumnos (A02, A04, A08, A20, A26 y A30) no responden a esta cuestión.

Los alumnos de grupo 5º B a pesar de obtener peores resultados en esta cuestión han utilizado un mayor número de estrategias. Así, los 4 alumnos (A19, A24, A27 y A38) utilizan la idea de proporcionalidad aunque no la explicitan. Otros dos alumnos (A14 y A34) conocen que una fracción expresa el resultado de un reparto que se realiza en una fase; otros dos alumnos (A01 y A39) realizan la multiplicación 0´75 x 4, y la alumna A14 procede sumando $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$ y convierte la fracción en el decimal 1´5. Esta alumna aporta la respuesta "1´5 barras para 2 personas".

Ocho alumnos de 5º B no han respondido a esta cuestión y cuatro han cometido errores que muestran dificultades conceptuales graves. Así, el alumno A52 comete el mismo error que la alumna A32, del grupo 5º A cuando cambia los significados del numerador y denominador de la fracción 3/4. Y los tres alumnos restantes (A18, A20 y A30) identificar la parte entera del decimal con el número de barras y la parte decimal con el número de personas que participan en el reparto.

<u>Valoración</u>
Durante estas últimas sesiones se observan progresos en la comprensión de los alumnos de 5º B. En este momento podemos realizar un retrato del nivel de comprensión del número decimal en el grupo 5º B fraccionando el número de alumnos en tres partes iguales: un tercio tiene una comprensión alta, otro tercio tiene una comprensión inestable y el otro tercio una comprensión deficiente.

<u>Toma de decisiones:</u>
Aunque la implementación de la secuencia de enseñanza en el grupo 5º B se retrasa con respecto a la del grupo 5º A vamos a mantener la propuesta diseñada porque consideramos prioritario relacionar los sistemas de representación fraccionario y decimal.

Día 17-1-2001 (Trigésimo octava sesión)
<u>Plan previsto.</u>
En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 36.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 37.

En el grupo 5º B:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 34.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 35.

<u>Ejecución</u>
Al comienzo de la sesión de clase en 5º A el profesor recoge los trabajos de Navidad de algunos alumnos. También recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 36 y solicita que la alumna A22 que salga a la pizarra a resolver el 2º apartado de esta tarea.

El rendimiento de los alumnos en esta tarea ha sido alto. La mayoría de los alumnos saben expresar el decimal como 375/1000 aunque tienen dificultades para simplificar esta fracción. La alumna A22 no sabe expresar el decimal como suma de fracciones decimales y, después, opera con fracciones correctamente.

Es previsible que los alumnos tengan dificultades en la simplificación de fracciones. Se recordará que la obtención de fracciones equivalentes se ha enseñado mediante la técnica de multiplicar el numerador y denominador de la fracción por un mismo número. Somos conscientes de que el procedimiento de la simplificación de fracciones no ha sido suficientemente ejercitado. El profesor aconseja a los alumnos que cuando tengan que simplificar fracciones cuyo denominador sea 10, 100 o 1000 prueben a dividir el numerador y denominador de la fracción por 2 ó 5 dado que los números 10, 10 ó 1000 se forman multiplicando los factores 2 y 5.

Los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 37. Unos pocos alumnos ordenan las estaturas de los niños rápidamente pero la mayoría inventan reglas falsas que no saben explicar. El profesor utiliza las cañas para mostrar las longitudes 1´6 y 1´495. Los alumnos dan muestras de saber comparar estas dos cantidades de longitud.

Antes de concluir la sesión el profesor indica a los alumnos que terminen la tarea nº 37 en sus casas y entrega, a los alumnos que han terminado con éxito esta tarea (A09, A10, A31 y A35) la tarjeta de evaluación correspondiente a la tarea siguiente.

La sesión de clase con el grupo 5º B se ha suspendido porque los alumnos de 5º curso tenían una charla sobre el entorno natural de la Laguna de Gallocanta y no se ha podido celebrar la sesión en otro momento de la jornada.

Asistencia de alumnos
Faltan a clase los alumnos A03, A47 y A48 del grupo 5º A.

Aspectos actitudinales
Los alumnos del grupo 5º A muestran buen comportamiento de los alumnos y disposición al trabajo en el aula.

Aspectos relacionados con la comprensión:
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 36 indican un rendimiento muy alto. Como los alumnos se han llevado esta tarea a sus casas pueden haber recibido ayuda. Pensamos que este rendimiento no se corresponde con el nivel de comprensión de los alumnos. En la primera parte de la tarea todos los alumnos han respondido correctamente y, en la 2ª parte, solo dos alumnos (A22 y A51) han dado respuestas erróneas.

La estrategia mayoritaria ha consistido en escribir los decimales como suma de fracciones decimales y operar estas fracciones. En el primer apartado, como han trabajado con 0´25, que es un decimal conocido, tres alumnos (A09, A22 y A31) han procedido utilizando la conversión $0´25 = \frac{25}{100}$. El alumno A21 utiliza directamente que 25 es la cuarta parte de 100, y escribe:

"Como 1´00 es una unidad y $\frac{4}{4}$ es la unidad, $0´25 = \frac{1}{4}$ "

Día 18-1-2001 (Trigésimo novena sesión con 5º A y trigésimo octava con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 37.
2º. Resolver y evaluar la nº 38.

En el grupo 5º B:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 34.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 35.

Ejecución
Al comienzo de la sesión de clase en 5º A el profesor recoge la tarjeta de la ficha nº 37 y solicita que la alumna A22 que salga a la pizarra para representar gráficamente las estaturas de las personas que aparecen en el enunciado de la tarea. Se han utilizado las cañas para representar las estaturas de dos niños que aparecen en el enunciado de la tarea. La alumna ordena las estaturas y mientras tanto los alumnos realizan las representaciones gráficas en sus cuadernos. Después, diversos alumnos enuncian la regla para ordenar números decimales.

El profesor entrega a los alumnos la tarea nº 38, que consiste en ordenar decimales, con el encargo de que los alumnos la realicen en sus casas y la traigan resuelta a la sesión del día siguiente.

El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 34 al comienzo de la sesión de clase con el grupo 5º B, y solicita a la alumna A18 que salga a la pizarra a resolver esta tarea. Desea comprobar si la alumna ha aprendido a representar gráficamente, sobre la recta numérica, un número decimal. A pesar de haber tenido dificultades en la representación gráfica del decimal que aparece en la tarea nº 33 esta vez la alumna procede con acierto. En la resolución del apartado 3º recibe ayuda del profesor porque tiene dificultades para realizar la suma de fracciones.

Después los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 35. Algunos alumnos la resuelven pronto y de forma correcta. Estos alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la siguiente ficha. El profesor orienta de modo individual el trabajo de los alumnos y propone que éstos terminen las tareas en sus casas y que las traigan resueltas a la siguiente sesión de clase.

Asistencia de alumnos
Faltan a clase los alumnos A47 y A51 del grupo 5º A. En 5º B falta a clase el alumno A26.

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. En particular, se observa que los alumnos del grupo 5º B han mejorado mucho su rendimiento, posiblemente porque han tenido más éxito en la resolución de la tarea nº 35. El profesor ha ponderado los éxitos de algunos alumnos y les ha animado a seguir trabajando de esta manera.

Aspectos relacionados con la comprensión:
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 37 aparecen en la tabla:

Tarea 37 *Valoración de la respuesta*	*5º A* Nº alumnos
Ordenan bien sin recibir ayuda	4
Ordenan bien, después de rectificar	13
Ordenan mal	4 (A05, A16, A22 y A28)

Estos resultados muestran que, a pesar de ser la primera tarea de ordenación de decimales, los alumnos no tienen excesivas dificultades conceptuales. Un error típico que consiste en ordenar en función del número de cifras decimales que contengan los números solo ha sido detectado en las alumnas A05 y A22.

En la siguiente tabla observamos las estrategias utilizadas por los alumnos que las han explicitado:

Tarea 37 *Estrategias*	*5º A* *Nº alumnos*
Comparando por fases: primero la parte entera; y si son iguales, se comparan las décimas; y así sucesivamente.	7
Añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras	4 (A03, A21, A29, A33)
Utiliza la equivalencia de fracciones: "Primero se pasa cada número decimal a una fracción, luego se compara los denominadores y si no están iguales se busca fracciones equivalentes y se busca cuál es mayor o menor"	1 (A35)
Estrategia errónea: ordenar en función del número de cifras decimales que contengan los números	2
No la explicitan	7

Durante la evaluación conjunta de la tarea han aparecido las dos primeras estrategias. Los alumnos han formulado la regla de ordenación de decimales basada en la primera estrategia. Algunos alumnos han escrito en la tarjetas de evaluación reglas que están bien formuladas. Por ejemplo, el alumno A48 escribe:

"*Primero se mira las barras enteras, si son iguales se miran las décimas, si son iguales las centésimas y así sucesivamente*"

El alumno A11 escribe:

"*Mirar primero si tienen metros enteros, si los tienen iguales mira en las décimas el número mayor y haz lo mismo con todas las cifras hasta que lo sepas ordenar*"

Los alumnos del grupo 5º B han resuelto con gran dificultad las tareas nº 32 y 33 que trabajan la conexión entre las representaciones fraccionaria y decimal de un reparto. Los resultados han mejorado notablemente en la tarea nº 34. Los alumnos han tenido grandes dificultades para resolver estas tareas y hemos necesitado dedicarles cuatro sesiones de clase. Estas tareas plantean cuestiones más conceptuales que procedimentales puesto que con ellas se pretende mejorar la comprensión de:

1º los significados de las cifras del número decimal

2º la representación gráfica del decimal

3º la fracción que expresa la misma cantidad de magnitud que el decimal

4º la acción de repartir, porque a partir del resultado de un reparto los alumnos deben reconstruir las condiciones iniciales en las que se ha realizado el mismo.

Los resultados obtenidos por los alumnos de 5º B en la tarea nº 34 muestran un mayor grado de comprensión que se manifiesta en la calidad de las respuestas dadas. Por ejemplo, 13 alumnos justifican la respuesta dada en el apartado 3º y nueve justifican la dada en el apartado 4º. Este último grupo de alumnos (A01, A08, A14, A15, A19, A24, A27, A34 y A50) suele resolver las tareas con éxito y muestran tener un mayor nivel de comprensión.

Tarea 34	*5º B*	
	BIEN	MAL O NO CONTESTA
Significado de las cifras del decimal	17	4 (A20, A38, A50, A52)
Representan con gráficos la longitud	17	4 (A02, A04, A20, A38)
Paso del decimal a la fracción	16	5 (A04, A06, A20, A39, A30)
Encontrar las condiciones iniciales del reparto	17	4 (A04, A06, A20, A39)

La tipología de los errores cometidos por los alumnos que disponen de un nivel de comprensión bajo del número decimal ha disminuido. Estos alumnos o bien dejan la pregunta sin contestar o cometen un error catalogado como de menor gravedad conceptual. Por ejemplo, ningún alumno ha afirmado en la tarea nº 34 que la parte decimal del número 2´50 coincide con el número de personas que participan en el reparto. Los alumnos A02, A04, A12, A20, A26, A30 y A49 tienen una escasa comprensión del número decimal.

Se ha producido un cambio de actitud y ha aumentado el rendimiento de los alumnos del grupo 5º B cuando han resuelto la tarea nº 35. Puede haber influido la presentación de esta tarea que es más sintética y motivadora que las anteriores. Ahora bien, esta tarea no es elemental porque la resolución correcta de la misma exige a los alumnos:

1º Representar el número decimal como suma de fracciones decimales.

2º Sumar las fracciones decimales.

3º Utilizar la equivalencia de fracciones para simplificar la fracción resultado de la suma.

Las mayores dificultades han acontecido en la actividad de simplificación de fracciones, porque los alumnos no sienten la necesidad de expresar la fracción irreducible. También es cierto que los alumnos han ejercitado poco la técnica de simplificación de fracciones. Los alumnos están más familiarizados con la técnica de obtención de fracciones equivalentes que consiste en multiplicar el numerador y denominador de una fracción por un mismo número.

Día 19-1-2001 (Cuadragésima sesión con 5º A y trigésimo novena con 5º B)
<u>Plan previsto.</u>
En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 38.
2º. Resolver y evaluar la nº 39.

En el grupo 5º B:
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 35.
2º. Resolver y evaluar la tarea nº 36.
3º Resolver la tarea nº 37

<u>Ejecución</u>
Comienza las sesiones de clase, a las 9 h., con el grupo 5º B. El profesor recoge algunos trabajos de Navidad y la tarjeta de evaluación de la tarea nº 36. Se procede a evaluar la tarea nº 35 con la ayuda de la alumna A19 que se confunde al resolver el primer apartado pero que presenta un procedimiento ingenioso para resolver el segundo apartado de la tarea. Expresa con una fracción el número decimal 1´2 Kgrs,

sumando:

$$\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}$$

La alumna no sabe explicar que los cinco primeros sumandos forman la unidad, pero cuando el profesor le pregunta si era esto lo que había pensado, ésta asiente.

El profesor propone que los alumnos que no han entregado la tarea nº 36 dediquen unos minutos a su resolución. Como observa que bastantes alumnos no saben como afrontarla, el profesor realiza una intervención general y expresa, en la pizarra, el número decimal 0´25 como suma de fracciones decimales.

Los alumnos muestran ahora mejor disposición para resolver la segunda parte de la tarea nº 36 de manera que la mayoría de los alumnos (A02, A06, A08, A18, A20, A38, A30 y A49) concluyen con éxito esta tarea y pasan a afrontar la resolución de la tarea nº 37.

Algunos alumnos (A01, A04, A14, A15, A24, A25, A27 y A34) resuelven bien la tarea nº 37 y pasan a resolver la siguiente tarea referida a la ordenación de decimales.

Antes de concluir la sesión de clase el alumno A30 sale a la pizarra a resolver la segunda parte de la tarea nº 36. El profesor propone que los alumnos resuelvan, como trabajo para casa, la tarea nº 37 y, si la han terminado correctamente, la tarea nº 38.

A las 11 horas comienza la sesión de clase con el grupo 5º A. El profesor entrega la tarea nº 38 a los alumnos A09, A31, A35 y A36 que la habían terminado momentos antes de finalizar la sesión del día anterior y la habían entregado con incorrecciones. Recoge las tarjeta de evaluación correspondiente a esta tarea y solicita que salga a la pizarra la alumna A22 que no la ha traído resuelta. La alumna ordena los números decimales sin ninguna dificultad. Los alumnos saben ordenar números decimales. Algunos alumnos (A16 y A28) que, como la alumna A22, no la han realizado la tarea en sus casas proceden a realizarla rápidamente y con éxito en el aula. Sólo la alumna A32 muestra escasa comprensión.

Después los alumnos afrontan la tarea nº 40, que se trata de una situación problemática que sirve de introducción a la operación suma de decimales. Una confusión del profesor ha hecho que los alumnos no realicen la tarea nº 39. El objetivo de la tarea nº 39 es introducir la suma de decimales pero con cantidades de magnitud menores que las que aparecen en el enunciado de la tarea nº 40.

Los resultados obtenidos por los alumnos en la tarea nº 40 han minimizado el error del profesor, porque sólo cuatro alumnos (A03, A07, A32 y A51) han tenido dificultades para resolver la tarea. Para realizar la evaluación conjunta de la tarea sale a la pizarra la alumna A32. La alumna procede utilizando el algoritmo análogo al de la suma de decimales pero muestra escasa comprensión cuando se le pide que justifique las "llevadas" del algoritmo.

Los últimos quince minutos de la sesión se dedican a realizar tres partidas del juego "atrapar al número decimal". Los alumnos han disfrutado con el juego y han reforzado la técnica para representar gráficamente los números decimales sobre la recta numérica.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Faltan a clase los alumnos A46 y A47 del grupo 5º A. Falta a clase los alumnos A12 y A26 del grupo 5º B

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. En particular, se observa que algunos alumnos del grupo 5º B (A04, A06, A25, A39 y A52) que han tenido dificultades en otras muchas tareas han mejorado mucho su rendimiento. El profesor ha ponderado los éxitos de estos alumnos y les ha animado a seguir trabajando de esta manera.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión:</u>
El rendimiento de los alumnos de 5º B al resolver la tarea nº 35 y 36 es alto. Apenas hemos detectado errores conceptuales. No obstante, debemos advertir que la mayoría de los alumnos han concluido las dos tareas en sus hogares y que, posiblemente, han recibido ayuda externa.

En consecuencia, cabe pensar que tienen un nivel de comprensión inferior al que se presupone de la lectura de los datos que señalamos a continuación:

Tarea 35	*5º B* Decimal *1´5*	Decimal *1´2*
Encuentra la fracción simplificada	17	18
Encuentra la fracción pero no la simplifica	2	1
Encuentra la fracción pero no lo justifica o comete errores en la justificación	0	2
Escribe una respuesta incorrecta	2	0

La mayoría de los alumnos han utilizado la misma estrategia: expresar la representación polinómica asociada a los números decimales ($1+\frac{5}{10}$ y $1+\frac{2}{10}$) y después operar con fracciones. Solo tres alumnas (A14, A24 y A34) han utilizado otra estrategia para expresar el decimal 1´5: descomponer este número en tres subunidades de 1/2. En el 2º apartado, para expresar el decimal 1´2, la alumna A14 encuentra la fracción pero no justifica su respuesta y las alumnas A24 y A34 utilizan gráficos y se sirven de fracciones decimales.

Los resultados obtenidos por los alumnos de 5º B en la tarea nº 36 son análogos a los de la tarea anterior:

Tarea 36	*5º B* Decimal *0´25*	Decimal *0´375*
Encuentra la fracción simplificada	19	14
Encuentra la fracción pero no la simplifica	2	5
Encuentra la fracción pero no lo justifica o comete errores en la justificación	0	2
Escribe una respuesta incorrecta	0	0

Aunque los alumnos han recibido ayudas externas, el proceso simbólico que expresan los alumnos en la tarjeta de evaluación nos muestra un nivel de comprensión alto referido a la conexión entre el decimal y la fracción que contrasta con los datos obtenidos en las tareas precedentes.

Las estrategia mayoritaria, como en la tarea anterior, consiste en expresar el decimal como suma de fracciones decimales y, después, operar con las fracciones. Solo el alumno A02 utiliza, en el primer apartado, la idea de que 0´25 es la "mitad de medio litro" aunque, en el 2º apartado no sabe justificar la respuesta. Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver la tarea 38 aparecen en la tabla:

Tarea 38 *Valoración de la respuesta*	*Nº alumnos de 5º A*
Ordenan bien sin recibir ayuda	13
Ordenan bien, después de rectificar	7
Ordenan mal	1 (A32)

Si comparamos estos resultados con los de la tarea nº 37 se observa que los alumnos ordenan los decimales con mayor celeridad y seguridad. Siete alumnos han precisado algún tipo de ayuda. Las dificultades se han centrado en la comparación de los decimales 10´3 y 10´21. En la siguiente tabla observamos las estrategias utilizadas por los alumnos que las han explicitado:

Tarea 38 *Estrategias*	*5º A* *Nº alumnos*
Comparando por fases: primero la parte entera; y si son iguales, se comparan las décimas; y así sucesivamente.	13
Añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras	2 (A03, A21)
Utiliza la equivalencia de fracciones: "Pasar los decimales a fracción y hacer fracciones equivalentes hasta que salga el mismo denominador igual y comparar"	1 (A35)
No la explicitan	5

Los alumnos tienden a utilizar una única estrategia, la de comparar por fases. De los cuatro alumnos (A03, A21, A29 y A33) que habían utilizado en la tarea nº 37 la estrategia de "añadir ceros a la parte decimal hasta que tengan el mismo número de cifras decimales" solo los dos primeros siguen utilizando el mismo procedimiento. La alumna A33 ha utilizado una estrategia novedosa: coloca los números en columna, alineados por la coma aunque no iguala las partes decimales con ceros.

Los resultados obtenidos por los alumnos de grupo 5º A en relación con la resolución de la tarea nº 40 inducen a pensar que los alumnos han recibido enseñanza de los algoritmos escritos de algunas operaciones con números decimales.

El conocimiento que tienen los alumnos de una técnicas operatorias no debe considerarse como garantía de comprensión conceptual. Los procedimientos de cálculo se consideran objetivo prioritario de la enseñanza escolar pero tales destrezas deben ir acompañadas de conocimientos conceptuales. La introducción prematura de estas destrezas puede obstaculizar el proceso de enseñanza. Esta situación se ha manifestado en el grupo 5º A cuando los alumnos no han reconocido la necesidad de justificar el algoritmo de la suma de decimales porque les parece superfluo recibir explicaciones sobre la justificación de un procedimiento de cálculo del que conocen su manejo.

<u>Valoración</u>.
Se confirma el aumento de rendimiento experimentado por los alumnos del grupo 5º B al resolver las tarea nº 35 y 36. Los alumnos dan muestras de comprender el significado del número decimal como resultado de una medida de cantidad de magnitud y saben expresar un número decimal, que no tenga más de tres cifras decimales, con una fracción.

La mayoría de los alumnos del grupo 5º A saben ordenar números decimales. No obstante, en el trabajo posterior sobre operaciones con números decimales los alumnos tendrán ocasión de reforzar la relación de orden de los números decimales.

Día 22-1-2001 (Cuadragésimo primera sesión con 5º A y cuadragésima con 5º B)
<u>Plan previsto.</u>
En el grupo 5º A:
Resolver y evaluar la nº 41.

En el grupo 5º B:
Recoger y evaluar las tareas nº 37 y 38.

<u>Ejecución:</u>
Comienza la sesión de clase, a las 9 h., en el grupo 5º B. El profesor recoge las tarjetas de evaluación de las tareas nº 37 y 38 a los alumnos que las han resuelto satisfactoriamente. Se observa que bastantes alumnos no consiguen ordenar las estaturas de los seis que aparecen en la tarea nº 37. Los profesores orientan a algunos alumnos y, poco a poco, van resolviendo esta tarea y pasan a afrontar la siguiente tarea de ordenación de números decimales.

En la siguiente tarea los alumnos muestran menor grado de dificultad, a pesar de tener que volver a ordenar seis números. Sin duda, se han producido aprendizajes durante la resolución de tarea anterior. Un error muy extendido entre los alumnos ha sido considerar el decimal 10´3 menor que 10´21. Todos los alumnos, salvo los A12 y A52, han resuelto esta tarea.

El profesor para evaluar la tarea nº 37 ha utilizado las cañas y ha representado los decimales 1´6 (estatura de Manuel) y 1´495 (estatura de Oscar). No ha quedado tiempo para evaluar la tarea nº 38 y enunciar la regla de ordenación de números decimales.

Los alumnos del grupo 5º A afrontan la resolución de la tarea nº 41. Con esta tarea se pretende introducir el algoritmo de la resta de números decimales. Los alumnos han utilizado el algoritmo usual, salvo la alumna A35 que ha operado con fracciones. La alumna A10 ha justificado el algoritmo de la suma con fracciones pero no ha realizado lo mismo con el de la resta.

Algunos han tenido dificultades cuyas causas son más profundas que la gestión de la llevada en el algoritmo de resta. Las alumnas A07, A23 y A32 no han sabido evaluar las cantidades que intervienen en el enunciado de la tarea, porque han intentado restar a la cantidad menor la cantidad mayor.

El profesor ha presentado el algoritmo de la resta de decimales a partir de la representaciones con fracciones decimales y ha justificado la técnica de evitar las llevadas mediante el procedimiento de añadir al minuendo y sustraendo de la resta la misma potencia de la base decimal. Los alumnos no han sabido justificar el algoritmo de la resta de naturales con lo que la justificación de la resta de decimales difícilmente habrá sido comprendida por los alumnos.

Antes de terminar la sesión de clase el profesor entrega la tarjeta de evaluación correspondiente a la tarea nº 42 con el encargo de que la resuelvan en sus casa y la traigan a la siguiente sesión.

Asistencia de alumnos
Faltan a clase los alumnos A40, A47 y A51 del grupo 5º A. Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º B

Aspectos actitudinales
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. Los alumnos del grupo 5º B están algo más apáticos que en días anteriores, posiblemente porque hoy es lunes y la sesión de clase se celebra a primera hora de la mañana.

Aspectos relacionados con la comprensión:
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B al resolver la tarea 37 aparecen en la tabla:

Tarea 37 *Valoración de la respuesta*	*Nº alumnos de 5º B*
Ordenan bien sin recibir ayuda	2
Ordenan bien después de rectificar	20
Ordenan mal	1

Estos resultados muestran que los alumnos han dudado durante la resolución de la tarea y han necesitado recibir sugerencias de los profesores. Hemos observado que algunos alumnos ordenan los decimales en función del número de cifras decimales que contengan, aunque este error solo ha quedado reflejado en la tarjeta de evaluación del alumno A52.

En la siguiente tabla observamos las estrategias utilizadas por los alumnos que las han explicitado:

Tarea 37 *Estrategias*	*5º B* *Nº alumnos*
Comparando por fases: primero la parte entera; y si son iguales, se comparan las décimas; y así sucesivamente.	8
Añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras	3 (A01, A08, A15)
Utiliza la equivalencia de fracciones: todas con denominador 1000	1 (A34)
Estrategia errónea: ordenar en función del número de cifras decimales que contengan los números	1 (A52)
No la explicitan	10

Los alumnos (A01, A08 y A15) utilizan una estrategia original que no ha sido sugerida por el profesor: añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras. Por ejemplo, el alumno A08 explica la regla de ordenación de decimales del siguiente modo:

"*Poner ceros hasta que todos los números sean iguales*"

Se observa que los alumnos que tienen un mayor nivel de comprensión utilizan estrategias más originales.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B al resolver la tarea 38 aparecen en la tabla:

Tarea 38 *Valoración de la respuesta*	*Nº alumnos de 5º B*
Ordenan bien sin recibir ayuda	11
Ordenan bien después de rectificar	10
Ordenan mal	2

Los alumnos han realizado aprendizajes durante la resolución de las tareas nº 37 y 38 de modo que rendimiento obtenido en la tarea nº 38 es superior. Los alumnos ordenan números decimales con mayor seguridad y ha disminuido el número de errores.

En la siguiente tabla observamos las estrategias utilizadas por los alumnos que las han explicitado:

Tarea 38 *Estrategias*	*5º B Nº alumnos*
Comparando por fases: primero la parte entera; y si son iguales, se comparan las décimas; y así sucesivamente.	14
Añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras	1 (A01)
No la explicitan	8

Del mismo modo que ha ocurrido en el grupo 5º A, cuando los alumnos de 5º B han adquirido un mayor dominio de la técnica de ordenación de decimales han optado por utilizar una única estrategia. Solo el alumno A01 ha mantenido la estrategia utilizada en la tarea anterior.

Valoración.
La mayoría de los alumnos del grupo 5º B saben ordenar números decimales. Queda por analizar el grado de comprensión de los ocho alumnos que no han explicitado la estrategia de ordenación de decimales. Por ello vamos a solicitar a los alumnos que formulen la regla para ordenar números decimales, durante la siguiente sesión.

Día 23-1-2001 (Cuadragésimo segunda sesión con 5º A y cuadragésimo primera con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Resolver y evaluar la nº 42.
2º. Resolver y evaluar la nº 43.

En el grupo 5º B:
1º. Evaluar la tarea nº 38.
2º. Resolver y evaluar la nº 39.
3º. Resolver y evaluar la nº 40.

Ejecución:
Comienza la sesión de clase, a las 9 h., en el grupo 5º A. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 42 a los alumnos que la han resuelto satisfactoriamente. Algunos alumnos (A03, A16 y A28) no han intentado resolver la tarea. Algunos otros, como las alumnas A05 y A32, no ha entendido o no han leído con atención el enunciado de la tarea. Los restantes alumnos han resuelto correctamente la primera parte de la tarea.

Los alumnos han tenido dificultades para interpretar el enunciado de la segunda parte de la tarea. Cuando el profesor ha explicado que el carpintero sólo podía utilizar planchas de longitud 0´5m. y 1´2m. los alumnos han dado muestras de saber resolver este segundo apartado de la tarea.

Para realizar una evaluación conjunta de la tarea nº 42 sale a la pizarra la alumna A35 que, sabe resolver los problemas utilizando la representación fraccionaria, pero se muestra insegura cuando emplea números decimales. Además, en este caso la alumna comprende que debe utilizar la notación decimal porque se trata de un procedimiento más rápido y, en consecuencia, le permite ahorrar tiempo y esfuerzo.

En la segunda mitad de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 43. Se pretende introducir el significado y la técnica de la multiplicación por potencias de 10. Para dotar de significado a la multiplicación de un número decimal por un número natural se propone una situación problemática de reiteración de un reparto.

Se han observado dificultades para expresar el resultado del reparto "3 barras para 8 personas". Algunos alumnos no se acuerdan, o se confunden, al realizar el procedimiento de obtención de la expresión decimal. El profesor ha solicitado a la alumna A32 que realice este reparto por fases, fraccionando las partes sobrantes en 10 partes iguales. Cuando la alumna obtiene la expresión decimal el profesor no da ninguna otra indicación y propone que concluyan esta tarea en sus casas y la traigan resuelta a la siguiente sesión.

Al final de la sesión sólo la alumna A10 ha resuelto con éxito la tarea nº 43, después de haber propuesto con anterioridad el siguiente procedimiento de cálculo equivocado:

$$0'375 \times 10 = 0'3750$$

La aparición de este procedimiento, que ha sido propuesto por la mayoría de los alumnos, se debe a la influencia de la regla que conocen los alumnos para multiplicar un número natural por potencias de diez. Los alumnos tienden a trasladar procedimientos de cálculo que conocen de los naturales, aún en situaciones inadecuadas.

A las 10 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º B. El profesor solicita que salga a la pizarra la alumna A50 para proceder a la evaluación conjunta de la tarea nº 38. Esta alumna había cometido un error en la tarea nº 37, que no había corregido posteriormente durante la sesión de clase del día anterior. La alumna sabe ordenar los números, pero tiene dificultades para expresar correctamente la regla para ordenar decimales. Mientras tanto algunos alumnos se muestran inquietos y desoyen las explicaciones del profesor para conseguir formular de forma consensuada la regla.

El profesor opta por dictar a los alumnos la siguiente regla de ordenación de números decimales: "Para ordenar números decimales comparamos las cifras que corresponden a las unidades de mayor orden. Si una de las cifras que se comparan es mayor el número que contenga esta cifra será el mayor. Y si las cifras del mismo orden son iguales se pasa a comparar las cifras del orden de unidades inmediatamente inferior. Y así, sucesivamente". Después, explica la regla con la ayuda de los números: 10´3 ; 10´30 y 10´21.

En la segunda mitad de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 39. Se pretende introducir el significado y la técnica de la suma de números decimales. La mayoría de los alumnos concluyen con éxito y de forma rápida la tarea dado que conocen el algoritmo de la suma de decimales. Algunos alumnos (A06, A08, A14, A26, A34) han utilizado la representación fraccionaria subyacente al decimal y han resuelto, con algunas ayudas, la tarea.

Según van terminando correctamente la tarea pasan a resolver la tarea nº 40. La mayoría de los alumnos, a excepción de los alumnos A12, A15, A39, A30 y A52, concluyen con éxito la tarea.

Antes de terminar la sesión se realiza la evaluación conjunta de la tarea nº 39. Sale a la pizarra el alumno A52, que está bloqueado y afirma no saber resolver este problema. El alumno tiene dificultades para expresar los números decimales como suma de fracciones decimales; entiende el procedimiento para sumar fracciones y, después, realiza la suma con los números decimales.

Finalmente el profesor entrega la tarjeta de evaluación de la tarea nº 41 para que los alumnos trabajen la tarea en sus casas y la traigan resuelta a la siguiente sesión de clase.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Faltan a clase los alumnos A47 y A51 del grupo 5º A. Asisten a clase todos los alumnos de 5º B

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Respecto a la resolución de la tarea nº 39 efectuada por los alumnos de 5º B hemos observado que:

1º. Los alumnos entienden el significado de la operación suma de decimales porque la han identificado al resolver situación problemática.

2º. Los alumnos conocen el algoritmo escrito usual de la suma antes de ser presentado en el aula. Cabe pensar que han recibido enseñanza previa o que han aprendido el manejo de estos procedimientos de cálculo por enculturación, debido a que se trata de un conocimiento socialmente útil y a la semejanza con los algoritmos de naturales.
Ahora bien, el conocimiento que tienen los alumnos de una técnicas operatorias no debe considerarse como garantía de comprensión conceptual. Los procedimientos de cálculo se consideran objetivo prioritario de la enseñanza escolar, pero tales destrezas deben ir acompañadas de conocimientos conceptuales.

3º Los alumnos no reconocen la necesidad de justificar el algoritmo de la suma de decimales porque les parece superfluo justificar el fundamento de un procedimiento de cálculo del que conocen su manejo.

La enseñanza de las operaciones con números decimales presenta un problema peculiar, a saber, los procedimientos de cálculo con decimales son análogos a los realizados con naturales. Si los alumnos reciben enseñanza de las técnicas operatorias utilizando referencias continuas a los procedimientos de cálculo con naturales, del tipo: "se hace como si no llevasen coma" se estarán creando obstáculos de enseñanza porque tal proceder propicia en los alumnos concepciones erróneas sobre el número decimal al percibirlo como dos números naturales separados por una coma.

Sabemos que los números decimales se inventaron para operar de forma parecida a como se hace con los naturales, pero si la enseñanza escolar de los números decimales se centra en resaltar las analogías con los números naturales se corre el riesgo de trasladar significados, no deseables, entre los conjuntos numéricos de los naturales y los racionales que dan lugar a conflictos originados por la aplicación de propiedades específicas de los números naturales en circunstancias inadecuadas.

Concretamos nuestra apuesta por la enseñanza de los conceptos matemáticos desde la comprensión estableciendo una ruptura entre los conjuntos numéricos de los naturales y los racionales. Esta última estructura numérica resuelve el problema del reparto y de la medida de magnitudes continuas mientras que los números naturales se muestran ineficaces para esta tarea.

4º. La mayoría de los alumnos han optado por utilizar la misma estrategia: disponer los sumandos o restandos uno debajo del otro, alineados por la coma, y proceder como en la suma de naturales.

Los alumnos del grupo 5º A han identificado las operaciones de suma y resta en la tarea nº 42. Además han operado correctamente. Todos los alumnos operan con la notación decimal, salvo la alumna A35 que ha utilizado la suma de fracciones decimales.

Día 24-1-2001 (Cuadragésimo tercera sesión con 5º A y cuadragésimo segunda con 5º B)

Plan previsto.

En el grupo 5º A:

1º. Recoger y evaluar la nº 43.

2º. Resolver y evaluar la nº 44.

En el grupo 5º B:

1º. Evaluar la tarea nº 40.

2º. Recoger y evaluar la nº 41.

3º. Resolver y evaluar la nº 42.

Ejecución:

Comienza la sesión de clase, a las 9h., en el grupo 5º A. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 43 y procede a realizar la evaluación conjunta de la tarea.

Algunos alumnos para calcular la multiplicación 0´375 x 10 añaden un cero a la derecha. De esta forma obtienen como resultado de la multiplicación, 0´3750, que es el mismo número que actúa como multiplicando. Se observa que los alumnos tienden a trasladar procedimientos de cálculo que son válidos con naturales pero inadecuados para los decimales.

Para justificar el procedimiento de cálculo de la multiplicación de 0´375 x 10 el profesor escribe la multiplicación como suma reiterada, y hace observar a los alumnos que el resultado, 3´75, se ha obtenido trasladando la coma un lugar a la derecha.

Para justificar el resultado del cálculo 0´375 x 100, el profesor pensaba explicar el siguiente método:

$$\begin{array}{r} \frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000} \\ \times\ 100 \\ \hline \frac{300}{10}+\frac{700}{100}+\frac{500}{1000} = 30+7+\frac{5}{10} = 37´5 \end{array}$$

Sin embargo, el profesor ha optado por mostrar la regla que han utilizado correctamente bastantes alumnos que han recibido enseñanza sobre operaciones con números decimales. El profesor ha considerado oportuno posponer hasta la evaluación de la siguiente tarea la justificación de esta regla para el caso que el multiplicador sea 100 ó 1000.

Después los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 44, que tiene una estructura análoga a la anterior. Los alumnos resuelven con facilidad la tarea y según van terminando se les propone la resolución de la siguiente tarea. La dificultad de la tarea nº 44 se centra en la formulación escrita de la regla para multiplicar por número decimal por potencias de 10. Algunos alumnos confunden los dos procedimientos descritos, como la alumna A13 que escribe:

"*Multiplicar y correr la coma hacia la derecha como 0 haya*"

Antes de concluir la sesión algunos alumnos (A09, A10, A11, A22, A28, A31, A33, A35 y A37) han resuelto con éxito la tarea nº 45

A las 10 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º B. El profesor solicita que salga a la pizarra la alumna A15 para proceder a la evaluación conjunta de la tarea nº 40. Esta alumna ha sumado dos números decimales alineándolos por la derecha sin tener en cuenta los diferentes ordenes de unidades de las cifras que relacionaba. Sus propios compañeros le indican el error.

El profesor recoge la tarea nº 41. Algunos alumnos (A08, A15, A17, A18, A20, A30 y A52) dicen haberla dejado en sus casas y se les entrega una nueva tarjeta de evaluación para que procedan a resolverla en el aula. Los alumnos que terminan esta tarea resuelven la tarea nº 42.

El profesor ha realizado una intervención general para comentar el significado de algunos vocablos que aparecen en el enunciado de la tarea. Y ha modificado el segundo apartado de la tarea del siguiente modo:

"*b) ¿Puede hacer el soporte utilizando únicamente planchas de 0´5 y m y 1´2 m.?*".

Antes de terminar la sesión de clase la mayoría de los alumnos han realizado, con éxito, la tarea nº 42. Los alumnos que tienen dificultades para resolverla se quedan unos minutos del recreo con el profesor. Todos los alumnos han recibido el encargo de resolver en sus casas la tarea nº 43.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Faltan a clase los alumnos A03 y A47 del grupo 5º A. Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º B

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. Bastantes alumnos no realizan las tareas que se proponen para realizarlas en sus casas.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A al resolver las tareas nº 43 y 44 pueden inducir a engaño. El número de errores cometidos por los alumnos es bajo y 14 alumnos expresan correctamente la regla para multiplicar un número decimal por 10, 100 o 1000.

Sin embargo, la utilización generalizada de una única estrategia de resolución da indicios de escasa comprensión y de la traslación de procedimientos de cálculo de los números naturales. La estrategia consiste en encontrar el resultado del reparto "3 barras entre 8 personas" después, multiplicar por 10 y buscar el lugar adecuado donde situar la coma.

Solo tres alumnos han utilizado otras estrategias: los alumnos A16 y A33 multiplican la fracción 3/8 por 10, 100 ó 1000 y, después, convierten la fracción en decimal; y el alumno A11 encuentra la representación polinómica del reparto, suma las fracciones decimales y, después, multiplica por 10, 100 ó 1000. El alumno no indica cómo gestiona las igualdades:

$$\frac{375}{100} \text{ x } 10 = \frac{3750}{100} = 3´750$$

La estrategia utilizada por los alumnos descansa en el algoritmo de la multiplicación de números naturales cuya justificación matemática desconocen. En estas condiciones no sienten la necesidad de justificar este nuevo procedimiento de cálculo con decimales. La utilización de la multiplicación tradicional ocasiona conflictos a los alumnos que intentan formular la regla porque tiende a indicar las acciones que han realizado en la multiplicación. Así, la alumna A05 que desconoce la regla evita realizar procedimientos basados en repartos cuando escribe:

"*<u>Multiplicar normal</u> pero poner el cero del 10 al final por 100 los dos ceros por 1000 los tres ceros*".

Si los alumnos utilizan las propiedades y técnicas de los números naturales se muestran seguros pero eluden la estructura polinómica fraccionaria que subyace en el decimal y, este proceder les crea dificultades de comprensión.

<u>Toma de decisiones.</u>
Las tareas nº 43, 44 y 45 sirven para introducir la regla para "situar la coma" al realizar multiplicaciones. Pensamos que la regla para "situar la coma" ha sido enseñada demasiado pronto. Sería deseable que los alumnos no recibieran enseñanza de las reglas para situar la coma en las operaciones con números decimales hasta que tales reglas sean justificadas mediante acciones realizadas en el modelo de aprendizaje, aunque con esta decisión se alarguen los tiempos de instrucción.

A la vista de los resultados obtenidos, conviene posponer la formulación de la regla de la multiplicación de un decimal por potencias de diez, hasta que los alumnos hayan realizado varios problemas. En tal caso, debemos introducir una nueva tarea para reforzar la técnica de este procedimiento de cálculo. Se propone resolver las tareas nº 45 y 46 antes que la nº 43 y 44; y en todas ellas justificar el procedimiento de cálculo de la multiplicación mediante la representación polinómica asociada al número decimal.
Somos conscientes de que este planteamiento metodológico alarga considerablemente el proceso de instrucción. A pesar de esta limitación, la enseñanza de los cálculos computacionales desde la comprensión reporta muchas más ventajas que inconvenientes. Como puntos fuertes destacamos que los alumnos reciben una enseñanza más crítica, de mayor riqueza conceptual, donde los algoritmos realizados con lápiz y papel asumen una nueva función: la de reforzar la comprensión de las estructuras numéricas y del sistema de numeración.

Día 25-1-2001 (Cuadragésimo cuarta sesión con 5º A y cuadragésimo tercera con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Evaluar la tarea nº 44
2º. Recoger y evaluar la nº 45.
2º. Resolver y evaluar la nº 46.

En el grupo 5º B:
1º. Evaluar las tareas nº 41 y 42.
2º. Recoger y evaluar la nº 43.

Ejecución:
Comienza la sesión de clase, a las 9 h., en el grupo 5º A. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 45 y procede a realizar la evaluación conjunta de las tareas nº 44 y 45.

El profesor realiza el reparto de "21 barras entre 20 personas" y utiliza la representación polinómica decimal del resultado del reparto para justificar la regla de la multiplicación de un número decimal por potencias de diez:

$$1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\times\ 10$$

$$10 + \frac{0}{10} + \frac{50}{100} = 10 + \frac{5}{10} = 10{\prime}5$$

Después de enunciar la regla de la multiplicación de un número decimal por potencias de diez, se pasa a evaluar la tarea nº 45. Se pretende justificar el algoritmo de la multiplicación de un decimal por un número natural. Para ello el profesor propone operar:

$$2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\times\ 8$$

$$16 + \frac{56}{10} + \frac{40}{100}$$

$$16 + \frac{56}{10} + \frac{4}{10} = 16 + \frac{60}{10} = 16 + 6 = 22$$

Después los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 46. Los alumnos resuelven con facilidad esta tarea, aunque bastantes alumnos se confunden al "colocar la coma". El profesor justifica el funcionamiento del algoritmo de la multiplicación 3´5 x 60 y propone a los alumnos como trabajo para casa que hagan lo mismo con la multiplicación 3´75 x 500:

$$3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\times\ 500$$

A las 10 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º B. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 43. Solo tres alumnos (A01, A15, A24) resuelven correctamente la tarea, los demás dicen no saber resolverla.

Antes de que el profesor ayude a los alumnos para que resuelvan esta tarea, procedemos a realizar la evaluación conjunta de las tareas nº 41 y 42. Se pretende justificar los algoritmos de la suma y de la resta de números decimales. Así en la tarea nº 41, el profesor plantea la siguiente suma de fracciones decimales:

$$\begin{array}{rl}
 & 3+\frac{7}{10}+\frac{5}{100} \\
+ & 5+\frac{8}{10}+\frac{0}{100} \\
 & 6+\frac{5}{10}+\frac{0}{100} \\
\hline
 & 14+\frac{20}{10}+\frac{5}{100} = 16+\frac{5}{100} = 16´05
\end{array}$$

Y después la resta:

$$\begin{array}{rl}
 & 20 \\
- & 16+\frac{0}{10}+\frac{5}{100} \\
\hline
 & 20+\frac{10}{10}+\frac{10}{100} \\
- & 17+\frac{1}{10}+\frac{5}{100} \\
\hline
 & 3+\frac{9}{10}+\frac{5}{100} = 3´95
\end{array}$$

El profesor propone justificar los algoritmos de la suma y de resta con los datos del enunciado de la tarea nº 42. Después procede a ayudar a los alumnos en la resolución de la tarea nº 43. La alumna A17 sale a la pizarra y realiza el reparto "3 barras entre 8 personas". Para realizar la multiplicación 0´375 x 10 expresa el número decimal mediante la representación polinómica subyacente, de modo que el resultado de la multiplicación es 3´75

El profesor escribe 0´375 x 10 = 3´75 y propone a los alumnos que realicen las operaciones:

0´375 x 100 y 0´375 x 1000,

e inventen una regla para saber el resultado de estas multiplicaciones sin tener que realizar el cálculo.

Concluye la sesión de clase y los alumnos reciben el encargo de terminar de resolver en sus casas esta tarea y la tarea nº 44 que tiene una estructura análoga a la tarea nº 43.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Faltan a clase la alumna A47 del grupo 5º A. Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º B

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. Bastantes alumnos no realizan las tareas que se proponen para realizarlas en sus casas.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos han utilizado una única estrategia para realizar las operaciones que aparecen en las tareas nº 44 y 45. Los alumnos establecen analogías entre las operaciones con números decimales y números naturales, de modo que tienden a reproducir los algoritmos conocidos y evitan utilizar otras estrategias. De esta forma evitan expresar el decimal mediante su estructura polinómica fraccionaria subyacente, a pesar de que procedimiento les crea dificultades de comprensión.

La aparente sencillez de las técnicas de cálculo "análogas a las de naturales" les causa numerosos conflictos porque los alumnos que utilizan este procedimiento no disponen de mecanismos para controlar la bondad de sus producciones. De esta forma, los alumnos deciden donde colocar la coma en función de reglas que no han sido previamente justificadas y que, por lo tanto, no controlan.

En la primera parte de la tarea nº 46 la formulación del enunciado ha permitido que aparecieran otra estrategia de resolución basada en la idea de fracción. En la tarea los alumnos deben indicar los minutos que hay en 3´5 horas. Diez alumnos de 5º A (A05, A10, A11, A13, A23, A32, A37, A40, A48 y A51) han realizado la multiplicación reproduciendo el algoritmo de los naturales y situando correctamente la coma. Y otros diez alumnos (A09, A16, A21, A22, A28, A29, A31, A33, A35 y A36) han transformado 0´5 horas en media hora que saben que son 30 minutos y se los han añadido a 180 minutos. Cuatro de estos alumnos (A09, A16, A33 y A35) han utilizado los dos procedimientos de cálculo.
Sin embargo, ningún alumno ha utilizado la representación polinómica fraccionaria del número decimal. Sabemos que la utilización de esta estrategia es más costosa para los alumnos porque tiene una sintaxis más compleja. A pesar de ello, proponemos que los alumnos operen de forma transitoria, durante unas sesiones, con este sistema de representación en aras a mejorar la comprensión de las acciones que comportan los algoritmos de las operaciones aritméticas.

Día 26-1-2001 (Cuadragésimo quinta sesión con 5º A y cuadragésimo cuarta con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Resolver y evaluar la nº 47.
2º. Resolver y evaluar la nº 48.

En el grupo 5º B:
1º. Evaluar las tareas nº 43 y 44.
2º. Resolver y evaluar la nº 45.

Ejecución:
Comienza la sesión de clase, a las 9 h., en el grupo 5º B. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de las tareas nº 43 y 44 a los pocos alumnos (A01, A06, A14, A15, A19, A25, A27 y A34) que la han traído resuelta de sus casas. Algunos de estos alumnos cometen errores en su resolución. Se constata que los alumnos perciben las dos tareas como muy difíciles y que la ayuda que recibieron, durante la sesión anterior, para facilitar la resolución de la tarea nº 43 fue insuficiente.
El profesor toma la decisión de realizar con los alumnos la resolución de la tarea nº 44 y proponer como trabajo para casa la realización de la tarea nº 43. Al finalizar esta sesión de clase los alumnos A01, A14, A15, A19, A24, A25, A27 y A34 han terminado la tarea nº 43.
El profesor solicita que salga a la pizarra el alumno A52 para que realice el reparto de "21 barras entre 20 personas". El alumno que dice no saber hacer la tarea realiza correctamente el reparto.
Después, el profesor escribe en la pizarra la representación polinómica decimal del resultado de este reparto y procede a realizar la multiplicación por diez:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \times\ 10 \\ \hline 10 + \frac{0}{10} + \frac{50}{100} \\ 10 + \frac{5}{10} = 10´5 \end{array}$$

Después, procede a realizar la operación 1´05 x 100:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \times\ 100 \\ \hline 100 + \frac{0}{10} + \frac{500}{100} = 100 + 5 = 105 \end{array}$$

Y, finalmente, la operación 1´05 x 1000:

$$1+\frac{0}{10}+\frac{5}{100}$$
$$\times\ 1000$$
$$1000+\frac{0}{10}+\frac{5000}{100}=1000+50=1050$$

El profesor coloca los resultados en una tabla.

	Multiplicado por 10	Multiplicado por 100	Multiplicado por 1000
1´05	**10´5**	**105**	**1050**

y solicita a diversos alumnos que enuncien la regla para multiplicar un número decimal por 10, 100 ó 1000, sin tener que realizar ninguna multiplicación.

Los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 45. A pesar de que no se ha introducido el algoritmo de la multiplicación de un número decimal por un número natural, los alumnos dan muestras de conocer el procedimiento de cálculo. El profesor propone que los alumnos realicen la multiplicación de dos formas diferentes y escribe en la pizarra:

$$\begin{array}{r} 2´7\ 5 \\ \times\quad 8 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2+\frac{7}{10}+\frac{5}{100} \\ \times\qquad 8 \\ \hline \end{array}$$

Todos los alumnos resuelven, con éxito, la multiplicación con la notación decimal y la mitad de los alumnos operan correctamente con la representación fraccionaria decimal.

Los alumnos reciben el encargo de resolver la tarea nº 46 como trabajo para casa durante el fin de semana.

A las 11 h. 10m. comienza la sesión de clase con el grupo 5º A. El profesor entrega la tarjeta de evaluación de la tarea nº 47. En la tarea se enuncian dos problemas que se resuelven con la división de un número decimal entre un natural. Los alumnos no saben cómo resolver la tarea. Unos minutos más tarde el profesor ayuda a los alumnos y les indica que para realizar las divisiones 1´5 : 4 y 0´375 : 5 pueden obtener primero otras divisiones equivalentes que no tengan cifras decimales en el dividendo. Los alumnos dicen que esto es posible multiplicando el dividendo y el divisor de la primera operación por 10, y por 1000 en la segunda división. De esta forma las divisiones a efectuar son: 15 : 40 y 375 : 5000.

Los alumnos han tenido dificultades para realizar el cálculo de estas divisiones. Han cometido numerosos errores que fundamentalmente se deben a que no evocan el proceso de un reparto y además, tienden a abandonar la simbolización del reparto realizado por fases en el que las partes sobrantes se fraccionan en 10 partes iguales. Como el procedimiento del que han recibido enseñanza en este curso es análogo, pero no igual, al de la división con enteros los alumnos tienden a evitar escribir símbolos y por lo tanto pierden el control del orden de unidades de la fase en la que están realizando el reparto.

Los alumnos que resuelven correctamente la tarea afrontan la resolución de la tarea nº 48. Un grupo reducido de alumnos (A09, A10, A33 y A35) concluye con éxito esta tarea. Los restantes alumnos reciben el encargo de terminarla en sus casas, durante el fin de semana, y traerla resuelta a la siguiente sesión de clase.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Falta a clase la alumna A47 del grupo 5º A. Falta a clase el alumno A08 del grupo 5º B

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos muestran buen comportamiento de los alumnos y buena disposición al trabajo en el aula. Bastantes alumnos no realizan las tareas que se proponen para realizarlas en sus casas. Los alumnos trabajan en el aula, posiblemente debido al constante estímulo que reciben de los profesores. Sin embargo, el nivel de esfuerzo baja considerablemente cuando reciben el encargo de resolver las tareas en sus casas.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos del grupo 5º B siguen sin utilizar la representación polinómica asociada al decimal cuando han resuelto la tarea nº 43 a pesar de que el profesor les ha recomendado utilizarla y la ha ejemplificado durante la evaluación conjunta de la tarea nº 44. Por este motivo se les exige que utilicen esta estrategia para operar la multiplicación 2´75 x 8 que resuelve el problema enunciado en la tarea nº 45.

De hecho la exigencia impuesta a los alumnos de 5º B para que utilicen la representación polinómica del número decimal en la multiplicación 2´75 x 8 que resuelve el problema enunciado en la tarea nº 45 constituye una potencialidad de la propuesta de enseñanza porque la mitad de los alumnos han sabido calcular y justificar el procedimiento de cálculo.

Los alumnos del grupo 5º A, cuando resuelven la tarea 47, utilizan la estrategia que ha recomendado el profesor. Se recuerda que esta tarea es la primera que realizan sobre la división de un decimal entre un natural y los alumnos han solicitado ayuda. La estrategia utilizada consiste en multiplicar el dividendo y el divisor por una potencia de 10 hasta que ambos números sean naturales y, después, utilizar el algoritmo del proceso de reparto. Solo tres alumnos (A29, A31 y A36) han procedido directamente utilizando el algoritmo del reparto por fases.

El rendimiento de los alumnos en esta tarea es alto porque casi todos han resuelto correctamente los dos problemas propuestos, pero apuntamos dos deficiencias:

1º La mitad de los alumnos descuida la simbolización en el algoritmo del proceso de reparto, porque o no indica que el tamaño de las cantidades que va a repartir o bien no indica el tamaño de las partes que resulta del reparto.

2º La mayoría no indica en la solución la unidad con que viene medida la cantidad de magnitud.

Día 30-1-2001 (Cuadragésimo sexta sesión con 5º A y cuadragésimo quinta con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la nº 48.
2º. Resolver y evaluar la nº 49.

En el grupo 5º B:
1º. Terminar de evaluar la tarea nº 45
2º. Recoger y evaluar la tarea nº 43.
3º. Recoger y evaluar la tarea nº 46.

Ejecución
A las 9 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º A. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la tarea nº 48 y observa que bastantes alumnos no la traen resuelta (A11, A21, A22, A28, A40 y A51) o bien mantienen los mismos errores que los escritos durante la sesión anterior (A29, A31, A37). De nuevo, se percibe falta motivación de los alumnos para realizar las tareas que se les propone resolver fuera del aula.

Varios alumnos salen a la pizarra para evaluar esta tarea. Así la alumna A13 realiza, con la ayuda del profesor, la división 125 : 10; el alumno A37 realiza la división 125 : 100 y la alumna A03 la división 125 : 1000. El profesor escribe en un cuadro los resultados obtenidos y diversos alumnos expresan la regla para dividir un número decimal entre 10, 100 ó 1000; y finalmente, escribe en la pizarra el enunciado de la regla.

Se observa que algunos alumnos tienen dificultades para resolver la división 125 : 10, posiblemente porque no saben justificar el algoritmo de la división en términos reparto de agrupamientos de potencias de diez. Consideran el algoritmo de la división de naturales y del reparto como dos procedimientos de cálculo completamente diferentes.

Después los alumnos afrontan la resolución de la tarea nº 49. Los alumnos no han tenido dificultades para identificar la división como la operación que resuelve la tarea. Las dificultades se han centrado en el procedimiento de cálculo de 1'5 : 0'25. El profesor ha recomendado a los alumnos que multipliquen el dividendo y el divisor por 100.

Concluye la sesión de clase y los alumnos reciben el encargo de realizar la segunda parte de la tarea nº 49 como trabajo para casa.

Comienza la sesión de clase, a las 10 h., en el grupo 5º B. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de las tareas nº 43 y 46 y observa que muy pocos alumnos han traído resueltas las tareas. Además, comprueba que bastantes alumnos siguen cometiendo errores en la resolución de la tarea nº 43. Antes de evaluar esta tarea, decide ejercitar primero el algoritmo de la multiplicación de un decimal por un número natural, y para ello propone realizar la evaluación de las tareas nº 45 y 46.

Para evaluar la tarea nº 45 sale a la pizarra el alumno A30, que resuelve correctamente la multiplicación 2'75 x 8; y procede a enunciar la regla de funcionamiento de este algoritmo. Para evaluar la tarea nº 46 sale a la pizarra el alumno A02 que realiza la multiplicación 3'5 x 60. Durante este tiempo el profesor ha permitido que los alumnos tengan la tarjeta de evaluación de la tarea nº 46 de manera que algunos alumnos, como el A52, han resuelto el apartado que se estaba evaluando en la pizarra y, además, el siguiente apartado.

Después, el profesor recoge la tarea nº 46 y solicita que salga a la pizarra el alumno A06 para resolver el segundo problema enunciado en esta tarea. Este alumno ha mejorado mucho su rendimiento en estas últimas sesiones y realiza bien el algoritmo de la multiplicación 500 x 3'75. El profesor cuestiona la conmutatividad de la multiplicación y, como observa que algunos niegan esta propiedad, pide al alumno A06 que realice el cálculo 3'75 x 500.

Mas tarde, los alumnos afrontan la resolución del primer problema de la tarea nº 47. Con esta tarea se pretende introducir el significado de la operación división de un decimal por un número natural. Sin embargo, algunos alumnos proceden aplicando la operación multiplicación. Se constata que los alumnos no leen con detenimiento los problemas y se apresuran a aplicar una operación, en este caso, la multiplicación porque las últimas fichas se resolvían con esta operación.

El profesor interviene para realizar una representación gráfica de las cantidades de longitud que aparecen en el problema y fomentar un debate con la intención de que unos compañeros informen a los otros de la operación que resuelve la tarea. Un segundo foco de dificultad se centra en la forma de realizar el procedimiento de cálculo. Algunos alumnos (A01 y A34) han recibido enseñanza previa de esta algoritmo y proceden manteniendo, sin realizar modificaciones, el número decimal en el dividendo.

El profesor propone suprimir la coma del número decimal que actúa como dividendo. Para ello pregunta a los alumnos por las acciones que se deberían realizar en el dividendo y divisor. Después de diferentes intervenciones sólo la alumna A34 aporta la respuesta correcta: multiplicar el dividendo y el divisor por 10. De esta forma los alumnos resuelven el reparto "15 metros en 40 partes" en vez del reparto "1'5 metros en 4 partes".

El profesor realiza el reparto y propone a los alumnos que resuelvan el segundo problema de tarea nº 47 como trabajo para casa.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º A. Falta a clase la alumna A14 del grupo 5º B.

<u>Aspectos actitudinales</u>
Los alumnos de ambos grupos muestran buen comportamiento y buena disposición al trabajo en el aula. Bastantes alumnos no realizan las tareas que el profesor propone para realizarlas como trabajo para casa.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los resultados obtenidos por los alumnos de 5º B en la resolución de la tarea nº 46 son bajos. Algo más de la mitad de los alumnos resuelven con éxito los problemas. Bastantes alumnos no han intentado resolver alguno de los dos problemas enunciados.

En este caso el problema radica en la escasa voluntad de algunos alumnos por resolver estas tareas. Entre los alumnos con dificultades de comprensión señalamos el caso del alumnos A02, A15 y A27 que no han sabido convertir 0´5 horas en minutos y el caso del alumno A38 que gestiona mal la regla para situar la coma. Los demás alumnos no cometen errores, simplemente no han resuelto la tarea.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º A cuando resuelven la tarea nº 48 muestran que saben realizar repartos aunque la mitad de los alumnos no expresen con detalle la simbolización del proceso de reparto. Solo hemos detectado dificultades en los alumnos A29, A32, A36 y A51. El bajo rendimiento del alumno A29 puede deberse a falta de interés más que a dificultades de comprensión.

Los alumnos han tenido dificultades para expresar la regla de la división de un número natural o decimal por potencias de 10. Solo una cuarta parte de los alumnos ha expresado correctamente la regla. Algunos alumnos no han entendido el objetivo de la enseñanza de esta regla y, como en el caso de la multiplicación (tareas nº 43 y 44), pretenden aplicar el algoritmo de la división y, a la vez, aplicar la regla. Por este motivo, pensamos que sería conveniente posponer la introducción de esta regla, de manera que los alumnos resuelvan antes más situaciones problemáticas de medida. Se propone introducir una nueva tarea sobre la división de un número decimal por un natural antes de proponer la resolución de tarea nº 48.

Toma de decisiones:
Posponer la evaluación de la tarea nº 43 en el grupo 5º B, por los siguientes motivos:

1º Los alumnos de 5º B conocen la regla que se pretende introducir con la resolución de la tarea.

2º De la observación de los resultados de esta tarea en los dos grupos de docencia se concluye la conveniencia de resolver previamente las tareas de multiplicación de números decimales por un número natural.

3º Algunos alumnos les resulta muy complicado realizar, en una misma tarea, dos actividades de diferente índole: obtener la notación decimal resultado de un reparto y multiplicar por potencias de 10 el resultado del reparto.

Día 31-1-2001 (Cuadragésimo séptima sesión con 5º A y cuadragésimo sexta con 5º B)
Plan previsto.
En el grupo 5º A:
1º. Recoger y evaluar la nº 49.
2º. Resolver y evaluar la nº 50.

En el grupo 5º B:
1º. Terminar de evaluar la tarea nº 47.
2º. Resolver y evaluar la nº 48.

Ejecución
A las 9 h. comienza la sesión de clase con el grupo 5º A. El profesor recoge la tarjeta de la ficha nº 49 y observa que bastantes alumnos (A13, A22, A28, A29, A32 y A40) no han resuelto el segundo problema de la ficha. Otros alumnos (A03, A05, A09, A16, A23 y A36) no han sabido resolver el problema. Destaca el caso de la alumna A09 que realiza bien el procedimiento de calculo, pero escribe en el cociente 3 + 3 = 3´3. El error de esta alumna se debe a una mala simbolización del proceso o bien a una deficiente comprensión del sistema de numeración decimal de naturales.

La alumna A05 sale a la pizarra y realiza el algoritmo de la división 500 : 15 que es equivalente a la división inicial. El profesor aprovecha para informar a los alumnos de la existencia de números con infinitas cifras decimales.

Después los alumnos resuelven la tarea nº 50. Algunos de los alumnos terminan pronto la tarea, a pesar de tener tres apartados, y unos pocos necesitan ayuda. El profesor propone un nuevo problema, que escribe en la pizarra, para que lo resuelvan estos alumnos aventajados.

Comienza la sesión de clase, a las 10 h., en el grupo 5º B. El profesor recoge la tarjeta de evaluación de las tareas nº 47 y observa que muy pocos alumnos (A06, A24, A27, A39 y A50) han traído resuelta la tarea.

El profesor toma la decisión de evaluar las dos problemas de la tarea nº 47, a pesar de que el primer problema se resolvió en la pizarra antes de finalizar la sesión del día anterior. Para volver a evaluar el primer problema sale a la pizarra la alumna A17 y la alumna A14 resuelve el segundo problema de la tarea nº 47.

La alumna A14 ha recibido enseñanza del algoritmo de la división de un decimal entre un natural y realiza el cálculo 0'375 : 5 sin modificar el dividendo. El profesor por coherencia con el procedimiento utilizado hasta este momento le recomienda encontrar otro reparto equivalente en el que no haya números decimales. La alumna escribe 375 : 5000 y realiza la división cometiendo algunas equivocaciones. Cabe preguntarnos cual de los dos procedimientos de cálculo resulta más sencillo a los alumnos: el que utiliza la alumna A14 o el que se les ha presentado a los alumnos.

Si analizamos el procedimiento de cálculo que utiliza la alumna A14 debemos pensar que procede del siguiente modo:

1º intenta repartir 0 unidades entre 5 personas, y afirma que no pueden recibir ninguna unidad.

2º transforma las 0 unidades en décimas y observa que tiene 3 décimas para repartir entre 5 personas y, en consecuencia, no puede dar ninguna décima.

3º transforma las 3 décimas en centésimas y observa que tiene 37 centésimas para repartir entre 5 personas, y da a cada persona 7 centésimas y le sobran 2 centésimas.
4º transforma las 2 centésimas en milésimas y observa que tiene 20 milésimas que, junto con las 5 milésimas, hacen 25 milésimas para repartir entre 5 personas, y da a cada persona 5 milésimas, y con ello concluye el reparto.

El procedimiento utilizado por la alumna, al igual que el enseñado, requiere un buena comprensión del sistema de numeración y de la idea de reparto. La única ventaja que presenta el algoritmo utilizado por la alumna es que las cantidades numéricas del dividendo y del divisor son menores. Sin embargo, nos hemos decantado por el otro procedimiento de cálculo porque:

1º deseamos anticiparnos a la estrategia que se utiliza cuando el dividendo y divisor son, a la vez, números decimales.

2º se pensaba aprovechar el conocimiento que los alumnos tienen del algoritmo de la división de naturales. Hasta el momento, algunos alumnos no han sabido relacionar los procedimientos de cálculo de repartos y el algoritmo de la división de naturales.

Después los alumnos han afrontado la resolución de la tarea nº 48. Bastantes alumnos han tenido dificultades para realizar el reparto "125 barras entre 10 personas". A los alumnos les resulta complejo realizar un reparto cuando hay más barras que personas; posiblemente tengan una escasa comprensión del sistema de numeración.

Antes de concluir la sesión de clase el alumno A02 solicita salir a la pizarra a realizar este reparto. Los alumnos reciben la consigna de terminar la tarea nº 48 y traerla resuelta a la siguiente sesión de clase.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Faltan a clase los alumnos A47 y A51 del grupo 5º A. Asisten a clase todos los alumnos del grupo 5º B.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos del grupo 5º A han tenido un rendimiento muy dispar en los dos problemas que han resuelto en la tarea nº 49. Todos los alumnos han sabido resolver el primer problema mientras que solo nueve alumnos han tenido éxito en el segundo problema. Este segundo problema tiene un mayor grado de dificultad que el primero debido a las cantidades que intervienen en el enunciado y no a la estructura semántica de los problemas que, en ambos casos, son del tipo agrupamiento. Pero, resulta sintomático que 9 alumnos no hayan aportado ninguna respuesta. Posiblemente algunos alumnos estén fatigados y les falte motivación y voluntad para afrontar el esfuerzo de resolver las tareas.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B cuando resuelven la tarea nº 47 muestran diferencias sustanciales en el nivel de comprensión del grupo. En esta tarea los alumnos deben realizar, por primera vez, dos divisiones cuyos dividendos son números decimales. Se esperaba que la simbolización del proceso de reparto, que ha sido enseñada a los alumnos, les permita resolver esta tarea. Diez alumnos (A01, A06, A08, A14, A15, A24, A27, A34, A39 y A50) han sabido utilizar correctamente este conocimiento, demostrando disponer de una buena comprensión del proceso de reparto. Por el contrario, siete alumnos (A02, A17, A18, A26, A38, A30 y A49) tienen un bajo nivel de comprensión.

Se observa que los alumnos de 5º B hay dos niveles de comprensión muy diferenciados. También han aparecido dos tipos de estrategias para realizar las divisiones. Así, doce alumnos (A02, A04, A06, A08, A12, A15, A18, A19, A25, A30, A49 y A52) han multiplicado el dividendo por potencias de 10 adecuadas para transformar éste número en natural y, después, han procedido con la simbolización del proceso del reparto. Mientras que ocho alumnos (A01, A14, A24, A27, A34, A38, A39 y A50) proceden directamente a realizar y simbolizar el proceso de reparto. Puede que estos últimos alumnos, que disponen de una buena comprensión, hayan recibido enseñanza previa de los algoritmos de la división de números decimales.

Apuntamos dos deficiencias que también fueron observadas en las respuestas dadas por los alumnos de 5º A en la tarea nº 47:

1º Los alumnos descuidan la simbolización del algoritmo del proceso de reparto, porque o no indica que el tamaño de las cantidades que va a repartir o bien no indica el tamaño de las partes que resulta del reparto.

2º Los alumnos no indican en la solución la unidad con que viene medida la cantidad de magnitud.

Toma de decisiones:
Las dificultades detectadas con el algoritmo de la división en los dos grupos y, en particular, en el grupo de 5º B recomiendan no realizar, en este grupo, la tarea 49 en la que los alumnos deben realizar divisiones cuyo divisor es un número decimal. Se propone evaluar la tarea nº 48, volver a realizar la tarea nº 43 en la que los alumnos habían tenido un rendimiento muy bajo y resolver la tarea nº 50.

Cuando en 6º curso de Educación Primaria se retome la experimentación deberemos incidir en la resolución de situaciones problemáticas en las que intervienen cantidades expresadas mediante la notación decimal y, en particular, la multiplicación y división de números decimales.

Día 2-2-2001 (Cuadragésimo séptima sesión en 5º B)
Plan previsto.
1º. Recoger y evaluar la tarea nº 48.
2º. Evaluar la tarea nº 43.
3º. Resolver y evaluar la nº 50.

Ejecución
Comienza la sesión de clase a las 9 h. y procedemos a realizar la evaluación conjunta de la tarea nº 48. Los alumnos A18 y A49 escriben en la pizarra la representación simbólica de los procesos de los repartos. El alumno A08 formula verbalmente la regla para obtener el resultado de un reparto en el que el número de participantes sea una potencia de 10, sin necesidad de realizar el reparto. Este alumnos desconoce la función de la regla porque considera que primero hay que dividir y después situar la coma.

El profesor propone evaluar la tarea nº 43 y formular la regla para multiplicar un número decimal por una potencia de 10. Esta regla es análoga a la que se acaba de enunciar para la división de números decimales por una potencia de 10. Se recordará que los alumnos de este grupo habían tenido un rendimiento bajo en esta tarea.

Los alumnos afrontan la tarea nº 50. Bastantes alumnos terminan con éxito los tres apartados de la tarea. Las dificultades han aparecido al resolver el último apartado porque los alumnos deben calcular la división 18 : 1´2 y, algunos alumnos, no utilizan la estrategia de multiplicar el dividendo y el divisor por 10 para obtener otra división equivalente cuyos términos sean números naturales.

Antes de concluir esta última sesión los alumnos reciben un cuadernillo que, a modo de libro de texto, explica la introducción del número decimal como resultado de un reparto; amplia el significado del decimal como resultado de una medida, y explica el significado y cálculo de algunas operaciones con números decimales.

Asistencia de alumnos
Falta a clase el alumno A06 del grupo 5º B.

Aspectos actitudinales
Los alumnos muestran buen comportamiento y buena disposición al trabajo en el aula.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo 5º B cuando resuelven la tarea nº 48 muestran que saben realizar repartos los repartos "125 barras entre 10 personas" y "125 barras entre 100 personas". Sin embargo, la mitad de los alumnos no han sabido realizar el reparto "125 barras entre 1000 personas". Los alumnos A02, A12, A18, A20, A38, A49 y A52 han tenido un rendimiento bajo.

Los alumnos han tenido dificultades para expresar la regla de la división de un número natural o decimal por potencias de 10. Solo una cuarta parte de los alumnos ha expresado correctamente la regla. Algunos alumnos no han entendido el objetivo de la enseñanza de esta regla y, como en el caso de la multiplicación (tareas nº 43 y 44), pretenden aplicar el algoritmo de la división y, a la vez, aplicar la regla. Por este motivo, pensamos que sería conveniente posponer la introducción de esta regla.

Toma de decisiones:
Ya hemos indicado con anterioridad la conveniencia de posponer la presentación de las reglas que permiten calcular la multiplicación y división de un decimal por potencias de 10 de modo que los alumnos resuelvan situaciones problemáticas por otros procedimientos de cálculo para que éstos valoren la economía que supone la utilización de estas reglas. En concreto, teniendo en cuenta el mayor grado de dificultad de las tareas nº 43 y 44, proponemos resolver previamente las tareas nº 45 y nº 46.

Concluye la Primera Etapa de la Experimentación y consideramos que se han cubierto los objetivos previstos. Recordamos ahora que la división de números decimales no es un objetivo de enseñanza en 5º curso y que este concepto y su procedimiento de cálculo deberá ser deberá ser retomado en 6º curso de Educación Primaria. Ya hemos indicado anteriormente que la justificación de los algoritmos de cálculo de las operaciones aritméticas con números decimales constituye un obstáculo didáctico ocasionado por su semejanza con los algoritmos de números naturales y, también, por el desconocimiento que poseen los alumnos de las propiedades que justifican los algoritmos de números naturales.

ANEXO II.3: DIARIO DE CLASE DEL PRIMER CICLO Y DE LA SEGUNDA ETAPA

Día 8-3-2004 (Primera sesión)

Plan previsto.

Abordar la resolución de la ficha de trabajo nº 1 y nº 2. La primera tarea plantea la siguiente situación problemática.

Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared (la longitud de la cortina mide 1/2 de la unidad). La longitud de la barra queréis que sea igual que la largura de la cortina. ¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda la barra de la cortina que tenga la longitud deseada?

La segunda tarea tiene el mismo formato. Ahora los alumnos deben medir una barra (listón de madera) de longitud 3/4 de unidad.

Ejecución

Los alumnos han resuelto en el aula las dos primeras tareas.

Cuando los alumnos intentar resolver la primera situación problemática, por parejas, tan solo tienen en sus manos el listón que tiene una longitud igual a la de la barra de la cortina que tienen que medir.

El profesor establece un debate: pregunta a los alumnos cómo pueden comunicarse con el vendedor. En concreto pregunta: ¿qué hay que hacer para resolver este problema?. Si no responden, pregunta: ¿se trata de un problema de medida? Plantea la pregunta: ¿qué es lo que debemos medir?. Recuerda que un listón tiene otras cualidades que se pueden medir además de la longitud, como la forma geométrica, la rigidez, color, etc.; pero ahora nos preocupa la magnitud longitud.

Después, el profesor vuelve a preguntar: ¿qué necesitamos para medir? Se espera que los alumnos mencionen la unidad de medida. ¿El vendedor también debe tener alguna unidad de medida?. Si los alumnos no indican que necesitan disponer de la misma unidad de medida, el profesor preguntará: ¿qué unidad de medida tiene que utilizar el vendedor?.

En este momento cada pareja de alumnos recibe dos unidades de longitud (la tira unidad) y se les dice que el vendedor dispone de la misma unidad de medida. También reciben un modelo de carta para que se comuniquen, por escrito, con el vendedor.

Dado que los alumnos poseen conocimientos informales de la fracción, afirman deben pedirle al vendedor “la mitad de la barra". En este caso, el profesor exige a estos alumnos que le digan al vendedor como se consigue hacer la mitad de la barra. Nos interesa observar si los alumnos utilizan la idea de PARTIR o FRACCIONAR la barra en DOS PARTES IGUALES.

El profesor espera que los alumnos aporten la idea de realizar FRACCIONAMIENTOS IGUALES DE LA UNIDAD. Algunos alumno perciben como necesario el fraccionamiento en partes iguales de la unidad. En cualquier caso, el profesor comenta que es necesario utilizar FRACCIONAMIENTOS IGUALES DE LA UNIDAD cuando el resultado de una medida no sea un número entero de unidades. En este caso, se utilizan las PARTES IGUALES DE LA UNIDAD para poder medir. Estas partes iguales las llamaremos SUBUNIDADES, y propone utilizar la tira de papel para FRACCIONAR LA UNIDAD EN DOS PARTES IGUALES. Los alumnos cortan una de las dos cañas en partes iguales.

Las dos partes iguales reciben el nombre de SUBUNIDAD DE LONGITUD 1/2 DE LA UNIDAD. Y se lee "un medio". El profesor indica el significado del numerador y del denominador.

Los alumnos escriben la carta al vendedor de cortinas, donde indican la medida de la cantidad de longitud de la barra.

Después, los alumnos pasan a medir el listón de madera que materializa la barra de cortina (de longitud 3/4 de unidad). Finalmente reciben una segunda carta y escriben al vendedor la longitud de la cortina que precisan.

Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos

Los alumnos se muestran motivados y dispuestos al trabajo en el aula. Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

La resolución de la primera tarea ayuda a resolver la segunda tarea. Ahora bien, cuando los alumnos abordan el problema de la medida de cantidades continuas se enfrentan con un obstáculo epistemológico , por lo tanto, ineludible: no intuyen la necesidad de realizar fraccionamiento en partes iguales de la unidad. Sin embargo, cuando lo sugiere el profesor éstos dan muestras de comprender la finalidad de la estrategia del fraccionamiento igualitario de la unidad.

Hemos observado que algunos alumnos si que reconocen, por sí mismos, la necesidad de que en los procesos de medida exista una unidad común para comunicar el resultado de la medida de la cantidad.

Cuando los alumnos escriben la medida de la cantidad de longitud no utilizan las representaciones simbólicas habituales de la fracción; en su lugar, se sirven de expresiones naturales como mide:

"media unidad y un cuarto de unidad", o

"tres cuartos de unidad"

Los alumnos no escriben la fracción 3/4 unidad porque desconocen este sistema de representación. Es el profesor el que debe introducir la notación fraccionaria al proponer que la medida se realice UTILIZANDO SUBUNIDADES DE UN SOLO TIPO, es este caso, de longitud 1/4 de unidad.

Valoración

Los alumnos no reconocen la acción de fraccionar o dividir la unidad de longitud en partes iguales para comunicar al vendedor la longitud de la barra de la cortina. Esta acción no aparece en el aula cuando los alumnos intentan resolver las tareas. En estas condiciones, debe ser el profesor el que indique la acción del fraccionamiento en partes iguales de la unidad.

Toma de decisiones

Se propone comenzar la segunda sesión realizando una evaluación conjunta de la ficha de trabajo nº 2 para introducir la notación fraccionaria como resultado de la medida de una cantidad de magnitud; fijar los términos de la fracción y sus significados conceptuales. Con esta intención los alumnos cumplimentarán la ficha de trabajo nº 3.

Día 10-3-2004 (Segunda sesión)

Plan previsto.

1º Resolver la ficha de trabajo nº 3.

2º Resolver la ficha de trabajo nº 4.

Ejecución

Se resuelve y evalúa la ficha de trabajo nº 3. La primera mitad de la sesión de clase se ha dedicado a evaluar la tarea nº 2 realizada en la sesión precedente. Los alumnos cumplimentan la tarjeta de evaluación de la tarea nº 3 que sirve para repasar las acciones realizadas para medir un listón de longitud 3/4 de unidad. Los alumnos reciben la siguiente tarjeta de evaluación nº 3:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 3. Fecha: ____________

ALUMNO/A:____

1º. Escribe la fracción que expresa la longitud del listón:

_____ **de unidad**

2º. Escribe como se lee la fracción: ______________________________

3º. Has fraccionado la unidad en _________ partes iguales.

4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción? ______________________________

5º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? ______________________________

En la evaluación conjunta de esta tarea, el profesor introduce la representación simbólica de la fracción, y los significados del numerador y del denominador:

La fracción se lee «tres cuartos», y se escribe $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{u}$ *, e indica que la longitud de la barra de cortina se cubre con TRES subunidades iguales de longitud* $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{u}$ *.*

El denominador, 4, indica que las subunidades son de longitud $1/4$ de unidad. Es decir, que las subunidades que cubren la longitud del objeto a medir se obtienen fraccionando la unidad en 4 partes iguales.

El numerador, 3, indica el número de subunidades que hay que colocar una a continuación de la otra para obtener una longitud igual a la de la barra a medir.

Después de proceder a la evaluación conjunta de la tarea el profesor presenta a los alumnos un dispositivo para fraccionar la tira unidad en partes iguales, que se denomina ***fraccionador***. En dos paredes del aula están colgados sendos fraccionadotes. El profesor indica que para realizar algunos fraccionamientos como medios, cuartos o tercios no es necesario utilizar este dispositivo que resulta más adecuado para fraccionamientos menores. Además, les indica cómo realizar el fraccionamiento e la unidad en tres partes iguales.

Seguidamente, propone a los alumnos la resolución de la ficha de trabajo nº 4 que exige medir la longitud de un listón de madera (4/3 de unidad). Cada alumno dispone de un listón, de dos tiras de longitud la unidad y de una tarjeta de evaluación, análoga a la de la ficha nº 3, para que escriban el resultado de la medida y los significados de los términos de la fracción.

Termina la sesión de clase. No ha dado tiempo para evaluar conjuntamente la ficha de trabajo nº 4.

<u>Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos</u>
Los alumnos se muestran motivados y dispuestos al trabajo en el aula. Asisten a clase todos los alumnos.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos dan muestras de comprender el proceso de medida. Se observa que los alumnos más aventajados interpretan el denominador la fracción como "el tamaño de las partes de la unidad con el que se consigue medir el listón" y solo un alumno, B10, que posiblemente ha recibido enseñanza en su hogar, menciona la expresión usual: " partes iguales en las que hemos fraccionado la unidad". Se trata de un indicio de buena comprensión por parte de los alumnos, porque asocian la idea de denominador con "la longitud de la subunidad que permite medir el listón".

A pesar de que la resolución de la tarea ha estado guiada por los profesores los alumnos dan muestras de comprensión porque todos los alumnos han sabido explicar correctamente el procedimiento de medida de la barra en la carta que han escrito al vendedor de barras de cortinas.

Después de que los alumnos reciben enseñanza de los significados de la fracción y de los términos de ésta, reciben la consigna de escribir estos significados en sus cuadernos para que los guarden de forma permanente y puedan ser utilizados en otras tareas posteriores. Esta modificación metodológica no se aplicó en la Primera Etapa y puede ayudarles a recordar a los alumnos los significados introducidos en el aula.

Los alumnos han ejercitado la técnica de fraccionamiento de la unidad en tres partes iguales. Cuando afrontan la medida del listón de longitud 4/3 de la unidad, la mayoría de los escolares sabe medirlo. En el trabajo realizado por los escolares observamos que:

1º La mayoría de los alumnos saben expresar con símbolos la fracción. Solo tres alumnos, B02 y B13 y B20 no dan la respuesta correcta.
2º Los alumnos saben leer la fracción.
3º La mayoría de los alumnos saben que han fraccionado la unidad en 3 partes iguales. Algunos alumnos piensan que han fraccionado la unidad en 4 partes iguales.
4º Los alumnos tienen dificultades para expresar correctamente los significados del denominador y numerador de la fracción.

<u>Valoración</u>
Los alumnos tienen un conocimiento inestable de la fracción como resultado de la medida de cantidades de longitud. Esto es razonable porque estamos en los momentos iniciales de la secuencia de enseñanza. Las mayores dificultades aparecen en el momento de expresar correctamente los significados del denominador y numerador de la fracción.

Toma de decisiones

Se propone comenzar la tercera sesión realizando una evaluación conjunta de la ficha de trabajo nº 4 para introducir la notación fraccionaria como resultado de la medida de una cantidad de magnitud; fijar los términos de la fracción y sus significados conceptuales. Y, después, continuar con las siguientes tareas de medida de cantidades de longitud.

Día 11-3-2004 (Tercera sesión)

Plan previsto.

1º Evaluar la ficha de trabajo nº 4.

2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 5.

Ejecución

Se procede a evaluar conjuntamente la ficha de evaluación nº 4, y se repasan las tareas precedentes:

Los alumnos escriben en sus cuadernos el significado de los términos de las fracciones que han aparecido en las tareas nº 1, 2, 3 y 4 como resultado de la medida de cantidades de longitud. El profesor escribe en la pizarra bajo el título de FRACCIONES el siguiente texto:

En la tarea nº 1 hemos medido un listón de longitud 1/2 de unidad. El denominador (2) indica que hemos fraccionado la unidad en 2 partes iguales. Y el numerador (1) indica que hemos tenido que colocar 1 subunidad para obtener una longitud igual a la de la barra a medir.

En la tarea nº 2 y nº 3 hemos medido un listón de longitud 3/4 de unidad. El denominador (4) indica que hemos fraccionado la unidad en 4 partes iguales. Y el numerador (3) indica que hemos tenido que colocar 3 subunidades, una a continuación de la otra, para obtener una longitud igual a la de la barra a medir.

En la tarea nº 4 hemos medido un listón de longitud 4/3 de unidad. El denominador (3) indica que hemos fraccionado la unidad en 3 partes iguales. Y el numerador (4) indica que hemos tenido que colocar 4 subunidades, una a continuación de la otra, para obtener una longitud igual a la de la barra a medir".

Después, los alumnos reciben la consigna de resolver la tarea nº 5 que exige medir un listón de madera de 5/4 de unidad. Cuando los alumnos cumplimentan la tarjeta de evaluación de la hoja nº 5, se procede a la evaluación conjunta de esta tarea.

Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos

Los alumnos se muestran motivados y dispuestos al trabajo en el aula. Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Todos los alumnos saben medir el listón de longitud 5/4 de unidad y además leen correctamente esta cantidad. Además, los dos tercios de los alumnos expresan de forma correcta el significado de la fracción y de sus términos. Se detecta una mejora en el rendimiento de los escolares en relación con la Primera Etapa Experimental, especialmente en la comprensión del significado de la fracción. Pensamos que el aumento en el rendimiento de los escolares para expresar el significado de los términos de la fracción se justifica por dos motivos:

1º Durante la secuencia de enseñanza los alumnos escriben en sus cuadernos el significado del numerador y del denominador de la fracción que ha aparecido como resultado de la medida de longitud que han realizado en las tres primeras tareas.

2º Los alumnos realizan sobre la tira de papel de longitud la unidad diferentes fraccionamientos hasta que encuentran el fraccionamiento adecuado. Esta forma de proceder permite relacionar la unidad con las subunidades obtenidas a partir de aquella.

Sin embargo, hemos observado que cuatro alumnos (B06, B07, B08, B13) tienden a confundir el número de veces que han fraccionado la unidad y el número de subunidades que han colocado para cubrir la longitud del listón. En efecto, después de medir el listón de longitud 5/4 de unidad cuando responden a la cuestión: "¿en cuántas partes iguales has fraccionado la unidad?, olvidan que han necesitado fraccionar la unidad en 4 partes iguales y contestan "cinco partes" porque ven 5 subunidades, colocadas una a continuación de la otra, cubriendo la longitud del listón. Esta situación es transitoria y corresponde a una fase inicial caracterizada por una comprensión inestable del sistema de representación fraccionario.

Valoración

Hemos introducido en esta nueva Etapa de la Experimentación tres nuevas variables:

1º Los alumnos utilizan tiras de papel en lugar de cañas previamente fraccionadas. De esta forma se consigue que los alumnos relacionen, en todo momento, las subunidades con la unidad de medida.

2º Aconsejamos que los alumnos afronten la búsqueda de la subunidad que resuelve el problema de la medida DE FORMA SISTEMÁTICA, es decir, que prueben con la unidad de longitud, después con 1/2 de unidad, con 1/3 de unidad, y así sucesivamente.

Esta estrategia de carácter general, junto con la utilización de tiras de papel que los alumnos deben fraccionar en cada tarea, facilita la medida de la cantidad aunque retrasa la aparición de fracciones equivalentes. No consideramos prioritario que aparezca, en las primeras tareas de medida, la equivalencia de fracciones porque, posteriormente, surgirá este concepto de manera natural.

3º Los alumnos copian en sus cuadernos los significados de los términos de la fracción después de haber cumplimentado la tarjeta de evaluación de la tarea.

Toma de decisiones
La secuencia de enseñanza funciona bien. En consecuencia, no se proponen modificaciones.

Día 15-3-2004 (Cuarta sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 5BIS.
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 6.

Ejecución
Se cumple con el plan previsto. Los alumnos resuelven las fichas de trabajo nº 5BIS y nº 6 que indagan por las medidas los listones de longitud 2u y $\frac{6}{5}$ u, respectivamente.

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase B12, B13 y B16.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos saben medir el listón de 2 unidades de longitud. Las respuestas más interesantes han aparecido cuando el profesor ha solicitado que expresen con una fracción esta cantidad de longitud. Algunos alumnos han propuesto, inicialmente, fracciones como 6/3 u, 4/2 u, 8/4 u y 16/8 u. Finalmente algunos alumnos han propuesto la fracción 2/1 de unidad. El profesor ha recordado el significado de los términos de la fracción. En este caso, el hecho de que el denominador sea 1 indica que no ha sido necesario realizar ningún fraccionamiento de la unidad; y que la longitud del listón se cubre con 2 unidades completas.

Cuando los alumnos abordan la resolución de la tarea nº 6 se ven obligados a realizar, por primera vez, fraccionamientos de la unidad en cinco partes iguales. Los alumnos se ayudan del “fraccionador” para fraccionar la unidad en cinco partes iguales.

Todos alumnos saben medir el listón de longitud 6/5 de unidad, y saben expresar oralmente el resultado de la medida. Todos los alumnos, salvo B01 y B02, saben expresar correctamente los significados del numerador y del denominador.

Valoración
Los alumnos saben encontrar la representación fraccionaria que expresa la medida de cantidades de longitud. Además, saben expresar correctamente los significados del numerador y del denominador. Se observa que la tasa de éxito referida a esta unidad de comprensión va aumentando conforme los alumnos van resolviendo nuevas tareas.

La tasa de éxito referida a la medida de la cantidad de longitud es muy alta Por el contrario, los alumnos tienen graves dificultades para expresar el significado que dotan al numerador y denominador de la fracción.

Toma de decisiones
La secuencia de enseñanza funciona bien. El Equipo Investigador decide suprimir las tareas de comunicación en las que un grupo de alumnos cortan un listón de madera para que compañeros de otro grupo midan el listón que, previamente, han construido los del primer grupo. En la Primera Etapa detectamos que la gestión de estas situaciones de comunicación resulta muy compleja, producen cansancio en los alumnos y no reportan los beneficios esperados porque apenas aparece el concepto de equivalencia de fracciones.

En su lugar, proponemos efectuar una nueva tarea de medida directa (ficha de trabajo nº 6BIS) y proponer la resolución de nuevas tareas cortas de evaluación semántica fracciones propias e impropias.

Día 16-3-2004 (Quinta sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 6BIS.

2º Introducir las tareas de evaluación semántica.

Ejecución

Se cumple con el plan previsto. Los alumnos resuelven las fichas de trabajo nº 6BIS que indaga por la longitud de un listón, de $\frac{5}{6}$ u.

En la segunda parte de la sesión los alumnos resuelven tareas inversas a las de medida directa; se trata de *tareas de evaluación semántica* que consisten en construir listones de una determinada longitud.

En la Primera Etapa Experimental utilizamos cañas de plástico de diferentes subunidades para materializar cantidades de magnitud. Dado que disponemos de este material proponemos utilizar cañas de plástico previamente fraccionadas, para que los alumnos, por parejas, construyan las siguientes cantidades:

a) la unidad, 2/2 u, 3/3 u, …..

b) 3/4 u

c) 3/2 u

d) 2/3 u, 4/6 u.

Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos

Faltan a clase la alumna B03. Los alumnos han seguido la clase con interés. En la segunda parte de la sesión se realizan tareas cortas de evaluación semántica, con la intención de que los alumnos construyan cantidades de determinada longitud. Los alumnos han participado en el debate suscitado cuando aparece la misma cantidad de longitud asociada a la equivalencia de fracciones.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los alumnos muestran una buena comprensión de la fracción como resultado de la medida de la cantidad longitud. Todo los alumnos del grupo saben medir la cantidad de longitud que posee el listón de la ficha de trabajo nº 6BIS. El 90% de los alumnos del grupo saben expresar el significado de la fracción y de sus términos, porque solo un alumno B13 yerra al dotar de significado a la fracción, a pesar de mide correctamente.

En cuanto a las tareas de evaluación semántica se observa que los alumnos dudan entre pedir subunidades obtenidas al fraccionar la unidad en tantas partes iguales como indica el denominador, o bien, según indica el numerador. Esta dificultad atañe directamente al significado del numerador y denominador de la fracción. Por este motivo parece oportuno incidir en los significados del numerador y del denominador de la fracción y proponer nuevas tareas de evaluación semántica.

Valoración

La modificación metodológica que consiste en utilizar, como unidad, tiras de papel en lugar de cañas de plástico se ha mostrado muy eficaz en la propuesta de enseñanza. Cuando los alumnos utilizan tiras de papel se en obligados a realizar, en cada acción de medida, fraccionamientos de la unidad. Estas acciones ayudan a que los alumnos perciban la relación entre el tamaño de la unidad y de las subunidades que construyen con la intención de medir. Sin embargo, esta relación se desvirtúa cuando los alumnos utilizan como subunidades cañas de plástico previamente fraccionadas. En consecuencia, esta modificación del material ha sido muy provechosa porque permite a los alumnos distinguir entre el fraccionamiento de la unidad (denominador) y el número de subunidades que cubren la longitud del listón (numerador).

Por otra parte, el planteamiento de tareas de evaluación semántica incrementa la comprensión de los alumnos y permite al Equipo Investigador detectar dificultades en algunos alumnos que han dudado al interpretar la representación simbólica de la fracción cuando éstos debían solicitar el tipo y la cantidad de subunidades.

Toma de decisiones

Se consideran alcanzados los objetivos vinculados a las tareas de medida directa de cantidades de longitud. Antes de pasar al modelo de aprendizaje de superficie nos proponemos realizar nuevas tareas de evaluación semántica de la fracción como medida de la cantidad de longitud.

Día 17-3-2004 (Sexta sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 7.

2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 8.

Ejecución

Se cumple la planificación prevista que consiste en resolver tareas cortas de evaluación semántica de fracciones propias e impropias. Se trata que los alumnos resuelvan las siguientes cuestiones de forma individual, sin recibir ayudas o influencias de sus compañeros. En la ficha de trabajo nº 7 se indaga por la construcción de un listón de longitud 5/3 u, y en la ficha nº 8 por la longitud 7/8 u. En esta Segunda Etapa se han introducido modificaciones en las Tarjetas de Evaluación. Mostramos a continuación las tarjetas de evaluación nº 7 y nº 8 que tiene un formato común:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 7

Quieres construir un listón de longitud $\frac{5}{3}$ de la unidad

¿En cuántas partes debes fraccionar la unidad? ______________________________

¿Cuántas subunidades necesitas? ______________________________

¿De qué longitud son las subunidades que necesitas? ______________________________

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 8

Quieres construir un listón de longitud $\frac{7}{8}$ de la unidad

¿En cuántas partes debes fraccionar la unidad? ______________________________

¿Cuántas subunidades necesitas? ______________________________

¿De qué longitud son las subunidades que necesitas? ______________________________

Asistencia de los alumnos

Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión

Las tareas de evaluación semántica de la fracción presentan a los alumnos mayores dificultades conceptuales que las tareas de medida directa de cantidades de magnitud longitud porque las primeras exigen del alumno realizar una interpretación de la representación simbólica de la fracción a través de un proceso mental sin la ayuda de un soporte físico concreto. En efecto, los alumnos inicialmente deben interpretar los términos de la fracción para resolver la tarea.

En las primeras tareas de evaluación semántica de la fracción, los alumnos interpretan con mayor dificultad las fracciones impropias que las fracciones propias. El 60% de los alumnos saben construir un listón de longitud 7/8 de unidad, mientras que el porcentaje de éxito baja hasta el 34% cuando el listón a construir viene dado por la fracción impropia 5/3 de unidad.

Valoración

En las tareas de medida directa, los alumnos sitúan en el mismo plano de dificultad la representación fraccionaria propia e impropia. Sin embargo, en las tareas de evaluación semántica los alumnos tienen más dificultades para dotar de significado a la fracción impropia que a la fracción propia. Parece razonable que la evaluación semántica de una fracción impropia sea una tarea más compleja que la de evaluar una fracción propia porque resulta obligado discriminar las unidades enteras y, después, proceder a la evaluación semántica de la fracción propia; sin embargo, los resultados hallados no aportan evidencias contundentes de este hecho.

Los alumnos obtienen un rendimiento muy alto en tareas de medida directa y, sin embargo, el rendimiento desciende cuando expresan los significados de los términos de la fracción. Se concluye que explicitar los significados del numerador y denominador de una fracción no es una tarea sencilla dado que los alumnos tienen que coordinar los tres objetos intervienen simultáneamente en los procesos de medida: la unidad, la subunidad que se construye y el objeto a medir.

En la Segunda Etapa se han introducido modificaciones metodológicas importantes que han posibilitado la obtención de mejores resultados que los alumnos de la Primera Etapa. En efecto, los alumnos de la Segunda Etapa han recibido enseñanza explícita de los significados del numerador y del denominador de la fracción de modo que tienen escrita esta información en sus cuadernos y pueden disponer de ella en el momento de resolver las tareas. Los alumnos de la Primera Etapa no disponían de esta información porque se deseaba que realizasen una interpretación personal del papel que juegan los términos de la fracción. En la Segunda Etapa, el profesor institucionaliza los significados del numerador y del denominador de la fracción al recoger y sintetizar las interpretaciones que realizan los escolares cuando resuelven las primeras tareas de medida.

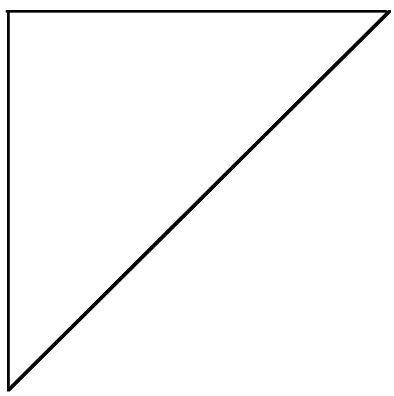
Otra modificación importante consiste en la supresión de las cañas de plástico y la introducción de tiras de papel para representar la unidad, de modo que se perciba con claridad la vinculación entre el tamaño de las subunidades obtenidas a fraccionar la unidad en partes iguales.

Toma de decisiones
El modelo de medida con la magnitud longitud ha funcionado bien en la propuesta de enseñanza porque los resultados obtenidos son aceptables: todos los alumnos saben expresar, con una fracción, el resultado de la medida de cantidades de longitud; dan muestras de comprender los significados del numerador y del denominador de la fracción; y un porcentaje superior al 50% saben construir la cantidad de longitud que viene expresada por una fracción. En consecuencia, proponemos continuar con la secuencia de enseñanza pasando a trabajar el modelo de aprendizaje de superficie.

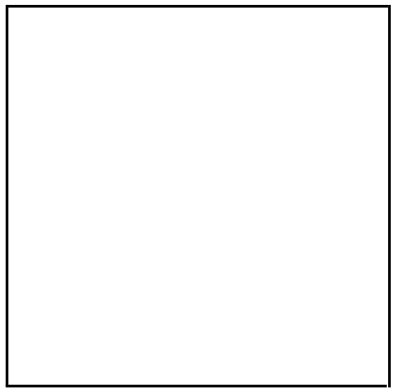
Día 18-3-2004 (Séptima sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 9.
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 10.
3º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 11.

Ejecución
Los alumnos comienzan a medir cantidades de superficie. La tarea nº 9 es un conjunto de actividades de medida de cantidades de superficie. Definida la unidad de superficie, los alumnos construyen manteles de superficie 1/2 u, 1/3 u, 1/4 u y 1/8 u.

En la primera parte el profesor coordina la resolución de la tarea nº 9 proponiendo actividades cortas de medida y de construcción de cantidades de superficie muy elementales. En la actividad 9.1 los alumnos reciben el siguiente mantel:



Y les pregunta a los alumnos cual es la superficie del mantel. Cada alumno recibe dos unidades de medida como las que se muestra a continuación:

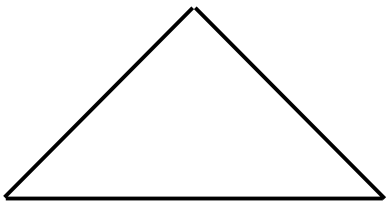


Los alumnos han resuelto con éxito esta primera actividad.

En la actividad 9.2 el profesor propone construir un mantel de superficie 1/2 unidad pero que tenga diferente forma que el anterior. Los alumnos doblan por la mitad la unidad de medida de forma rápida.

Después, el profesor propone comparar la superficie de los manteles construidos en las actividades 9.1 y 9.2. Los alumnos aportan diferentes formas de comparación y esto permite al profesor comentar que existen figuras que tienen diferente forma pero que tienen la misma cantidad de superficie.

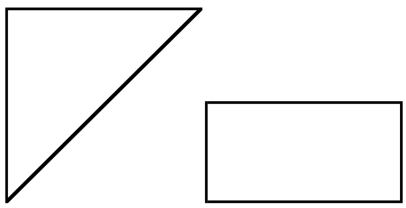
En la actividad 9.3, el profesor propone construir manteles de superficie 1/4 de unidad que tengan diferentes formas. La mayoría de los escolares propone inicialmente:



porque fraccionan el mantel de la actividad 9.1 en dos partes iguales.

Otros alumnos fraccionan la unidad partes iguales mediante ejes de simetría perpendiculares a los lados del cuadrado unidad. De esta forma obtienen un cuadrado de superficie 1/4 de unidad.
Ningún alumno ha construido un mantel de forma rectangular. Después de el profesor les recomienda que persistan en la búsqueda consiguen construirlo.

En la actividad 9.4 el profesor propone construir manteles de superficie 1/8 unidad que tengan diferente forma. Los alumnos construyen los siguientes manteles:



Todos los alumnos resuelven con éxito esta actividad.

En la actividad 9.5 el profesor propone construir manteles de superficie 1/3 unidad, e indica a los alumnos la forma de obtener esta cantidad de superficie mediante el plegado del papel que materializa la unidad. Los alumnos han necesitado ejercitar la técnica del fraccionamiento de la unidad en tres partes iguales.

En la actividad 9.6 los alumnos reciben unidades de superficie con la consigna de que construyan una cantidad de superficie de 1/6 de unidad. Para resolver esta tarea los alumnos han fraccionado la unidad en tres partes iguales y, después, han vuelto ha fraccionarlo en dos partes iguales. Finalmente, han evaluado esta cantidad de superficie al compararla con la unidad.

En la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de las fichas de trabajo nº 10 y nº 11. La ficha de trabajo nº 10 plantea medir un mantel de superficie 3/2 u. y, la ficha de trabajo nº 11 la de una cantidad de superficie de 15/2 unidad, que se corresponde con la cantidad de superficie de la mesa de trabajo de los alumnos.

Los alumnos saben medir la cantidad de superficie que indaga la ficha de trabajo nº 10. Los alumnos reciben un mantel rectangular, en soporte de papel, cuya superficie deben medir y, además, reciben dos unidades de superficie. Entre las soluciones de los alumnos aparecen diversas fracciones equivalentes como 6/4 u, 9/6 u y 12/8 u.

En la ficha de trabajo nº 11 los alumnos miden la superficie de la parte superior de su mesa de estudio, que mide 15/2 u. Los alumnos afirman, inicialmente, que la mesa mide "7 unidades y media". Cuando el profesor les sugiere que expresen la cantidad de superficie con una única subunidad los alumnos aportan la respuesta correcta.

<u>Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo. Los alumnos muestran buena disposición hacia el trabajo propuesto. Además, la realización de actividades cortas con un elevado porcentaje de éxito ha motivado a los alumnos.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Desde las primeras tareas de medida aparece profusamente el concepto de equivalencia de fracciones, que surge, de forma natural, cuando los alumnos utilizan diferentes fraccionamientos de la unidad. El hecho de que los alumnos construyan las subunidades con las que intentan completar el proceso de medida les ayuda a percibir la relación entre la cantidad de superficie de éstas y la de la unidad de medida y, en estas condiciones, aparecen con mayor facilidad ideas relativas a la equivalencia de fracciones.

<u>Valoración</u>
Las actividades de medida de cantidades de superficie mejoran la comprensión del sistema de representación fraccionario. Los alumnos se desenvuelven bien con el modelo de superficie. El conocimiento que tienen los alumnos de la fracción como resultado de la medida de cantidades de longitud favorece la realización correcta y rápida de tareas de medida de cantidades de superficie.

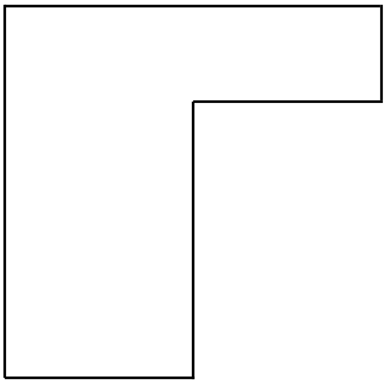
Día 22-3-2004 (Octava sesión)
<u>Plan previsto</u>
1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 12.
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 12BIS.

<u>Ejecución</u>
Se resuelve y evalúa la ficha de trabajo nº 12. Los alumnos reciben una cartulina cuadrada, de superficie 9/4*u*, y varias unidades de superficie. Además, reciben una tarjeta de evaluación para que respondan a las siguientes cuestiones:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 12
1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel:
——— de unidad
2º. Escribe como se lee la fracción: ____
3º. Has fraccionado la unidad en _____ partes iguales
4º ¿Qué indica el numerador de la fracción? ___________________________________
5º. ¿Qué indica el denominador de la fracción? __________________________________

Durante la evaluación conjunta de la ficha de trabajo nº 12, la alumna B16 que no ha sabido medir la superficie del mantel resuelve la tarea en la pizarra.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven uno de las actividades que plantea la ficha de trabajo nº 12BIS. Esta ficha propone varias actividades de medida de cantidades de superficie. Antes de que concluya esta sesión los alumnos miden un nuevo un mantel (de superficie 5/8 u) pero no cumplimentan la tarjeta de evaluación porque no se dispone de tiempo:



La evaluación de esta tarea se realizará al comienzo de la siguiente sesión.

Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos
Los alumnos del grupo están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Falta a clase B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
Después de que los alumnos resuelven la tarea propuesta en la ficha de trabajo nº 12 cumplimentan la tarjeta de evaluación en la que expresan el resultado de la medida y los significados del numerador y del denominador de la fracción. Los resultados se muestran en la tabla adjunta:

Respuesta	Medir	%	Lectura de la fracción	%	Fraccionamiento de la unidad	%	Sgdo numerador	%	Sgdo denominador	%
no contesta	0	*0*	0	*0*	0	*0*	3	*16*	3	*16*
errónea	1	*5*	0	*0*	5	*26*	3	*16*	0	*0*
correcta	18	*95*	19	*100*	14	*74*	13	*68*	16	*84*

Todos los alumnos, salvo B16, encuentran la fracción correcta 9/4 de unidad. Además, cuatro alumnos (B06, B07, B13 y B20) tienen un conocimiento inestable de la fracción que les lleva a decir, erróneamente, que han fraccionado la de la unidad en 9 partes iguales.

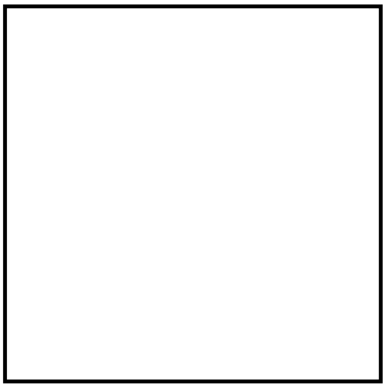
Los porcentajes de acierto referidos al significado del numerador y del denominador son altos e muestran una buena comprensión del significado de la fracción. Algunos de los errores detectados tienen que ver con dificultades de los alumnos para expresar por escrito sus ideas más que en aspectos conceptuales referidos a la fracción.

Las tareas de medida propician la aparición del concepto de equivalencia de fracciones. Dos alumnas (B12 y B18) aportan como solución la fracción 18/8 unidad.

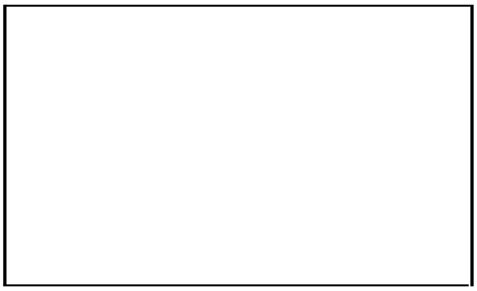
Toma de decisiones
Las dos primeras sesiones dedicadas al modelo de medida con la magnitud superficie resultan provechosas y no se observan problemas en la implementación de la fichas de trabajo. El Equipo de Investigación considera oportuno proponer nuevas tareas de medida de la magnitud superficie que exigen nuevos fraccionamientos de la unidad. Esta nuevas actividades de proponen en la ficha de trabajo nº 12BIS.

Día 23-3-2004 (Novena sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar las actividades de la ficha de trabajo nº 12BIS

Ejecución
Se resuelve y evalúa la ficha de trabajo nº 12BIS. En primer lugar, se procede a evaluar la actividad que propone medir la cantidad de superficie 5/8 u. Después, los alumnos reciben el encargo de medir nuevos manteles: de superficie 15/16 u, 2/3 u y 2 unidades, sabiendo que la unidad de superficie es:

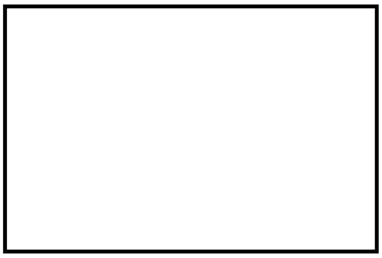


Todos los alumnos han sabido medir la cantidad de superficie del rectángulo (15/16*u*):

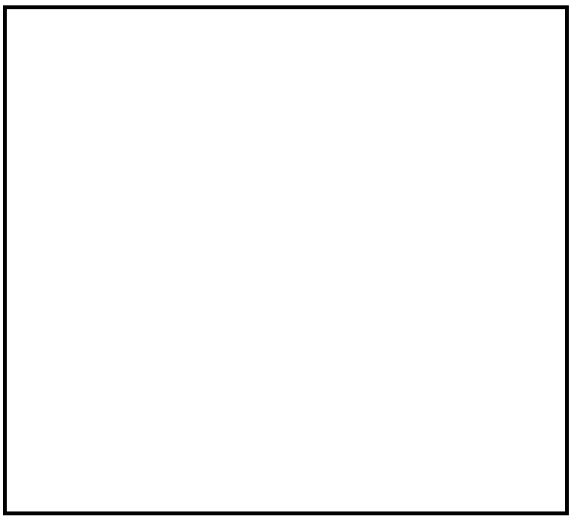


Cuando el profesor pregunta si los alumnos pueden expresar de otro modo diferente la fracción 15/16*u*, que expresa la medida de este mantel, algunos han aportado la solución 30/32*u*.

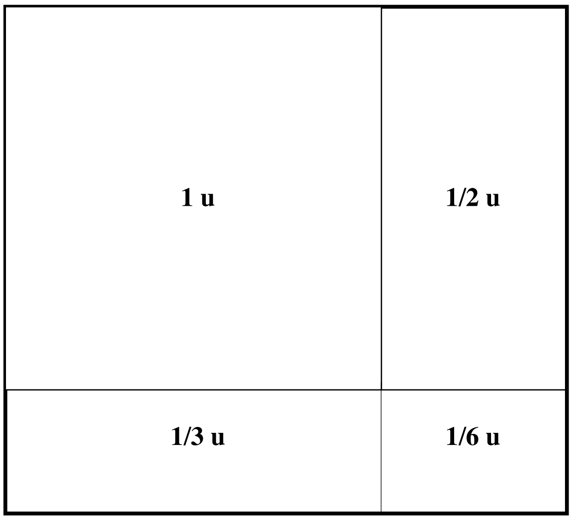
Después, los alumnos miden el siguiente mantel rectangular, de superficie 2/3 u:



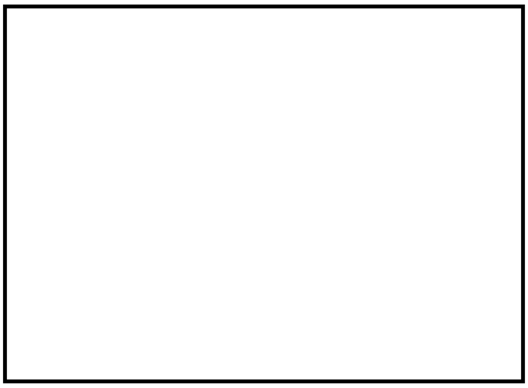
Finalmente, los alumnos miden el siguiente mantel rectangular:



La medida de esta cantidad de superficie exige realizar fraccionamientos de la unidad en 6 partes iguales, porque: 1 + 1/2 + 1/3 + 1/6 = 12/6 = 2 u.



Los alumnos reciben varias unidades de superficie con el encargo de que midan la cantidad de superficie del siguiente mantel, que posee una superficie de 11/8 u.



Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos
Los alumnos del grupo están motivados y tienen buena disposición al trabajo. La realización de actividades cortas con un elevado porcentaje de éxito ha motivado a los alumnos. Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
Cuando los alumnos resuelven las actividades de la tarea nº 12BIS no cumplimentan la tarjeta de evaluación. En este momento, interesa focalizar la atención del alumno en el proceso de medida y, en particular, en mejorar las destrezas del fraccionamiento en partes iguales de la unidad. Como pauta metodológica habitual, aunque todos los alumnos sepan medir el mantel, siempre sale a la pizarra un alumno que indica la estrategia que ha seguido para encontrar la subunidad con la que ha conseguido realizar la medida.

En general, los alumnos se muestran competentes en las tareas de medida de cantidades de superficie. El trabajo previo que han realizado desde el modelo de longitud contribuye a obtener buenos resultados en las tareas de medida con la magnitud superficie.

Toma de decisiones
La implementación de nuevas actividades de medida favorece la interacción de los alumnos y refuerza la técnica de medida; se trata de una opción muy adecuada. Se propone continuar con la secuencia de enseñanza prevista. Ahora bien, se decide proponer a los alumnos la Ficha de trabajo nº 15 antes que la nº 14. Ambas tareas tienen un formato común, y contienen actividades de medida y de evaluación semántica de la fracción; pero dado que la Ficha nº 14 trabaja la magnitud longitud y la Ficha nº 15 la magnitud superficie se decide comenzar con ésta última Ficha.

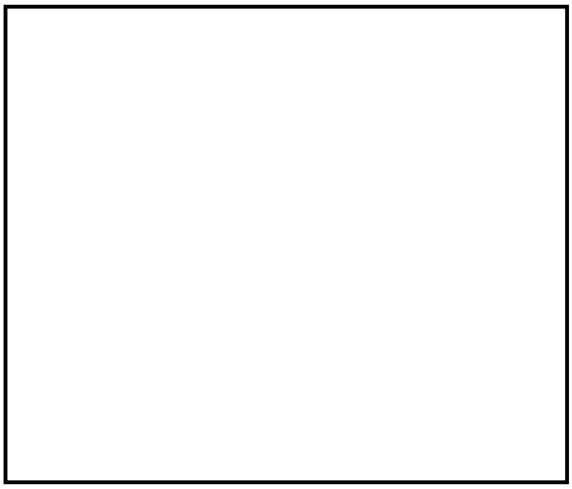
Día 26-3-2004 (Décima sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 13
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 15

Ejecución

Los alumnos reciben varias unidades de superficie, la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 13 y la siguiente cartulina rectangular con la consigna que medir la cantidad de superficie que posee (15/8 *u*):

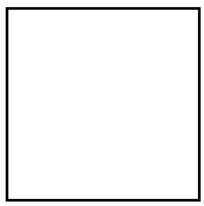


Cuando los alumnos entregan la tarjeta de evaluación, se procede a la evaluación conjunta de la Ficha nº 13. Con esta intención, sale a la pizarra la alumna B08 que no contesta a la cuestión referida al significado del denominador de la fracción que expresa el resultado de la medida.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 15. Esta ficha plantea dos actividades de medida y dos de evaluación semántica de la fracción. La novedad radica en que las actividades están formulada mediante un soporte gráfico: la unidad se representa gráficamente aunque los alumnos disponen de trozos de papel de la mima forma y cantidad de superficie que la unidad. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 15:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 15. FECHA: _______________

SI LA UNIDAD DE SUPERFICIE ES:



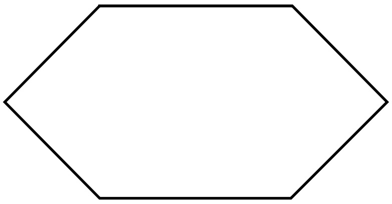
PRIMERA PREGUNTA:

EXPRESA, CON UNA FRACCIÓN, LA SUPERFICIE DE LA SIGUIENTE FIGURA:

SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES __________ DE LA UNIDAD.

SEGUNDA PREGUNTA:

EXPRESA, CON UNA FRACCIÓN, LA SUPERFICIE DE LA SIGUIENTE FIGURA:



SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES __________ DE LA UNIDAD.

TERCERA PREGUNTA:

Dibuja una figura cuya superficie sea $\frac{5}{4}$ de unidad.

Explica que has hecho para dibujar la figura: ______________________________

CUARTA PREGUNTA:

Dibuja una figura cuya superficie sea $\frac{4}{3}$ de unidad.

Explica que has hecho para dibujar la figura: ______________________________

Antes de concluir la sesión de clase, se les propone a los alumnos la tarea nº 16, que se les formula verbalmente y que consiste en construir “todos los manteles que puedan” y que cumplan las condiciones:

a) Tengan una superficie de 1/2 unidad
b) Tengan forma lo más regular posible (cuadrada o rectangular)

Los alumnos reciben varias unidades de superficie con la consigna de identifiquen la subunidad con la que construyen el mantel; y les propone que realicen esta tarea en sus casas.

<u>Asistencia de los alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Después de que los alumnos resuelven la tarea propuesta en la ficha de trabajo nº 13 cumplimentan la tarjeta de evaluación en la que expresan el resultado de la medida y los significados del numerador y del denominador de la fracción. Los alumnos obtienen buenos resultados que se muestran en la tabla adjunta:

Respuesta	Medir	%	Lectura de la fracción	%	Fraccionamiento de la unidad	%	Sgdo numerador	%	Sgdo denominador	%
no contesta	1	*5*	1	*5*	1	*5*	1	*5*	1	*5*
errónea	0	*0*	0	*0*	0	*0*	1	*5*	4	*20*
correcta	19	*95*	19	*95*	19	*95*	18	*90*	15	*75*

Los alumnos comprenden que la fracción expresa el resultado de la medida de cantidades de superficie y saben expresar por escrito los significados de los términos de la fracción. El porcentaje de respuestas correctas desciende en la última pregunta que indaga el significado del denominador de la fracción. Antes que a dificultades conceptuales, pensamos que el menor rendimiento de los alumnos en esta cuestión concreta se debe al cansancio de algunos alumnos que escriben con lentitud y desgana las respuestas. Uno de ellos, el alumno B20, se niega a responder por escrito a las preguntas que se formulan en la ficha.

La ficha de trabajo nº 15 introduce dos variables novedosas; de una parte, la presentación de la tarea es totalmente gráfica, incluida la presentación de la unidad de medida. Por otra parte, se ha modificado la cantidad de superficie de la unidad de medida que ahora pasa a tener menor cantidad de magnitud. Con estas modificaciones pretendemos que los alumnos utilicen representaciones gráficas y abandonen, gradualmente, el uso de materiales tangibles.

El uso de representaciones gráficas obliga a modificar el tamaño de la unidad. Este hecho pone de manifiesto el carácter arbitrario, pero a la vez fundamental, de la unidad de medida: los alumnos comprenden que lo importante son las acciones de fraccionamiento que realizan sobre la unidad de medida con independencia de la cantidad de magnitud que ésta posea. En estas nuevas condiciones, los alumnos saben medir y representar gráficamente cantidades de superficie que indaga la tarea nº 15

Los resultados de la tarea nº 15 indican que todos los alumnos del grupo saben medir la superficie de cantidades de magnitud 5/2 u y 6/4 u. En cuanto al rendimiento de los alumnos en las tareas de evaluación semántica, el 72% de los alumnos saben dibujar una figura de superficie 5/4 u, y el 67% de los alumnos saben dibujar una figura de superficie 4/3 u.

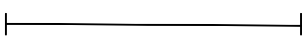
Valoración
Los porcentajes de éxito de los alumnos en tareas de evaluación semántica de la fracción como resultado de la medida de cantidades de magnitud superficie bajan con respecto a las tareas de medida directa lo que induce a pensar que las tareas de evaluación semántica son conceptualmente más complejas que las de medida directa.

Día 30-3-2004 (Undécima sesión)
Plan previsto
1º Evaluar la tarea nº 16 que consiste en construir figuras geométricas regulares que midan 1/2 unidad.
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 14

Ejecución
En la primera parte de la sesión los alumnos muestran manteles de superficie 1/2 unidad que han construido en sus casas. En esta tarea de construcción de cantidades de superficie aparecen múltiples soluciones, se ponen de manifiesto la equivalencia de fracciones; lo que favorece, en los alumnos, la comprensión del sistema de representación fraccionario.

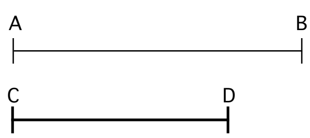
En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 14 en la que los alumnos deben medir y representan gráficamente cantidades de longitud utilizando otra unidad más pequeña que la que vienen usando habitualmente. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 14:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 14. FECHA: _______________

Si la unidad de longitud es: 

PRIMERA PREGUNTA

Expresa, con una fracción, la longitud del segmento que une los puntos C y D.

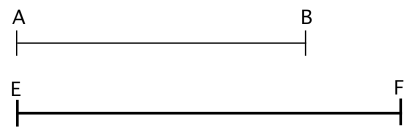


SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES _________ DE LA UNIDAD.

Explica que has hecho para medir: ____

SEGUNDA PREGUNTA

Expresa, con una fracción, la longitud del segmento que une los puntos E y F.

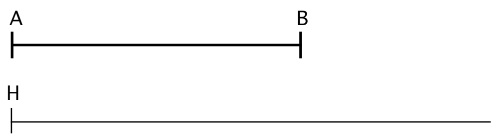


SOLUCIÓN: LA FRACCIÓN ES __________ DE LA UNIDAD.

Explica que has hecho para medir: ____

TERCERA PREGUNTA

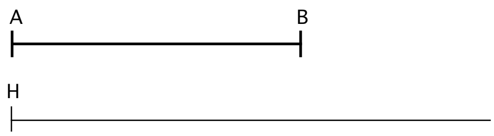
Dibuja, a partir del punto H, un segmento que mida una longitud de $\frac{5}{4}$ unidad.



Explica que has hecho para dibujar el segmento: ________________________________

CUARTA PREGUNTA

Dibuja, a partir del punto H, un segmento que mida una longitud de $\frac{4}{3}$ unidad.



Explica que has hecho para dibujar el segmento: ________________________________

<u>Aspectos actitudinales y asistencia de los alumnos</u>

Los alumnos están motivados y tienen buena disposición al trabajo. Los alumnos traen de sus casas "manteles", en soporte de papel, de superficie 1/2 unidad. Faltan a clase los alumnos B19 y B20.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>

Cuando los alumnos exponen los "manteles" que han construido e indican el tipo de subunidad utilizada, el profesor aprovecha para poner de manifiesto el concepto de equivalencia de fracciones. Esta tarea resulta especialmente adecuada para incidir en el concepto de equivalencia. Los alumnos han admitido con cierta naturalidad el hecho de que la misma cantidad de superficie tenga formas diferentes. Pensamos, por tanto, que el modelo superficie ofrece mayores posibilidades que el modelo longitud para asociar la fracción al resultado de la medida, por cuanto el alumno puede percibir que lo esencial de la medida es la cantidad y no la forma.

Los alumnos obtienen buenos resultados en la ficha de trabajo nº 14 que plantea dos actividades de medida directa y dos de evaluación semántica de fracciones impropias. Todos los alumnos del grupo saben medir las cantidades de longitud 3/4 *u* y 4/3 *u*. En cuanto al rendimiento de los alumnos en las tareas de evaluación semántica, el 67% de los alumnos saben dibujar segmentos de longitudes 5/4 *u*, y 4/3 *u*. Además los alumno dan explicaciones adecuadas de cómo han construido las cantidades de longitud. Por ejemplo, B13 escribe: "*Hice cuartos y me puse a medir hasta tener un segmento de cinco cuartos*". "*Hice tercios y me puse a medir hasta tener un segmento de cuatro tercios*"

Las tareas de evaluación semántica de la fracción presentan a los alumnos mayores dificultades conceptuales que las tareas de medida directa de cantidades de magnitud porque, inicialmente, los alumnos deben interpretar los términos de la fracción para resolver la tarea. Hay siete alumnos (B04, B05, B06, B08, B11,B14 y B16) que yerran en una o en las dos actividades de evaluación semántica de las fracciones $5/4u$ y $4/3u$.

Valoración

Los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación obtienen mejores resultados en las tareas de evaluación semántica que los alumnos de la Primera Etapa porque los alumnos de la Segunda Etapa han resuelto tareas de este tipo en un momento posterior de la secuencia de enseñanza. La experimentación de aula nos ha permitido constatar que existe transferencia de significados entre los modelos de medida de longitud y de superficie; que hace que los escolares mejoren su rendimiento conforme va avanzando la secuencia de enseñanza.

La inclusión de dos nuevas Fichas de Trabajo en la Segunda Etapa Experimental, donde las tareas de medida y de evaluación semántica se realizan sobre un soporte gráfico, han supuesto una mejora en el rendimiento de los alumnos de cuarto curso.

Las respuestas de los alumnos en las Fichas de evaluación semántica que se introducen en la Segunda Etapa ponen de manifiesto la conveniencia de utilizar representaciones gráficas porque:

a) favorecen la formación de ideas abstractas al enfatizar el carácter arbitrario de la unidad de medida, dado que en las tareas textuales ésta sufre cambia de tamaño, y

b) invitan al alumno a abandonar, de forma gradual, las acciones con objetos tangibles.

Toma de decisiones

La tarea nº 16 permite introducir, a partir de múltiples casos particulares, el concepto de equivalencia de fracciones. Después de haber procedido a la evaluación conjunta de esta tarea pensamos que los alumnos disponen de abundantes experiencias concretas para que conjeturen la relación existente entre el tamaño de la subunidad y el número de subunidades de una fracción que expresa la medida de una cantidad que permanece inalterable. En consecuencia, el Equipo Investigador decide suprimir la tarea nº 17 que tiene una formulación compleja y que obligó a dar demasiadas explicaciones a los alumnos de la Primera Etapa. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 17:

Encuentra TRES fracciones equivalentes a la fracción $\frac{6}{4}u$.

Indica cómo las has encontrado.

PRIMERA FRACCIÓN EQUIVALENTE:

Una fracción equivalente a $\frac{6}{4}$ de unidad es —— de unidad.

A) Si has utilizado materiales contesta las siguientes preguntas:

1. He construido un objeto de medida 6/4 de unidad.

   La unidad que utilizo es: ____________________

2. He medido el objeto utilizando subunidades de medida —— de unidad

B) Si has obtenido la fracción equivalente de otra forma, sin utilizar materiales, explica como lo has hecho: ____________________

En su lugar, se propone la resolución de la Ficha de trabajo nº 18 cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 18. FECHA: ____________

Inventa una regla para encontrar MUCHAS fracciones equivalentes a la fracción $\frac{1}{2}$

La regla que he inventado es correcta porque ____________________

Día 1-4-2004 (Duodécima sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 18
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 19

Ejecución
El profesor recuerda como en la sesión anterior los alumnos obtenían fracciones que se escribían de diferente modo pero que todas ellas tenían la misma cantidad de superficie, 1/2 unidad. El profeso institucionaliza el concepto de equivalencia de fracciones y los alumnos escriben en sus cuadernos:

Dos o más fracciones que se escriben de distinta forma pero expresan la medida de una misma cantidad se dicen que son fracciones equivalentes.

Ejemplo, las fracciones $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{4}$ *son equivalentes, y se escriben:* $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Después de que los alumnos escriben en sus cuadernos la definición de fracciones equivalentes, realizan la Ficha de trabajo nº 18 en la que se les pide que inventen una regla para encontrar muchas fracciones equivalentes a la fracción 1/2 unidad.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 19 cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 19. Fecha: ____________

Encuentra el numerador o el denominador de la fracción para que sean equivalentes las siguientes fracciones:

a)

$$\underset{\times\ 2}{\frac{1}{3} = \frac{\boxed{}}{6}}$$

b)

$$\overset{:\ 3}{\frac{3}{9} = \frac{1}{\boxed{}}}$$

c)

$$\frac{3}{2} = \frac{\boxed{}}{12}$$

d)

$$\frac{8}{12} = \frac{\boxed{}}{3}$$

Los alumnos escriben en sus cuadernos el enunciado de la regla: " Si multiplicas o divides el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número obtienes otra fracción equivalente".

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase los alumnos B19 y B20.

Aspectos relacionados con la comprensión
Para resolver la Ficha de trabajo la mayoría de los alumnos proceden duplicando el numerador y el denominador por un mismo número. La mayoría optan por multiplicar de forma reiterada por el número 2. Algunos admiten que el número que multiplica al numerador y al denominador puede ser cualquiera y no necesariamente el número 2. Ahora bien, hay alumnos que optan por estrategias aditivas e intentan obtener fracciones equivalentes sumando al numerador y al denominador un mismo número.

La tarea de conjeturar reglas de carácter simbólico excede las capacidades cognitivas de la mayoría de los alumnos de cuarto curso. Los profesores de aula han ayudado a los alumnos proponiéndoles que realicen nuevos fraccionamientos con una tira de papel de longitud 1/2 unidad. De esta forma los alumnos retoman el trabajo realizado con la magnitud superficie y están en condiciones de comprobar que una determinada cantidad de magnitud puede ser percibida de diferentes formas: como el doble, el triple, … de subunidades cuándo éstas son la mitad, la tercera parte, … más pequeñas que el tamaño de la subunidad de partida.

A pesar, de que la mitad de los alumnos no conjeturan la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada, entienden la regla cuando otros alumnos o el profesor la sugieren. Los alumnos de las comprenden el significado de equivalencia de fracciones porque saben encontrar fracciones equivalentes a una con la ayuda de material manipulativo. Los alumnos comprenden el significado de la equivalencia porque la secuencia de enseñanza implementada en cuarto curso contempla abundantes experiencias de búsqueda de fracciones equivalentes a una dada utilizando objetos que poseen cantidades de magnitud longitud y de superficie.

Los alumnos, incluso los que consiguen conjeturar la regla, se muestran reticentes a aportar argumentos sustentados en el modelo de aprendizaje. Por ejemplo, el alumno B10 que posee un nivel de comprensión alto, escribe la regla: “multiplica el numerador y denominador por el mismo número”; pero al explicar por qué la regla es correcta se apoya en igualdades simbólicas y evita los razonamientos sustentados en el modelo, cuando escribe:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4} \qquad \frac{1}{2}=\frac{3}{6} \qquad \frac{1}{2}=\frac{4}{8} \qquad \frac{1}{2}=\frac{5}{10}$$

Los alumnos recurren a la concisión y comodidad del lenguaje simbólico porque les resulta más complejo, utilizar el lenguaje natural, para argumentar sobre las acciones realizadas en el modelo de medida.

Los alumnos resuelven con aparente facilidad la ficha de trabajo nº 19 en la que deben encontrar fracciones equivalentes a unas dadas. Hay que tener en cuenta que dos de las actividades que se proponen llevan incorporadas indicaciones para facilitar la respuesta correcta de los alumnos. Sin embargo, estos buenos resultados no nos permiten conjeturar que éstos sean capaces de utilizar la equivalencia de fracciones para resolver problemas.

Valoración
Los alumnos conocen y saben aplicar la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada. La mayoría utiliza como estrategia la técnica de multiplicar el numerador y el denominador por 2, sin embargo pocos alumnos proponen multiplicar los términos de la fracción por otro número distinto de 2.

El hecho de que los alumnos sepan encontrar una fracción equivalente a una dada utilizando la técnica de multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número no debe hacernos pensar que los alumnos de cuarto curso tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones.

Toma de decisiones
En esta Segunda Etapa de la Experimentación se han introducido tres nuevas Fichas de trabajo: nº 19, 20 y 21 con el objetivo de que los alumnos refuercen la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada. Desde nuestro punto de vista, se trata de un tipo de trabajo simbólico que se sitúa al límite de las capacidades cognitivas de la mayoría de los alumnos de cuarto curso; sin embargo, deseamos indagar si la mejora de la técnica permite a los escolares tener operativo este concepto cuando tengan que comparar fracciones.

Mostramos, a continuación, las tarjetas de evaluación de las Fichas de trabajo: nº 20 y 21:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 20. Fecha: ____________

Encuentra el numerador o el denominador de la fracción para que sean equivalentes las siguientes fracciones:

a)

$$\frac{2}{5} = \frac{\square}{15}$$

b)

$$\frac{5}{10} = \frac{\square}{2}$$

c)

$$\frac{6}{4} = \frac{\square}{10}$$

d)

$$\frac{6}{4} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{10}$$

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 21. Fecha: ____________

Voy a escribir dos fracciones y tu debes encontrar fracciones equivalentes a las que he escrito pero que tengan el mismo denominador

a) $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$

d) $\frac{7}{5}$ $\frac{3}{2}$

e) $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{6}$

f) $\frac{13}{18}$ $\frac{3}{4}$

Día 2-4-2004 (Decimotercera sesión)

<u>Plan previsto</u>

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 20

2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 21

Ejecución
En la primera parte de la sesión los alumnos resuelven la tarea nº 20. Los alumnos tienen dificultades para resolver el último apartado de esta tarea porque tienen que encontrar una fracción equivalente a 6/4 que tenga de denominador 10. Tan solo cuatro alumnos son capaces de resolver esta actividad, sin recibir ayuda de los profesores. Después a la evaluación conjunta de la tarea y sale la pizarra el alumno B01 que ha mostrado escaso interés por resolverla.

Dado que los alumnos se muestran intranquilos e inseguros después de comprobado que no saben resolver el último apartado de la Ficha de trabajo nº 20, el profesor decide posponer la implementación de la Ficha de trabajo nº 21 y en su lugar se propone la resolución de la Ficha nº 22 que indaga la comprensión de los escolares referida a la comparación de fracciones con iguales denominadores, cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 22. Fecha _________

"Tengo dos servilletas: una de superficie $\frac{3}{4}$ y otra de superficie $\frac{7}{4}$.
¿Cuál de las dos servilletas tiene mayor superficie?"

SOLUCIÓN: ____

He realizado un dibujo.

☐ Con la ayuda de materiales
☐ Sin la ayuda de materiales

He utilizado símbolos o razonamientos:

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase los alumnos B17 y B19.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos gestionan con dificultad las representaciones simbólicas para obtener fracciones equivalentes a una dada. A pesar, de que en la Segunda Etapa, se ha aumentado el número de actividades de medida con diferentes fraccionamientos de la unidad, la gestión simbólica de la equivalencia resulta muy compleja para los alumnos de edades comprendidas entre los 9 y 10 años. En particular, ha resultado compleja la actividad c) de la Ficha de trabajo nº 20 porque la tarea exige primero simplificar las fracciones. El alumno B13 procede de modo inverso y primero amplifica y , después, simplifica:

$$\frac{6}{4} = \frac{30}{20} = \frac{15}{12}$$

Todos los alumnos del grupo saben comparar dos manteles de superficie $3/4u$ y $7/4u$, cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 22. En la siguiente tabla podemos observar las estrategias utilizadas por los alumnos:

Ficha de trabajo nº 22	Nº alumnos	Nº alumnos
Resuelven bien con gráficos y razonamientos	3	**12**
Resuelven bien con razonamientos	2	
Resuelven bien con gráficos	7	
Resuelven mal. Dibuja mal	3	**6**
Resuelven mal. Sin especificar	3	

Aunque todos los alumnos dan la respuesta correcta hay seis alumnos (B01, B02, B06, B07, B08 y B20) que no la justifican la respuesta o lo hace de modo incorrecto.

Por otra parte, han aparecido estrategias adecuadas basadas en el significado de medida de la fracción. Así, B12 escribe: “porque 3/4 es menor que una unidad y 7/4 es más que una unidad”; B15 escribe: “porque 3/4 le falta otro cuarto para tener una unidad y 7/4 le falta un cuarto para tener dos unidades”; y B10 escribe: “cada subunidad es de la misma longitud, ¼, pero en la de 7/4 hay más cantidad de subunidades”.

Valoración

Los buenos resultados del trabajo realizado por los alumnos en la Ficha de trabajo nº 22 de comparación de fracciones con el mismo denominador se explican por la facilidad de la tarea pero, también, por los aprendizajes realizados por éstos a lo largo de la secuencia de enseñanza. Los alumnos han utilizado razonamientos adecuados sustentados en el concepto de fracción. La estrategia basada en la realización de representaciones gráficas ha sido utilizada con éxito por más de la mitad de los alumnos del grupo, sin que éstos hayan recibido enseñanza previa sobre la utilización de esta estrategia.

Toma de decisiones

Continuar con la secuencia de enseñanza referida a la comparación de fracciones y proponer la resolución de la Ficha de trabajo nº 21 de búsqueda de fracciones equivalentes a dos dadas y que, además, tengan un mismo denominador.

Día 5-4-2004 (Decimocuarta sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 23

2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 21

Ejecución

En la primera parte de la sesión, los alumnos resuelven la tarea nº 23 en la que tienen que comparar listones cantidad de longitud $6/5u$ y $6/7u$, cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 23. Fecha _________

"Has cortado dos listones de madera. La longitud de uno de ellos es $\frac{6}{5}$ de unidad y la del otro $\frac{6}{7}$ de unidad. ¿Qué listón es más corto?"

SOLUCIÓN: ______________________________

He realizado un dibujo.

☐ Con la ayuda de materiales

☐ Sin la ayuda de materiales

He utilizado símbolos o razonamientos:

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 21 que propone encontrar fracciones equivalentes a dos fracciones dadas de manera que además las fracciones equivalentes tengan el mismo denominador. La mayoría de los alumnos no entienden la tarea; no saben cómo afrontarla ni tampoco entienden qué se pretende con la resolución de esta tarea. Los alumnos difícilmente van a entender la necesidad de esta tarea hasta que no intenten resolver la ficha de trabajo nº 24 que exige comparar fracciones que tienen distintos numeradores y denominadores. Para ayudar a los alumnos el profesor resuelve, en la pizarra, la primera de las actividades de esta tarea. Inmediatamente después los alumnos intentan resolver las siguientes actividades. Termina la sesión de clase y la mayoría de los alumnos no ha terminado la tarea. Los alumnos reciben el encargo de terminar la tarea como trabajo para casa.

Asistencia de los alumnos

Faltan a clase el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión

La Ficha de trabajo nº 23 que propone comparar fracciones que tienen el mismo numerador es más compleja que la de comparación de fracciones que tienen el mismo denominador. Sin embargo, los alumnos obtienen resultados aceptables en esta tarea. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

Tarea nº 23	Nº alumnos	Nº alumnos
Resuelven bien con gráficos y razonamientos	1	**12**
Resuelven bien con razonamientos	5	
Resuelven bien con gráficos	6	
Resuelven mal. Dibuja mal	3	**7**
Resuelven mal. Sin especificar	4	

Todos los alumnos aportan la respuesta correcta. Las dificultades aparecen en el momento de justificar sus respuestas. Siete alumnos (B03, B04, B06, B07, B16, B19 y B20) no la justifican de forma adecuada la respuesta. Cuatro de estos alumnos dan una justificación incompleta cuando escriben: "porque los séptimos son más cortos que los quintos" (B04, B06, B07 y B19), pero no indican que en ambas cantidades hay el mismo número de subunidades.

Los alumnos que justifican correctamente la respuesta utilizan preferentemente gráficos y razonamientos sustentados en el significado de fracción. Cabe destacar que, contrariamente a lo que ocurría en la Primera etapa, los alumnos ha seguido las recomendaciones de los profesores y han abandonado la estrategia basada en la utilización de materiales porque comprueban que otras estrategias como las representaciones gráficas o los razonamientos centrados acortan los tiempos de resolución de las tareas, dado que evitan el uso de materiales manipulativos.

También se detecta el progreso en la comprensión de algunos alumnos. Así, la alumna B11 que ha mostrado en otras tareas previas una comprensión inestable en esta Ficha aporta un razonamiento potente cuando escribe: El listón es más pequeño porque el de 6/7 no llega al de una unidad y el de 6/5 se pasa".

<u>Valoración</u>
Podemos concluir que los resultados obtenidos por los alumnos en la resolución de las Fichas de comparación de fracciones nº 21 y nº 23 son aceptables. Y lo que es más importante, observamos que, después de realizar la evaluación conjunta de una ficha, los alumnos resuelven mejor la siguiente ficha, a pesar de que presenta una mayor dificultad conceptual y, por lo tanto, se producen progresos observables en la secuencia de enseñanza.

Para resolver estas tareas la mayoría de los alumnos utiliza como estrategia la realización de representaciones gráficas y razonamientos sustentados en el significado de la fracción como medida. objetivo. Como era de esperar, los alumnos no disponen de un conocimiento conceptual de la noción de fracción equivalente, de modo que no son capaces de construir mentalmente fracciones equivalentes para resolver directamente las fichas de comparación de fracciones utilizando razonamientos. Este es un objetivo muy ambicioso y, los resultados muestran, que cae fuera de las capacidades mentales de la mayoría de los alumnos.

<u>Toma de decisiones</u>
En la siguiente sesión se trabajará la Ficha de trabajo nº 24 que exige comparar fracciones con diferentes numeradores y denominadores. Se procederá a evaluar la Ficha de trabajo nº 21 de búsqueda de fracciones equivalentes que los alumnos intentan resolver, sin éxito, en la sesión anterior.

Día 6-4-2004 (Decimoquinta sesión)
<u>Plan previsto</u>
1º Evaluar la ficha de trabajo nº 21
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 24

<u>Ejecución</u>
En la primera parte de la sesión se procede a la evaluación conjunta de la Ficha de trabajo nº 21.
En la segunda parte de la sesión los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 24 que propone comparar fracciones que poseen diferentes numeradores y denominadores, y cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 24. Fecha _________

Has comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de $\frac{5}{4}$ unidades y otra tiene una superficie de $\frac{4}{3}$ unidades. ¿Qué cartulina tiene menor superficie?

SOLUCIÓN: ____

He realizado un dibujo.

☐ Con la ayuda de materiales
☐ Sin la ayuda de materiales

He utilizado símbolos o razonamientos:

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
La ficha de trabajo nº 21 que plantea encontrar fracciones equivalentes a dos dadas y que tengan el mismo denominador resulta muy compleja a los escolares de cuarto curso. Los profesores de aula han dirigido el trabajo de los alumnos y han tenido que realizar indicaciones para que éstos puedan resolver las actividades que propone la tarea.

Los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación comprenden el significado de la comparación de fracciones que lo asocian a la comparación de cantidades de magnitud, porque obtienen porcentajes de éxito altos en las unidad de comprensión que indagan las argumentaciones utilizadas sobre el significado de la comparación de fracciones y las técnicas empleados para comparar las fracciones. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

Tarea nº 24	Nº alumnos	Nº alumnos
Resuelven bien con gráficos y razonamientos	4	**14**
Resuelven bien con razonamientos	7	
Resuelven bien con gráficos	4	
Resuelven mal. Dibuja mal	2	**5**
Resuelven mal. Sin especificar	3	

Del estudio de las estrategias que utilizan los alumnos al resolver esta tarea constatamos, como aspecto más relevante, que ninguno de los alumnos utiliza la equivalencia de fracciones para comparar las fracciones implicadas en la tarea. Los alumnos expresan ideas construidas sobre el modelo de medida utilizando alguna de las siguientes técnicas: construir las cantidades de magnitud a comparar, dibujar las cantidades y descomponer las cantidades de magnitud como suma de la unidad y una fracción unitaria. Estas estrategias las clasificamos en los siguientes tipos:

NI.- *No indica la estrategia*
M.- *Utilizando materiales*
G.- *Utilizando gráficos*
RM.- *Utilizando razonamientos basados en la idea de medida*
RE.- *Utilizando razonamientos basados en el concepto de equivalencia*

La siguiente tabla indica, en la primera fila, las estrategia utilizadas por los alumnos y, en la segunda fila, el éxito obtenido por los alumnos que utilizan una determinada estrategia:

	NI	**M**	**G**	**RM**
Estrategia utilizada	0 (**0**)	0 (**0**)	6 (**33**)	11 (**61**)
Éxito en la estrategia	-	-	4 (**66**)	10 (**90**)

Valoración
Los alumnos de cuarto curso asocian el orden entre fracciones con la comparación entre cantidades de magnitud. Los alumnos saben comparar fracciones que tienen diferentes numeradores y denominadores utilizando razonamientos construidos desde el modelo de medida: construir las cantidades de magnitud a comparar, dibujar las cantidades y descomponer las cantidades de magnitud como suma de la unidad y una fracción unitaria. Sin embargo, los alumnos no tienen operativo el concepto de equivalencia de fracciones porque no utilizan esta estrategia en las tareas de comparación de fracciones.

Las dificultades detectadas por los alumnos de cuarto curso al resolver la Ficha de trabajo nº 21 ponen de manifiesto las limitaciones de los alumnos para gestionar simbólicamente la equivalencia de fracciones. El concepto de equivalencia es básico para una buena comprensión del número racional porque sobre esta idea se fundamenta el cálculo simbólico con fracciones. Los objetivos referidos a la enseñanza de la equivalencia en cuarto curso se han alcanzado parcialmente porque los alumnos tienen dificultades para hacer operativo el significado de la equivalencia de fracciones en las tareas de ordenación de fracciones.

Toma de decisiones
La gestión simbólica de la equivalencia de fracciones es una habilidad que se sitúa en el límite de las capacidades cognitivas de los alumnos de curso curso. Por otra parte, la Primera Etapa de Experimentación

mostró que los alumnos, unos meses más tarde, eran capaces de gestionar con símbolos este concepto. En consecuencia, proponemos continuar con la secuencia de enseñanza y reforzar, en quinto curso, la operatividad de la equivalencia de fracciones.

En esta Segunda Etapa Experimental se han introducido modificaciones que afectan a la enseñanza de la equivalencia de fracciones; entre ellas destacamos las siguientes:

- se han propuesto un mayor número de experiencias con materiales tangibles para intentar que los alumnos conjeturen la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada; y
- se han introducido más actividades de búsqueda de fracciones equivalentes a una dada. A pesar de que los alumnos de cuarto curso resuelven estas tareas con la ayuda de los profesores, siguen sin tener operativo el concepto de equivalencia de fracciones.

Día 19-4-2004 (Decimosexta sesión)
Plan previsto
1º Repasar la técnica de comparación de fracciones; en particular, la la ficha de trabajo nº 24
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 25

Ejecución
Los alumnos se reincorporan a clase después de periodo de vacaciones correspondiente a Semana Santa. El profesor repasa la ficha de trabajo nº 24 que plantea comparar fracciones con diferentes numeradores y denominadores. Inmediatamente después los alumnos afrontan la resolución de la ficha de trabajo nº 25 que propone comparar la estatura de dos niños: uno mide 7/6 metros y otro mide 3/2 metros; y cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 25. Fecha _________

Un niño tiene una estatura de $\frac{7}{6}$ metros y una amiga mide $\frac{3}{2}$ metros. ¿Cuál de los dos niños es más alto?

SOLUCIÓN: ____

He realizado un dibujo.

☐ Con la ayuda de materiales
☐ Sin la ayuda de materiales

He utilizado símbolos o razonamientos:

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase los alumnos B02, B14 y B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos saben comparar fracciones que tienen diferentes numeradores y denominadores. Todos los alumnos, excepto B07 y B20, saben encontrar la fracción mayor. Sin embargo, el dato más significativo es que cuatro alumnos saben aplicar el concepto de equivalencia de fracciones para poder compararlas. Los cuatro alumnos optan por encontrar fracciones equivalentes de denominador 12:

$$\frac{7}{6}=\frac{14}{12}$$
$$\frac{3}{2}=\frac{18}{12}$$

Además, la mayoría de los alumnos sabe resolver la tarea utilizando razonamientos o realizando gráficos. Aquellos que realizan razonamientos se les pide que representen de forma gráfica las longitudes. Y a los que utilizan gráficos correctamente se les pide que encuentren fracciones equivalentes con el mismo denominador para poder comparar las cantidades de longitud. En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

Tarea nº 25	Nº alumnos	Nº alumnos
Utilizan fracciones equivalentes (B09, B10, B17, B18)	4	
Resuelven bien con razonamientos y con gráficos (B03, B05, B07, B11, B12, B19)	6	**13**
Resuelven bien utilizando solo gráficos (B08, B13, B16)	3	
Resuelven mal. Dibujan mal o reciben ayuda (B01, B04, B07, B20)	4	**4**

Valoración
Cuando a los alumnos de cuarto curso se les sugiere que utilicen el concepto de equivalencia para comparar fracciones cuatro alumnos saben gestionarla de forma simbólica. Los restantes alumnos saben comparar las fracciones utilizando razonamientos o gráficos pero no tienen operativo la equivalencia de fracciones. La gestión simbólica de este concepto es una habilidad que se sitúa en el límite de las capacidades cognitivas de los alumnos de cuarto curso.

Día 21-4-2004 (Decimoséptima sesión)
Plan previsto
1º Resolución de actividades de medida de cantidades de magnitud discretas
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 26

Ejecución
Comienza la propuesta de enseñanza de la fracción como medida de una cantidad discreta. Los alumnos realizan manipulaciones con cubos de madera y de plástico que meten en una bolsa de plástico.

En primer lugar, se considera como unidad de medida la bolsa que contiene 3 cubos de madera y 3 piezas de plástico. Los alumnos deben responder a la pregunta, ¿qué parte de la bolsa son los cubos de madera?

En la segunda actividad, se considera que la unidad es la bolsa que contiene 6 cubos de madera y 3 de plástico. En esta caso, se espera que los alumnos deben responder a la pregunta, ¿qué parte de la bolsa son los cubos de madera?

Finalmente, se considera como unidad la bolsa que contiene 8 cubos de madera y 4 de plástico. En esta caso, se espera que los alumnos deben responder a la pregunta, ¿qué parte de la bolsa son los cubos de madera?

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 26, cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 25. Fecha _________

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido 8 bombones. Expresa con una fracción la parte de bolsa que has comido.

Vas a resolver el problema de diferentes maneras:

La unidad es el número de bombones que hay en la bolsa.

1º Si fraccionas la unidad en 12 partes iguales, cada subunidad (es un bombón) es de medida $\frac{1}{12}$ de unidad.

SOLUCIÓN:

He comido $\frac{\quad}{\quad}$ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

2º Si fraccionas la unidad en 6 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 2 bombones) es de medida $\frac{1}{6}$ de la unidad.

SOLUCIÓN:

He comido $\frac{\quad}{\quad}$ de la cantidad de bombones que hay en la bolsa

3º Si fraccionas la unidad en 3 partes iguales, cada subunidad (es un grupo de 4 bombones) es de medida $\frac{1}{3}$ de la unidad.

SOLUCIÓN:

He comido ―― de la cantidad de bombones que hay en la bolsa.

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase el alumno B04.

Aspectos relacionados con la comprensión
La técnica de medida, con magnitudes discretas, se ha mostrado más compleja que en el caso de magnitudes continuas. Esto es debido a la naturaleza de la magnitud considerada: la unidad de medida está formada por un conjunto de objetos indistinguibles, cada uno de los cuales constituye la unidad básica en las actividades de recuento. Los alumnos disponen de policubos con los que representar los objetos de los enunciados de las tareas y, en estas condiciones, tienden a considerar el policubo como unidad de medida en lugar de la colección de policubos. En estas condiciones, los alumnos intentan resolver las tareas con números naturales y se reafirman en la idea de que con estos números sirven para resolver todos los problemas. El profesor ha tenido que realizar más intervenciones de las inicialmente previstas para familiarizar al alumno con la medida de magnitudes discretas. Los profesores han tenido que dirigir el trabajo de los escolares, porque los alumnos tienen dificultad para distinguir entre la unidad básica, el tamaño de cada subunidad y el fraccionamiento de la unidad.

No obstante, los alumnos saben expresar, con una fracción, la cantidad de una parte de una colección (unidad) formada por objetos discretos. Los datos de la Segunda Etapa de Experimentación muestran que todos los alumnos, salvo B08, resuelven correctamente la ficha de trabajo nº 26. Los alumnos utilizan correctamente la fracción para expresar la cardinalidad de una parte de la colección, si bien hay que tener en cuenta que algunos alumnos han recibido ayuda de otros compañeros.

Con la implementación de esta ficha de trabajo nº 26 se pretende que los alumnos adquieran el significado de la fracción como medida de la cardinalidad de una colección de objetos que se toma como unidad. Un segundo objetivo consiste en reforzar el significado del concepto de fracción equivalente cuando se realizan diferentes fraccionamientos de la unidad. Los resultados de esta primera tarea muestran una comprensión inestables de los alumnos referida a los dos objetivos descritos.

Toma de decisiones
En la siguiente sesión se va a proceder a resolver la ficha de trabajo nº 27 que tiene una estructura análoga a la ficha de trabajo nº 26. Ahora bien, se han realizado modificaciones en la tarjeta de valuación para que los alumnos escriban el significado del numerador y del denominador de la fracción. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 27. Fecha _________

Has comprado una caja que contiene 16 bombones. Has abierto la caja y has comido 12 bombones. Expresa, con una fracción, la parte de caja que has comido.

La unidad es el número de bombones que hay en la caja.

Vas a resolver el problema de diferentes maneras:

1º Si fraccionas la unidad en 16 partes iguales, la fracción que expresa la cantidad de bombones que hay en la caja es _______ de unidad.

El numerador significa ____

El denominador significa ____

2º Si fraccionas la unidad en 8 partes iguales, la fracción que expresa la cantidad de bombones que hay en la caja es _______ de unidad.

El numerador significa ____

El denominador significa ____

3º Si fraccionas la unidad en 4 partes iguales, la fracción que expresa la cantidad de bombones que hay en la caja es _______ de unidad.

El numerador significa ____

El denominador significa ____

Día 22-4-2004 (Decimoctava sesión)

Plan previsto

1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 27

2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 28

Ejecución

En la primera parte de la sesión los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 27 que indaga por el significado de la fracción como medida de la cardinalidad y que refuerza el significado de la equivalencia de fracciones al considerar como tamaño de las subunidades diversos divisores del cardinal de la unidad.

En la segunda parte de la sesión se procede a la evaluar, de modo conjunto, la ficha de trabajo. Salen a la pizarra los alumnos B01, B04, B09 y B11 que han errado al asignarle significado a los términos de la fracción.

Termina la sesión de clase y da tiempo para abordar la resolución de la ficha de trabajo nº 28; su resolución se pospone hasta la siguiente sesión de clase.

Asistencia de los alumnos

Faltan a clase los alumnos B07, B13 y B20.

Aspectos relacionados con la comprensión

Todos los alumnos del grupo saben expresar con la fracción la medida de la cardinalidad. Además, todos saben obtener fracciones equivalentes cuando la ficha de trabajo les obliga a considerar otros fraccionamientos igualitarios de la unidad. Los alumnos han mejorado la comprensión si se comparan estos resultados con los obtenidos en la ficha de trabajo nº 26.

Cuatro alumnos han tenido dificultades para expresar, por escrito, el significado de los términos de la fracción. Estas dificultades en la comprensión de la fracción aparecen como consecuencia de:

a) la escasa relevancia que conceden los alumnos a la unidad de medida (caja, paquete o bolsa de objetos) dado que la confunden con la unidad básica (el objeto)

b) la confusión entre el fraccionamiento de la unidad y el tamaño de las subunidades. Algunos alumnos optan por hacer grupos de tantos objetos como indica el denominador. Por ejemplo, el alumno B04 responde correctamente a la tercera pregunta de la Ficha porque afirma que 1/4 de la caja es la fracción que expresa la parte de caja que queda después de haber comido 12 de los 16 bombones que contenía inicialmente la caja. Sin embargo, cuando se le pregunta por el significado del numerador contesta de forma errónea:

“*que no me he comido 1 unidad*”

Valoración

Las dificultades que muestran algunos alumnos para dotar de significado a los términos de la fracción que expresa la medida de una colección de objetos, cuando el atributo que se considera es la cardinalidad, son de origen epistemológico y guardan una estrecha relación con las característica específicas de la medida de cantidades discretas.

El Equipo Investigador introduce dos restricciones en el momento de plantear las tareas de medida de cantidades discretas con la intención de facilitar la interpretación y la resolución de las tareas de medida, y que son:

1º sugerir fraccionamientos adecuados de la unidad de medida en los enunciados de las tareas, y

2º interrogar por el cardinal de una colección que es un subconjunto de otra colección cuyo cardinal es la unidad de medida.

Con la primera restricción, además de facilitar a los alumnos la resolución de la tarea, se pretende reforzar el significado de la equivalencia de fracciones. Con la segunda restricción la pregunta que se formula en la

tareas de medida admite una expresión más cercana a las propuestas tradicionales de enseñanza, más sencilla de entender y cuya expresión es: "¿Qué parte de la unidad es …?"
Queda por indagar, en futuras fases experimentales, los efectos que produciría implementar tareas de medida de cardinalidad no sometidas a la segunda restricción, y que admiten enunciados como el siguiente:

"Si las cajas de bombones tienen 12 bombones,
¿cuántas cajas puedes llenar con 16 bombones?"

Toma de decisiones
Como la sesión de clase ha concluido sin disponer de tiempo para resolver la ficha nº 28, ésta se realizará en la siguiente sesión. En la siguiente sesión va a proponer tarea de evaluación semántica de la fracción que expresa la medida de la cardinalidad.

Día 26-4-2004 (Décimo novena sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 28
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 29

Ejecución
En la primera parte de la sesión los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 28 que indaga si los alumnos encuentran el cardinal de una parte de la colección cuando disponen de dos datos: el cardinal de la colección y la fracción que expresa la medida del cardinal de una parte de la colección. Ahora bien, cuando los alumnos realizan esta Ficha de trabajo no conocen la regla para calcular la "fracción de una cantidad" y, por lo tanto, no deseamos evaluar este procedimiento; lo que queremos es indagar la comprensión que poseen los alumnos de la fracción como resultado de la medida de la cardinalidad cuando:

1º Construyen el cardinal de la colección cuya medida expresa la fracción, y
2º Argumentan sobre los significados del numerador y denominador de la fracción.

También estamos interesados en estudiar si los alumnos son capaces de conjeturar la regla para calcular la fracción de una cantidad. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 28:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 28. Fecha _________

PRIMER PROBLEMA

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{1}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?*

Solución: He comido ____

Explica como has obtenido la solución: ____

SEGUNDO PROBLEMA

Has comprado una bolsa que contiene 12 bombones. Has abierto la bolsa y has comido $\frac{3}{4}$ *de la cantidad de bombones que hay en la bolsa. ¿Cuántos bombones has comido?*

Solución: He comido ____

Explica como has obtenido la solución: ____

En la segunda parte de la sesión los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 29 que plantea una tarea de evaluación semántica de la fracción y que indaga por los significados de los términos de la fracción. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de esta ficha:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 29. Fecha _________

En mi clase estamos 25 alumnos en total entre niños y niñas. Si sabemos que los $\frac{4}{5}$ de los alumnos de la clase son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase? ¿Cuántos niños hay en la clase?

Solución: En la clase hay ________ niñas. En la clase hay ________ niños.

Explica como has obtenido la solución:____

Después de resolver el problema, contesta las preguntas:

1º ¿Cuál es la unidad de medida? ____

2º ¿Qué indica el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$?____

3º ¿Qué indica el numerador de la fracción $\frac{4}{5}$?____

Asistencia de los alumnos
Faltan a clase la alumna B14.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos comprender el significado de la fracción como medida de la cardinalidad porque saben interpretar correctamente las fracciones ¼ y ¾ en la ficha de trabajo nº 28. Tan solo cuatro alumnos (B02, B06, B08 y B20) no consiguen justificar correctamente su respuesta. Los restantes alumnos aportan respuestas valiosas y bien fundamentadas, cundo resuelven esta primera tarea de evaluación semántica de la fracción.

Los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación obtienen mejores resultados que los de la primera Etapa. Las modificaciones metodológicas introducidas en la Segunda Etapa explican la mejora de los resultados: mientras los alumnos de la Primera Etapa utilizan representaciones gráficas, los alumnos de la Segunda Etapa disponen, si lo desean, de policubos como material manipulativo para resolver las tareas de evaluación semántica. La mejora en la comprensión se debe a los cambios metodológicos introducidos, que se concretan, principalmente, en potenciar el uso de material manipulativo y evitar el abandono prematuro de estrategias cercanas al modelo.

El porcentaje de éxito en la Ficha de trabajo nº 29 es superior al 90%. Todos los alumnos saben calcular la fracción de una cantidad; y solo dos alumnos (B02 y B20) no saben explicar, adecuadamente, los significados del numerador y denominador de la fracción 4/5.

Los alumnos de la Segunda Etapa razonan a partir del significado de la fracción como resultado de la medida de la cardinalidad. Casi todos los alumnos aportan argumentos valiosos, como el de la alumna B12 que en la ficha nº 29 escribe:

He hecho grupos de 5 con 5 niños y e quitado 4 grupos que son las niñas osea 20 chicas y 5 chicos (sic)

A pesar de que los alumnos de la Segunda Etapa no reciben enseñanza de la regla para calcular “la fracción de una cantidad” éstos son capaces de resolver, con acierto, las tareas de evaluación semántica.

Valoración
Los alumnos comprenden el significado de la fracción como resultado de la medida de la cardinalidad y saben construir una cantidad de magnitud a partir del conocimiento de la fracción que se suele denominar “cálculo de la fracción de una cantidad”, a pesar de que no han recibido enseñanza de la regla para calcular la fracción de una cantidad.

Toma de decisiones
El Equipo Investigador propone introducir dos nuevas fichas de trabajo que no se han implementado en la Primera Etapa. La Ficha de trabajo nº 29BIS contiene dos actividades: una de medida directa de la

cardinalidad y otra de evaluación semántica de la fracción. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 29BIS:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 29BIS. Fecha ________

PRIMER PROBLEMA

Has comprado una caja de quesitos de porciones que contiene 24 quesitos. Si has comido 16 quesitos, ¿qué parte de la caja has comido?

Solución: He comido ____________________ de la caja.

Explica como has obtenido la solución: ____

SEGUNDO PROBLEMA

Has comprado una caja del CASERIO que contiene 24 quesitos. Si has comido los $\frac{5}{6}$ de la caja, ¿cuántos quesitos has comido?

Solución: He comido ____

Explica como has obtenido la solución: ____

La Ficha de trabajo nº 30 plantea cinco actividades de evaluación semántica de la fracción en un mismo contexto. Se propone esta tarea con una doble intención: detectar si los alumnos son capaces de conjeturar la regla para calcular "la fracción de una cantidad" y, además, reforzar la técnica de obtención de "la fracción de una cantidad" cuya regla desconocen. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 30:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 30. Fecha __________

Tienes una bolsa con 12 caramelos, y $\frac{1}{4}$ de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?

Solución: Hay ____

Tienes una bolsa con 16 caramelos, y $\frac{3}{4}$ de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?

Solución: Hay ____

Tienes una bolsa con 15 caramelos, y $\frac{3}{5}$ de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?

Solución: Hay ____

Tienes una bolsa con 21 caramelos, y $\frac{2}{3}$ de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?

Solución: Hay ____

Tienes una bolsa con 24 caramelos, y $\frac{6}{6}$ de los caramelos de la bolsa son de fresa. ¿Cuántas caramelos son de fresa?

Solución: Hay ____

Día 27-4-2004 (Vigésima sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 29BIS
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 30

Ejecución
Los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 29 BIS que hemos introducido por primera vez en este curso y que comprende dos problemas. En el primero los alumnos deben "medir" que parte de una caja que contiene 24 quesitos son 16 quesitos. En el segundo problema los alumnos realizan la tarea inversa que consiste en realizar una evaluación semántica de la fracción 5/6 dado que en el enunciado se indica que se han comido los 5/6 de una caja de 24 quesitos y se pregunta por el número de quesitos que se han comido.

Los alumnos tienen dificultades para resolver esta Ficha de trabajo; en particular, la primera tarea que es de medida y no de evaluación semántica, como la que habían resuelto en la sesión del día anterior les causa mayores dificultades conceptuales. Después de que los profesores reconducen el trabajo de los alumnos, éstos son capaces de resolver las tareas que propone la Ficha nº 29BIS.

Cuando los alumnos resuelven la Ficha se procede a su evaluación conjunta. Termina la sesión de clase y no queda tiempo para afrontar la resolución de la tarea nº 30. Se resolverá en la siguiente sesión de clase.

Asistencia de los alumnos
Falta a clase el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
En general, los alumnos se sienten desconcertados al abordar una tarea de medida cuando las tareas precedentes eran de evaluación semántica. Sin embargo, cuando lo profesores indican que se trata de una tarea de medida, los alumnos saben medir la cantidad discreta. En efecto, todos los alumnos, salvo dos (B05 y B07) obtienen la fracción que expresa la medida de la cardinalidad de la colección de quesitos.

Otro aspecto relevante de esta primera tarea de la Ficha nº 29BIS es la aparición de diversas fracciones equivalentes en las respuestas que aportan los alumnos. Así, en la siguiente tabla se muestran las fracciones que escriben los alumnos:

Fracciones equivalentes	Número de alumnos
4/6	10
8/12	4
2/3	2
16/24	2

La mayoría de los alumnos prefiere fraccionar la unidad en 6 partes iguales y, de esta forma, obtienen que han comido 4/6 de la caja. Este hecho, unido a la aparición de otras fracciones equivalentes, da muestras de una adecuada comprensión de la fracción y del papel que juegan los fraccionamientos igualitarios de la unidad.

Los alumnos reaccionan ante estímulos inmediatos. Así, cuando afrontan la segunda tarea de la Ficha nº 29BIS, algunos alumnos yerran y optan por expresar el número de quesitos que pregunta la tarea (5/6 de 24) mediante una fracción (B01 y B05). Otros cinco alumnos (B04, B06, B07, B14, B16) dan la respuesta correcta pero no la justifican o la justificación que aportan es inadecuada.

La mitad de los alumnos del grupo tienen un conocimiento inestable de la fracción como medida de la cardinalidad, a pesar de que disponen de ayudarse de material manipulativo para ayudarse en la resolución de las tareas. A los alumnos les resulta más complicado trabajar con la magnitud cardinalidad que con las magnitudes continuas de longitud y de superficie.

El 30% de los alumnos del grupo tiene una excelente comprensión de la fracción como medida de la cardinalidad porque son capaces de conjeturar la regla para calcular la "fracción de una cantidad" sin recibir la ayuda de los profesores. Los alumnos afrontan la segunda tarea de la Ficha nº 29BIS sin que conozcan la regla para calcular la "fracción de una cantidad". Cuando al final de la sesión se procede a la evaluación conjunta de la tarea, detectamos que siete alumnos (B03, B09, B10, B11, B13, B17 y B18) saben conjeturar la regla de obtención de la "fracción de una cantidad".

Valoración
Los datos obtenidos en la Ficha de trabajo nº 29BIS muestran que los alumnos interpretan la fracción con más dificultad en el modelo de la cardinalidad que en los modelos de magnitudes continuas porque tienen dificultades para identificar y discriminar las tarea de medida directa de las tareas de evaluación semántica de la fracción.

Entre los alumnos del grupo de clase se observan dos niveles de comprensión muy diferente: mientras que la mitad del grupo tiene un conocimiento inestable de la fracción, el otro medio grupo es capaz de conjeturar la regla para calcular la "fracción de una cantidad".

Toma de decisiones
Los resultados obtenidos en la segunda tarea de la Ficha de trabajo nº 29 BIS recomiendan reforzar la técnica de obtención de la "fracción de una cantidad" y, en consecuencia, plantear la resolución de las últimas fichas de trabajo (nº 30 y nº 31) de este Ciclo Experimental.

Día 28-4-2004 (Vigésimo primera sesión)
Plan previsto
1º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 30
2º Resolver y evaluar la ficha de trabajo nº 31

Ejecución
En la primera parte de la sesión los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 30 con la que se pretende que éstos conjeturen la regla para calcular la "fracción de una cantidad".

Después de que se procede a la evaluación conjunta de esta ficha de trabajo, se procede a resolver la ficha de trabajo nº 31 que obliga a utilizar, de forma simbólica, la regla para calcular la "fracción de una cantidad" porque la unidad es una cantidad grande. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 31:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 31. Fecha __________

Tienes una bolsa con 245 canicas, y das a un amigo $\frac{3}{7}$ de las canicas. ¿Cuántas canicas le has dado?

Solución: Le has dado __________ canicas.

Explica como has obtenido la solución: ____

Después de resolver el problema, contesta las preguntas:

1º ¿Cuál es la unidad de medida? ____

2º ¿Qué indica el denominador de la fracción $\frac{3}{7}$? ____

3º ¿Qué indica el numerador de la fracción $\frac{3}{7}$? ____

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos del grupo saben resolver la ficha de trabajo nº 30. Además de resolver correctamente la tarea, nueve alumnos (B03, B06, B09, B10, B12, B13, B15, B17 y B18) saben conjeturar la regla de obtención de la "fracción de una cantidad". Después, en el momento de proceder a la evaluación conjunta de la tarea los profesores introducen la regla.

Los alumnos que no conjeturan la regla saben obtener la solución correcta de la tarea utilizando el significado de la fracción como medida y utilizando material manipulativo, en algunos casos. Los alumnos que poseen un mayor nivel de comprensión eluden el uso de materiales tangibles y se centran en el cálculo simbólico. Así, por ejemplo, la alumna B12 cuando resuelve la última tarea de la Ficha nº 30 escribe:

$$24 : 6 = 4 \qquad 4x\ 6 = 24$$

La cantidad que aparece en la enunciado de la Ficha de trabajo nº 31, 245 canicas, impide a los escolares utilizar material tangible. En estas condiciones, se desea evaluar la capacidad de los alumnos para calcular la fracción de una cantidad mediante procedimientos simbólicos. Además, dado que la tarjeta de evaluación de la ficha indaga por los significados de la fracción la resolución de la ficha aporta información sobre la comprensión de los alumnos.

Los alumnos obtienen resultados aceptables en la Ficha de trabajo nº 31: 14 alumnos (B01, B02, B03, B05, B09, B10, B12, B13, B14, B15, B17, B18, B19 y B20) que constituyen el 70% de los alumnos del grupo aplican correctamente la regla para calcular la fracción de una cantidad. Además, todos estos alumnos interpretan de forma adecuada la unidad, el numerador y el denominador de la fracción.

Valoración

El 30% de los alumnos de cuarto curso de la Segunda Etapa de Experimentación son capaces de conjeturar la regla para calcular "la fracción de una cantidad". Este hecho constituye una potencialidad de la propuesta de enseñanza porque se comprueba que los alumnos de edades tempranas pueden "adelantarse" y conjeturar determinados resultados matemáticos que están expresados con notaciones simbólicas.

Se han cubierto los objetivos que nos habíamos planteado con la enseñanza de la fracción como medida de la cardinalidad. A pesar de que este modelo plantea mayores dificultades conceptuales que los de las magnitudes continuas dado que no pertenece a la fenomenología histórica de la fracción; sin embargo, el hecho de introducirlo en un momento posterior de la secuencia de enseñanza permite reforzar el trabajo realizado desde los modelos de magnitudes continuas. En efecto, si observamos los resultados de esta última ficha de trabajo podemos comprobar que un 70% sabe escribir los significados de los términos de la fracción y, además, lo hacen de forma mucho más precisa a como lo hacían en las fichas de trabajo formuladas desde los modelos de longitud o de superficie. Sin duda, constatamos una mejoría en la capacidad de expresión de algunos alumnos conforme se ha ido desarrollando la secuencia de enseñanza, de modo que en ellos se percibe un progreso en la conceptualización de la fracción como resultado de una medida de cantidad de magnitud.

Toma de decisiones

Concluye la secuencia de enseñanza correspondiente al primer Ciclo de la Segunda Etapa Experimental. El Equipo Investigador recomienda a la profesora tutora del grupo que propongan a los alumnos, en otros momentos de período lectivo, algunas tareas similares a las de la Propuesta Didáctica para consolidar los aprendizajes realizados por los escolares.

ANEXO II.4: DIARIO DE CLASE DEL SEGUNDO CICLO Y DE LA SEGUNDA ETAPA

Día 18-11-2004 (Primera sesión)

Plan previsto.

Se prevé dedicar las tres primera sesiones a repasar el significado de fracción con significado de medida y, en particular, el concepto de equivalencia de fracciones. En estas sesiones los alumnos van a resolver las fichas de trabajo que denominamos tareas previas nº 1 a nº 6. En esta primera sesión se pretende recordar el significado de la fracción como medida, y resolver y evaluar la tareas previa nº 1.

Ejecución

La tarea previa nº 1 propone medir la cantidad de longitud de un listón de madera (3/4 de unidad). En primer lugar, comprueban que la longitud del listón es menor que la unidad. Después prueban a medir el listón con subunidades de longitud 1/2 unidad. Con la ayuda de una tira de papel de la misma longitud que la unidad los alumnos intentan medir el listón con subunidades de longitud 1/3 u. y 1/4 u. Después de que comprueban que la medida del listón es 3/4 unidad, el profesor propone que vuelvan a medir el listón con subunidades de longitud 1/8 unidad y el profesor plantea las siguientes cuestiones:

Pregunta 1: "Expresa de dos formas diferentes la longitud de los dos trenes que has construido"

Pregunta 2: "¿Por qué son equivalentes las fracciones que has escrito?"

Pregunta 3: "¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a las fracciones que has escrito?. Explica cómo la has obtenido."

Bastantes alumnos adelantan el resultado antes de proceder manipulando con las subunidades e indican que mide 6/8 de unidad. Cuando el profesor les pide explicar porque las fracciones 3/4 u y 6/8 u que se escriben de diferente manera tienen la misma longitud de un listón, los alumnos tienen a dar justificaciones de tipo operatorio (multiplicar el numerador y denominador por dos) y eluden explicaciones basadas en el modelo. Los alumnos argumentan en base a las acciones realizadas con el material y aportan justificaciones del siguiente tipo:

“Las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ son equivalentes porque como $\frac{1}{8}$ es la MITAD de $\frac{1}{4}$, cuando medimos con octavos necesitamos el DOBLE de estas subunidades que de cuartos para cubrir la longitud del listón”

Los escolares han escrito en sus cuadernos este razonamiento y, además, el siguiente gráfico:

$$\overset{\times 2}{\frac{3}{4} = \frac{6}{8}}_{\times 2}$$

Después los escolares miden el listón utilizando subunidades de longitud 1/12 u. y se procede de forma análoga como en el caso de la medida con subunidades de longitud 1/8 de unidad. Los escolares razonan la equivalencia de $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{12}$ en términos del modelo y el profesor escribe en la pizarra:

$$\overset{\times 3}{\frac{3}{4} = \frac{9}{12}}_{\times 3}$$

Los escolares escriben en su cuaderno esta nueva equivalencia y afrontan la resolución de la tarea previa nº 2.

Mostramos el enunciado de la tarea previa nº 2:

"Debes construir con las cañas, un listón de longitud 2/3 de la tira unidad. Sin deshacer el listón que has hecho, construye un listón de la misma longitud utilizando subunidades de 1/6 de la tira unidad"

Pregunta 1:
"Expresa con otra fracción diferente la longitud del listón que has construido"

Pregunta 2:

"¿Por qué la fracción que has escrito es equivalente a $\frac{2}{3}$ *?"*

Pregunta 3:

"¿Sabrías encontrar otra fracción equivalente a la fracción $\frac{2}{3}$ *?*

Explica cómo la has obtenido"

Para resolver esta tarea los alumnos disponen de material manipulativo. En primer lugar el profesor se asegura de que los escolares comprenden el significado de la fracción 2/3 u. como medida. Algunos alumnos confunden el significado de los términos de la fracción.

En la pregunta nº 1, cuando utilizan subunidades de longitud 1/6 de unidad, la mayoría de los alumnos adelantan el resultado de la fracción equivalente a 2/3 sin necesidad de emplear material manipulativo.

En la pregunta nº 2 los alumnos deben justificar la equivalencia de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$. La mayoría de los escolares aportan respuestas que eluden la justificación cuando afirman "porque tienen la misma longitud"; o bien, dan justificaciones basadas en cálculos operatorios cuando explican: "porque se multiplica el numerador y denominador por dos".

Muy pocos alumnos aportan justificaciones basadas en las acciones efectuadas sobre el modelo. El profesor les ayuda y solicita que escriban la respuesta que aporta algún alumno como:

"*Son equivalentes porque si los sextos son la MITAD de los tercios se necesitan el DOBLE de sextos que de tercios para completar la misma cantidad de longitud*"

En la pregunta nº 3 de la tarea previa nº 2 los alumnos encuentran con facilidad fracciones equivalentes a 2/3 u, porque proponen volver a medir la cantidad de longitud con subunidades de longitud 1/9 u, 1/12 u, 1/15 u, 1/18 u, …

Aspectos actitucionales
Los alumnos del grupo se muestran motivados y con gran disposición al trabajo.

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Variaciones entre los alumnos que participan en la experimentación del Primer y Segundo Ciclo
En esta Segunda Etapa de la Experimentación se mantiene la misma asignación de códigos a los alumnos que han participado en la experimentación de tercer y cuarto curso de Educación Primaria. Los 20 alumnos que participaron en los cursos anteriores permanecen 18 alumnos en el grupo de 5º curso, y los identificamos con los códigos B00 a B18; porque un alumno (B19) abandona el Colegio al comenzar 5º curso y otro alumno (B20) repite 4º curso de Educación Primaria.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos comprenden el significado de equivalencia de fracciones porque saben encontrar fracciones equivalentes a una con la ayuda de material manipulativo. Todos los alumnos del grupo, excepto B02, saben encontrar fracciones equivalentes a la que plantea la tarea previa nº 1. Este resultado era previsible porque la secuencia de enseñanza implementada en cuarto curso contempla abundantes experiencias de búsqueda de fracciones equivalentes a una dada utilizando objetos que poseen cantidades de magnitud longitud y de superficie.

Sin embargo, los alumnos tienen dificultades para justificar, desde el modelo de aprendizaje, por qué la fracción que han encontrado es equivalente. La mayoría de los alumnos aportan argumentos basados en la regla de obtención de fracciones equivalentes de este tipo:

"Porque multiplicando el numerador y el denominador por un mismo número sale una fracción equivalente" (B13)

Los alumnos se muestran reticentes a realizar argumentaciones basadas en el modelo de medida y, por lo tanto, optan por enunciar la regla de obtención de fracciones equivalentes.

Valoración

Los alumnos saben construir fracciones equivalentes a una dada utilizando como recurso didáctico materiales manipulativos. Sin embargo, tienen dificultades para expresar, oralmente y por escrito, las acciones que han realizado para obtener la fracción equivalente a una dada. En estas condiciones, evitan dar argumentos basados en el modelo de medida y optan por el lenguaje simbólico, mediante la formulación de la regla de obtención de fracciones equivalentes, para justificar la equivalencia.

Toma de decisiones

La importancia de la equivalencia de fracciones aconseja que las primeras sesiones de la secuencia de enseñanza en quinto curso se dediquen a reforzar la operatividad de este concepto. Las dos siguientes sesiones se van a dedicar a reforzar el concepto de equivalencia de fracciones.

Día 19-11-2004 (Segunda sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la tarea previa nº 2

2º Resolver y evaluar la tarea previa nº 3

Ejecución

El profesor presenta la tarea previa nº 2 y reparte a los alumnos unidades de superficie de 20 x 20 cm.

Uno de los alumnos (B02) que la ha necesitado recibir la ayuda de los profesores para resolver la tarea sale a la pizarra y con la ayuda del profesor, construye los manteles de superficie 3/2, 6/4, 9/6 y 12/8 de la unidad.

El profesor recuerda la regla de obtención de fracciones equivalentes y escribe en la pizarra:

x 2

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

x 2

x 3

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$$

x 3

$$\frac{3}{2} \overset{\times 4}{\underset{\times 4}{=}} \frac{12}{8}$$

Algunos alumnos indican verbalmente otras fracciones equivalentes. Así, la alumna B08 dice que 21/14 u. es una fracción equivalente a 3/2.

En los últimos 20 minutos de la sesión, los escolares afrontan la resolución de la tarea previa nº 3. Los alumnos van a intentar resolver la tarea sin utilizar material manipulativo porque se les recomienda que encuentren fracciones equivalentes a las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ de modo que tengan el mismo denominador para poder compararlas. Aquellos alumnos que no sepan cómo afrontar la tarea recibirán dos tiras de papel de longitud la unidad.

Todos los alumnos del grupo, salvo el alumno B01, son capaces de utilizar la equivalencia de fracciones a nivel simbólico para comparar las fracciones que expresan la medida de cantidades de longitud.

Se ha realizado la evaluación conjunta de la tarea utilizando dos estrategias muy dispares:

1º Representando con tiras de papel de longitud una unidad las cantidades de longitud $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ de unidad, que utiliza el alumno B01.

2º Encontrando fracciones equivalentes utilizando la notación simbólica:

$$\overbrace{\underbrace{\frac{3}{4} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}} \frac{6}{8} = \frac{9}{12}}_{\times 3}}^{\times 3}$$

$$\overbrace{\underbrace{\frac{2}{3} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}} \frac{4}{6} = \frac{8}{12}}_{\times 4}}^{\times 4}$$

Antes de concluir la sesión de clase los alumnos reciben el encargo de resolver en sus casas la tarea previa nº 4 que tiene un formato análogo a la tarea previa nº 3, y cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA PREVIA 4. Fecha: ________

"Dados dos listones: uno de longitud $\frac{3}{4}$ y otro de longitud $\frac{5}{6}$ de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?"

Consigna:
No utilicéis material. Para comparar ambas fracciones os aconsejo que encontréis fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ que tengan el mismo denominador.

SOLUCIÓN: El listón más largo mide ___________________

Para comparar los listones he hecho lo siguiente:

Asistencia de los alumnos
Falta a clase el alumno B04.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos dan muestran de tener operativo el concepto de equivalencia de fracciones en las tareas de comparación de fracciones. No obstante, la dificultad de este concepto recomienda reforzar esta técnica de carácter simbólico que es percibida por los alumnos como una técnica compleja y muy alejada de sus intuiciones primitivas.

Toma de decisiones
Se va a dedicar una sesión más a comparar fracciones para consolidar la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes. Se pretende realizar la evaluación conjunta de la tareas previa nº 4 que los alumnos deben traer resuelta de sus casas y después se propondrá la resolución de las tareas previa nº 5 y nº 6.

Día 22-11-2004 (Tercera sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la tarea previa nº 4
2º Resolver y evaluar la tarea previa nº 5
3º Resolver y evaluar la tarea previa nº 6

Ejecución
El profesor recoge las tarjetas de evaluación de la tarea previa nº 4. Todos los alumnos han traído resuelta la tarea. Además, todos utilizan adecuadamente la equivalencia de fracciones. Doce alumnos optan por reducir las fracciones con el denominador común 12; y otro 5 alumnos optan por reducir las fracciones con el denominador común 24. Los alumnos de mayor nivel de comprensión optan por esta segunda estrategia. Uno de estos alumnos (B10) sale a la pizarra y explica su respuesta:

$$\frac{3}{4}=\frac{18}{24}$$
$$\frac{5}{6}=\frac{20}{24}$$

Cuando el alumno B10 resuelve la tarea se pone de manifiesto que el listón $\frac{5}{6}$ es más largo que el listón $\frac{3}{4}$ y que le supera en $\frac{2}{24}$ de unidad.

Hay un grupo más numeroso de alumnos que utilizan cadenas de fracciones equivalentes hasta que consiguen encontrar fracciones con el mismo denominador. Esta técnica la ejemplifica el alumno B09 en la pizarra:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\boxed{\frac{9}{12}}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}$$

$$\frac{5}{6}=\boxed{\frac{10}{12}}=\frac{15}{18}$$

El alumno escribe las cadenas de fracciones equivalentes y después recuadra las que tienen el mismo denominador. Finalmente, se pone de manifiesto que el listón $\frac{5}{6}$ es más largo que el listón $\frac{3}{4}$ y que le supera en $\frac{1}{12}$ de unidad.

El profesor pregunta si esto es posible y algunos alumnos (pocos) contestan que $\frac{1}{12}$ y $\frac{2}{24}$ son fracciones equivalentes. El profesor escribe en la pizarra:

x 2

$$\frac{1}{12} = \frac{2}{24}$$

x 2

Los alumnos resuelven de forma individual la tarea previa nº 5. Los dos tercios alumnos resuelve correctamente la tarea. La alumna B12 sale a la pizarra para resolver la tarea después de que el profesor haya recogido las tarjetas de evaluación. Los escolares escriben la respuesta en sus cuadernos.

El rendimiento de los alumnos ha descendido si se compara con los resultados de la tarea anterior debido, posiblemente, a la que fracciones implicadas son menos familiares a los alumnos que las de la tarea anterior. Cinco alumnos (B02, B03, B08, B12 y B14) han cometido errores o no han sabido aplicar la equivalencia de fracciones. La alumna B03 encuentra fracciones con el mismo numerador pero, después, no sabe compararlas.

Antes de concluir la sesión, el profesor les propone como trabajo para casa resolver la tarea previa nº 6 con el encargo de traerla resuelta a la siguiente sesión de clase:

"Tienes dos listones: uno de longitud $\frac{3}{8}$ y otro de longitud $\frac{7}{6}$ de unidad. ¿Qué listón es el de mayor longitud?".

Asistencia de los alumnos
Falta a clase el alumno B04.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos progresan en la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes a dos dadas y que, además, tengan el mismo denominador. Entre las estrategias que utilizan los alumnos destaca la de construir cadenas de fracciones equivalentes al multiplicar el numerador y denominador de las fracciones por los números 2, 3, 4, 5 y así sucesivamente, hasta comprobar que obtienen fracciones equivalentes con el mismo denominador.

Valoración
Se observa una mejora en la operatividad del concepto de fracción equivalente que se manifiesta en la búsqueda de fracciones equivalentes a una dada y en la justificación del procedimiento utilizado.

Sobre la justificación del procedimiento utilizado para encontrar fracciones equivalentes, los escolares tienen dificultades para expresar verbalmente las acciones que han realizado en el proceso de resolución. Posiblemente, estas dificultades de expresión hace que los alumnos justifiquen la fracción equivalente hallada a partir de cálculos numéricos, como multiplicar el numerador y denominador por un determinado número, sin hacer referencia a las acciones efectuadas sobre el modelos de aprendizaje. Por otra parte, los alumnos valoran la concisión del lenguaje simbólico y prefieren utilizar éste antes que el lenguaje natural.

Día 23-11-2004 (Cuarta sesión)

Plan previsto.

1º Recoger y evaluar la tarea previa nº 6
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 1
3º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 2

Ejecución

El profesor recoge la tarea previa nº 6. Tres alumnos (B01, B04 y B07) no la han traído resuelta. Dos de ellos (B01 y B07) dicen que la han dejado olvidada en sus casas y B04 dice haber faltado a las últimas sesiones de clase. Los alumnos B01 y B07 son invitados a salir a la pizarra a resolver esta tarea y, con la ayuda del profesor, encuentran fracciones equivalentes a ambas con distintos denominadores: utilizando subunidades de 1/48 de unidad y de 1/24 de unidad.

Los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 1 y se ponen a resolver la situación problemática que plantea la ficha de trabajo:

"Tengo dos listones de madera: uno mide los 4/3 de la tira unidad, y otro mide 2/3 de la tira unidad. Si colocamos un listón a continuación del otro, ¿cuánto mide el nuevo listón?"

Finalmente, los alumnos resuelven, en el aula, la tarea nº 2 que plantea el siguiente problema:

"Tienes un listón que mide 1/2 de la tira unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud 1tira unidad. Expresa con una fracción la longitud del nuevo listón que has construido"

Asistencia de los alumnos

Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los alumnos obtienen un rendimiento aceptable en las tareas previas dedicadas a ejercitar la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes a dos dadas y que, además, tengan el mismo denominador. Los dos tercios de los alumnos del grupo obtienen éxito en la tarea previa nº 6. Además de los dos alumnos no han realizado la tarea, hay tres (B02, B12 y B16) que cometen errores; los demás saben aplicar la equivalencia de fracciones para comparar cantidades de magnitud.

Los alumnos identifican las situaciones concretas que dan sentido a la operación suma de fracciones porque son análogas a las que utilizan con números naturales. Los escolares identifican la operación suma como aquella que resuelve la tarea nº 1. Además, los alumnos conjeturan la regla para sumar fracciones porque comprenden que para poder sumar es necesario que las subunidades sean del mismo tamaño. Solo los alumnos B07 y B14 no identifican a operación suma porque dan como respuesta la fracción mayor 4/3 de unidad.

Ahora bien, debemos realizar tres consideraciones:

1º referida al significado de la suma de fracciones: algunos alumnos han necesitado utilizar tiras de longitud 1/3 de unidad. Hay alumnos que se sienten muy inseguros si no utilizan material.
2º referida al concepto de equivalencia de fracciones: los alumnos no simplifican la fracción 6/3 u. El profesor ha sugerido a los alumnos que la fracción 6/3 u. es equivalente a 2 unidades.
3º referida a las representaciones gráficas que realizan los alumnos: los profesores han sugerido a los alumnos que representen gráficamente las cantidades de longitud. Esta recomendación se muestra muy acertada porque conecta las acciones físicas y las representaciones simbólicas.

Todos los alumnos del grupo resuelven correctamente la ficha de trabajo nº 2. Para resolver esta tarea los alumnos necesitan gestionar la unidad y considerarla como 2/2 para sumarla a 1/2. Los alumnos han utilizado diversas estrategias algunas de las cuales han ido sugeridas por los profesores:

1º utilizar material (el profesor ha colgado en la pizarra una tira de papel de longitud la unidad y a continuación una tira de 1/2 unidad) para percibir que en una unidad hay 2 subunidades de 1/2 y, después, sumar las subunidades.
2º realizar un gráfico, para mostrar que en una unidad hay 2 subunidades de 1/2 y, después, sumar las subunidades.
3º utilizar la equivalencia 1 = 2/2 = 1/2 + 1/2 y, después, operar 1/2 + 2/2

Valoración

Después de dedicar tres sesiones de clase se ha alcanzado el objetivo de reforzar el significado y operatividad de la equivalencia de fracciones. Los alumnos están en condiciones de afrontar las situaciones problemáticas que dan sentido a las operaciones con fracciones y que obligan a buscar técnicas de cálculo para las operaciones con fracciones.

La secuencia de enseñanza referida a la suma de fracciones se desarrolla según lo previsto. En estos momentos iniciales es previsible que los alumnos no se percaten de que están utilizando la equivalencia de fracciones cuando realizan la conversión 1 u = 2/2 u al resolver la Ficha de trabajo nº 2. Ninguno de los alumnos que utilizan la equivalencia de fracciones lo hacen constar en la tarjeta de evaluación, posiblemente porque no son conscientes de haberla utilizado. En este caso lo importante es que utilicen esta estrategia y que vayan abandonando gradualmente la dependencia del manejo de materiales manipulativos.

Toma de decisiones
Continuar con la planificación prevista.

Día 25-11-2004 (Quinta sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 3
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 4

Ejecución
Los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 3 que indaga si los alumnos dotan de significado a la operación suma de fracciones y, además, encuentran procedimientos de cálculo de la suma de fracciones con distinto denominador. La ficha de trabajo nº 3 plantea la situación problemática:

Tienes un listón que mide $\frac{1}{2}$ de la tira unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud $\frac{1}{3}$ de la tira unidad. ¿Cuál es la longitud del nuevo listón que has construido?
Si necesitas utilizar material puedes solicitarlo.

A pesar de que se les permite a los alumnos utilizar materiales tangibles, los profesores de aula recomiendan a los alumnos que no utilicen materiales para evitar el fenómeno pernicioso observado en la implementación de la Primera Etapa que consiste en que algunos alumnos que son capaces de gestionar con cálculos simbólicos la equivalencia de fracciones prefieren utilizar materiales con la consiguiente limitación en sus procesos de aprendizaje.

Después de que los alumnos resuelven la tarea se procede a la evaluación conjunta de la misma. El alumno B05 que comete el error de sumar numeradores y denominadores sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor, resuelve el problema.

Termina la sesión de clase y no queda tempo para afrontar la Ficha de trabajo nº 4. Se resolverá en la siguiente sesión de clase.

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los dos tercios de los alumnos de la Segunda Etapa identifican la suma de fracciones como la operación que resuelve el problema de la Ficha de trabajo nº 3.

Los alumnos de la Segunda Etapa utilizan procedimientos simbólicos basados en la equivalencia de fracciones para calcular la suma de las fracciones 1/2 u y 1/3 u. Dos tercios de estos alumnos realizan correctamente la suma de fracciones. En la tabla siguiente se detallan las estrategias utilizadas por los alumnos, y el número de alumnos que utiliza una determinada estrategia y que tienen éxito o fracaso al utilizar dicha estrategia:

	Sol. correcta	**Sol. incorrecta**
Material	**2** (B01, B13)	**1** (B06)
Equivalencia	**10** (B03, B08, B09, B10, B11, B12, B14, B15, B17, B18)	**4** (B04, B05, B07, B16)
No la resuelven		**1** (B02)
Totales	**12**	**6**

Los alumnos de la Segunda Etapa apenas realizan gráficos y son pocos los que se sirven de materiales tangibles. Esto es debido a que los profesores de aula han sugerido a los alumnos que eludan el uso de materiales manipulativos para evitar el fenómeno pernicioso observado en la implementación de la Primera Etapa que consiste en que algunos alumnos que son capaces de gestionar con cálculos simbólicos la equivalencia de fracciones prefieren utilizar materiales con la consiguiente limitación en sus procesos de aprendizaje. De esta manera se fuerza a los alumnos a utilizar representaciones simbólicas sustentadas en la equivalencia de fracciones.

La decisión de restringir a los alumnos el uso de materiales tangibles es acertada porque los alumnos obtienen un porcentaje de éxito elevado. Los alumnos que utilizan representaciones simbólicas obtienen porcentajes de éxito altos, mientras que los alumnos que utilizan objetos tangibles obtienen resultados peores. Esto quiere decir que los alumnos que tienen menor nivel de comprensión necesitan apoyarse en el material manipulativo y, aún así, esto no les garantiza el éxito en la tarea. Estos resultados sugieren pautas metodológicas para la gestión del material en el aula: el profesor debe vigilar el proceso de aprendizaje de cada alumno y tomar decisiones sobre el momento adecuado en el que el alumno debe abandonar el uso de materiales tangibles para forzar la aparición de estrategias conveniencia más avanzadas, dado que mientras que unos alumnos necesitan sustentar sus ideas a partir de la manipulación con objetos tangibles, para otros alumnos este tipo de actividad puede obstaculizar el aprendizaje de estrategias carácter simbólico.

Valoración

La metodología de enseñanza que sustenta la Propuesta Didáctica propugna que los alumnos utilicen representaciones simbólicas después de que, durante un determinado período temporal, realicen experiencias de medida con materiales tangibles y con el apoyo de representaciones gráficas. Posiblemente, estas actuaciones retrasan la utilización de cálculos simbólicos por parte de los alumnos, pero resultan particularmente provechosas porque hemos constatado que los alumnos apenas cometen errores conceptuales en el manejo de las representaciones simbólicas como sumar numeradores y denominadores. Esto es así porque el cálculo simbólico que gestionan los alumnos tiene un referente concreto en las acciones físicas que previamente han realizado en el modelo de aprendizaje. Los buenos resultados obtenidos por los alumnos de la Segunda Etapa, aconsejan mantener la propuesta didáctica inicial y recomendar a los alumnos que intenten resolver las situaciones problemáticas sin la ayuda de materiales manipulativos. Ahora bien, conviene alertar sobre los efectos que puede producir tal recomendación que se realiza para favorecer la aparición de estrategias de carácter simbólico y para acortar los períodos de instrucción; porque se corre el riesgo de que los alumnos se vean avocados a realizar cálculos simbólicos sin haber tenido suficientes experiencias previas con los objetos del modelo.

Día 26-11-2004 (Sexta sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 4
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 5

Ejecución

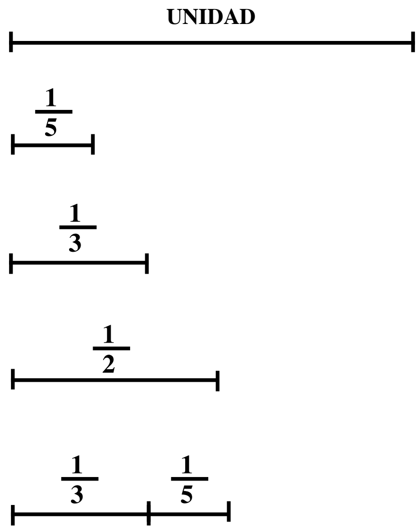
Los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 4 que indaga si los alumnos dotan de significado a la operación suma de fracciones y, además, encuentran procedimientos de cálculo de la suma de fracciones con distinto denominador. La ficha de trabajo nº 4 plantea la situación problemática siguiente:

Una empresa fabrica refrescos que vende en botellas de diferente capacidad: de $\frac{1}{5}$ *de litro, de* $\frac{1}{3}$ *de litro y de* $\frac{1}{2}$ *litro.*

Si bebes el contenido de dos botellas: una de $\frac{1}{5}$ *de litro y otra de* $\frac{1}{3}$ *de litro, ¿qué cantidad de refresco has bebido?*

La cantidad de refresco que has bebido, ¿cabe en una botella de $\frac{1}{2}$ *litro?*

Durante la evaluación de la Ficha de trabajo nº 4 el profesor ha mostrado la conveniencia de utilizar las representaciones gráficas, aún en este tipo de problemas que trabajan magnitudes difíciles de dibujar como la capacidad. En tal caso se aconseja pensar en otra magnitud como la longitud o la superficie, y proceder del siguiente modo:



Las representaciones gráficas permiten valorar la magnitud de las cantidades que intervienen en el problema y conjeturar resultados. En nuestro caso podemos adelantar que $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}>\frac{1}{2}$. La propuesta de enseñanza contempla la utilización de la equivalencia de fracciones para sumar las fracciones $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$, y después para comparar la suma con $\frac{1}{2}$. Esta técnica se ha ejemplificado en la pizarra. El alumno B05 que comete el error de sumar numeradores y denominadores sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor, resuelve el problema.

La resolución y evaluación de la tarea nº 4 ha llevado más tiempo del inicialmente esperado. Por este motivo se ha retrasado la resolución de la ficha de trabajo nº 5 que plantea la situación problemática siguiente para introducir la resta de fracciones:

Deseas empapelar una pared que tiene una superficie de 5 metros cuadrados. Si por la mañana has empapelado una superficie de $\frac{11}{4}$ *metros cuadrados. ¿Cuánta superficie queda por empapelar?*

Termina la sesión de clase y algunos alumnos no terminado la Ficha de trabajo nº 5. Estos alumnos reciben el encargo de terminar en sus casas la tarea y traerla resuelta a la siguiente sesión de clase. El profesor da indicaciones para facilitar su resolución como trabajo para casa; en concreto, entrega a cada uno de los alumnos 5 manteles cuadrados de 20 x 20 cm. que representan la unidad de superficie junto con la tarjeta de evaluación de la ficha y sugiere que deben expresar 5 unidades de superficie mediante subunidades de tamaño 1/4 de unidad. En la siguiente sesión se procederá a la evaluación conjunta de esta ficha de trabajo.

<u>Asistencia de los alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
El 90% de los alumnos del grupo resuelven correctamente el problema de la Ficha de trabajo nº 4. El dato más significativo es que todos los alumnos utilizan como estrategia la equivalencia de fracciones. Ninguno de los alumnos utiliza representaciones gráficas para responder a la tarea. Aunque la estrategia utilizada por los alumnos es propia del nivel simbólico, éstos han entendido bien el enunciado del problema gracias a que el profesor, cuando ha presentado la tarea, les ha mostrado a los alumnos botellas de 1/5, 1/3 y 1/2 litro de capacidad. La percepción visual de la cantidades de magnitud que expresan las fracciones que intervienen en los problemas les ayuda a los alumnos en la resolución del problema. En este caso, se hace más necesario porque la magnitud capacidad no tiene referencias visuales tan claras como la longitud o la superficie.

Aproximadamente, la tercera parte de los alumnos confunden la técnica de búsqueda de fracciones equivalentes con la operación multiplicación de una fracción por un número natural. En este momento de la secuencia de enseñanza los alumnos no han situaciones problemáticas que resuelve la multiplicación y, en estas condiciones, es razonable que no distingan entre la operación aritmética que resuelve un problema y como una técnica entre naturales para disminuir o aumentar el fraccionamiento de la unidad.

Valoración
En general, los alumnos saben resolver las situaciones problemáticas de suma de fracciones, a pesar de que algunos no identifican la operación suma en las tarjetas de evaluación de las fichas de trabajo. También hemos detectado que algunos alumnos interpretan que la operación es la equivalencia de fracciones, o la multiplicación debido a las acciones simbólicas que realizan para obtener fracciones equivalentes. No obstante, los alumnos evolucionan, conforme van resolviendo nuevas tareas, e identifican la operación suma de fracciones.

Toma de decisiones
Los alumnos comprenden las acciones básicas que formalizan la suma de fracciones porque se corresponden con las de la suma de naturales. Como era de esperar las dificultades aparecen en la simbolización de la equivalencia de fracciones que algunos identifican con la multiplicación de fracciones. Sin embargo, los alumnos perciben de modo natural que para sumar cantidades de magnitud, expresadas en la notación fraccionaria, se necesita que tales cantidades estén expresadas con respecto a una misma subunidad. Los modelos de medida se muestran apropiados para introducir el significado y cálculo de la suma de fracciones porque muy pocos alumnos cometen el error de sumar entre si numeradores y de denominadores de las fracciones implicadas en la suma.

En estas condiciones, se propone continuar con la implementación de la propuesta y abordar la enseñanza de la resta de fracciones.

Día 29-11-2004 (Séptima sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 5
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 6

Ejecución
El profesor recoge la la Ficha de trabajo nº 5. Todos los alumnos traen la tarea resulta. Cinco alumnos (B02, B04, B08, B14 y B16) no han resuelto correctamente esta tarea. Las dificultades de estos alumnos se han centrado en reconocer la cantidad 5 metros cuadrados como una fracción y expresa ésta mediante su equivalente 20/4 metros cuadrados.

Para evaluar esta tarea sale a la pizarra la alumna B14 que no ha sabido gestionar la equivalencia de fracciones. La alumna escribe en la pizarra la representación gráfica de las cantidades implicadas en el problema para que sus compañeros dejen, en sus cuadernos, constancia de la resolución de esta tarea.

En la segunda parte de la sesión se procede a la resolución de la Ficha de trabajo nº 6 cuyo enunciado es:

Tengo una caña de pescar que mide $\frac{7}{5}$ *metros y se ha partido en dos partes: una mide* $\frac{9}{10}$ *de metro. ¿Cuánto mide la otra parte de la caña?*

Antes de que los alumnos aborden la resolución de la tarea, el profesor aporta dos indicaciones:

1º que estudien que fracción es mayor: $\frac{7}{5}$ ó $\frac{9}{10}$

2º que realicen un dibujo de la caña de pescar y de los dos trozos en los que ha quedado partida.

La mayoría de los alumnos encuentran fracciones equivalentes con subunidades de longitud "un décimo"; salvo tres alumnos (B09, B17 y B18) que utilizan subunidades de 1/50 de metro. Para evaluar conjuntamente la tarea sale a la pizarra el alumno B07 que ha necesitado la ayuda de los profesores para resolver el problema.

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos, salvo el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la Ficha de trabajo nº 5 confirman la dificultad para expresar el número natural 5 con una fracción. El hecho de que tener que expresar el número natural mediante una representación fraccionaria ha supuesto una situación novedosa para los alumnos y deja entrever limitaciones conceptuales de éstos al gestionar un procedimiento simbólico que es ajeno a las técnica de cálculo que conocen y utilizan los alumnos.

Los resultados de la Ficha de trabajo nº 6 indican que los escolares progresan en los aprendizajes sobre la técnica de cálculo con fracciones. Solo tres alumnos (B02, B05, B07 y B08) yerran al gestionar la equivalencia de fracciones.

La técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada se ha focalizado en la estrategia de amplificación, mientras que la de simplificación se ha trabajo en menos ocasiones. Esto hace que ninguno de los alumnos simplifique las fracciones 5/10 de metro o 25/50 de metro hasta obtener 1/2 metro. Solo los alumnos B17 y B18 que poseen un nivel de comprensión alto utilizan esta estrategia y escriben la equivalencia: $\frac{25}{50} = \frac{5}{10}$.

Esta dificultad tiene su origen en la propia secuencia de enseñanza puesto que la justificación del proceso de obtención de fracciones equivalentes ha potenciado los fraccionamientos cada vez "más finos" de la unidad. En consecuencia, la aparición de esta dificultad estaba prevista y no es preocupante en este momento de enseñanza.

Toma de decisiones
Los alumnos progresan en la gestó simbólica de la equivalencia de fracciones. Se debe seguir reforzando la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada y prestar mayor atención a la técnica de simplificación de fracciones.

Con esta intención proponemos la resolución de una nueva tarea de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones que no se había implementado en la Primera Etapa de la Experimentación y cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TAREA DE REFUERZO DE CÁLCULO DE LAS OPERACIONES DE SUMA Y RESTA DE FRACCIONES.

Realiza las siguientes operaciones:

1º $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

2º $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

3º $\frac{7}{12} + \frac{1}{3}$

4º $\frac{7}{12} - \frac{1}{3}$

5º $2 + \frac{1}{4}$

6º $2 - \frac{1}{4}$

Día 1-12-2004 (Octava sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 7

2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones.

Ejecución

Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 7 que propone resolver el siguiente problema:

Quieres comprar aceitunas. La tendera te sirve $\frac{6}{5}$ *Kgr. de aceitunas. Expresa, con una fracción, el peso de aceitunas que debe añadir para servirte dos kilogramos de aceitunas.*

Cuando los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 7 se procede a su evaluación conjunta. El alumno B01 explica en la pizarra la representación gráfica que ha efectuado y, después, la alumna B03, que no ha sabido resolver el problema, sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor, utiliza la equivalencia de fracciones para ejemplificar esta estrategia.

En la segunda parte de la sesión los alumnos resuelven una nueva Ficha de trabajo de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones. Cuando los alumnos resuelven la tarea la entregan a los profesores. Termina la sesión de clase y no queda tiempo para evaluarla, de modo conjunto. Se procederá a su evaluación al comienzo de la siguiente sesión de clase.

Asistencia de los alumnos

Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los dos tercios de los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación encuentran la solución correcta del problema. Siete alumnos (B02, B03, B05, B07, B08, B14 y B16) han errado al resolver este problema. Todos los alumnos, excepto B01 que utiliza representaciones gráficas, se sirven de representaciones simbólicas y ponen en juego el concepto de equivalencia de fracciones. Cuatro de los alumnos de yerran cometen incorrecciones en las representaciones simbólicas pero obtiene la respuesta correcta.

El rendimiento de los alumnos en la resolución de esta tarea ha descendido levemente con respecto otras tareas anteriores debido, posiblemente, por las siguientes causas:

a) dificultades de los alumnos para convertir la cantidad expresada por el natural 2 Kgrs. en la representación fraccionaria 10/5 Kgrs.,

b) la estructura semántica del enunciado del problema. El enunciado del problema describe una acción aditiva (aceitunas que debe añadir) pero la operación que resuelve la ficha es una resta, y

c) la magnitud que se trabaja en el problema es el peso. Esta magnitud no evoca a los alumnos imágenes mentales tan claras como la magnitud longitud o superficie.

La mayoría de los alumnos que utilizan correctamente la equivalencia de fracciones no son concientes de que la aplican cuando establecen la conversión 2 Kgrs = $\frac{10}{5}$ Kgrs.

Valoración

Los modelos de medida se muestran apropiados para introducir el significado y cálculo de las operaciones suma y resta de fracciones. En nuestra propuesta didáctica la enseñanza de las operaciones con fracciones se fundamenta a partir de la resolución de problemas. Los alumnos comprenden las acciones básicas que formalizan la suma y resta de fracciones porque se corresponden con las de la suma y resta de naturales.

La para resolver las tareas, en la Primera Etapa de la Experimentación, potencia las estrategias de resolución mediante la acción de medir y dificulta la aparición de respuestas con cálculos con símbolos.

Los cambios metodológicos introducidos en el Segunda Etapa que han consistido en aconsejar a los alumnos que eviten la utilización de materiales tangibles y opten por estrategias mas eficaces como el uso de representaciones graficas y simbólicas se ha mostrado eficaz. Los alumnos de la Segunda Etapa aportan respuestas más uniformes basadas en la utilización de la equivalencia de fracciones.

Los alumnos de la Segunda Etapa tienen automatizado la técnica de la suma y resta de fracciones que consiste en buscar fracciones equivalentes con el mismo denominador. En general, todos los alumnos del grupo, excepto B02, han sabido calcular las seis operaciones que plantea la tarea de refuerzo. Hay que reseñar que los alumnos siguen sin aplicar la técnica de simplificación de fracciones para expresar el resultado con una fracción irreducible.

Día 2-12-2004 (Novena sesión)
Plan previsto.
1º Evaluar la Ficha de trabajo de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 8.

Ejecución
Comienza la sesión de clase y se procede a evaluar la ficha de trabajo de refuerzo de la técnica para calcular la suma y resta de fracciones. Para que los alumnos tengan escrita, en sus cuadernos, la tarea y su proceso de resolución que fue resuelta pero no corregida en el aula durante la sesión de clase del día anterior, algunos alumnos salen a la pizarra y realizan las operaciones que propone la Ficha de refuerzo.

En la segunda parte de la sesión los alumnos Ficha de trabajo nº 8 que plantea las dos situaciones problemáticas siguientes:

Compras 12 latas de conserva. Cada lata de conserva pesa $\frac{2}{3}$ *Kgrs. ¿Cuánto pesan las 12 latas?*

Compras 36 latas de conserva. Cada lata de conserva pesa $\frac{2}{3}$ *Kgrs. ¿Cuánto pesan las 36 latas?*

Cuando los alumnos resuelven las tareas se procede a su evaluación. El alumno B06, que no identifica la multiplicación de una fracción por un número natural, sale la pizarra y resuelve amos problemas.

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
La resolución de la Ficha de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones ha cumplido el objetivo previsto: mejorar las destrezas procedimentales.

Todos los alumnos resuelven correctamente las seis operaciones que plantea la Ficha de trabajo. Tan solo el alumno B02 no ha sabido resolverla, y dos alumnos B04 y B14 han tenido dificultades para operar:

$$2 + \frac{1}{4} \text{ y } 2 - \frac{1}{4}$$

Las dificultades se centran en percibir el natural como una fracción y en la dificultad para escribir: $2 = \frac{2}{1}$

Los alumnos no reconocen la necesidad de aplicar la técnica de simplificación de fracciones. No se detectan otras dificultades en la resolución de las tareas de refuerzo de cálculo de sumas y restas de fracciones.

Con la resolución de la Ficha de trabajo nº 8 pretendemos introducir la operación multiplicación de una fracción por un número natural. Los alumnos, llevados por la técnica de resolución de las tareas precedentes, han utilizado la equivalencia de fracciones cuando no era necesario. Los profesores han intervenido para orientar el trabajo de los alumnos de modo que les indica que están ante un nuevo tipo de problema. Gracias a esta indicación los alumnos perciben con facilidad la operación multiplicación porque trasladan del trabajo con números naturales el significado de la multiplicación como suma reiterada.

Los dos tercios de los alumnos del grupo resuelven los dos problemas propuestos en la Ficha de trabajo nº 8. Los alumnos reconocen la multiplicación de una fracción por un número natural como la suma reiterada de la fracción porque han escrito de modo natural la simbolización usual de la operación:

$$\frac{2}{3} \text{ x } 12$$

Las dificultades han aparecido al intentar simplificar la fracción $\frac{24}{3}$ y referir la cantidad a la unidad (kilos). Esta actividad exige de los alumnos percibir la cantidad como constituida por 24 subunidades de 1/3 de kilo y agrupar la cantidad en grupos de 3 subunidades para expresarla en kilos.

Queda por estudiar si al cambiar la magnitud peso por la magnitud longitud la dificultad de los problemas decrece. Dos enunciados alternativos de la Ficha de trabajo nº 8 son:

a) Para hacer un trabajo manual necesitáis 12 trozos de alambre. Cada trozo de alambre mide $\frac{2}{3}$ de metro. ¿Cuántos metros de alambre necesitáis comprar en la ferretería?

b) Para hacer un trabajo manual necesitáis 36 trozos de alambre. Cada trozo de alambre mide $\frac{2}{3}$ de metro. ¿Cuántos metros de alambre necesitáis comprar en la ferretería?

Valoración
Los alumnos identifican con facilidad el significado de suma reiterada de una cantidad con la operación multiplicación de una fracción por un número natural, a pesar de que se trata del primer problema que resuelven y que modeliza la operación multiplicación de una fracción por un número natural.

Toma de decisiones
Durante una semana y media se van a interrumpir las clases porque los alumnos van a disfrutar el puente de la Constitución y, además, tienen prevista una excursión a una de las estaciones de esquí de los Pirineos para practicar dicho deporte.

El profesor propone, como trabajo para que los alumnos realicen en sus casas durante estos días festivos, la resolución de la Ficha de trabajo nº 9, con la intención de dotar de significado y automatizar el algoritmo de la operación multiplicación de una fracción por un número natural. La Ficha de trabajo nº 9 se compone de dos problemas que mostramos a continuación:

1º. ¿Cuántos litros de agua mineral hay en una caja que contiene 12 botellas de $\frac{3}{2}$ de litro?

2º. El paso de un adulto es $\frac{5}{6}$ de metro y el un niño es $\frac{3}{4}$ de metro. Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la diferencia entre el paso del adulto y el paso del niño?

b) ¿Cuántos metros avanza el adulto en 12 pasos?

c) ¿Cuántos metros avanza el niño en 12 pasos?

Día 15-12-2004 (Décima sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 9.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 10.

Ejecución
En la primera parte de la sesión, el profesor recoge la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 9. Todos los alumnos han resuelto el primer problema de la tarea, pero algunos indican que no han sabido resolver el segundo problema. Para evaluar el primer problema sale a la pizarra el alumno B05 que simboliza mal la operación y que escribe la respuesta correcta porque se ha ayudado de la respuesta que aporta otro compañero suyo.

Para resolver el segundo problema sale a la pizarra el alumno B10 que posee un nivel de comprensión alto. Este alumno explica a sus compañeros dos estrategias de resolución:

1º. realización de gráficos y medida del resultado
2º. realizar una suma de sumandos repetidos tantas veces como indica el factor.

En la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 10 cuyo enunciado es el siguiente:

Quieres colocar el rodapié en un pasillo que mide 8 metros. Para ello has comprado 25 losetas de longitud $\frac{3}{10}$ *de metro. Las losetas se colocan una a continuación de la otra.*

PRIMERA PREGUNTA

Con las losetas que has comprado, ¿qué longitud del rodapié puedes colocar?

SEGUNDA PREGUNTA

¿Qué longitud que te sobra o te falta para colocar el rodapié?

TERCERA PREGUNTA

¿Tienes bastantes losetas para colocar todo el rodapié? SI ☐ NO ☐

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
El 72% de los alumnos del grupo resuelven correctamente el primer problema de la Ficha de trabajo nº 9. Cinco alumnos (B02, B04, B05, B08 y B13) no saben encontrar la respuesta correcta o bien cometen errores en la simbolización de la operación.

Hay tres alumnos que confunden la simbolización de la equivalencia de fracciones con la operación multiplicación de una fracción por un número natural.

Los alumnos siguen teniendo dificultades para simplificar las fracciones. En este caso, bastantes alumnos operan:

$$\frac{3}{2}x12 = \frac{36}{2}$$

pero después no simplifican esta fracción.

Los alumnos identifican las situaciones de suma reiterada que modeliza la multiplicación de una fracción por un número natural, y saben calcular el resultado de esta operación. La mayoría de los alumnos han resuelto correctamente los dos primeros apartados del segundo problema de la Ficha de trabajo nº 9. Las dificultades han aparecido al interpretar el apartado 3º del problema que obliga a los alumnos a evaluar la cantidad de longitud que anda el padre, la que anda el niño y conjeturar cuantos pasos debe andar el niño para superar al padre. El porcentaje de éxito en el tercer apartado desciende hasta el 50%.

Los resultados obtenidos en la Ficha de trabajo nº 10 ponen de manifiesto que los alumnos identifican con facilidad el significado de la multiplicación de una fracción por un número natural como suma reiterada de la cantidad de magnitud que expresa la fracción. Aproximadamente, el 80% de los alumnos de la segunda etapas identifican la operación y escriben la representación simbólica de la misma. Los alumnos utilizan, de forma mayoritaria, representaciones simbólicas para calcular la solución del problema. Además, el 75% de los alumnos son capaces de conjeturar y aplicar correctamente la regla de cálculo computacional de esta operación a pesar de no recibir enseñanza explícita de esta regla.

Entre las limitaciones en la comprensión de los alumnos detectamos dos aspectos susceptibles de mejora: a) algunos alumnos obvian la unidad de medida (B01, B05, B07, B11, B14, y b) dos alumnos siguen confundiendo la simbolización de operación multiplicación con la de la equivalencia de fracciones (B07, B14).

Valoración
La pauta metodológica adoptada en la implementación de esta propuesta y que consiste en que los alumnos resuelven los problemas sin conocer previamente los algoritmos de cálculo de las operaciones se ha mostrado eficaz porque obliga a los escolares a poner en juego estrategias de resolución de problemas que pueden afrontar gracias al conocimiento que poseen de la suma de fracciones.

Toma de decisiones
El equipo investigador considera cubierto el objetivo de enseñanza de la multiplicación de una fracción por un natural y decide abordar la enseñanza de la operación división de una fracción por un natural.

Día 17-12-2004 (Undécima sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 11.

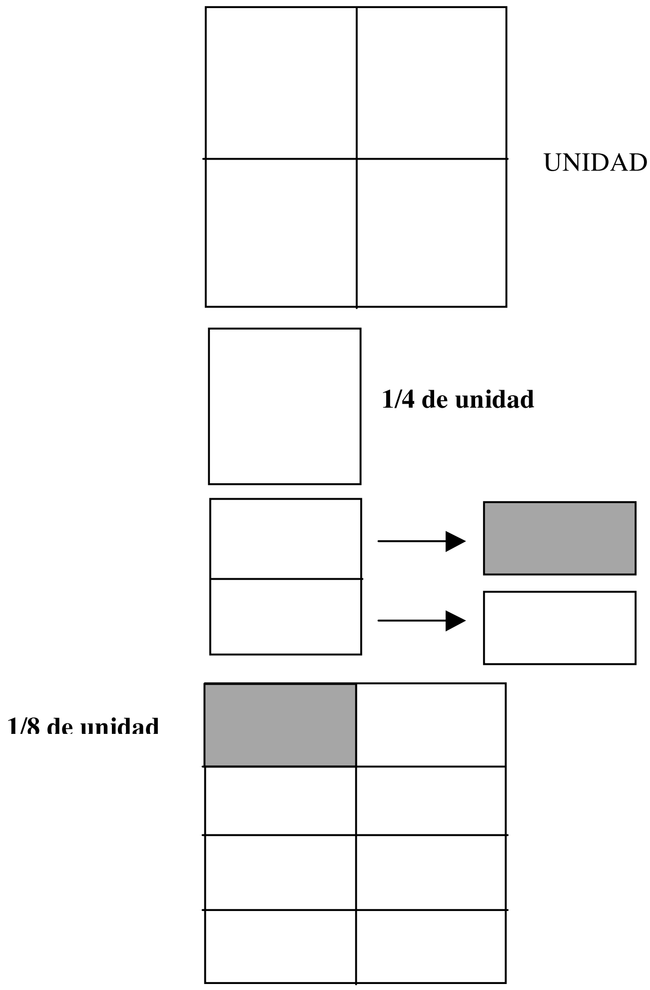
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 12.

Ejecución

El profesor propone a los alumnos resolver Ficha de trabajo nº 11 para introducir la operación división de una fracción entre un número natural:

Has cortado por la mitad, en dos partes iguales, un cristal de superficie $\frac{1}{4}$ *de unidad. ¿Cuánto mide la superficie de la mitad del cristal que has cortado?*

Antes de abordar la resolución de este problema, los alumnos reciben unidades cuadradas de superficie para construir un cristal de superficie 1/4 de unidad. Los alumnos saben resolver el problema aunque no identifican la operación división de una fracción por un número natural. Durante la evaluación conjunta de este problema el profesor utiliza representaciones gráficas para rememorar las acciones de medida que han realizado los alumnos:



Nuestra propuesta de enseñanza se caracteriza porque las reglas de cálculo que aplican los alumnos sean comprendidas por éstos. Es más, se pretende que las reglas las justifiquen los alumnos mediante las acciones que estos realizan con el modelo en el marco de la resolución de problemas. Por este motivo, el profesor decide verificar en el modelo de medida que "la mitad de 1/4 es 1/8". Del mismo modo presenta otra estrategia sustentada en la idea de reparto igualitario, utiliza identifica la operación e introduce la representación simbólica de la división:

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{2}{8} : 2 = \frac{2:2}{8} = \frac{1}{8} \text{ de unidad}$$

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 12 que plantea la resolución del siguiente problema:

Tienes una bola de plastilina que pesa $\frac{1}{2}$ de unidad. Si con esta cantidad de plastilina construyes tres bolas iguales de plastilina. ¿Cuánto pesa cada una de las tres bolas de plastilina?

Los alumnos no han utilizado material manipulativo en la resolución de la Ficha de trabajo nº 12 porque la cantidad de magnitud peso no les sugiere la utilización de materiales concretos. En estas condiciones, los alumnos apenas utilizan representaciones gráficas y, en su lugar, tienden a utilizan representaciones simbólicas de modo precipitado. En efecto, los alumnos utilizan la equivalencia de fracciones para obtener 3 subunidades de tamaño 1/6 de unidad con éxito desigual, porque los alumnos tan solo llevan resueltos dos problemas de división.

Antes de concluir la sesión de clase se procede a la evaluación conjunta de esta tarea. La alumna B11 que yerra en la simbolización de la operación sale a la pizarra y ejemplifica, con la ayuda del profesor, tres estrategias de resolución del problema: mediante gráficos, utilizando el fraccionamiento de la fracción unitaria y la idea de reparto igualitario.

<u>Asistencia de los alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos del grupo tienen dificultades para gestionar el significado de la división asociado a la idea de reparto igualitario. En efecto, a pesar de que el profesor introduce esta estrategia de resolución al resolver el problema de la Ficha nº 11, la mayoría de los alumnos eluden esta estrategia cuando resuelven el problema de la Ficha nº 12. Cuando la cantidad a repartir o fraccionar n partes iguales es una fracción unitaria los alumnos prefieren utilizar el modelo de medida antes que el de reparto porque aquel es el que mejor conocen.

Los alumnos apenas utilizan materiales tangibles para representar las cantidades implicadas en los enunciados de los problemas y apenas utilizan representaciones gráficas y solo recurren a este tipo de representaciones cuando no disponen de ninguna otra estrategia.

El diseño de la propuesta de enseñanza prevé que los alumnos resuelvan ciertos tipos de problemas utilizando las estrategias que deseen, sin recibir indicación de la operación que soluciona el problema ni de la regla del algoritmo de cálculo de ésta operación. En el caso de la división de una fracción entre un número natural los alumnos reciben enseñanza de varias estrategias pero se les ofrece una regla algorítmica para calcular el resultado de la división. Es decir, deliberadamente, el profesor no institucionaliza la regla:

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{bxn}$$

Somos conscientes de la opción metodológica que hemos tomado, y que se concreta en retrasar hasta el próximo curso la institucionalización de la regla de cálculo de esta operación, dificulta la identificación de la operación. Sin embargo, como contrapartida favorece la puesta en juego de estrategias de resolución de problemas.

Cuando los alumnos resuelven los dos primeros problemas utilizan representaciones simbólicas, con éxito dispar, para expresar la idea de equivalencia de fracciones y para indicar la operación división porque, aproximadamente, la mitad de los alumnos son capaces de resolver los dos problemas.

<u>Valoración</u>
A pesar de que los escolares están más familiarizados con la estrategia sustentada en el modelo de medida antes que con la del modelo de reparto igualitario, los profesores enfatizan el uso de esta última estrategia por dos motivos: a) las sesiones próximas se va a introducir la fracción con el significado de cociente partitivo, y b) la estrategia de reparto igualitario se sustenta en la equivalencia de fracciones y, por lo tanto, refuerza este concepto fundamental del número racional.

<u>Toma de decisiones</u>
La secuencia se desarrolla según el plan previsto. No se proponen modificaciones de la propuesta didáctica.

Día 20-12-2004 (Duodécima sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 13.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 14.

Ejecución
En la primera parte de la sesión los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 13 que plantea la situación problemática siguiente:

De una tela de superficie $\frac{3}{2}$ *de unidad, quieres hacer 6 manteles iguales, sin que sobre ni falte tela. ¿Qué superficie tendrá cada uno de los manteles?*

Para proceder a la evaluación conjunta de esta tarea sale a la pizarra el alumno B09 que posee un nivel de comprensión alto pero que se ha confundido al expresar el resultado de la división.

En la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 14 que plantea la situación problemática siguiente:

Tienes una masa de pan de $\frac{5}{4}$ *de Kgrs. Con esta masa quieres hacer 10 panecillos iguales de modo que gastes toda la masa. ¿Cuánto pesará cada panecillo?*

Para proceder a la evaluación conjunta de esta tarea sale a la pizarra el alumno B07 que resuelve bien la tarea pero comete errores en la simbolización de la equivalencia de fracciones porque se ha pedido ayuda a uno de sus compañeros de aula.

Antes de concluir la sesión los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 15 con el encargo de que resuelvan, como trabajo para realizar en sus casas, el problema enunciado en la Ficha y que mostramos a continuación:

Un equipo de 4 atletas participa en una carrera de relevos que consiste en correr $\frac{2}{5}$ *de kilómetro. Si los cuatro atletas recorren la misma longitud, expresa con una fracción la cantidad de longitud que recorre cada uno.*

Asistencia de los alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos de la Segunda Etapa comprenden el significado de la división de una fracción entre un número natural y saben encontrar el resultado de esta operación aunque no hayan recibido enseñanza del algoritmo convencional de la división.

La estrategia mayoritaria que utilizan los alumnos consiste en buscar una fracción equivalente que tenga como numerador una cantidad igual o múltiplo entero del divisor. En el caso del problema planteado en la Ficha de trabajo nº 13 algunos alumnos (B01, B03, B06, B08, B11) además de utilizar la equivalencia de fracciones, se ayudan de gráficos. Todos los alumnos, menos B02 y B09, resuelven correctamente el problema. En general, los alumnos dan muestras de comprender la estrategia basada en el reparto igualitario y son capaces de simbolizar, de forma adecuada, la equivalencia de fracciones. No obstante, persiste bastantes alumnos (B02, B04, B05, B07, B08, B09, B10, B13, B14, B15 y B17) la confusión entre la operación multiplicación de una fracción por un natural y la equivalencia de fracciones, porque indican que, además de la división, han utilizado la operación multiplicación.

Los alumnos obtienen buenos resultados cuando resuelven el problema que se enuncia en la Ficha de trabajo nº 14. Los dos tercios de los alumnos de la Segunda Etapa reconocen que la división es la operación que resuelve el problema y, además, este mismo porcentaje de alumnos encuentran la solución del problema utilizando el concepto de equivalencia de fracciones y el significado de reparto igualitario.

La gestión simbólica de la equivalencia de fracciones que realizan los escolares es un buen indicador para determinar la comprensión que poseen del concepto de fracción. En efecto, si estudiamos las respuestas de los alumnos que utilizan, de forma adecuada, la equivalencia de fracciones detectamos que el 86% de los alumnos de la Segunda Etapa identifican la operación división de una fracción entre un número natural. Los alumnos que gestionan de forma adecuada las representaciones simbólicas están más preparados para identificar la operación que resuelve el problema.

Conforme los alumnos del grupo han ido resolviendo las tareas observamos una mejor utilización de las representaciones simbólicas en la gestión de la equivalencia de fracciones y en la identificación de la operación división. Seis alumnos (B02, B04, B06, B07, B08 y B13) yerran al resolver el problema que se propone en la Ficha de trabajo nº 14.

<u>Valoración</u>
Los modelos de medida se muestran apropiados para introducir el significado y cálculo de la operación división de una fracción entre un número natural. Conviene tener en cuenta que las situaciones problemáticas planteadas son de cociente partitivo y que esta operación se ha enseñado, conjuntamente, desde los significados de medida y de cociente partitivo.

La pauta metodológica adoptada en la implementación de esta propuesta y que consiste en que los alumnos resuelven los problemas sin conocer previamente los algoritmos de cálculo de las operaciones se ha mostrado eficaz porque los alumnos son capaces de poner en juego, con éxito, estrategias de resolución de problemas.

El manejo de las representaciones simbólicas crea dificultades a los escolares. En particular, se detectan errores en la simbolización de la equivalencia de fracciones porque los alumnos confunden la técnica de obtención de fracciones equivalentes con la multiplicación de una fracción por un número natural.

<u>Toma de decisiones</u>
No se ha alcanzado plenamente el objetivo de que los alumnos de quinto curso de Educación Primaria efectúen representaciones simbólicas adecuadas, con fracciones, para resolver los problemas de división de una fracción por un natural. Se trata de un objetivo que precisa períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo y que hay que retomar en sexto curso de Educación Primaria. Proponemos continuar con la secuencia de enseñanza prevista y abordar, en sexto curso de Educación Primaria, los objetivos de institucionalizar los algoritmos de cálculo con fracciones y de reforzar las técnicas de cálculo de los algoritmos habituales.

No obstante, se decide dedicar una sesión más a reforzar el significado de las operaciones con fracciones y de las técnicas de cálculo de dichas operaciones. En la siguiente sesión se va a proceder a evaluar la Ficha de trabajo nº 15 y la Ficha de trabajo 15BIS que se compone de tres tareas cuyo enunciado se muestra a continuación:

1º. Para celebrar tu cumpleaños invitas a tus amigas a merendar pizza en tu casa. Sois 6 amigas, contándote tú. ¿Cuántas pizzas deberás comprar si quieres servir $\frac{2}{3}$ de pizza a cada una?

2º. Tres hermanos van a cenar. Tienen una tortilla de patata. Como dos de los hermanos se retrasan el otro hermano se sienta a la mesa y come $\frac{1}{4}$ de tortilla. Los otros dos hermanos deciden repartirse, en partes iguales, la cantidad sobrante. Se pregunta:

a) ¿Cuánta tortilla comerá cada uno de los hermanos que se han retrasado?
b) ¿Comen todos la misma cantidad de tortilla?. ¿Cuánta tortilla comen unos más que el otro?

3º. Jaime come $\frac{1}{3}$ de tarta y su hermana Ángela la cuarta parte del resto. Se pregunta:

a) ¿Cuánta tarta come Ángela?
b) ¿Cuánta tarta comen entre los dos hermanos?

Los alumnos reciben las tarjetas de evaluación Fichas de trabajo nº 15 y nº 15BIS con el encargo de que resuelvan las tareas que se proponen como trabajo para realizar en sus casas y que las traigan cumplimentadas a la siguiente sesión de clase.

Día 21-12-2004 (Décimo tercera sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 15.
2º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 15BIS.

Ejecución

Comienza la sesión de clase y el profesor recoge la Ficha de trabajo nº 15 procede a evaluar la tarea. Uno de los alumnos que no ha traído la tarea resuelta, B01, sale a la pizarra y resuelve el problema utilizando representaciones gráficas y representaciones simbólicas.

Después, el profesor recoge la Ficha de trabajo nº 15BIS. Además, del alumno B01, otros cinco alumnos (B02, B04, B07, B08 y B16) dicen que no la traen resuelta la Ficha porque no han sabido resolver los problemas que componen la tarea. Los alumnos B04, B07 y B08 salen a la pizarra para evaluar la Ficha de trabajo nº 15BIS y, con la ayuda del profesor, resuelven los tres problemas que componen la tarea.

Antes de concluir la sesión de clase los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de una nueva tarea con el encargo de que resuelvan, como trabajo para realizar en sus casas, durante las fiestas de navidad. Mostramos a continuación los enunciados de los problemas que componen esta tarea:

1º. Un comerciante de telas ha vendido la mitad de una pieza de tela y después vende la quinta parte de la misma pieza.

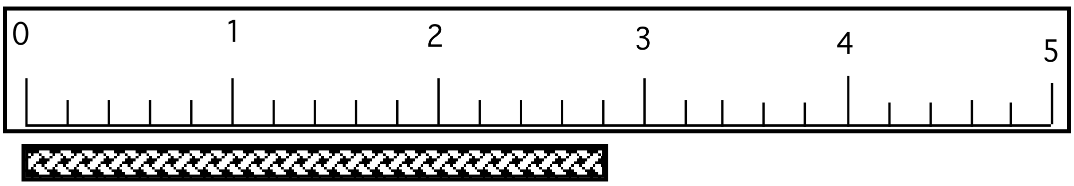
a) ¿Qué parte de la pieza ha vendido?

b) ¿Qué parte de la pieza le queda por vender?

c) Si la pieza tiene 20 metros, ¿qué longitud de tela queda por vender?

2º. Un pescadero vende los 3/4 de la mercancía y le quedan 15 Kgrs. por vender. ¿Cuántos kgrs. de mercancía tenía?

3º. Con la ayuda de la siguiente regla, mide la longitud de la cuerda:



Debes expresar el resultado de la medida con una fracción. Te recuerdo que la unidad es el segmento que va de 0 a 1.

4ª. Halla la suma: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$

Asistencia de alumnos

Asisten todos los alumnos.

Aspectos actitudinales

A pesar de ser este el último día lectivo del trimestre los alumnos han tenido buena actitud. No obstante, el inminente comienzo del período vacacional hace que el rendimiento de los alumnos baje considerablemente cuando se les encarga que realicen alguna tarea en sus casas.

Aspectos relacionados con la comprensión

Los tres problemas que se plantean en la Ficha de trabajo nº 15BIS y el problema de la Ficha de trabajo nº 15 se resuelven con las operaciones de multiplicación y/o división de una fracción por un número natural. El problema nº 3 de la Ficha de trabajo nº 15BIS ha presentado mayores dificultades a los alumnos porque no han identificado la operación división. En la propuesta didáctica la mayoría de las situaciones trabajadas son de reparto; en cambio, la acción que plantea este problema es de disminución de la cantidad en partes iguales: "hacer la cuarta parte de una cantidad". Los alumnos identifican la operación división con mayor facilidad en situaciones de reparto. Posiblemente, los alumnos hubieran obtenido mejores resultados si en el enunciado del problema se evoca una acción de reparto:

"Carmen come $\frac{1}{3}$ de tarta y el resto de la tarta lo reparte entre cuatro amigos. ¿Cuánta tarta come cada una de las amigos de Carmen?"

La formulación del problema nº 3:

3º. Jaime come $\frac{1}{3}$ *de tarta y su hermana Ángela la cuarta parte del resto. Se pregunta:*   *a) ¿Cuánta tarta come Ángela?*   *b) ¿Cuánta tarta comen entre los dos hermanos?*

plantea numerosas dificultades a los alumnos. Destacamos algunas de ellas:

a) en la comprensión del enunciado: “la cuarta parte del resto”
b) en la identificación de la operación porque no posee una estructura de reparto.
c) en el reconocimiento de la unidad (la tarta) y
d) en el calculo operatorio.

<u>Valoración</u>
A modo de resumen, exponemos algunas conclusiones parciales referidas a la enseñanza de las operaciones con fracciones.

En general, los alumnos han alcanzado los siguientes objetivos durante la fase de enseñanza referida a las operaciones con fracciones:

1º conceptualizan la fracción y sus términos como resultado de una medida.

2º comprenden que las fracciones equivalentes sirven para expresar de diferentes formas la misma cantidad de magnitud.

3º saben obtener fracciones equivalentes a una dada

4º identifican las acciones que justifican la existencia de la operaciones de suma, resta, multiplicación por un natural y división por un natural.

5º reconocen las situaciones en las que deben utilizar la equivalencia de fracciones. Por ejemplo, cuando:

a) deben comparar cantidades de magnitudes expresadas con diferentes subunidades de distinto tamaño.

b) deben sumar o restar cantidades de magnitudes expresadas con diferentes subunidades de distinto tamaño

c) deben expresar el resultado de la operación con una representación fraccionaria más sencilla.

La simplificación de fracciones plantea mayores dificultades porque en la secuencia de enseñanza hemos justificado la equivalencia a través de fraccionamientos, cada vez más finos, de la unidad. Con esta introducción los alumnos obtienen fracciones equivalentes con numeradores y denominadores múltiplos de los iniciales. El proceso de simplificación va en sentido contrario y consiste en agrupar fraccionamientos y número de subunidades, es decir, en dividir numerador y denominador por un divisor común. Por este motivo, la técnica de la simplificación les resulta menos familiar y, por lo tanto, susceptible de cometer mayor número de errores. En sexto curso se va incidir en este procedimiento cuando los alumnos hayan estudiado conceptos de divisibilidad de naturales.

d) deben repartir cantidades de magnitud, expresada por a subunidades de tamaño $\frac{1}{b}$, en un número de partes iguales (c) y el número de subunidades (a) no es múltiplo del número de partes iguales (c). Con símbolos: $\frac{a}{b} : c$

6º conocen y saben aplicar los procedimientos de cálculo de las cuatro operaciones con fracciones. No obstante, hemos detectado inseguridades en los automatismos de cálculo por falta de ejercitación. En sexto curso se deberá reforzar las destrezas computacionales con fracciones.

Durante la implementación de la propuesta hemos detectados las siguientes dificultades:

1º Utilización de la equivalencia de fracciones en situaciones inadecuadas, fundamentalmente cuando tienen que multiplicar una fracción por un número natural. El empleo habitual de la estrategia basada en la equivalencia para realizar otras operaciones les lleva a pensar que esta estrategia es adecuada para multiplicar una fracción por un número natural

2º Confusión entre la operación multiplicación o división y la técnica de obtención de fracciones equivalentes. Acontece esta dificultad a pesar de que, en la propuesta de enseñanza, hemos simbolizado de forma diferente las operaciones y la relación de equivalencia. Concluimos que el trabajo con representaciones simbólicas es complejo y de gran dificultad conceptual.

3º La simbolización del cálculo de la división presenta mayores dificultades que en el caso de la multiplicación. La estrategia mayoritaria que utilizan los alumnos consiste en buscar una fracción equivalente que tenga como numerador una cantidad igual o múltiplo entero del divisor. Esta estrategia es coherente con el significado de la división partitiva.

Hemos detectado claramente la influencia, en este caso perniciosa, de la división entera de números naturales. Por fortuna, son muy pocos los alumnos que proceden del siguiente modo:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3:2}{4} = \frac{1}{4}$$

4º En las tareas de repaso de operaciones con fracciones hemos introducido, deliberadamente, un tipo de problemas típicos de la secuencia de enseñanza de la fracción siguiendo el modelo parte- todo. Estos problemas no son propiamente de medida porque la magnitud no está bien definida (se habla de cantidad de tarta, pizza, de la pieza de tela) ni tampoco se especifica cual es la unidad de medida (una tarta, una pizza, una pieza de tela de tela).

Observamos que desde el modelo medida los problemas aritméticos con fracciones les resultan más sencillas a los escolares porque éstos reconocen con facilidad la magnitud y la unidad de medida. Concluimos que la transferencia entre los significados de los modelos de medida y de parte-todo no es inmediata. Ahora bien, pensamos que esta nueva tipología de problemas puede ser abordada desde el modelo medida si se precisa, con claridad, qué magnitud se trabaja y cuál es la unidad de medida.

Durante la implementación de la propuesta didáctica aconsejamos tres actuaciones que hemos incorporado en esta segunda etapa experimental:

1º Resolver las situaciones problemáticas con gráficos y material (en los casos que sea posible); y después traducir al lenguaje simbólico las acciones realizadas de modo gráfico o con material.

2º Mantener simbolizaciones diferenciadas en la obtención de fracciones equivalentes a una dada, del tipo:

$$\underbrace{\overbrace{\frac{3}{4} = \frac{6}{8}}^{\text{x 2}}}_{\text{x 2}}$$

3º Justificar los procedimientos de cálculo algorítmico de las operaciones desde el modelo de aprendizaje, es decir, sobre la base de las acciones que involucran la resolución del problema. Sirva de ejemplo la división de una fracción entre un número natural. La estrategia de resolución que ha aparecido en el aula, en las tareas de división partitiva, aconseja que los alumnos no reciban enseñanza del algoritmo tradicional de la división de una fracción entre un número natural. El procedimiento que se propone es el siguiente:

> *"Para dividir una fracción por un número natural debes hallar una fracción equivalente a la dada que tenga como numerador un número de subunidades que pueda ser repartido por completo en tantas partes como indica el número natural, y después debes realizar la división recordando la nueva medida de las subunidades"*

Toma de decisiones.

Hemos concluido las sesiones de enseñanza referidas a las operaciones con fracciones desde el modelo medida. En la próxima sesión, a la vuelta de las vacaciones de navidad, vamos a introducir un nuevo significado de la fracción: como resultado de un reparto igualitario.

Día 10-1-2005 (Décimo cuarta sesión)

Plan previsto.

1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo de refuerzo del significado y cálculo de las operaciones con fracciones.

2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 16.

3º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 17.

Ejecución

El profesor pregunta a los alumnos si han traído resuelta la Ficha de trabajo de refuerzo del significado y cálculo de las operaciones con fracciones. Varios alumnos afirman haberla dejado olvidada en sus casas. El profesor les indica que deben traerla a la sesión de clase del próximo día y que entonces se procederá a su evaluación conjunta en el aula.

A continuación los alumnos escriben en sus cuadernos el enunciado de la actividad siguiente:

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 2 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

El profesor pregunta: "¿Puede hacerse este reparto?"

El profesor recordará que, a veces, no es posible repartir en partes iguales determinadas cantidades de magnitud. Un ejemplo de esta situación ocurre cuando se desea formar dos grupos para jugar al "balón prisionero" y hay un número impar de personas. Pero cuando las cantidades de magnitud se pueden fraccionar entonces la división de números naturales no resuelve la situación porque podemos dar el resultado exacto de un reparto utilizando fracciones.

Después orienta: "Os recuerdo que la cantidad de regaliz se mide tomando como unidad la longitud de una barra y que las barras se pueden fraccionar"

Divide la pizarra en tres partes iguales por dos líneas verticales, y a la izquierda y a la derecha escribe:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO
Hay 3 barras y 2 niños		Cada niño recibe $\boxed{}$ barra

Simbolización de los tres momentos de reparto:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO
3 : 2	$3 : 2 = \frac{3}{1} : 2 = \frac{6}{2} : 2 = \frac{3}{2}$	Cada niño recibe $\frac{3}{2}$ de barra

Hemos decidido estudiar las limitaciones y potencialidades de la simbolización del reparto a:b, en vez de utilizar la caja de la división. Realizamos esta modificación para separar el proceso de reparto de la técnica de la división entera que conocen los alumnos. Además, en esta Segundo Etapa de la experimentación hemos incidido especialmente en el procedimiento de cálculo de una fracción por un número natural; y hemos utilizado la simbolización "de los dos puntos".

Sobre el proceso de reparto se recuerda a los alumnos que fraccionamos TODAS las barras de regaliz, es decir, que realizamos el reparto en UNA SOLA FASE.

También mostramos el proceso de reparto con representaciones gráficas. Sin embargo, los alumnos no reciben, de momento, ninguna te explicación sobre los significado de los términos de la fracción. En su lugar reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 16 con la consigna de cumplimentarla de inmediato. En sesiones posteriores, el profesor institucionalizará los dos significados de la fracción y de los términos de ésta.

Como reparto:
1º La fracción indica el resultado del reparto. Es la cantidad de barra de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto.

2º El numerador indica el número de barras que había antes de hacer el reparto.

3º El denominador indica el número de personas que participan en el reparto.

Como medida:
1º El denominador indica el tamaño de la subunidad con la que mide una determinada cantidad de magnitud mediante un número entero de subunidades.

2º El numerador indica el número de las subunidades que componen la cantidad de magnitud.

Más adelante, conviene que el profesor realice una intervención general para incidir en los siguientes aspectos:

1º El atributo o característica que nos interesa de las barras es la longitud. La magnitud que consideramos es la longitud de las barras de regaliz.

2º La unidad de medida es la longitud de una de las barras de regaliz. Todas las barras tienen la misma longitud.

3º El reparto lo realizamos en una sola fase, es decir, se fraccionan TODAS las barras, a la vez, en partes iguales.

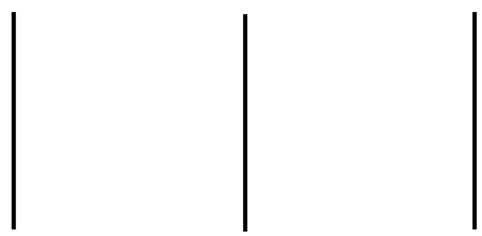
4º La fracción nos indica la cantidad de longitud de regaliz que recibe cada persona. El numerador y el denominador de la fracción se pueden definir con el significado de medida pero, si observamos las condiciones iniciales del reparto, vemos que el numerador es el número de barras de regaliz y el denominador el número de personas que participan en el reparto.

En la segunda parte de la sesión los alumnos resulten la Ficha de trabajo nº 17 que tiene el mismo diseño que la Ficha nº 16 y cuyo enunciado es el siguiente:

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 4 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:



2. Completad la tabla siguiente:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO
Hay 3 barras para 4 personas		RESULTADO DEL REPARTO
3 : 4		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ____

El denominador indica ____

Asistencia de alumnos
Asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión.
Los alumnos comprenden el significado del reparto. Los alumnos encuentran, con facilidad, el resultado de los repartos igualitarios que plantean las Fichas de trabajo nº 16 y nº 17.

A pesar de que los alumnos no han recibido enseñanza del significado de los términos de la fracción, éstos son capaces de dar respuestas atinadas sobre el significado de la fracción como resultado de un reparto. En cuanto al significado de la fracción y de los términos de la fracción que expresa el resultado del reparto, los resultados obtenidos por los alumnos indican que, en general, saben interpretar de forma adecuada las componentes de la representación fraccionaria. No obstante, hemos detectado tres tipos de deficiencias en las respuestas de los escolares, a saber:

- interferencias del entorno familiar de los alumnos que llevan a éstos a interpretar el numerador desde el significado parte-todo. Por ejemplo, el alumno B02 escribe "las partes que hemos cogido"
- incorrecciones en la formulación del significado de los términos de la fracción como resultado de una medida. Por ejemplo, el alumno B06 interpreta el numerador como "lo que tocan a los dos niños", y
- escasa presencia de formulaciones de los significados de los términos de la fracción a partir de las condiciones iniciales del reparto.

Los alumnos han tenido dificultades para simbolizar el proceso de reparto que plantea las Fichas de trabajo nº 16 y nº 17 porque son las primeras tareas en la que la fracción aparece como resultado de un reparto.

Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la Fichas de trabajo nº 17 muestra un nivel de comprensión inestable que es típico en los momentos iniciales de la secuencia de enseñanza. El 50% de los alumnos tiene un nivel de comprensión alto. Estos resultados quedan reflejados en la siguiente tabla:

Indicadores de comprensión	*Número de alumnos*
no sabe repartir con símbolos ni expresar correctamente los significados del numerador y del denominador	**5** (B02, B05, B07, B14 y B18)
sabe repartir con símbolos pero no expresa correctamente los significados del numerador y del denominador	**4** (B01, B08, B11 y B16)
sabe repartir con símbolos y expresar correctamente los significados del numerador y del denominador	**9** (B03, B04, B06, B09, B10, B12, B13, B15 y B17)

Valoración
Los alumnos de quinto curso dan muestras de comprender el proceso de reparto igualitario porque entienden que necesitan medir la cantidad de magnitud longitud que recibe cada persona y reconocen la necesidad de fraccionar las barras (tiras de papel) en partes iguales como una actividad previa y necesaria para poder medir y repartir.

En cuanto al significado de la fracción y de los términos de la fracción que expresa el resultado del reparto, los alumnos saben interpretar de forma adecuada los términos de la representación fraccionaria, pero tienden a expresarlos con ideas de medida antes que con ideas de reparto. En esta Segunda Etapa Experimental se toma la decisión de que los profesores de aula no institucionalicen los significados de los términos de la fracción hasta que algunos alumnos consigan interpretar los términos desde los significados de medida y de cociente partitivo. En estas condiciones los alumnos de la Segunda Etapa no se percatan de que el numerador indica el número de barras y el denominador el número de personas.

Las dificultades que se observan en los escolares para expresar los términos de la fracción en función de las condiciones iniciales del reparto tienen su origen en el trabajo que realizan en el modelo de aprendizaje. El hecho de que los alumnos estén más familiarizados con el modelo de medida les lleva a interpretar la fracción como el resultado del producto final y a olvidarse de las condiciones iniciales existentes en el momento anterior a la realización del reparto.

El modelo de cociente partitivo con la magnitud longitud y la técnica de reparto en una sola fase ha funcionado bien en la experimentación de aula. Los dos tercios de los alumnos de la Segunda Etapa utilizan correctamente representaciones simbólicas para expresar con una fracción el resultado del reparto igualitario.

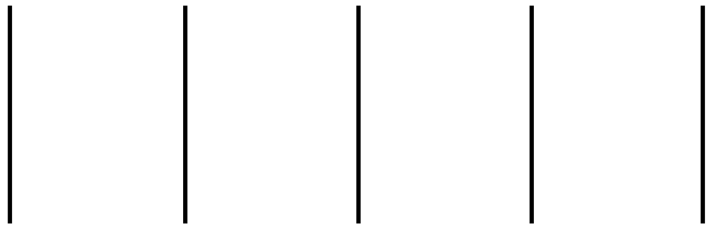
Día 11-1-2005 (Décimo quinta sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 18.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 19.

Ejecución
En la primera parte de la sesión los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 18 que plantea la situación problemática siguiente:

Vais a repartir 5 barras de regaliz entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

SOLUCIÓN: ____

1. Dibujad como habéis fraccionado las barras de regaliz:



2. Completad la tabla siguiente:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO
Hay 5 barras para 3 personas		RESULTADO DEL REPARTO
5 : 3		

3. Indicad el significado del numerador y del denominador de la FRACCIÓN que expresa el resultado del reparto:

El numerador indica ____

El denominador indica ____

En la segunda parte de la sesión los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 19 que plantea una situación problemática de reparto análoga a la de la Ficha anterior, solo que ahora los alumnos deben realizar el siguiente reparto igualitario:

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 5 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

Cuando los alumnos resuelven esta Ficha de trabajo se procede a la evaluación conjunta de la tarea. La alumna B14 que no sabido encontrar la fracción que expresa el resultado del reparto sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor y de su compañeros, resuelve la tarea.

Asistencia de alumnos
Asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Para analizar los resultados obtenidos por los alumnos al resolver las Fichas de trabajo nº 18 y nº 19 utilizamos dos unidades Análisis de la Comprensión del Contenido:

- Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la fracción que expresa el resultado del reparto igualitario y de los términos de la fracción, y
- Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto.

En la primera Unidad de Análisis consideramos los siguientes criterios:

1.- Interpretación errónea o inadecuada de las componentes del reparto

2.- Interpretación errónea o inadecuada de una de las componentes del reparto

3.- Interpretación correcta o bastante adecuada de las componentes del reparto.

En la segunda Unidad de Análisis consideramos los siguientes criterios:

1.- No encuentra la fracción, escribe una fracción incorrecta o es correcta pero no la justifica.

2.- Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas adecuadas y no utiliza representaciones simbólicas o son inadecuadas.

3.- Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas y representaciones simbólicas adecuadas.

Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la fracción	*Ficha de trabajo nº 18*	*Ficha de trabajo nº 19*
Interpretación errónea o inadecuada de las componentes del reparto	**0**	**2** (B05, B07)
Interpretación errónea o inadecuada de una de las componentes del reparto	**6** (B01, B02, B04, B07, B13 y B18)	**4** (B01, B02, B08 y B14)
Interpretación correcta o bastante adecuada de las componentes del reparto	**12** (B03, B05, B06, B08, B09, B10, B11, B12, B14 B15, B16 y B17)	**12** (B03, B04, B06, B09, B10, B11, B12, B13, B15, B16, B17 y B18)

Utilización de representaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto	*Ficha de trabajo nº 18*	*Ficha de trabajo nº 19*
No encuentra la fracción, escribe una fracción incorrecta o es correcta pero no la justifica	**5** (B02, B06, B13, B14 y B18)	**5** (B02, B05, B07, B14 y B18)
Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas adecuadas y no utiliza representaciones simbólicas o son inadecuadas	**1** (B05)	**0**
Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas y representaciones simbólicas adecuadas	**12** (B01, B03, B04, B07, B08, B09, B10, B11, B12, B15, B16 y B17)	**13** (B01, B03, B04, B06, B08, B09, B10, B11, B12, B13, B15, B16 y B17)

<u>Valoración</u>

Los alumnos de quinto curso obtienen resultados análogos en las Fichas de trabajo nº 18 y nº 19. Los dos tercios de los alumnos utilizan representaciones simbólicas adecuadas para expresar, con una fracción, el resultado de repartos igualitarios. El hecho de que el número de barras de regaliz sea mayor o menor que el número de personas que participan en el reparto no influye en los resultados obtenidos por los alumnos, es decir, los alumnos utilizan el mismo procedimiento aunque la fracción que indica el reparto sea propia o impropia.

Los alumnos poseen una comprensión limitada del significado e reparto porque cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 18 que plantea el reparto de "5 barras para 3 niños" no ponen en juego nuevas estrategias como la del reparto en varias fases que consiste en repartir una barra a cada niño y, después, repartir las 2 barras sobrantes.

A pesar que la secuencia de enseñanza funciona según lo previsto, debemos indicar que la idea de reparto es más compleja que la de medida de una cantidad continua. El caso de la alumna B18 que posee un nivel de comprensión alto confirma este hecho: esta alumna mantiene en estas tareas errores persistentes como consecuencia de que considera como unidad de medida la cantidad de longitud de todas las barras que se desean repartir en lugar de la cantidad de longitud de <u>una barra</u>.

Toma de decisiones
Dado que los alumnos obtienen resultados aceptables en las Fichas de búsqueda de la representación fraccionaria el Equipo de Investigación toma la decisión de plantear, en la siguiente sesión, la última tarea de búsqueda de la representación fraccionaria, y pasar a estudiar el concepto de equivalencia asociado a la fracción como resultado de repartos igualitarios

Día 13-1-2005 (Décimo sexta sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 20.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 21.

Ejecución
En la primera parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 20 que plantea una situación problemática de reparto análoga a la de las Fichas resueltas en las dos últimas sesiones, solo que ahora los alumnos deben realizar el siguiente reparto igualitario:

Vais a repartir 3 barras de regaliz entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?

Cuando los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 20 sale a la pizarra el alumno B07 que no sabido encontrar la representación fraccionaria correcta. Este alumno, con la ayuda del profesor escribe la representación simbólica del reparto y los significados del numerador y del denominador de la fracción.

Antes de proceder a la resolución de la Ficha de trabajo nº 21 el profesor pregunta si todos los alumnos han resuelto la tarea de refuerzo de las operaciones con fracciones que se les propuso como trabajo para casas durante las fiestas de Navidad. Dado que son muy pocos los alumnos que no han traído resuelta la Tarea de refuerzo procedemos a su evaluación conjunta. En general, los alumnos tienen dificultades para resolver los dos primeros problemas cuyos enunciados recordamos:

1º. Un comerciante de telas ha vendido la mitad de una pieza de tela y después vende la quinta parte de la misma pieza.

a) ¿Qué parte de la pieza ha vendido?
b) ¿Qué parte de la pieza le queda por vender?
c) Si la pieza tiene 20 metros, ¿qué longitud de tela queda por vender?

2º. Un pescadero vende los 3/4 de la mercancía y le quedan 15 Kgrs. por vender. ¿Cuántos kgrs. de mercancía tenía?

Las dificultades de los alumnos se concretan en la incapacidad para identificar la unidad de medida. Pensamos que la estructura semántica del primer problema se asemeja más al trabajo con el modelo parte-todo que con el modelo medida, dado que la unidad de medida aparece desdibujada al no tratarse de unidades convencionales del Sistema Métrico Decimal. Obsérvese que el primer problema la unidad es la ”pieza de tela” en lugar de “metros de tela”.

El problema nº 2, tiene la dificultad añadida de los alumnos deben reconstruir la unidad de medida que el peso de toda la mercancía. Concluimos que la transferencia entre los significados de los modelos de medida y de parte-todo no es inmediata ni, mucho menos, evidente.

Los problemas que componen esta Tarea de refuerzo se corrigen durante la sesión de clase. No queda tiempo para plantear a los alumnos la resolución de Ficha de trabajo nº 21 que se trabajará al comienzo de la siguiente sesión de clase.

Asistencia de alumnos
Asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos saben encontrar el resultado del reparto de “*3 barras de regaliz entre 3 niños*”. Tan solo dos alumnos (B07 y B08) no encuentran la respuesta correcta. Los alumnos aportan una amplia variedad de soluciones en la Ficha de trabajo nº 20, que mostramos en la siguiente tabla:

Resultado del reparto en la Ficha nº 20	*Nº de alumnos*
1 barra	**5** B09, B11, B12, B13, B18
1/1 barra	**7** B02, B03, B05, B06, B10, B14, B16
3/3 barra	**4** B01, B04, B15, B17
1/3 barra	**1** B07
No responde	**1** B08

En general, los alumnos utilizan representaciones simbólicas adecuadas para encontrar el resultado del reparto. Se han observado tres técnicas:

a) la división de naturales. Estos alumnos (B01, B02, B05, B14) utilizan la caja convencional de la división para calcular 3 : 3

b) Fraccionar las 3 barras en tres partes iguales. Tres alumnos (B04, B15 y B17) fraccionan en tercios y escriben:

$$\frac{9}{3} : 3 = \frac{3}{3} = 1$$

c) El grupo más numeroso de alumnos (B03, B06, B09, B10, B11, B12, B13, B16 y B18) opta por no fraccionar ninguna de las tres barras. Esto es lo que explica el alumno B10 cuando escribe "no hace falta fraccionar" y simboliza:

$$\frac{3}{1} : 3 = \frac{1}{1} = 1$$

Las dos última técnicas se basan en la idea de fraccionamiento de la unidad, mientras que la primera los alumnos se sirven del conocimiento de la división de naturales como operación que modeliza las situaciones de reparto.

Los alumnos conocen el significado de la fracción y de los términos de ésta. Sin embargo, las características particulares de la tarea en la que se reparten 3 barras de regaliz entre 3 niños pone de manifiesto un aspecto novedoso: la mayoría de los alumnos no intentan dar un significado coherente a los términos de la fracción que obtienen como resultado del reparto. Los alumnos que aporta como resultado del reparto $\frac{1}{1}$ de barra optan por escribir frases esteriotipadas para expresar el significado del denominador. Solo el alumno B10 indica claramente que " no hace falta fraccionar".

<u>Valoración</u>
Conforme los alumnos resuelven tareas de reparto realizadas en una sola fase se observa que mejora la expresión de los significados del numerador y del denominador. Los escolares prefieren explicar los términos de la fracción con la idea de medida antes que con el significado de reparto. La mayoría de los alumnos asocia al denominador de la fracción que expresa el resultado del reparto "el número de partes iguales en que se fracciona la unidad", y al numerador "el número de partes que das a cada niño".

<u>Toma de decisiones.</u>
Para reforzar la técnica de reparto en una sola fase y profundizar en el concepto de equivalencia de fracciones proponemos la resolución de la Fichas de trabajo nº 21 y nº 22. En concreto la ficha nº 21 plantea realizar los repartos "2 barras entre 3 niños" y "4 barras entre 6 niños" y comparar ambos repartos. Mostramos la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 21:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA FICHA 21. Fecha: ______________

"Vais a repartir 2 barras de regaliz entre 3 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?"

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para resolver la tarea:

☐ He realizado el siguiente dibujo:

☐ He utilizado símbolos:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO RESULTADO

"Vais a repartir 4 barras de regaliz entre 6 niños. ¿Qué cantidad de regaliz recibe cada niño?"

SOLUCIÓN: ____

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para resolver la tarea:

☐ He realizado el siguiente dibujo:

☐ He utilizado símbolos:

ANTES DE HACER EL REPARTO	COMO SE HACE EL REPARTO	DESPUÉS DE HACER EL REPARTO RESULTADO

Día 14-1-2005 (Décimo séptima sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 21.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 22.

Ejecución

En la primera parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 21 que refuerza la técnica del reparto en una sola fase e introduce el concepto de equivalencia de fracciones asociado al significado de cociente partitivo. Los alumnos han solicitado de los profesores de aula numerosas explicaciones porque la Ficha nº 21 tiene un formato diferente que el de las Fichas precedentes.

Un grupo reducido de alumnos tiene dificultades para simbolizar correctamente los procesos de reparto. Los alumnos comprenden que los dos repartos que plantea esta tarea iguales porque en ambos repartos los participantes reciben la misma cantidad de regaliz. Para ejemplificar este resultado el profesor solicita a dos alumnos que salgan a la pizarra y que se repartan, de modo igualitario, tres tiras de papel. Después solicita la colaboración de otros dos alumnos para que se repartan otras tres tiras de papel. Finalmente, los cuatro alumnos se reparten seis tiras de papel; y los alumnos observan que los repartos “2 barras entre 3 niños” y “4 barras entre 6 niños” son iguales porque en ambos se reciben la misma cantidad de longitud, es decir , en los dos repartos las personas implicadas reciben la misma cantidad de tira de papel: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ de barra.

En la segunda parte de la sesión de clase los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de Ficha nº 22, que tiene un formato análogo, a la Ficha nº 21 y cuya primera pregunta propone realizar el reparto de "6 barras de regaliz entre 4 niños". El proceso de reparto deben hacerlo con gráficos y con símbolo. Cuando los alumnos resuelven este reparto, los alumnos afrontan la resolución de la segunda pregunta que propone realizar el reparto de "9 barras de regaliz entre 6 niños". Cuando los alumnos terminan el profesor les pregunta si en los dos repartos los niños reciben la misma cantidad de regaliz y que expliquen si esto es posible. Antes de concluir la sesión de clase se procede a realizar la evaluación conjunta de esta Ficha de trabajo.

Asistencia de alumnos
Asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados obtenidos por los alumnos de quinto curso indican una mejora en la representación gráfica y simbólica del proceso del reparto efectuado en una fase. Los dos tercios de los alumnos saben expresar con una fracción el resultado de los repartos equivalente utilizando gráficos o representaciones simbólicas.

Los resultados obtenidos por los alumnos del grupo cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 22 son análogos a los de las tareas precedentes: 12 alumnos (B01, B03, B06, B07, B09, B10, B11, B12, B13, B15, B16, B17) utilizan representaciones simbólicas adecuadas, mientras que 6 alumnos (B02, B04, B05, B08, B14 y B18) cometen errores en las representaciones simbólicas, a pesar de que la mayoría escriben las fracciones correctas. En efecto, a lo largo de las últimas tareas se mantiene el porcentajes de éxito se mantienen pero aumenta la comprensión de los alumnos. Se puede observar como los alumnos B07, B10 y B16 que poseen diferentes niveles de comprensión optan por fraccionar las barras en dos partes iguales de modo que obtienen como solución de los repartos de "6 barras entre 4 niños" y de "9 barras entre 6 niños" la misma fracción 3/2 de barra.

Las representaciones gráficas que efectúan los alumnos son poco precisas. Todos los alumnos indican el fraccionamiento de las unidades o barras pero no designan con letras o símbolos a los participantes del reparto, ni tampoco marcan las cantidades de longitud que recibe cada uno de ellos. Solo los alumnos B07, B10, B11 y B16 realizan representaciones gráficas adecuadas cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 22. El Equipo investigador

Valoración
El modelo de cociente partitivo ha funcionado bien en la propuesta didáctica porque los alumnos son capaces de encontrar la representación fraccionaria que expresa el resultado del reparto. En este modelo el concepto de equivalencia de fracciones aparece en el aula de modo natural asociado a la igualdad de cantidad de magnitud que resulta de realizar un reparto igualitario.

La enseñanza de la fracción como resultado del reparto igualitario realizado en una sola fase ha sido eficaz porque los escolares dotan a la representación fraccionaria de un nuevo significado. Ahora bien, ha sido necesario dedicar cuatro sesiones de aula para ejercitar la técnica del reparto en una sola fase para conseguir que los dos tercios de los alumnos utilicen representaciones simbólicas adecuadas para reproducir la técnica del reparto en una fase. Poco a poco, durante estas cuatro sesiones los alumnos asignan a los términos de la fracción del significado de cociente partitivo a través de las condiciones iniciales del reparto porque, inicialmente, los alumnos se muestran reacios a aceptar este nuevo significado de la fracción dado que tienden a utilizar el significado de medida que es el único que conocen hasta este momento.

En general, los alumnos no se percatan de que el resultado del reparto es el mismo si aumentan o disminuyen el mismo número de veces el número de barras a repartir y el número de participantes en el reparto.

Comentarios sobre las modificaciones efectuadas en la Segunda Etapa con respecto a la Propuesta implementada en la Primera Etapa:
En esta Segunda Etapa de la Experimentación de la propuesta para quinto curso hemos introducido algunas variaciones que vamos a comentar:

1º No hemos utilizado las cañas de un metro y en su lugar hemos utilizado tiras de papel de un metro que simulan las barras de regaliz. Este material es más manejable, permite de forma rápida en fraccionamiento en partes iguales, y no distrae a los escolares.

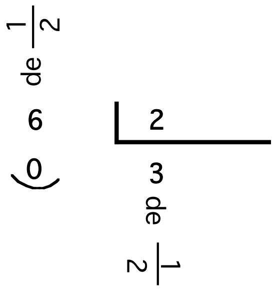
2º Hemos incidido en la ubicación temporal de las cantidades que intervienen en el reparto:

a) lo que recibe cada participante, después de realizar el reparto.

b) lo que tenían antes de comenzar el reparto.

3º Mayor atención y esmero en las representaciones gráficas utilizadas por los escolares. A los participantes en los repartos les hemos asignado letras (A, B, C, ….) de modo que los alumnos visualizan de forma gráfica la cantidad que recibe cada participante. No obstante, los alumnos se muestran reacios a utilizar esta notación para designar a las personas que participan en los repartos.

4º Utilización de la notación “dos puntos” en lugar de “la caja” para simbolizar el proceso del reparto. Para describir las condiciones iniciales de un reparto; utilizaremos el lenguaje natural, en lugar de utilizar ninguna de las dos notaciones.
Se recuerda que en la Primera Etapa los escolares simbolizaban el proceso del reparto “ 3 barras entre 2 niños” del siguiente modo:



En la Segunda Etapa los alumnos escriben:

$$3 : 2 = \frac{6}{2} : 2 = \frac{6 : 2}{2} = \frac{3}{2} \text{ de barra}$$

Justificamos esta decisión por las siguientes razones:

a) Deslindar la acción de reparto con magnitudes continuas de la que se realiza con magnitudes discretas y que los alumnos resuelven mediante el algoritmo de la división entera. Durante el pasado curso hemos detectado influencias perniciosas como la imposibilidad de realizar repartos que manifestaban algunos alumnos cuando el número de barras es menor que el número de participantes. Sin duda la notación de “la caja de la división“ les recordaba la división entera de naturales y les retrotraía a situaciones con objetos discretos.

b) Por coherencia con la división entera de naturales, porque la notación de la caja la utilizamos para realizar repartos de objetos discretos en varias fases. Se recuerda que en el trabajo con números naturales si la división se realiza en una sola fase utilizamos la notación “dos puntos”

c) la notación de los dos puntos la hemos utilizado, en sesiones anteriores de este curso, para simbolizar la operación división de una fracción por un número natural que solía estar asociada a acciones de repartos igualitarios.

d) la notación de los dos puntos es compatible con la simbolización de la equivalencia de fracciones y refuerza el trabajo realizado con fracciones equivalentes.

Toma de decisiones.
Dado que las representaciones gráficas que efectúan los alumnos son poco precisas el Equipo Investigador recomienda incidir en este aspecto en las siguientes tareas que se propongan a los alumnos. Se acuerda continuar con la implementación de la Propuesta y estudiar la relación de orden de fracciones desde el significado de cociente partitivo.

Día 17-1-2005 (Décimo octava sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 23.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 24.

Ejecución
En la primera parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 23 que propone comparar repartos en los que participan el mismo número de personas o bien se reparten el mismo número de barras. La Ficha de trabajo nº 23 contiene dos tareas de comparación, una de cada tipo, que enunciamos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 23. Fecha: ______________

Imagina que participas en el reparto de

" 2 barras de regaliz entre 3 personas"

y en el reparto de

" 4 barras de regaliz entre 3 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?.

SOLUCIÓN: ____

porque:

Imagina que participas en el reparto de

" 2 barras de regaliz entre 3 personas"

y en el reparto de

" 2 barras de regaliz entre 5 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?.

SOLUCIÓN: ____

porque:

Cuando los alumnos resuelven las tareas propuesta en la Ficha de trabajo nº 23 se procede a la evaluación conjunta de la tarea. Cuando quedan 15 minutos para concluir de clase los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 24 en la que deben comparar dos repartos en los que participan diferente número de personas y se reparten diferente número de barras de regaliz. Esta Ficha de trabajo plantea la comparación de dos parejas de repartos:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 24. Fecha: ______________

Imagina que participas en el reparto de

" 2 barras de regaliz entre 3 personas"

y en el reparto de

" 3 barras de regaliz entre 4 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?.

SOLUCIÓN: ____

porque:

Imagina que participas en el reparto de

" 3 barras de regaliz entre 2 personas"

y en el reparto de

" 5 barras de regaliz entre 4 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?.

SOLUCIÓN: ____

porque:

Los alumnos han resuelto la Ficha de trabajo nº 24 de forma precipitada, posiblemente porque han dispuesto de poco tiempo para resolver la tarea. Dado que esta Ficha de trabajo presenta mayores dificultades conceptuales que la Ficha precedente el profesor opta por recoger la tarjeta de evaluación para resolverla en una sesión posterior de clase.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos no tienen dificultad para comparar los repartos “2 barras entre 3 personas" y "4 barras entre 3 personas". Todos los alumnos, excepto B07, resuelven correctamente la primera tarea de la Ficha nº 23. Todos los alumnos se percatan de que no necesitan utilizar la equivalencia de fracciones para comparar las fracciones. No obstante, llama la atención que ninguno de los alumnos utiliza la unidad para comparar la fracción 2/3 y 3/4 de barra.

En la segunda parte de la Ficha de trabajo nº 23, cuando los alumnos comparan los repartos “2 barras entre 3 personas" y " 2 barras de regaliz entre 5 personas", no razonan teniendo en cuenta las condiciones iniciales de los repartos. En lugar de comparar directamente los repartos, los alumnos encuentran la fracción que expresa el resultado de los repartos implicados y, después, utilizan la equivalencia de fracciones. El 75% de los alumnos compara de forma correcta los repartos utilizando la equivalencia de fracciones. Sin embargo, no utilizan la idea de reparto para comparar directamente los repartos, sin tener que comparar las representaciones fraccionarias que expresan los resultados de los repartos.

Los alumnos han tenido dificultades al resolver las dos tareas de comparación de repartos que propone la Ficha de trabajo nº 24. La estrategia mayoritaria consiste en encontrar las fracciones que expresan los resultados de los repartos y, posteriormente, utilizar la equivalencia de fracciones para comparar las fracciones. La mitad de los alumnos (B01, B03, B09, B10, B11, B12, B16, B17 y B18) resuelven correctamente las tareas de la Ficha. La otra mitad comete errores al encontrar la representación fraccionaria (B05, B07, B08, B13, B14 y B15) o al comparar las fracciones (B02, B04, B06, y B14).

Valoración
Los alumnos saben comparar repartos que tienen mismo el número de personas o mismo número de barras a repartir. Solo la mitad de los alumnos ha sabido comparar repartos que tienen diferente numero de personas y de barras a repartir. Los alumnos han dispuesto de un plazo temporal escaso para resolver las tareas de la Ficha de trabajo nº 24.

Los alumnos prefieren simbolizar el proceso reparto para encontrar la representación fraccionaria antes conjeturar los términos de la fracción pensando en las condiciones iniciales del reparto. La resolución de tareas de refuerzo de la técnica del reparto en una fase lleva a los alumnos a utilizar esta técnica en detrimento de otras estrategias de resolución.

Toma de decisiones
Se acuerda proponer una nueva Ficha de trabajo nº 25 que no se ha implementado en la Primera Etapa de la Experimentación; que indaga la comprensión de los alumnos referida a la comparación de repartos que tienen diferente numero de personas y de barras a repartir. También se acuerda volver a proponer la resolución de la Ficha de trabajo nº 24 después de haber resuelto la Ficha de trabajo nº 25.

Día 19-1-2005 (Décimo novena sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 25.
2º Volver a resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 24.

Ejecución
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 25 que propone comparar repartos en los que participan un número diferente de personas y también se reparten un número diferente de barras. La Ficha de trabajo nº 25 contiene dos tareas de comparación de repartos que enunciamos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 25. Fecha: _____________

Imagina que participas en el reparto de

" 3 barras de regaliz entre 5 personas"

y en el reparto de

" 4 barras de regaliz entre 7 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ____

porque:

Imagina que participas en el reparto de

" 2 barras de regaliz entre 5 personas"

y en el reparto de

" 3 barras de regaliz entre 8 personas"

¿En cuál de los dos repartos recibes más cantidad de regaliz?

SOLUCIÓN: ____

porque:

Cuando los alumnos resuelven las tareas propuesta en esta Ficha de trabajo se procede a la evaluación conjunta de las tareas. El alumno B05 que se confunde al encontrar la fracción que expresa el resultado de los repartos involucrados en la primera tarea de la Ficha sale a la pizarra, encuentra las fracciones y las compara utilizando el concepto de equivalencia. Este mismo alumno comparar gráficamente las cantidades 3/5 de barra y 4/7 de barra. Para proceder a la evaluación conjunta de la segunda tarea de la Ficha sale la pizarra la alumna B14 que ha requerido la ayuda de los profesores de aula. Termina la sesión de clase y no queda tiempo para afrontar la resolución de la Ficha de trabajo nº 24 que se realizará se abordará en otra sesión posterior.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos, salvo el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos, excepto B02, B05 y B14, saben comparar los repartos que propone la Ficha de trabajo nº 25. Todos los alumnos proceden hallando la representación fraccionaria y utilizando, posteriormente, la equivalencia de fracciones para comparar las fracciones.

Valoración
Los alumnos saben comparar fracciones que poseen diferentes numeradores y denominadores.

Cuando los alumnos comparan repartos que tienen el mismo número de personas (Ficha de trabajo nº 23) han aparecido diversas estrategias entre las que destaca la idea de reparto. Cuando los alumnos comparan repartos que tienen diferente numero de barras y el de personas (Fichas de trabajo nº 24 y 25) la estrategia canónica pasa a ser la búsqueda de fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. En efecto, todos los alumnos utilizan como estrategia básica la equivalencia de fracciones. Sin embargo, apenas utilizan ideas de reparto y las gráficas que efectúan para representar la cantidad de longitud que recibe cada persona son, en general, poco precisas. En general, los alumnos tienden a utilizar más el modelo de medida que el modelo de cociente partitivo en las tareas de comparación de fracciones: los alumnos de la Segunda Etapa solo utilizan la idea de reparto cuando comparan fracciones que tienen el mismo número de participantes

El modelo de cociente partitivo posee potencialidades que han pasado desapercibidas en la implementación de aula realizada con los escolares de quinto curso de Educación Primaria. En efecto, este modelo potencia la aparición de estrategias de gran riqueza conceptual como la de “compartir o socializar repartos” o utilizar el concepto de equivalencia de repartos. Los alumnos no son capaces de aplicar estas estrategias aún después de que los profesores de aula las han ejemplificado durante la evaluación conjunta de las fichas precedentes y han aconsejado su uso a los escolares. La gestión de estas estrategias exige de los alumnos ideas de proporcionalidad o de razón entre las cantidades que intervienen en el reparto: número de barras y número de personas; y todo parece indicar que estas ideas están muy alejadas de las capacidades cognitivas de los escolares de quinto curso de Educación Primaria.

Toma de decisiones
Se acuerda proseguir con la planificación prevista y pasar a estudiar la técnica del reparto en varias fases. Queda por plantear la resolución de la Ficha de trabajo nº 24 en la que los alumnos obtuvieron un rendimiento por debajo del esperado. En sesiones posteriores, se propondrá a los alumnos la resolución de esta Ficha de trabajo.

Día 20-1-2005 (Vigésima sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 26.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 27.

<u>Ejecución</u>
El profesor presenta la Ficha de trabajo nº 26 y orienta el trabajo de los alumnos para introducir la técnica del reparto en varias fases. Solicita que los alumnos escriban en sus cuadernos: "OTRA FORMA DE REALIZAR REPARTOS: REPARTOS EN VARIAS FASES"

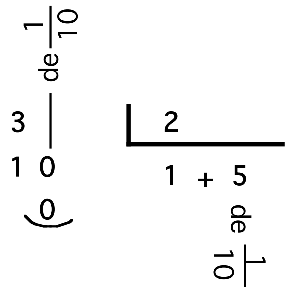
Después escribe en la pizarra: " Vamos a realizar el reparto de 3 barras entre 2 personas. Si realizamos el reparto en una sola fase (como lo hemos hecho hasta ahora) cada persona recibe $\frac{3}{2}$ de barra.

Ahora vamos a realizar el reparto de otra forma diferente: VAMOS A REPARTIR BARRAS ENTERAS Y, SI QUEDAN BARRAS SIN REPARTIR, FRACCIONAMOS LAS BARRAS EN DIEZ PARTES IGUALES, Y VOLVEMOS A REPARTIR LAS SUBUNIDADES DE LONGITUD $\frac{1}{10}$ DE BARRA.

El profesor entrega tres tiras de papel de la misma longitud que la barra-unidad con la consigna de que los alumnos fraccionen en 10 partes iguales una de las tres tiras.

Los alumnos saben realizar el reparto. La alumna B08 sale a la pizarra para realizar la representación gráfica del reparto y, después, escribe que cada persona recibe $1 + \frac{5}{10}$ de barra.

El profesor escribe en la pizarra, de forma simbólica, el proceso del reparto por fases:

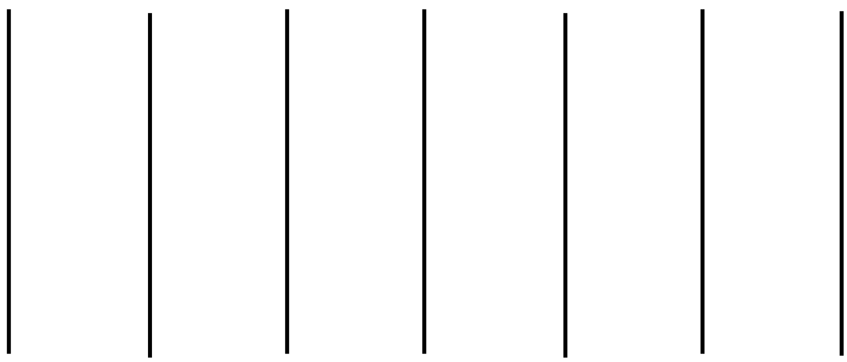


Los alumnos escriben el proceso gráfico y simbólico del reparto en la tarjeta de evaluación de la tarea nº 26. Los escolares conservan la tarjeta de evaluación para que les sirva de ayuda durante la resolución de la siguiente tarea. Antes de terminar la sesión de clase el profesor les entrega la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 27 con el encargo de que la resuelvan inmediatamente. Mostramos la tarjeta de evaluación de esta Ficha de trabajo:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 27. Fecha: _____________
Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "7 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

$$7 \quad \underline{|\ 5 \quad\quad}$$

Cuando los alumnos concluyen la tarea se procede a la evaluación conjunta de la misma. El alumno B01 que efectúa representaciones gráficas adecuadas pero yerra al expresar el resultado del reaparto sale a la pizarra y resuelve correctamente la situación problemática.

Antes de que concluya la sesión de clase los alumnos reciben la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 28 con el encargo de resolver la tarea en sus casas durante el fin de semana.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos dan muestra de comprender la nueva técnica de reparto. El reparto por fases lo asumen con naturalidad. Les resulta más natural que el reparto en una sola fase. Sin embargo, muestran reticencias a fraccionar la barra sobrante en diez partes iguales. De hecho, los alumnos proponen, inicialmente, otros fraccionamientos no decimales de la barra. Hemos observado en los alumnos una escasa comprensión del papel que juegan los agrupamientos decimales (de base diez) en nuestro sistema de numeración.

Los alumnos siguen las orientaciones de los profesores de aula que recomiendan mayor grado de esmero y precisión en las representaciones gráficas que indican la cantidad de longitud que recibe cada participante. En efecto, los alumnos mejoran las representaciones gráficas y, además, designan con letras a cada uno de los participantes de modo que asocian, gráficamente, a cada participante la cantidad de longitud que éste recibe.

Todos los alumnos, excepto B01, encuentran la representación Polinómica Decimal asociada el reparto "7 barras de regaliz entre 5 personas" que indaga la Ficha de trabajo nº 27.

Toma de decisiones
La implementación de la propuesta de enseñanza funciona según lo previsto. Se van a dedicar varias sesiones a ejercitar la nueva técnica de reparto por fases. Al comienzo de la siguiente sesión se va a proponer a los alumnos la resolución de la Ficha de trabajo nº 24 que plantea la comparación de repartos dado que se trata de una tarea que los alumnos han realizado en las sesiones de esta semana, en la que obtuvieron resultados muy inferiores a las tareas de este mismo tipo.

Día 25-1-2005 (Vigésima sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 24.
2º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 28.

Ejecución
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 24. Ahora los alumnos obtienen mejores resultados que en la semana anterior, cuando intentaron resolverla por primera vez porque, en esta ocasión, los alumnos efectúan representaciones gráficas y simbólicas más precisas.

En la segunda parte de la sesión, el profesor recoge la tarjeta de evaluación de la ficha de trabajo nº 28. Todos los alumnos entregan la tarea al profesor, excepto B10 que la ha dejado olvidada en su casa. La tarjeta de evaluación de la ficha de trabajo nº 28 es análoga a la nº 27. Mostramos el enunciado de esta tarea:

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto " 4 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

Cuando los alumnos concluyen la tarea se procede a la evaluación conjunta de la misma. La alumna B03 que suele tener éxito al resolver las tareas yerra, en esta ocasión, porque procede fraccionando las barras en dos partes iguales. Esta alumna sale a la pizarra y resuelve correctamente la tarea.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos, salvo el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos de la Segunda Etapa comprenden que la fracción expresa la medida de la cantidad de longitud que recibe cada participante de un reparto.

Los alumnos obtienen porcentajes de éxito altos, superiores al 78%, al resolver la Ficha de trabajo nº 24 que evalúa las representaciones simbólicas que efectúan los escolares cuando comparan los repartos.
La estrategia mayoritaria consiste en escribir las representaciones fraccionarias que expresan los resultados de los repartos y comparar las fracciones utilizando el concepto de equivalencia o razonamientos basados en la fracción con el significado de medida. Todos los alumnos de la Segunda Etapa utilizan esta estrategia. La mayoría de los alumnos que utilizan la equivalencia de fracciones resuelven con éxito las dos tareas de comparación de repartos que plantea la Ficha de trabajo nº 24.
La utilización de la equivalencia de fracciones resulta ser la estrategia más frecuente y con la que los alumnos alcanzan porcentajes de éxito elevados. Otras estrategias de gran riqueza conceptual como la de “compartir o socializar repartos” o utilizar el concepto de equivalencia de repartos resultan muy complejas para los alumnos porque tales estrategias incorporan el significado de razón que se estudia en cursos posteriores y que involucra ideas de proporcionalidad que caen fuera de las capacidades cognitivas de la mayoría de los escolares de quinto curso de Educación Primaria.

Cuando los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 28 en la que deben encontrar la representación polinómica decimal del reparto de “4 barras entre 5 personas” algunos alumnos indican que no pueden realizar el reparto porque no pueden dar barras enteras. Otros alumnos optan por fraccionar las barras en 5 partes iguales porque esta era la técnica que utilizaban en el reparto efectuado en una sola fase. Solo la alumna B03 opta por fraccionar las barras en dos partes iguales.

Los alumnos aprenden con facilidad la técnica del reparto en DOS fases. El reparto por fases les resulta más natural que el reparto en una sola fase, a pesar de que el reparto que propone la Ficha nº 28 plantea la dificultad de que el número de barras a repartir es menor que el de participantes en el reparto. El porcentaje de éxito es del 60%.

<u>Toma de decisiones</u>
Los alumnos progresan en la ejercitación de la técnica del reparto por fases. En esta Segunda Etapa experimental se detecta una mayor calidad de las representaciones gráficas que efectúan los alumnos, y que se manifiesta en el fraccionamiento, en 10 partes iguales, de tiras de papel cuya longitud es la de una barra de regaliz, y en la asignación de letras mayúsculas a cada una de las personas que participan en el reparto. Los resultados aceptables obtenidos hasta el momento aconsejan no introducir modificaciones en la propuesta de enseñanza.

Día 26-1-2005 (Vigésimo primera sesión)
<u>Plan previsto.</u>
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 29.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 30.

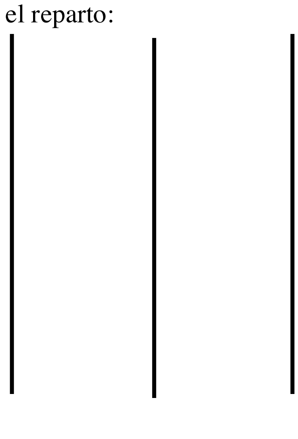
<u>Ejecución</u>
Los alumnos afrontan la resolución de la ficha de trabajo nº 29 que es análoga a la ficha nº 28 y cuyo enunciado mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 29. Fecha: ______________

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto "3 barras de regaliz entre 5 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

3 | 5

Los alumnos dan muestras de comprender la técnica del reparto igualitario efectuado en dos fases porque no ha sido necesaria la intervención de los profesores de aula para orientar el trabajo de los alumnos.

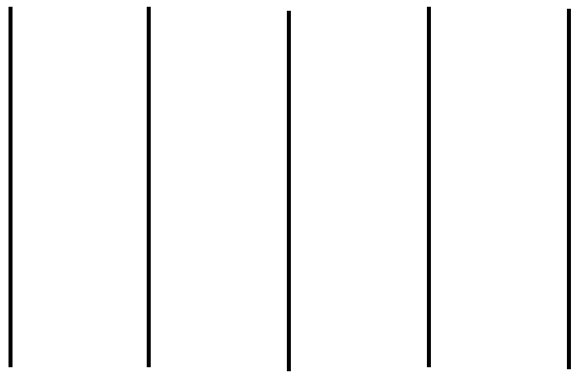
En la segunda parte de la sesión los alumnos resuelven la ficha de trabajo nº 30 que plantea un reparto que se realiza en tres fases y cuyo enunciado mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 30. Fecha: _____________

Encuentra la cantidad de regaliz que recibe cada persona en el reparto " 5 barras de regaliz entre 4 personas" cuando haces el reparto por fases y fraccionas los trozos que sobran en 10 partes iguales.

SOLUCIÓN: ____

1º Indica, con un dibujo, cómo haces el reparto:



2º Indica, con símbolos, cómo haces el reparto:

5 | 4

Esta tarea propone, por primera vez, un reparto que se realiza en TRES fases. Algunos alumnos tienen dificultades para representar de forma gráfica y simbólica la tercera fase de este reparto porque olvidan fraccionar las subunidades de un décimo en 10 partes iguales o porque desconocen que la longitud de tales fraccionamientos es un centésimo de la barra o unidad. Los profesores de aula han realizado una intervención de carácter general y entrega material a los escolares para que visualicen que la décima parte de un décimo de barra es un centésimo de barra.

Los alumnos escriben la respuesta en la tarjeta de evaluación de la tarea nº 30 y la entregan al profesor. Antes de concluir la sesión de clase, se procede a la evaluación conjunta de la tarea. Los alumnos escriben en sus cuadernos la respuesta de este reparto efectuado en tres fases y escriben reciben el encargo de realizar, como trabajo para sus casas, la tarea que consiste en repartir, mediante esta técnica, “3 barras de regaliz entre 4 personas”.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos obtienen buenos resultados cuando realizan, en dos fases, el reparto de "3 barras de regaliz entre 5 personas". El 78% de los alumnos realizan representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para encontrar la representación polinómica decimal que expresa el resultado del reparto. Solo cuatro alumnos (B01, B05, B14 y B16) cometen alguna incorrección.

Algunos alumnos utilizan la notación decimal para expresar el resultado del reparto porque el profesor adelantó la equivalencia entre la representación polinómica decimal y la notación decimal durante la evaluación conjunta de la ficha de trabajo nº 28.

Una de las causas de los errores detectados en las respuestas de los alumnos cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 30, que plantea un reparto en tres fases, radica en la escasa comprensión del papel que juegan los agrupamientos decimales en nuestro sistema de numeración escrito. Unos pocos alumnos de la Segunda Etapa tienen dificultades para comprender que la décima parte de un décimo de barra es una centésima parte de la barra.

A pesar de que la representación simbólica del proceso de reparto en tres fases es compleja, los alumnos obtienen buenos resultados: el 80% de los alumnos de la Segunda Etapa realizan representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para encontrar la representación polinómica decimal que expresa el resultado del reparto.

Valoración
El modelo de cociente partitivo con esta nueva técnica de reparto se ha mostrado válido para introducir la representación polinómica decimal asociada al reparto realizado en varias fases.

Los alumnos perciben con naturalidad que la acción de reparto puede ser efectuada con otra técnica diferente de la que conocen, y aprenden pronto cuales son las exigencias de la nueva técnica: el fraccionamiento decimal y de la asignación del mayor número posible de subunidades en cada fase del reparto.

Las representaciones gráficas se muestran muy eficaces en la secuencia de enseñanza porque evitan la utilización de material concreto que, en el caso del fraccionamiento en 100 partes iguales de la unidad, se gestiona con lentitud. Las representaciones gráficas favorecen la transición hacia las representaciones simbólicas y facilitan la evaluación de la comprensión que poseen los escolares de la técnica del reparto en varias fases.

La utilización de modelos estables contribuye a la mejora de la comprensión de los alumnos. Los alumnos de la Segunda Etapa de la Experimentación han obtenido mejores resultados que los alumnos de la Primera Etapa porque, en el tercer curso de Educación Primaria, han recibido enseñanza de la división de números naturales desde el modelo de cociente partitivo modificado para el caso de magnitudes discretas. Los alumnos de la Segunda Etapa dan muestras de percibir la representación polinómica decimal como extensión de la división entera en el caso de la magnitud continua de longitud.

Toma de decisiones
En la siguiente sesión vamos a introducir la notación decimal. Este nuevo sistema de representación surge de la acción de reparto pero también indica una cantidad de magnitud: la longitud de barra de regaliz que recibe cada participante del reparto. Estos dos significados del número decimal deberán aparecer durante la evaluación conjunta de la tarea nº 31, en cuyo primer apartado leemos:

Cuando has realizado repartos por fases y has fraccionado los trozos que sobran en 10 partes iguales, en el reparto " 3 barras de regaliz entre 2 personas"

$$\text{cada persona recibe } 1 + \frac{5}{10} \text{ de barra,}$$

y el número decimal que indica esta cantidad es 1'5

Proponemos la siguiente metodología de trabajo que comprende dos tipos de actividades:

Actividad I.- El profesor preguntará a los alumnos por el significado de 1´5 barras de regaliz. Se espera que los alumnos respondan que esta cantidad es el resultado de un reparto en el que cada persona recibe 1 barra y $\frac{5}{10}$ de barra.

Actividad II.- Cada alumno recibe dos tiras de papel de la misma longitud que la de la barra de regaliz, una de ellas fraccionada en 10 partes iguales. Los alumnos deben construir una cantidad de longitud de 1´5 barras o tiras de papel.

Estos dos tipos de actividades se realizarán con los números decimales 0´8, 0´6 y 1´25 de barra.

Día 27-1-2005 (Vigésimo segunda sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 31.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 32.

Ejecución.
En primer lugar se procede a evaluar la tarea propuesta como trabajo para casa y que consiste en repartir “3 barras para 4 personas”. La alumna B16 sale a la pizarra y realiza de forma simbólica el proceso de este reparto. El profesor ha llevado a clase listones de madera de esta longitud para que los alumnos comprueben que tal longitud se completa con 7 subunidades de longitud 1/10 de unidad y 5 subunidades de 1/100 de unidad.

Después los escolares resuelven la Ficha de trabajo nº 31 que conecta la representación polinómica decimal de un reparto y la notación decimal. La resolución de esta tarea ha estado dirigida por los profesores de aula. Esto hace que los alumnos resuelven con facilidad esta tarea. El profesor indica a los alumnos que guarden la tarjeta de evaluación de esta Ficha y que la peguen en sus cuadernos.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 32. En esta tarea los alumnos deben expresar de forma simbólica el resultado del reparto “15 barras para 4 niños” utilizando la representación fraccionaria y la notación decimal; y además deben representar gráficamente sobre una línea recta ambas representaciones simbólicas que expresan la longitud de regaliz que recibe cada niño.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 32. Fecha: _____________

Realiza el reparto"7 barras de regaliz entre 2 niños" de dos formas diferentes:

1º) Cuando fraccionas todas las barras en tantas partes iguales como el número de niños:

Expresa, con una fracción, el número de barras de regaliz que recibe cada niño.

SOLUCIÓN: *Cada niño recibe barras de regaliz*

2º) Cuando repartes barras enteras y fraccionas las barras o partes de barras sobrantes en diez:

7 | 2

Expresa, con un número decimal, el número de barras de regaliz que recibe cada niño.

SOLUCIÓN: *Cada niño recibe barras de regaliz*

3º) La longitud de una barra de regaliz es:

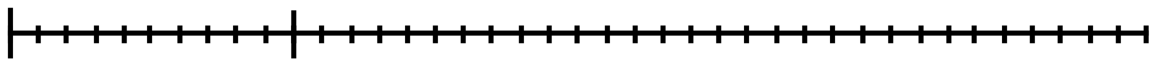
Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, la fracción que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

O

4º) La longitud de una barra de regaliz es:

Dibuja sobre la línea, a partir del punto O, el número decimal que indica la cantidad de barras de regaliz que recibe cada niño:

O



5º) Expresa el significado de las cifras que componen el número decimal

La parte entera es _____ e indica que ____

La cifra de las décimas es _____ e indica que ____

La cifra de las centésimas es _____ e indica que ____

La cifra de las milésimas es _____ e indica que ____

Esta Ficha de trabajo plantea dificultades a los escolares porque resulta densa y porque indaga sobre conocimientos conceptuales como el significado de las cifras del número decimal y sobre técnicas poco ejercitadas como la representación gráfica sobre la recta numérica de fracciones y números decimales. En estas condiciones, solo los alumnos de nivel de comprensión alto (B10, B15, B17 y B18) terminan la tarea. El profesor propone que los alumnos terminen esta tarea en sus casas durante el fin de semana y proceder a su evaluación conjunta al comienzo de la siguiente sesión.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los escolares dan muestras de comprender el convenio que conecta la Representación Polinómica Decimal de un reparto y la Notación Decimal, y la economía que signos que conlleva. El hecho de que este convenio, basado en criterio posicional, se aplique a repartos que los alumnos han realizado previamente favorece la comprensión del paso de la Representación Polinómica Decimal a la Notación Decimal

La resolución de la Ficha de trabajo nº 32 plantea serias dificultades a los alumnos porque tiene un formato novedoso. En particular, las preguntas referidas a las representaciones gráficas sobre la recta numérica y las que indagan sobre los significados de las cifras del número decimal han resultado difíciles a los alumnos. Los profesores de aula se han visto obligados a orientar el trabajo de los escolares. Por este motivo, no aportamos datos cuantitativos sobre el rendimiento de las alumnos en la Ficha de trabajo nº 32.

Toma de decisiones
Las preguntas que se formulan a alumnos sobre el significado de las cifras del número decimal aportan poca información del grado de comprensión que éstos poseen. Los alumnos suelen dar respuestas muy escuetas porque no están acostumbrados a que se les interrogue sobre el significado de los conceptos. En cambio, la observación de las representaciones gráficas del número decimal que los alumnos efectúan sobre la recta numérica aporta más información sobre la comprensión de los escolares.

En el momento en el que los alumnos resuelven la Ficha nº 32 constatamos dificultades en la gestión de la recta numérica asociadas a la propia complejidad del sistema de representación. La recta numérica es un sistema de representación complejo para los alumnos que requiere ser ejercitado durante periodos de enseñanza más amplios. El diseño inicial de la propuesta didáctica tiene en cuenta este hecho de modo que los escolares van seguir trabajando este sistema de representación cuando resuelvan Fichas de trabajo análogas a la Ficha nº 32.

Día 31-1-2005 (Vigésimo tercera sesión)
Plan previsto.
1º Evaluar la Ficha de trabajo nº 32.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 33.

Ejecución.
El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la Ficha de trabajo nº 32. Los alumnos la devuelven cumplimentada aunque persisten los errores en la representaciones gráficas sobre la recta numérica y la parquedad y escasa precisión de los significados que asocian a las cifras del número decimal. El alumno B04 que yerra al representar gráficamente la fracción 7/2 de barra y el decimal 3'5 de barra sale a la pizarra para mostrar la solución correcta de los apartados de la tarea.
En la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha nº 33 que tiene un formato análogo a la Ficha precedente y cuyo enunciado es:

Realiza el reparto" 15 barras de regaliz entre 4 niños" de dos formas diferentes.

Antes de concluir la sesión de clase la alumna B14 que yerra al encontrar las representaciones simbólicas y gráficas del reparto "15 barras de regaliz entre 4 niños" efectuado con las dos técnicas objeto de enseñanza sale a la pizarra y con la ayuda del profesor y de sus compañeros resuelve la tarea.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
El 75% de los alumnos saben encontrar la fracción y el número decimal que expresa el resultado del reparto "15 barras de regaliz entre 4 niños". Sin embargo, el porcentaje de éxito desciende hasta el 50% cuando representan sobre la recta numérica la fracción 15/4 barras y el número decimal 3'75 barras.

Los alumnos encuentran más dificultades para representar gráficamente la fracción que el número decimal resultado del reparto igualitario.

Toma de decisiones
A pesar de que se observan progresos en la comprensión de los alumnos, estas tareas plantean a éstos dificultades en la gestión de la recta numérica. Para reforzar este sistema de representación gráfico de la fracción y del número decimal, el Equipo de Investigación propone incorporar a la Propuesta de Enseñanza tres nuevos Fichas de trabajo (nº 34, nº 35 y nº 36) que se van a implementar en las siguientes tres sesiones.
Aunque la implementación de la secuencia de enseñanza en el grupo 5º B se retrasa con respecto a la del grupo 5º A vamos a mantener la propuesta diseñada porque consideramos prioritario relacionar los sistemas de representación fraccionario y decimal.

Día 1-2-2005 (Vigésimo cuarta sesión)
Plan previsto.
Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 34.

Ejecución.
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha nº 34 que tiene un formato análogo al de las Fichas precedentes (nº 32 y nº 33), y cuyo enunciado es:

Realiza el reparto "21 barras de regaliz entre 10 niños" de dos formas diferentes.

El alumno B05 que yerra al encontrar las representaciones simbólicas y gráficas del reparto “21 barras de regaliz entre 10 niños" efectuado con las dos técnicas objeto de enseñanza sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor y de sus compañeros, resuelve la tarea. Los alumnos copian en sus cuadernos el enunciado y la solución de los apartados planteados en la ficha de trabajo.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos dan muestras de comprender el reparto en una sola fase y en varias fases porque todos los alumnos, excepto B05, saben encontrar la fracción y el número decimal que expresa el resultado del reparto.

Todos alumnos saben representar gráficamente el número decimal 2´1 barras y solo tres alumnos (B04, B05 y B14) yerran al representar gráficamente la fracción 21/10 barras.

Valoración
Detectamos avances considerables en los aprendizajes efectuados por los alumnos de 5º curso. La mayoría de los alumnos encuentra las representaciones simbólicas y gráficas del reparto, y además escriben, de modo correcto, el significado de las cifras que componen el número decimal 2’1 barras. Ahora bien, debemos tener en cuenta que el reparto propuesto en la Ficha de trabajo nº 34 puede ser efectuado en solo dos fases, y esto hace disminuir el grado de dificultad de las tareas propuestas en la Ficha.

Día 2-2-2005 (Vigésimo quinta sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 35.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 36.

Ejecución.
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha nº 35 que tiene un formato análogo al de las Fichas precedentes (nº 32, nº 33 y nº 34), y cuyo enunciado es:

Realiza el reparto "9 barras de regaliz entre 5 niños" de dos formas diferentes.

El alumno B04 que yerra al encontrar las representaciones simbólicas y gráficas del reparto “9 barras de regaliz entre 5 niños" efectuado con las dos técnicas objeto de enseñanza sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor y de sus compañeros, resuelve la tarea.

Dado que los alumnos resuelven rápidamente las tareas propuestas en la Ficha de trabajo nº 35, el profesor propone la resolución de la Ficha de trabajo nº 36 que tiene un formato análogo al de las Fichas precedentes, y cuyo enunciado es:

Realiza el reparto "9 barras de regaliz entre 4 niños" de dos formas diferentes.

Antes de concluir la sesión de clase el profesor solicita a la alumna B14 que salga a la pizarra para efectuar el reparto “9 barras de regaliz entre 4 niños". Esta alumna se muestra muy insegura cuando busca las representaciones simbólicas que expresan el resultado de los repartos y que yerra en las representaciones gráficas que realiza. Los alumnos copian en sus cuadernos el enunciado y la solución de los apartados planteados en la ficha de trabajo nº 36.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos, excepto el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos dan muestras de comprender el reparto en una sola fase y en varias fases porque todos los alumnos, excepto B04, saben encontrar la fracción y el número decimal que expresa el resultado del reparto propuesto en la Ficha de trabajo nº 35.

La mitad de los alumnos del grupo de docencia tienen dificultades para representar gráficamente la fracción o el número decimal que expresa el resultado del reparto propuesto en la Ficha de trabajo nº 35. Cinco alumnos (B02, B04, B05, B14, B16) no saben representar gráficamente ni la fracción 9/5 barras ni el número decimal 1´8 barras; mientras que otros cinco alumnos (B03, B07, B11, B12, B13) representan correctamente el decimal 1´8 barras pero yerran al representar gráficamente la fracción 9/5 barras.

Los resultados obtenidos por los alumnos en las tareas propuestas en la Ficha nº 36 que plantea el reparto de "9 barras de regaliz entre 4 niños" son coherentes con los obtenidos en la Ficha precedente: los alumnos saben obtener la representación simbólica que expresa el resultado del reparto, saben expresar el significado de las cifras del número decimal, pero tienen dificultades para representar gráficamente sobre la recta numérica la fracción que expresa el resultado del reparto. La tercera parte de los alumnos (B02, B05, B06, B08, B09 y B14) yerra al representar la fracción 974 barras, mientras que todos los alumnos saben representar gráficamente el número decimal 2’25 barras.

Valoración
Los alumnos siguen teniendo dificultades para representar gráficamente sobre la recta numérica la cantidad de longitud que resulta de un reparto igualitario. En particular, los alumnos encuentran más difícil representar gráficamente la fracción, mientras que la notación decimal la perciben con mayor naturalidad como agregación de cantidades obtenidas al realizar fraccionamientos decimal e igualitarios de la unidad.

Toma de decisiones
El Equipo de Investigador acuerda proponer dos nuevas Fichas de trabajo (nº 37 y nº 38) que tienen por objeto reforzar la técnica simbólica de obtención de la Representación Polinómica Decimal asociada al reparto efectuado por fases. La Ficha de trabajo nº 38 incide en la paso de la representación fraccionaria a la notación decimal. Además, ambas Fichas refuerzan el sistema de representación de la recta numérica mediante tareas de representación gráfica de cantidades de longitud que vienen expresadas por números decimales. Mostramos a continuación los enunciados de ambas Fichas de trabajo.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 37. Fecha: ______________

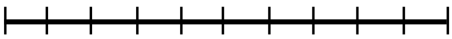
Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada persona en los siguientes repartos:

a) " 19 barras de regaliz entre 20 personas".

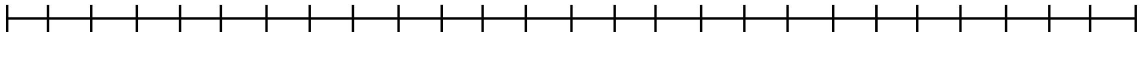
c) " 23 barras de regaliz entre 25 personas".

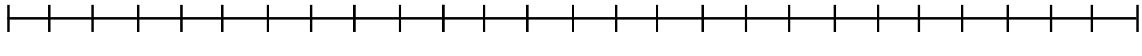
c) " 19 barras de regaliz entre 8 personas".

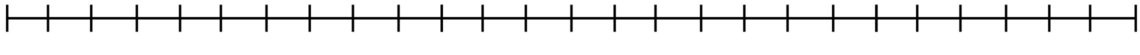
Si la longitud de una barra de regaliz es:



Dibuja sobre las líneas, la longitud de las cantidades de regaliz que reciben las personas que participan en los repartos.

a) 

b) 

c) 

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 38 Fecha: _____________

Expresa, con un número decimal, las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{2} =$

b) $\frac{8}{4} =$

c) $\frac{7}{4} =$

d) $\frac{2}{5} =$

e) $\frac{15}{5} =$

f) $\frac{3}{10} =$

g) $\frac{27}{10} =$

h) $\frac{3}{8} =$

i) $\frac{17}{8} =$

j) $\frac{33}{20} =$

k) $\frac{21}{8} =$

Si la unidad de longitud es:

dibuja, a partir de O, la cantidad de longitud que expresan los números decimales que acabas de obtener

a)

Día 3-2-2005 (Vigésimo sexta sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 37.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 38.

Ejecución.

En la primera parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 37. Cuando los alumnos resuelven la tarea se procede a su evaluación conjunta. Los alumnos B02, B07 y B16 que cometen errores salen a la pizarra y cada uno de ellos encuentra la Representación Polinómica Decimal de los tres repartos que se proponen en la Ficha nº 37.

En la segunda parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 38, que propone convertir 11 expresiones fraccionarias en números decimales y, después, representar gráficamente sobre la recta numérica las 11 expresiones numéricas halladas anteriormente.

Cuando los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 38 el profesor recoge las tarjetas de evaluación. Concluye la sesión de clase y la mitad de los alumnos no han terminado la tarea o bien está resuelta con algunos errores. El profesor permite que estos alumno subsanen los errores o bien la concluyan en sus casas, y les indica que los apartados de la Ficha serán evaluadas al comienzo de la siguiente sesión.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
La mayoría de los alumnos saben encontrar la expresión decimal que expresa el resultado de un reparto igualitario. Tan solo cuatro alumnos (B02, B04, B14 y B16) cometen yerran en alguno de los tres repartos que propone la Ficha de trabajo nº 37.

El 40% de los alumnos (B01, B02, B04, B05, B07, B08, B14 y B16) necesitan ayuda para representar sobre la recta numérica el número decimal 2’375 barras. No obstante, todos los alumnos saben representar sobre la recta numérica el número decimal 0’95 barras.

Valoración
En general, los alumnos dominan la técnica del reparto igualitario en varias fases porque aplican correctamente el algoritmo extendido de la división para encontrar el número decimal que expresa el resultado del reparto efectuado en varias fases.

La representación gráfica del decimal como cantidad de longitud sobre la recta numérica no es una tarea elemental. Esta tarea plantea a los alumnos serias dificultades conceptuales porque éstos deben realizar una evaluación semántica de las cifras del número decimal. La mayoría de los errores que cometen los alumnos al realizar la representación gráfica del decimal sobre la recta numérica se deben a una escasa comprensión de la base decimal y, en concreto, de las conversiones decimales entre los submúltiplos de la unidad.

Toma de decisiones
Representar gráficamente sobre la recta numérica cantidades de longitud expresadas mediante números decimales requieren períodos de enseñanza dilatados en el tiempo. Para evaluar los aprendizajes de los alumnos referidos a este sistema de representación y a la técnica del reparto en varias fases vamos a proponer la resolución de la Ficha de trabajo nº 36BIS que tiene un formato análogo al de las Fichas nº 32, nº 33, nº 34, nº 35 y nº 36, y cuyo enunciado es:

Realiza el reparto "17 barras de regaliz entre 8 niños” de dos formas diferentes.

Día 4-2-2005 (Vigésimo séptima sesión)
Plan previsto.
1º Evaluar la Ficha de trabajo nº 38.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 36BIS.

Ejecución
Los primeros veinte minutos de la sesión de clase se dedican a evaluar los apartados de la Ficha de trabajo nº 38 que tienen mayor dificultad conceptual. Los alumnos B01, B04, B05, B08 y B16 que no han terminado las tareas que propone la Ficha salen a la pizarra y encuentran las notaciones decimales que equivalen a las representaciones fraccionarias dadas en el enunciado de la Ficha.

Después los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 36BIS. Los alumnos resuelven pronto las tareas de la Ficha, lo que permite evaluar conjuntamente la Ficha de trabajo antes de concluir la sesión de clase.

Asistencia de alumnos y aspectos actitudinales
Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B06. Algunos alumnos, como B01, B04, B05, B08 y B16, que no habían terminado la Ficha nº 38 en la sesión de clase anterior no han terminado de resolver la Ficha de trabajo en sus casas. El comportamiento de los alumnos es muy bueno pero algunos alumnos se muestran pasivos y, más todavía, cundo reciben la consigna de realizar tareas fuera del aula.

Aspectos relacionados con la comprensión
El 83% de los alumnos de quinto curso saben encontrar el número decimal que expresa el resultado del reparto igualitario efectuado en varias fases: tres alumnos (B02, B14 y B16) suelen cometer errores al efectuar la técnica simbólica del reparto en varias fases.

El 72% de los alumnos de quinto curso saben representar gráficamente del número decimal sobre la recta numérica. Cinco alumnos (B01, B05, B08, B14 y B16) tienen dificultades para representar sobre números decimales con tres cifras decimales.

Todos los alumnos de la Segunda Etapa aplican correctamente el algoritmo extendido de la división para encontrar el número decimal que expresa el resultado del reparto efectuado en varias fases que plantea la

Ficha nº 36BIS. El porcentaje de éxito desciende hasta el 72% cuando los alumnos encuentran la fracción que expresa el resultado de este reparto. Este mismo porcentaje muestra el éxito de las argumentaciones adecuadas que utilizan los alumnos sobre el significado del número decimal 2’125 barras y de las cifras que lo componen.

El éxito de los alumnos desciende hasta el 60% cuando los alumnos representan sobre la recta numérica el número decimal 2’125 barras.

Valoración
Los alumnos tienen dificultades para representar gráficamente un número decimal que posee tres cifras decimales. La mayoría de los alumnos que realizan una representación gráfica correcta proceden dibujando los diferentes órdenes de unidades comenzando por las unidades de mayor tamaño.

Las dificultades conceptuales aparecen al gestionar los órdenes de unidades inferiores a la décima como consecuencia de limitaciones de comprensión en tres aspectos:

a) el sistema de numeración decimal
b) traslaciones entre las representaciones simbólicas del decimal y de la fracción decimal
c) las características sintácticas y semánticas del sistema de representación de la recta numérica.

La recta numérica es un sistema de representación que permite percibir el número decimal con una nueva sintaxis: es un punto sobre un segmento orientado. El dominio de este sistema de representación precisa una secuencia de enseñanza más larga que la implementada hasta el momento de resolver la Ficha, dado que los resultados obtenidos indican un conocimiento inestable de la recta numérica: la mayoría de los alumnos sabe representar números decimales con una sola cifra decimal, pero el porcentaje desciende hasta el 60% cuando han representado un número de tres cifras decimales.

Toma de decisiones
A pesar de que la gestión del sistema de representación de la recta numérica no está consolidada proponemos continuar con la planificación de la Propuesta de Enseñanza y reforzar el dominio de este sistema en momentos puntuales posteriores de la secuencia de enseñanza para no acumular retrasos en la temporalización de la Propuesta.

Día 7-2-2005 (Vigésimo octava sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 39.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 39BIS.

Ejecución.
En la primera parte de la sesión los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 39 cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 39 Fecha: ____________

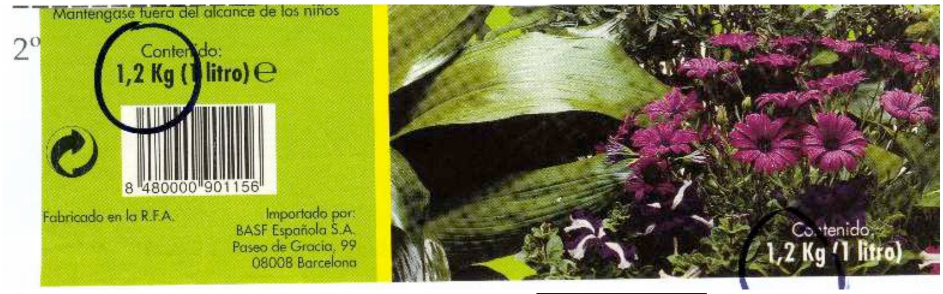
Expresa con una fracción las cantidades de magnitud que están escritas con números decimales.

1º.

SOLUCIÓN: de

He obtenido la fracción del siguiente modo:

____



SOLUCIÓN: de

He obtenido la fracción del siguiente modo:

Cuando los alumnos terminan la tarea, sale a la pizarra el alumno B06 que yerra al expresar la representación polinómica decimal del número 1’2 kgrs y, con la ayuda del profesor, conecta el decimal con la fracción.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 39BIS cuya tarjeta de evaluación mostramos a continuación:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 39BIS Fecha: _____________

Expresa con una fracción (la más simplificada posible) los siguientes números decimales:

a) 0´5 =

b) 0´6 =

c) 2 =

d) 2´2 =

e) 1´4 =

f) 2´8 =

g) 3´5 =

h) 1´75 =

i) 1´25 =

Concluye la sesión de clase y la mitad de los alumnos no han terminado la Ficha de trabajo nº 39BIS. El profesor permite que los alumnos que no la han terminado se lleven a sus casas la tarjeta de evaluación y la devuelvan cumplimentada a la sesión del día siguiente.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B15.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Todos los alumnos saben encontrar la fracción que viene dada por los decimales 1’5 litros y el 80% de los alumnos expresan correctamente el decimal 1’2 kilogramos. Los alumnos B02, B06 y B14 han necesitado la ayuda de los profesores para resolver con éxito la tarea.

La estrategia mayoritaria consiste en expresar el número decimal por medio de su Representación Polinómica Decimal y, después, operar la suma de fracciones decimales. Los alumnos olvidan simplificar las fracciones, pero cuando los profesores sugieren la aplicación de esta técnica saben aplicarla correctamente.

<u>Valoración</u>
La fracción y el número decimal se han introducido y conectado desde el modelo de cociente partitivo. La Ficha de trabajo nº 39 tiene como objetivo establecer el paso del número decimal a la fracción a partir de situaciones contextualizadas desde el modelo de medida.
La conexión entre notación fraccionaria y decimal se ha llevado a cabo mediante situaciones contextualizadas de medida. Si las situaciones problemáticas hubieran sido de reparto los alumnos tal vez hubieran optado por

la estrategia que consiste en percibir el resultado del reparto, que viene dado por un número decimal, como una razón y, haciendo uso de la idea de proporcionalidad, encontrar las condiciones iniciales del reparto que informan de los términos de fracción: número entero de barras de regaliz y de participantes en el reparto. Queda para futuras investigaciones estudiar qué efectos produciría introducir tareas de conversión entre la notación decimal y fraccionaria en contextos de reparto igualitario.

Toma de decisiones
La conversión del número decimal en fracción presenta dificultades a los escolares quinto curso de Educación Primaria que se manifiestan, fundamentalmente, en errores en la simbolización de las operaciones con fracciones decimales. Los resultados obtenidos por los alumnos son aceptables pero debemos tener en cuenta que los números decimales implicados en la Ficha de trabajo nº 39 son muy elementales dado que poseen tan solo una cifra decimal. En consecuencia, hemos optado por introducir la Ficha de trabajo nº 39BIS para reforzar la técnica de paso del número decimal a la fracción.

Día 8-2-2005 (Vigésimo novena sesión)
Plan previsto.
1º Recoger y evaluar la Ficha de trabajo nº 39BIS.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 40.

Ejecución.
El profesor recoge la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 39BIS a los alumnos que no la habían terminado durante la sesión del día anterior. De los doce alumnos (B01, B02, B04, B05, B06, B07, B08, B11, B12, B13, B14 y B16) que debían terminar la tarea sólo la mitad de ellos (B04, B07, B08, B11, B12 y B13) traen la tarea bien resuelta.
Toda la sesión se dedica a resolver en la pizarra los ejercicios que propone la Ficha nº 39BIS. Los alumnos que no han devuelto resuelta la tarjeta de evaluación se encargar de resolver los ejercicios, y el resto de los alumnos escriben el proceso de resolución en sus cuadernos.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión
La conversión del número decimal en fracción presenta dificultades a los alumnos de quinto curso de Educación Primaria que se manifiestan, fundamentalmente, en errores en la simbolización de las operaciones con fracciones decimales. Los alumnos no consideran relevante expresar la representación fraccionaria con una fracción irreducible. Hemos detectado errores al aplicar la técnica de simplificación de fracciones.

Toma de decisiones
La gestión simbólica de conversión del número decimal a la fracción es compleja porque exige de los alumnos la comprensión de la estructura polinómica decimal asociada al número decimal, el manejo operatorio de fracciones decimales y, finalmente, aplicar la técnica de simplificación de fracciones. Se acuerda dedicar una sesión más para reforzar la técnica de conversión entre ambas representaciones. En la siguiente sesión se plantea la resolución de la Ficha de trabajo nº 40 cuyo enunciado es el siguiente:

1º La capacidad de una botella de batido es 0´25 litros. Expresa con una fracción (la más simplificada posible) la capacidad de esta botella.

SOLUCIÓN: $\boxed{}$ *de*

*He obtenido la fracción del siguiente modo:*___________________________________

2º En la carnicería has comprado 0´375 Kgrs. de carne picada. Expresa con una fracción (la más simplificada posible) el peso de carne picada que has comprado.

SOLUCIÓN: $\boxed{}$ *de*

He obtenido la fracción del siguiente modo: ___________________________________

Día 9-2-2005 (Trigésima sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 40.

Ejecución.

Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 40. Cuando los alumnos resuelven los dos ejercicios se procede a su evaluación conjunta. Los alumnos B05 y B14 que cometen errores salen a la pizarra y resuelven, cada uno de ellos, el primer y segundo ejercicio que se plantean en la Ficha nº 40.

Asistencia de alumnos

Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B15.

Aspectos relacionados con la comprensión

El 75% de los alumnos sabe convertir el número decimal 0´25 en fracción. El porcentaje de acierto desciende hasta el 60% cuando convierten en fracción el número 0´375, como consecuencia de errores en la simplificación de fracciones. Hemos detectado dificultades en la simplificación de fracciones. Los alumnos están más familiarizados con la técnica de obtención de fracciones equivalentes por amplificación porque se trata de una técnica que posee una justificación más sencilla que la de la simplificación.

Valoración

Los alumnos dan muestras de comprender el significado del número decimal como resultado de una medida de cantidad de magnitud y saben expresar un número decimal, que no tenga más de tres cifras decimales, con una fracción.

Los alumnos no han cometido errores conceptuales. Por ejemplo, los alumnos no cometen errores graves como cambiar la coma del decimal por la barra de la fracción.

Toma de decisiones

Los alumnos de la Segunda Etapa de Experimentación obtienen resultados aceptables al resolver estas Fichas de trabajo de conversión del número decimal a la fracción. Sin embargo, la gestión adecuada de los procedimientos simbólicos de paso de un sistema de representación a otro precisa de períodos de enseñanza más dilatados en el tiempo, que nuestra implementación de aula no contempla porque estamos comprometidos a respetar la programación del Centro. En consecuencia, estas técnicas de conversión entre notaciones decimales y fraccionarias deberán ser reforzadas en 6º curso de Educación Primaria para afianzar la simbolización de las técnica de paso entre ambos sistemas de representación.

Día 10-2-2005 (Trigésimo primera sesión)

Plan previsto.

1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 41.

2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 42.

Ejecución.

Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 41 que propone ordenar las estaturas de unos niños expresados con números decimales, y cuya tarjeta de evaluación es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 41 Fecha: ______________

Ordena de menor a mayor, la estatura de los siguientes niños:

Manuel	1´6	metros
Oscar	1´495	metros
Luís	1´510	metros
Enrique	1´5	metros
Antonio	1´51	metros
César	1´59	metros

SOLUCIÓN:

El niño de menor estatura es: ________________________________

____

____

____

____

El niño de mayor estatura es: ________________________________

Inventa una regla que sirva para ordenar números decimales: ______________________________________

Se trata de la primera tarea de comparación de números decimales que abordan los alumnos. Esto hace que inicialmente éstos se muestren inseguros, necesiten de explicaciones de los profesores y tengan que emplear más tiempo del previsto. Cuando los alumnos concluyen la tarea solo queda tiempo para evaluarla de forma conjunta, y no se aborda la resolución de la Ficha de trabajo nº 42 que se resolverá en la sesión del día siguiente.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
La mitad de los alumnos (B03, B05, B09, B10, B12, B13, B15, B17 y B18) sabe ordenar los números decimales que expresan las estaturas de unos niños. La otra mitad de los alumnos cometen errores entre los que destacamos los siguientes:

a) Ordenar según el número de cifras decimales. Este es el caso de B14 que ordena de menor a mayor comenzando por 1'5m y siguiendo por 1'6 m.
b) Dificultades en la comprensión del cero como cifra decimal. Este es el caso de B01 que considera que 1'51 es menor que 1´510.

La estrategia mayoritaria consiste en comparar cifra a cifra, comenzando por las unidades de mayor orden. La respuesta del alumno B13 ejemplifica esta estrategia:

"*… si tienes las misma unidades enteras eliges comparar las décimas, y si no las centésimas y el que tenga mayor unidad entera, décima o centésima es mayor*"

El alumno B10 opta por la estrategia que consiste en "añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras". Este alumno aporta la siguiente regla:

"Mirar cuál es el número que más cifras tiene, y haz que los otros tengan el mismo número de cifras añadiendo ceros a la derecha, y ordena normal"

Valoración
La tarea de enunciar reglas resulta compleja a los escolares debido, fundamentalmente, a las dificultades que les plantea expresar por escrito sus ideas. Sin embargo, se trata de una actividad asequible para los escolares que presenta importantes potencialidades en el proceso de enseñanza y aprendizaje porque favorece la aparición de diversas estrategias que refuerzan la representación polinómica decimal que subyace al número decimal.

Toma de decisiones
En la implementación de la primera tarea de ordenación de decimales han aparecido los mismos conflictos cognitivos que se suscitaron en la Primera Etapa de la Experimentación. Proponemos continuar con la secuencia de enseñanza prevista que sigue fielmente la implementada en aquella Primera Etapa.

Día 11-2-2005 (Trigésimo segunda sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 42.

Ejecución.
Los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 42 que propone ordenar seis números decimales descontextualizados, y cuya tarjeta de evaluación es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 42 Fecha: _____________

Ordena de menor a mayor, los siguientes números decimales:

10,21 10,3 1,031 10,30 100,01 0,975

SOLUCIÓN:

El número decimal menor es: ________________________________

El número decimal mayor es: ________________________________

Inventa una regla que sirva para ordenar números decimales: ______________________________________

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos de la Segunda Etapa obtienen niveles de éxito altos, que supera el 80%, en la tareas de ordenación de números decimales que propone la Ficha de trabajo nº 42. Solo los alumnos B06, B07 y B14 han necesitado la ayuda de los profesores para ordenar los números.

Otro indicador del nivel de comprensión alto que muestran los alumnos lo aporta la escasa frecuencia con que aparece la estrategia errónea que consiste en ordenar según el número de cifras decimales que contengan los números decimales. Era previsible detectar este error al comparar los decimales 10´3 y 10´21; sin embargo, son pocas las respuestas erróneas de este tipo.

El 75% de los alumnos de la Segunda Etapa han sabido enunciar enunciado una regla correcta para ordenar números decimales. Solo los tres alumnos que han errado al ordenar los números decimales y la alumna B08 no han enunciado una regla correcta para ordenar decimales.

Los alumnos han puesto en juego dos estrategias para ordenar números decimales:

a) Comparar por fases: primero la parte entera; y si son iguales, se comparan las décimas; y así sucesivamente.
b) Añadir ceros a la parte decimal para que tengan el mismo número de cifras.

Los alumnos se mantienen fieles a la estrategia utilizada en la Ficha precedente: todos los alumnos, excepto B10, utilizan la estrategia que consiste en comparar cifra a cifra, comenzando por las unidades de mayor orden.

Valoración
Como consecuencia de la acción de enseñanza los alumnos han adquirido un mayor dominio de la técnica de ordenación de decimales que se manifiesta en la mayor celeridad y seguridad con que los alumnos ordenan números decimales en las tareas posteriores.

Los alumnos son capaces de conjeturar y formular reglas adecuadas que rigen el comportamiento de los números. El criterio metodológico de intervención en el aula que consiste en dejar que los alumnos inventen reglas para ordenar números decimales se ha mostrado eficaz en la secuencia de enseñanza.

Los resultados obtenidos en la Segunda Etapa de la Experimentación confirman que las tareas propuestas para la enseñanza del orden de números decimales están bien diseñadas y sirven para alcanzar los objetivos previstos.

Toma de decisiones
Dado que las Fichas propuestas para la enseñanza del orden de números decimales están bien diseñadas y sirven para alcanzar los objetivos previstos proponemos seguir con la secuencia de enseñanza y estudiar las operaciones con números decimales.

Día 14-2-2005 (Trigésimo tercera sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 43.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 44.

Ejecución.
En la primera parte de la sesión de clase los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 43 que plantea una situación problemática que resuelve la suma de números decimales. A través de la resolución de problemas se persigue que los alumnos identifiquen la operación suma de decimales y que utilicen el cálculo simbólico para cuantificar el resultado de la operación. Además, en cuanto a la gestión del algoritmo de la suma de números decimales, se pretende que los alumnos apliquen el procedimiento de cálculo y, en la medida de lo posible, que sean capaces de justificar el algoritmo a partir de las representaciones polinómicas decimales asociadas a los números decimales. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 43:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 43. Fecha: _______________

Un albañil ha colocado el rodapié de una habitación. Por la mañana ha colocado una longitud de 6´5 m. de rodapié y por la tarde coloca 3´8 m, ¿cuántos metros de rodapié ha colocado?

SOLUCIÓN: La longitud del rodapié que ha colocado es ___________________

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

$$6'5 = 6 + \frac{5}{10}$$

$3'8 =$

Indica cómo has resuelto el problema: ____

Los alumnos resuelven rápidamente el problema y se procede a su evaluación conjunta. La alumna B03 que yerra al operar con fracciones sale a la pizarra y aporta la solución correcta.

En la segunda parte de la sesión los alumnos abordan la resolución de la Ficha de trabajo nº 44 que plantea otra situación problemática que resuelve la suma de números decimales y cuyo enunciado es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 44. Fecha: ______________

Un grupo de amigas quedan para caminar dos veces al día. Por la mañana andan 4´5 Km. y por la tarde 3´75 Km. ¿Cuantos kilómetros caminan cada día?

SOLUCIÓN: Cada día caminan ___________________________________

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

$4'5 =$

$3'75 =$

Indica cómo has resuelto el problema: ____

El profesor recoge las tarjeta de evaluación según la van cumplimentando los alumnos y propone evaluar la tarea. El alumno B02 sale a la pizarra, y con la ayuda del profesor que le facilita tiras de papel para modelizar las cantidades que intervienen en el problema, consigue resolver la situación problemática.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los alumnos de la Segunda Etapa identifican la operación suma y saben calcular el resultado de la suma de números decimales. Todos los alumnos, excepto B03 y B14, saben resolver el problema que se propone en la Ficha de trabajo nº 43. Del mismo modo, el problema de la Ficha de trabajo nº 44 lo resuelven correctamente todos los alumnos, excepto B02.

Otra cuestión diferente es la capacidad de los alumnos para justificar el algoritmo de la suma de decimales a partir de sus representaciones polinómicas decimales asociadas. En la Primera Etapa de Experimentación pudimos observar que los alumnos de la Primera Etapa no reconocían la necesidad de justificar el algoritmo de la suma de decimales porque les parecía superfluo justificar un procedimiento de cálculo del que conocen su manejo debido a su semejanza con el de los números naturales. En esta Segunda Etapa, las modificaciones introducidas en los enunciados de las Fichas de trabajo fuerzan a que los alumnos escriban los números decimales como sumas de fracciones. Esta modificación hace que el 60% de los alumnos justifiquen el funcionamiento del algoritmo de la suma de decimales.

Valoración
Todos los alumnos de la segunda Etapa identifican la suma de decimales como la operación que resuelve las situaciones problemáticas enunciadas en las Fichas de trabajo nº 43 y nº 44. El 90% de estos alumnos saben aplicar el algoritmo usual de la suma de números decimales que consiste en escribir los sumandos en vertical, alineados por la coma decimal, y sumar como en el caso de número naturales.

Nuestra propuesta de enseñanza pretende que los alumnos conjeturen y justifiquen los algoritmos de las operaciones con decimales utilizando la Representación Polinómica Decimal asociada al número decimal porque de esta forma mejora la comprensión de los alumnos al disponer de mecanismos conceptuales de control de las manipulaciones simbólicas que efectúan en el algoritmo. Sin embargo, el parecido entre los algoritmos de cálculo de números decimales y los de números naturales constituye un obstáculo didáctico. Los alumnos, si no reciben consignas explícitas de actuación, tienden a aplicar los algoritmos usuales y no afrontan la justificación de los procedimientos de cálculo porque les resulta complejo y tedioso operar con fracciones decimales para justificar el funcionamiento de un procedimiento de cálculo que conocen por debido a su semejanza con el de números naturales.

Día 16-2-2005 (Trigésimo cuarta sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 45.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 46.

Ejecución.
En la primera parte de la sesión de clase los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 45 que plantea una situación problemática que resuelve la suma y resta de números decimales. A través de la resolución de problemas se persigue que los alumnos identifiquen la operación resta de decimales y que utilicen el cálculo simbólico para cuantificar el resultado de la operación. Además, en cuanto a la gestión del algoritmo de la resta de números decimales, se pretende que los alumnos apliquen el procedimiento de cálculo y, en la medida de lo posible, que sean capaces de justificar el algoritmo a partir de las representaciones polinómicas decimales asociadas a los números decimales. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 45:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 45. Fecha: ___________

Un carnicero vende una pieza de ternasco de 20 Kgrs. A los tres primeros clientes les vende 3´75 Kgrs.; 5´8Kgrs. y 6´5 Kgrs. ¿Cuántos Kgrs. de la pieza de ternasco le queda por vender?

SOLUCIÓN: Le queda para vender ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

3´75 =

5´8 =

6´5 =

Indica cómo has resuelto el problema: ____

Cuando los alumnos resuelven el problema se procede a su evaluación conjunta. La alumna B12 que opera, de forma adecuada, con fracciones sale a la pizarra y aporta la solución correcta.

En la segunda parte de la sesión los alumnos abordan la resolución de la Ficha de trabajo nº 46 que plantea otra situación problemática que resuelve la suma y resta de números decimales y cuyo enunciado es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 46. Fecha: ______________

Un carpintero debe hacer un soporte para un canalón de un tejado que tiene 4´1m. de largo. Dispone de planchas de 0´5m., 1´55m., 1´2m., 1´85m. y 0´7m. Ha subido al tejado dos planchas: una de 1´55m. y otra de 0´7m; y se da cuenta de que no es suficiente para sostener el canalón de 4´1m. ¿Qué plancha deberá subir ahora

SOLUCIÓN: La plancha que debe subir al tejado mide ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

4´1 =	0´5 =
1´55 =	1´2 =
1´85 =	0´7 =

Indica cómo has resuelto el problema: ____

El profesor recoge las tarjeta de evaluación según la van cumplimentando los alumnos y propone evaluar la tarea. El alumno B05 que ha necesitado la ayuda de los profesores para resolver el problema sale a la pizarra e indica la solución de la situación problemática.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B17.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos de la Segunda Etapa identifican la resta de decimales como la operación que resuelve las situación problemática propuestas en las Fichas de trabajo nº 45 y nº 46. Además, todos los alumnos saben aplicar el algoritmo usual de la resta de números decimales. No hemos detectado en las respuestas de los alumnos errores como descuidar la posición de la coma decimal y colocar los números en vertical y alineados por la derecha.

Nuestra propuesta de enseñanza pretende que los alumnos, además de que apliquen el algoritmo usual de la resta de decimales, conjeturen y justifiquen el algoritmo utilizando la Representación Polinómica Decimal asociada al número decimal. Sin embargo, solo la tercera parte de los alumnos (B03, B10, B12, B13, B15 y B18) de la Segunda Etapa siguen las consignas de los profesores y utilizan la representación fraccionaria para realizar la resta de decimales. Estos alumnos muestran una buena comprensión del número racional porque conectan mediante transformaciones simbólicas la representación fraccionaria y decimal.

Valoración
El modelo de medida funciona bien para dar sentido a la suma y a la resta de números decimales y para introducir el algoritmo usual de la suma y resta de números decimales como un procedimiento de cálculo más económico que el de la suma y resta de fracciones.

Los alumnos aprenden a manejar con rapidez los procedimientos de cálculo con decimales y saben aplicar los algoritmos usuales de la suma y de la resta de números decimales porque conocen que funciona de modo parecido al de los números naturales. No obstante, los conocimientos que poseen de las técnicas operatorias con números naturales no debería considerarse como garantía de comprensión conceptual. Por ejemplo, los alumnos no saben justificar el algoritmo de la resta de decimales con llevadas porque tampoco saben justificar la llevada en el algoritmo tradicional de la resta de naturales; y, sin embargo, saben restar números decimales.

La implementación de estas Fichas permiten cumplir parcialmente los objetivos previstos. Los alumnos saben dotar de significado a la operación resta de decimales y saben aplicar los procedimientos de cálculo de dicha operación. Sin embargo, los dos tercios de los alumnos no son capaces de justificar el algoritmo de la resta a partir de las representaciones fraccionarias asociadas al minuendo y sustraendo de la resta. Esta actuación requiere una revisión, en profundidad, de la enseñanza de los algoritmos escritos de números naturales que se realiza en todos los cursos de la Educación Primaria.

La enseñanza de los cálculos computacionales desde la comprensión reporta muchas más ventajas que inconvenientes. Como puntos fuertes destacamos que los alumnos reciben una enseñanza más crítica, de mayor riqueza conceptual, donde los algoritmos realizados con lápiz y papel asumen una nueva función: la de reforzar la comprensión de las estructuras numéricas y del sistema de numeración. Pero también presenta inconvenientes porque alarga considerablemente el proceso de instrucción y porque los cálculos con fracciones decimales resultan muy tediosos a los escolares dado que su sintaxis es más compleja. Estos dos factores han influido poderosamente en la Segunda Etapa de modo que solo la tercera parte de los escolares realizan la resta de decimales utilizando Representaciones Polinómicas Decimales.

Día 17-2-2005 (Trigésimo quinta sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 47.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 48.

Ejecución.
En la primera parte de la sesión de clase los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 47 que plantea una situación problemática de suma reiterada que resuelve la multiplicación de un número decimal por un número natural. A través de la resolución de problemas se persigue que los alumnos identifiquen esta operación resta de decimales y que utilicen el cálculo simbólico para cuantificar el resultado de la operación. Además, en cuanto a la gestión del algoritmo de la resta de números decimales, se pretende que los alumnos apliquen el procedimiento de cálculo y, en la medida de lo posible, que sean capaces de justificar el algoritmo de la multiplicación de un número decimal por un natural a partir de la representación polinómica decimal asociada al número decimal. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 47:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 47. Fecha: ______________

La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas consecutivas es de 2´75 metros?

SOLUCIÓN: La altura del edificio es ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

2´75 =

*Indica cómo has resuelto el problema:*____

Cuando los alumnos resuelven el problema se procede a su evaluación conjunta. El alumno B07 que no identifica la operación que resuelve el problema sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor, encuentra la solución correcta del problema.

En la segunda parte de la sesión los alumnos abordan la resolución de la Ficha de trabajo nº 48 que plantea dos situaciones problemáticas que se resuelven con la multiplicación de un número decimal por un natural, y cuyo enunciado es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 48. Fecha: ______________

La mejor marca olímpica de los 50 Km. marcha está próxima a 3´5 horas. ¿Cuántos minutos hay en 3´5 horas?

SOLUCIÓN: En 3´5 horas hay ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

3´5 =

Indica cómo has resuelto el problema:

____

He comprado 500 sobres. Cada sobre cuesta 0´05 euros. ¿Cuánto he gastado?

SOLUCIÓN: He gastado ____

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

0´05 =

Indica cómo has resuelto el problema:

El profesor recoge las tarjeta de evaluación según la van cumplimentando los alumnos y propone evaluar las dos situaciones problemáticas. La alumna B11 que ha necesitado la ayuda de los profesores para resolver el problema sale a la pizarra e indica la solución de la situación problemática. Termina la sesión de clase y no queda tiempo para evaluar el segundo problema de la ficha de trabajo nº 48. Se pospone su evaluación hasta el comienzo de la sesión del día siguiente.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Todos los alumnos, excepto el alumno B07, identifican la multiplicación de un decimal por un natural al resolver problemas que modelizan las situaciones problemáticas que se proponen en las Fichas de trabajo nº 47 y nº 48.

Todos los alumnos de la Segunda Etapa saben aplicar el algoritmo usual de la multiplicación de un número decimal por un natural. Los alumnos efectúan el cálculo como si se tratara de números naturales y, después, sitúan la coma sobre el resultado realizado con naturales. Los alumnos de la Segunda Etapa dan muestran de conocer la regla para "situar la coma" a pesar de que no han recibido enseñanza de dicha regla durante este curso.

Dado que los profesores de aula animan a los alumnos a que justifiquen el algoritmo escrito de la multiplicación, doce alumnos lo intentan. Entre las respuestas de estos alumnos, cuando resuelven la Ficha de trabajo nº 47, aparecen dos estrategias diferentes:

a) Expresar el número decimal mediante su Representación Polinómica Decimal y multiplicar cada uno de las sumandos de la Representación Polinómica Decimal. Cuatro los alumnos (B13, B14, B15 y B18) de la Segunda Etapa utilizan esta estrategia.

b) Expresar el número decimal mediante su Representación Fraccionaria y multiplicar la fracción. Ocho alumnos (B03, B05, B09, B10, B11, B12, B16 y B18) de la Segunda Etapa, que se corresponden con el 45% de los alumnos, expresan el número decimal con una fracción y realizan correctamente la multiplicación. Estos alumnos no justifican el algoritmo usual de la multiplicación pero si que justifican la regla para “situar la coma” que consiste en multiplicar el decimal, que actúa como multiplicando, como si se tratase de un natural y, sobre el resultado de la multiplicación, desplazar la coma hacia la izquierda tantos lugares como cifras decimales tenga el multiplicando.

Valoración
Los alumnos identifican la operación multiplicación al resolver situaciones problemáticas en la que una cantidad de magnitud se repite un número entero de veces; y saben aplicar el procedimiento de cálculo usual de la multiplicación de un decimal por un natural.

La propuesta de enseñanza se plantea objetivos más ambiciosos como el de que los alumnos justifiquen los algoritmos de cálculo porque esta actividad mejora la comprensión del número racional al conectar la representación fraccionaria y la notación decimal. En el caso el algoritmo de la multiplicación este objetivo se alcanza parcialmente porque, aproximadamente, la mitad de los alumnos de las dos Etapas optan por la multiplicación de naturales y, después, aplicar la regla para "situar la coma" que conocen aunque no se haya institucionalizado en el aula; en lugar de expresar el decimal mediante su Representación Fraccionaria o su Representación Polinómica Decimal asociada y operar con estos símbolos para justificar la regla para "situar la coma" o bien justificar el algoritmo usual de la multiplicación.

Toma de decisiones
El Equipo de Investigación propone suprimir las Fichas de trabajo que en la Primera Etapa venían identificadas por nº 43 y nº 44 y que tenían por objetivo introducir la regla para "situar la coma". En este momento carece de sentido resolver estas Fichas dado que los alumnos conocen y saben aplicar dicha regla.

Día 18-2-2005 (Trigésimo sexta sesión)
Plan previsto.
1º Evaluar la Ficha de trabajo nº 48.
2º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 49.

Ejecución.
Al comenzar la sesión de clase se procede a evaluar la Ficha de trabajo nº 48 que contiene dos situaciones problemáticas que se resuelven con la multiplicación de un decimal por un número natural. Los alumnos B02 y B14 que no han sabio resolver estos problemas salen a la pizarra y los resuelven con la ayuda del profesor. Las alumnas resuelven los problemas utilizando dos estrategias: operando con números decimales y operando con fracciones decimales.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos resuelven la Ficha de trabajo nº 49 que plantea dos situaciones problemáticas que se resuelven con la división de un número decimal por un natural, y cuyo enunciado es:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 49. Fecha: _____________

Un carpintero corta un listón de 1´5 metros de longitud en cuatro partes iguales. ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes iguales?

SOLUCIÓN: La longitud de una de las partes del listón es __________________

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

1´5 =

Indica cómo has resuelto el problema:

____

Con 0´375 Kgrs. de carne picada haces 5 hamburguesas iguales. ¿Cuánto pesa cada una de las cinco hamburguesas?

SOLUCIÓN: Cada hamburguesa pesa ______________________________

Escribe los datos como suma de fracciones decimales:

0´375 =

Indica cómo has resuelto el problema:

El profesor recoge las tarjeta de evaluación según la van cumplimentando los alumnos y propone evaluar las dos situaciones problemáticas. Los alumnos B17 y B05 que han errado al resolver la primera y segunda situación problemática, respectivamente, salen a la pizarra y resuelven la ambos problemas.

Asistencia de alumnos
Faltan a clase los alumnos B02, B03 y B16.

Aspectos relacionados con la comprensión
Todos los alumnos identifican la multiplicación de un número decimal por un natural como la operación que resuelve los problemas planteados en la Ficha de trabajo nº 48. El 80% de los alumnos de la Segunda Etapa saben aplicar el algoritmo de la multiplicación de un decimal por un natural. Sin embargo, solo tres alumnos (B03, B10 y B18) saben calcular el resultado de la operación utilizando fracciones decimales.

Los alumnos identifican la división de un número decimal por un natural como la operación que resuelve los problemas planteados en la Ficha de trabajo nº 49. El 80% de los alumnos de la Segunda Etapa comprenden que la división resuelve las situaciones problemáticas de reparto igualitario.

El 75% de los alumnos de la Segunda Etapa aplican correctamente el algoritmo de la división a pesar de que apenas utilizan representaciones polinómicas decimales para justificar el procedimiento de cálculo. Ahora bien, sólo cuatro alumnos (B10, B15, B17 y B18) justifican los algoritmos utilizados. Los alumnos B15 y B17 utilizan el algoritmo usual basado en el reparto por fases, y explicitan los órdenes de unidades que repartes en cada fase. Y los alumnos B10 y B18 utilizan una estrategia alternativa que consiste en realizar la división como si el dividendo fuera un natural y, posteriormente, dividir el resultado por la potencia de diez adecuada.

Excepto estos dos últimos alumnos, los demás no conjeturan la estrategia basada en la equivalencia de repartos para calcular la división de un decimal entre un natural. En la Segunda Etapa se realiza una modificación que afecta a la metodología de la propuesta didáctica y que se concreta en el que los alumnos no reciben indicaciones para que supriman las cifras decimales del dividendo.

Los datos obtenidos en la Segunda Etapa, en relación con la modificación metodológica que postula no sugerir a los escolares la supresión de las cifras decimales, aportan la siguiente información:

a) Los alumnos no conjeturan la regla de la supresión de las cifras decimales del dividendo y optan por operar directamente con el número decimal.

b) Los alumnos saben aplicar el algoritmo usual de la división sin necesidad de utilizar la regla de la supresión de las cifras decimales del dividendo.

c) Los alumnos aplican correctamente el algoritmo usual de la división pero descuidan la simbolización del tamaño de las cantidades que van a repartir, y del número y del tamaño de las partes que obtienen en cada fase del reparto.

d) La supresión o mantenimiento de la modificación introducida en la Segunda Etapa no produce variaciones importantes en el rendimiento de los alumnos de la Primera y Segunda Etapa.

Valoración
Los alumnos comprenden el significado de la multiplicación de un número decimal por un natural y saben aplicar el algoritmo usual de esta operación. En cambio, tienen grandes dificultades para justificar este algoritmo utilizando la Representación Fraccionaria o la Representación Polinómica Decimal: la semejanza de este algoritmo con el de la multiplicación de naturales constituye un obstáculo didáctico dado que de alumnos de esta Etapa optan por multiplicar como si se tratasen de naturales y, después, aplicar la regla para "situar la coma".

El modelo de cociente partitivo funciona bien para dar sentido a la división de un número decimal entre un natural y para enseñar el algoritmo usual de esta operación. A pesar de que el 75% de los alumnos saben aplicar el algoritmo, solo el 25% de los alumnos justifican el algoritmo usual de la división de un número decimal entre un natural. Los alumnos siguen teniendo dificultades para justificar este procedimiento de cálculo con decimales porque:

a) no perciben la necesidad de justificar los algoritmos de cálculo que conocen,

b) cuando efectúan el algoritmo de la división descuidan la simbolización del tamaño de las cantidades que van a repartir, y del número y del tamaño de las partes que obtienen en cada fase del reparto, y

c) el conocimiento que tienen los alumnos del algoritmo de la división de naturales y la semejanza entre este algoritmo y el de decimales constituye un obstáculo didáctico porque los alumnos centran su atención en las manipulaciones simbólicas y tienden a obviar el proceso de un reparto, o si lo evocan, no simbolizan los elementos del reparto realizado por fases.

Día 21-2-2005 (Trigésimo séptima sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 50

Ejecución.
En la primera parte de la sesión de clase los alumnos afrontan la resolución de la Ficha de trabajo nº 50 que plantea tres situaciones problemáticas de reparto con la intención de que los alumnos conjeturen la regla de la división de un número natural o decimal por potencias de 10. Mostramos a continuación la tarjeta de evaluación de la Ficha nº 47:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 50. Fecha: _____________

Primera pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 10 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Segunda pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 100 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Tercera pregunta:

Imagina que participas en el reparto de 125 barras de regaliz entre 1000 personas. Expresa, con un número decimal, la cantidad de barras de regaliz que recibes.

SOLUCIÓN: Recibo ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Cuarta pregunta:

Completa la siguiente tabla:

	: 10	: 100	: 1000
125			

Inventa una regla para dividir un decimal por 10, 100 y 1000: ___________________________________

Los alumnos han tenido dificultades para conjeturar y expresar correctamente la regla de la división de un natural por una potencia de diez. Antes de concluir la sesión de clase se procede a evaluar la Ficha de trabajo. Sale a la pizarra el alumno B07 que yerra al resolver la tarea y, lo que es peor, apenas se ha esforzado en hallar la solución de la tarea. El resto de los alumnos escriben en sus cuadernos las respuestas de cada una de las preguntas que se formulan en la Ficha de trabajo.

Solo una cuarta parte de los alumnos ha expresado correctamente la regla. Algunos alumnos no han entendido el objetivo de la enseñanza de esta regla y, como en el caso de la multiplicación (tareas nº 43 y 44), pretenden aplicar el algoritmo de la división y, a la vez, aplicar la regla. Por este motivo, pensamos que sería conveniente posponer la introducción de esta regla.

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo, excepto el alumno B02.

Aspectos relacionados con la comprensión
Cuatro alumnos (B06, B07, B14 y B16) yerran al realizar alguna de las tres divisiones: 125 barras entre 10 personas, 125 barras entre 100 personas y125 barras entre 1000 personas. Los errores que cometen estos alumnos son puntuales, no son sistemáticos. Los restantes alumnos, que suponen el 78% de los alumnos del grupo, han sabido aplicar correctamente el algoritmo de la división.

Los dos tercios de los alumnos han sabido expresar correctamente la regla de la división de un natural por una potencia de diez. Los restantes alumnos dan muestras de comprender la regla pero no saben expresarla correctamente. Este es el caso de la alumna B08 que a pesar de que no expresa correctamente la regla parece que comprende la idea porque escribe:

"los ceros que hayan después corren la coma hacia la izquierda"

Valoración
De entre los alumnos que han sabido conjeturar una regla adecuada algunos alumnos expresan la regla con gran precisión. Este es el caso de los alumnos B9, B10 u B18 que escriben:

"lo que hay que hacer es poner el mismo número que el dividendo en el resultado y si en el divisor hay un 0 corres la coma un lugar hacia la izquierda, si hay dos 0 dos lugares hacia la izquierda, y así sucesivamente" (alumno B9)

"corre la coma hacia a izquierda tantos lugares como ceros haya. Si es multiplicación, a la derecha" (alumno B10)

"cuando lo divides para 10 te sale un resultado, cuando lo divides para 100 como tiene un 0 más que el 10 la coma la corres hacia la izquierda un número y cuando divides para 1000 como tiene 2 ceros más que el 10 corres la coma 2 lugares hacia la izquierda" (alumno B18)

Los alumnos son capaces de conjeturar reglas que expresan propiedades aritméticas como la de "situar la como" en multiplicaciones o divisiones si antes han realizado un trabajo previo de casos particulares que les permiten observar patrones y regularidades.

Día 22-2-2005 (Trigésimo octava sesión)
Plan previsto.
1º Resolver y evaluar la Ficha de trabajo nº 51

Ejecución
Los alumnos abordan la resolución de la Ficha de trabajo nº 51 que plantea tres situaciones problemáticas concatenadas con el objetivo de profundizar en el significado del producto de un número decimal por un natural, ejercitar el algoritmo de cálculo de esta operación e introducir, en los apartados segundo y tercero de la ficha, los procedimientos de cálculo de las operaciones multiplicación y división de dos números decimales. Mostramos a continuación el enunciado de la esta Ficha de trabajo:

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA 51. Fecha: _____________

Primera parte:

El médico le ha dicho a mi abuela que tiene que beber cada día 4 vasos de agua. La capacidad del vaso es 0´3 litros. ¿Cuántos litros de agua debe beber cada día?

SOLUCIÓN: Cada día debe beber ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Segunda parte:

La caja de agua mineral embotellada contiene 12 botellas de 1´5 litros. ¿Cuántos litros de agua hay en una caja?

SOLUCIÓN: En cada caja hay ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Tercera parte:

Si compro una caja de agua embotellada y solo la utilizo para que mi abuela beba la cantidad de agua que le dice el médico, ¿cuántos días durará la caja?

SOLUCIÓN: La caja durará ____

Indica cómo has resuelto el problema:

Los alumnos no han tenido dificultades para resolver las dos primeras situaciones problemáticas formuladas en la Ficha. Solo dos alumnos (B04 y B05) no han identificado la multiplicación como la operación que resuelve las dos primeras situaciones problemáticas; y otros dos (B02 y B16) han errado al realizar algún algoritmo de cálculo escrito.

Los alumnos conocen el algoritmo usual de la multiplicación de dos números decimales, a pesar de que no han recibido enseñanza de este procedimiento de cálculo. Los alumnos multiplican los decimales como si fueran números naturales y, después, aplican la regla de situar la coma. En cambio, tienen dificultades para gestionar simbólicamente, en la tercera situación problemática, el cálculo de la división 18:1´2

Los alumnos desconocen la estrategia de multiplicar el dividendo y el divisor por 10 para obtener otra división equivalente cuyos términos son números naturales y, además, no son capaces de conjeturarla. Cuando los profesores de aula sugieren utilizar esta estrategia la mayoría de los alumnos comprenden que el resultado de la división no varía cuando se multiplica el dividendo o el divisor por un mismo número y, además, algunos alumnos saben utilizar de forma adecuada dicha estrategia.

Después se procede a la evaluación conjunta de la tarea. El alumno B05, que no identifica la operación que resuelve la primera situación problemática, sale a la pizarra y, con la ayuda del profesor, resuelve las tres situaciones problemáticas.

Antes de concluir la sesión de clase los alumnos reciben un cuadernillo que, a modo de libro de texto, explica la introducción del número decimal como resultado de un reparto; amplia el significado del decimal como resultado de una medida, y explica el significado y cálculo de algunas operaciones con números decimales. Además, el profesor informa a los alumnos que, en las dos sesiones de clase, van a realizar una prueba de evaluación de los aprendizajes realizados durante la fase de implementación.

<u>Asistencia de alumnos</u>
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión</u>
Los alumnos tienen dificultades al resolver el último apartado que exige calcular la división 18 : 1´2 porque desconocen la estrategia de multiplicar el dividendo y el divisor por 10 para obtener otra división equivalente cuyos términos sean números naturales. Cundo los profesores de aula sugieren esta estrategia los alumnos dan muestran de comprensión pero, en general, son incapaces de conjeturarla.

La justificación de los algoritmos de cálculo de las operaciones aritméticas con números decimales constituye un obstáculo didáctico ocasionado por su semejanza con los algoritmos de números naturales y, también, por el desconocimiento que poseen los alumnos de las propiedades que justifican los algoritmos de números naturales.

La multiplicación y división de números decimales no es un objetivo de nuestra propuesta de enseñanza a implementar en 5º curso de Educación Primaria. Este conocimiento conceptual y sus procedimientos de cálculo deberán ser estudiado en la implementación de 6º curso de Educación Primaria con la incorporación de un nuevo significado del número racional, de razón.

<u>Toma de decisiones</u>
Concluye la Segunda Etapa de la Experimentación y consideramos que se han cubierto los objetivos

previstos. Antes de concluir la implementación de la propuesta de enseñanza se va a realizar una evaluación de los aprendizajes realizados por los alumnos. La evaluación se va a desarrollar en las dos últimas sesiones de la implementación de la propuesta didáctica.

Día 23-2-2005 (Trigésimo novena sesión)

Plan previsto.

1º Primera parte de la prueba de evaluación de los aprendizajes

Ejecución

Los alumnos resuelven las primeras tres cuestiones de la prueba de evaluación que mostramos a continuación. La primera pregunta indaga si los alumnos comprenden la representación fraccionaria y decimal como resultado de la medida de cantidades de longitud:

1º Si la unidad de medida es

a) Expresa con una fracción la longitud del segmento AB

El segmento AB mide ________________

B) Expresa con un número decimal la longitud del segmento AB

El segmento AB mide ________________

La segunda pregunta indaga si los alumnos saben ordenar fracciones contextualizadas como cantidades de longitud y si saben cuantificar la diferencia entre dichas representaciones fraccionarias:

2º Tienes dos listones: uno tiene una longitud de $\frac{5}{4}$ *de unidad y otro una longitud* $\frac{6}{5}$ *de unidad. Justifica tu respuesta.*

Solución: ____

¿Qué diferencia de longitud hay entre los dos listones?

Solución: ____

La tercera pregunta indaga la comprensión de los alumnos de la representación fraccionaria y decimal como resultado del reparto igualitario de cantidades de longitud; mediante la simbolización del reparto y las representaciones gráficas que efectúan los alumnos y que están asociadas a ambas notaciones simbólicas:

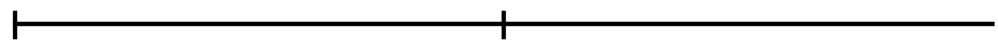
3º Cinco niños se reparten, en partes iguales, 6 barras de regaliz

A) Expresa, con una fracción, la cantidad de regaliz que recibe cada niño

Solución: ____

B) Si la longitud de la barra de regaliz es

dibuja, a partir de O, la fracción que indica la cantidad de regaliz que recibe cada niño:

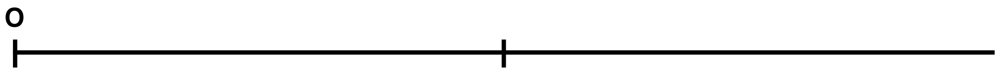


C) Expresa, con un número decimal, la cantidad de regaliz que recibe cada niño:

Solución: ____

D) Si la longitud de la barra de regaliz es

dibuja, a partir de O, el número decimal que indica la cantidad de regaliz que recibe cada niño:



Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la primera pregunta indican que poseen una excelente comprensión de la fracción como medida de la cantidad de longitud: el 94% de los alumnos saben encontrar la fracción que mide la cantidad de longitud de un segmento que mide 5/4 unidades.

El 72% de los alumnos saben expresar, con un número decimal, la fracción 5/4 unidades. A pesar de que los alumnos disponen de tiras de papel de la misma longitud que la unidad, éstos optan por convertir la fracción en el número decimal en vez de medir directamente. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 1:

	Preg 1/ Medir	Preg 1/Paso de fracción a número decimal
R. incorrectas	1	5
R. correctas	17	13
% de R. incorrectas	*6*	*28*
% de R. correctas	*94*	*72*

Los alumnos saben comparar fracciones contextualizadas como medida de cantidades de longitud: el 90% de los alumnos saben comparar la longitud de los listones 5/4 y 6/5 de unidad. Además, todos los alumnos identifican la operación resta de fracciones para cuantificar la diferencia entre ambas cantidades de longitud. El porcentaje de éxito desciende hasta el 61% cuando los alumnos utilizan la equivalencia de fracciones para cuantificar la diferencia entre las cantidades de longitud. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 2:

	Preg 2/ Comparar fracciones	Preg 2/Cálculo de la resta de fracciones
R. incorrectas	2	7
R. correctas	16	11
% de R. incorrectas	*11*	*39*
% de R. correctas	*89*	*61*

Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la tercera pregunta indica que poseen una buena comprensión de la fracción y del número decimal que expresa el resultado del reparto igualitario de 6 barras de regaliz entre 5 niños: medida de la cantidad de longitud: el 83% de los alumnos saben encontrar la fracción que expresa el resultado del reparto y el 89% saben encontrar el número decimal que expresa el resultado del mismo reparto. El porcentaje de éxito desciende hasta el 72% y 67% cuando los alumnos representan gráficamente el resultado del reparto expresado mediante una fracción y un número decimal, respectivamente. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 3:

	Preg3/Fracción como reparto	Preg3/Decimal como reparto	Preg 3/ Representación gráfica de la fracción	Preg 3/ Representación gráfica del decimal
R. incorrectas	3	2	5	6
R. correctas	15	16	13	12
% de R. incorrectas	*17*	*11*	*28*	*33*
% de R. correctas	*83*	*89*	*72*	*67*

Valoración

Los alumnos poseen una comprensión adecuada de los modelos de medida y de cociente partitivo para dar significado a la fracción y al número decimal. El modelo de medida que ha sido objeto de enseñanza en los cursos de 4 y 5º de Educación Primaria evoca a los alumnos ideas más persistentes que el modelo de cociente partitivo que ha sido enseñando únicamente en 5º curso de Educación Primaria.

Los alumnos construyen la representación fraccionaria y decimal en las tareas de medida y de reparto igualitario. Los alumnos evalúan semánticamente, de forma adecuada, la fracción y el número decimal: los dos tercios de los alumnos saben representar gráficamente sobre la recta numérica la fracción y el número decimal.

Los alumnos comprenden que la fracción y el número decimal son representaciones simbólicas equivalentes de una misma cantidad de longitud porque en la primera pregunta los alumnos se sirven del conociendo de la fracción 5/4 u para convertir dicha fracción en la notación decimal equivalente.

Día 24-2-2005 (Cuadragésima sesión)

Plan previsto.

1º Segunda parte de la prueba de evaluación de los aprendizajes

Ejecución

La cuarta pregunta indaga por el significado y el cálculo computacional de la multiplicación de una fracción por un número natural, mediante la resolución del siguiente problema:

4º ¿Cuántos litros de agua hay en un lote que tiene 6 botellas de $\frac{3}{2}$ *de litro cada una?*

Solución: ____

La quinta pregunta indaga si los alumnos saben ordenar números decimales contextualizados como cantidades de longitud y si saben cuantificar la diferencia entre dichas notaciones decimales:

5º Dos amigas están comparando sus estaturas:

Lucía mide 1´6 metros, y

Maite mide 1´48 metros

a) ¿Cuál de las dos amigas es más alta?

Solución: ____________________ *porque* ____________________

b) ¿Cuánto mide más una que otra?

Solución: ____

La sexta pregunta indaga si los alumnos saben convertir un número decimal en su representación fraccionaria:

6º Expresa con una fracción, la más simplificada posible, el peso del paquete de Nesquik (3´5 Kgrs)

Solución: ____

La séptima pregunta indaga por el significado y el cálculo computacional de la división de una fracción entre un número natural, mediante la resolución del siguiente problema

7º Repartes el contenido de una botella de agua de $\frac{3}{2}$ *de litro en 6 vasos de modo que en cada vaso hay la misma cantidad de agua. ¿Qué cantidad de agua hay en cada vaso?*

Solución: ____

La octava pregunta indaga por la comprensión del número decimal asociado a una situación de reparto igualitario de una cantidad discreta, mediante la resolución del siguiente problema:

8º Si te dan la cuarta parte de 75 euros. ¿Cuántos euros te dan?

Solución: ____

Asistencia de alumnos
Asisten a clase todos los alumnos del grupo.

Aspectos relacionados con la comprensión
Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la cuarta pregunta indican que éstos comprenden el significado de la multiplicación de una fracción por un número natural: todos los alumnos, excepto B07, identifican la operación. Además todos, salvo B07 y B14, saben calcular el resultado de la operación 3/2 x 6. Tan solo hemos detectado algunas dificultades al simplificar la fracción 18/2 litros. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 4:

	Preg 4/ Identificación y cálculo de la multiplicación de una fracción por un natural
R. incorrectas	2
R. correctas	16
% de R. incorrectas	*11*
% de R. correctas	*89*

Los alumnos saben comparar números decimales contextualizadas como medida de cantidades de longitud: todos los alumnos, excepto B02, saben comparar la longitud de estaturas de dos niñas y todos ellos saben calcular la diferencia entre las estaturas de las niñas. Hemos detectado alguna dificultad cuando los alumnos convierten metros en centímetros. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 5:

	Preg 5/ Comparar números decimales	Preg 5/Identificación y cálculo de la resta de decimales
R. incorrectas	2	7
R. correctas	16	11
% de R. incorrectas	*11*	*39*
% de R. correctas	*89*	*61*

Los resultados obtenidos por los alumnos al resolver la sexta pregunta indica que los alumnos saben convertir el número decimal 3´5 kgrs en la fracción 7/2 kgrs. El 75% de los alumnos saben convertir el número decimal en su representación fraccionaria asociada. La mayoría de los alumnos conocen la representación polinómica decimal que subyace al número decimal. Hemos detectado dificultades para simplificar la fracción 35/10. Mostramos a continuación los resultados de la pregunta nº 6:

	Preg 6/ paso de la notación decimal a la representación fraccionaria
R. incorrectas	4 (B02, B04, B11, B16)
R. correctas	14
% de R. incorrectas	*22*
% de R. correctas	*78*

Las preguntas nº 7 y nº 8 indagan la comprensión de la operación de división de una fracción, en el problema nº 7; y de un número natural contextualizado como cantidad de dinero, en el problema nº 8. Se trata de evaluar si los alumnos identifican la operación división por un natural y si saben realizan los cálculos computacionales. Los alumnos identifican con facilidad la operación división. Mostramos a continuación los resultados de las preguntas nº 7 y nº 8:

	Preg7/Identifica la división	Preg7/Cálculo de la división	Preg8/Identifica la división	Preg8/Cálculo de la división
R. incorrectas	5	8	2	4
R. correctas	13	10	16	14
% de R. incorrectas	*28*	*44*	*11*	*22*
% de R. correctas	*72*	*56*	*89*	*78*

Los alumnos resuelven con mayor facilidad la división de números decimales que la división de fracciones. La mayoría de los alumnos (B03, B05, B08, B10, B13, B15, B16, B17 y B18) que identifican la operación cuando resuelven el problema nº 7 optan por calcular la división 1´5 : 6 antes que efectuar la operación 3/2:6. Solo dos alumnos (B09 y B12) operan con fracciones utilizando el concepto de equivalencia para calcular la división.

Los alumnos identifican la operación división en situaciones de reparto igualitario de cantidades de magnitud continua o en situaciones de distribución de cantidades de magnitud continua. Los alumnos obtienen porcentajes de éxito altos cuando dividen dos números naturales para obtener la notación decimal. Sin embargo, el porcentaje de éxito desciende hasta el 56% cuando dividen una fracción entre un número natural.

Valoración

Los modelos de medida y de cociente partitivo permiten plantean a los situaciones problemáticas para que éstos doten de significado a la fracción, al número decimal y a las operaciones con fracciones y números decimales. Desde ambos modelos los alumnos conectan la representación fraccionaria y la notación decimal. Los alumnos obtienen porcentajes de éxito aceptables en la prueba de evaluación que indaga por la comprensión del número racional positivo con significado de medida y de cociente partitivo.

Toma de decisiones

Damos por concluida la Segunda Etapa de la Experimentación porque se ha implementado la secuencia de enseñanza que contempla la planificación inicial.

ANEXO III

Resultados de la Experimentación

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 1.1

Medida de un listón de longitud 5/4 de unidad

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CCI. 1.1.1	CCI. 1.2.1	Fracción
A01	3	3	10/8
A02	1	3	5/4
A03	0	0	
A04	1	3	5/4
A05	3	3	5/4
A06	3	3	10/8
A07	2	3	10/8
A08	2	3	10/8
A09	1	3	5/4
A10	3	3	10/8
A11	3	3	5/4
A12	3	3	10/8
A13	3	3	10/8
A14	3	3	5/4
A15	0	0	
A16	1	1	4/4
A17	1	3	5/4
A18	1	3	5/4
A19	3	3	5/4
A20	2	3	10/8
A21	3	3	5/4
A22	1	3	10/8
A23	1	3	5/4
A24	2	3	10/8
A25	1	3	5/4
A26	1	3	5/4
A27	0	0	
A28	2	3	5/4
A29	1	3	5/4
A30	3	3	5/4
A31	2	3	5/4
A32	1	3	5/4
A33	0	0	
A34	0	0	
A35	1	3	5/4
A36	3	3	5/4
A37	2	3	5/4
A38	1	3	10/8
A39	1	3	5/4
A40	3	3	5/4

FE nº1.1	CCI. 1.1.1	CCI. 1.2.1
0	5	5
1	15	1
2	7	0
3	13	34
% de 0	12,5	12,5
% de 1	37,5	2,5
% de 2	17,5	0
% de 3	32,5	85

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CCI. 1.1.1	CCI. 1.2.1	Fracción
B01	3	3	5/4
B02	2	3	5/4
B03	3	3	5/4
B04	3	3	5/4
B05	2	3	5/4
B06	2	3	5/4
B07	2	3	5/4
B08	2	3	5/4
B09	3	3	5/4
B10	3	3	5/4
B11	3	3	5/4
B12	3	3	5/4
B13	3	3	5/4
B14	3	3	5/4
B15	3	3	5/4
B16	1	3	5/4
B17	3	3	5/4
B18	3	3	5/4

FE nº1.1	CCI. 1.1.1	CCI. 1.2.1
0	0	0
1	1	0
2	5	0
3	12	18
% de 0	0	0
% de 1	6	0
% de 2	28	0
% de 3	67	100

CC.I.1.1 Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida de un listón de longitud 5/4 de unidad

CC.I.2.1 Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida de un listón de longitud 5/4 de unidad

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 1.2
Medida de un listón de longitud 5/6 de unidad

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CCI. 1.1.2	CCI. 1.2.2
A01	3	3
A02	3	3
A03	1	1
A04	1	3
A05	1	3
A06	3	3
A07	1	3
A08	1	3
A09	3	3
A10	3	3
A11	3	3
A12	1	3
A13	3	3
A14	3	3
A15	0	0
A16	1	1
A17	2	3
A18	3	3
A19	3	3
A20	1	3
A21	2	3
A22	1	3
A23	1	2
A24	1	3
A25	1	3
A26	1	1
A27	0	0
A28	3	3
A29	2	3
A30	3	3
A31	1	3
A32	1	3
A33	0	0
A34	0	0
A35	1	1
A36	2	3
A37	1	3
A38	1	3
A39	1	1
A40	3	3

FE nº1.2	CCI. 1.1.2	CCI. 1.2.2
0	4	4
1	19	5
2	4	1
3	13	30
% de 0	10	10
% de 1	48	13
% de 2	10	3
% de 3	33	75

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CCI. 1.1.2	CCI. 1.2.2
B01	2	3
B02	3	3
B03	0	0
B04	2	3
B05	3	3
B06	3	3
B07	3	3
B08	3	3
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	1	3
B14	3	3
B15	3	3
B16	0	0
B17	3	3
B18	3	3

FE nº1.2	CCI. 1.1.2	CCI. 1.2.2
0	2	2
1	1	0
2	2	0
3	13	16
% de 0	11	11
% de 1	6	0
% de 2	11	0
% de 3	72	89

CC.I.1.2 Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida de un listón de longitud 5/6 de unidad

CC.I.2.2 Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida de un listón de longitud 5/6 de unidad

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 2

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. II.1 (4/7)	CC. II.1 (6/5)
A01	3	
A02	0	
A03	3	
A04	3	
A05		0
A06	2	
A07	3	
A08		1
A09		3
A10		3
A11	3	
A12		1
A13		3
A14	1	
A15		3
A16		3
A17	1	
A18		1
A19	1	
A20	1	
A21	3	
A22	3	
A23		1
A24		3
A25		1
A26		3
A27	0	
A28	3	
A29	1	
A30	2	
A31	3	
A32		1
A33		0
A34		1
A35		3
A36	3	
A37	3	
A38		1
A39	1	
A40		3

FE nº2	CC. II.1 (4/7)	CC. II.1 (6/5)
0	2	2
1	6	8
2	2	0
3	11	9
% de 0	10	11
% de 1	29	42
% de 2	10	0
% de 3	52	47

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. II.1 (7/8)	CC. II.1 (5/3)
B01	1	1
B02	1	1
B03	3	2
B04	1	1
B05	3	3
B06	3	1
B07	3	1
B08	1	1
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	1
B12	1	1
B13	1	1
B14	1	1
B15	3	1
B16	3	1
B17	3	3
B18	3	3

FE nº2	CC. II.1 (7/8)	CC. II.1 (5/3)
0	0	0
1	7	12
2	0	1
3	11	5
% de 0	0	0
% de 1	39	67
% de 2	0	6
% de 3	61	28

CC. II.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del numerador y denominador de la fracción

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 2BIS
Evaluación semantica de la fracción como medida de cantidades de longitud

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. II.2 (5/4)	CC. II.2 (4/3)
B01	3	3
B02	3	3
B03	3	3
B04	2	3
B05	2	1
B06	1	1
B07	3	3
B08	3	2
B09	3	3
B10	3	3
B11	1	1
B12	3	3
B13	3	3
B14	0	0
B15	3	3
B16	1	1
B17	3	3
B18	3	3

FE nº2BIS	CC. II.1 (5/4)	CC. II.1 (4/3)
0	1	1
1	3	4
2	2	1
3	12	12
% de 0	6	6
% de 1	17	22
% de 2	11	6
% de 3	67	67

CC. II.2 Razonamientos empleados para construir gráficamente una cantidad de magnitud longitud

Resultados de la Ficha de Evaluación nº 3

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. I.1	CC. I.2	Fracción
A01	3	3	15/8
A02	1	1	8/16
A03	2	3	15/8
A04	0	0	
A05	3	3	15/8
A06	1	3	15/8
A07	1	3	15/8
A08	3	3	15/8
A09	0	0	
A10	3	3	15/8
A11	3	3	15/8
A12	1	1	16/8
A13	2	3	15/8
A14	3	3	30/16
A15	3	3	30/16
A16	2	3	15/8
A17	2	3	30/16
A18	1	3	30/16
A19	1	3	30/16
A20	3	1	18/8
A21	2	3	15/8
A22	1	3	15/8
A23	0	0	
A24	0	0	
A25	1	3	15/8
A26	1	1	7/4
A27	1	3	15/8
A28	3	3	15/8
A29	3	3	15/8
A30	3	3	15/8
A31	3	3	15/8
A32	1	3	15/8
A33	3	3	15/8
A34	3	3	15/8
A35	1	3	15/8
A36	2	3	15/8
A37	1	3	15/8
A38	1	3	30/16
A39	1	1	
A40	2	3	15/8

FE nº3	CCI. 1.1	CCI. 1.2
0	4	4
1	15	5
2	7	0
3	14	31
% de 0	10	10
% de 1	38	13
% de 2	18	0
% de 3	35	78

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. I.1	CC. I.2	Fracción
B01	3	3	15/8
B02	1	3	15/8
B03	3	3	15/8
B04	3	3	30/16
B05	1	3	15/8
B06	2	3	15/8
B07	3	3	15/8
B08	1	3	15/8
B09	3	3	15/8
B10	3	3	15/8
B11	3	3	30/16
B12	3	3	30/16
B13	3	3	15/8
B14	3	3	15/8
B15	3	3	15/8
B16	1	3	15/8
B17	3	3	15/8
B18	3	3	15/8

FE nº3	CCI. 1.1	CCI. 1.2
0	0	0
1	4	0
2	1	0
3	13	18
% de 0	0	0
% de 1	22	0
% de 2	6	0
% de 3	72	100

CC.I.1.1 Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida de un mantel de superficie 15/8 de unidad

CC.I.2.1 Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida de un mantel de superficie 15/8 de unidad

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 4
Evaluación semantica de la fracción como medida de cantidades de superficie

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. II.2 (5/4)	CC. II.2 (4/3)
B01	3	1
B02	3	3
B03	3	3
B04	3	3
B05	3	3
B06	1	2
B07	1	1
B08	2	2
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	3	3
B14	1	1
B15	3	3
B16	1	1
B17	3	3
B18	3	3

FE nº4	CC. II.1 (5/4)	CC. II.1 (4/3)
0	0	0
1	4	4
2	1	2
3	13	12
% de 0	0	0
% de 1	22	22
% de 2	6	11
% de 3	72	67

CC. II.2 Razonamientos empleados para construir gráficamente una cantidad de magnitud superficie

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 5

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. V.1	CC. V.2
A01	2	3
A02	1	3
A03	0	0
A04	3	3
A05	2	3
A06	1	3
A07	1	3
A08	3	3
A09	3	3
A10	3	3
A11	2	3
A12	2	3
A13	2	3
A14	2	3
A15	2	3
A16	2	3
A17	2	3
A18	3	3
A19	2	3
A20	0	0
A21	3	3
A22	2	3
A23	1	1
A24	0	0
A25	2	3
A26	1	3
A27	2	3
A28	1	1
A29	3	3
A30	2	3
A31	2	3
A32	1	3
A33	3	3
A34	2	3
A35	2	3
A36	1	3
A37	2	3
A38	1	3
A39	1	3
A40	2	3

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. V.1	CC. V.2
B01	2	3
B02	1	1
B03	2	3
B04	2	3
B05	2	3
B06	2	3
B07	3	3
B08	2	3
B09	2	3
B10	2	3
B11	2	3
B12	3	3
B13	2	3
B14	2	3
B15	2	3
B16	2	3
B17	2	3
B18	2	3

FE nº 5	CC. V.1	CC. V.2
0	3	3
1	10	2
2	19	0
3	8	35
% de 0	8	8
% de 1	25	5
% de 2	48	0
% de 3	20	88

FE nº 5	CC. V.1	CC. V.2
0	0	0
1	1	1
2	15	0
3	2	17
% de 0	0	0
% de 1	6	6
% de 2	83	0
% de 3	11	94

CC. V.1 Argumentaciones sobre el significado de la equivalencia de fracciones
CC. V.2 Razonamientos empleados para construir fracciones equivalentes a otra dada

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 6
Comparar 5/4 de unidad y 4/3 de unidad

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VI.1	Estrategia	CC.VI.2
A01	3	G	3
A02	1	RM	1
A03	1	G	1
A04	1	NI	1
A05	1	G	1
A06	3	G	3
A07	3	G	3
A08	3	G	3
A09	3	RM	2
A10	3	G	3
A11	3	RM	3
A12	1	G	1
A13	3	RM	3
A14	3	G	3
A15	3	G	3
A16	3	M	3
A17	3	G	1
A18	3	NI	1
A19	3	NI	1
A20	3	M	3
A21	3	M	3
A22	3	G	1
A23	3	NI	1
A24	3	G	3
A25	3	G	1
A26	1	G	1
A27	3	RM	2
A28	3	M	3
A29	3	M	3
A30	3	G	3
A31	3	RM	3
A32	1	NI	1
A33	3	G	3
A34	3	G	3
A35	3	G	1
A36	3	G	3
A37	1	RM	1
A38	1	RM	1
A39	0	0	0
A40	3	G	3

FE nº 6	CC.VI.1	Estrategia	CC.VI.2
0	1		1
1	9		16
2	0		2
3	30		21
% de 0	*3*		*3*
% de 1	*23*		*40*
% de 2	*0*		*5*
% de 3	*75*		*53*

	Éxito	Estrategia
0	0	1
NI	0	5
M	5	5
G	13	21
RM	5	8
% de 0	*0*	*3*
% de NI	*0*	*13*
% de M	*100*	*13*
% de G	*62*	*53*
% de RM	*62*	*20*

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VI.1	Estrategia	CC.VI.2
B01	3	RM	3
B02	3	RM	2
B03	3	RM	3
B04	1	RM	1
B05	3	RM	3
B06	3	RM	3
B07	3	G	1
B08	3	G	3
B09	3	RM	3
B10	3	RM	3
B11	3	G	3
B12	3	RM	3
B13	3	G	2
B14	3	G	2
B15	0	0	0
B16	3	G	1
B17	3	RM	3
B18	3	RM	3

FE nº 6	CC.VI.1	Estrategia	CC.VI.2
0	1		1
1	1		3
2	0		3
3	16		11
% de 0	*6*		*6*
% de 1	*6*		*17*
% de 2	*0*		*17*
% de 3	*89*		*61*

	Éxito	Estrategia
0	0	1
NI	0	0
M	0	0
G	4	6
RM	10	11
% de 0	*0*	*6*
% de NI	*0*	*0*
% de M	*0*	*0*
% de G	*66*	*33*
% de RM	*90*	*61*

CC.VI.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la comparación de fracciones
CC.VI.2 Razonamientos empleados para comparar las fracciones

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales
G Utiliza gráficos
RM Utiliza razonamientos basados en la idea de medida

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 7
Comparar 4/5 de unidad y 5/6 de unidad

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. V.2	Estrategia
A01	3	RE
A02	0	-
A03	3	RE
A04	1	RE
A05	1	RE
A06	3	RE
A07	3	RE
A08	3	RE
A09	3	RE
A10	3	RE
A11	3	RE
A12	3	RE
A13	3	RE
A14	3	RE
A15	3	RE
A16	1	RE
A17	1	RE
A18	1	RE
A19	3	RE
A20	0	-
A21	3	G
A22	3	G
A23	3	RE
A24	3	RE
A25	1	RE
A26	1	RE
A27	3	RE
A28	1	G
A29	3	G
A30	3	RE
A31	3	RE
A32	1	RE
A33	3	RE
A34	3	RE
A35	3	RE
A36	1	G
A37	1	RE
A38	1	RE
A39	3	RE
A40	3	RE

FE nº 7	CC. V.2
0	2
1	12
2	0
3	26
% de 0	*5*
% de 1	*30*
% de 2	*0*
% de 3	*65*

	Éxito	Estrategia
0	0	0
NI	0	0
M	0	0
G	3	5
RE	23	33
% de 0		*0*
% de NI	*0*	*0*
% de M	*0*	*0*
% de G	*60*	*13*
% de RE	*70*	*83*

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC. V.2	Estrategia
B01	3	RE
B02	1	RE
B03	2	RE
B04	0	-
B05	3	RE
B06	3	RE
B07	3	RE
B08	1	RE
B09	3	RE
B10	3	RE
B11	3	RE
B12	1	RE
B13	3	RE
B14	1	RE
B15	3	RE
B16	3	RE
B17	3	RE
B18	3	RE

FE nº 7	CC. V.2
0	1
1	4
2	1
3	12
% de 0	*6*
% de 1	*22*
% de 2	*6*
% de 3	*67*

	Éxito	Estrategia
0	0	1
NI	0	0
M	0	0
G	0	0
RE	13	17
% de 0		*6*
% de NI	*0*	*0*
% de M	0	*0*
% de G	0	*0*
% de RE	*76*	*94*

CC. V.2 Razonamientos utilizados sobre el uso de fracciones equivalentes en tareas de la comparación de fracciones

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales
G Utiliza gráficos
RE Utiliza razonamientos basados en el concepto de equivalencia

Resultados de la Ficha de Evaluación nº 8

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC. III.2
A01	3
A02	1
A03	3
A04	0
A05	3
A06	1
A07	1
A08	3
A09	3
A10	3
A11	3
A12	0
A13	3
A14	2
A15	3
A16	3
A17	2
A18	3
A19	1
A20	0
A21	3
A22	1
A23	3
A24	3
A25	0
A26	0
A27	3
A28	3
A29	3
A30	2
A31	1
A32	1
A33	3
A34	3
A35	3
A36	3
A37	3
A38	1
A39	0
A40	3

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC. III.2	CC. III.1
B01	3	1
B02	3	3
B03	3	3
B04	3	1
B05	3	3
B06	3	3
B07	0	0
B08	3	3
B09	3	1
B10	3	3
B11	3	1
B12	3	3
B13	0	0
B14	3	3
B15	3	3
B16	3	3
B17	3	3
B18	3	3

FE nº 8	CC. III.2
0	6
1	8
2	3
3	23
% de 0	15
% de 1	20
% de 2	8
% de 3	58

FE nº 8	CC. III.2	CC. III.1
0	2	2
1	0	4
2	0	0
3	16	12
% de 0	11	11
% de 1	0	22
% de 2	0	0
% de 3	89	67

CCIII.1: Razonamientos empleados para considerar las componentes que intervienen en la medida
CCIII.2: Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para expresar el resultado de la medida

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 9

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC. IV.1	CC. IV.2
A01	2	3
A02	1	3
A03	1	3
A04	1	3
A05	1	1
A06	1	3
A07	3	3
A08	3	3
A09	1	3
A10	3	3
A11	3	3
A12	1	1
A13	1	1
A14	3	3
A15	3	3
A16	0	0
A17	3	3
A18	1	3
A19	2	3
A20	1	1
A21	1	3
A22	1	3
A23	2	3
A24	1	1
A25	1	3
A26	1	3
A27	3	3
A28	2	3
A29	2	3
A30	3	3
A31	3	3
A32	1	3
A33	3	3
A34	1	3
A35	2	3
A36	3	3
A37	2	3
A38	1	3
A39	1	1
A40	3	3

FE nº 9	CC. IV.1	CC. IV.2
0	1	1
1	19	6
2	7	0
3	13	33
% de 0	3	3
% de 1	48	15
% de 2	18	0
% de 3	33	83

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC. IV.1	CC. IV.2
B01	3	3
B02	1	3
B03	3	3
B04	3	3
B05	3	3
B06	3	3
B07	3	3
B08	3	3
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	3	3
B14	0	0
B15	3	3
B16	3	3
B17	3	3
B18	3	3

FE nº 9	CC. IV.1	CC. IV.2
0	1	1
1	1	0
2	0	0
3	16	17
% de 0	6	6
% de 1	6	0
% de 2	0	0
% de 3	89	94

CCIV.1: Argumentaciones sobre el significado del numerador y denominador de la fracción.
CCIV.2: Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para construir la cantidad de magnitud de cardinalidad.

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 10
Suma de fracciones

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.1.1	Estrategia	CC.VII.1.2
A01	3	E	3
A02	1	M	3
A03	1	M	1
A04	1	M	3
A05	3	E	3
A06	1	G	3
A07	3	E	3
A08	1	E	3
A09	3	E	3
A10	1	G	3
A11	3	E	3
A12	1	E	1
A13	3	E	3
A14	1	E	3
A15	3	E	3
A16	1	M	3
A17	1	M	1
A18	1	E	3
A19	1	M	3
A20	1	M	3
A21	1	M	3
A22	1	M	3
A23	1	M	1
A24	3	E	3
A25	3	E	3
A26	1	M	1
A27	1	E	3
A28	0	0	0
A29	1	G	3
A30	1	E	3
A31	3	G	3
A32	1	NI	1
A33	3	E	3
A34	3	E	3
A35	3	E	3
A36	0	0	0
A37	1	M	1
A38	3	E	3
A39	1	NI	1
A40	3	E	3

FE nº 10	CC.VII.1.1		CC.VII.1.2
0	2		2
1	23		8
2	0		0
3	15		30
% de 0	*5*		*5*
% de 1	*58*		*20*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*38*		*75*

		Estrategia	Éxito en E
0		2	
NI		2	0
M		12	7
G		4	4
E		20	19
% de 0		*5*	
% de NI		*5*	0
% de M		*30*	18
% de G		*10*	10
% de RE		*50*	48

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.1.1	Estrategia	CC.VII.1.2
B01	3	G	3
B02	1	NI	1
B03	3	E	3
B04	1	M	1
B05	1	M	1
B06	1	M	1
B07	1	M	1
B08	3	E	3
B09	3	E	3
B10	3	E	3
B11	3	E	3
B12	3	E	3
B13	3	E	3
B14	3	E	3
B15	3	E	3
B16	1	E	1
B17	3	E	3
B18	3	E	3

FE nº 10	CC.VII.1.1		CC.VII.1.2
0	0		0
1	6		6
2	0		0
3	12		12
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*33*		*33*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*67*		*67*

		Estrategia	Éxito en E
0		0	
NI		1	0
M		4	0
G		1	1
E		12	11
% de 0		*0*	
% de NI		*6*	0
% de M		*22*	0
% de G		*6*	6
% de RE		*67*	61

CCVII.1.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de suma de fracciones
CCVII.1.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado de la suma de fracciones

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales tangibles y mide
G Utiliza gráficos y mide
RE Utiliza razonamientos basados en el concepto de equivalencia

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 11

Resta de fracciones

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.2.1	Estrategia	CC.VII.2.2
A01	3	E	3
A02	1	G	1
A03	1	G	3
A04	1	G	1
A05	3	G	3
A06	1	G	1
A07	1	G	1
A08	1	G	1
A09	3	E	3
A10	3	E	3
A11	3	E	3
A12	3	G	1
A13	3	E	3
A14	3	E	3
A15	3	E	3
A16	3	E	3
A17	3	E	1
A18	3	E	3
A19	1	G	1
A20	1	E	1
A21	1	M	3
A22	1	M	3
A23	1	G	1
A24	3	E	3
A25	1	G	3
A26	1	G	3
A27	3	E	3
A28	3	E	3
A29	1	G	3
A30	1	NI	1
A31	3	E	3
A32	1	NI	1
A33	1	G	3
A34	3	E	3
A35	3	E	3
A36	1	NI	1
A37	3	E	3
A38	1	E	1
A39	1	NI	1
A40	1	G	3

FE nº 11	CC.VII.2.1		CC.VII.2.2
0	0		0
1	21		15
2	0		0
3	19		25
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*53*		*38*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*48*		*63*
		Estrategia	Éxito en E
0		0	
NI		4	0
M		2	2
G		15	7
E		19	16
% de 0		*0*	
% de NI		*10*	0
% de M		*5*	5
% de G		*38*	18
% de E		*48*	40

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.2.1	Estrategia	CC.VII.2.2
B01	3	G	3
B02	1	NI	1
B03	1	NI	1
B04	3	E	3
B05	1	M	1
B06	3	E	3
B07	3	E	3
B08	1	E	1
B09	3	E	3
B10	3	E	3
B11	3	E	3
B12	3	E	3
B13	3	E	3
B14	1	NI	1
B15	3	E	3
B16	3	E	1
B17	3	E	3
B18	3	E	3

FE nº 11	CC.VII.2.1		CC.VII.2.2
0	0		0
1	5		6
2	0		0
3	13		12
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*28*		*33*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*72*		*67*
		Estrategia	Éxito en E
0		0	
NI		3	0
M		1	0
G		1	1
E		13	11
% de 0		*0*	
% de NI		*17*	0
% de M		*6*	0
% de G		*6*	6
% de RE		*72*	61

CCVII.2.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la resta de fracciones
CCVII.2.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado de la resta de fracciones

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales tangibles y mide
G Utiliza gráficos y mide
RE Utiliza razonamientos basados en el concepto de equivalencia

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 12
Multiplicación de una fracción por un número natural

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.3.1	Estrategia	CC.VII.3.2
A01	3	E	3
A02	1	NI	1
A03	3	E	3
A04	1	E	3
A05	1	G	1
A06	1	NI	1
A07	1	NI	1
A08	3	E	3
A09	3	E	3
A10	3	E	3
A11	3	E	3
A12	3	E	1
A13	3	E	3
A14	3	E	3
A15	3	E	3
A16	3	E	3
A17	3	E	3
A18	3	E	3
A19	3	E	3
A20	1	NI	1
A21	3	E	3
A22	1	G	3
A23	3	E	3
A24	3	E	3
A25	3	E	3
A26	3	E	1
A27	3	E	3
A28	3	E	1
A29	3	E	3
A30	3	E	3
A31	3	E	3
A32	1	NI	1
A33	3	E	3
A34	3	E	3
A35	3	E	3
A36	3	E	3
A37	3	E	3
A38	3	E	1
A39	1	NI	1
A40	1	E	3

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.3.1	Estrategia	CC.VII.3.2
B01	3	E	3
B02	1	NI	1
B03	3	E	3
B04	3	E	3
B05	1	NI	1
B06	3	E	3
B07	3	E	1
B08	3	E	3
B09	3	E	3
B10	3	E	3
B11	1	NI	1
B12	3	E	3
B13	3	E	3
B14	3	E	1
B15	3	E	3
B16	3	E	3
B17	3	E	3
B18	3	E	3

FE n º12	CC.VII.3.1		CC.VII.3.2
0	0		0
1	10		11
2	0		0
3	30		29
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*25*		*28*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*75*		*73*

FE nº 12	CC.VII.3.1		CC.VII.3.2
0	0		0
1	3		5
2	0		0
3	15		13
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*17*		*28*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*83*		*72*

		Estrategia	Éxito en E
0		0	0
NI		6	0
M		0	0
G		2	1
E		32	28
% de 0		*0*	*0*
% de NI		*15*	0
% de M		*0*	0
% de G		*5*	3
% de E		*80*	70

		Estrategia	Éxito en E
0		0	0
NI		3	0
M		0	1
G		0	2
E		15	13
% de 0		*0*	*0*
% de NI		*17*	0
% de M		*0*	6
% de G		*0*	11
% de RE		*83*	72

CCVII.3.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del producto de una fracción por un número natural
CCVII.3.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado del producto de una fracción por un número natural

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales tangibles y mide
G Utiliza gráficos y mide
RE Utiliza razonamientos basados en el concepto de equivalencia

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 13
División de una fracción entre un número natural

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.4.1	Estrategia	CC.VII.4.2
A01	3	E	3
A02	3	G	1
A03	1	NI	1
A04	1	G	1
A05	1	G	3
A06	1	G	1
A07	3	E	3
A08	3	E	3
A09	3	E	3
A10	1	G	3
A11	3	E	3
A12	0	0	0
A13	1	E	3
A14	1	G	3
A15	1	G	3
A16	1	G	3
A17	1	G	1
A18	1	G	3
A19	3	E	3
A20	3	E	3
A21	1	G	3
A22	1	G	3
A23	1	G	1
A24	1	G	3
A25	1	G	1
A26	1	E	3
A27	3	E	3
A28	3	E	3
A29	1	E	3
A30	3	E	3
A31	1	E	3
A32	1	NI	1
A33	1	E	3
A34	1	E	3
A35	3	E	3
A36	0	0	0
A37	1	G	1
A38	3	E	3
A39	1	G	3
A40	1	G	3

FE nº13	CC.VII.4.1		CC.VII.4.2
0	2		2
1	25		9
2	0		0
3	13		29
% de 0	*5*		*5*
% de 1	*63*		*23*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*33*		*73*

		Estrategia	Éxito en E
0		0	0
NI		2	0
M		0	0
G		18	11
E		18	18
% de 0		*0*	0
% de NI		*5*	0
% de M		*0*	0
% de G		*45*	28
% de E		*45*	45

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VII.4.1	Estrategia	CC.VII.4.2
B01	3	E	3
B02	1	NI	1
B03	3	E	3
B04	1	E	1
B05	1	NI	1
B06	1	E	1
B07	3	E	3
B08	1	NI	1
B09	3	E	3
B10	3	E	3
B11	3	E	3
B12	3	E	3
B13	3	E	3
B14	1	NI	1
B15	3	E	3
B16	3	E	3
B17	3	E	3
B18	3	E	3

FE nº13	CC.VII.4.1		CC.VII.4.2
0	0		0
1	6		6
2	0		0
3	12		12
% de 0	*0*		*0*
% de 1	*33*		*33*
% de 2	*0*		*0*
% de 3	*67*		*67*

		Estrategia	Éxito en E
0		0	0
NI		4	0
M		0	0
G		0	0
E		14	12
% de 0		*0*	0
% de NI		*22*	0
% de M		*0*	0
% de G		*0*	0
% de RE		*78*	67

CCVII.4.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del cociente de una fracción entre un número natural
CCVII.4.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado del cociente de una fracción entre un número natural

Estrategias
NI No indica la estrategia
M Utiliza materiales tangibles y mide
G Utiliza gráficos y mide
RE Utiliza razonamientos basados en el concepto de equivalencia

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 14
Reparto igualitario de 5 barras para 3 personas

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VIII.1	Estrategia	CC.VIII.2	Estrategia
A01	3	S	3	CI
A02	2	NI	1	CI
A03	2	G	1	CI
A04	2	S	1	Frac
A05	3	G	2	CI
A06	0	0	0	
A07	2	S	3	Frac
A08	2	G	2	CI
A09	3	S	3	CI
A10	3	G	2	CI
A11	3	S	3	CI
A12	0	0	0	
A13	3	S	3	CI
A14	3	S	3	CI
A15	3	G	1	CI
A16	2	G	2	Frac
A17	3	S	1	CI
A18	3	S	3	CI
A19	2	S	2	CI
A20	3	S	2	CI
A21	3	G	2	CI
A22	1	G	2	
A23	0	0	0	
A24	3	G	2	CI
A25	3	S	1	CI
A26	1	S	2	
A27	3	S	2	CI
A28	3	G	2	Frac
A29	1	S	3	
A30	2	G	2	CI
A31	3	S	3	CI
A32	3	S	3	CI
A33	3	S	3	CI
A34	3	S	3	CI
A35	3	S	3	Frac
A36	0	0	0	
A37	3	G	2	CI
A38	1	G	1	Frac
A39	1	NI	1	
A40	3	S	3	CI

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.VIII.1	Estrategia	CC.VIII.2	Estrategia
B01	2	S	3	Frac
B02	2	S	1	Frac
B03	3	S	3	Frac
B04	2	S	3	Frac
B05	3	S	2	Frac
B06	3	S	1	Frac
B07	2	S	3	Frac
B08	3	S	3	Frac
B09	3	S	3	Frac
B10	3	S	3	Frac
B11	3	S	3	Frac
B12	3	S	3	Frac
B13	2	S	1	Frac
B14	3	S	1	Frac
B15	3	S	3	Frac
B16	3	S	3	Frac
B17	3	S	3	Frac
B18	2	S	1	Frac

FE nº14	CC.VIII.1	CC.VIII.2
0	4	4
1	5	8
2	8	14
3	23	14
% de 0	*10*	*10*
% de 1	*13*	*20*
% de 2	*20*	*35*
% de 3	*58*	*35*

FE nº14	CC.VIII.1	CC.VIII.2
0	0	0
1	0	5
2	6	1
3	12	12
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*0*	*28*
% de 2	*33*	*6*
% de 3	*67*	*67*

CCVIII.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de la fracción que expresa el resultado del reparto y de los términos de la fracción
CCVIII.2 Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto igualitario

Criterios de la Unidad de Análisis de la Comprensión del Contenido CC.VIII.1:
0 *Falta a clase*
1 *Interpretación errónea o inadecuada de las componentes del reparto*
2 *Interpretación errónea o inadecuada de una de las componentes del reparto*
3 *Interpretación correcta o bastante adecuada de las componentes del reparto.*

Criterios de la Unidad de Análisis de la Comprensión del Contenido CC.VIII.2:
0 *Falta a clase*
1 *No encuentra la fracción, escribe una fracción incorrecta o es correcta pero no la justifica*
2 *Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas adecuadas y no utiliza representaciones simbólicas o son inadecuadas*
3 *Escribe la fracción correcta utilizando representaciones gráficas y representaciones simbólicas adecuadas*

Cuando los alumnos escriben los significados del numerador y del denominador optan por:
Frac *Interpretar los términos como resultado de la medida del resultado del reparto igualitario*
CI *Interpretar los términos como las condiciones iniciales del reparto igualitario*

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 15
Dos tareas de comparación de repartos

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.IX.1	CC.IX.2a	CC.IX.2b	Estrategia
A01	3	3	3	E
A02	0	0	0	0
A03	1	1	1	R
A04	3	2	1	G
A05	3	3	3	G
A06	3	3	3	E
A07	1	1	1	G
A08	3	3	3	E
A09	3	3	3	E
A10	3	3	3	E
A11	3	3	3	E
A12	0	0	0	0
A13	3	3	3	E
A14	3	3	3	E
A15	3	3	3	E
A16	3	3	3	E
A17	1	1	1	R
A18	2	2	1	G
A19	3	3	3	E
A20	2	2	1	G
A21	3	3	3	G
A22	3	3	3	E
A23	3	1	2	G
A24	0	1	1	NI
A25	3	3	1	E
A26	3	3	1	E
A27	3	3	3	E
A28	3	3	2	G
A29	3	3	3	G
A30	0	0	0	0
A31	3	3	3	E
A32	3	2	2	G
A33	2	3	3	E
A34	3	3	3	E
A35	3	3	3	E
A36	0	1	1	R
A37	3	3	3	E
A38	3	3	3	E
A39	0	1	1	R
A40	3	3	3	E

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.IX.1	CC.IX.2a	CC.IX.2b	Estrategia
B01	3	3	3	E
B02	3	3	3	E
B03	3	3	3	E
B04	3	3	3	E
B05	3	3	3	E
B06	3	3	3	E
B07	3	3	3	E
B08	3	3	3	E
B09	3	3	3	E
B10	3	3	3	E
B11	3	2	1	G
B12	3	3	3	E
B13	3	3	1	E
B14	3	2	1	E
B15	3	3	3	E
B16	3	3	1	G
B17	3	3	3	E
B18	3	3	3	E

FE nº15	CC.IX.1	CC.IX.2a	CC.IX.2b
0	6	3	3
1	3	7	11
2	3	4	3
3	28	26	23
% de 0	*15*	*8*	*8*
% de 1	*8*	*18*	*28*
% de 2	*8*	*10*	*8*
% de 3	*70*	*65*	*58*

FE nº15	CC.IX.1	CC.IX.2a	CC.IX.2b
0	0	0	0
1	0	0	4
2	0	2	0
3	18	16	14
% de 0	*0*	*0*	*0*
% de 1	*0*	*0*	*22*
% de 2	*0*	*11*	*0*
% de 3	*100*	*89*	*78*

		Estrategia
0		3
NI		1
G		10
R		4
E		22
% de 0		*8*
% de NI		*3*
% de G		*25*
% de R		*10*
% de E		*55*

		Estrategia
0		0
NI		0
G		2
R		0
E		16
% de 0		*0*
% de NI		*0*
% de G		*11*
% de R		*0*
% de E		*89*

CCIX.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de fracción mayor o menor que otra
CCIX.2 Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para comparar dos fracciones

Criterios de las estrategias utilizadas por los alumnos:
- *NI* *No lo indican*
- *G* *Utlizan gráficos*
- *R* *Utlizan razonamientos basados en el reparto*
- *E* *Utilizan la equivalencia de fracciones para comparar repartos*

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 16

Representación Polinómica Decimal del reparto de 5 barras para 4 personas

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.X.1	CC.X.2
A01	1	3
A02	2	1
A03	0	0
A04	0	0
A05	1	3
A06	2	3
A07	3	3
A08	2	3
A09	1	3
A10	3	3
A11	3	3
A12	2	2
A13	1	3
A14	2	3
A15	1	2
A16	3	3
A17	3	3
A18	2	3
A19	3	3
A20	1	2
A21	3	3
A22	3	1
A23	3	3
A24	2	3
A25	1	3
A26	2	1
A27	2	3
A28	3	2
A29	3	3
A30	1	3
A31	3	3
A32	0	0
A33	2	3
A34	3	3
A35	1	2
A36	0	0
A37	3	3
A38	0	0
A39	2	3
A40	3	2

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.X.1	CC.X.2
B01	3	2
B02	2	1
B03	2	3
B04	3	3
B05	3	1
B06	3	3
B07	3	3
B08	3	3
B09	2	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	3	3
B14	2	3
B15	3	3
B16	3	3
B17	3	3
B18	3	3

FE nº 16	CC.X.1	CC.X.2
0	5	5
1	9	3
2	11	6
3	15	26
% de 0	*13*	*13*
% de 1	*23*	*8*
% de 2	*28*	*15*
% de 3	*38*	*65*

FE nº 16	CC.X.1	CC.X.2
0	0	0
1	0	2
2	4	1
3	14	15
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*0*	*11*
% de 2	*22*	*6*
% de 3	*78*	*83*

CCX.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del reparto igualitario que se efectúa en varias fases y con fraccionamientos en 10 partes iguales

CCX.2 Utilización de representaciones gráficas y simbólicas adecuadas para expresar el resultado del reparto en varias fases, con fraccionamientos en 10 partes iguales

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 17

La notación decimal del resultado del reparto igualitario de 17 barras para 8 personas

Primera Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.XI.2	CC.XII.1	CC.XII.2
A01	3	3	1
A02	1	1	1
A03	3	3	1
A04	0	0	0
A05	3	3	3
A06	1	1	1
A07	5	3	1
A08	3	1	2
A09	3	3	3
A10	3	3	3
A11	3	3	3
A12	1	1	1
A13	3	3	1
A14	3	3	3
A15	3	3	3
A16	3	3	3
A17	3	1	1
A18	0	0	0
A19	3	3	3
A20	0	0	0
A21	3	3	1
A22	3	3	1
A23	3	1	1
A24	3	2	3
A25	0	0	0
A26	3	1	1
A27	3	3	1
A28	3	3	2
A29	3	3	1
A30	3	3	2
A31	3	3	3
A32	0	0	0
A33	3	3	3
A34	3	3	3
A35	3	3	1
A36	3	1	1
A37	3	3	1
A38	0	0	0
A39	0	0	0
A40	3	3	2

FE nº 17	CC.XI.2	CC.XII.1	CC.XII.2
0	7	7	7
1	3	8	17
2	0	1	4
3	29	24	12
% de 0	*18*	*18*	*18*
% de 1	*8*	*20*	*43*
% de 2	*0*	*3*	*10*
% de 3	*73*	*60*	*30*

Segunda Etapa de Experimentación

Alumno/a	CC.XI.2	CC.XII.1	CC.XII.2
B01	3	3	1
B02	3	3	3
B03	3	3	3
B04	3	3	3
B05	3	3	1
B06	0	0	0
B07	3	3	1
B08	3	1	1
B09	3	1	3
B10	3	3	3
B11	3	3	3
B12	3	3	3
B13	3	3	3
B14	3	1	1
B15	3	3	3
B16	3	1	1
B17	3	3	3
B18	3	3	3

FE nº 17	CC.XI.2	CC.XII.1	CC.XII.2
0	1	1	1
1	0	4	6
2	0	0	0
3	17	13	11
% de 0	*6*	*6*	*6*
% de 1	*0*	*22*	*33*
% de 2	*0*	*0*	*0*
% de 3	*94*	*72*	*61*

CC.XI.2 Utilización de representaciones simbólicas adecuadas para expresar, con un número decimal, el resultado del reparto
CC.XII.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del número decimal y de las cifras que lo componen
CC.XII.2 Utilización de representaciones gráficas adecuadas para expresar, con un número decimal, el resultado del reparto

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 18
Conversiones de dos números decimales en sus representaciopnes fraccionarias

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XIII.1.1º	CC.XIII.1.2º	CC.XIII.2.1º		CC.XIII.2.2º	
A01	3	3	3	RPD	3	RPD
A02	2	2	3	F	1	
A03	3	3	3	F	3	RPD
A04	3	3	3	RPD	3	RPD
A05	3	3	3	F	3	RPD
A06	3	3	3	RPD	3	RPD
A07	3	3	2	RPD	3	RPD
A08	3	3	3	RPD	3	RPD
A09	3	3	3	F	3	RPD
A10	3	3	2	RPD	2	RPD
A11	3	3	3	RPD	3	RPD
A12	0	0	0		0	
A13	1	3	1		3	RPD
A14	3	2	3	F	1	
A15	3	3	3	RPD	3	RPD
A16	3	1	3	F	1	
A17	3	3	3	RPD	3	RPD
A18	3	3	1	RPD	1	RPD
A19	1	3	1	F	3	F
A20	3	3	2	RPD	2	RPD
A21	3	1	2	F	1	
A22	3	1	3	F	1	
A23	1	1	1		1	
A24	3	3	3	F	3	F
A25	3	3	2	RPD	2	RPD
A26	0	0	0		0	
A27	3	3	2	RPD	1	RPD
A28	3	3	3	F	2	RPD
A29	3	3	3	F	2	F
A30	3	3	3	RPD	3	RPD
A31	3	3	3	F	3	F
A32	1	1	1		1	
A33	3	3	2	RPD	2	RPD
A34	3	3	3	F	3	F
A35	3	3	3	RPD	3	RPD
A36	1	1	1		1	
A37	3	3	3	F	3	F
A38	3	3	3	F	1	
A39	1	1	1		1	
A40	3	3	3	F	3	F

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XIII.1.1º	CC.XIII.1.2º	CC.XIII.2.1º		CC.XIII.2.2º	
B01	3	3	3	RPD	3	RPD
B02	3	3	1	RPD	1	RPD
B03	3	3	3	RPD	3	RPD
B04	3	3	3	RPD	3	RPD
B05	3	3	3	RPD	3	RPD
B06	3	3	1	RPD	1	RPD
B07	3	3	3	RPD	3	RPD
B08	3	3	3	RPD	3	RPD
B09	3	3	3	RPD	3	RPD
B10	3	3	3	RPD	3	RPD
B11	3	3	3	RPD	3	RPD
B12	3	3	3	RPD	3	RPD
B13	3	3	3	RPD	3	RPD
B14	3	3	1	RPD	1	RPD
B15	0	0	0		0	
B16	3	3	3	RPD	3	RPD
B17	3	3	3	RPD	3	RPD
B18	3	3	3	RPD	3	RPD

FE nº 18	CC.XIII.1.1º	CC.XIII.1.2º	CC.XIII.2.1º	CC.XIII.2.2º
0	2	2	2	2
1	6	7	7	12
2	1	2	7	6
3	31	29	24	20
% de 0	*5*	*5*	*5*	*5*
% de 1	*15*	*18*	*18*	*30*
% de 2	*3*	*5*	*18*	*15*
% de 3	*78*	*73*	*60*	*50*

FE nº 18	CC.XIII.1.1º	CC.XIII.1.2º	CC.XIII.2.1º	CC.XIII.2.2º
0	1	1	1	1
1	0	0	3	3
2	0	0	0	0
3	17	17	14	14
% de 0	*6*	*6*	*6*	*6*
% de 1	*0*	*0*	*17*	*17*
% de 2	*0*	*0*	*0*	*0*
% de 3	*94*	*94*	*78*	*78*

Estrategia		1º	*2º*
En blanco		7	12
F	Escribe directamente la fracción	17	7
RPD	Escribe la R.P.D. asociada al decimal	16	21
% en blanco		*18*	*30*
% F		*43*	*18*
% RPD		*40*	*53*

CCXIII.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del número decimal como suma de fracciones decimales

CCXIII.2 Utilización de representaciones simbólicas adecuadas para obtener la fracción decimal de un número decimal

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 19
Orden de números decimales

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XIV.1	CC.XIV.2
A01	3	3
A02	3	3
A03	3	1
A04	1	1
A05	3	3
A06	3	1
A07	3	1
A08	3	3
A09	3	3
A10	3	3
A11	3	3
A12	3	1
A13	3	1
A14	3	3
A15	3	1
A16	3	3
A17	2	3
A18	2	2
A19	3	3
A20	3	3
A21	3	2
A22	3	3
A23	3	2
A24	3	2
A25	3	2
A26	3	2
A27	3	3
A28	3	3
A29	3	1
A30	3	3
A31	2	2
A32	1	1
A33	3	3
A34	3	3
A35	3	2
A36	3	1
A37	3	2
A38	3	3
A39	3	1
A40	3	3

FE nº 19	CC.XIV.1	CC.XIV.2
0	0	0
1	2	11
2	3	9
3	35	20
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*5*	*28*
% de 2	*8*	*23*
% de 3	*88*	*50*

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XIV.1	CC.XIV.2
B01	3	3
B02	3	3
B03	3	3
B04	3	3
B05	3	3
B06	2	1
B07	1	1
B08	3	2
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	3	3
B14	2	1
B15	3	3
B16	3	3
B17	3	3
B18	3	3

FE nº 19	CC.XIV.1	CC.XIV.2
0	0	0
1	1	3
2	2	1
3	15	14
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*6*	*17*
% de 2	*11*	*6*
% de 3	*83*	*78*

CCXIV.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del orden de números decimales
CCXIV.2 Conjetura y justificación de reglas adecuadas para ordenar números decimales

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 20
Suma de números decimales

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.1.1	CC.XV.1.2
A01	3	2
A02	3	1
A03	3	2
A04	3	1
A05	3	2
A06	0	0
A07	3	2
A08	3	2
A09	3	2
A10	3	3
A11	3	2
A12	3	2
A13	3	2
A14	3	3
A15	3	1
A16	3	2
A17	3	2
A18	3	2
A19	3	2
A20	3	1
A21	3	2
A22	3	2
A23	3	2
A24	3	2
A25	3	2
A26	3	2
A27	3	2
A28	3	2
A29	3	2
A30	3	2
A31	3	2
A32	1	1
A33	3	2
A34	3	2
A35	3	3
A36	3	2
A37	3	2
A38	3	2
A39	3	2
A40	3	2

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.1.1	CC.XV.1.2
B01	3	3
B02	1	1
B03	3	3
B04	3	2
B05	3	3
B06	3	3
B07	3	2
B08	3	2
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	2
B12	3	3
B13	3	3
B14	3	2
B15	3	3
B16	3	2
B17	3	3
B18	3	3

FE nº 20	CC.XV.1.1	CC.XV.1.2
0	1	1
1	1	5
2	0	31
3	38	3
% de 0	*3*	*3*
% de 1	*3*	*13*
% de 2	*0*	*78*
% de 3	*95*	*8*

FE nº 20	CC.XV.1.1	CC.XV.1.2
0	0	0
1	1	1
2	0	6
3	17	11
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*6*	*6*
% de 2	*0*	*33*
% de 3	*94*	*61*

CC.XV.1.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de suma de números decimales
CC.XV.1.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado de la suma de números decimales

Criterios de la Unidad de la Comprensión del Contenido CC.XVI.1.2:
0 *Falta a clase*
1 *No aplican correctamente el algoritmo*
2 *Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica*
3 *Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica*

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 21
Resta de números decimales

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.2.1	CC.XV.2.2
A01	3	2
A02	1	1
A03	3	2
A04	3	1
A05	3	2
A06	3	2
A07	3	2
A08	3	2
A09	3	2
A10	3	2
A11	3	2
A12	3	2
A13	3	2
A14	3	2
A15	3	2
A16	3	2
A17	3	2
A18	3	2
A19	3	2
A20	3	2
A21	3	2
A22	3	2
A23	3	2
A24	3	2
A25	3	2
A26	3	2
A27	3	2
A28	3	2
A29	3	2
A30	3	1
A31	3	2
A32	3	1
A33	3	2
A34	3	2
A35	3	3
A36	3	2
A37	3	2
A38	3	1
A39	3	2
A40	3	2

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.2.1	CC.XV.2.2
B01	3	2
B02	3	2
B03	3	2
B04	3	2
B05	3	2
B06	3	2
B07	3	2
B08	3	2
B09	3	2
B10	3	3
B11	3	2
B12	3	3
B13	3	3
B14	3	2
B15	3	3
B16	3	2
B17	0	0
B18	3	2

FE Nº 21	CC.XV.2.1	CC.XV.2.2
0	0	0
1	1	5
2	0	34
3	39	1
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*3*	*13*
% de 2	*0*	*85*
% de 3	*98*	*3*

FE Nº 21	CC.XV.2.1	CC.XV.2.2
0	1	1
1	0	0
2	0	13
3	17	4
% de 0	*6*	*6*
% de 1	*0*	*0*
% de 2	*0*	*72*
% de 3	*94*	*22*

CC.XV.2.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado de resta de números decimales
CC.XV.2.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado de la resta de números decimales

Criterios de la Unidad de la Comprensión del Contenido CC.XV.2.2:

0 *Falta a clase*
1 *No aplican correctamente el algoritmo*
2 *Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica*
3 *Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica*

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 22
Multiplicación de un número decimal por un número natural

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.I.1.1	CC.XVI.1.2
A01	3	3
A02	3	2
A03	3	2
A04	3	1
A05	3	1
A06	3	3
A07	3	2
A08	3	2
A09	3	2
A10	3	2
A11	3	2
A12	3	2
A13	3	2
A14	3	3
A15	3	3
A16	3	2
A17	3	3
A18	3	3
A19	3	2
A20	3	2
A21	3	2
A22	3	2
A23	3	2
A24	3	3
A25	3	2
A26	3	2
A27	3	2
A28	3	2
A29	3	2
A30	3	2
A31	3	2
A32	3	1
A33	3	2
A34	3	3
A35	3	2
A36	3	2
A37	3	2
A38	3	3
A39	3	2
A40	3	2

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CC.XV.I.1.1	CC.XVI.1.2
B01	3	2
B02	3	2
B03	3	3
B04	3	2
B05	3	3
B06	3	2
B07	3	2
B08	3	2
B09	3	3
B10	3	3
B11	3	3
B12	3	3
B13	3	2
B14	3	3
B15	3	2
B16	3	3
B17	3	2
B18	3	2

FE Nº 22	CC.XV.I.1.1	CC.XVI.1.2
0	0	0
1	0	3
2	0	28
3	40	9
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*0*	*8*
% de 2	*0*	*70*
% de 3	*100*	*23*

FE Nº 22	CC.XV.I.1.1	CC.XVI.1.2
0	0	0
1	0	0
2	0	10
3	18	8
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*0*	*0*
% de 2	*0*	*56*
% de 3	*100*	*44*

CCXVI.1.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del producto de un número decimal por un número natural
CCXVI.1.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado del producto de un número decimal por un número natural

Criterios de la Unidad de la Comprensión del Contenido CC.XVI.1.2:

0 *Falta a clase*
1 *No aplican correctamente el algoritmo*
2 *Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica*
3 *Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica*

Resultados de la Ficha de Evaluación Nº 23
División de un número decimal entre un número natural

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CCXVI.2.1	CCXVI.2.2	Estrat
A01	3	2	se
A02	1	1	
A03	3	2	e
A04	1	1	
A05	3	3	e
A06	3	2	se
A07	3	2	e
A08	3	3	e
A09	3	3	e
A10	3	3	e
A11	3	3	e
A12	1	1	
A13	3	3	e
A14	3	2	se
A15	3	3	e
A16	3	3	e
A17	1	1	
A18	1	1	
A19	3	1	
A20	3	1	se
A21	3	3	e
A22	3	3	e
A23	3	2	e
A24	3	2	se
A25	1	1	
A26	1	1	
A27	3	2	se
A28	3	2	e
A29	3	1	se
A30	1	1	
A31	3	2	se
A32	3	1	e
A33	3	3	e
A34	3	2	se
A35	3	3	e
A36	3	2	se
A37	3	1	e
A38	3	1	se
A39	3	2	se
A40	3	3	e

FE Nº 23	CCXVI.2.1	CCXVI.2.2
0	0	0
1	8	14
2	0	13
3	32	13
% de 0	*0*	*0*
% de 1	*20*	*35*
% de 2	*0*	*33*
% de 3	*80*	*33*

Estrategia		Frec	Éxito (criterio 2 ó 3)
e		*19*	17
se		*12*	9
% e		*48*	90
% se		30	75

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	CCXVI.2.1	CCXVI.2.2	Estrat
B01	3	2	se
B02	0	0	
B03	0	0	
B04	3	2	se
B05	3	2	se
B06	3	2	se
B07	3	1	se
B08	3	2	se
B09	3	2	se
B10	3	3	e
B11	3	2	se
B12	3	2	se
B13	3	2	se
B14	1	1	se
B15	3	3	se
B16	0	0	
B17	3	3	se
B18	3	3	e

FE Nº 23	CCXVI.2.1	CCXVI.2.2
0	3	3
1	1	2
2	0	9
3	14	4
% de 0	*17*	*17*
% de 1	*6*	*11*
% de 2	*0*	*50*
% de 3	*78*	*22*

CCXVI.2.1 Argumentaciones utilizadas sobre el significado del cociente de un número decimal por un número natural
CCXVI.2.2 Razonamientos empleados para calcular el resultado del cociente de un número decimal por un número natural

Criterios de la Unidad de la Comprensión del Contenido CC.XVI.2.2:
0 *Falta a clase*
1 *No aplican correctamente el algoritmo*
2 *Aplica correctamente el algoritmo pero no lo justifica*
3 *Aplica correctamente el algoritmo y lo justifica*

Estrategia
e División utilizando la equivalencia de decimales al modificar el dividendo y el divisor
se División sin utilizar la equivalencia de decimales

Resultados de la Pregunta Nº 1 de la Prueba de Evaluación del Primer Ciclo de la Experimentación
Medida de cantidades de magnitud continuas

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Longitud	Superficie
A01	3	
A02		1
A03		3
A04	1	
A05	3	
A06	1	
A07		2
A08	1	
A09	3	
A10		1
A11		3
A12		3
A13		3
A14		2
A15	3	
A16	3	
A17		2
A18	2	
A19	2	
A20	1	
A21	2	
A22	1	
A23		1
A24		3
A25	1	
A26		2
A27	2	
A28		3
A29	3	
A30		3
A31	3	
A32	1	
A33	3	
A34		3
A35		2
A36	3	
A37		3
A38	2	
A39		2
A40		3

Preg 1	Longitud	Superficie	Totales
0	0	0	0
1	7	3	10
2	5	6	11
3	9	10	19
% de 0	*0*	*0*	*0*
% de 1	*33*	*16*	*25*
% de 2	*24*	*32*	*28*
% de 3	*43*	*53*	*48*

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Longitud	Superficie
B01	3	
B02	3	
B03		0
B04		2
B05	2	
B06		2
B07		1
B08		1
B09		2
B10	0	
B11	2	
B12	2	
B13		3
B14	1	
B15	3	
B16		2
B17		3
B18	3	

Preg 1	Longitud	Superficie	Totales
0	1	1	2
1	1	2	3
2	3	4	7
3	4	2	6
% de 0			
% de 1	*13*	*25*	*19*
% de 2	*38*	*50*	*44*
% de 3	*50*	*25*	*38*

Criterios de valoración:

0 falta a clase
1 mide mal
2 mide bien pero no sabe explicar el significado de los términos de la fracción
3 mide bien y sabe explicar el significado de los términos de la fracción

Resultados de la Pregunta Nº 2 de la Prueba de Evaluación del Primer Ciclo de la Experimentación

Evaluación semántica de la fracción que expresa el resultado de la medida de una cantidad de magnitud continua

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Longitud	Superficie
A01	2	
A02		1
A03		1
A04	1	
A05	3	
A06	3	
A07		1
A08	3	
A09	3	
A10		3
A11		3
A12		1
A13		1
A14		3
A15	3	
A16	2	
A17		3
A18	1	
A19	2	
A20	2	
A21	1	
A22	2	
A23		3
A24		3
A25	1	
A26		2
A27	2	
A28		3
A29	2	
A30		2
A31	3	
A32	1	
A33	3	
A34		3
A35		3
A36	3	
A37		2
A38	3	
A39		1
A40		1

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Longitud	Superficie
B01	1	
B02	1	
B03		0
B04		1
B05	3	
B06		3
B07		1
B08		1
B09		1
B10	0	
B11	2	
B12	3	
B13		1
B14	3	
B15	3	
B16		2
B17		3
B18	3	

Preg 2	Longitud	Superficie	Totales
0	0	0	0
1	5	7	12
2	7	3	10
3	9	9	18
% de 0	*0*	*0*	*0*
% de 1	*24*	*37*	*30*
% de 2	*33*	*16*	*25*
% de 3	*43*	*47*	*45*

Preg 2	Longitud	Superficie	Totales
0	1	1	2
1	2	5	7
2	1	1	2
3	5	2	7
% de 0			
% de 1	*25*	*63*	*44*
% de 2	*13*	*13*	*13*
% de 3	*63*	*25*	*44*

Criterios de valoración:

- **0** falta a clase
- **1** dibuja mal la cantidad de magnitud
- **2** dibuja bien la cantidad de magnitud pero no explica la respuesta
- **3** dibuja bien la cantidad de magnitud y aporta explicaciones adecuadas

Resultados de la Pregunta Nº 3 de la Prueba de Evaluación del Primer Ciclo de la Experimentación
Evaluación semántica de la fracción que expresa el resultado de la medida de una cantidad de magnitud continua

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Comparación	Estrategia
A01	3	G
A02	1	NI
A03	2	NI
A04	1	NI
A05	3	R
A06	1	R
A07	1	NI
A08	3	G
A09	3	R
A10	3	G
A11	3	R
A12	1	NI
A13	1	R
A14	2	G
A15	1	G
A16	1	NI
A17	2	NI
A18	1	G
A19	1	NI
A20	2	G
A21	3	R
A22	3	G
A23	1	R
A24	2	G
A25	1	G
A26	1	G
A27	2	NI
A28	1	R
A29	1	R
A30	2	G
A31	3	R
A32	1	NI
A33	3	R
A34	3	R
A35	1	NI
A36	1	R
A37	2	R
A38	3	R
A39	1	NI
A40	1	NI

Preg 3	Comparación
0	0
1	20
2	8
3	12
% de 0	*0*
% de 1	*50*
% de 2	*20*
% de 3	*30*

	Estrategia
NI	13
G	12
R	15
E	0

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Comparación	Estrategia
B01	1	NI
B02	1	NI
B03	0	0
B04	2	NI
B05	3	R
B06	1	NI
B07	3	R
B08	2	NI
B09	2	NI
B10	0	0
B11	1	NI
B12	3	R
B13	3	G
B14	1	R
B15	3	R
B16	2	NI
B17	3	R
B18	3	G

Preg 3	Comparación
0	2
1	5
2	4
3	7
% de 0	
% de 1	*31*
% de 2	*25*
% de 3	*44*

	Estrategia
NI	8
G	2
R	6
E	0

Criterios de valoración:

0 falta a clase
1 comete errores al comparar dos fracciones impropias
2 sabe comparar las fracciones impropias pero no justifica la respuesta
3 sabe comparar las fracciones impropias y justificar la respuesta

Estrategias:

NI no indica la estrategia
G representa gráficamente las cantidades
R razona sobre el significado de la fracción como medida
E utiliza la equivalencia de fracciones

Resultados de la Pregunta Nº 1 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación
Obtención de fracciones equivalentes a una dada

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Equivalencia
A01	3
A02	1
A03	3
A04	1
A05	3
A06	3
A07	2
A08	3
A09	3
A10	3
A11	3
A12	1
A13	1
A14	1
A15	3
A16	1
A17	1
A18	1
A19	2
A20	1
A21	2
A22	2
A23	3
A24	3
A25	1
A26	1
A27	3
A28	2
A29	1
A30	1
A31	3
A32	1
A33	3
A34	3
A35	3
A36	1
A37	3
A38	1
A39	1
A40	2

Preg 1	Equivalencia
0	0
1	17
2	6
3	17
% de 0	*0*
% de 1	*43*
% de 2	*15*
% de 3	*43*

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Equivalencia
B01	3
B02	1
B03	3
B04	3
B05	3
B06	1
B07	3
B08	1
B09	3
B10	3
B11	3
B12	3
B13	3
B14	1
B15	3
B16	1
B17	3
B18	3

Preg 1	Equivalencia
0	0
1	5
2	0
3	13
% de 0	*0*
% de 1	*28*
% de 2	*0*
% de 3	*72*

Criterios de valoración:

0 falta a clase
1 no encuentra una fracción equivalente a la dada
2 encuentra una fracción equivalente pero no aporta explicaciones
3 encuentra una fracción equivalente y aporta explicaciones adecuadas

Resultados de la Pregunta Nº 2 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación
La fracción como resultado del reparto igualitario efectuado en una sola fase

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Propia	Impropia
A01		3
A02		2
A03		3
A04	1	
A05		3
A06		2
A07	3	
A08	1	
A09		2
A10		3
A11	3	
A12		1
A13		3
A14		3
A15	3	
A16	2	
A17	1	
A18	2	
A19		3
A20		3
A21		3
A22	3	
A23	3	
A24	2	
A25	2	
A26		1
A27		3
A28		3
A29	1	
A30	3	
A31	3	
A32		3
A33	3	
A34	1	
A35		3
A36		3
A37		2
A38		2
A39		1
A40		3

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Propia	Impropia
B01		3
B02	3	
B03	3	
B04	3	
B05		3
B06	3	
B07	2	
B08		3
B09		3
B10		3
B11		1
B12	3	
B13	3	
B14		1
B15	3	
B16		2
B17	3	
B18		3

Preg 2	Propia	Impropia	Totales
0	0	0	0
1	5	3	8
2	4	5	9
3	8	15	23
% de 0	*0*	*0*	*0*
% de 1	*29*	*13*	*20*
% de 2	*24*	*22*	*23*
% de 3	*47*	*65*	*58*

Preg 2	Propia	Impropia	Totales
0	0	0	0
1	0	2	2
2	1	1	2
3	8	6	14
% de 0			
% de 1	*0*	*22*	*11*
% de 2	*11*	*11*	*11*
% de 3	*89*	*67*	*78*

Criterios de valoración:

0 Falta a clase
1 No encuentra una fracción que expresa el resultado del reparto
2 Encuentra una fracción adecuada pero no la justifica o la justificación es errónea
3 Encuentra una fracción adecuada y aporta una justificación correcta

Resultados de la Pregunta Nº 3 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación
El número decimal como resultado del reparto igualitario efectuado en varias fases

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Propia	Impropia
A01		3
A02		1
A03		1
A04	3	
A05		1
A06		3
A07	1	
A08	1	
A09		3
A10		3
A11	3	
A12		1
A13		3
A14		3
A15	3	
A16	1	
A17	2	
A18		3
A19		2
A20		3
A21		3
A22	3	
A23	3	
A24	3	
A25	3	
A26		1
A27		3
A28		3
A29	1	
A30	3	
A31	1	
A32		1
A33	1	
A34	1	
A35		3
A36		3
A37		2
A38		1
A39		1
A40		3

Preg 3	Propia	Impropia	Totales
0	0	0	0
1	7	8	15
2	1	2	3
3	8	14	22
% de 0	*0*	*0*	*0*
% de 1	*44*	*33*	*38*
% de 2	*6*	*8*	*8*
% de 3	*50*	*58*	*55*

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Propia	Impropia
B01		3
B02	1	
B03	3	
B04	3	
B05		3
B06	3	
B07	1	
B08		3
B09		3
B10		3
B11		3
B12	3	
B13	2	
B14		1
B15	3	
B16		1
B17	3	
B18		3

Preg 3	Propia	Impropia	Totales
0	0	0	0
1	2	2	4
2	1	0	1
3	6	7	13
% de 0	0	0	0
% de 1	*22*	*22*	*22*
% de 2	*11*	*0*	*6*
% de 3	*67*	*78*	*72*

Criterios de valoración:

- **0** Falta a clase
- **1** No encuentra el número decimal que expresa el resultado del reparto
- **2** Encuentra el número decimal adecuado pero no lo justifica o la justificación es errónea
- **3** Encuentra el número decimal adecuado y aporta una justificación correcta

Resultados de la Pregunta Nº 4 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación
Conversión de la notación fraccionaria a la notación decimal

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Paso fracc a decimal
A01	3
A02	2
A03	1
A04	3
A05	3
A06	3
A07	1
A08	3
A09	3
A10	3
A11	3
A12	1
A13	3
A14	3
A15	3
A16	2
A17	3
A18	3
A19	3
A20	3
A21	3
A22	1
A23	1
A24	3
A25	3
A26	1
A27	3
A28	3
A29	3
A30	3
A31	2
A32	1
A33	3
A34	3
A35	3
A36	2
A37	3
A38	3
A39	1
A40	3

Preg 4	Paso fracc a decimal
0	0
1	8
2	4
3	28
% de 0	*0*
% de 1	*20*
% de 2	*10*
% de 3	*70*

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Paso fracc a decimal
B01	3
B02	1
B03	3
B04	1
B05	1
B06	3
B07	3
B08	3
B09	3
B10	3
B11	3
B12	3
B13	3
B14	1
B15	3
B16	3
B17	3
B18	3

Preg 4	Paso fracc a decimal
0	0
1	4
2	0
3	14
% de 0	*0*
% de 1	*22*
% de 2	*0*
% de 3	*78*

Criterios de valoración:

0 Falta a clase
1 No convierte la fracción en un número decimal
2 Convierte la fracción en un número decimal pero no justifica la respuesta o la justificación es errónea
3 Convierte la fracción en un número decimal y justifica la respuesta

Resultados de la Pregunta Nº 5 de la Prueba de Evaluación del Segundo Ciclo de la Experimentación
Conversión de la notación decimal a la notación fraccionaria

Primera Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Paso decimal a fracc
A01	3
A02	3
A03	1
A04	3
A05	2
A06	1
A07	1
A08	3
A09	3
A10	3
A11	3
A12	1
A13	2
A14	3
A15	1
A16	3
A17	3
A18	1
A19	3
A20	1
A21	1
A22	2
A23	1
A24	3
A25	3
A26	3
A27	3
A28	1
A29	1
A30	3
A31	1
A32	1
A33	3
A34	3
A35	3
A36	1
A37	3
A38	1
A39	1
A40	2

Preg 5	Paso decimal a fracc
0	0
1	16
2	4
3	20
% de 0	*0*
% de 1	*40*
% de 2	*10*
% de 3	*50*

Segunda Etapa de la Experimentación

Alumno/a	Paso decimal a fracc
B01	3
B02	1
B03	3
B04	1
B05	2
B06	1
B07	3
B08	1
B09	3
B10	3
B11	3
B12	3
B13	3
B14	1
B15	3
B16	3
B17	3
B18	3

Preg 5	Paso decimal a fracc
0	0
1	5
2	1
3	12
% de 0	*0*
% de 1	*28*
% de 2	*6*
% de 3	*67*

Criterios de valoración:

0 Falta a clase
1 No el número decimal en una fracción
2 Convierte el número decimal en una fracción pero no justifica la respuesta o la justificación es errónea
3 Convierte el número decimal en una fracción y justifica la respuesta

ANEXO IV

Estudio Comparativo

IV.1 Datos cuantitativos del estudio

IV.2 Cuestionario

Datos cuantitativos del Estudio Comparativo entre Colegios

		Preguntas de la Prueba														
Alumno/a	**Procedencia**	**1**	**2.a**	**2.b**	**3.a**	**3.b**	**4.a**	**4.b**	**5**	**6**	**7.a**	**7.b**	**8**	**9**	**10**	**Media**
A01	Tío Jorge	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	9,3
A02	Tío Jorge	1	1	2	1	1	0	0	2	2	1	2	1	1	1	2,9
A04	Tío Jorge	2	1	1	1	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	1,4
A05	Tío Jorge	2	2	2	1	1	1	2	2	0	0	0	1	0	2	4,3
A06	Tío Jorge	2	1	2	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1,4
A11	Tío Jorge	2	1	2	0	0	1	2	2	2	2	2	0	2	2	6,4
A13	Tío Jorge	2	1	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2	1	2	7,9
A14	Tío Jorge	2	2	2	2	2	0	0	2	2	2	2	0	0	2	7,1
A16	Tío Jorge	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	1	1	2	6,4
A19	Tío Jorge	2	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	1	2	2	4,3
A21	Tío Jorge	2	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1	0	2	7,1
A22	Tío Jorge	2	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	0	0	2	5,0
A24	Tío Jorge	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	9,3
A27	Tío Jorge	2	1	2	0	0	1	2	2	0	2	2	2	2	2	6,4
A 28	Tío Jorge	2	1	2	2	0	2	2	2	2	2	2	1	1	0	6,4
A29	Tío Jorge	2	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1	1	2	5,0
A30	Tío Jorge	2	1	2	0	2	1	1	0	1	1	1	1	1	0	2,1
A31	Tío Jorge	2	2	2	2	2	0	0	2	2	2	2	1	1	2	7,1
A34	Tío Jorge	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	0	2	2	8,6
A36	Tío Jorge	2	2	2	2	2	1	1	0	2	2	1	2	1	2	6,4
A37	Tío Jorge	2	1	2	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	2	2,1
A40	Tío Jorge	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	2	0	1	2	5,7
A48	Tío Jorge	2	1	2	0	0	0	0	0	2	2	2	0	0	2	4,3
A49	Tío Jorge	2	1	1	2	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	5,7
C01	Cándido D.	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1,4
C02	Cándido D.	2	2	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	2,9
C03	Cándido D.	2	2	2	0	2	0	1	1	1	2	2	2	1	2	5,7
C04	Cándido D.	2	2	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1,4
C05	Cándido D.	2	2	1	0	2	0	1	1	1	2	0	0	0	2	3,6
C06	Cándido D.	1	1	2	1	2	0	0	0	2	2	2	2	1	2	5,0
C07	Cándido D.	2	2	0	1	1	0	0	0	2	2	0	0	0	2	3,6
C08	Cándido D.	2	2	2	1	0	1	0	0	1	2	0	0	0	0	2,9
C09	Cándido D.	2	1	1	1	1	0	0	0	2	1	1	1	1	2	2,1
C10	Cándido D.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	10,0
C11	Cándido D.	2	2	2	0	2	1	2	0	1	2	1	0	0	2	5,0
C12	Cándido D.	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	1	2	7,9
C13	Cándido D.	2	2	1	1	1	0	1	1	2	1	0	2	1	0	2,9
C14	Cándido D.	2	1	2	0	0	0	0	1	1	2	2	2	1	2	4,3
C15	Cándido D.	2	1	0	0	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2,1
C16	Cándido D.	2	1	1	1	0	1	2	1	1	2	2	0	0	2	3,6
C17	Cándido D.	2	1	1	1	1	1	1	0	1	2	1	1	1	2	2,1
C18	Cándido D.	2	1	0	1	1	1	0	0	2	0	1	1	1	1	1,4
C19	Cándido D.	2	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	2	1,4
C20	Cándido D.	1	2	2	1	0	1	0	0	1	2	1	0	0	0	2,1
C21	Cándido D.	2	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	2,1
C22	Cándido D.	2	2	0	1	1	2	2	0	1	2	2	2	1	2	5,7
C23	Cándido D.	2	2	2	1	1	0	0	0	1	2	0	0	0	1	2,9
D01	Cantín y G.	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7
D02	Cantín y G.	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7
D03	Cantín y G.	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7
D04	Cantín y G.	2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1,4
D05	Claretianas	2	1	1	0	2	1	1	0	1	2	1	2	0	2	3,6
D06	Escol. Calasanz	1	1	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7
D07	Gascón y Marín	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0,7
D08	Tenerias	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	2	0,7
D09	Tenerias	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1,4
D10	Tenerias	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	2	0,7
D11	Tenerias	1	1	0	1	0	0	0	0	2	1	0	0	1	0	0,7
D12	Tenerias	2	2	0	2	0	0	2	1	2	0	0	0	1	2	4,3
D13	Torre Ramona	2	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	2	1,4

		1	*2.a*	*2.b*	*3.a*	*3.b*	*4.a*	*4.b*	*5*	*6*	*7.a*	*7.b*	*8*	*9*	*10*	
G. Experimental	% de éxito	**96**	**33**	**88**	**46**	**50**	**21**	**50**	**54**	**71**	**67**	**71**	**25**	**25**	**79**	**5,5**
	% de fracaso	4	63	8	33	25	46	21	25	21	21	17	42	46	4	
	% en blanco	0	4	4	21	25	33	29	21	8	13	13	33	29	17	

G. Control	% de éxito	**81**	**39**	**31**	**8**	**19**	**8**	**19**	**3**	**25**	**44**	**19**	**22**	**3**	**67**	**2,8**
	% de fracaso	19	61	22	47	39	31	31	31	47	19	25	19	47	8	
	% en blanco	0	0	47	44	42	61	50	67	28	36	56	58	50	25	

Criterios:

0 No responde
1 Fracaso al contestar a la pregunta
2 Éxito al contestar a la pregunta

CUESTIONARIO

ALUMNO/A: _______________________________________ **GRUPO** _____

Colegio ____

MARCA CON UNA CRUZ

¿Cómo vas en matemáticas?
- Muy mal ☐
- Mal ☐
- Regular ☐
- Bien ☐
- Muy Bien ☐

¿Te gustan las matemáticas?
- Muy poco ☐
- Poco ☐
- Bastante ☐
- Mucho ☐

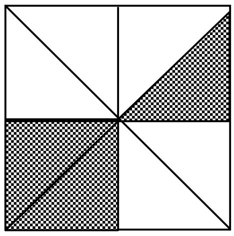
ANTES DE COMENZAR LA PRUEBA, LEE LAS INDICACIONES SIGUIENTES:

1º Utiliza exclusivamente bolígrafo o lapicero. No te hace falta nada más.

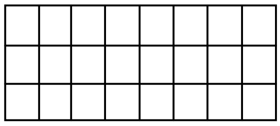
2º Realiza TODAS las operaciones en las hojas del cuestionario, NO UTILICES OTRAS HOJAS.

3º Hacer dibujos puede servirte de ayuda. Si utilizas DIBUJOS, realízalos en las hojas del cuestionario.

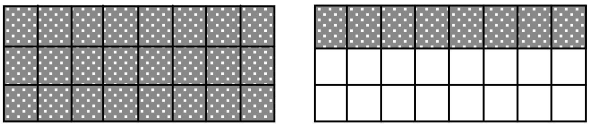
1.- ¿Qué parte de la figura está sombreada?



2.- Una tableta de chocolate tiene esta forma:



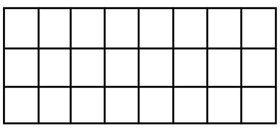
Si comes la cantidad de chocolate que está sombreada:



a) Expresa, con una fracción, la cantidad de chocolate que has comido.

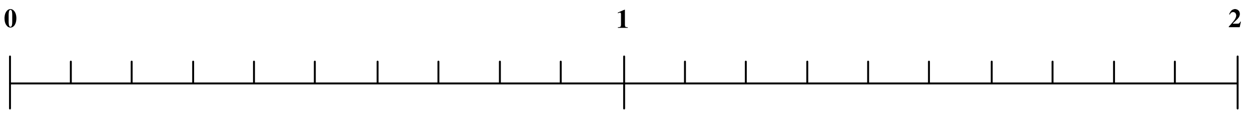
b) Expresa esta cantidad de chocolate con otra fracción equivalente.

3.- a) Dibuja $\frac{7}{4}$ de tableta de chocolate.
Puedes utilizar como "todo" o unidad la tableta de chocolate de la pregunta anterior:

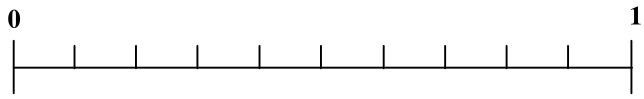


b) ¿Cómo explicarías a un amigo lo que significa la fracción $\frac{7}{4}$?

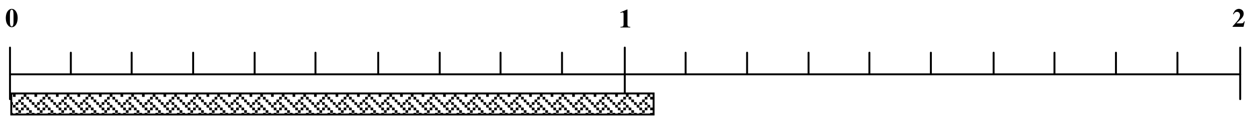
4.- En la regla que ves dibujada:



la **unidad** es la longitud entre 0 y 1**:**



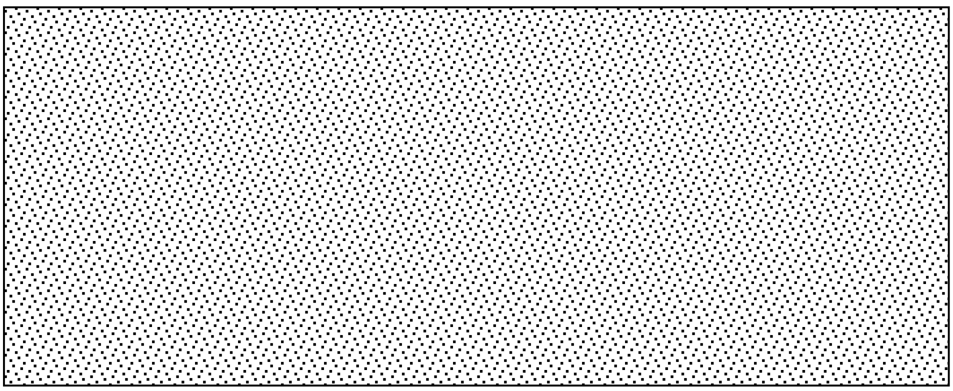
a) Expresa con una fracción, la longitud de la cuerda que está dibujada debajo de la regla. Indica cómo lo has hecho.



b) Expresa, con un número decimal, la longitud de la cuerda que está dibujada debajo de la regla. Indica cómo lo has hecho.

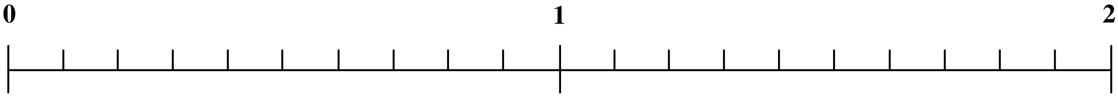
5.- Consideras como unidad de superficie 1 decímetro cuadrado que es la superficie del cuadrado de papel que se te entrega.

Expresa, con una fracción, la superficie del siguiente rectángulo:

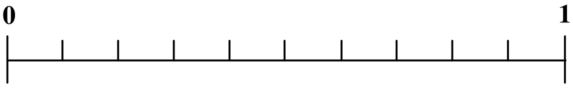


Indica cómo lo has hecho.

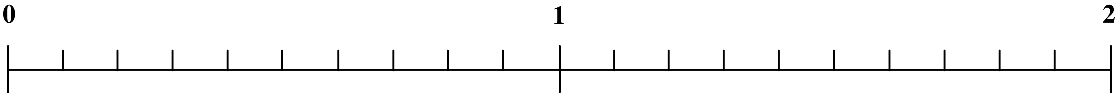
6.- En la regla que ves dibujada:



la **unidad** es la longitud entre 0 y 1**:**

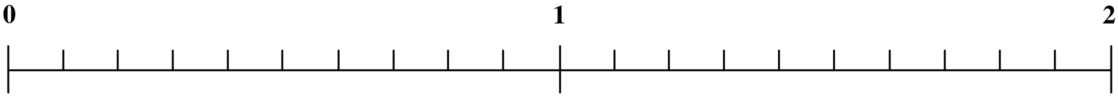


a) Dibuja sobre la regla un segmento de longitud $\frac{1}{2}$ unidad.

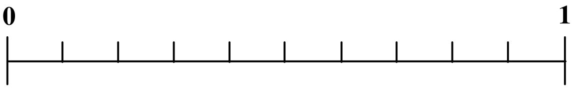


b) Indica qué has hecho para dibujar el segmento de longitud $\frac{1}{2}$ unidad.

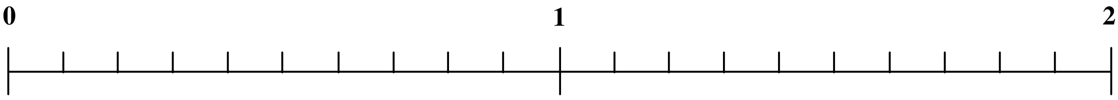
7.- En la regla que ves dibujada:



la **unidad** es la longitud entre 0 y 1**:**



a) Dibuja sobre la regla un segmento de longitud 0´95 unidades.



b) Indica el significado de las cifras del número decimal:

La cifra 0 significa que ____

____

La cifra 9 significa que ____

____

La cifra 5 significa que ____

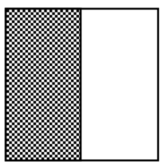
____

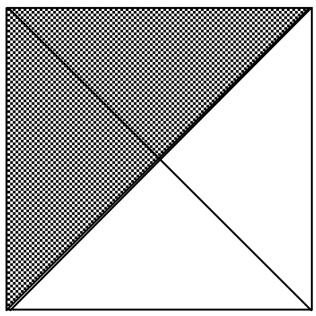
8.- Expresa, con una fracción, el número decimal 0´45. Indica cómo lo has hecho.

9.- Expresa, con un número decimal, la fracción $\frac{6}{5}$. Indica cómo lo has hecho.

10.- a) ¿Qué quiere decir que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ son equivalentes?

b) Las fracciones





$\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$, ¿son equivalentes?

Explica tu respuesta.

ANEXO V

Interacción Didáctica

ANEXO VI

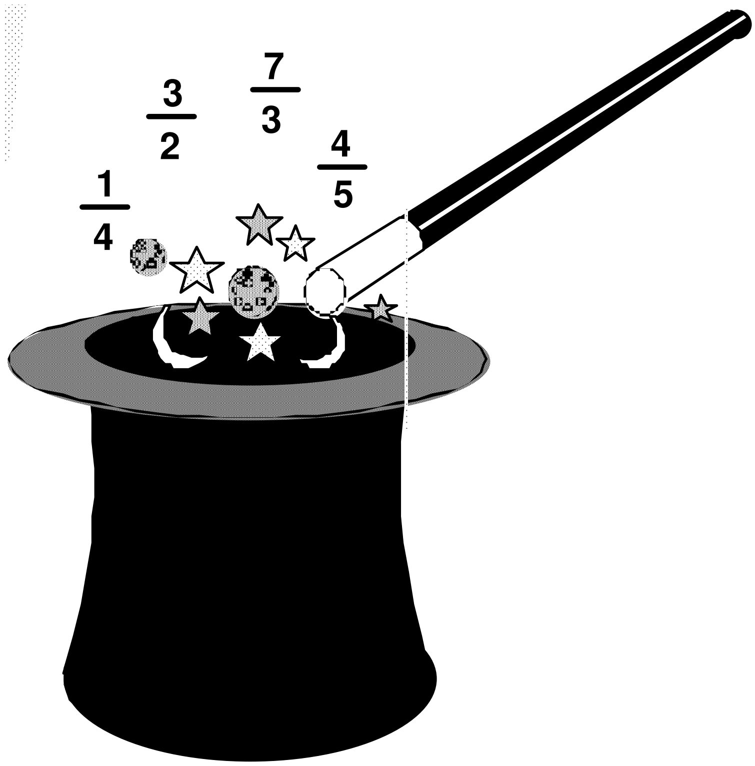
Material entregado a los alumnos

VI.1 Del Primer Ciclo

VI.2 Del Segundo Ciclo

FRACCIONES

Las FRACCIONES no salen de la chistera del mago, están en la mente de las personas porque las utilizamos para expresar cantidades



C.E.I.P. Tío Jorge

Curso 2003/04

Cuarto de Educación Primaria

Alumno/a:________________________________

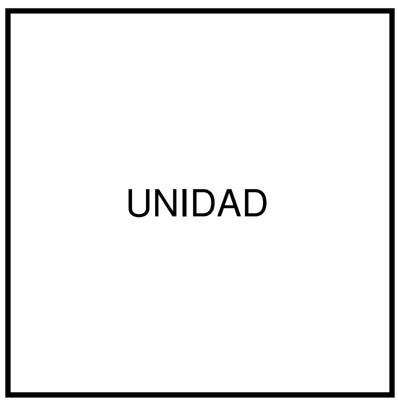
En clase hemos utilizado fracciones para comunicar el resultado de medidas de cantidades de longitud y de superficie.

Las fracciones sirven para expresar el resultado de la medida de cantidades de magnitud.

Recuerda que para medir has necesitado tener una UNIDAD de medida.

Para medir cantidades de longitud hemos utilizado como unidad una caña. Como la longitud de la caña-unidad no cabe en la página, dibujamos la caña-unidad del siguiente modo:

Para medir cantidades de superficie hemos utilizado como unidad un mantel de papel que tiene forma cuadrada. Como la superficie del mantel-unidad no cabe en la página la dibujamos del siguiente modo:



En una de las primeras tareas debías medir una barra de cortina que tenía una longitud de $\frac{3}{4}$ de la caña unidad. Recordarás que no sabías como medir la barra. Si colocabas la caña unidad junto a la barra te dabas cuenta que la barra era menor que la unidad, pero no conseguías medirla. Necesitabas hacer algo, ¿te acuerdas qué necesitabas hacer?

Si lo sabes, escríbelo ____________________________________

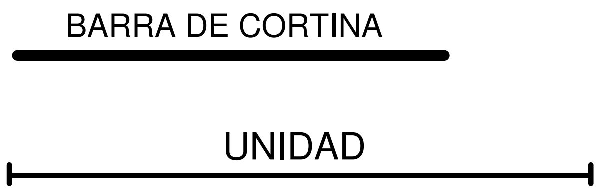
____

Si no lo sabes, encontrarás la solución en la página siguiente.

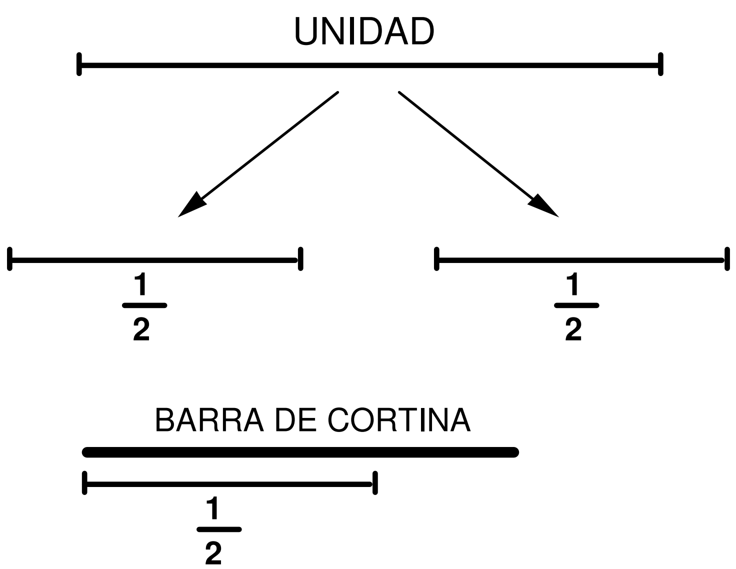
Para medir la longitud de la barra necesitas FRACCIONAR LA UNIDAD EN PARTES IGUALES, y deberás preguntarte:

¿en cuántas partes iguales debo fraccionar la unidad para que con algunas de estas partes consiga cubrir la longitud de la barra de cortina?.

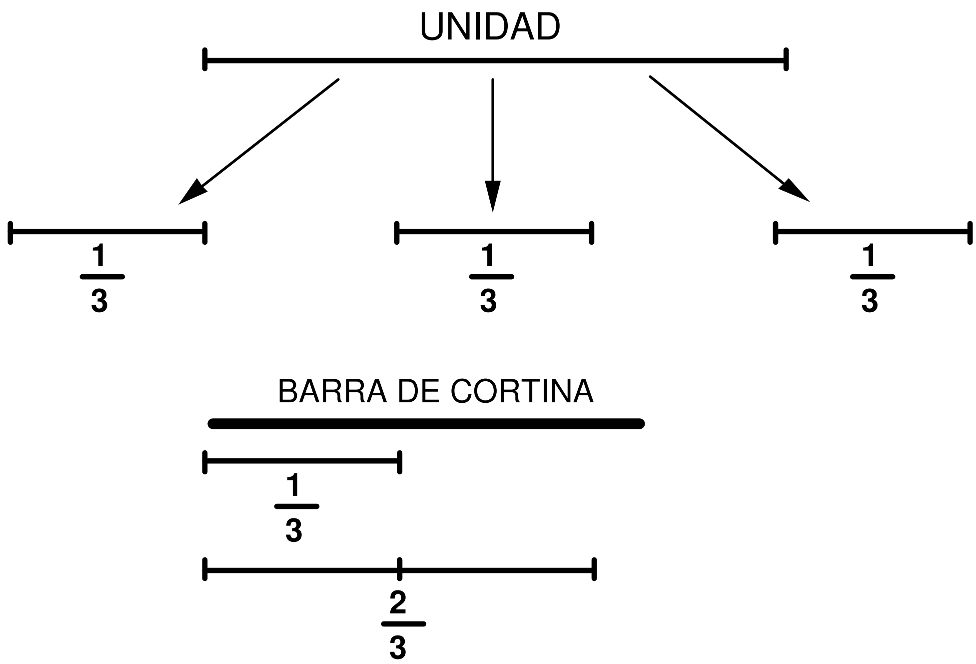
Veamos en cuántas partes debes fraccionar la unidad para medir la longitud de la barra de cortina:



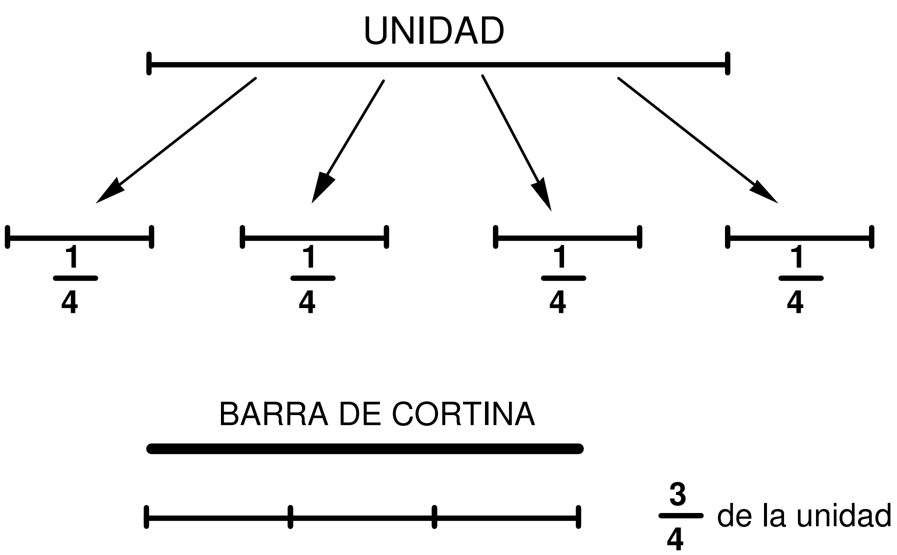
Si primero pruebas FRACCIONANDO LA UNIDAD en DOS PARTES IGUALES, no consigues medir la barra porque UNA subunidad de longitud $\frac{1}{2}$ de unidad es menor que la longitud de la barra y DOS subunidades de longitud $\frac{1}{2}$ de unidad es la unidad, y es mayor que la longitud de la barra.



Si después pruebas FRACCIONANDO LA UNIDAD en TRES PARTES IGUALES, no consigues medir la barra porque UNA subunidad de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad es menor que la longitud de la barra; DOS subunidades de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad es menor que la longitud de la barra, y TRES subunidades de longitud $\frac{1}{3}$ es la unidad, y es mayor que la longitud de la barra.



Finamente, si pruebas FRACCIONANDO LA UNIDAD en CUATRO PARTES IGUALES consigues medir la barra porque TRES subunidades de longitud $\frac{1}{4}$ de unidad cubren exactamente la longitud de la barra de cortina.



La fracción que expresa la longitud de la barra de cortina se lee «tres cuartos», y se escribe $\frac{3}{4}$ de unidad. Indica que la longitud de la barra de cortina se cubre con TRES subunidades iguales de longitud $\frac{1}{4}$ de unidad.

$$\frac{3}{4}$$

Numerador

Denominador

Significado del numerador y denominador de una fracción cuando expresa el resultado de la medida de una cantidad de longitud.-

El **denominador** de una fracción indica el número de partes iguales en las que has fraccionado la unidad de longitud.

Por ejemplo, el denominador de la fracción $\frac{3}{4}$ indica que has fraccionado la unidad en 4 partes iguales. Es decir, que la unidad la has fraccionado en 4 subunidades iguales.

Cada subunidad tiene una longitud de $\frac{1}{4}$ de unidad. Con estas subunidades consigues cubrir la longitud de la barra de cortina.

El **numerador** de una fracción indica el número de subunidades que has tenido que colocar, una a continuación de la otra, para cubrir la longitud del objeto que estás midiendo.

Por ejemplo, el numerador de la fracción $\frac{3}{4}$ indica que has necesitado colocar 3 SUBUNIDADES de longitud $\frac{1}{4}$ para completar la longitud de la barra de cortina.

$$\frac{3}{4}$$

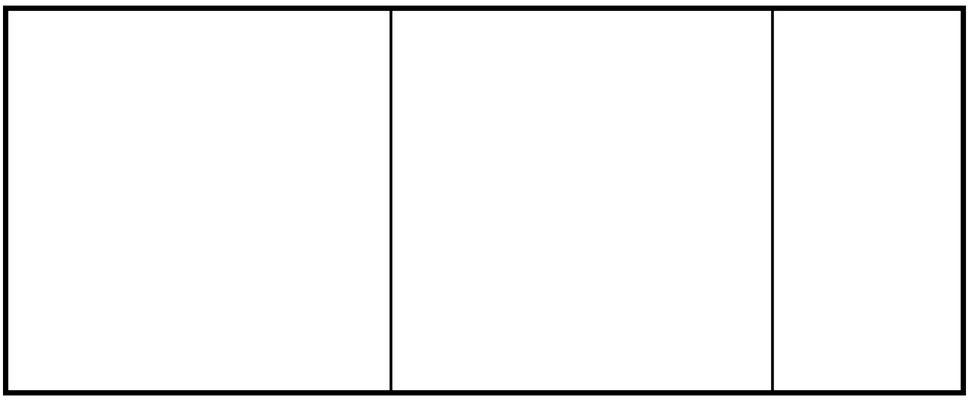
Numera:
Indica el número de subunidades que cubren la longitud del objeto que se mide.

Denomina:
Indica de qué longitud son las subunidades que utilizamos para medir.

Significado del numerador y denominador de una fracción cuando expresa el resultado de la medida de una cantidad de superficie

Si deseas medir la superficie de la figura:

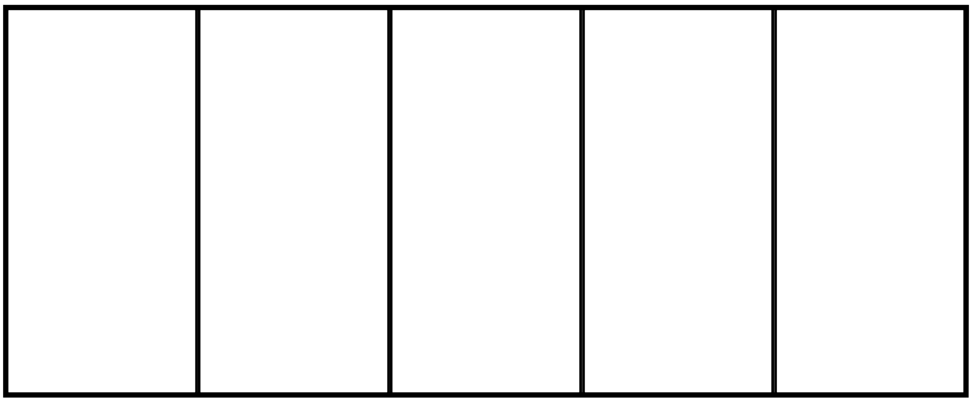
probarás llevando la unidad de medida sobre la figura:



y verás que la superficie de la figura es mayor que 2 unidades pero menor que 3 unidades.

El siguiente paso será fraccionar la unidad en dos subunidades iguales:

Observarás que con 5 subunidades de superficie $\frac{1}{2}$ de unidad consigues cubrir la superficie de la figura.



Por lo tanto, la figura tiene una superficie de $\frac{5}{2}$ de unidad.

El denominador de la fracción $\frac{5}{2}$ indica que has fraccionado la unidad en 2 subunidades iguales. Las subunidades con las que has conseguido cubrir la superficie de la figura tienen una superficie de $\frac{1}{2}$ de unidad.

El numerador de la fracción $\frac{5}{2}$ indica que has necesitado colocar 5 subunidades de superficie $\frac{1}{2}$ para cubrir la superficie de la figura.

El **denominador** de una fracción indica el número de partes iguales en las que has fraccionado la unidad de superficie.

El **numerador** de una fracción indica el número de subunidades que has tenido que colocar, una a continuación de la otra, para cubrir la superficie del objeto que estás midiendo.

Ejercicio.- ¿Cuál es la medida de la superficie de la figura anterior si utilizas subunidades de superficie $\frac{1}{4}$ de unidad?.

Ahora intenta resolver el ejercicio. La respuesta la encontrarás en la página siguiente.

Fracciones equivalentes

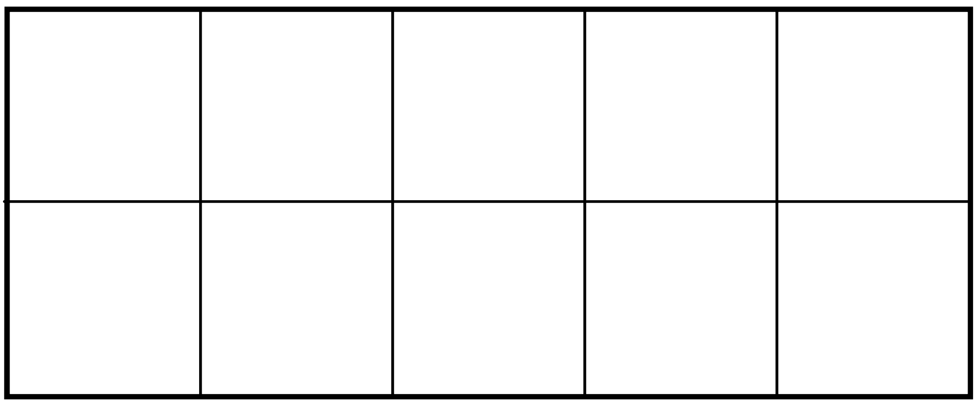
Has visto que el resultado de la medida de un mismo objeto puede ser expresado con fracciones que se escriben de diferente forma.

Por ejemplo, has visto que la superficie de la figura:

es $\frac{5}{2}$ de unidad, si utilizas subunidades de superficie $\frac{1}{2}$ de unidad.

Pero si has resuelto bien el ejercicio anterior habrás obtenido que la superficie de la figura es $\frac{10}{4}$ de unidad cuando utilizas subunidades de superficie $\frac{1}{4}$ de unidad.

En efecto:



Habrás observado que las fracciones $\frac{5}{2}$ y $\frac{10}{4}$ expresan la misma cantidad de superficie pero se escriben de diferente forma, porque has medido utilizando diferentes fraccionamientos de la unidad.

Estas fracciones se llaman **equivalentes**. Se coloca el signo "igual" entre las fracciones equivalentes:

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$$

Las fracciones $\frac{5}{2}$ de unidad y $\frac{10}{4}$ de unidad son equivalentes porque si fraccionas por la mitad las subunidades de $\frac{1}{2}$ obtienes subunidades de longitud $\frac{1}{4}$ de unidad y necesitas colocar el doble de subunidades para cubrir la misma cantidad de superficie.

$$\frac{5}{2} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{10}{4}$$

Existen más fracciones equivalentes a $\frac{5}{2}$.

Para obtener fracciones equivalentes a una dada basta con multiplicar o dividir el numerador y denominador de la fracción por un mismo número.

Así, algunas fracciones equivalentes a $\frac{5}{2}$ son $\frac{10}{4}$, $\frac{30}{12}$ y $\frac{15}{6}$:

$$\frac{5}{2} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{10}{4} \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}} \frac{30}{12} \underset{:\,2}{\overset{:\,2}{=}} \frac{15}{6}$$

Comparación de fracciones

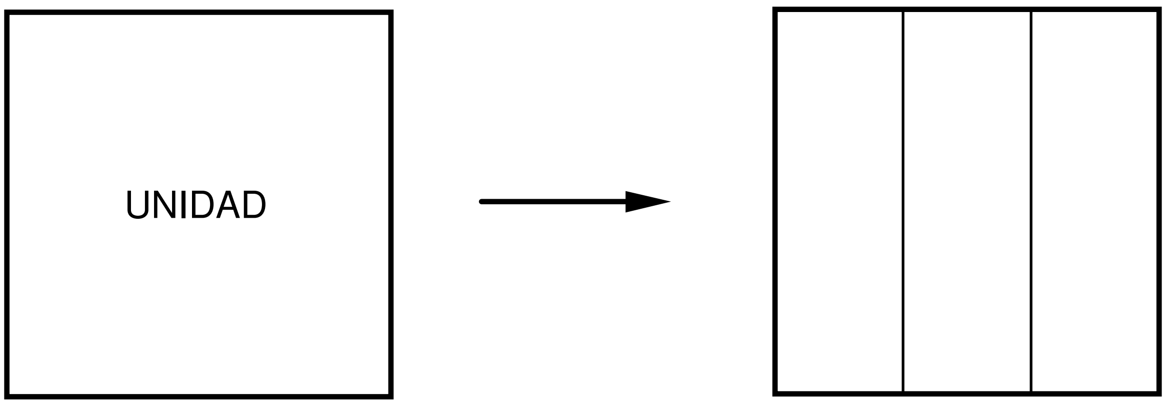
En ocasiones necesitamos saber si un objeto tiene más o menos cantidad de magnitud que otro objeto, es decir, necesitamos comparar cantidades de magnitud. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1º (comparación de fracciones con el mismo denominador)

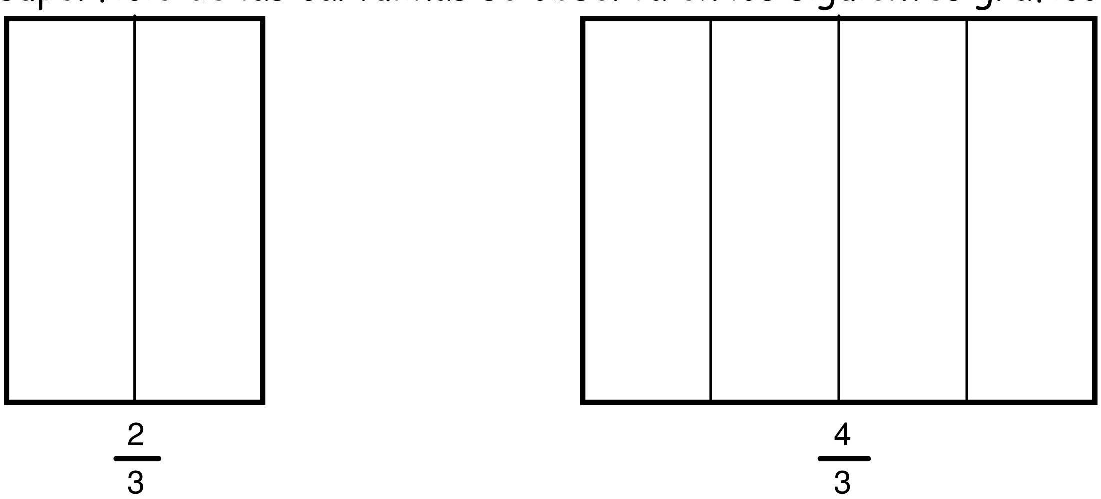
Has comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de $\frac{2}{3}$ de unidad y otra tiene una superficie de $\frac{4}{3}$ de unidad. ¿Qué cartulina tiene menor superficie?

Para resolver este problema puedes utilizar dos estrategias de resolución: realizar gráficos o realizar un razonamiento, pensando en la idea de fracción.

Si realizas gráficos, deberás dibujar la superficie de las dos cartulinas y después compararlas con la vista. Hay que fraccionar la unidad de superficie en tres partes iguales:



La superficie de las cartulinas se observa en los siguientes gráficos:



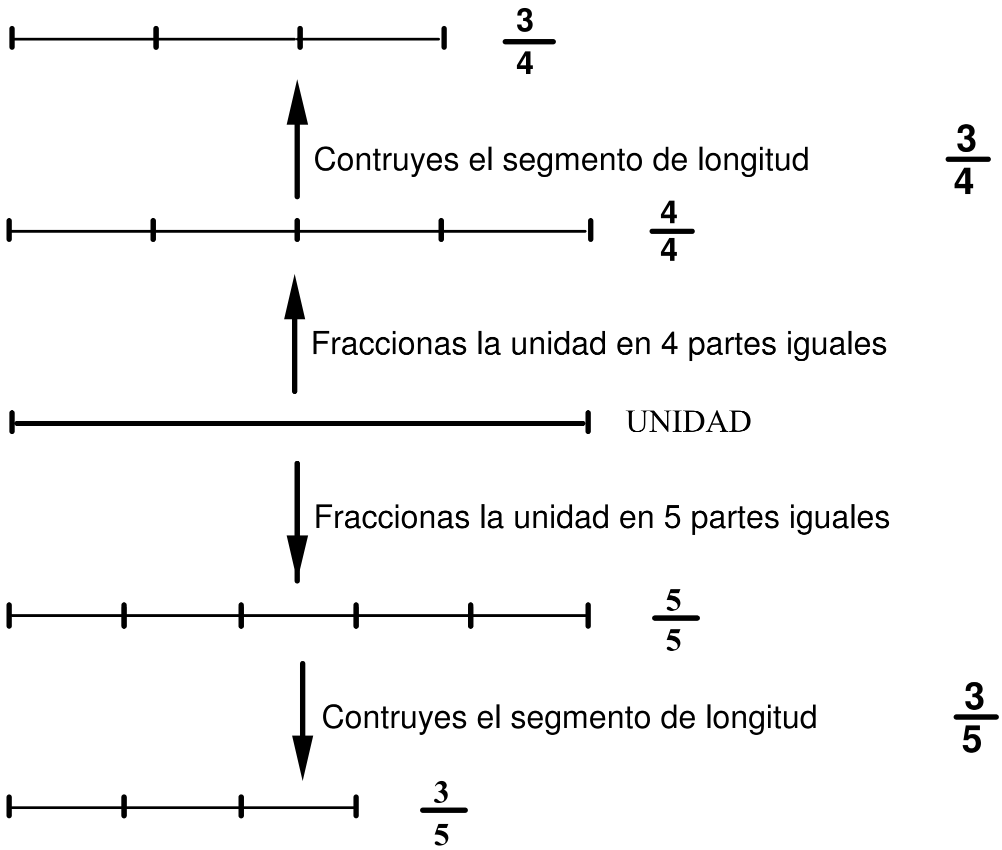
También puedes comparar la superficie de las cartulinas realizando el razonamiento siguiente:

"Como la superficie de las dos cartulinas se cubre con subunidades del mismo tamaño (de $\frac{1}{3}$ de unidad), tendrá menor superficie la cartulina que se cubra con un número menor subunidades".

Ejemplo 2º (comparación de fracciones con el mismo numerador)

Has cortado dos listones de madera. La longitud de uno de ellos es $\frac{3}{5}$ de unidad y la del otro $\frac{3}{4}$ de unidad. ¿Qué listón es más largo?.

Si para resolver el problema realizas gráficos, deberás dibujar la longitud de los dos listones y después compararlas con la vista:



Y observas que el listón de longitud $\frac{3}{4}$ de unidad es más largo que el listón de longitud $\frac{3}{5}$ de unidad.

También puedes resolver el problema realizando el razonamiento siguiente:

"Como la longitud de los dos listones se cubre con el mismo número de subunidades (tres), tiene mayor longitud el listón que se cubre con subunidades más largas. En este caso, la subunidad de longitud $\frac{1}{4}$ es mayor que la subunidad de longitud $\frac{1}{5}$. Por esto, el listón de longitud $\frac{3}{4}$ de unidad es más largo que el listón de $\frac{3}{5}$ de unidad".

Ejemplo 3º (comparación de fracciones con distinto numerador y distinto denominador)

Necesitas trasladar un armario que tiene una altura de $\frac{5}{4}$ de unidad y deseas saber si puede pasar por una puerta que tiene una altura de $\frac{4}{3}$ de unidad, sin tener que inclinar o volcar el armario. ¿Cabe el armario por la puerta?.

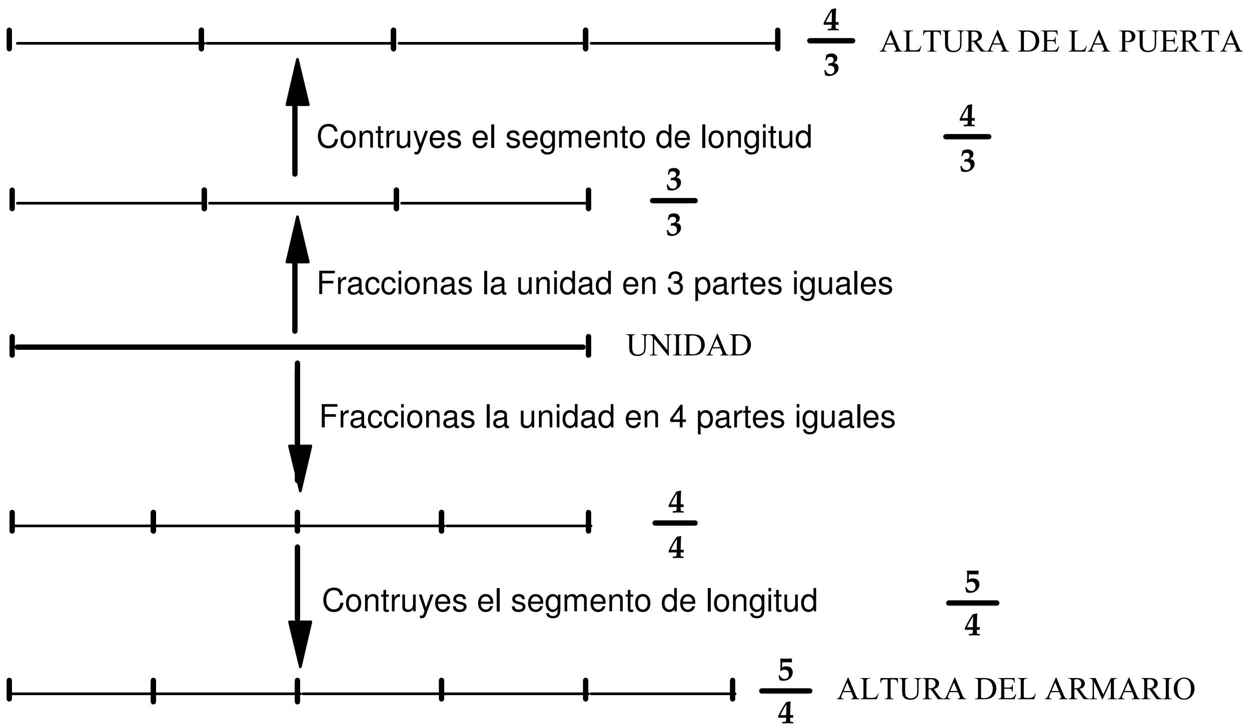
Para resolver este problema puedes utilizar dos estrategias de resolución: realizar gráficos o utilizar la equivalencia de fracciones.

Ejercicio: Compara las fracciones $\frac{5}{4}$ de unidad y $\frac{4}{3}$ de unidad utilizando gráficos. Recuerda que la unidad de medida de longitud es:

UNIDAD

Ahora intenta resolver el ejercicio. La respuesta la encontrarás en la página siguiente.

Seguro que has sabido dibujar la longitud de la altura del armario y la longitud de la altura de la puerta, y después compararlas con la vista:



Habrás visto que la altura de la puerta es mayor que la altura del armario. Es decir, el armario puede pasar por la puerta sin necesidad de inclinarlo o volcarlo.

A veces es difícil comparar las cantidades de magnitud utilizando gráficos. Esto ocurre cuando las fracciones que expresan las cantidades están muy próximas. En estos casos, te aconsejo que compares las fracciones utilizando la equivalencia de fracciones.

Para resolver este problema deberás utilizar tus conocimientos sobre equivalencia de fracciones y encontrar fracciones equivalentes a $\frac{5}{4}$ y a $\frac{4}{3}$ que tengan el mismo denominador. Inténtalo:

Has utilizado la equivalencia para escribir las dos fracciones con el mismo denominador:

$\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$ unidades, que es la altura del armario, y

$\frac{4}{3} = \frac{16}{12}$ unidades, que es la altura de la puerta.

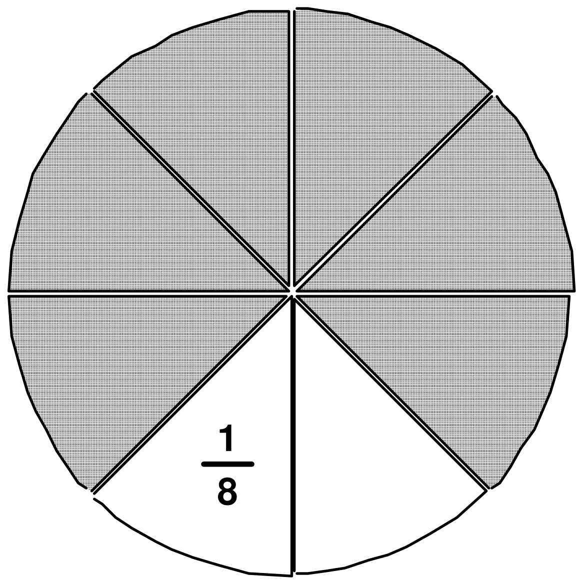
Ahora puedes comparar las fracciones, y ver que la altura del armario es menor que la altura de la puerta. Por lo tanto, el armario cabe por la puerta, sin inclinarlo ni volcarlo.

La fracción como medida de cantidades discretas (de objetos sueltos)

En ocasiones nos interesa medir el NÚMERO DE OBJETOS SUELTOS que hay en una parte de una colección cuando tomamos como unidad el número de objetos que tiene una colección.

Veamos un ejemplo. Vamos a considerar como UNIDAD DE MEDIDA EL NÚMERO DE QUESITOS QUE HAY EN UNA CAJA DE 8 QUESITOS.
Nos comemos 6 quesitos y nos preguntamos:

¿Cuánto mide la parte de caja que hemos comido?.



La fracción que mide la parte de caja que hemos comido es $\frac{6}{8}$ de la caja.

El denominador de la fracción indica el número de partes iguales en las que está fraccionada la unidad. La subunidad que tomamos es un quesito, porque vemos la caja fraccionada en 8 partes iguales. Cada quesito es $\frac{1}{8}$ del NÚMERO DE QUESITOS DE LA CAJA.

El numerador de la fracción indica el número de subunidades que hay en la parte de la colección que se quiere medir. En este caso queremos medir 6 quesitos.

Equivalencia de fracciones cuando expresan medidas de cantidades discretas

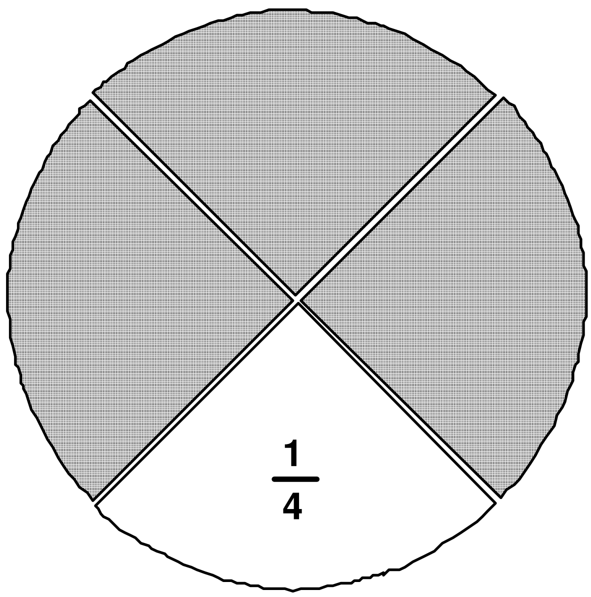
Seguimos pensando en el problema anterior y nos preguntamos: ¿podemos expresar, con otra fracción distinta a $\frac{6}{8}$ de la caja, la medida de la parte de caja de quesitos que hemos comido?.

Si fraccionamos la unidad (el número de quesitos de la caja) en 4 partes iguales, las subunidades son de tamaño $\frac{1}{4}$ de la unidad. Cada subunidad está formada por 2 quesitos.

La fracción que mide la parte de caja que hemos comido es $\frac{3}{4}$ de la caja, porque:

1º Hemos fraccionado la unidad en 4 partes iguales (denominador), y

2º hemos necesitado contar 3 subunidades (numerador) para contar los quesitos que hemos comido.



Las fracciones $\frac{6}{8}$ de caja y $\frac{3}{4}$ de caja son equivalentes, porque en $\frac{6}{8}$ consideramos como subunidad un quesito, que es $\frac{1}{8}$ de la unidad; mientras que en $\frac{3}{4}$ consideramos como subunidad 2 quesitos, que es $\frac{1}{4}$ de la unidad.

Como en $\frac{3}{4}$ las subunidades son el doble de tamaño que en $\frac{6}{8}$, necesitaremos la mitad de subunidades para contar los quesitos que hemos comido.

Fracción de una cantidad discreta

Hasta ahora hemos realizado tareas de medida en las que debemos encontrar la fracción que expresa la medida de una parte de una colección de objetos sueltos o discretos:

DATOS	INCÓGNITA
La unidad que es el número de objetos totales de la colección. El número de objetos que hay en una parte de la unidad	La fracción que mide el número de objetos que hay en una parte de la unidad.

Vamos a resolver otro tipo de tareas: queremos saber el número de objetos que hay en una parte de una colección y sabemos la fracción que expresa el resultado de la medida de esa parte de la colección de objetos sueltos y conocemos, también, la unidad:

DATOS	INCÓGNITA
La unidad que es el número de objetos totales de la colección. La fracción que mide el número de objetos que hay en una parte de la unidad.	El número de objetos que hay en una parte de la unidad

Para ver un ejemplo de este tipo de tareas, resolvemos el problema:

En tu clase estáis 24 alumnos en total entre niños y niñas. Si sabemos que los $\frac{2}{3}$ de los alumnos de la clase son niñas. ¿Cuántas niñas hay en tu clase?.

DATOS	INCÓGNITA
La unidad es el número de alumnos. Son 24 alumnos. La fracción $\frac{2}{3}$ que mide el número de niñas.	El número de niñas que hay en la clase.

La fracción $\frac{2}{3}$ tiene el significado de medida: indica que el número de niñas que hay en la clase coincide con el de DOS subunidades que se forman al fraccionar la unidad de medida en TRES partes iguales.

Así, al fraccionar el número de alumnos de la clase en tres partes iguales hay 8 alumnos en cada subunidad, y como el número de niñas es DOS veces el de la subunidad, en total hay $2 \times 8 = 16$ niñas.

Estas acciones puedes escribirlas como:

$$\frac{2}{3} \text{ de } 24 = (24 : 3) \times 2$$

Regla para calcular la fracción de una cantidad discreta:

Para calcular la fracción de una cantidad discreta basta dividir la cantidad entre el denominador de la fracción, y multiplicar el resultado por el numerador de la fracción.

Para ejercitar la regla anterior te propongo la resolución del problema siguiente:

Un niño recibe una propina de 20 euros cada mes. Decide ahorrar los $\frac{3}{10}$ de la propina, y gastar el resto. ¿Cuántos euros piensa ahorrar?. ¿Cuántos euros va a gastar?

Encontrarás escrita la solución del problema en la página siguiente.

Solución del problema.-

Dinero que ahorra:

$$\frac{3}{10} \text{ de } 20 = (20 : 10) \times 3 = 2 \times 3 = 6 \text{ euros.}$$

Dinero que gasta: 20 - 6 = 14 euros.

También puedes calcular $\frac{7}{10}$ de 20 = (20 : 10) x 7 = 14 euros

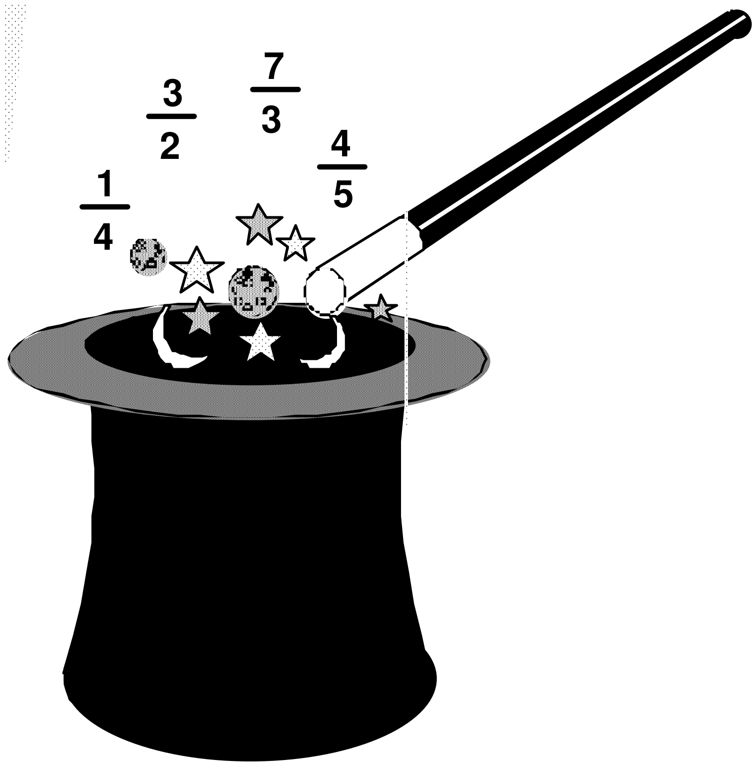
Respuestas: Ahorra 6 euros y gasta 14 euros.

Si necesitas unidades de longitud o de superficie puedes recortarlas

UNIDAD DE LONGITUD	UNIDAD DE LONGITUD
UNIDAD DE LONGITUD	UNIDAD DE LONGITUD

UNIDAD DE SUPERFICIE	UNIDAD DE SUPERFICIE
UNIDAD DE SUPERFICIE	UNIDAD DE SUPERFICIE

FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES



OPERACIONES CON FRACCIONES

LA FRACCIÓN COMO RESULTADO DE UN REPARTO Y LOS NÚMEROS DECIMALES

C.E.I.P. Tío Jorge

Curso 2004/05

Quinto de Educación Primaria

Alumno/a:_______________________________

OPERACIONES CON FRACCIONES

Contenidos:

SUMA DE FRACCIONES

Imagina que tienes dos cantidades de una determinada magnitud, por ejemplo listones de madera, y que sabes la medida de la longitud de cada listón: $\frac{4}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de unidad.

Imagina que quieres saber la medida de la cantidad de longitud del listón que construyes al unir los dos listones cuando uno lo colocas a continuación del otro.

Si no conoces una operación, que se llama suma de fracciones, deberás hacer lo siguiente:
1º. Coger los dos listones con tus manos y colocar uno a continuación del otro.
2º Medir la longitud del nuevo listón que has construido.

Pero si sabes sumar fracciones podrás calcular la medida del nuevo listón sin tener que realizar ninguna medida. Ni siquiera necesitarás tocar los listones, sólo debes pensar lo siguiente:

1º Imaginarte los dos listones colocados uno a continuación del otro.
2º Razonar del siguiente modo: "como un listón ocupa 4 subunidades de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad y el otro ocupa 2 subunidades de la misma longitud, entre los dos ocupan 6 subunidades de longitud $\frac{1}{3}$ de unidad"

Cuando piensas de esta forma estás realizando la operación suma de fracciones y se escribe: $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}$
Recuerda que $\frac{6}{3}$ de unidad son 2 unidades.

Caso de la suma de fracciones que tienen distinto denominador:
Vamos a resolver un problema en el que las medidas de las cantidades de magnitud son fracciones que no tienen el mismo denominador:

"*Tienes un listón que mide $\frac{1}{2}$ de la caña unidad. Quieres alargarlo y le añades otro listón de longitud $\frac{1}{3}$ de la caña unidad. ¿Cuál es la longitud del nuevo listón que has construido?*"

Para poder realizar el razonamiento que hemos hecho antes es necesario que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ tengan el mismo denominador.

1º. Tendrás que encontrar fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ que tengan como denominador 6 (2 x 3 = 6) porque la subunidad $\frac{1}{6}$ cabe un número entero de veces en las subunidades $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

Con este denominador podrás encontrar una fracción equivalente a $\frac{1}{2}$ y otra fracción equivalente a $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

porque si utilizas la subunidad $\frac{1}{6}$, que cabe tres veces en la subunidad $\frac{1}{2}$, necesitarás el triple de subunidades.

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

porque si utilizas la subunidad $\frac{1}{6}$, que cabe dos veces en la subunidad $\frac{1}{3}$, necesitarás el doble de subunidades.

2º Razonar del siguiente modo: "como un listón ocupa 3 subunidades de longitud $\frac{1}{6}$ y el otro ocupa 2 subunidades de la misma longitud, entre los dos ocupan 5 subunidades de longitud $\frac{1}{6}$ de unidad"

Cuando piensas de esta forma estás realizando la operación suma de fracciones y se escribe: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ de unidad.

Regla para sumar fracciones:

Para sumar dos fracciones deberás buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador (si de entrada las fracciones no tienen el mismo denominador). El resultado de la suma será otra fracción que tiene como denominador el mismo que el de las fracciones dadas y como numerador la suma de los numeradores de las fracciones dadas.

RESTA DE FRACCIONES

"*Imagina que tienes un listón de madera que tiene una longitud de $\frac{7}{5}$ metros. Has cortado el listón de manera que un trozo mide $\frac{9}{10}$ metros. ¿Cuánto mide la longitud del otro trozo de listón?*"

Para resolver este problema, si no conoces la operación resta de fracciones, deberás hacer lo siguiente:

1º. Tener en la mano el listón de $\frac{7}{5}$ metros.
2º. Medir sobre este listón la longitud de $\frac{9}{10}$ metros.
3º. Medir la longitud del trozo de listón sobrante.

Pero si sabes restar fracciones podrás calcular la medida del nuevo listón sin tener que realizar ninguna medida. Ni siquiera necesitarás tocar los listones, sólo debes pensar lo siguiente:

1º Imaginarte que el listón cuya longitud deseas calcular está colocado a continuación del que mide $\frac{9}{10}$ metros, y que juntos miden $\frac{7}{5}$ metros.
2º Expresar las cantidades de longitud $\frac{7}{5}$ y $\frac{9}{10}$ respecto a una misma subunidad (mismo denominador)
3º Recordar que la longitud del trozo de listón sobrante será la resta del número de subunidades que tiene el listón grande menos el número de subunidades que tiene el listón pequeño.

Una fracción equivalente a $\frac{7}{5}$ es $\frac{14}{10}$, porque si para cubrir la longitud $\frac{7}{5}$ utilizas la subunidad $\frac{1}{10}$, que cabe dos veces en la subunidad $\frac{1}{5}$, necesitarás el doble de subunidades.

Ahora ya puedes realizar la resta. La longitud del listón sobrante es:

$$\frac{7}{5} - \frac{9}{10} = \frac{14}{10} - \frac{9}{10} = \frac{5}{10} \text{ metros}$$

Recuerda que $\frac{5}{10}$ es equivalente a $\frac{1}{2}$ metro.

Regla para restar fracciones:
Para restar dos fracciones deberás buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador (si de entrada las fracciones no tienen el mismo denominador). El resultado de la resta será otra fracción que tiene como denominador el mismo que el de las fracciones dadas y como numerador la resta de los numeradores de las fracciones dadas.

MULTIPLICACIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL

En ocasiones se nos plantean situaciones en las que hay que sumar repetidas veces una misma cantidad de magnitud. Veamos un ejemplo en el que la cantidad que se repite es una fracción, $\frac{1}{3}$, la magnitud que se utiliza es la capacidad y la unidad de medida es el litro.

Problema: "Compras un pack de 24 latas de refresco de $\frac{1}{3}$ *de litro cada una. ¿Cuántos litros de refresco has comprado?"*

Para resolver este problema necesitas sumar 24 veces la fracción $\frac{1}{3}$ de litro.
Y para no tener que escribir una suma de 24 sumandos iguales:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+$$

$$+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

se inventó una nueva operación que se escribe

$$24 \times \frac{1}{3}$$

El cálculo de esta operación se realiza del siguiente modo. Como todas las fracciones tienen el mismo denominador podemos realizar la suma razonando que:
1º en el denominador se escribe 3, porque todas las subunidades indican la capacidad de la lata de refresco.
2º en el numerador se escribe 24 x 1, porque se repite 24 veces el número de subunidades de la fracción (1).

Regla para multiplicar una fracción por un número natural:
El resultado de la multiplicación de una fracción por un número natural será otra fracción que tiene como denominador el mismo que el de la fracción y como numerador la multiplicación del numerador de la fracción por el número natural.

DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL

En ocasiones se nos plantean situaciones en las que una cantidad de magnitud hay que dividirla, fraccionarla o repartirla entre un número de partes iguales. Veamos un ejemplo, en el que la cantidad que se divide es una fracción, $\frac{1}{2}$ metro.

Problema: "Quieres partir un listón de madera de longitud $\frac{1}{2}$ metro en tres trozos iguales. ¿Cuál es la longitud de los trozos de listón que has obtenido?"

Podemos resolver este problema hallando una fracción equivalente a $\frac{1}{2}$ cuyo numerador sea 3 subunidades. Porque necesitamos ver la longitud descompuesta en 3 subunidades que serán de menor longitud que $\frac{1}{2}$ metro. Vamos a explicar esta estrategia. La fracción $\frac{1}{2}$ metro podemos pensarla como la cantidad de longitud que se compone de que 3 subunidades aunque sean algo más cortas (de longitud $\frac{1}{6}$ metro).

Así pues, vamos a utilizar la equivalencia de fracciones para obtener tres trozos iguales de un listón de longitud $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

Ahora podemos realizar la división:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{3} \text{ de } \frac{1}{6} & \mathbf{3} \\ \cline{2-2} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}$$

Esta operación, que llamamos división, la escribimos del siguiente modo:

$$\frac{1}{2} : 3 = \frac{3}{6} : 3 = \frac{3:3}{6} = \frac{1}{6}$$

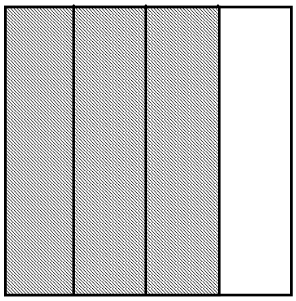
Si los 3 trozos de longitud $\frac{1}{6}$ se dividen en tres partes iguales queda un sólo trozo de longitud $\frac{1}{6}$ metro.

Vamos a plantear y resolver otro problema, en el que la cantidad que se divide es una fracción, $\frac{3}{4}$, y la magnitud que se utiliza es la superficie.

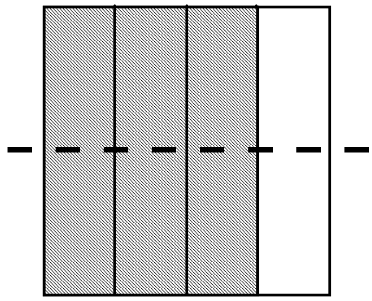
Problema: "De un mantel que tiene una superficie de $\frac{3}{4}$ de unidad, quieres sacar dos manteles iguales, sin que sobre ni falte mantel. ¿Cuál es la medida de la superficie del mantel que has obtenido?"

La fracción $\frac{3}{4}$ indica que la superficie del mantel se cubre con 3 subunidades de superficie $\frac{1}{4}$ de unidad. Como tenemos que dividir la fracción $\frac{3}{4}$ en dos partes iguales, tendremos que disponer, al menos, de 6 subunidades aunque sean de menor superficie que $\frac{1}{4}$ de unidad. Para ello deberemos hallar una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$ cuyo numerador sea 6 subunidades:

Gráfico de la fracción:



Si fraccionamos la unidad en 2 partes iguales:



$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Ahora podemos realizar la división:

$$\begin{array}{l|l} 6 \text{ de } \frac{1}{8} & 2 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

Nos vamos a ir acostumbrando a escribir y realizar la operación división del siguiente modo:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{6}{8} : 2 = \frac{6:2}{8} = \frac{3}{8}$$

La superficie del mantel es $\frac{3}{8}$ de unidad.

Regla para dividir una fracción por un número natural:

Para dividir una fracción por un número natural debes hallar una fracción equivalente a la dada que tenga como numerador un número de subunidades que pueda ser dividido por el número natural y después debes realizar la división recordando la nueva medida de las subunidades.

LA FRACCIÓN COMO RESULTADO DE UN REPARTO

Y LOS NÚMEROS DECIMALES

Contenidos:

Repartos igualitarios

Hasta ahora, cuando vemos escrita u oímos nombrar una fracción pensamos que está indicando el resultado de la medida de una cantidad de magnitud. Por ejemplo, en la carnicería puedes escuchar a un cliente pedir $\frac{3}{4}$ de Kgr. de ternasco.

Vamos a estudiar un nuevo significado de la fracción: como resultado de un reparto. Los objetos que se van a repartir son barras de regaliz. El material que utilizamos para sustituir a las barras de regaliz son tiras de papel que se pueden fraccionar con facilidad.

Otro dato importante es el número de personas que participan en el reparto.

<u>Antes</u> de realizar un reparto debe haber: - Un número de barras de regaliz, todas de la misma longitud. - Un número de personas que se van a repartir las barras de regaliz

<u>Después</u> de realizar el reparto, la fracción expresa la cantidad de regaliz que recibe CADA UNA de las personas que participan en el reparto.

Como todas las barras que se van a repartir tienen la misma longitud, la unidad de medida de longitud va a ser la longitud de una de las barras. La fracción, que expresa el resultado de un reparto, es la medida de la longitud de regaliz que recibe cada una de las personas cuando se toma como unidad de medida la longitud de una barra de regaliz. Los repartos que vamos a realizar son igualitarios, porque cada persona recibirá la misma cantidad de regaliz.

Dos formas de realizar repartos

Vamos a realizar repartos igualitarios de dos formas diferentes:

a) Repartos realizados en una sola fase o etapa.

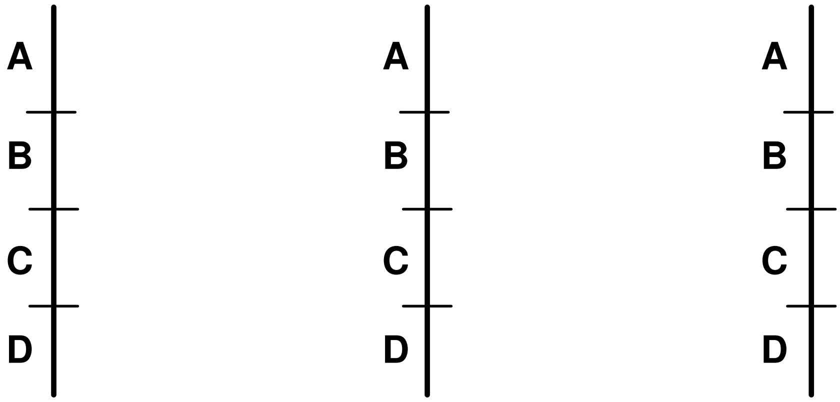
b) Repartos realizados en varias fases o etapas.

A) Repartos realizados en una sola fase o etapa.

El método que utilizamos para realizar el reparto "3 barras de regaliz entre 4 niños" en una sola fase consiste en fraccionar las 3 barras en tantas partes iguales como niños participen en el reparto.

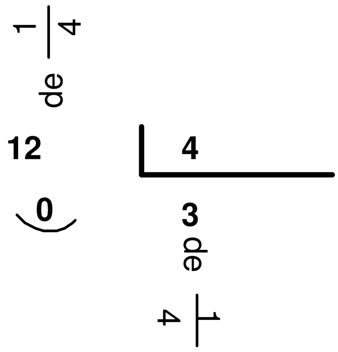
De esta forma obtenemos 12 trozos de longitud $\frac{1}{4}$ de barra, que los podemos repartir, de una sola vez, dando 3 trozos de trozos de longitud $\frac{1}{4}$ de barra a cada niño. Cada niño recibe $\frac{3}{4}$ de barra.

Gráficamente:



Niño A	Niño B	Niño C	Niño D
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

Con símbolos, el reparto "3 barras entre 4 niños" lo escribimos:



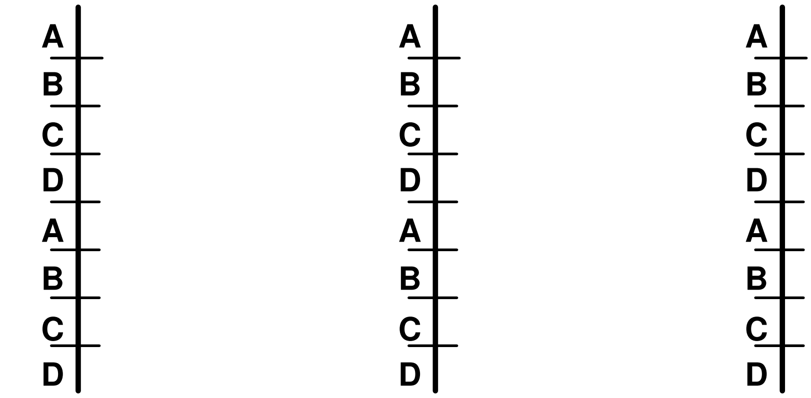
La fracción $\frac{3}{4}$ expresa la cantidad de longitud de regaliz que recibe cada niño que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 niños".

El numerador de la fracción indica el número de barras de regaliz que se van a ser repartidas, y el denominador indica el número de personas que participan en el reparto.

Otro método para realizar el reparto en una sola fase consiste en fraccionar las barras en un número de partes iguales que sea el doble, el triple, el cuádruple, ... del número de personas que haya. Por ejemplo, para realizar el reparto " 3 barras de regaliz entre 4 niños" en una sola fase podemos fraccionar cada barra en 8 partes iguales.

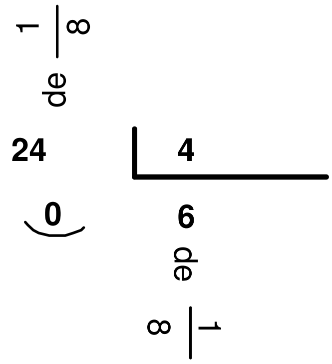
De esta forma obtenemos 24 trozos de longitud $\frac{1}{8}$ de barra, que los podemos repartir, de una sola vez, dando 6 trozos de trozos de longitud $\frac{1}{8}$ de barra a cada niño. Cada niño recibe $\frac{6}{8}$ de barra, que es una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$ de barra.

Gráficamente:



Niño **A**	Niño **B**	Niño **C**	Niño **D**
$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{8}$

Con símbolos, el reparto el reparto "3 barras entre 4 niños" lo escribimos:



La fracción $\frac{6}{8}$ expresa la cantidad de longitud de regaliz que recibe cada niño que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 niños".

El numerador de la fracción indica el <u>doble</u> del número de barras de regaliz que se van a ser repartidas, y el denominador indica el <u>doble</u> del número de personas que participan en el reparto.

Si hubiéramos realizado el reparto "6 barras de regaliz entre 8 niños" lo que recibiría cada uno de los niños es $\frac{6}{8}$de barra. Vemos que en los repartos "3 barras de regaliz entre 4 niños" y "6 barras de regaliz entre 8 niños" los niños reciben la misma longitud de regaliz.

Los repartos en los que las personas reciben la misma longitud de regaliz se llaman <u>repartos</u> <u>iguales</u>.

Habrás observado que para obtener repartos iguales a uno dado, basta con duplicar, a la vez, el número de barras y el número de personas. También puedes triplicar, cuadruplicar, ... , a la vez, el número de barras y el número de personas.

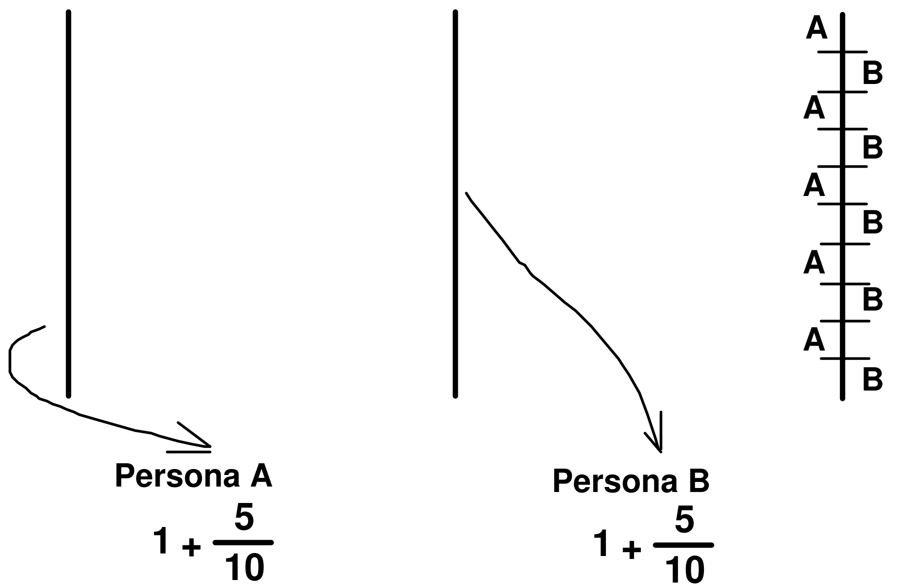
B) Repartos realizados en una varias fases o etapas.

El método que utilizamos para realizar un reparto por fases consiste en repartir, primero, las barras enteras cuando haya más barras que personas. Después las barras sobrantes se fraccionan en 10 partes iguales y se realiza una segunda fase del reparto. Si quedan trozos de barra sin repartir se vuelven a fraccionar en 10 partes iguales y se procede a realizar el reparto, y así sucesivamente hasta que no quedan trozos por repartir.

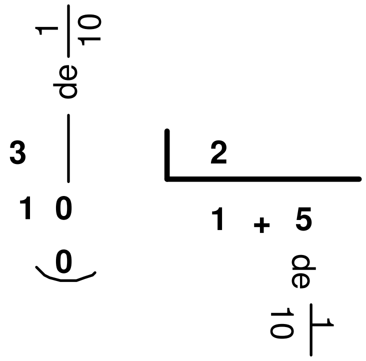
Para ver cómo se realiza un reparto por fases realizamos dos repartos: primero repartimos "3 barras de regaliz entre 2 personas" y, después "3 barras de regaliz entre 4 personas".

Para realizar el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas", en la primera fase cada persona recibe 1 barra de regaliz. Como queda una barra, para repartirla la fraccionamos en 10 partes iguales y ahora podemos dar 5 trozos de longitud $\frac{1}{10}$ de barra, en la segunda parte del reparto. Cada persona recibe 1 + $\frac{5}{10}$ de barra.

Gráficamente:

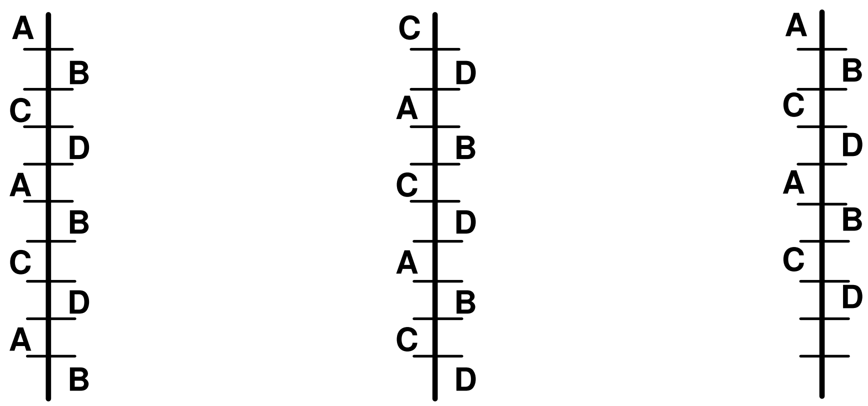


Con símbolos, el reparto "3 barras entre 2 personas" lo escribimos:

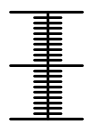


Veamos lo que reciben las personas en cada fase del reparto "3 barras de regaliz entre 4 personas":

En la primera fase del reparto cada persona recibe 0 barras de regaliz, porque no podemos dar barras enteras de regaliz.
En la segunda fase del reparto cada persona recibe $\frac{7}{10}$ de barra de regaliz, porque hemos fraccionado las tres barras en 10 partes iguales y hemos realizado una fase del reparto. Gráficamente:

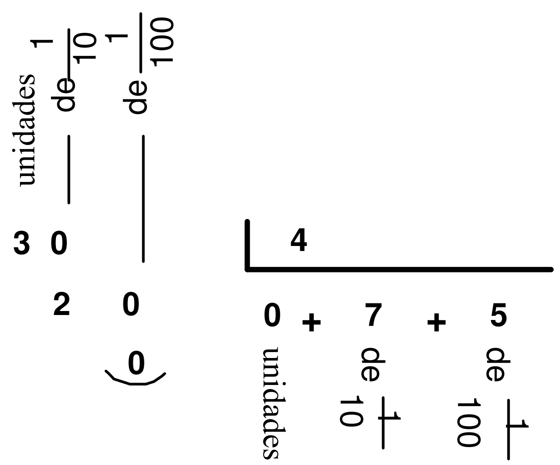


En la tercera fase del reparto cada persona recibe $\frac{5}{100}$ de barra de regaliz, porque se reparten 20 trozos de longitud $\frac{1}{100}$ de barra entre 4 personas:



Cada persona recibe 0 + $\frac{7}{10}$ + $\frac{5}{100}$ de barra.

Con símbolos, el reparto "3 barras entre 4 personas" lo escribimos:



El número decimal como resultado de un reparto

La cantidad de longitud de barra de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas" cuando se realiza el reparto en varias fases y se fraccionan los trozos sobrantes en 10 partes iguales viene dada por la suma de fracciones decimales: $1 + \frac{5}{10}$ de barra.

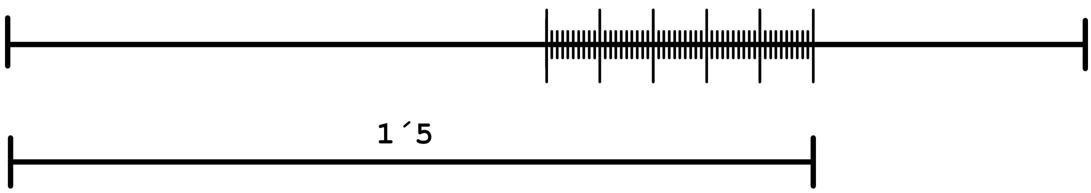
Podemos expresar esta suma de fracciones con el número decimal 1´5 de barra.

La cifra 1, que está a la izquierda de la coma, se llama <u>parte entera</u> del número decimal. La cifra 1 indica que cada persona recibe 1 barra de regaliz.

La cifra 5, que está a la derecha de la coma, se llama <u>parte decimal</u> del número decimal. La cifra 5 indica que cada persona recibe $\frac{5}{10}$ de barra de regaliz, y se llama <u>cifra de las décimas</u>.

Si la longitud de una barra de regaliz es:

el número decimal 1´5 de barra expresa la longitud de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 2 personas":



La cantidad de longitud de barra de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 personas" cuando se realiza el reparto en varias fases y se fraccionan los trozos sobrantes en 10 partes iguales viene dada por la suma de fracciones decimales: $0 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$ de barra.

Podemos expresar esta suma de fracciones con el número decimal 0´75 de barra.

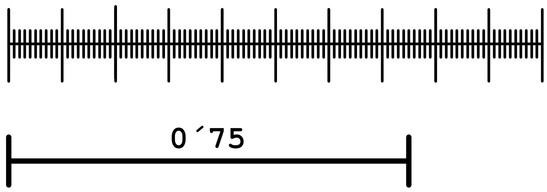
La cifra 0, que está a la izquierda de la coma, se llama <u>parte entera</u> del número decimal. La cifra 0 indica que las personas no reciben ninguna barra entera de regaliz.

La cifra 7, que está situada en el primer lugar a la derecha de la coma, indica que cada persona recibe $\frac{7}{10}$ de barra de regaliz, y se llama <u>cifra de las décimas</u>.

La cifra 5, que está situada en el segundo lugar a la derecha de la coma, indica que cada persona recibe $\frac{5}{100}$ de barra de regaliz, y se le llama <u>cifra de las centésimas</u>.

Si la longitud de una barra de regaliz es:

el número decimal 0´75 de barra expresa la longitud de regaliz que recibe cada persona que participa en el reparto "3 barras de regaliz entre 4 personas":



Recordarás que en clase has realizado otros repartos y has obtenido los números decimales que indican lo que recibe cada persona que participa en el reparto.

Así, en los repartos:

"7 barras de regaliz entre 5 personas" cada persona recibe $1 + \frac{4}{10}$ = 1´4 de barra.

"4 barras de regaliz entre 5 personas" cada persona recibe $0 + \frac{8}{10}$ = 0´8 de barra.

"5 barras de regaliz entre 4 personas" cada persona recibe

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 1´25 \text{ de barra.}$$

"15 barras de regaliz entre 4 niños" cada persona recibe

$$3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} = 3´75 \text{ de barra.}$$

"17 barras de regaliz entre 8 niños" cada persona recibe

$$2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 2´125 \text{ de barra..}$$

El número decimal como resultado de una medida de cantidad de magnitud

Los números decimales se utilizan para expresar cantidades de magnitud.

Recordarás que en clase hemos visto botellas cuya capacidad venía expresada por un número decimal y otros productos cuyo peso venía expresado por un número decimal. En todos los casos debíais expresar el número decimal con una fracción.

1º Una botella de agua mineral de 1´5 litros se puede expresar con la fracción $\frac{3}{2}$ de litro, porque:

$$1´5 = 1 + \frac{5}{10} = \frac{10}{10} + \frac{5}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

2º Una botella de fertilizante que pesa 1´2 kilos se puede expresar con la fracción $\frac{6}{5}$ de kilo, porque:

$$1´2 = 1 + \frac{2}{10} = \frac{10}{10} + \frac{2}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

3º Un botellín de batido de 0´25 litros se puede expresar con la fracción $\frac{1}{4}$ de litro, porque:

$$0´25 = 0 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

4º Un paquete de carne picada que pesa 0´375 kilos se puede expresar con la fracción $\frac{3}{8}$ de kilo, porque:

$$0´375 = 0 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{375}{1000} = \frac{75}{200} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

Equivalencia de números decimales

Has visto al realizar las tareas que puedes expresar, con números decimales, el resultado de un reparto de diferentes formas. Recuerda que es lo mismo recibir 2'5 barras de regaliz que 2'50 barras de regaliz; y lo mismo que recibir 2´500 barras de regaliz. Es decir,

puedes quitar o añadir un cero en la <u>última</u> cifra de un número decimal y éste número no varía.

Ordenación de números decimales

Recuerda que hemos estudiado la siguiente regla que sirve para ordenar números decimales:

Para ordenar números decimales comparamos la parte entera de los números decimales. El que tenga mayor parte entera será el número decimal mayor. Si los números tienen la misma parte entera, entonces comparamos la cifra de las décimas, y será mayor el número que tenga la cifra de las décimas mayor. Si los números tienen la misma parte entera y la misma cifra de las décimas entonces comparamos la cifra de las centésimas, y será mayor el número que tenga la cifra de las centésimas mayor. Y así, sucesivamente.

Por ejemplo, si ordenas bien los números decimales 10´3 ; 10´21 y 1´031, obtendrás que: $1'031 < 10´21 < 10´3$.

Operaciones con números decimales

A) Suma de números decimales

Cuando necesitas añadir una cantidad de magnitud a otra cantidad de magnitud, o unir dos o más cantidades de magnitud utilizas la operación suma. Si las cantidades de magnitud están expresadas con números decimales utilizas la operación suma de números decimales.

Recuerda que has utilizado la operación suma para resolver el siguiente problema:

"Un grupo de amigas quedan para caminar dos veces al día. Por la mañana andan 4´5 Km. y por la tarde 3´75 Km. ¿Cuantos kilómetros caminan cada día?".

Para realizar el cálculo de la suma, podemos expresar los números decimales como suma de fracciones decimales y realizar la suma de fracciones:

$$\begin{array}{r} 3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} \\ + \quad 4 + \frac{5}{10} + \frac{0}{100} \\ \hline 7 + \frac{12}{10} + \frac{5}{100} \end{array}$$

$$7 + 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} \qquad \text{porque } \frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$$

$$8 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} \qquad \text{que es igual a } 8´25 \text{ Km.}$$

Sin embargo, podemos realizar la suma de decimales de un modo más sencillo, parecido al procedimiento que utilizas para sumar números naturales:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ \mathbf{3\,´\,7\,5} \\ + \quad \mathbf{4\,´\,5} \\ \hline \mathbf{8\,´\,2\,5} \end{array}$$

Regla para sumar números decimales:

Se colocan los números decimales alineados por la coma. Se suman como si fuesen números naturales y, en el resultado, se coloca la coma debajo de la columna de las comas.

B) Resta de números decimales

Cuando necesitas quitar una cantidad de magnitud de otra cantidad de magnitud utilizas la operación resta. Si las cantidades de magnitud están expresadas con números decimales utilizas la operación resta de números decimales.

Recuerda que has utilizado la operación resta para resolver el siguiente problema:

"Un carnicero vende una pieza de ternasco de 20 Kgrs. A los tres primeros clientes les vende 3´75 Kgrs.; 5´8 Kgrs. y 6´5 Kgrs. ¿Cuántos Kgrs. de la pieza de ternasco le queda por vender?"

Para realizar el cálculo de la resta de las cantidades 20 Kgrs. y 16´05 Kgrs., podemos expresar los números decimales como suma de fracciones decimales y realizar la resta de fracciones:

$$\begin{array}{rl} & 20 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} \\ - & 16 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 20 + \frac{0}{10} + \frac{10}{100} \\ - & 16 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} \\ \hline \end{array}$$

porque $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

y al minuendo y al sustraendo

hemos añadido $\frac{1}{10}$

$$\begin{array}{rl} & 20 + \frac{10}{10} + \frac{10}{100} \\ - & 17 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} \\ \hline \end{array}$$

porque $\frac{10}{10} = 1$

y al minuendo y sustraendo

hemos añadido $\frac{10}{10} = 1$

Ahora podemos restar: $3 + \frac{9}{10} + \frac{5}{100}$ que es igual a 3´95 Kgrs.

Sin embargo, podemos realizar la resta de decimales de un modo más sencillo, parecido al procedimiento que utilizas para restar números naturales:

$$\begin{array}{rcccc} & & & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} \\ & \mathbf{2} & \mathbf{0}\,\acute{} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ - & \mathbf{1} & \mathbf{6}\,\acute{} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \hline & & \mathbf{3}\,\acute{} & \mathbf{9} & \mathbf{5} \end{array}$$

<u>Regla para restar números decimales:</u>

Se colocan los números decimales alineados por la coma. Se restan como si fuesen números naturales y, en el resultado, se coloca la coma debajo de la columna de las comas.

C) Multiplicación de un número decimal por un número natural

Cuando necesitas sumar un número de veces una misma cantidad de magnitud utilizas la operación multiplicación. Si la cantidad de magnitud está expresada con un número decimal utilizas la operación multiplicación de un número decimal por un número natural.

Recuerda que has utilizado la operación multiplicación de un número decimal por un número natural para resolver el siguiente problema:

"La torre Eiffel mide 300 m. de altura y se construyó para celebrar la Exposición Mundial de 1889. ¿Sabrías decirme que altura tiene un edificio de 8 plantas, si la altura entre dos plantas consecutivas es de 2´75 metros?".

Para realizar el cálculo de la multiplicación 2´75 x 8, podemos expresar el número decimal como suma de fracciones decimales y realizar la siguiente multiplicación:

$$2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\times 8$$

$$16 + \frac{56}{10} + \frac{40}{100}$$

$$16 + \frac{56}{10} + \frac{4}{10}$$

$$16 + \frac{60}{10}$$

$$16 + 6 \qquad \text{que son 22 metros}$$

Sin embargo, podemos realizar la multiplicación de un modo más sencillo, parecido al procedimiento que utilizas para multiplicar números naturales:

$$\begin{array}{r} {}^{6}\ \ {}^{4}\ \ \\ \mathbf{2\,'\,7\ 5} \\ \times\ \mathbf{8} \\ \hline \mathbf{2\ 2\,'\,0\ 0} \end{array}$$

Regla para multiplicar un número decimal por un número natural:

Se realiza la multiplicación como si los dos números fueran naturales, y luego se corre la coma, desde la derecha, tantos lugares como cifras decimales tenga el número decimal.

D) Multiplicación de un número decimal por 10, 100 y 1000

Cuando necesitas sumar 10, 100 ó 1000 veces una cantidad de magnitud utilizas la operación multiplicación de un número decimal por 10, 100 ó 1000.

Recuerda que en una tarea has necesitado realizar la operación 1´05 x 10:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \times 10 \\ \hline 10 + \frac{0}{10} + \frac{50}{100} \end{array}$$

$$10 + \frac{5}{10}$$ que es igual a 10´5

Recuerda que, también, has necesitado realizar la operación 1´05 x 100:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \times 100 \\ \hline 100 + \frac{0}{10} + \frac{500}{100} \end{array}$$

$100 + 5$ que es igual a 105

Recuerda que, además, has necesitado realizar la operación 1´05 x 1000:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \\ \times 1000 \\ \hline 1000 + \frac{0}{10} + \frac{5000}{100} \end{array}$$

$1000 + 500$ que es igual a 1050

Colocando los resultados en una tabla.

	Multiplicado por 10	Multiplicado por 100	Multiplicado por 1000
1´05	**10´5**	**105**	**1050**

podemos enunciar la siguiente regla:

Para multiplicar un número decimal por 10, 100 ó 1000, no es necesario realizar ningún cálculo, basta correr la coma del número decimal, hacia la derecha, 1, 2 ó 3 posiciones, respectivamente.

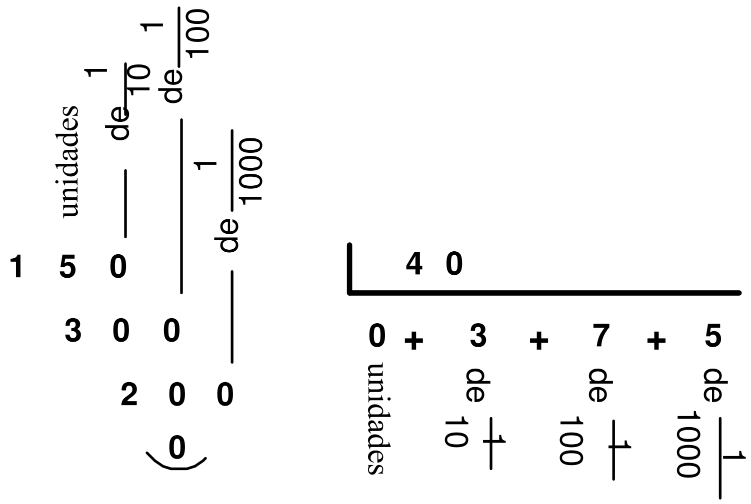
E) División de un número decimal por un número natural

Cuando necesitas dividir, fraccionar o repartir una cantidad de magnitud, expresada por un número decimal, entre un número natural utilizas la operación división de un número decimal por un número natural.

Recuerda que has utilizado la operación división de un número decimal por un número natural para resolver el siguiente problema:

"Un carpintero corta un listón de 1´5 metros de longitud en cuatro partes iguales. ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes iguales?"

Para facilitar la división es mejor realizar el reparto "15 metros en 40 partes iguales" que es equivalente al reparto "1´5 metros en 4 partes iguales", porque hemos multiplicado por 10 los dos términos del reparto.



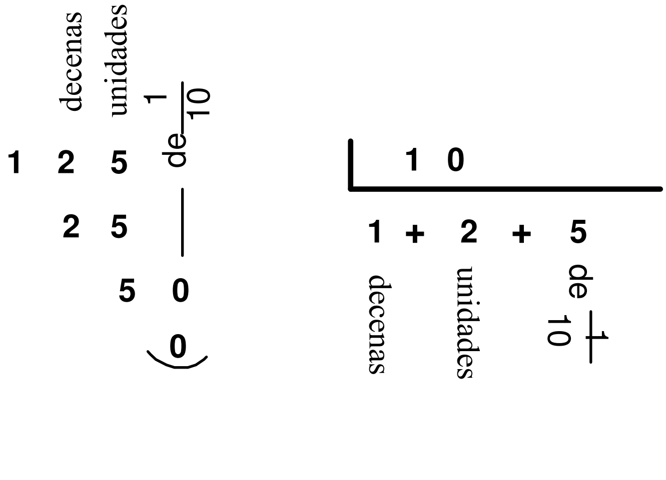
La longitud de cada listón es de 0´375 metros.

Regla para dividir un número decimal por un número natural:

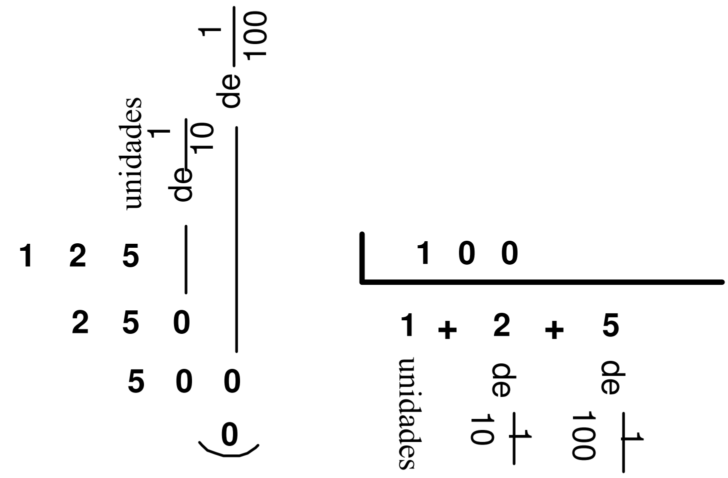
Para dividir un número decimal entre un número natural debemos multiplicar el número decimal y el número natural por 10, 100 ó 1000 hasta que el número decimal se convierta en un número natural, y después realizar el reparto como sabemos hacerlo.

F) División de un número decimal por 10, 100 y 1000

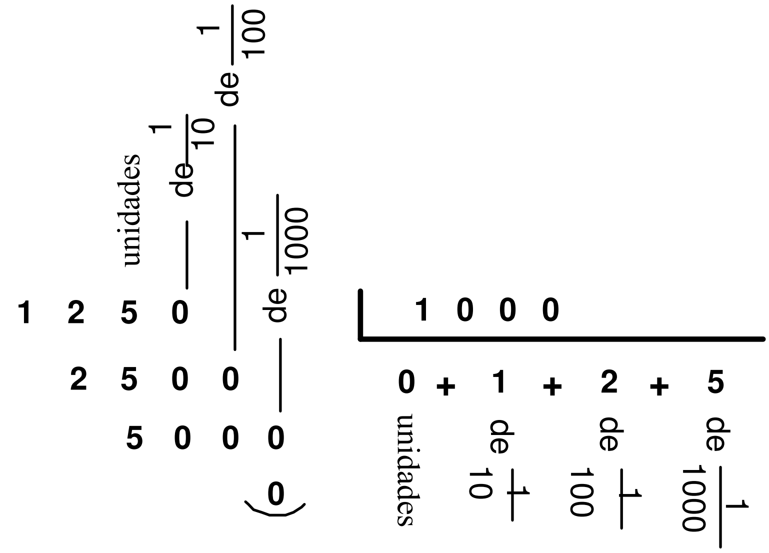
Recuerda que en una tarea has necesitado realizar el reparto "125 barras de regaliz entre 10 personas", en el que cada persona recibe 12´5 barras de regaliz:



Recuerda que en otro apartado de la misma tarea has necesitado realizar el reparto "125 barras de regaliz entre 100 personas", en el que cada persona recibe 1´25 barras de regaliz:



Recuerda que, finalmente, has necesitado realizar el reparto "125 barras de regaliz entre 1000 personas", en el que cada persona recibe 0´125 barras de regaliz:



Vamos a colocar estos resultados en una tabla.

	Dividido por 10	Dividido por 100	Dividido por 1000
125	**12´5**	**1´25**	**0´125**

Observa que para dividir un número decimal por 10, 100 ó 1000 no es necesario realizar el cálculo de la operación división, basta con aplicar la siguiente regla:

> Para dividir un número decimal por 10, 100 ó 1000, no es necesario realizar ningún cálculo, basta correr la coma del número decimal, hacia la izquierda, 1, 2 ó 3 posiciones, respectivamente"