

# Modelos de simulación de alto orden para la resolución de fenómenos de propagación de ondas en flujos de lámina libre con turbulencia

## *High order simulation models for the resolution of wave propagation phenomena in turbulent free surface flows*

Navas-Montilla, A. <sup>a1</sup>, Murillo, J. <sup>a2</sup>, García-Navarro, P. <sup>a3</sup>

<sup>a</sup> Universidad de Zaragoza-CSIC. Calle María de Luna, 3, 50018, Zaragoza, España.  
E-mail: <sup>a1</sup> anavas@unizar.es, <sup>a2</sup> Javier.Murillo@unizar.es, <sup>a3</sup> pigar@unizar.es

Recibido: 02/08/2019

Aceptado: 07/10/2019

Publicado: 31/10/2019

**Citar como:** Navas-Montilla, A., Murillo, J., García-Navarro, P. (2019). High order simulation models for the resolution of wave propagation phenomena in turbulent free surface flows. *Ingeniería del agua*, 23(4), 275-287. <https://doi.org/10.4995/ia.2019.12169>

---

## RESUMEN

En este trabajo se presenta una herramienta de simulación basada en la resolución transitoria de grandes remolinos (URANS o DA-LES) para flujos turbulentos de aguas poco profundas en los que la turbulencia es predominantemente horizontal. El aspecto fundamental del modelo es la combinación de una discretización de alto orden en espacio y tiempo con una modelización de los efectos en el flujo promedio de las escalas turbulentas no resueltas. El modelo propuesto garantiza con precisión de máquina el equilibrio hidrostático (propiedad *well-balanced*) gracias a la utilización de una formulación del flujo numérico que incluye los términos fuente en la resolución del problema de Riemann derivativo en las paredes de las celdas. Se presenta una validación del modelo utilizando datos de literatura para un experimento de laboratorio que involucra un flujo de aguas poco profundas sobre una isla cónica, que da lugar a la generación de una calle de vórtices aguas abajo de la isla. Los resultados numéricos muestran que el modelo propuesto es capaz de reproducir fenómenos turbulentos bidimensionales, proporcionando un mayor nivel de detalle que la aproximación RANS tradicional.

**Palabras clave** | volúmenes finitos; aguas poco profundas; alto orden; turbulencia; términos fuente.

---

## ABSTRACT

A depth-averaged large eddy simulation (DA-LES) model, based on the unsteady Reynolds averaged Navier Stokes approach for the shallow water equations, is herein presented. The simulation model aims at the resolution of free surface shallow flows where large-scale turbulence is mainly two-dimensional. The keystone of the model is the combination of a high order of accuracy in space and time with a suitable turbulence modelling that accounts for the effect of the unresolved eddies in the mean flow. The proposed model ensures the well-balanced property (i.e. quiescent equilibrium with machine precision) thanks to the use of augmented Riemann solvers, which include the bed slope source term in the definition of the derivative Riemann problem. The performance of the proposed model is assessed using experimental data from the literature. In particular, a laboratory experiment involving a shallow water flow over a submerged conical island is considered. The numerical results evidence that the proposed model is able to reproduce transient turbulent phenomena, providing a higher level of information and resolution than other models based on the traditional RANS (Reynolds averaged Navier Stokes) approach.

**Key words** | *finite volume; shallow water; high order; turbulence; source terms.*

## INTRODUCCIÓN

Los esquemas numéricos basados en el método de los volúmenes finitos son una elección muy habitual para la resolución de problemas complejos en el marco de la hidráulica computacional. Parte de estos problemas se modelan mediante ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólico. Este tipo de ecuaciones reproducen con fidelidad fenómenos que involucran la propagación de ondas. En situaciones realistas, es necesario tener en cuenta efectos dinámicos adicionales más allá de los fenómenos puramente convectivos. Dichos efectos se modelan matemáticamente mediante los llamados términos fuente, que dan lugar a sistemas de ecuaciones no homogéneos y suponen un desafío computacional importante en numerosas ocasiones. Sólo unas adecuadas discretizaciones del término fuente garantizan la convergencia de la solución a una solución físicamente realista; cuando se utilizan métodos numéricos sofisticados, la complejidad en el tratamiento de los términos fuentes aumenta de forma notable.

La tecnología numérica subyacente en estos métodos de simulación ha experimentado una mejora significativa durante las últimas décadas y se han desarrollado algoritmos que proporcionan un alto orden de convergencia tanto en el espacio como en el tiempo. Esto se traduce en la obtención de soluciones mucho más precisas que las proporcionadas por métodos de primer orden en tiempos computacionales más reducidos, es decir, en un aumento de la eficiencia.

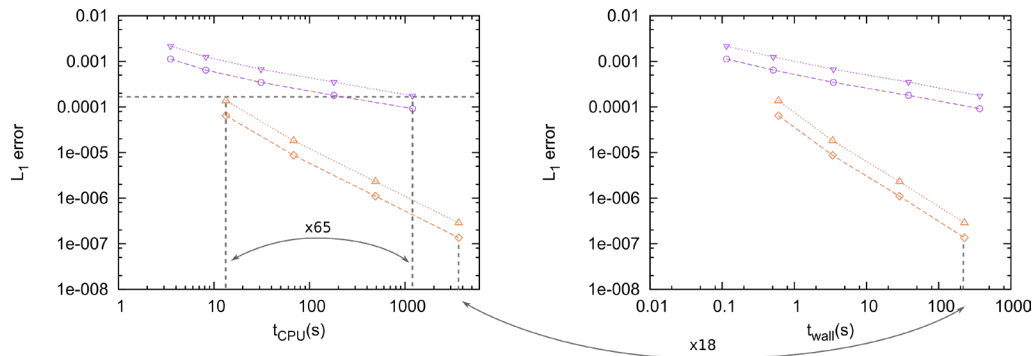
En la mayoría de sistemas hiperbólicos no lineales ocurre el fenómeno de pérdida de regularidad de la solución, lo que significa que soluciones inicialmente continuas pueden evolucionar a soluciones discontinuas. Con el fin de garantizar un alto orden de convergencia en el espacio para este tipo de soluciones, nacieron los métodos ENO y WENO (Liu et al., 1994), basados en técnicas de reconstrucción que garantizan una solución de orden arbitrario exenta de oscilaciones. Por otro lado, el alto orden en el tiempo se conseguía mediante métodos de integración temporal del tipo Runge-Kutta, que se demostraron ineficientes debido al límite de Butcher. Este problema se resolvió con la introducción de las técnicas ADER (Toro y Titarev, 2002), basadas en una aproximación temporal de alto orden de los flujos y las variables utilizando el método de Cauchy-Kowalevski para expresar derivadas temporales en función de las espaciales (Toro y Titarev, 2002). A diferencia de los métodos basados en integración temporal con Runge-Kutta, los métodos ADER son completamente discretos, es decir, es posible obtener una fórmula de actualización discreta (sin pasos intermedios) para las variables en las celdas.

En este trabajo se muestran los aspectos necesarios para la construcción de esquemas WENO-ADER para las ecuaciones de aguas poco profundas con términos fuente (variación de fondo y fricción). Los esquemas que se presentan garantizan el equilibrio exacto de flujos y términos fuente, permitiendo de una manera directa la preservación de los estados de equilibrio fundamentales en la solución discreta (George, 2008; Murillo y García-Navarro, 2010). Siempre se garantizará el equilibrio hidrostático (propiedad *well-balanced*), y en otros casos particulares, también se puede garantizar la conservación de la energía o incluso el equilibrio geostrofico, si el dominio está en rotación. Los métodos propuestos están basados en un *solver* de Riemann de orden arbitrario, denominado LFS *solver*, que incluye la variación de los términos fuente a través de las paredes de las celdas computacionales en la solución al Problema de Riemann Derivativo (Navas-Montilla y Murillo, 2016; Navas-Montilla y Murillo, 2018). En particular se utilizará el *solver* de Roe aumentado (ARoe).

Como se ha mencionado anteriormente, el uso de un mayor orden de precisión permite un aumento en la eficiencia computacional. La tasa de reducción del error con el refinamiento de malla es mayor conforme el orden se incrementa. Además, el tiempo computacional requerido para obtener una solución numérica con un mismo error, utilizando un esquema de primer orden y de alto orden, es significativamente inferior en el segundo caso. En la figura 1 se muestra la evolución del error numérico frente al tiempo computacional para el esquema ARoe WENO-ADER 3 y para el esquema de primer orden tradicional, aplicado a la resolución de una rotura de presa 2D con perfil inicial Gaussiano (Navas-Montilla y Murillo, 2018). Se observa que, para un mismo nivel de error, el esquema de orden 3 es significativamente más rápido.

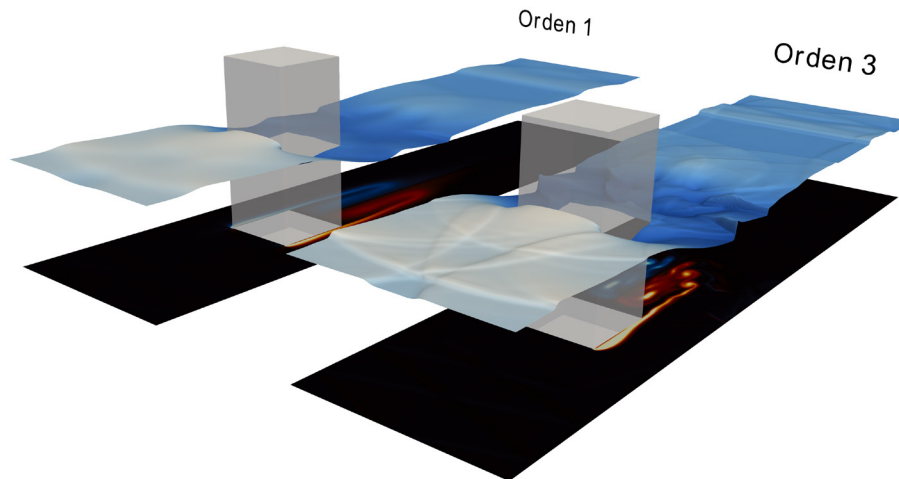
Con los esquemas propuestos, es posible reproducir patrones complejos de interacción de ondas de gravedad con precisión ya que el error difusivo y dispersivo es bajo en comparación con esquemas tradicionales de primer y segundo orden. En la figura 2 se muestran las ondas de gravedad (representación tridimensional de la superficie libre), así como la vorticidad, en un flujo superficial alrededor de un obstáculo prismático de base cuadrada. La simulación se ha realizado con el modelo que se propone en este artículo, imponiendo la velocidad y calados iniciales (y en el contorno de entrada) a 0.5 m/s y 0.1 m, respectivamente. La mitad superior de

la imagen representa la solución calculada con un esquema ARoe WENO-ADER de tercer orden mientras que la mitad inferior se ha calculado con un esquema tradicional de primer orden.



**Figura 1** | Error numérico frente a tiempo computacional de CPU (izquierda) y tiempo real utilizando OpenMP en 24 hilos (derecha) para un esquema de primer orden (morado,  $\circ$  caudal y  $\nabla$  calado) y de tercer orden (naranja,  $\diamond$  caudal y  $\triangle$  calado). Extraído de Navas-Montilla y Murillo (2018).

Gracias al alto orden de precisión de los esquemas numéricos que aquí se presentan, no solo es posible reproducir variaciones transitorias de las variables en las escalas grandes (temporales y espaciales) sino que también se pueden reproducir con precisión parte de las fluctuaciones turbulentas que aparecen en las escalas pequeñas. Esto hace a los esquemas WENO-ADER muy adecuados para la resolución de flujos turbulentos.



**Figura 2** | Resolución de un flujo de lámina libre con un patrón complejo de ondas de gravedad utilizando orden 1 y 3. Se representa la superficie libre en 3D y la vorticidad promediada en la vertical, proyectada en el fondo.

Los flujos de aguas poco profundas tienen una naturaleza turbulenta. La estructura de la turbulencia en este tipo de flujos está formada por dos escalas muy diferenciadas (Nadaoka y Yagi, 1998). La primera la forman grandes vórtices bidimensionales horizontales, generados por variaciones locales del campo de velocidad. Estos vórtices son responsables de la transferencia de masa y momento en las direcciones horizontales del flujo. A parte de estos vórtices bidimensionales, existe una componente de turbulencia tridimensional, formada por pequeños vórtices producidos por la interacción del flujo con las paredes, fondo y por cizalladura horizontal.

La presencia de dos escalas turbulentas muy diferenciadas motiva el uso de discretizaciones de alto orden para la resolución de las escalas horizontales (en las que se desarrolla la turbulencia bidimensional) y la modelización de las escalas tridimensionales

pequeñas mediante un modelo de turbulencia adecuado que cuantifique la mezcla producida por los vórtices no resueltos. Así, la metodología WENO-ADER se utiliza para generar un modelo URANS (*Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes*) que permite resolver los vórtices horizontales con precisión e incluir el efecto de la turbulencia 3D no resuelta. El esquema se ha validado utilizando distintos casos test que involucran la generación y transporte de estructuras turbulentas bidimensionales (Navas-Montilla et al., 2019).

En este trabajo se describe el procedimiento detallado para la construcción de un modelo de simulación URANS para flujos de aguas poco profundas en los que domina la turbulencia horizontal 2D y se aplica a un caso test de laboratorio que involucra un flujo de lámina libre sobre una isla cónica sumergida de pequeña pendiente, propuesto en (Lloyd y Stansby, 1997) y que sigue siendo todavía un reto para modelos de simulación basados en las ecuaciones de aguas poco profundas.

## MATERIAL Y MÉTODOS

El modelo de aguas poco profundas que aquí se considera viene dado por el siguiente sistema hiperbólico:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_f + \mathbf{D}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{U} = (h, hu, hv)^T$  son las variables conservadas (calado, caudal en  $x$  y caudal en  $y$ ), con  $u$  y  $v$  las velocidades en  $x$  e  $y$  y  $g$  la aceleración de la gravedad,

$\mathbf{F} = \left( hu, hu^2 + \frac{1}{2}gh^2, huv \right)^T$  y  $\mathbf{G} = \left( hv, huv, hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)^T$  son los flujos físicos,  $\mathbf{S}_b = \left( 0, -gh \frac{\partial z}{\partial x}, -gh \frac{\partial z}{\partial y} \right)^T$  y  $\mathbf{S}_f = \left( 0, -c_f |v|u, -c_f |v|v \right)$  los términos fuente de fondo y fricción y  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y$  los términos de difusión turbulenta. Estos se calculan del siguiente modo:

$$\mathbf{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ hT_{xx} \\ hT_{yx} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_y = \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ hT_{xy} \\ hT_{yy} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde  $T$  representa los esfuerzos turbulentos promediados en la vertical que se calculan utilizando la aproximación de Boussinesq (Wu et al., 2004):

$$\begin{aligned} T_{xx} &= 2(\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial x} \\ T_{xy} = T_{yx} &= (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ T_{yy} &= 2(\nu + \nu_t) \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\nu$  representa la viscosidad molecular y  $\nu_t$  la viscosidad turbulenta. El coeficiente de fricción se estimará utilizando la formulación de Manning:

$$c_f = \frac{gn^2}{h^{1/3}} \quad (4)$$

donde  $n$  es el coeficiente de Manning que cuantifica la rugosidad del fondo.

### Modelo de turbulencia

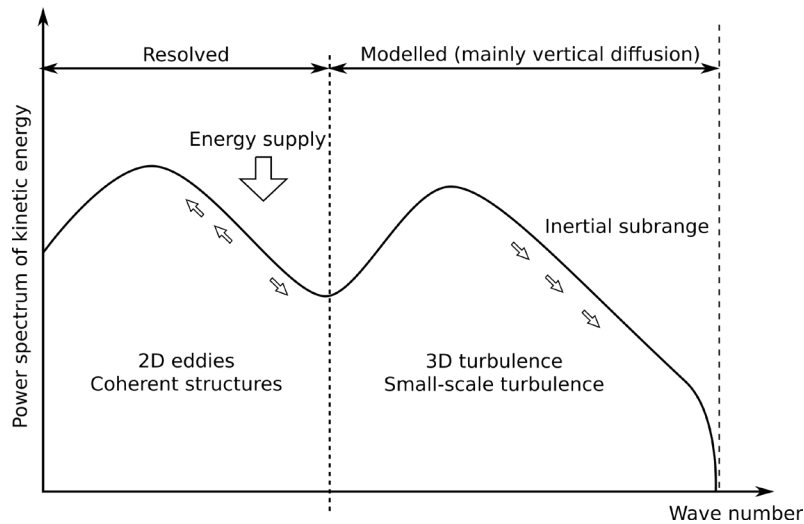
La turbulencia en flujos de aguas poco profundas se caracteriza por la coexistencia de dos escalas diferenciadas de estructuras turbulentas: turbulencia 2D horizontal de gran escala y turbulencia 3D de pequeña escala, como se muestra en la figura 3 (Nadaoka

y Yagi, 1998; Navas-Montilla et al., 2019). Dado que el modelo matemático que representa el flujo es un modelo 2D (promediado en la vertical), es posible resolver la turbulencia 2D de gran escala, mientras que habrá que modelar la turbulencia 3D de pequeña escala. Esto corresponde con una aproximación URANS. Nótese que esta aproximación es también llamada DA-LES (*Depth-averaged Large Eddy Simulation*).

La turbulencia 3D de pequeña escala se modelará utilizando el modelo parabólico promediado en la vertical:

$$v_t^{3D} = \lambda U^* h, \tag{5}$$

donde  $\lambda$  es un coeficiente empírico de calibración y  $U^* = \sqrt{c_f(u^2 + v^2)}$  es la velocidad de fricción en la pared. El parámetro  $\lambda$  se puede estimar de manera teórica como  $\kappa/6$ , con  $\kappa$  la constante de von Karman (Wu et al., 2004).



**Figura 3** | Cascada energética turbulenta en un flujo de aguas poco profundas. Se muestra el rango del espectro resuelto mediante una aproximación URANS. Adaptado de (Nadaoka y Yagi, 1998).

Es importante destacar que para resolver con precisión los vórtices 2D horizontales (aproximación URANS), es necesario utilizar un esquema numérico alto orden. A pesar de ello, es probable que parte del espectro no se resuelva adecuadamente y se cometa un error dispersivo significativo en ciertas escalas debido al esquema de discretización utilizado. Para ello, puede ser útil el uso de un modelo “subgrid” (SGS) de disipación turbulenta para las escalas más pequeñas de los vórtices 2D. Aquí consideramos el modelo de Smagorinsky:

$$v_t^{SGS} = \beta l_s^2 \sqrt{2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \tag{6}$$

donde  $\beta$  y  $l_s$  son constantes empíricas de calibración. La combinación de  $v_t^{3D}$  y  $v_t^{SGS}$  de la siguiente manera:

$$v_t = \sqrt{(v_t^{3D})^2 + (v_t^{SGS})^2}. \tag{7}$$

da lugar al denominado modelo turbulencia de longitud de mezcla promediado en la vertical, habitualmente empleado en simulación RANS en la que la  $v_t^{SGS}$  no solamente modela las escalas 2D no resueltas sino el espectro completo de turbulencia horizontal según la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl (Wu et al., 2004). En este trabajo, se considerará la aproximación URANS que permite resolver las fluctuaciones originadas por la turbulencia horizontal de gran escala.

## Método numérico: esquema ARoe WENO-ADER

De manera genérica, podemos expresar el problema a resolver como el siguiente problema de valor inicial y contorno (Navas-Montilla y Murillo, 2016):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{PDEs:} \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F}, \mathbf{G}) = \mathbf{S} + \mathbf{D} \\ \text{IC:} \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \text{BC:} \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_{\partial\Omega}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (8)$$

definido en el dominio  $\Omega \times [0, T]$ , donde  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  es el dominio espacial y  $T$  es el tiempo de simulación. La condición inicial viene dada por  $\mathbf{U}_0(\mathbf{x})$  y la condición de contorno por  $\mathbf{U}_{\partial\Omega}(\mathbf{x}, t)$ . El dominio espacial se discretiza en  $N_x \times N_y$  celdas de volumen, definidas como  $\Omega_{ij} \subseteq \Omega$ , donde  $i$  y  $j$  son los índices en el sistema de coordenadas cartesianas. Las celdas se definen como:

$$\Omega_{ij} = \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \times \left[ y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right], \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y \quad (9)$$

En cada celda, las variables conservadas se definen como valores promedio, calculados del siguiente modo:

$$\bar{\mathbf{U}}_{ij}^n = \frac{1}{\vartheta_{ij}} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t^n) dA \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y, \quad (10)$$

donde  $\vartheta_{ij} = \Delta x^2$  es el área de la celda, considerando celdas cuadradas. La integración del sistema en (1.8) viene dada por

$$\bar{\mathbf{U}}_{ij}^{n+1} = \bar{\mathbf{U}}_{ij}^n - \frac{1}{\vartheta_{ij}} \int_0^{\Delta t} \int_{\partial\Omega_{ij}} (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\ell dt + \frac{1}{\vartheta_{ij}} \int_0^{\Delta t} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{S} dA dt + \frac{1}{\vartheta_{ij}} \int_0^{\Delta t} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{D} dA dt, \quad (11)$$

Considerando malla cartesiana, se obtiene la siguiente fórmula discreta de actualización

$$\bar{\mathbf{U}}_{ij}^{n+1} = \bar{\mathbf{U}}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\mathbf{F}_{i+1/2, j}^- - \mathbf{F}_{i-1/2, j}^+) - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\mathbf{G}_{i, j+1/2}^- - \mathbf{G}_{i, j-1/2}^+) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\bar{\mathbf{S}}_{ij} + \bar{\mathbf{D}}_{ij}), \quad (12)$$

donde  $\mathbf{F}_{i\mp 1/2, j}^\pm$  y  $\mathbf{G}_{i, j\mp 1/2}^\pm$  son los flujos numéricos y

$$\bar{\mathbf{S}}_{ij} \approx \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i-1/2}} \int_{y_{i+1/2}}^{y_{i-1/2}} \mathbf{S} dy dx d\tau, \quad \bar{\mathbf{D}}_{ij} \approx \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i-1/2}} \int_{y_{i+1/2}}^{y_{i-1/2}} \mathbf{D} dy dx d\tau \quad (13)$$

es una aproximación del término fuente y los términos difusivos dentro de la celda. Para estos últimos se utilizarán diferencias centradas de segundo orden, ya que los problemas de interés considerados tendrán un alto número de Péclet y el error de discretización de estos términos no será dominante. Los flujos numéricos se calcularán como la integral espacio-temporal de los flujos numéricos locales a lo largo de las paredes de las celdas. Para construir un esquema de orden  $2k-2$  es suficiente con utilizar  $k$  puntos de cuadratura. Por ejemplo, el flujo numérico  $\mathbf{F}_{i\mp 1/2, j}^\pm$  se calculará como

$$\mathbf{F}_{i+1/2, j}^- = \frac{\Delta x}{2} \sum_{q=1}^k w_q \mathbf{F}_{i+1/2, j, q}^-, \quad (14)$$

donde  $w_q$  son los pesos de cuadratura gaussiana en el intervalo  $[-1, 1]$ , y  $\mathbf{F}_{i+1/2, j, q}^-$  los flujos numéricos locales en cada uno de los puntos de cuadratura. Estos flujos se aproximarán mediante la resolución del Problema de Riemann Derivativo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \bar{\mathbf{S}}_{i+1/2} \\ \mathbf{U}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbf{U}_{ij}(x, y_{i+1/2, j, q}) & x < 0 \\ \mathbf{U}_{i+1j}(x, y_{i+1/2, j, q}) & x > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (15)$$

donde la condición inicial viene dada por la reconstrucción WENO (Navas-Montilla y Murillo, 2016). El término  $\bar{\mathbf{S}}_{i+1/2}$  representa una aproximación de la integral del término fuente en la pared, que será cero cuando el término fuente no sea de tipo geométrico (término de fondo en ecuaciones de aguas poco profundas). La solución del problema en (1.15) viene dada como una expansión en serie de Taylor temporal del flujo numérico

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2, j, q}^- &= \mathbf{F}_{i+1/2, j, q}^{-,(0)} + \sum_{k=1}^K \mathbf{F}_{i+1/2, j, q}^{-,(k)} \frac{\Delta t^k}{(k+1)!}, \\ \mathbf{F}_{i+1/2, j, q}^+ &= \mathbf{F}_{i+1/2, j, q}^{+,(0)} + \sum_{k=1}^K \mathbf{F}_{i+1/2, j, q}^{+,(k)} \frac{\Delta t^k}{(k+1)!}, \end{aligned} \quad (16)$$

donde los coeficientes se calculan mediante la resolución de problemas de Riemann convencionales planteados para las variables reconstruidas y sus derivadas. Para la resolución de éstos problemas de Riemann convencionales puede utilizar el *solver* ARoe y HLLS. En este trabajo consideraremos el *solver* ARoe, que propone la siguiente aproximación de los flujos numéricos a izquierda y derecha de la pared

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2}^{-,(k)} &= \mathbf{F}_{i_E}^{(k)} + \sum_{m=1}^{N_{\tilde{\lambda}}} (\tilde{\lambda}^- \alpha^{(k)} - \beta^{-,(k)})_{i+1/2}^m \tilde{\mathbf{e}}_{i+1/2}^m, \quad k=0, K \\ \mathbf{F}_{i+1/2}^{+,(k)} &= \mathbf{F}_{(i+1)_W}^{(k)} + \sum_{m=1}^{N_{\tilde{\lambda}}} (\tilde{\lambda}^+ \alpha^{(k)} - \beta^{+,(k)})_{i+1/2}^m \tilde{\mathbf{e}}_{i+1/2}^m, \quad k=0, K \end{aligned} \quad (17)$$

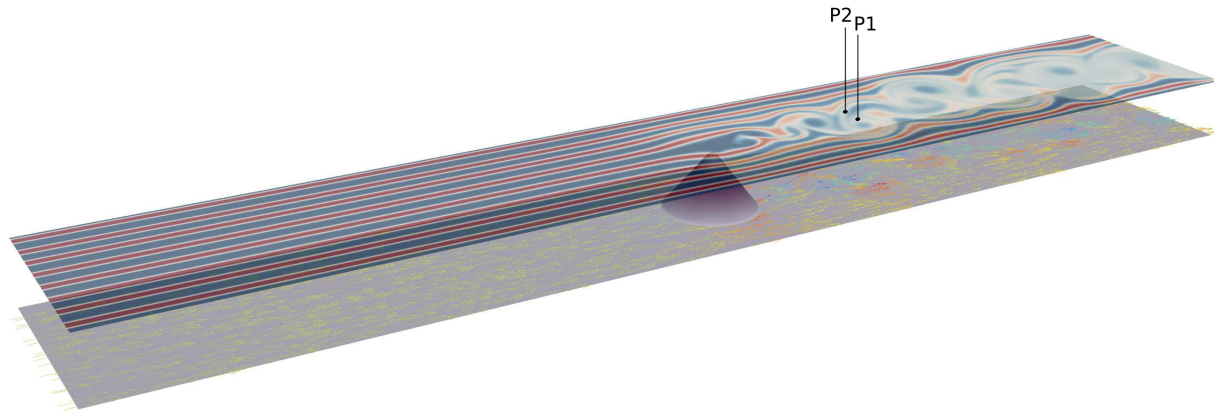
donde  $\mathbf{F}_{i_E}^{(k)}$  y  $\mathbf{F}_{(i+1)_W}^{(k)}$  son los flujos físicos a izquierda y derecha de la pared,  $\alpha^{(k)}$  es la proyección de la variación de las variables conservadas a través de la pared en la base de vectores propios del jacobiano,  $\beta^{(k)}$  es la proyección del término fuente en la base de vectores propios del jacobiano y  $\tilde{\lambda}^\pm$  y  $\tilde{\mathbf{e}}^m$  son los valores y vectores propios del jacobiano (Navas-Montilla y Murillo, 2016).

## RESULTADOS

En este apartado, el modelo de simulación descrito anteriormente se utiliza para reproducir un experimento de laboratorio. En 1997, Lloyd y Stansby (1997) llevaron a cabo distintos experimentos que involucraban un flujo de aguas poco profundas sobre islas cónicas de baja pendiente con diferentes geometrías y relación entre la altura de la isla y el calado. Pese a la simplicidad de la geometría y de las condiciones de contorno (flujo estacionario y uniforme), el flujo aguas abajo de la isla adquiriría una gran complejidad debido a la inestabilidad hidrodinámica que aparecía tras la misma. Se observó la aparición de una calle de vórtices aguas abajo de la isla, así como una fuerte mezcla vertical en torno al vértice de la misma. A pesar de que los vórtices aguas abajo de la isla eran casi bidimensionales, se comprobó que el origen de los mismos estaba ligado al movimiento vertical en el vértice de la isla. Por lo tanto, estos experimentos representan un reto para modelos de simulación bidimensionales hidrostáticos.

En esta sección se considera el montaje experimental SB4\_02 en (Lloyd y Stansby, 1997), formado por una isla cónica situada a 5 m de la entrada del canal. Las dimensiones del canal son 9.75 m de longitud y 1.52 m de anchura y las condiciones del

flujo en este caso test son  $u=0.115$  m/s y  $h=0.054$  m, con un número de Reynolds de 6210. La isla se encuentra completamente sumergida, con una ratio entre el calado y la altura de la isla de 1.1. Este caso test se incluye en el conjunto de casos planteados para el *Mapping & Modeling Benchmarking Workshop* (NTHMP), como caso de validación para modelos de simulación de tsunamis (NTHMP, 2015).



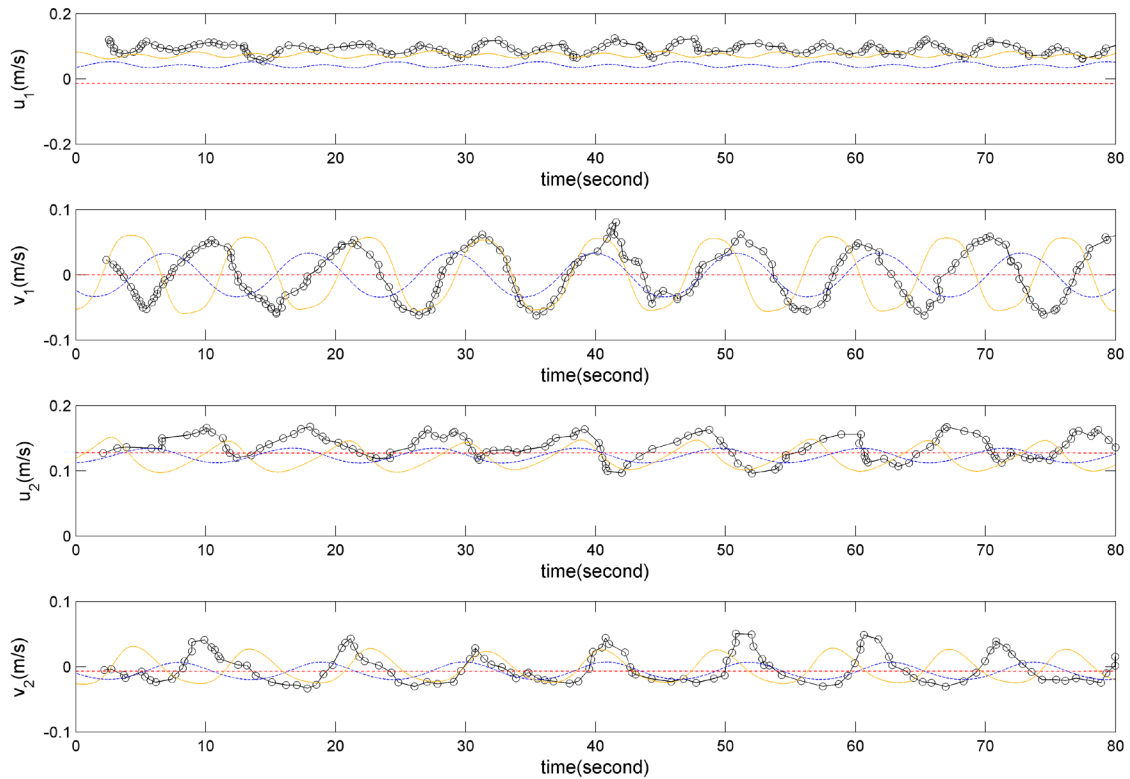
**Figura 4** | Configuración del caso test y localización de los puntos de medición P1 y P2.

El objetivo fundamental de este caso test es evaluar la habilidad del modelo para reproducir la región de separación observada aguas abajo de la isla, así como la calle de vórtices periódicos. Se dispone de medidas de la componente longitudinal y transversal de la velocidad en dos puntos aguas abajo de la isla, denotados por P1 y P2. El primero, P1, se sitúa en el eje longitudinal del canal, 1.02 m detrás del centro de la isla. El segundo, P2, se sitúa en la misma coordenada  $x$  pero separado 0.27 m del eje longitudinal, en dirección transversal positiva. La localización de ambos puntos en el dominio de cálculo se muestra en la figura 4.

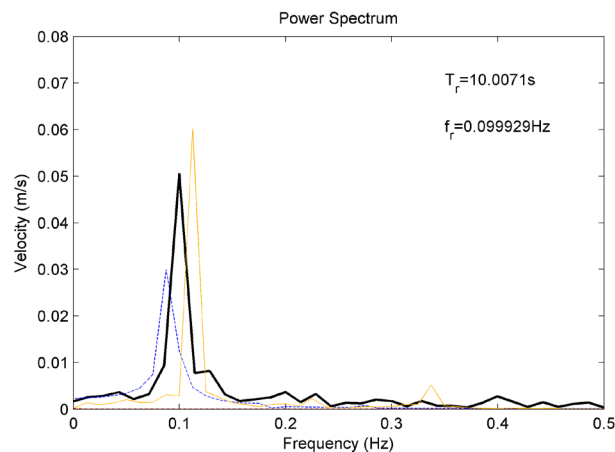
Para la simulación de este problema se utilizará el esquema ARoe WENO-ADER, descrito en este texto, en su versión de orden 1 (que se reduce al esquema ARoe tradicional de primer orden) y orden 3. El dominio computacional se define como  $\Omega=[0,9.75]\times[0,1.52]$  m y el tiempo de simulación se fija a  $t=400$  s, que es suficiente para el desarrollo estable de la calle de vórtices aguas abajo de la isla. La fricción con el fondo se modela mediante un coeficiente de Manning de  $n=0.011$  s/m<sup>1/3</sup>. En lo que respecta a las condiciones de contorno, se impone el caudal aguas arriba y el calado aguas abajo, utilizando las variables características. Las paredes laterales del canal se consideran sin fricción.

Para el esquema numérico de orden 1, la solución se calcula utilizando tres mallas cartesianas (celdas cuadradas) distintas con tamaños de celda  $\Delta x=0.0152$ ,  $\Delta x=0.0076$  y  $\Delta x=0.0038$  m. El coeficiente de difusión turbulenta se fija a cero, ya que de otro modo es imposible reproducir el desprendimiento de vórtices a menos que se utilicen mallas muy finas (computacionalmente nada eficiente). En la figura 5 se muestra una comparación de las velocidades medidas y calculadas en P1 y P2, observándose que para este esquema de primer orden la dependencia de la solución con la malla es muy elevada. Cuando se utiliza la malla con  $\Delta x=0.0152$  m, la difusión numérica es tan alta que la solución obtenida es completamente estacionaria. Al refinar la malla, es posible capturar el desprendimiento de vórtices, cuya frecuencia depende del nivel de refinamiento. La figura 6 muestra el espectro en frecuencia de la oscilación de la velocidad transversal en P1, calculado mediante el algoritmo de la transformada de Fourier rápida (FFT). Se ha utilizado una frecuencia de muestreo de 20 Hz (200 puntos por cada período de oscilación). En esta figura se observa también la fuerte dependencia con la malla de la frecuencia de la oscilación de la velocidad transversal en P1.





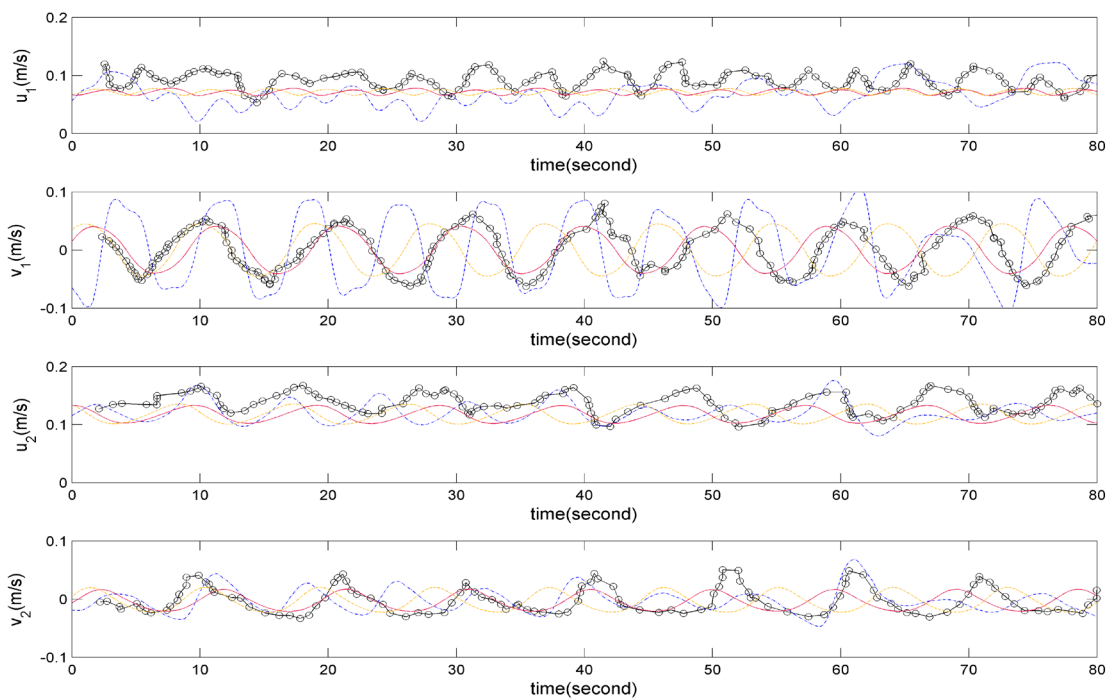
**Figura 5** | Velocidades numéricas ( $\Delta x=0.0152$  en rojo, línea de guiones y puntos,  $\Delta x=0.0076$  en azul, línea de guiones y  $\Delta x=0.0038$  en naranja, línea continua) y experimentales en P1 y P2.



**Figura 6** | Espectro de la señal de la velocidad  $v$  en P1 numérico ( $\Delta x=0.0152$  en rojo, línea de guiones y puntos,  $\Delta x=0.0076$  en azul, línea de guiones y  $\Delta x=0.0038$  en naranja, línea continua) y experimental (negro).

Ahora, se reproduce esta misma configuración aumentando el orden del esquema numérico a 3. En las figuras 7 y 8 se muestra una comparación de la solución experimental con la proporcionada por el esquema de tercer orden ARoe WENO-ADER. La solución se calcula en una malla con  $\Delta x=0.0076$  m utilizando distinta configuración del modelo de turbulencia. Esta malla proporciona un buen compromiso entre coste computacional y precisión. Se utilizan tres calibraciones distintas: C1, con  $\lambda=0$  y  $\beta=0$ ,

C2, con  $\lambda=0.6$  y  $\beta=0.1$  y C3, con  $\lambda=2.0$  y  $\beta=0.1$ . Para mostrar que la solución calculada con el esquema de tercer orden es muy poco dependiente de la malla, se presenta la solución numérica para la velocidad transversal en P1 calculada en tres mallas distintas ( $\Delta x=0.0152$ ,  $\Delta x=0.0076$  y  $\Delta x=0.0038$  m) en la figura 9. Se puede observar que, en la malla intermedia y en la fina, el error difusivo es inapreciable y el dispersivo también es muy pequeño, a diferencia de lo observado en los resultados del esquema de primer orden (Figuras 5 y 6). En la figura 9, los valores máximos de la oscilación de la velocidad transversal son  $v_{max}=0.04054$ ,  $v_{max}=0.04521$  y  $v_{max}=0.04604$  m/s, para las mallas de  $\Delta x=0.0152$ ,  $\Delta x=0.0076$  y  $\Delta x=0.0038$  m respectivamente. Un análisis cuantitativo de convergencia de malla utilizando el método de extrapolación de Richardson (Roache, P.J., 1998) permite calcular el valor asintótico  $v_{max,0}=0.046219$  m/s, que se observa muy cercano a los valores de la malla intermedia y fina. El índice de convergencia de malla (GCI) asociado a estas dos últimas mallas, calculado con un factor de seguridad 1.25 (Roache, P.J., 1998), es  $GCI=0.48\%$ . Por tanto, se puede afirmar que la malla intermedia y la malla fina se encuentran en la región asintótica de convergencia. Es por ello que se ha escogido la malla intermedia ( $\Delta x=0.0076$  m) para las simulaciones, que requiere un menor coste computacional.

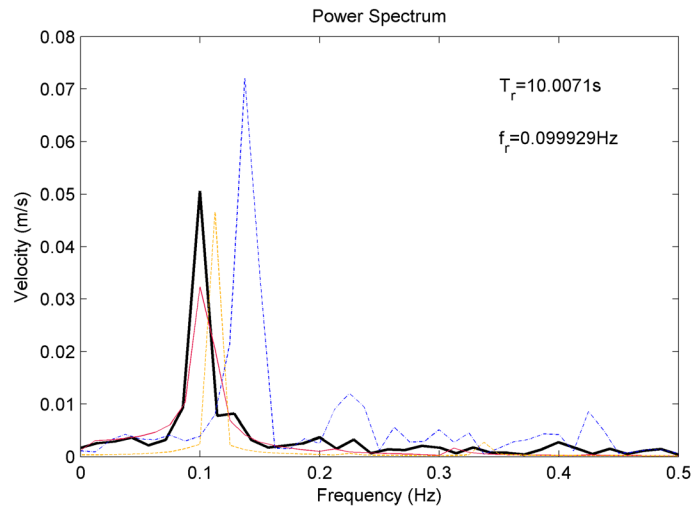


**Figura 7** | Velocidades numéricas (C1 en azul, línea de guiones y puntos, C2 en naranja, línea de guiones y C3 en rojo, línea continua) y experimentales en P1 y P2.

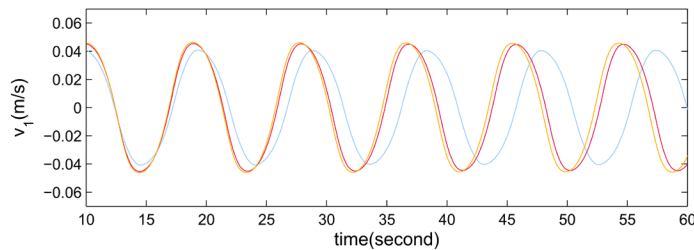
En la figura 10 se presenta la distribución de vorticidad en el dominio en el instante final, así como las líneas de corriente y el transporte de un trazador pasivo inyectado a la entrada, calculado con la configuración C3. Se puede ver que la calle de vórtices formados aguas abajo de la isla es estable y uniforme. El transporte del trazador pasivo se realiza incorporando una ecuación de transporte adicional al modelo. El esquema numérico de transporte para dicha variable se basa en el uso de los flujos numéricos calculados por el *solver* hidrodinámico, detallado en el apartado anterior.

Los resultados numéricos muestran que al aumentar la magnitud del coeficiente de calibración de la componente tridimensional de difusión turbulenta ( $\lambda$  en la ecuación 5), es posible reducir la frecuencia de desprendimiento de vórtices. Esto permite calibrar el modelo para reproducir las medidas experimentales. Cuando se utiliza la configuración C3, se reproduce la frecuencia observada en el experimento. Por otro lado, cuando no se utiliza modelo de turbulencia (C1) es imposible reproducir los resultados experimentales ya que la frecuencia de desprendimiento de vórtices proporcionada por el modelo es muy elevada.

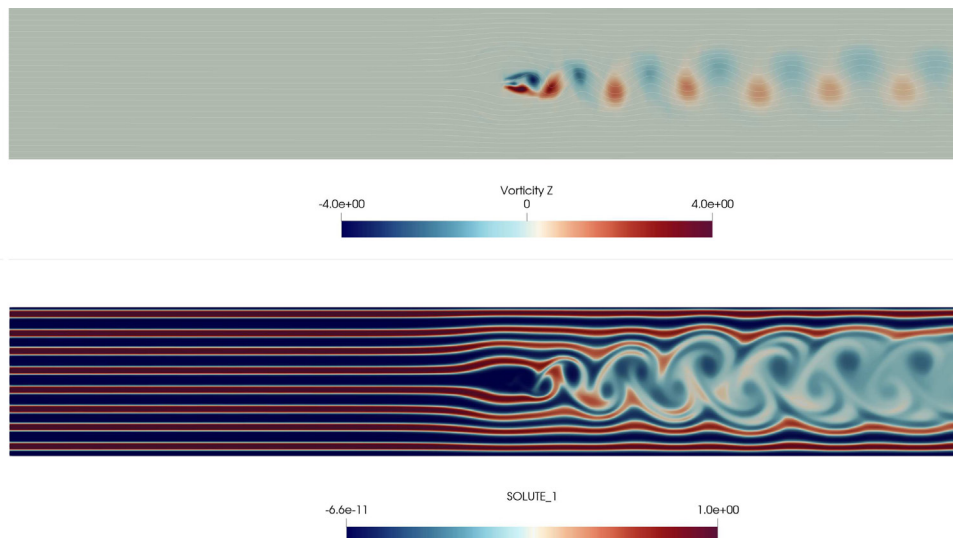
Cabe destacar que la configuración C3 reproduce con precisión la frecuencia de desprendimiento de vórtices, pero la amplitud de la oscilación de la velocidad queda ligeramente subestimada.



**Figura 8** | Espectro de la señal de la velocidad  $v$  en P1 numérico (C1 en azul, línea de guiones y puntos, C2 en naranja, línea de guiones y C3 en rojo, línea continua) y experimental (negro).



**Figura 9** | Solución numérica para la velocidad transversal con distintas mallas calculada con ARoe WENO-ADER 3 y configuración C3 ( $\Delta x = 0.0152$  en azul,  $\Delta x = 0.0076$  en rojo y  $\Delta x = 0.0038$  en naranja).



**Figura 10** | Vorticidad y líneas de corriente en  $t=400$  s (superior) y concentración de un trazador pasivo (inferior). Configuración C3.

## DISCUSIÓN

El modelo de simulación URANS que se propone en este trabajo, basado en la metodología WENO-ADER, se ha validado utilizando un caso test que involucra un flujo de aguas poco profundas sobre una isla cónica sumergida. La solución numérica se ha calculado utilizando el esquema de primer y tercer orden, mostrando que solamente cuando se escoge un orden elevado (en este caso, orden 3), la dependencia con la malla de la solución numérica se reduce lo suficiente. La solución proporcionada por el esquema de primer orden presenta un elevado error numérico, requiriendo una malla muy fina, lo que es generalmente inabordable. En el caso test aquí considerado, la elevada dependencia con la malla de la solución de primer orden se manifiesta en forma de un elevado error difusivo y dispersivo. La frecuencia de desprendimiento de vórtices varía conforme se refina la malla. Por otro lado, cuando se escoge el esquema de orden 3, el error numérico en esas mismas mallas es muy pequeño, haciendo posible utilizar la malla intermedia ( $\Delta x=0.0076$  m). La región asintótica del error se alcanza para mallas con tamaños de celda mucho mayores que en el caso de utilizar esquemas de primer orden. Esta reducida dependencia con la malla de la solución numérica (observada en la figura 9 y en el análisis cuantitativo mediante la extrapolación de Richardson) permite encontrar una calibración única, es decir, independiente de la malla, que se ajuste a las medidas experimentales, y que en este caso se identifica como C3. Se observa que utilizando la calibración C3, el modelo numérico reproduce adecuadamente la frecuencia de desprendimiento de vórtices. Por otro lado, la amplitud de la oscilación de la velocidad proporcionada por el modelo es ligeramente inferior a la observada en el experimento. Esta discrepancia probablemente esté relacionada con la fuerte tridimensionalidad del flujo detrás del vértice de la isla, así como con variaciones sobre el perfil vertical de velocidad aguas abajo de la isla. Utilizando una corrección de presión no hidrostática y términos dispersivos que tengan en cuenta el efecto de la variación de los perfiles de velocidad, se conseguirían resultados de mayor precisión.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se describe un procedimiento para la construcción de un modelo de simulación URANS para flujos turbulentos de aguas poco profundas en los que la turbulencia es predominantemente horizontal. El modelo matemático considerado son las ecuaciones de aguas poco profundas con términos fuente de fondo y fricción, así como con términos de difusión turbulenta. El modelo de turbulencia considera la modelización de la turbulencia 3D no resuelta, así como una componente que modela la turbulencia 2D en el rango de escalas horizontales no resueltas. Por lo general, se observa que esta segunda componente no es muy relevante. Además, para un ajuste fino de la misma en el que se determine con exactitud el rango de escalas no resueltas, sería necesario realizar un análisis exhaustivo de dispersión-difusión del esquema utilizado, idea que se explorará en el futuro.

El modelo numérico considerado se basa en la reconstrucción WENO y la integración temporal ADER, ambas de orden arbitrario. En este trabajo se consideran métodos hasta orden 3. Para garantizar el balance exacto entre flujos y términos fuente se utiliza el *solver* LFS, en particular el *solver* ARoe, que incluye el término fuente en la definición del problema de Riemann derivativo. Esta aproximación permite generar esquemas numéricos *well-balanced*.

Gracias a la combinación de los elementos anteriormente mencionados, el modelo de simulación que se propone permite obtener soluciones numéricas de alta precisión con mayor eficiencia que utilizando esquemas de menor orden, así como una dependencia de la solución con la malla muy reducida. Esto permite calibrar adecuadamente el modelo de turbulencia ya que la difusión numérica es prácticamente inapreciable. El modelo permite reproducir fenómenos turbulentos transitorios gracias a la aproximación URANS, como se observa en el test de validación. Además, el modelo considera ecuaciones de transporte extra que también se discretizan con el mismo orden de convergencia. Cabe destacar que gracias a la formulación de la fricción y la turbulencia a escala sub-celda, el modelo también se puede adaptar fácilmente para llevar a cabo simulación RANS tradicional. En el futuro, el modelo se complementará considerando una corrección de presión no hidrostática, así como términos dispersivos, con la finalidad de reproducir con mayor precisión flujos de lámina libre de más complejidad. Además, se estudiará la evolución de la difusión y dispersión numérica del esquema en función del número de onda para así realizar una mejor calibración del modelo de disipación de escala sub-celda o incluso evitar su utilización, si fuera posible.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación (proyecto PGC2018-094341-B-I00). También ha sido financiado por el Gobierno de Aragón (Referencia Grupo T32\_17R) y cofinanciado con Feder 2014-2020 “Construyendo Europa desde Aragón”. Los autores agradecen los comentarios constructivos, correcciones y observaciones de los revisores, que han ayudado a mejorar la calidad de este trabajo.

## REFERENCIAS

- George, D.L. 2008. Augmented Riemann solvers for the shallow water equations over variable topography with steady states and inundation, *Journal of Computational Physics*, 227, 3089-3113. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.10.027>
- Liu, X.D., Osher, S., Chan, T. 1994. Weighted essentially non-oscillatory schemes, *Journal of Computational Physics*, 115, 200-212. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187>
- Lloyd, P.M., Stansby, P.K. 1997. Shallow-water flow around model conical islands of small side slope. II: Submerged. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(12), 1068-1077. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1997\)123:12\(1068\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:12(1068))
- Murillo, J., García-Navarro, P. 2010. Weak solutions for partial differential equations with source terms: application to the shallow water equations, *Journal of Computational Physics*, 229, 4327-4368. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.02.016>
- Nadaoka, K., Yagi, H. 1998. Shallow-water turbulence modeling and horizontal large Eddy computation of river flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, 124, 493-500. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1998\)124:5\(493\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1998)124:5(493))
- Navas-Montilla, A., Murillo, J. 2016. Asymptotically and exactly energy balanced augmented flux-ADER schemes with application to hyperbolic conservation laws with geometric source terms, *Journal of Computational Physics*, 317, 108-147. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.04.047>
- Navas-Montilla, A., Murillo, J. 2018. 2D Well-balanced Augmented ADER schemes for the Shallow Water Equations with bed elevation and extension to the rotating frame, *Journal of Computational Physics*, 372, 316-348. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.06.039>
- Navas-Montilla, A., Juez, C., Franca, M.J., Murillo, J. 2019. Depth-averaged unsteady RANS simulation of resonant shallow flows in lateral cavities using augmented WENO-ADER schemes, *Journal of Computational Physics*, 395, 511-536. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.06.037>
- NTHMP. 2015. Mapping & Modeling Benchmarking Workshop, [http://coastal.usc.edu/currents\\_workshop/index.html](http://coastal.usc.edu/currents_workshop/index.html).
- Roache, P.J. 1998. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Albuquerque, New Mexico: Hermosa Publishers.
- Toro E.F., Titarev, V.A. 2002. Solution of the generalised Riemann problem for advection-reaction equations, *Proceedings of the Royal Society of London, A* 458, 271-281. <https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0926>
- Wu, W., Wang, P., Chiba, N. 2004. Comparison of five depth-averaged 2-D turbulence models for river flows, *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, 51, 183-200.