



**Universidad**  
Zaragoza

## Trabajo Fin de Grado

Muestreo eficiente de luces elípticas y su aplicación  
en rendering

Efficient sampling of elliptical lights and its  
application in rendering

Autor

David Márquez Calavia

Directores

Adrián Jarabo Torrijos

Ibón Guillén Serrano

Ponente

Diego Gutiérrez Pérez



# RESUMEN

El proceso de convertir la definición matemática de una escena, dada por una geometría, modelos de materiales, cámaras y fuentes de luz, en una imagen se denomina *renderizado*. Este es un proceso complejo, ya que requiere la simulación físicamente correcta de todas las interacciones de la luz con la materia.

Las técnicas más utilizadas para modelar el transporte de luz están basadas en métodos estocásticos (Monte Carlo), lo que resulta en ruido en la imagen final debido a la varianza introducida. Este ruido es debido a no muestrear adecuadamente los caminos lumínicos con una mayor contribución. Tener en cuenta la iluminación directa, e implementar un muestreo eficiente de las luces que la conforman, ayuda a explorar mejor estos caminos.

En este trabajo se presenta un método de muestreo para luces de área con forma elíptica mediante métodos de Monte Carlo. Para ello, generalizamos el algoritmo estado del arte de muestreo de luces con forma de disco circular [GUK<sup>+</sup>17], generando muestras de manera uniforme sobre el ángulo sólido proyectado en un punto por una elipse arbitrariamente orientada en la escena. Esto permite reducir considerablemente el ruido en la imagen con un menor tiempo de cálculo que otros métodos. Nuestro método ha sido implementado en el software open-source Mitsuba, y comparado contra otros métodos del estado del arte generalizados a elipses, resultando en una reducción significativa de la varianza.



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>3</b>
2.1. Ecuación de Render . . . . .	3
2.2. BSDF . . . . .	4
2.3. Método de Monte Carlo . . . . .	4
2.3.1. Mapeo de muestras aleatorias . . . . .	5
<b>3. Trabajo relacionado</b>	<b>7</b>
3.1. Luces puntuales . . . . .	8
3.2. Luces de área . . . . .	8
3.2.1. Muestreo con respecto del área . . . . .	9
3.2.2. Muestreo con respecto del ángulo sólido . . . . .	10
<b>4. Muestreo de luces elípticas</b>	<b>11</b>
4.1. Cálculo del ángulo sólido . . . . .	11
4.2. Muestreo del ángulo sólido . . . . .	15
<b>5. Resultados</b>	<b>18</b>
5.1. Métodos de base . . . . .	18
5.1.1. Muestreo por área . . . . .	18
5.1.2. Muestreo por rechazo . . . . .	18
5.2. Comparación entre métodos . . . . .	20
<b>6. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>30</b>
6.1. Conclusiones personales . . . . .	31
6.2. Diagrama temporal del proyecto . . . . .	31
<b>7. Bibliografía</b>	<b>32</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>35</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Existe una importante demanda de imágenes sintéticas realistas, debido a su presencia en producciones audiovisuales [FHF<sup>+</sup>17], visualización arquitectónica [KCK<sup>+</sup>18], programas de diseño gráfico y videojuegos. Para ello es necesario calcular físicamente el transporte de luz, incluyendo su emisión, todas las posibles interacciones de la luz con la materia y la detección por parte de un sensor de la energía incidente en este. Este proceso se modela mediante una integral definida con una dimensionalidad infinita, de la cual no existe una solución analítica eficiente salvo en escenas muy simples. La solución común se basa en modelar el transporte de luz como un proceso estocástico, de forma que se puede calcular usando el método de Monte Carlo. Esto permite resolver integrales numéricamente, asegurando la convergencia a la solución correcta incluso en integrales con dimensionalidad potencialmente infinita. No obstante, los resultados con muestras finitas pueden presentar error en forma de varianza.

Diversas técnicas existen para reducir ese error [RC99]; una de las más exitosas es el muestreo por importancia: técnicas de muestreo cuya distribución es lo más similar a la función que se va a integrar. Debido a su importancia a la hora de obtener resultados eficientemente, numerosas técnicas de muestreo por importancia han sido propuestas, incluyendo aquellas que modelan el perfil de emisión de luces de área, ya que un mal muestreo de las mismas introduce una gran cantidad de varianza. Si bien existen técnicas de muestreo eficiente para diversas luces de área, como luces triangulares [Jak10a], cuadrangulares [UFK13], esféricas [Wan92], compuestas por mallas de triángulos [Arv01] o discos [GUK<sup>+</sup>17], no existe demasiada investigación sobre las luces elípticas. Esto es interesante ya que cierto tipo de luces artificiales pueden ser modeladas como elipses; además de que una elipse representa una generalización de un disco (elipse con ambos semiejes del mismo tamaño). Por último, el muestreo eficiente de luces elípticas puede ser importante para ciertos algoritmos de iluminación global [DKH<sup>+</sup>14].

En este proyecto se ha desarrollado un método de muestreo con respecto del

ángulo sólido proyectado por una luz elíptica. Nuestro método es eficiente, elimina la singularidad introducida por métodos previos resultantes en varianza infinita, y es adecuado para su uso con secuencias de baja discrepancia [SJ17] cruciales para mejorar la convergencia de los métodos de Monte Carlo. Para mostrar el beneficio de nuestro método, generalizamos soluciones previas basadas en muestreo por área y *rejection sampling* [Gam16] a luces elípticas. Para ello, implementamos dichas técnicas en el software de render open-source *Mitsuba* [Jak10c], demostramos experimentalmente que nuestro método resulta en menor varianza que los métodos de referencia sin resultar en un overhead significativo. Nuestro método puede ser integrado directamente en cualquier sistema de render con soporte para luces de disco.

# Capítulo 2

## Marco teórico

La simulación del transporte de luz funciona de manera análoga a la fotografía. Las imágenes son generadas calculando la radiancia ( $W/m^2sr$ ) incidente proveniente de la escena en un sensor virtual. Para ello se precisa de calcular las interacciones que experimenta la luz en el medio desde su emisión por las fuentes de luz hasta que llega al sensor.

### 2.1. Ecuación de Render

El cálculo de la radiancia está definido por la Ecuación de Render [TK86], la cual formula que la radiancia incidente en un punto desde una dirección concreta es aquella reflejada proveniente de todas las direcciones en la hemiesfera de radio unidad con centro en el punto más la radiancia emitida desde dicho punto, como

$$L_o(x, w_o) = L_e(x, w_o) + \int_{\Omega} f_r(x, w_i, w_o) L_i(x, w_i) (w_i \cdot n) dw_i, \quad (2.1)$$

siendo  $L_o(x, w_o)$  la radiancia emitida desde  $x$  hasta  $w_o$ ;  $x$  la posición en el espacio;  $w_o$  la dirección de la radiancia saliente;  $L_e(x, w_o)$  la radiancia emitida en el punto  $x$  en la dirección  $w_o$ ;  $\Omega$  la hemiesfera de radio unidad con centro en el punto  $x$ ;  $f_r(x, w_i, w_o)$  la función bidireccional de distribución de la dispersión en  $x$  (*Bidirectional Scattering Distribution Function, BSDF*, ver Sección 2.2), que define cómo se refleja la luz en una superficie en función de la dirección de incidencia y dispersión;  $w_i$  la dirección de la radiancia incidente negada;  $L_i(x, w_i)$  la radiancia incidente al punto  $x$  desde la dirección  $w_i$ ;  $n$  la normal de la superficie; y  $w_i \cdot n$  la ley del coseno de Lambert, la cual establece que la intensidad de radiancia sobre una superficie es directamente proporcional a la intensidad de la fuente y al coseno del ángulo formado entre la dirección de radiancia incidente  $w_i$  y la normal de la superficie  $n$ . Por simplificar la Ecuación 2.1, no se han mencionado las parametrizaciones que representan la longitud de onda ni el tiempo. El



fenómeno del transporte de luz formulado es recursivo, ya que la evaluación del término  $L_i(x, w_i)$  vuelve a ser la Ecuación de Render.

## 2.2. BSDF

La función bidireccional de distribución de la dispersión (*Bidirectional Scattering Distribution Function*) define cómo la luz es reflejada en una superficie dadas una dirección entrante y saliente, lo cual define la apariencia de la superficie. Para que la función sea físicamente correcta debe cumplir el principio de conservación de la energía, por el cual la energía saliente debe ser igual o menor a la energía incidente y el principio de reciprocidad de Helmholtz, el cual establece que la evaluación de la dirección entrante y saliente en la BSDF puede invertirse sin verse afectado el resultado.

Dependiendo de la distribución de la energía se pueden clasificar las funciones en BSDF difusa, cuando la energía es distribuida uniformemente en todas las direcciones, o especulares, cuando la energía es concentrada alrededor de la dirección de salida. Un ejemplo del comportamiento de distintas BSDF puede apreciarse en la Figura 2.1.

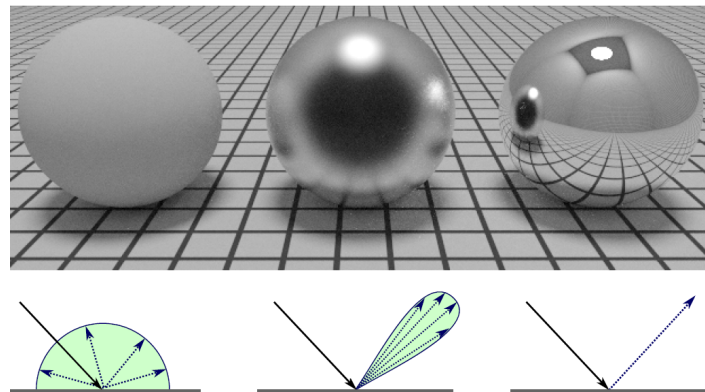


Figura 2.1: BSDFs modelando diferentes materiales: difuso puro o Lambertiano (izquierda), especular (centro) y especular perfecto (derecha). (Fuente [GS14])

## 2.3. Método de Monte Carlo

La resolución analítica de la Ecuación de Render no es posible en la gran mayoría de escenas, debido a la complejidad de las funciones que definen la geometría y materiales de la escena, así como por su naturaleza recursiva. Debido a esto, la integral puede ser resuelta empleando la integración estocástica por Monte Carlo [Owe13], una técnica muy apropiada para aproximar integrales en espacios con una dimensionalidad muy alta e incluso infinita. En concreto, el valor estimado  $I$  de la integral de una función

$f(s)$  de dimensionalidad  $D$  arbitraria con  $s \in R^D$  se aproxima como:

$$I = \int_{\Omega} f(\bar{s}) d\mu(\bar{s}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(\bar{s}_i)}{p(\bar{s}_i)}, \quad (2.2)$$

donde  $p(\bar{s}_i)$  representa la función de densidad de probabilidad o pdf (*probability density function*), la cual representa la probabilidad con la cual se ha tomado una muestra  $s$ , y  $N$  es el número de muestras usado para evaluar la integral. Nótese que para obtener la muestra  $D$ -dimensional  $s$  se pueden obtener consecutivamente, y puede dar lugar a pdfs condicionales.

Los métodos de Monte Carlo están garantizados de converger a la solución correcta con  $N \rightarrow \infty$ . Para un número finito de muestras, el error de la aproximación numérica es debido únicamente a la varianza del estimador, definida como:

$$V[I] = V \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(\bar{s}_i)}{p(\bar{s}_i)} \right] = \frac{1}{N} V \left[ \frac{f(\bar{s})}{p(\bar{s})} \right]. \quad (2.3)$$

Tal y cómo se deriva de Ecuación 2.3, la forma de minimizar la varianza del estimador sin aumentar el número de muestras es conseguir que  $V \left[ \frac{f(\bar{s})}{p(\bar{s})} \right]$  sea lo más cercana a cero, para lo cual se trata de obtener una pdf  $p(\bar{s})$  lo más similar posible a  $p(\bar{s}) \propto f(\bar{s})$ .

### 2.3.1. Mapeo de muestras aleatorias

De manera general, para cada una de las  $d$  dimensiones efectivas del dominio  $D$ , los métodos para la generación de números aleatorios devuelven valores en el intervalo  $[0, 1]$  distribuidos uniformemente, de manera que  $\xi = [0, 1]^d$ . Como el dominio de integración  $D$  no suele corresponderse con un cubo unidad, es necesario trasladar las muestras al dominio de integración, conservando la distribución uniforme de las mismas.

Esto se consigue invirtiendo la función de distribución acumulada o CDF (*cumulative distribution function*), que define con qué probabilidad una muestra aleatoria  $\varepsilon$ , perteneciente a la distribución  $\xi$  y distribuida según  $p(s)$ , se sitúe con un valor menor o igual a  $s$ ,

$$P(s) = P(\xi \leq s) = \int_{-\infty}^s p(s') d\mu(s'). \quad (2.4)$$

Invirtiendo la CDF y aplicándola sobre todos los elementos de una distribución canónica,

$$\xi' = P^{-1}(\xi = [0, 1]^D), \quad (2.5)$$

se obtiene una distribución proporcional a la CDF,  $\xi' \propto P(s)$ , lo que implica que las muestras están distribuidas con probabilidad  $p(s)$  sobre el dominio  $D$ .

Este método requiere disponer de una función de probabilidad invertible que defina el dominio de muestreo para poder ser aplicado.

Si no se posee una buena pdf, se pueden generar muestras sobre un dominio de integración arbitrario  $D$  aplicando *rejection sampling* [Owe13] (ver Sección 5.1.2), generando muestras sobre un dominio  $\hat{D}$  tal que  $D \subseteq \hat{D}$  y rechazando las que no estén dentro del dominio  $D$ .

En las Secciones 3.2 y 4.2 se explora más en profundidad el mapeo de muestras aleatorias.

# Capítulo 3

## Trabajo relacionado

En nuestro trabajo nos vamos a centrar en la iluminación directa desde fuentes de luz de área. Se denomina iluminación directa a la radiancia emitida por una fuente de luz que incide sobre un punto sin haber sufrido ninguna interacción con los elementos que conforman la escena; a diferencia de la iluminación indirecta, que es la que conforma la radiancia que ha interactuado con el medio y finalmente ilumina un punto.

Para el cálculo de la iluminación directa se lanza un *rayo de sombra* desde el punto hasta la fuente de luz, si éste no choca con ningún elemento de la escena, el punto está siendo iluminado directamente por la fuente de luz. En caso de que el punto este siendo iluminado directamente por la fuente de luz, se añade la contribución de ésta al punto. Este proceso se repite para un número aleatorio de luces en la escena, ya que es más eficiente que hacerlo para todas las luces existentes. Un diagrama de varias luces iluminando directamente un punto puede verse en la Figura 3.1. De este modo, la Ecuación de Render original se convierte en:

$$L_o(x, w_o) = L_e(x, w_o) + \sum_{l=0}^N \int_{\Omega_l} V(x \leftrightarrow l) f_r(x, w_{il}, w_o) L_{il}(x, w_{il}) (w_{il} \cdot n) dw_{il}, \quad (3.1)$$

donde  $l$  representa una luz de la escena, y  $N$  es el conjunto de luces,  $V(x \leftrightarrow l)$  es la función de visibilidad entre el punto  $x$  y la luz  $l$ ,  $L_{il}(x, w_{il})$  es la radiancia incidente al punto  $x$  desde la dirección  $w_{il}$  proveniente de la luz  $l$ ,  $\Omega_l$  es el ángulo sólido subtendido por la luz  $l$  y el resto de términos son los mismos que los explicados en la Ecuación 2.1.

Debida a la naturaleza estocástica del método de Monte Carlo, éste presenta ruido estadístico, o varianza, con un número limitado de muestras. Para reducir la varianza dado un tiempo de cálculo finito es importante encontrar estrategias de muestreo eficiente. De este modo, elegir una técnica adecuada para muestrear fuentes de luz con distinta geometría permite la obtención de imágenes más realistas.

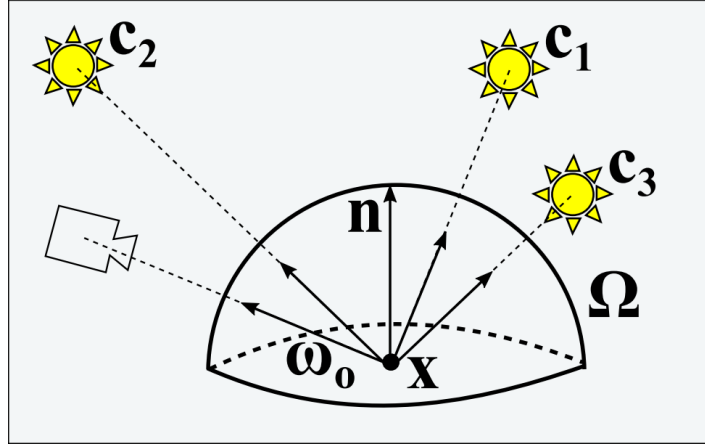


Figura 3.1: Tres fuentes de luz ( $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  iluminando directamente el punto  $x$ ,  $n$  representa la normal en el punto  $x$ ,  $w_o$  la dirección de la radiancia saliente,  $\Omega$  la hemisfera con centro  $x$  y los vectores  $c_1\vec{x}$ ,  $c_2\vec{x}$  y  $c_3\vec{x}$  la dirección de la radiancia incidente en  $x$ .

### 3.1. Luces puntuales

Una luz puntual es un punto en la escena que emite una cierta radiancia en todas las direcciones. Dado que es una luz puntual no tiene área, por lo que para conocer si está iluminando a un punto basta con trazar un rayo de sombra cuya dirección es el vector que va desde el punto hasta la luz puntual, y el origen es el punto a iluminar. Si dicho rayo no ha tenido ninguna intersección con algún objeto de la escena, la luz puntual está iluminando directamente el punto y se puede añadir su contribución. La contribución de la fuente de luz en un punto se calcula como:

$$L_i(x, w_i) = \frac{\phi}{|w_i|^2}, \quad (3.2)$$

donde  $L_i(x, w_i)$  representa la radiancia incidente al punto  $x$  desde la dirección  $w_i$ ,  $\phi$  la radiancia emitida por la luz puntual y  $|w_i|^2$  la distancia entre el punto y la luz puntual.

### 3.2. Luces de área

Se denomina luces de área a todo aquello que no sea una luz puntual, lo cual incluye luces rectangulares, esféricas, de disco o una luz compuesta por una malla de triángulos. Dado que la luz ahora posee área, existen infinitos puntos que pueden estar iluminando directamente el punto que se esté evaluando de la escena, por lo que es importante elegir una forma eficiente de obtener las posiciones dentro de la luz para averiguar si el punto está siendo iluminado directamente por esa posición.

### 3.2.1. Muestreo con respecto del área

El modo de evaluar si un punto de la escena está siendo iluminado directamente por la luz de área es similar al método empleado con las luces puntuales, se escoge aleatoriamente una punto dentro de la luz de área y se traza un rayo desde ahí hasta el punto a evaluar, si no existe ninguna intersección del rayo de sombra con algún elemento de la escena, el punto está siendo iluminado directamente por la posición muestreada de la luz de área. En caso de estar iluminando directamente, se pasa a añadir la contribución, la cual habrá que dividirla por su *pdf* (Ecuación 3.5). Siendo la contribución:

$$L_i(x, w_i) = \frac{\phi}{|w_i|^2} (n_l \cdot w_i), \quad (3.3)$$

donde  $L_i(x, w_i)$  representa la radiancia incidente al punto  $x$  desde la dirección  $w_i$ ,  $\phi$  la radiancia emitida por la luz de área,  $|w_i|^2$  la distancia entre el punto y la luz y  $n_l$  la normal de la luz de área. Además, la Ecuación 3.3 transforma la integral definida sobre todas las direcciones a una integral definida sobre todos los puntos de la superficie de la fuente de luz. Esto se consigue cambiando la medida de integración desde el diferencial del ángulo sólido  $d\mu_\Omega(\vec{w})$  al diferencial del área  $d\mu_A(y)$ , mediante el factor:

$$d\mu_\Omega(\vec{w}) = \frac{n \cdot -\vec{w}}{|w_i|^2} d\mu_A(y), \quad (3.4)$$

siendo  $y$  un punto en la superficie de la fuente de luz en dirección de  $\vec{w}$ ,  $n$  la normal en el punto y  $|w_i|^2$  el cuadrado de la distancia entre el punto en la fuente de luz y el punto sobre el cual se está calculando la iluminación. Esta ecuación produce una singularidad cuando el punto a iluminar y la fuente de luz están muy cerca, de tal manera que si la distancia  $|w_i|^2$  entre ambos es menor a 1 se está produciendo un aumento de la radiancia incidente en ese punto.

Por último falta conocer la expresión que define la *pdf*, la cual es:

$$p(w) = \frac{1}{A}, \quad (3.5)$$

donde  $A$  es el área de la luz.

Dado que el proceso anterior se va a repetir muchas veces debido al método de Monte Carlo (ver Sección 2.3), es importante elegir una forma de muestrear la luz de área que consiga una distribución uniforme en la superficie de la luz, con el fin de reducir la varianza. Para ello, se consigue un mapeo entre el cuadrado unidad canónico  $[0, 1]^2$ , y la geometría de la luz. Entre otros, se han desarrollado mapeos para triángulos [Jak10a], rectángulos y discos [SC97].

### 3.2.2. Muestreo con respecto del ángulo sólido

Alternativamente al muestreo por área, se puede muestrear la proyección del ángulo sólido  $\Omega$  de la superficie de la luz de área sobre el punto en el que se está calculando la iluminación. Esto se aproxima mejor a la distribución del ángulo sólido proyectado seguida por la radiancia. Se puede ver un ejemplo en la Figura 3.2 del ángulo sólido subtendido por una elipse. Además, la evaluación de la forma direccional de la integral de la iluminación de la Ecuación 2.1 no contiene la singularidad de la distancia al cuadrado entre la luz y el punto a iluminar, lo cual resulta en una varianza menor.

En éste método se genera una dirección de manera uniforme dentro del ángulo sólido subtendido por la luz de área sobre la esfera de radio unidad con centro en el punto donde se está evaluando la iluminación directa. La dirección muestreada se corresponderá con un punto en la luz, y si ese rayo de sombra no sufre ninguna intersección, el punto de la luz está iluminando directamente al punto en la escena. En este caso, la *pdf* es:

$$p(w) = \frac{1}{\Omega}, \quad (3.6)$$

siendo  $\Omega$  el ángulo sólido subtendido por la luz de área.

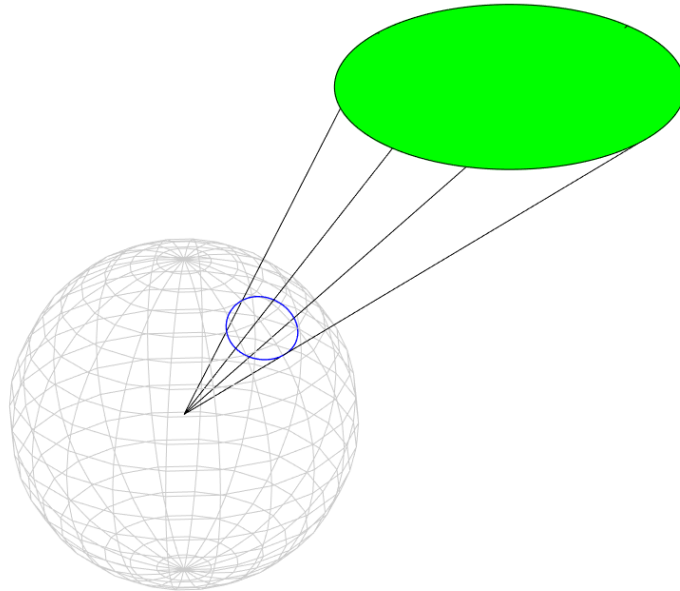


Figura 3.2: Ángulo sólido (en azul) subtendido por una elipse (en verde) sobre la esfera de radio unidad.

Se han desarrollado diferentes métodos para muestrear uniformemente con respecto del ángulo sólido distintas formas de luces de área, incluyendo triángulos [Arv96], rectángulos [UfK13] y discos [Gam16, GUK<sup>+</sup>17].

# Capítulo 4

## Muestreo de luces elípticas

El objetivo de este nuevo método es mapear muestras aleatorias distribuidas uniformemente (Subsección 2.3.1) en direcciones contenidas dentro del ángulo sólido de la elipse, de modo que esas direcciones se corresponderán más adelante a posiciones dentro de la luz elíptica (véase Figura 4.1), lo cual resulta en una menor varianza en la solución final, ya que la distribución de muestras es más similar a la función a integrar en comparación a otros muestreos. Para ello se necesita conocer el ángulo sólido, lo cual se puede obtener por diversos métodos. La proyección en ángulo sólido de una elipse es una elipse esférica, de la cual se debe conocer su área, ya que permite calcular la *pdf* que se empleará para calcular la contribución de la luz elíptica, la cual se corresponde con:

$$p(w) = \frac{1}{\Omega}, \quad (4.1)$$

siendo  $\Omega$  el ángulo sólido que abarca la elipse en la esfera de radio unidad.

### 4.1. Cálculo del ángulo sólido

Basándose en que la proyección en ángulo sólido de una elipse sobre la esfera de radio unidad es una elipse esférica, como puede verse en la Figura 4.1, se puede aplicar el método de Guillén [GUK<sup>+</sup>17] para calcular el ángulo sólido subtendido por ésta. Sin embargo, esto solo está implementado para calcular el ángulo sólido subtendido por un disco circular, debido a que su proyección en ángulo sólido también se corresponde con una elipse esférica. Es por esto que hay que realizar algunas transformaciones para poder aplicarlo. Para ello, hay que obtener una elipse tangente a la esfera de radio unidad, la cual subtienda el mismo ángulo sólido que la elipse arbitraria y que la elipse esférica.

Esto es posible siguiendo el método propuesto por Heitz [Hei17b] para obtener elipses cuyo centro está alineado con el de la elipse esférica y con el centro de la esfera,



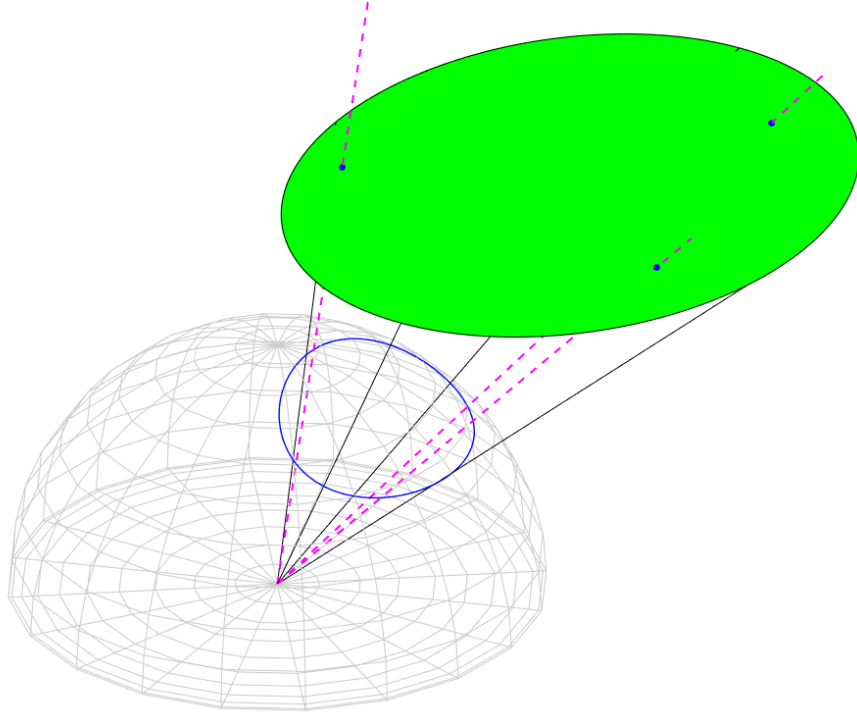


Figura 4.1: Ejemplo del método desarrollado. Dada una elipse arbitraria (en verde), se muestrean sobre su ángulo sólido subtendido (en azul) direcciones (en rosa discontinuo) uniformemente, las cuales se corresponden a posiciones (puntos azules) en la elipse.

las cuales se denominan *front-facing ellipses*. Aunque el método es capaz de obtener cualquier *front-facing ellipse*, para conseguir el ángulo sólido se necesita solo aquella elipse que sea tangente a la esfera de radio unidad. Un ejemplo de una *front-facing ellipse* se puede ver en la Figura 4.2.

Para simplificar las ecuaciones se asume que el punto a iluminar está situado en origen de coordenadas ( $O = \{0,0,0\}$ ). La elipse arbitraria posee un centro  $C$ , dos semiejes de longitud  $l_x$  y  $l_y$  en dirección de los vectores normalizados  $V_x$  y  $V_y$ . La normal de la elipse es  $V_z$ , la cual cumple que  $V_z = V_x \times V_y$ , de modo que los ejes forman una base ortonormal. Esto puede verse en la Figura 4.2. En la base recién explicada, el centro de la elipse se corresponde con:

$$x_c = C \cdot V_x, \quad (4.2)$$

$$y_c = C \cdot V_y, \quad (4.3)$$

$$z_c = C \cdot V_z. \quad (4.4)$$

Tomando el plano  $z$  como el plano de la elipse ( $z = z_c$ ), la ecuación que define la elipse es:

$$\left(\frac{x - x_c}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{y - y_c}{l_y}\right)^2 \leq 1, \quad (4.5)$$

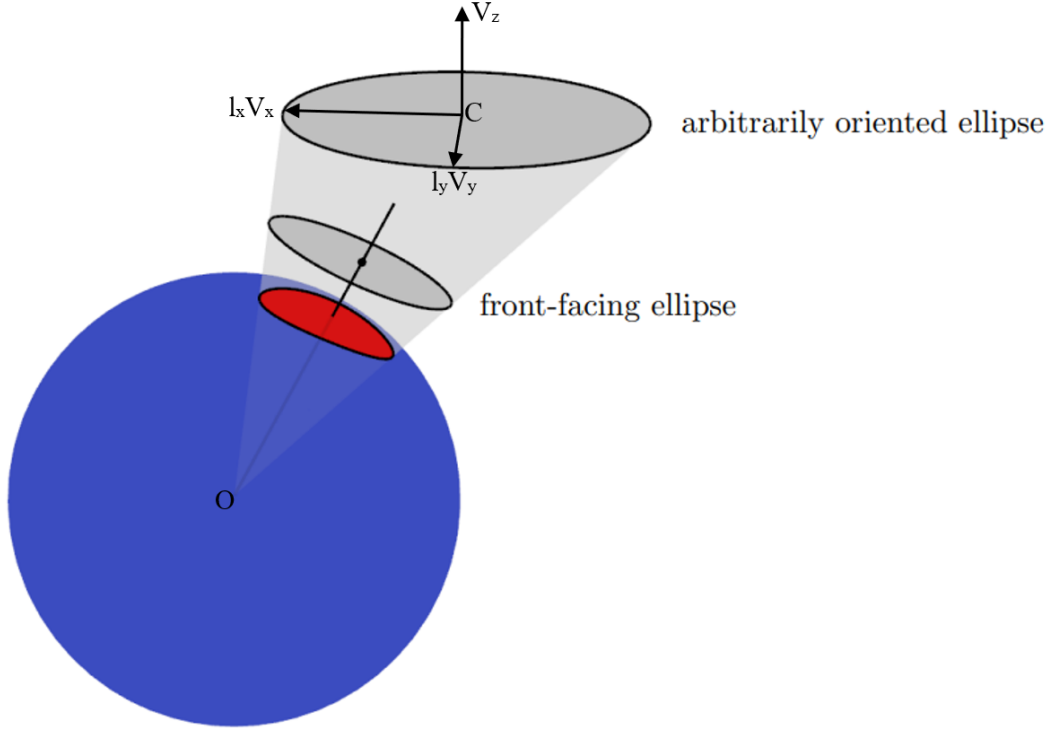


Figura 4.2: Ángulo sólido (en rojo) subtendido por una elipse arbitrariamente orientada (*arbitrarily oriented ellipse*) y una *front-facing ellipse* que subtiende el mismo ángulo sólido. La arbitrariamente orientada posee semiejes de longitud  $l_x$  y  $l_y$ , en dirección de los vectores normalizados  $V_x$  y  $V_y$ , respectivamente, normal  $V_z$  y centro  $C$ .  $O$  es el punto a iluminar. (Fuente [Hei17b])

donde aquellos  $x$  e  $y$  que cumplan la ecuación serán puntos que pertenecen a la elipse arbitrariamente orientada.

A partir de la ecuación anterior, si se toma  $(x, y, z)$  como un punto en la esfera, Heitz desarrolla las siguientes ecuaciones para conseguir una ecuación que define un cono elíptico, donde la elipse arbitraria es una sección dada por un plano y el cono elíptico.

$$\left(\frac{xz_c - x_c}{z l_x}\right)^2 + \left(\frac{yz_c - y_c}{z l_y}\right)^2 \leq 1, \quad (4.6)$$

la cual se puede reescribir de la siguiente manera:

$$[x \ y \ z] Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

donde  $Q$  es igual a:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{z_c^2}{l_x^2} & 0 & -\frac{z_c}{l_x^2} x_c \\ 0 & \frac{z_c^2}{l_y^2} & -\frac{z_c}{l_y^2} y_c \\ -\frac{z_c}{l_x^2} x_c & -\frac{z_c}{l_y^2} y_c & \frac{x_c^2}{l_x^2} + \frac{y_c^2}{l_y^2} - 1 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Mediante la descomposición en valores y vectores propios de la matriz  $Q$  se obtiene el siguiente resultado:

$$Q = [V_1^+ \quad V_2^+ \quad V^-] \begin{bmatrix} e_1^+ & 0 & 0 \\ 0 & e_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & e^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ V^- \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

siendo  $V_1^+, V_2^+, V^-$  los vectores propios normalizados,  $e_1^+, e_2^+$  dos valores propios positivos y  $e^-$  el valor propio negativo.

Por último, se introduce el factor de escalado  $\lambda$ , el cual por definición ha de ser mayor que cero. Este parámetro representa a que distancia se encuentra la *front facing ellipse* del centro de la esfera, y dado que se necesita que sea tangente a dicha esfera, asignando a  $\lambda$  el valor 1 se asegura que la *front facing ellipse* sea tangente a la esfera de radio unidad. Además, la elipse tangente posee:

$$C' = \pm\lambda V^-, \quad (4.10)$$

$$a_t = \lambda \sqrt{\frac{-e^-}{e_1^+}} V_1^+, \quad (4.11)$$

$$b_t = \lambda \sqrt{\frac{-e^-}{e_2^+}} V_2^+, \quad (4.12)$$

donde  $a_t$  y  $b_t$  son las longitudes de los semiejes de la elipse tangente,  $V_1^+$  y  $V_2^+$  son los ejes normalizados y  $C'$  es el centro. Dado que la ecuación del cono elíptico es simétrica, existen dos elipses tangentes, una con centro  $C' = \lambda V^-$  y otra con centro  $C' = -\lambda V^-$ , por lo que se desecha aquella cuyo centro está más lejos del centro de la elipse arbitrariamente orientada. Un ejemplo de la elipse tangente se puede ver en la Figura 4.3.

Una vez se han obtenido los semiejes de la elipse tangente es posible utilizar el método de Guillén [GUK<sup>+</sup>17] para calcular el ángulo sólido subtendido por la luz elíptica arbitrariamente orientada, el cual es el mismo que el de la elipse tangente. Para ello es necesario conocer la proyección paralela en un plano perpendicular a su eje de los semiarcos de la elipse esférica, los cual se pueden obtener a partir de los semiejes de la elipse tangente mediante la siguiente relación:

$$\alpha = \arctan a_t, \quad (4.13)$$

$$\beta = \arctan b_t, \quad (4.14)$$

$$a = \sin \alpha = \frac{a_t}{\sqrt{a_t^2 + 1}}, \quad (4.15)$$

$$b = \sin \beta = \frac{b_t}{\sqrt{b_t^2 + 1}}, \quad (4.16)$$

donde  $a_t$  y  $b_t$  son los semiejes de la elipse tangente,  $\alpha$  y  $\beta$  son los semiarcos de la elipse esférica y  $a$  y  $b$  es la proyección paralela en un plano perpendicular su eje de los semiarcos de la elipse esférica. Para que el método funcione correctamente,  $a$  ha de ser mayor o igual que  $b$ , por lo que en caso de que no lo fuera, basta con intercambiar los valores. En la Figura 4.3 se puede ver una representación visual de estas variables.

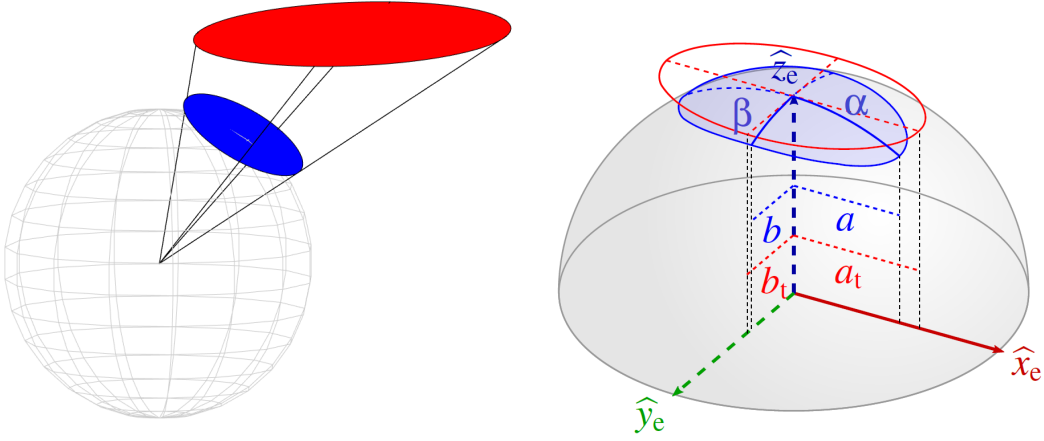


Figura 4.3: A la izquierda: elipse tangente (en azul) a la esfera de radio unidad que subtende el mismo ángulo sólido que una elipse arbitrariamente orientada (en rojo). A la derecha: elipse tangente (en rojo) y elipse esférica (en azul), así como la representación gráfica de las variables  $a_t$ ,  $b_t$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  y  $b$ .  $\hat{x}_e$  se corresponde con  $V_1^+$ ,  $\hat{y}_e$  con  $V_2^+$ , y  $\hat{z}_e = V_1^+ \times V_2^+$ . (Fuente [GUK<sup>+</sup>17])

Tras obtener  $a$  y  $b$ , se puede aplicar finalmente el método de Guillén [GUK<sup>+</sup>17] para calcular el ángulo sólido subtendido por la elipse esférica. Para ello, éste se basa en el teorema del cilindro de Arquímedes [oS], el cual declara que el área de una región en la esfera entre dos planos paralelos es igual al área de la proyección de esa región sobre un cilindro alineado que circunscribe a la esfera, y en particular, esta propiedad también se mantiene para regiones con una forma arbitraria en la esfera.

## 4.2. Muestreo del ángulo sólido

Como se ha explicado al principio de ésta sección, este método se basa en muestrear direcciones uniformemente sobre el ángulo sólido subtendido por la luz esférica, y estas

direcciones se corresponden posteriormente con puntos dentro de la luz elíptica. Puesto que no se conoce una solución para muestrear uniformemente direcciones dentro del cono elíptico, es necesario realizar una transformación de la elipse tangente a un disco que subtienda el mismo casquete esférico, muestrear el cono (donde el disco es la base del mismo), y transformar posteriormente esas direcciones a la elipse tangente y finalmente a la luz elíptica.

En la Sección 4.1 se ha conseguido una elipse tangente a la esfera de radio unidad, la cual subtiende el mismo ángulo sólido que la elipse arbitrariamente orientada. Dado que se conoce el ángulo sólido, se puede obtener a partir de éste un disco que subtienda el mismo casquete esférico que la elipse [Hei17a] mediante las siguientes relaciones:

$$h = \frac{\Omega}{2\pi}, \quad (4.17)$$

$$\theta = \arccos \frac{1 - \Omega}{2\pi} \quad (4.18)$$

$$r = \sqrt{2h - h^2} \quad (4.19)$$

$$r_D = \tan(\arcsin(r)), \quad (4.20)$$

siendo  $\Omega$  el área del casquete esférico,  $h$  su altura,  $\theta$  la apertura, es decir, el ángulo entre los rayos trazados desde el centro de la esfera hasta el polo y desde el centro de la esfera hasta el borde,  $r$  el radio y  $r_D$  el radio del disco que subtiende el mismo área que la elipse tangente. Esto se puede ver un casquete esférico en la Figura 4.4.

Una vez se tiene el disco que subtiende el mismo ángulo sólido que la elipse tangente (y por ende, la elipse arbitrariamente orientada), se pueden muestrear direcciones en el cono cuya base es el disco y el vértice es el centro de la esfera de manera uniforme empleando una técnica existente [Jak10b]. Ésta consiste en, dada una tupla aleatoria  $(r_1, r_2)$  perteneciente a  $[0, 1]^2$  realizar las siguientes operaciones:

$$a = (1 - r_1) + r_1 \cos \theta, \quad (4.21)$$

$$b = \sqrt{1 - a^2}, \quad (4.22)$$

$$c = \sin 2\pi r_2, \quad (4.23)$$

$$d = \cos 2\pi r_2, \quad (4.24)$$

$$w = \{d.b, c.b, a\}, \quad (4.25)$$

siendo  $\theta$  la apertura del casquete esférico, de este modo se obtiene una dirección  $w$  dentro del cono.

Dada la dirección muestreada, el punto a iluminar y el disco, se obtiene el punto donde colisiona el rayo con el disco [Ray17]. El punto en el disco se corresponde con

un punto en la elipse tangente, el cual se obtiene aplicando al punto en el disco un escalado correspondiente a la razón entre el semieje de la elipse y su radio para ambos semiejes. Esto puede observarse en la Figura 4.4.

Por último, es necesario conocer a qué punto de la elipse arbitraria corresponde el obtenido en la elipse tangente. Debido a que los ejes de ambas elipses no tienen por qué estar alineados no se puede aplicar una transformación como en el caso de pasar un punto del disco a la elipse tangente, por lo tanto, hay que obtener el punto de colisión entre el rayo que va desde el punto a iluminar hasta el punto  $x_t$  de la elipse tangente, con origen el punto a iluminar, y el plano en el que se encuentra la elipse arbitraria  $x_a$ . Este proceso puede verse en la Figura 4.4.

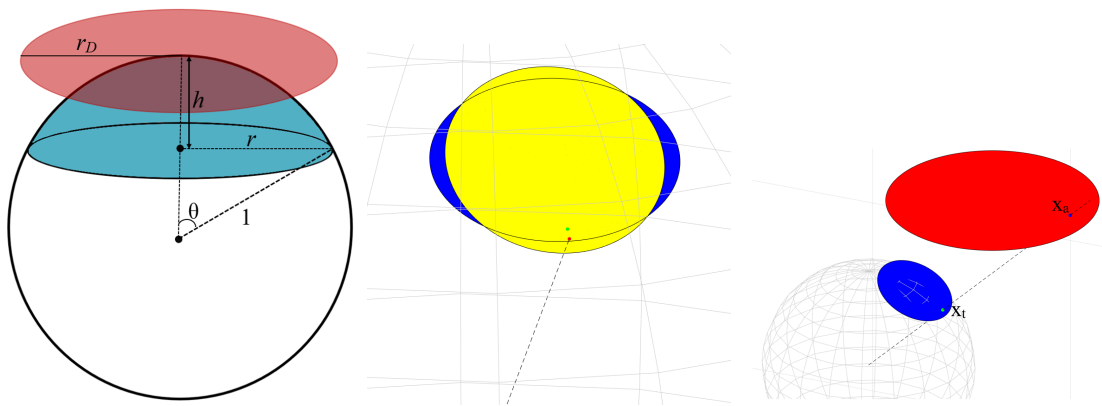


Figura 4.4: A la izquierda: casquete esférico (en azul) en una esfera de radio 1, donde  $h$  representa la altura del mismo,  $r$  su radio,  $\theta$  la apertura y  $r_D$  el radio de un disco (en rojo) que subtiende el mismo ángulo sólido que el casquete esférico. En el centro: elipse tangente (en azul), disco que subtiende el mismo ángulo sólido (en amarillo), punto (en rojo) correspondiente a la colisión de la dirección muestreada (línea discontinua negra) uniformemente sobre el cono y el disco y su posición equivalente en la elipse tangente (punto verde). A la derecha: intersección del punto  $x_t$  (en verde) obtenido en la elipse tangente (en azul) con la elipse arbitraria (en rojo) y el punto resultante  $x_a$  (en azul).

De este modo es posible muestrear las luces elípticas de manera uniforme con respecto de su ángulo sólido subtendido, lo cual introduce una menor varianza que otros métodos.

# Capítulo 5

## Resultados

El método presentado ha sido integrado en el software de renderizado basado en física *Mitsuba* [Jak10c] escrito en C++ y de código libre, junto con dos métodos más, con el fin de poder compararlos.

### 5.1. Métodos de base

Además del muestreo uniforme con respecto del ángulo sólido, se han adaptado dos técnicas ya existentes para el caso particular de la elipse. Estos dos muestreos son muestreo por área y muestreo por rechazo. Para ello, ha habido que añadir a *Mitsuba* una clase que defina elipses, dado que no existía. A partir de ahí, se han creado los métodos de detección de la colisión entre un rayo y una elipse; obtención de la *pdf*; muestreo de la luz elíptica, el cual es dependiente del tipo de muestreo que se quiera ejecutar (área, rechazo o ángulo sólido); así como otros métodos que emplea el render como una función de creación de mallas de triángulos, aproximando la geometría de la elipse para poder tener una previsualización en tiempo real de la misma.

#### 5.1.1. Muestreo por área

Adaptando un método existente [SC97] se pueden muestrear luces elípticas. Esto es posible ya que un punto en el disco puede ser mapeado a un punto correspondiente en la elipse, escalando cada coordenada del punto en el disco por la razón entre el semieje correspondiente a esa coordenada y el radio. Esto se puede ver en la Figura 5.1.

Esta aproximación, a pesar de ser correcta, presenta los problemas explicados en la Sección 3.2.1.

#### 5.1.2. Muestreo por rechazo

El último muestreo que se ha adaptado se basa en el trabajo de Gamito [Gam16], el cual se basa en inscribir un disco dentro de un cuadrado, del cual se conoce el

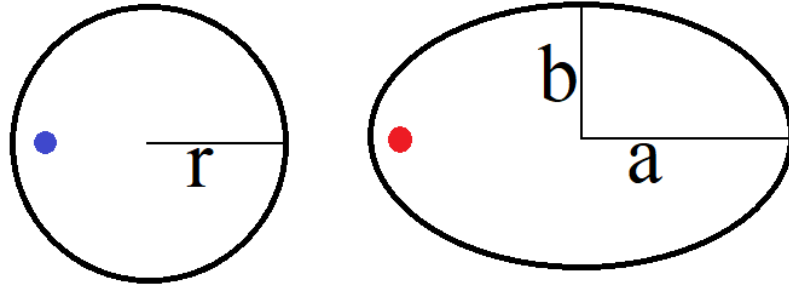


Figura 5.1: Mapeo entre un punto en el disco (en azul) y un punto en la elipse (en rojo), escalando cada coordenada del punto por el cociente entre el semieje ( $a$  y  $b$ ) correspondiente a esa coordenada y el radio ( $r$ ).

mapeo exacto por ángulo sólido [UFK13], y aplicar posteriormente *rejection sampling*, descartando aquellas muestras que caigan dentro del cuadrado pero fuera del disco. Esto se puede adaptar a elipses, circunscribiendo la elipse en un rectángulo cuyo lado mayor tiene la misma longitud que el semieje mayor de la elipse, y su lado menor, el del semieje menor. Se puede ver una representación de este método en la Figura 5.2. Para conocer si la muestra está dentro de la elipse se ha de aplicar la siguiente ecuación:

$$\frac{(p_x - c_x)^2}{a^2} + \frac{(p_y - c_y)^2}{b^2} \leq 1, \quad (5.1)$$

donde  $p_x$  y  $p_y$  son las coordenadas  $x$  e  $y$  del punto muestreado,  $c_x$  y  $c_y$  las coordenadas  $x$  e  $y$  del centro de la elipse, y  $a$  y  $b$  son los semiejes correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  de la elipse.

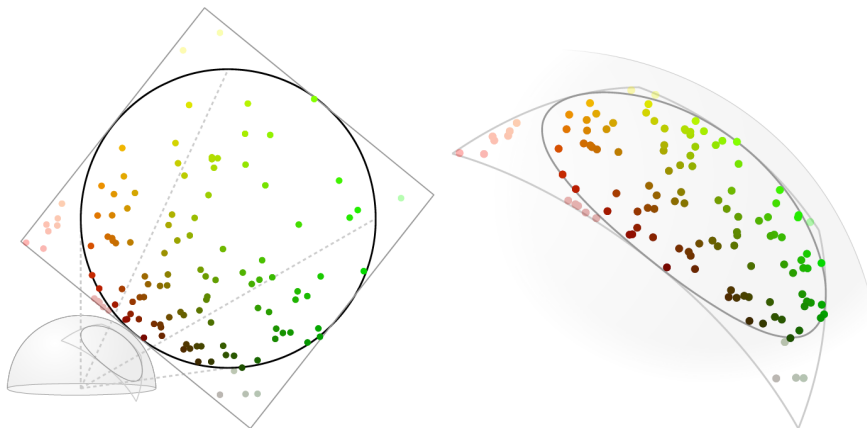


Figura 5.2: Mapeo de una elipse siguiendo el método de Gamito [Gam16]. Las muestras que no están dentro de la elipse no contribuyen al cálculo de la radiancia. A la izquierda, el mapeo de la superficie de la elipse, y a la derecha, el mapeo de la proyección sobre el ángulo sólido de la elipse. (Fuente [GUK<sup>+</sup>17])



## 5.2. Comparación entre métodos

En comparación al muestreo por rechazo o con respecto del área, el uso del método presentado supone un mayor coste computacional debido a las diferentes transformaciones y cálculos que precisa. No obstante, también implica una reducción notoria de la varianza respecto a los otros dos métodos señalados. Es por esto que el método de muestreo con respecto del ángulo sólido compensa el coste de generar una muestra con un requerimiento de muestras menor para generar una imagen con la misma calidad que cualquiera de los otros dos métodos, dado que la evaluación de la visibilidad de cada muestra supone la mayor parte del tiempo de ejecución en escenas complejas.

En la Figura 5.3 se muestra una escena simple, formada por el conejo de Stanford con una BSDF difusa, un plano y dos luces elípticas con excentricidad cero renderizada con MIS [Vea97], combinando el muestreo por BSDF y el de la fuente de luz, y con 131072 muestras por píxel. En las Figuras 5.4-5.7 se muestra la misma escena con un número de muestras por píxel creciente renderizadas empleando distintos métodos de muestreo, así como la diferencia en falso color de la escena con respecto de la imagen de referencia.

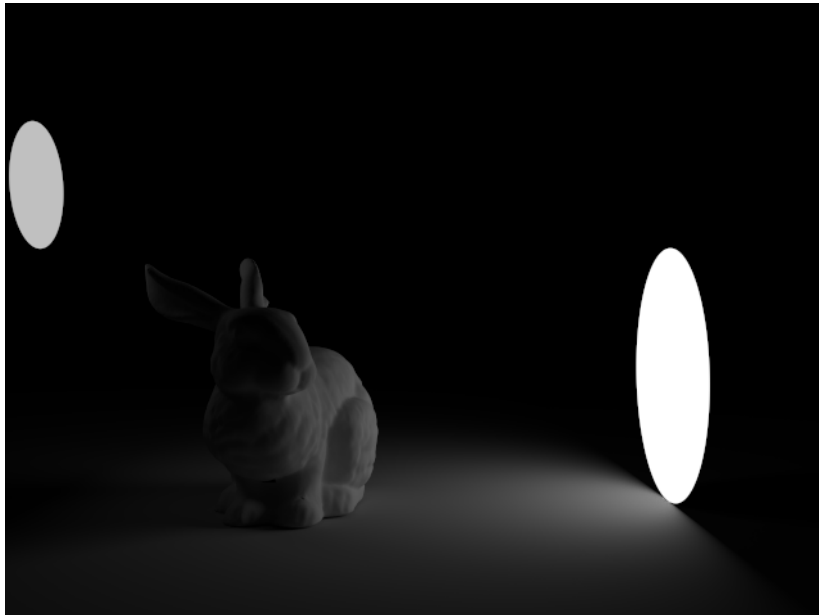


Figura 5.3: Escena simple formada por el conejo de Stanford con una BSDF difusa, un plano y dos luces de área elípticas con excentricidad cero, renderizada con MIS [Vea97] y 131072 muestras por píxel.

Se puede apreciar como el muestreo por área funciona peor en zonas cercanas al disco, debido a la división por el cuadrado de la distancia, que introduce singularidades al evaluar la contribución de la muestra. El muestreo por rechazo, aunque tiene un

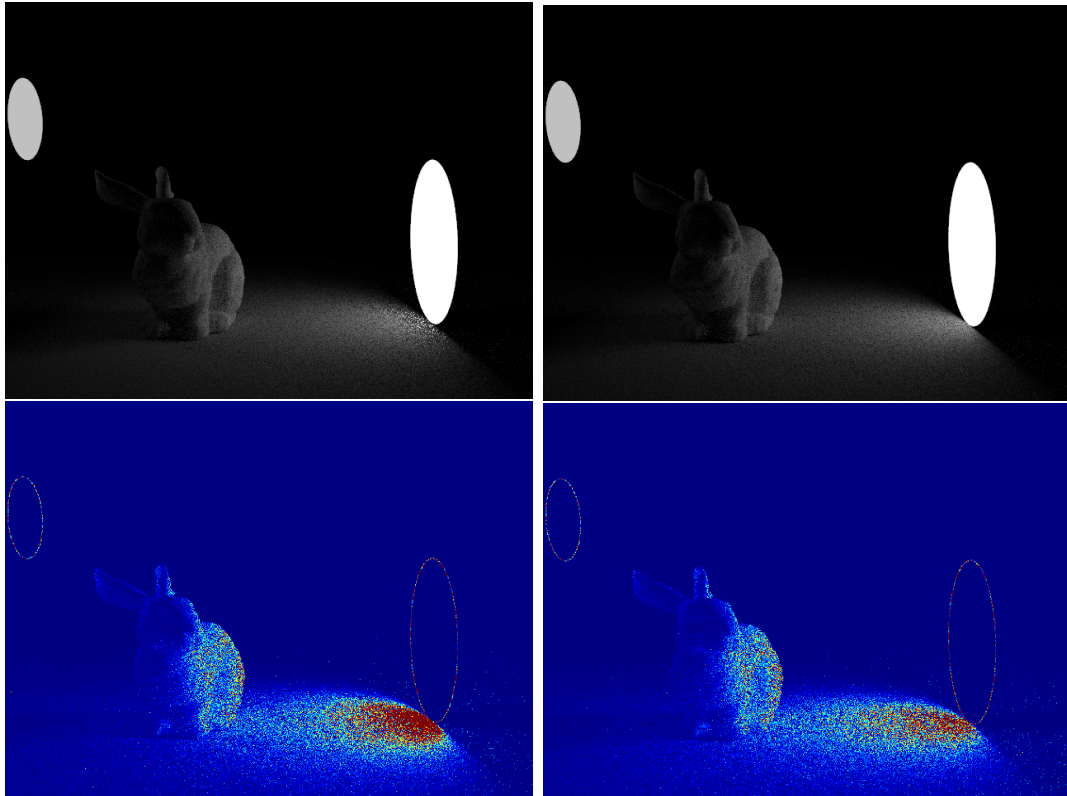
tiempo de cálculo similar al muestreo por ángulo sólido, supone una peor tasa de convergencia. Además, se ha añadido el mapeo concéntrico presentado por Guillén [GUK<sup>+</sup>17], para comparar un método de muestreo por ángulo sólido con el presentado en el trabajo.

La Figura 5.8 muestra una gráfica donde se compara el tiempo de renderizado que ha tardado cada uno de los cuatro métodos empleados para una cantidad de muestras por píxel crecientes.

La Figura 5.9 muestra las curvas de convergencia de los métodos comparados para la escena con el conejo de Stanford, donde se puede apreciar como los métodos de muestreo por ángulo sólido presentan un menor error inicial, así como una mejor convergencia que el muestreo por área.

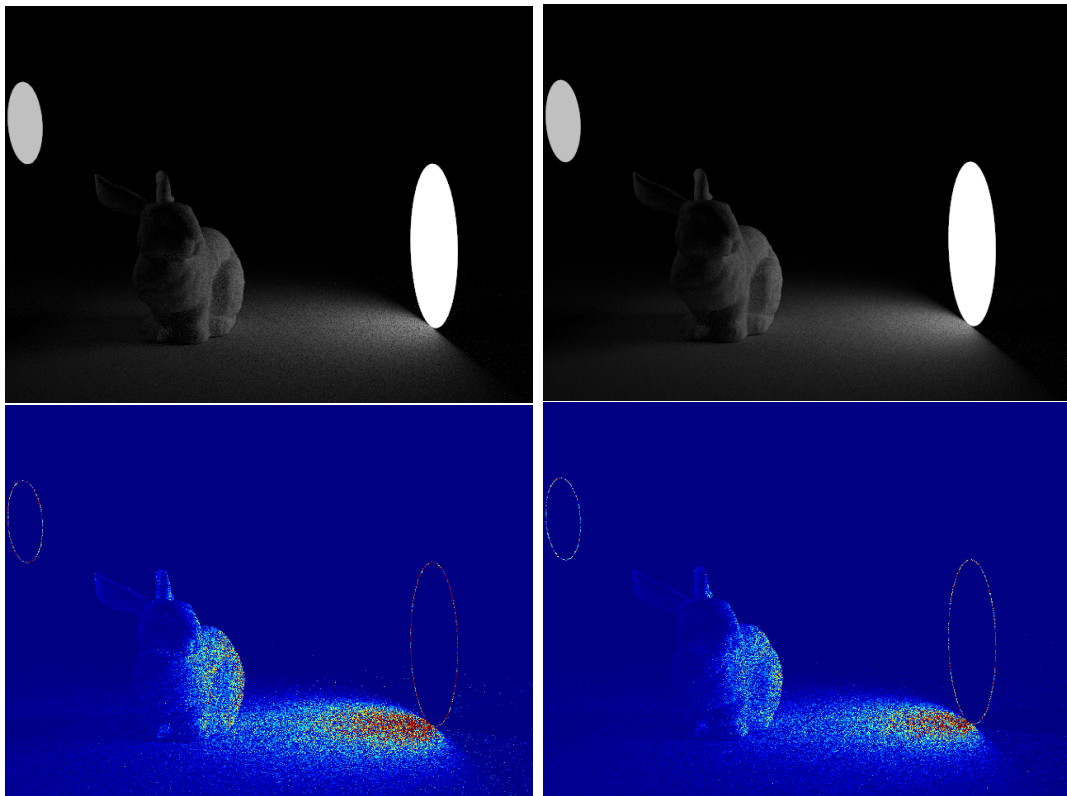
En la Figura 5.10 se muestra una escena simple, con dos esferas blancas difusas, una luz elíptica, un plano perpendicular a la luz y un medio participativo isótropo, renderizada con un número creciente de muestras. Se puede apreciar como el muestreo por ángulo sólido converge más rápido a la solución correcta con menos muestras.

Por último, en la Figura 5.11 se muestra una escena más compleja compuesta por el dragón de Stanford, modelado con una BSDF de plástico sobre un suelo a cuadros y una luz elíptica sobre su cabeza pero no visible en la imagen, renderizada con 512 muestras por píxel. Debido a que nuestro método no es dependiente de la BSDF, funciona bien con cualquier tipo de apariencia de materiales.



(a) Área.

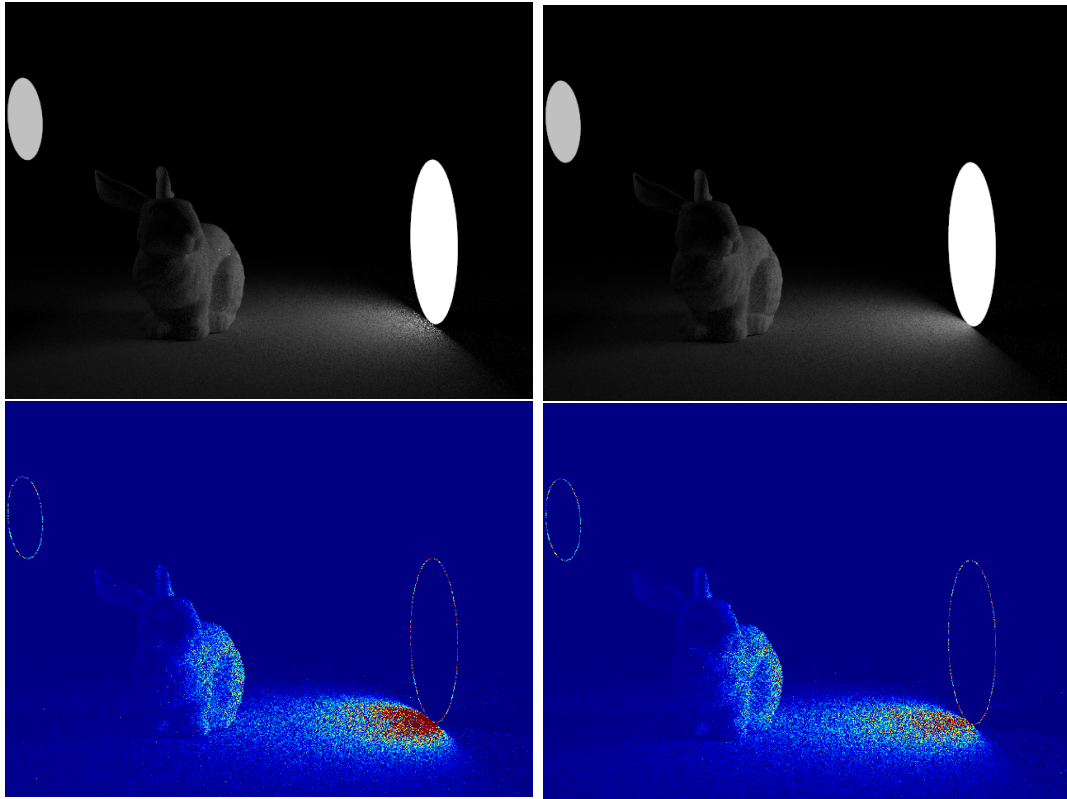
(b) *Rejection sampling.*



(c) Guillén [GUK<sup>+</sup>17].

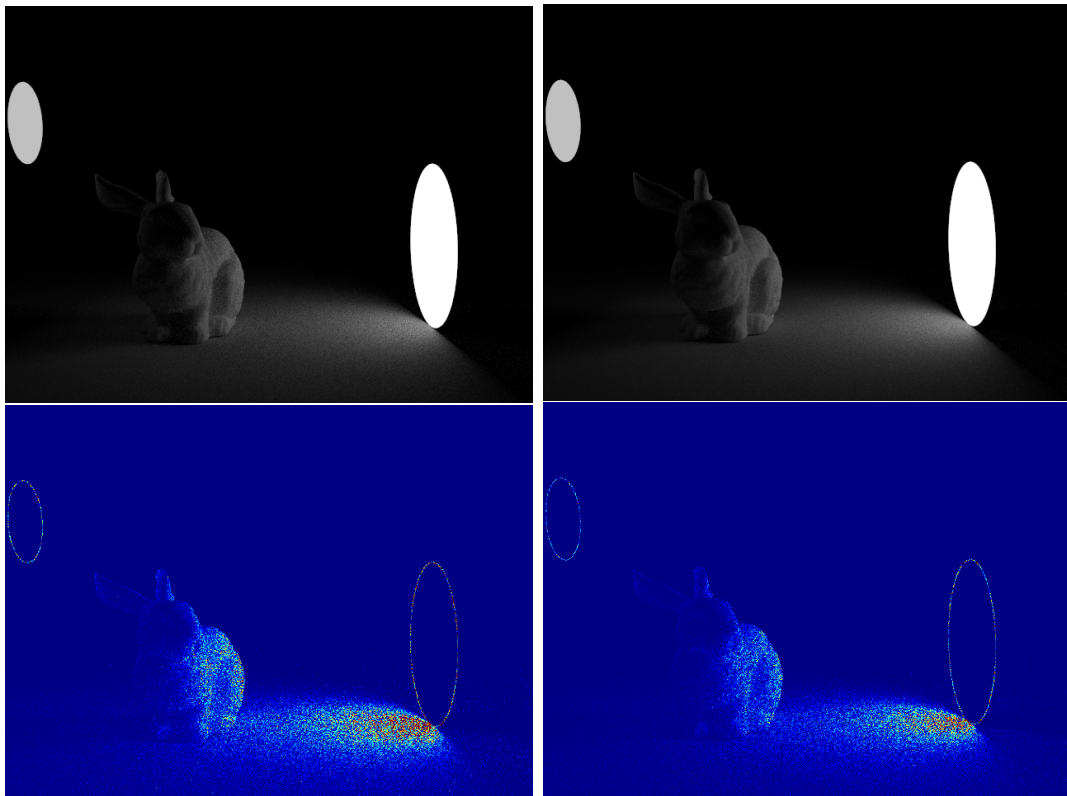
(d) Ángulo sólido.

Figura 5.4: Para cada par de imágenes se muestra en la fila superior una escena con dos luces elípticas y el conejo de Stanford con una BSDF difusa renderizada con 8 muestras por píxel y en la fila inferior la diferencia en falso color respecto a la imagen de referencia, escalado por 5 para una visualización más clara.



(a) Área.

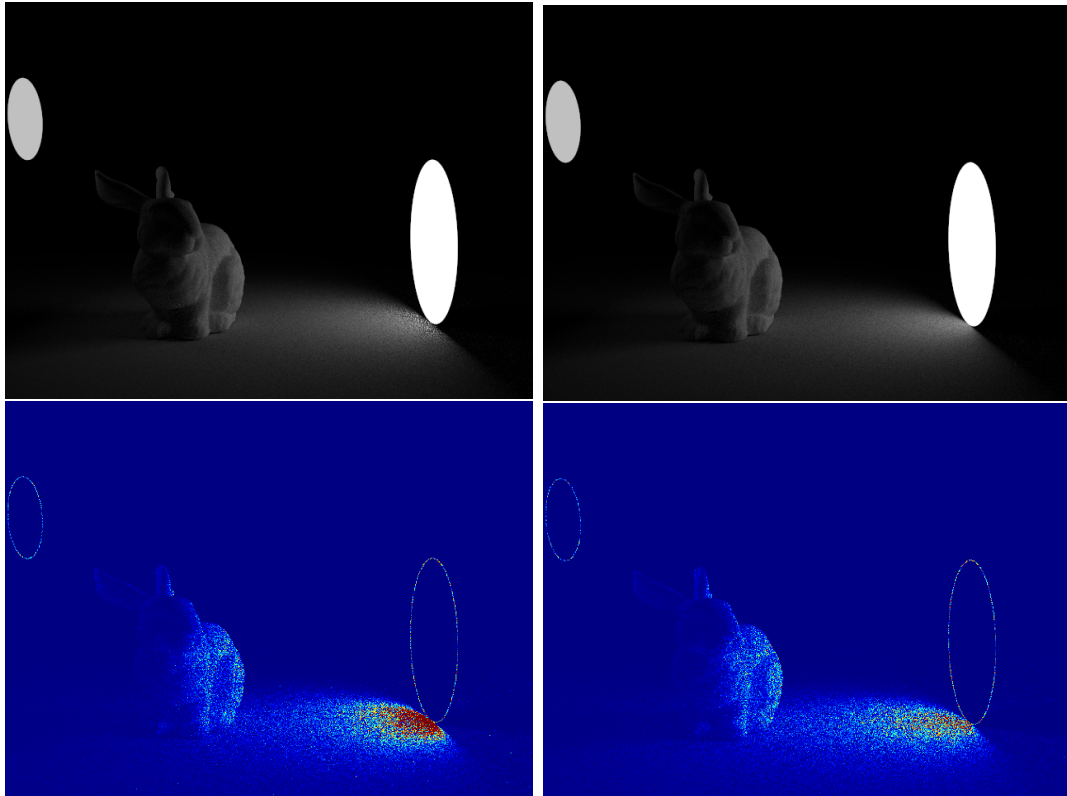
(b) *Rejection sampling*.



(c) Guillén [GUK<sup>+</sup>17].

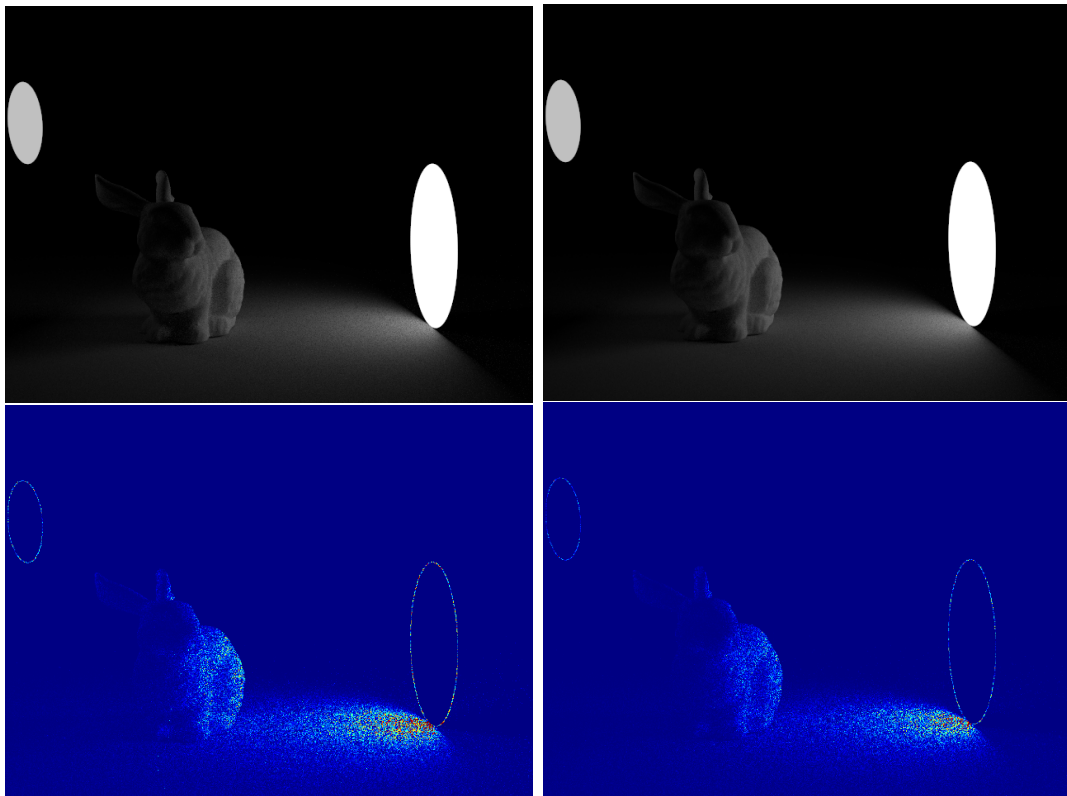
(d) Ángulo sólido.

Figura 5.5: Para cada par de imágenes se muestra en la fila superior una escena con dos luces elípticas y el conejo de Stanford con una BSDF difusa renderizada con 16 muestras por píxel y en la fila inferior la diferencia en falso color respecto a la imagen de referencia, escalado por 5 para una visualización más clara.



(a) Área.

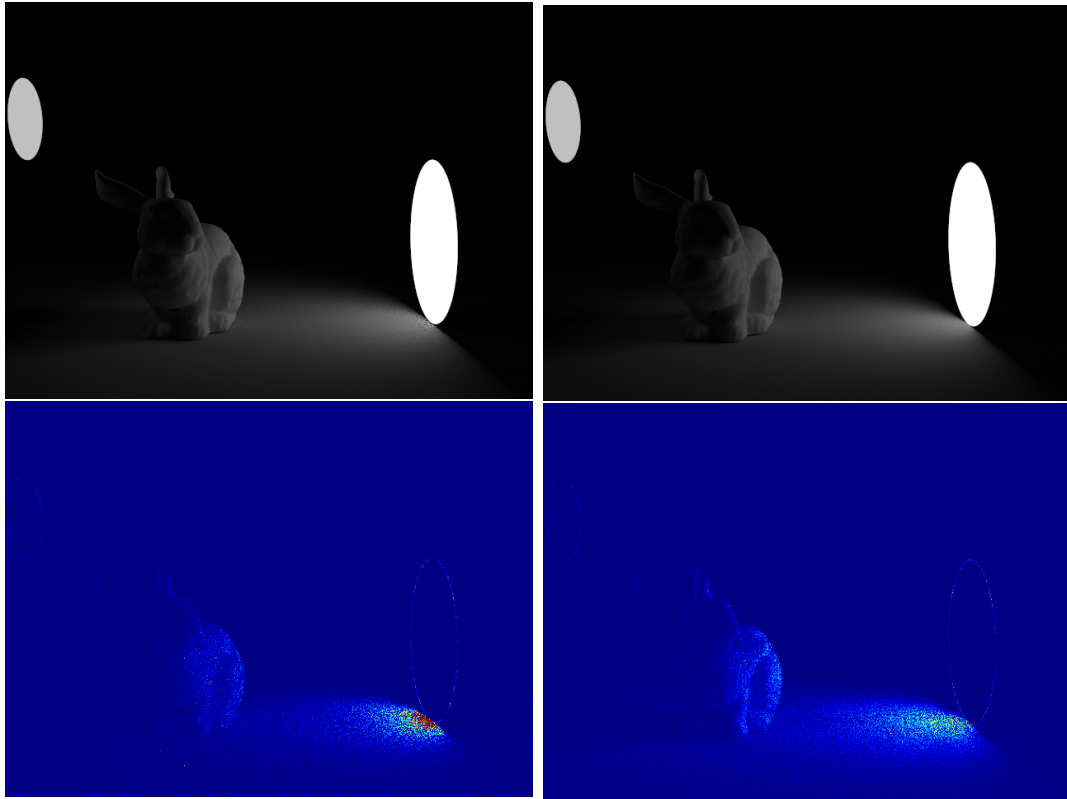
(b) *Rejection sampling.*



(c) Guillén [GUK<sup>+</sup>17].

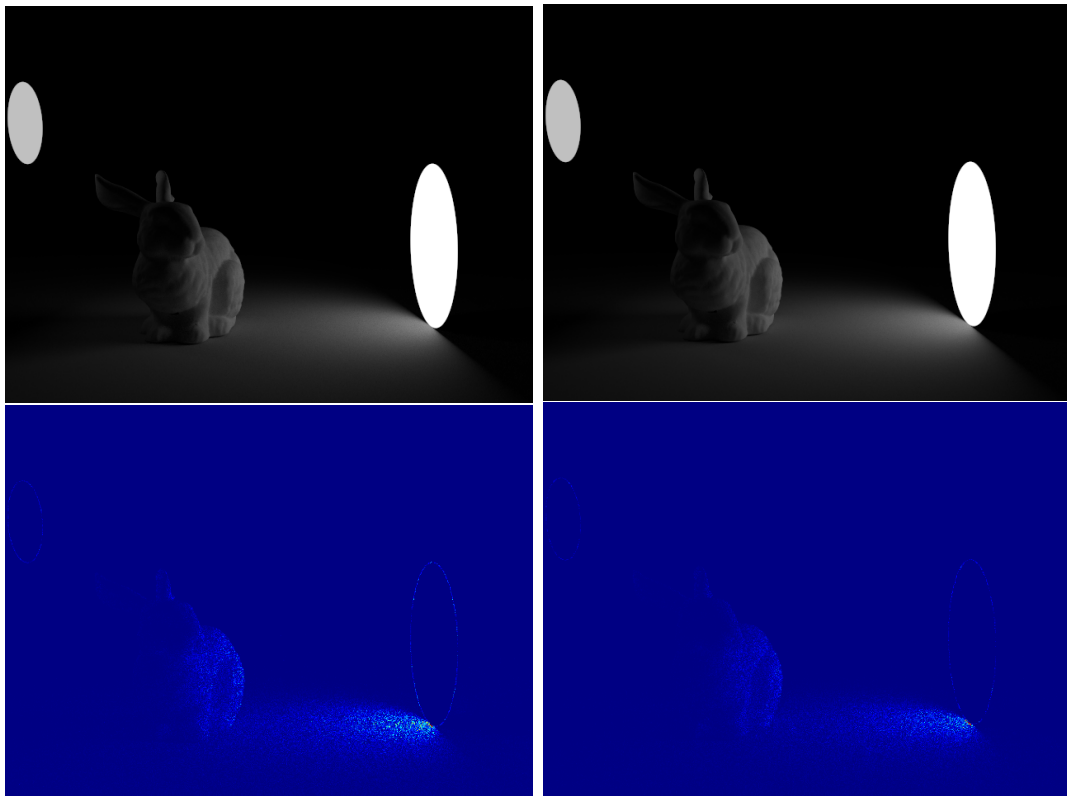
(d) Ángulo sólido.

Figura 5.6: Para cada par de imágenes se muestra en la fila superior una escena con dos luces elípticas y el conejo de Stanford con una BSDF difusa renderizada con 32 muestras por píxel y en la fila inferior la diferencia en falso color respecto a la imagen de referencia, escalado por 5 para una visualización más clara.



(a) Área.

(b) *Rejection sampling*.



(c) Guillén [GUK<sup>+</sup>17].

(d) Ángulo sólido.

Figura 5.7: Para cada par de imágenes se muestra en la fila superior una escena con dos luces elípticas y el conejo de Stanford con una BSDF difusa renderizada con 256 muestras por píxel y en la fila inferior la diferencia en falso color respecto a la imagen de referencia, escalado por 5 para una visualización más clara.

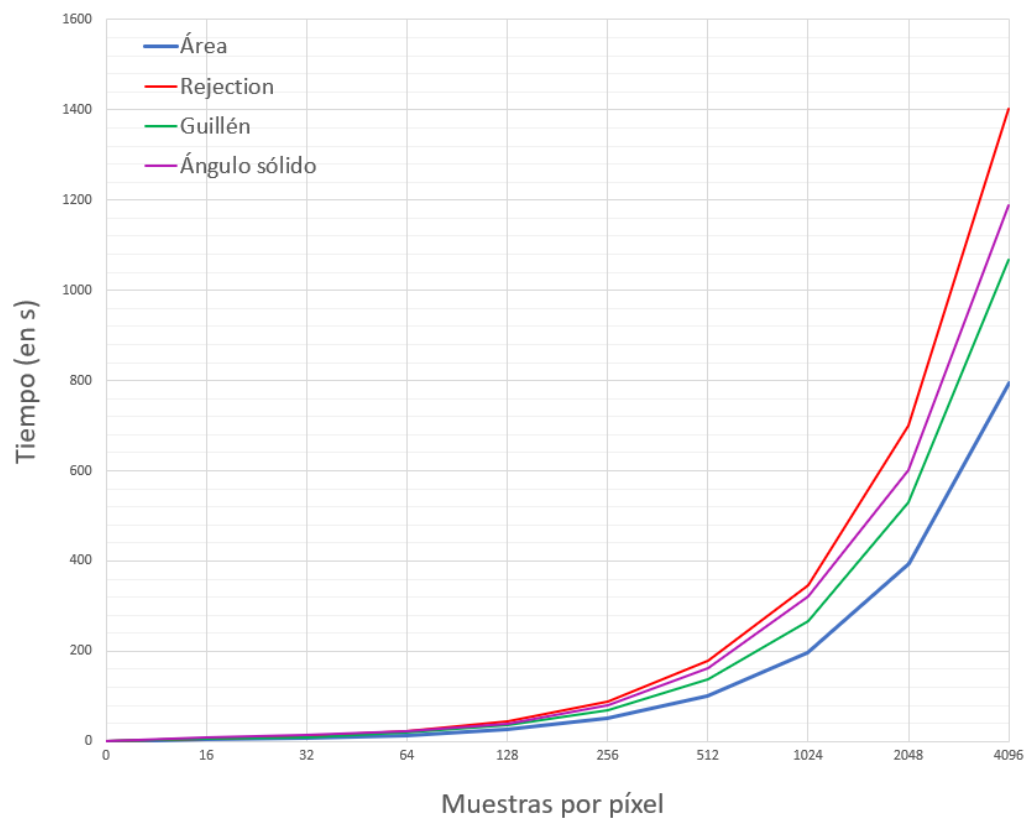


Figura 5.8: Tiempo (en el eje Y) que ha tomado renderizar la escena para un número de muestras creciente (eje X) con cada uno de los cuatro métodos mencionados.

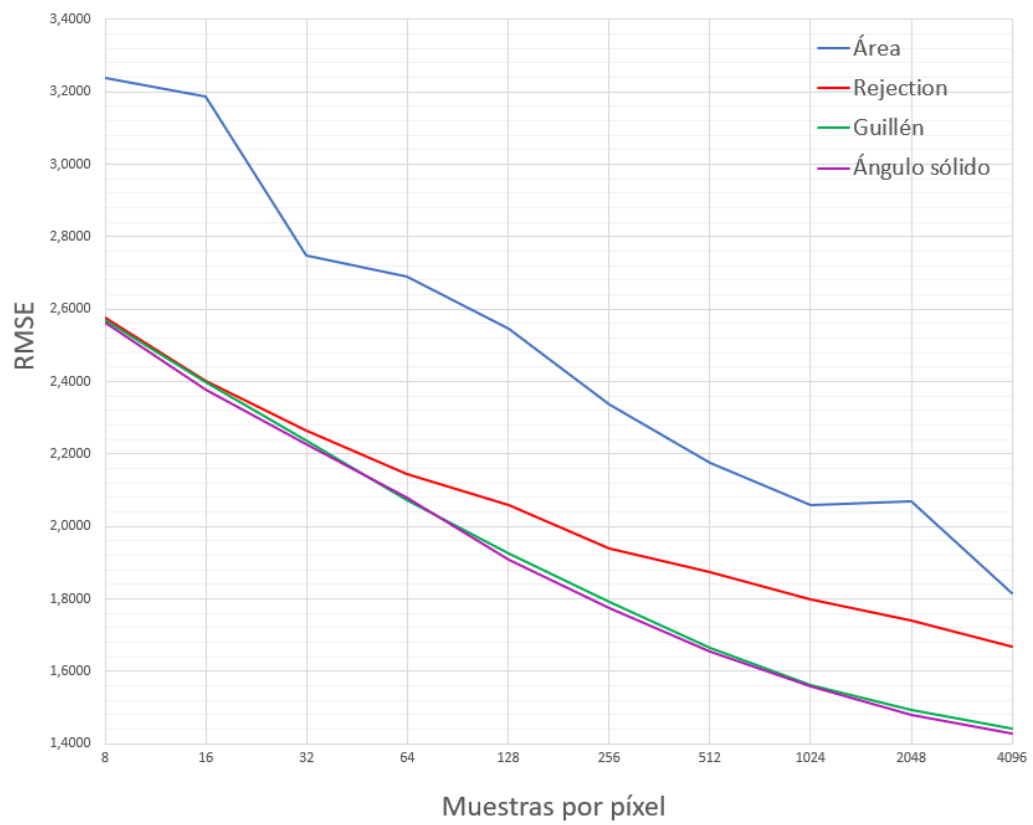
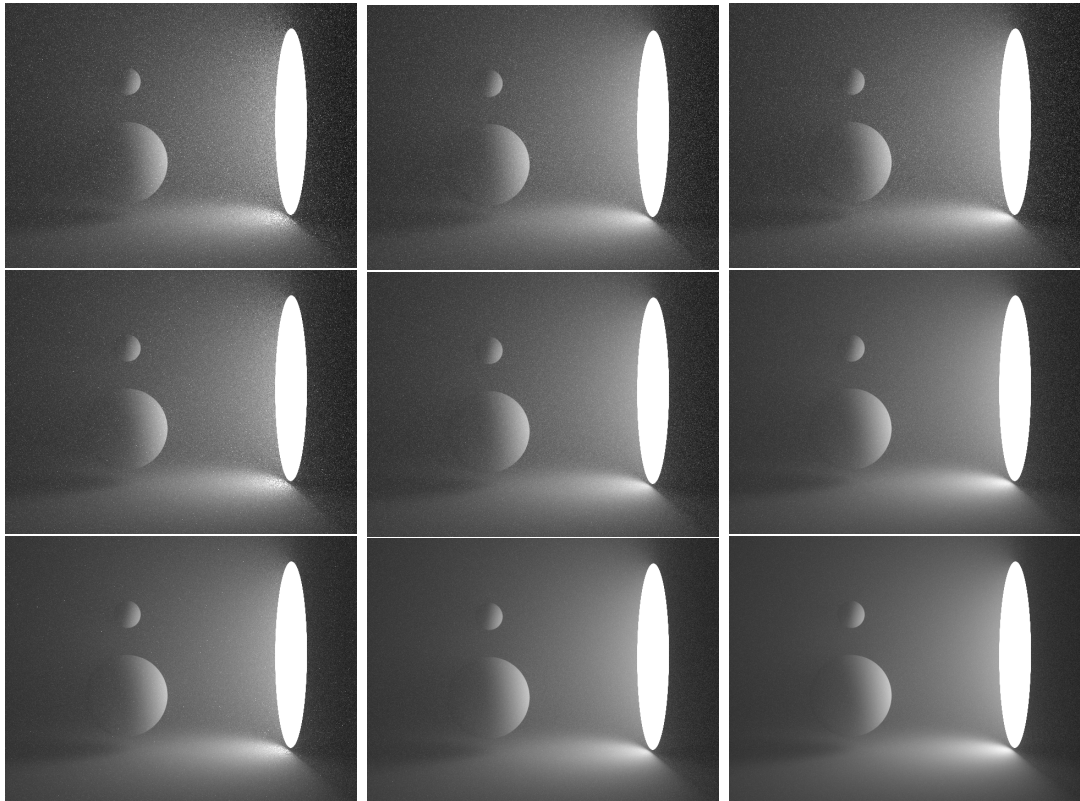


Figura 5.9: Curvas de error relativas en escala logarítmica de los muestreos presentados. La comparación se ha realizado sobre la escena de las Figuras 5.4-5.7





(a) Área.

(b) *Rejection sampling*.

(c) Ángulo sólido.

Figura 5.10: Escena simple compuesta por dos esferas difusas, una luz elíptica y un medio participativo isótropo. La primera fila ha sido renderizada con 16 muestras por píxel, y se ha obtenido un RMSE para el muestreo por área de 5,6, para el muestreo por rechazo un 4,9 y para el de ángulo sólido un 4,65; la segunda con 32, y se ha obtenido un RMSE de 5,23, 4,4 y 4,1, respectivamente, y la tercera con 128, con un RMSE de 4,47 3,86 y 3,42, respectivamente.

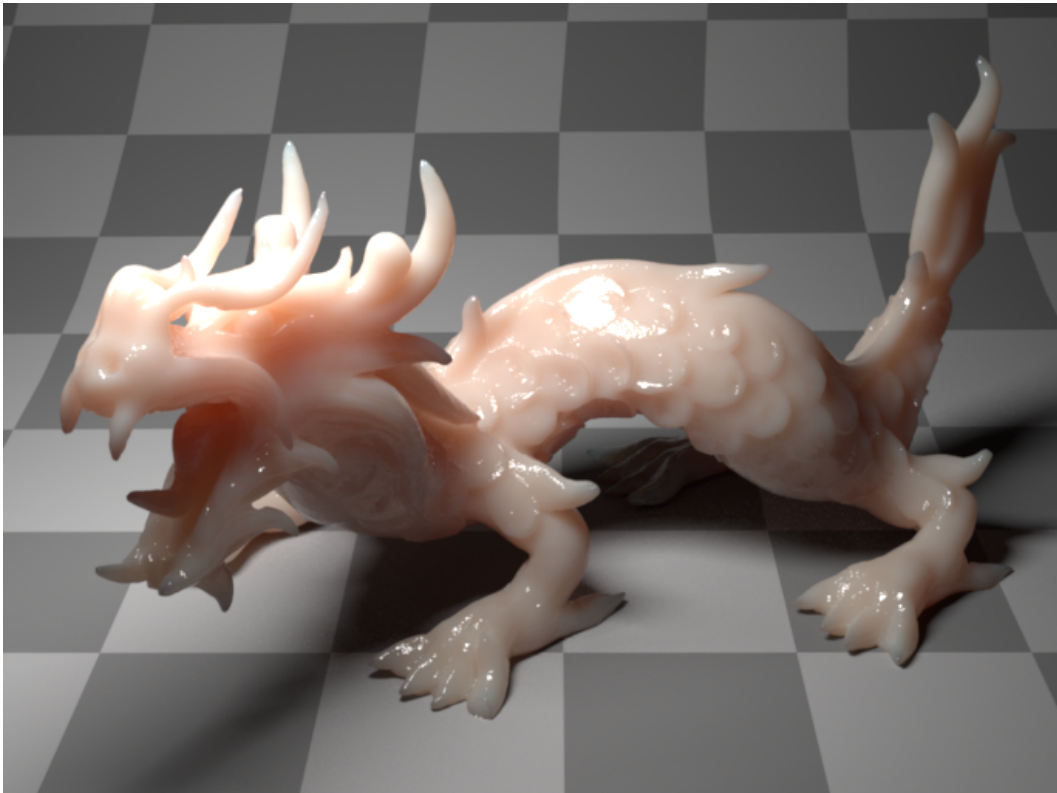


Figura 5.11: Escena compuesta por un dragón de plástico sobre un suelo a cuadros y una luz elíptica sobre su cabeza, no visible en la imagen, renderizada con 512 muestras por píxel.

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajo futuro

Se ha presentado un método de muestreo de luces elípticas arbitrariamente orientadas, cuya distribución de muestras es proporcional al ángulo sólido proyectado por la luz de área en un punto. Esto permite calcular la iluminación directa más rápidamente que otros métodos de muestreo, como puede ser el muestreo por área o por rechazo, también presentados e implementados en este trabajo.

Aunque este método se ha realizado solo para luces elípticas, debido a que la proyección en ángulo sólido tanto de la esfera como del elipsoide es una elipse esférica, este método se podría adaptar para luces con estas geometrías. Esto es posible ya que existe una relación entre el elipsoide, la esfera, el disco y la elipse [Hei17a], de tal modo que puede obtenerse una elipse (o un disco) que subtiende el mismo ángulo sólido que el elipsoide o la esfera. Si se consigue obtener una elipse que subtienda el mismo ángulo sólido, se podría emplear el método presentado en este trabajo para muestrear el ángulo sólido de la misma, y luego transformar la muestra obtenida a la geometría de la luz original.

Además, este método también puede adaptarse para algoritmos de iluminación global basados en luces virtuales [DKH<sup>+</sup>14].

Al igual que la mayoría de métodos de muestreo por ángulo sólido, un problema que presenta este método es que no tiene en cuenta la proyección del ángulo sólido, lo que implica que se generan muestras que contribuyen de manera notablemente diferente al valor final de manera equiprobable. La incorporación de la atenuación por coseno permitiría reducir más la varianza del método. Esto ha sido implementado por Ureña [UG18] para el muestreo de luces esféricas, mejorando el muestreo por ángulo sólido de las mismas.

Por último, es muy común el caso en que la emisión de las luces de área no es constante en toda su superficie, sino que está modelada por una función o textura. En estos casos sería interesante generar muestras de manera proporcional al perfil de emisión de la luz, en vez de generarlas uniformemente sobre el ángulo sólido proyectado.

## 6.1. Conclusiones personales

La realización de este trabajo ha sido una oportunidad para demostrar los conocimientos adquiridos durante la carrera y su aplicación para la resolución de problemas más complejos. Además me ha servido para indagar más en el ámbito de la informática gráfica, un campo el cual me ha fascinó desde que lo conocí, y he podido hacerlo de la mano del equipo de investigación *Graphics and Imaging Lab*, puntero en la generación de imágenes sintéticas fotorrealistas.

## 6.2. Diagrama temporal del proyecto

La Figura 6.1 expresa la evolución temporal del proyecto, iniciado en Febrero de 2019 y finalizado en Agosto de 2019.

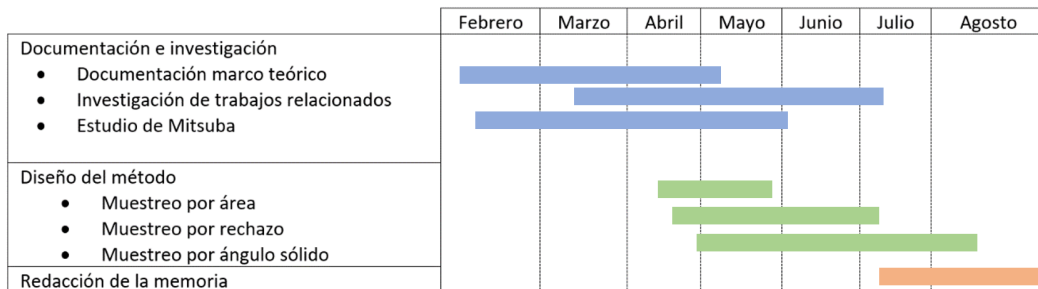


Figura 6.1: Diagrama temporal del proyecto.

# Capítulo 7

## Bibliografía

- [Arv96] James Arvo. Stratified sampling of spherical triangles. *Proceedings of the ACM SIGGRAPH Conference on Computer Graphics*, 12 1996.
- [Arv01] James Arvo. Stratified sampling of 2-manifolds, 2001.
- [DKH<sup>+</sup>14] Carsten Dachsbacher, Jaroslav Křivánek, Miloš Hašan, Adam Arbree, Bruce Walter, and Jan Novák. Scalable realistic rendering with many-light methods. *Computer Graphics Forum*, 33(1):88–104, 2014.
- [DLW93] Philip Dutré, Eric P. Lafortune, and Yves D. Willems. Monte carlo light tracing with direct computation of pixel intensities. In *3rd International Conference on Computational Graphics and Visualisation Techniques*, pages 128–137, Alvor, Portugal, December 1993.
- [FHF<sup>+</sup>17] Luca Fascione, Johannes Hanika, Marcos Fajardo, Per Christensen, Brent Burley, and Brian Green. Path tracing in production (parts 1 and 2). In *ACM SIGGRAPH 2017 Courses*, SIGGRAPH '17, pages 13:1–13:39, New York, NY, USA, 2017. ACM.
- [Gam16] Manuel Gamito. Solid angle sampling of disk and cylinder lights. *Computer Graphics Forum*, 35:25–36, 07 2016.
- [GKDS12] Iliyan Georgiev, Jaroslav Křivánek, Tomáš Davidovič, and Philipp Slusallek. Light transport simulation with vertex connection and merging. *ACM Trans. Graph.*, 31(6):192:1–192:10, November 2012.
- [GS14] Ibón Guillén Serrano. Iluminación global mediante progressive instant radiosity. 2014.
- [GUK<sup>+</sup>17] Ibón Guillén, Carlos Ureña, Alan King, Marcos Fajardo, Iliyan Georgiev, Jorge López-Moreno, and Adrian Jarabo. Area-preserving

- parameterizations for spherical ellipses. *Computer Graphics Forum*, 36(4):179–187, July 2017.
- [Hei17a] Eric Heitz. Analytical calculation of the solid angle subtended by an arbitrarily positioned ellipsoid to a point source. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 852:10 – 14, 2017.
- [Hei17b] Eric Heitz. Computing a front-facing ellipse that subtends the same solid angle as an arbitrarily oriented ellipse. working paper or preprint, July 2017.
- [Jak10a] Wenzel Jakob. Mitsuba repository. <https://github.com/mitsuba-renderer/mitsuba/blob/r> 2010.
- [Jak10b] Wenzel Jakob. Mitsuba repository. <https://github.com/mitsuba-renderer/mitsuba/blob/r> 2010.
- [Jak10c] Wenzel Jakob. Mitsuba website. <http://www.mitsuba-renderer.org/>, 2010.
- [KCK<sup>+</sup>18] Jaroslav Krivánek, Christophe Chevallier, Vladimir Koylazov, Ondřej Karlík, Henrik Wann Jensen, and Thomas Ludwig. Realistic rendering in architecture and product visualization. In *ACM SIGGRAPH 2018 Courses*, SIGGRAPH '18, pages 10:1–10:5, New York, NY, USA, 2018. ACM.
- [LW93] Eric P. Lafortune and Yves D. Willems. Bi-directional path tracing. In *Proceedings of Third International Conference on Computational Graphics and Visualization Techniques (Compugraphics '93)*, pages 145–153, Alvor, Portugal, December 1993.
- [oS] Archimedes of Syracuse. On the sphere and cylinder.
- [Owe13] Art B. Owen. *Monte Carlo theory, methods and examples*. 2013.
- [Ray17] Ray-disk intersection. <https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/minimum> 2017.
- [RC99] Christian P. Robert and George Casella. Monte carlo statistical methods. In *Springer Texts in Statistics*, 1999.
- [SC97] Peter Shirley and Kenneth Chiu. A low distortion map between disk and square. *Journal of Graphics Tools*, 2(3):45–52, 1997.

- [SJ17] Gurprit Singh and Wojciech Jarosz. Convergence analysis for anisotropic monte carlo sampling spectra. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of SIGGRAPH)*, 36(4), jul 2017.
- [TK86] James T. Kajiya. The rendering equation. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 1986.
- [UFK13] Carlos Ureña, Marcos Fajardo, and Alan King. An Area-Preserving Parametrization for Spherical Rectangles. *Computer Graphics Forum*, 2013.
- [UG18] Carlos Ureña and Iliyan Georgiev. Stratified sampling of projected spherical caps. *Computer Graphics Forum*, 37(4):13–20, 2018.
- [Vea97] Eric Veach. *Robust Monte Carlo methods for light transport simulation*, volume 1610. Stanford University PhD thesis, 1997.
- [VG95] Eric Veach and Leonidas Guibas. Bidirectional estimators for light transport. In Georgios Sakas, Stefan Müller, and Peter Shirley, editors, *Photorealistic Rendering Techniques*, pages 145–167, Berlin, Heidelberg, 1995. Springer Berlin Heidelberg.
- [Wan92] Changyaw Wang. Vi.7 - physically correct direct lighting for distribution ray tracing. In DAVID KIRK, editor, *Graphics Gems III (IBM Version)*, pages 307 – 313. Morgan Kaufmann, San Francisco, 1992.

# Lista de Figuras

2.1. BSDFs modelando diferentes materiales: difuso puro o Lambertiano (izquierda), especular (centro) y especular perfecto (derecha). (Fuente [GS14]) . . . . .	4
3.1. Tres fuentes de luz ( $c_1$ , $c_2$ y $c_3$ iluminando directamente el punto $x$ , $n$ representa la normal en el punto $x$ , $w_o$ la dirección de la radiancia saliente, $\Omega$ la hemiesfera con centro $x$ y los vectores $c_1\vec{x}$ , $c_2\vec{x}$ y $c_3\vec{x}$ la dirección de la radiancia incidente en $x$ . . . . .	8
3.2. Ángulo sólido (en azul) subtendido por una elipse (en verde) sobre la esfera de radio unidad. . . . .	10
4.1. Ejemplo del método desarrollado. Dada una elipse arbitraria (en verde), se muestrean sobre su ángulo sólido subtendido (en azul) direcciones (en rosa discontinuo) uniformemente, las cuales se corresponden a posiciones (puntos azules) en la elipse. . . . .	12
4.2. Ángulo sólido (en rojo) subtendido por una elipse arbitrariamente orientada ( <i>arbitrarily oriented ellipse</i> ) y una <i>front-facing ellipse</i> que subtiende el mismo ángulo sólido. La arbitrariamente orientada posee semiejes de longitud $l_x$ y $l_y$ , en dirección de los vectores normalizados $V_x$ y $V_y$ , respectivamente, normal $V_z$ y centro $C$ . $O$ es el punto a iluminar.(Fuente [Hei17b]) . . . . .	13
4.3. A la izquierda: elipse tangente (en azul) a la esfera de radio unidad que subtiende el mismo ángulo sólido que una elipse arbitrariamente orientada (en rojo). A la derecha: elipse tangente (en rojo) y elipse esférica (en azul), así como la representación gráfica de las variables $a_t$ , $b_t$ , $\alpha$ , $\beta$ , $a$ y $b$ . $\hat{x}_e$ se corresponde con $V_1^+$ , $\hat{y}_e$ con $V_2^+$ , y $\hat{z}_e = V_1^+ \times V_2^+$ . (Fuente [GUK <sup>+</sup> 17]) . . . . .	15



4.4.	A la izquierda: casquete esférico (en azul) en una esfera de radio 1, donde $h$ representa la altura del mismo, $r$ su radio, $\theta$ la apertura y $r_D$ el radio de un disco (en rojo) que subtiende el mismo ángulo sólido que el casquete esférico. En el centro: elipse tangente (en azul), disco que subtiende el mismo ángulo sólido (en amarillo), punto (en rojo) correspondiente a la colisión de la dirección muestreada (línea discontinua negra) uniformemente sobre el cono y el disco y su posición equivalente en la elipse tangente (punto verde). A la derecha: intersección del punto $x_t$ (en verde) obtenido en la elipse tangente (en azul) con la elipse arbitraria (en rojo) y el punto resultante $x_a$ (en azul). . . . .	17
5.1.	Mapeo entre un punto en el disco (en azul) y un punto en la elipse (en rojo), escalando cada coordenada del punto por el cociente entre el semieje ( $a$ y $b$ ) correspondiente a esa coordenada y el radio ( $r$ ). . . . .	19
5.2.	Mapeo de una elipse siguiendo el método de Gamito [Gam16]. Las muestras que no están dentro de la elipse no contribuyen al cálculo de la radiancia. A la izquierda, el mapeo de la superficie de la elipse, y a la derecha, el mapeo de la proyección sobre el ángulo sólido de la elipse. (Fuente [GUK <sup>+</sup> 17]) . . . . .	19
5.3.	Escena simple formada por el conejo de Stanford con una BSDF difusa, un plano y dos luces de área elípticas con excentricidad cero, renderizada con MIS [Vea97] y 131072 muestras por píxel. . . . .	20
5.4.	Para cada par de imágenes se muestra en la fila superior una escena con dos luces elípticas y el conejo de Stanford con una BSDF difusa renderizada con 8 muestras por píxel y en la fila inferior la diferencia en falso color respecto a la imagen de referencia, escalado por 5 para una visualización más clara. . . . .	22
5.5.	Para cada par de imágenes se muestra en la fila superior una escena con dos luces elípticas y el conejo de Stanford con una BSDF difusa renderizada con 16 muestras por píxel y en la fila inferior la diferencia en falso color respecto a la imagen de referencia, escalado por 5 para una visualización más clara. . . . .	23
5.6.	Para cada par de imágenes se muestra en la fila superior una escena con dos luces elípticas y el conejo de Stanford con una BSDF difusa renderizada con 32 muestras por píxel y en la fila inferior la diferencia en falso color respecto a la imagen de referencia, escalado por 5 para una visualización más clara. . . . .	24

5.7.	Para cada par de imágenes se muestra en la fila superior una escena con dos luces elípticas y el conejo de Stanford con una BSDF difusa renderizada con 256 muestras por píxel y en la fila inferior la diferencia en falso color respecto a la imagen de referencia, escalado por 5 para una visualización más clara. . . . .	25
5.8.	Tiempo (en el eje Y) que ha tomado renderizar la escena para un número de muestras creciente (eje X) con cada uno de los cuatro métodos mencionados. . . . .	26
5.9.	Curvas de error relativas en escala logarítmica de los muestreos presentados. La comparación se ha realizado sobre la escena de las Figuras 5.4-5.7 . . . . .	27
5.10.	Escena simple compuesta por dos esferas difusas, una luz elíptica y un medio participativo isótropo. La primera fila ha sido renderizada con 16 muestras por píxel, y se ha obtenido un RMSE para el muestreo por área de 5,6, para el muestreo por rechazo un 4,9 y para el de ángulo sólido un 4,65; la segunda con 32, y se ha obtenido un RMSE de 5,23, 4,4 y 4,1, respectivamente, y la tercera con 128, con un RMSE de 4,47 3,86 y 3,42, respectivamente. . . . .	28
5.11.	Escena compuesta por un dragón de plástico sobre un suelo a cuadros y una luz elíptica sobre su cabeza, no visible en la imagen, renderizada con 512 muestras por píxel. . . . .	29
6.1.	Diagrama temporal del proyecto. . . . .	31