



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Estrategias de control multi-robot
aplicadas a problemas de atrapamiento

Multi-robot control strategies applied in
entrapment problems

Autor

Eduardo Sebastián Rodríguez

Director

Eduardo Montijano Muñoz

Escuela de Ingeniería y Arquitectura
2019

Resumen

El Trabajo de Fin de Grado pretende desarrollar estrategias de control en sistemas multi-robot (MRS) aplicadas al problema concreto de atrapamiento. El objetivo del atrapamiento es llevar a un grupo no coordinado de objetivos a un lugar deseado mediante la interacción con un equipo coordinado de robots. La dinámica de movimiento de los objetivos es fuertemente no lineal tanto en la posición de los objetivos como en la de los robots, constituyendo la principal fuente de complejidad del problema. Por otro lado, en ningún momento se asume un número determinado de objetivos o robots, añadiendo generalidad a las soluciones diseñadas. Para ello, se plantea el estudio teórico y global del problema, aplicando de forma escalonada diferentes técnicas de control.

La estrategia inicial se basa en la búsqueda de la formación óptima de los robots con respecto a la posición deseada para los objetivos. A partir aquí se aplica un control óptimo LQR apoyado en la linealización del sistema, que tiene como punto de partida la configuración previamente obtenida. Posteriormente, se aborda el diseño de estrategias de control no lineal basadas en la teoría de estabilidad de Lyapunov para superar los inconvenientes de la estrategia inicial. Por último, se incluye un breve desarrollo de estrategias adaptativas que generalizan el control no lineal a situaciones en las que no se conocen con precisión los parámetros de la dinámica de los objetivos. Además, el trabajo ha supuesto un esfuerzo de diseño de un entorno de simulación para poder evaluar todos los algoritmos, analizando las prestaciones de las diferentes estrategias propuestas.

El desarrollo y evaluación de la primera estrategia de control ha supuesto la redacción de un artículo que ha sido aceptado y publicado en la 24^a edición IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA).

Abstract

The End-of-Degree project presents the development of different control strategies in multi-robot systems (MRS) applied in entrapment problems. The objective in entrapment is to drive a non coordinated group of targets to a set of desired locations by controlling the interaction with a coordinated team of robots. The dynamical movement of the targets is strongly non linear in both the position of the targets and the position of the robots, constituting the main source of complexity of the problem. Furthermore, the adopted perspective does not assume a fixed number of targets or robots, adding generality to the designed solutions. For this purpose, we address the theoretical and global study of the problem, applying different stepped control techniques.

The initial approach is based on the search of the optimum formation of the robots with respect to the desired positions for the targets. Then, an optimum LQR controller is applied, sustained in the linearization of the system based on the initial configuration previously obtained. Afterwards, the design of non linear control strategies is addressed, using the Lyapunov stability theory to overcome the disadvantages of the initial strategy. Finally, we include a brief description of adaptive techniques which generalize the non linear controllers, tackling situations in which the parameters of the target dynamics are unknown. In addition, the project includes an effort in the development of a simulation environment, permitting the evaluation of the algorithms and analyzing the performance of the different proposed strategies.

The development and evaluation of the first control strategy is the source of an article which has been recently accepted and published by the 24th IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA).

Agradecimientos

Me gustaría incluir unos breves agradecimientos en este trabajo, dedicados no sólo a las personas que han colaborado directamente en él como a, en general, todas aquellas que han formado parte del camino hacia la consecución de estos estudios. En primer lugar, muchas gracias a todos mis compañeros y amigos del grado, que han hecho que los últimos cuatro años hayan sido geniales y amenos, haciendo que los ratos difíciles fuesen menos duros. En segundo lugar, mis gracias van dirigidas a Eduardo, director de este Trabajo Fin de Grado, por su paciencia, amabilidad, profesionalidad e inteligencia, opinión compartida por todos (buena muestra de ello es la inmensa cola de alumnos buscando tutorías ...). También me gustaría dar las gracias a muchos de los profesores que han constituido parte fundamental en el feliz desarrollo de la carrera: María Jesús, Alberto, Vicente, Antonio, Carlos, etc. En particular, una mención especial a José Luis, que participó de forma desinteresada en los primeros pasos del proyecto. Por supuesto, mil gracias a mis padres, hermana, familia y amigos, son ellos los que le dan sentido al esfuerzo. Los últimos agradecimientos van dirigidos a Rebeca, pues acaba un ciclo y empieza otro, pero siempre aprendiendo de ella.

Índice general

Resumen	I
Abstract	II
Agradecimientos	III
Índice general	IV
Índice de figuras	VI
Índice de tablas	VIII
Índice de símbolos	IX
1. Introducción	2
1.1. Motivación y Contexto	2
1.2. Objetivos y alcance	5
1.3. Estructura de la memoria	7
2. Definición del problema y modelos de comportamiento	9
2.1. Definición del problema	9
2.2. Descripción de los modelos dinámicos	10
2.2.1. Modelo Inverso	10

2.2.2. Modelo Exponencial	13
3. Estrategias de control basadas en linealización y optimización	15
3.1. Ley de Control	15
3.2. Punto de operación	16
4. Análisis no lineal: control no lineal y adaptativo	18
4.1. Breve introducción a la teoría de estabilidad de Lyapunov	18
4.2. Selección del Estado a controlar	19
4.3. Desarrollo teórico de la estrategia de control	20
4.4. Generalización de la estrategia a sistemas adaptativos	22
5. Análisis de los resultados	24
5.1. Evaluación del control basado en linealización y optimización	24
5.2. Evaluación de las estrategias no lineales	30
6. Conclusiones	35
A. Anexos	37
A.1. Más sobre la teoría de estabilidad de Lyapunov	37
A.2. Discusión sobre el estado y la acción elegidos	38
A.3. Linealización realimentada	40
A.4. Backstepping y Sliding Mode Control	40
B. Artículo ETFA	42
Bibliografía	45

Índice de figuras

1.1. Ejemplo de un dron junto a un grupo de bomberos.	3
1.2. Equipo de robots en un ambiente controlado.	5
1.3. Cronograma del trabajo realizado para el TFG.	8
2.1. Comparativa del comportamiento de 5 presas ante 4 cazadores. A la izquierda, Modelo Inverso; a la derecha, Modelo Inverso Perturbado.	12
2.2. Comparativa del comportamiento de 5 presas ante 4 cazadores. A la izquierda, Modelo Exponencial; a la derecha, Modelo Exponencial Perturbado.	14
3.1. Funcionamiento del solver numérico para el caso de 6 cazadores (azul) y 3 presas (verde) con el Modelo Inverso.	17
5.1. Comportamiento del ejemplo ilustrativo.	26
5.2. Comportamiento del solver con respecto al número de cazadores: en la izquierda, el Modelo Inverso; a la derecha, el Modelo Exponencial.	27
5.3. Comportamiento del solver con respecto al número de cazadores en los casos Perturbados: en la izquierda, el Modelo Inverso; a la derecha, el Modelo Exponencial.	27
5.4. Éxito de la estrategia de control lineal con respecto al radio de la región de atracción de cazadores y presas.	29
5.5. Comportamiento del controlador no lineal para el caso de 5 cazadores y 3 presas con Modelo Inverso.	32
5.6. Comportamiento del controlador no lineal para el caso de 2 cazadores y 1 presa con Modelo Inverso.	32

5.7. Ejemplo del controlador adaptativo con 2 cazadores y 1 presa: a la izquierda, las trayectorias para el Modelo Inverso; a la derecha, la evolución de γ_1	34
--	----

Índice de tablas

5.1. Resultados globales del controlador lineal.	30
5.2. Resultados globales del controlador lineal.	33
5.3. Coste computacional para distinto número de cazadores y presas.	34

Índice de símbolos

α_j	ganancia paramétrica de los modos 2 y 4 para la presa j
β_j	ganancia paramétrica de los modos 2 y 4 para la presa j
χ_{ij}	exponente no lineal de los modos 2 y 4
$\dot{\mathbf{h}}_i$	velocidad del cazador i
$\dot{\mathbf{p}}_j$	velocidad de la presa j
$\dot{\mathbf{X}}$	derivada del estado general del sistema
\dot{V}	derivada de la función V
γ_j	ganancia paramétrica de los modos 1 y 3 para la presa j
\mathbf{A}	matriz de estados del espacio de estados lineal
\mathbf{a}	vector de parámetros del sistema
\mathbf{B}	matriz de acciones del espacio de estados lineal
\mathbf{d}_{ij}	distancia entre el cazador i y la presa j
\mathbf{h}	vector acción en el control LQR
\mathbf{h}_i	posición del cazador i
\mathbf{h}_i^0	posición inicial del cazador i
\mathbf{h}_i^d	posición deseada del cazador i
\mathbf{K}	matriz ganancia para la acción en los controladores no lineales
\mathbf{M}	matriz de estado en el sistema no lineal
\mathbf{M}_d	matriz de estado deseado en el sistema no lineal
\mathbf{N}	matriz de acción en el sistema no lineal

\mathbf{P}	matriz de resolución de la ecuación de Riccati
\mathbf{p}	vector estado
\mathbf{p}_j	posición de la presa j
\mathbf{p}_j^0	posición inicial de la presa j
\mathbf{p}_j^d	posición deseada de la presa j
\mathbf{Q}	matriz de ponderación de la entrada en la optimización LQR
\mathbf{R}	matriz de ponderación de la salida en la optimización LQR
\mathbf{S}	matriz de pesos para la función de adaptación
\mathbf{u}	vector acción en el control no lineal
\mathbf{W}	matriz de pesos del campo vectorial lineal en los modos perturbados
\mathbf{X}	estado general del sistema
\mathbf{X}^0	estado general inicial del sistema
\mathcal{E}	métrica de error del funcionamiento del sistema
\mathcal{H}	subconjunto posición de los cazadores
\mathcal{H}^0	subconjunto posición origen de los cazadores
\mathcal{H}^d	subconjunto posición deseada de los cazadores
\mathcal{P}	subconjunto posición de las presas
\mathcal{P}^0	subconjunto posición origen de la presas
\mathcal{P}^d	subconjunto posición deseada de la presas
\mathcal{W}	campo de potenciales de acción para la dinámica de los modos 1 y 3
σ_{ij}	ganancia paramétrica de los modos 2 y 4 para el cazador i y la presa j
D	dimensión característica de la reserva
i	subíndice para los cazadores
J	función de coste
j	subíndice para las presas
K	número de muestras
k	muestra

K_u	ganancia proporcional en el controlador no lineal
L	matriz de regulación LQR
m	número de presas
n	número de cazadores
R	radio de distribución espacial de las presas
r	radio de acción para el modo furioso
R_h	radio de la región de atracción de los cazadores
R_p	radio de la región de atracción de las presas
T	tiempo de muestreo
V	función elegida para el estudio de estabilidad de Lyapunov

Capítulo 1

Introducción

” There should be no such thing as boring mathematics”

Edsger Dijkstra

El Capítulo introductorio de la memoria describe, en primer lugar, las motivaciones que han llevado a la realización de este trabajo, aportando un contexto que permita enmarcar el proyecto dentro del plan de estudios de la titulación. Seguidamente, se detallan los objetivos perseguidos con el trabajo, junto con su alcance. Como punto final, se desarrolla la estructura del resto de la memoria, incluyendo una breve descripción de cada uno de los Capítulos.

1.1. Motivación y Contexto

Actualmente, el estudio y diseño de sistemas formados por múltiples robots (MRS) constituye uno de los temas más populares dentro del mundo de la teoría de control [1]. Hay una gran variedad de problemas que pueden resolverse por medio de la aplicación de algoritmos que gobiernan el comportamiento en un equipo coordinado de robots.

Desde un punto de vista ingenieril, se puede pensar en problemas como la coordinación de la evacuación de un grupo de personas, la extinción de incendios o la protección de especies en peligro de extinción, como se muestra en la Fig. 1.1. En los tres casos, la implicación humana supone un gran riesgo por su peligrosidad o dificultad de acceso. Tener un medio que, de forma automática, gestione la situación es un objetivo suficientemente atractivo. En cualquier caso, parece evidente que escenarios de este tipo requieren de un sistema formado por múltiples entidades (ver Fig. 1.2) que ataquen el problema desde



Figura 1.1: Ejemplo de un dron junto a un grupo de bomberos.

diferentes puntos para evitar fallos en la evacuación, propagación del incendio o huida del animal.

Por norma general, en los problemas de sistemas multi-robot se habla de una división en siete áreas principales [2]:

- **Problemas inspirados en la biología:** el uso de sistemas de control compuestos por múltiples entidades está fuertemente ligado a la inspiración de los humanos en el mundo animal y sus relaciones sociales. En particular, hormigas, abejas o insectos han ayudado a dar forma a estrategias de control grupales que se prueban con dinámicas basadas en el medio ambiente.
- **Comunicaciones:** el uso de sistemas multi-robot va acompañado, muchas veces, del concepto de sistema distribuido, en el que el ordenador central se sustituye por una red de nodos locales. La gestión de las comunicaciones de esta red, entre otras cosas, recae en este área.
- **Arquitecturas y gestión de tareas:** un sistema formado por múltiples entidades ofrece una gran gama de posibilidades en términos de jerarquía, prioridad, heterogeneidad, etc. En este área se estudia cómo gestionar las entidades para que cada una de ellas adopte el rol que le corresponde para cumplir objetivos concretos, como la planificación de tareas.
- **Localización, planificación y exploración:** las posibilidades que ofrecen los sistemas multi-robot en estas tareas son extensas en comparación con sistemas mono-robot, en tanto que permiten la paralelización de tareas mientras se comparte la información que adquiere cada uno de los robots.
- **Manipulación y transporte de objetos:** este área, con marcado carácter industrial, estudia las ventajas de coordinar múltiples entidades a la hora de manejar

objetos. En ese sentido, los equipos multi-robot permiten aumentar la cantidad y calidad del transporte, además de poder acceder a lugares que a una sola entidad le es dificultoso o imposible.

- **Coordinación de movimiento:** esta última área dentro de los sistemas multi-robot se dedica al diseño de estrategias de control que permitan mover coordinadamente a los robots de forma que cumplan con una tarea determinada. Dentro de esas tareas podemos encontrar la búsqueda y seguimiento de una formación o el movimiento hacia una localización concreta.

Este trabajo se centra en el estudio y análisis del atrapamiento de un grupo de objetivos mediante un equipo de robots, quedando enmarcado dentro del campo de la coordinación de movimientos.

El problema de atrapamiento, bastante relacionado con los problemas de persecución-evasión, tienen como objetivo principal mover a una serie de objetivos a una localización deseada, siempre con un cierto número de restricciones o condiciones. Diferentes estrategias de control han abordado este problema empleando diversas herramientas. Por ejemplo, en [3] un grupo de robots rodean a un sólo objetivo siguiendo una órbita elíptica. Un problema similar es resuelto en [4] pero, en este caso, el atrapamiento se basa en la medición en tiempo real del movimiento del objetivo, sin necesitar el conocimiento de su dinámica. Recientemente, [5] presenta una perspectiva opuesta, en la que el controlador gobierna al evasor, intentando maximizar el tiempo fuera del alcance de sus perseguidores. Otra técnica, como el Reinforcement Learning, es aplicada en [6] para diseñar el movimiento de un Vehículo Aéreo No Tripulado (UAV) policial en un contexto de persecución-evasión. El trabajo de [7] propone, por otro lado, estrategias inspiradas en la biología. En todos estos ejemplos, como nota importante, el MRS se encarga únicamente de capturar a un sólo objetivo.

Otros trabajos abordan la tarea de controlar el movimiento de más de un objetivo, explotando la idea de manada. El trabajo en [8] presenta un modelo en el que el grupo de robots rodea al grupo de objetivos. El movimiento individual de cada robot se diseña de tal forma que el equipo completo se desplaza como un sólo unicyclo. La misión principal es llevar al unicyclo a una localización deseada sin considerar la posición particular de cada objetivo, más allá de que todos permanezcan dentro del círculo formado por los robots. Si buscamos una estrategia en la que un sólo robot lleva a un grupo de objetivos a posiciones concretas e individuales, uno a uno, debemos acudir a [9]. Aquí, el robot cambia a un nuevo objetivo cuando detecta que su objetivo actual ya ha llegado a su destino. Comparado con estas soluciones, este Trabajo Fin de Grado (TFG) propone un sistema de control centralizado formado por múltiples robots que no sólo rodea a los objetivos, si no que también los lleva a todos, simultáneamente, a unas posiciones deseadas individuales. Para ello, en una de las propuestas de control de este TFG, es necesaria una configuración inicial para los robots que de lugar a un comportamiento estable de los objetivos. Así, esto lleva al estudio de los problemas de formación en el contexto de MRS.



Figura 1.2: Equipo de robots en un ambiente controlado.

Las tareas de formación representan una de las herramientas básicas en el contexto de sistemas MRS [10]. Dado el fuerte carácter matemático de estos problemas, la geometría, el control distribuido y la teoría de grafos son parte habitual de las soluciones que se desarrollan [11]. Artículos como [12] presentan la teoría de grafos como el armazón que estructura las soluciones que abordan problemas de topología, mostrando como describir diferentes arquitectura de formación. Esta opción se comparte en [13], pero esta vez focalizando el asunto en el caso de triangulación de sensores. De forma similar, en [14] se presenta este problema de formación de múltiples entidades, con la dificultad añadida de que hay cambios dinámicos en el entorno. En [15] se refleja un problema parecido en el que la contención se realiza por medio de un grupo de robots cuya topología se controla empleando un algoritmo distribuido. Este algoritmo se sostiene en el consenso entre las mediciones parciales del estado del sistema. Con un método diferente pero con el mismo objetivo, las Redes Neuronales [16] se están convirtiendo en una de las piedras angulares de las nuevas propuestas de formación óptima. Sin embargo, el principal objetivo de formación es llevar de forma coordinada a un grupo de robots a una configuración dada. En el problema de atrapamiento del TFG, por contra, la parte de formación del algoritmo proporciona un punto de equilibrio para el sistema, como en [17], dejando el movimiento de los robots a la parte de atrapamiento.

1.2. Objetivos y alcance

Conocido el contexto del problema que se aborda en el TFG, la meta fundamental es proponer una serie de estrategias de control novedosas que permitan el atrapamiento de un grupo de objetivos mediante el movimiento coordinado de un equipo de robots. Este atrapamiento implica llevar a todos y cada uno de los objetivos a su posición deseada particular. En ese sentido, la novedad radica tanto en las técnicas empleadas, que quedan fuera del contexto de las asignatura impartidas en la titulación, como en la dimensio-

alidad del problema, pues como se ha visto en la Sección anterior, rara vez es posible asegurar el número de elementos en el sistema a priori. Por ello, se han planteado los siguientes objetivos:

- **Diseño de estrategias generales en cuanto a dinámica de los objetivos como a número de ellos:** la dinámica de los objetivos en estos problemas es fuertemente no lineal tanto en la acción (la posición de los robots) como en el estado (la posición de los objetivos). Sin embargo, la idea es que las estrategias de control diseñadas se puedan aplicar a cualquier número de objetivos y con cualquier dinámica de movimiento.
- **Diseño de una estrategia de control basada en linealización y optimización:** para abordar el problema de forma satisfactoria se decide, en primer lugar, el desarrollo de una estrategia de control que parta del conocimiento adquirido en la carrera. La linealización del sistema no lineal nos ofrece una primera opción de control para poder evaluar si es necesario profundizar en técnicas más novedosas o sus prestaciones son suficientes. El segundo pilar de esta opción, la optimización, se aplica tanto en la obtención del punto de equilibrio del sistema como en la ley de control.
- **Diseño de una estrategia de control basada en control no lineal:** las limitaciones de la linealización llevan a plantear nuevas técnicas de control basadas en control no lineal, haciendo prescindible la búsqueda de un punto de equilibrio y la generalización hacia soluciones adaptativas. La naturaleza de estas nuevas estrategias resaltan, de nuevo, el marcado carácter no lineal del problema.
- **Implementación y evaluación de las estrategias diseñadas:** todas las soluciones son válidas para cualquier modelo dinámico de los objetivos y cualquier número de ellos. Las propuestas se han analizado empíricamente por medio de un simulador basado en Python y desarrollado a propósito en el marco de este trabajo. Para ello se emplean como modelos para los objetivos los usados en [8] y [9], junto con otros dos modelos modificados en el que se añaden perturbaciones del entorno que afectan a la dinámica de los objetivos.

Para llevar a cabo los objetivos del proyecto, se ha realizado un trabajo fundamental en tiempo y necesidad que se resume en los siguientes puntos:

- **Profundización en los conocimientos en teoría de control:** los conocimientos adquiridos en asignaturas de la titulación como Señales y Sistemas, Sistemas Automáticos o Ingeniería de Control han sido la base para el estudio teórico de técnicas de control más avanzadas. Prácticamente todos los aspectos de este trabajo han surgido del estudio autodidacta, dirigido por el director y apoyado en el conocimiento previo adquirido en la carrera. En particular, se ha realizado un importante esfuerzo de estudio y comprensión de control óptimo y no lineal, haciendo especial hincapié

en este último mediante cursos on-line (MIT 2.152 Nonlinear Control System Design). Esto se ha visto complementado con la lectura de bibliografía sobre control adaptativo y no lineal, además de teoría de grafos, como [11], [18], [19] o [20].

- **Recopilación de información y estudio del estado del arte:** el conocimiento del estado del arte ha sido fundamental para poder comprender las diferentes perspectivas desde las que se puede abordar el problema y para saber si nuestro trabajo tiene o no novedad científica. En ese sentido, valga como ejemplo toda la bibliografía mencionada en la Sección anterior, además del material especificado en el punto anterior.
- **Desarrollo desde cero de una plataforma de simulación:** en el momento de comenzar el Trabajo de Fin de Grado no se poseía herramientas para probar las soluciones de control diseñadas. Debido a la fuerte componente algorítmica del problema y la necesidad de realizar un gran número de experimentos, se ha desarrollado, desde cero, un simulador basado en Python en el marco del Trabajo de Fin de Grado. Este entorno no sólo implementa todas las dinámicas evaluadas, si no también una capa para añadir las diferentes estrategias de control, su simulación y visualización. Además, se ha diseñado otra capa adicional que permite realizar diferentes experimentos basados en Monte-Carlo, pudiendo evaluar métricas de funcionamiento que también se han desarrollado en el contexto de este Trabajo Fin de Grado. Si el lector siente interés en el simulador, los códigos fuente se encuentran subidos en un repositorio abierto¹ de Github.
- **Redacción de un artículo:** por último, resaltar que parte del tiempo del proyecto se ha invertido en la redacción de un artículo, felizmente aceptado y publicado en la conferencia internacional, *24th IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA 2019)*, que tendrá lugar en Zaragoza en Septiembre de 2019.

La organización temporal de estos objetivos se puede ver en el cronograma de la Fig. 1.3.

1.3. Estructura de la memoria

El resto de este trabajo queda organizado de la siguiente forma:

- El Capítulo 2 presenta la definición del problema junto con la descripción de los modelos dinámicos que se van a emplear a modo de evaluación de las estrategias. Además, se incluye la linealización de los modelos de comportamiento del Capítulo anterior.

¹<https://github.com/EduardoSebastianRodriguez/Control-strategies-for-non-linear-cooperative-entrapment-problems>

- El Capítulo 3 presenta la primera estrategia de control propuesta, basada en linealización y optimización del problema de formación.
- El Capítulo 4 presenta la segunda estrategia de control propuesta, incluyendo el análisis de la estabilidad de la solución por medio de la teoría de Lyapunov. Por otra parte, se describe brevemente una generalización del algoritmo que incluye un método de adaptación de los coeficientes.
- El Capítulo 5 expone los resultados de la evaluación de las estrategias de los dos Capítulos anteriores, extrayendo toda la información necesaria para describir las ventajas e inconvenientes de los algoritmos.
- Con el Capítulo 6 se acaba la memoria, relatando las conclusiones principales del trabajo y abriendo futuras áreas de mejora y trabajo futuro.
- Por último, en los Anexos se incluye información adicional y complementaria. Aquí se recoge, entre otros, el artículo publicado en ETFA 2019, que se basa fundamentalmente en los Capítulos 3 y 5 de la Memoria.

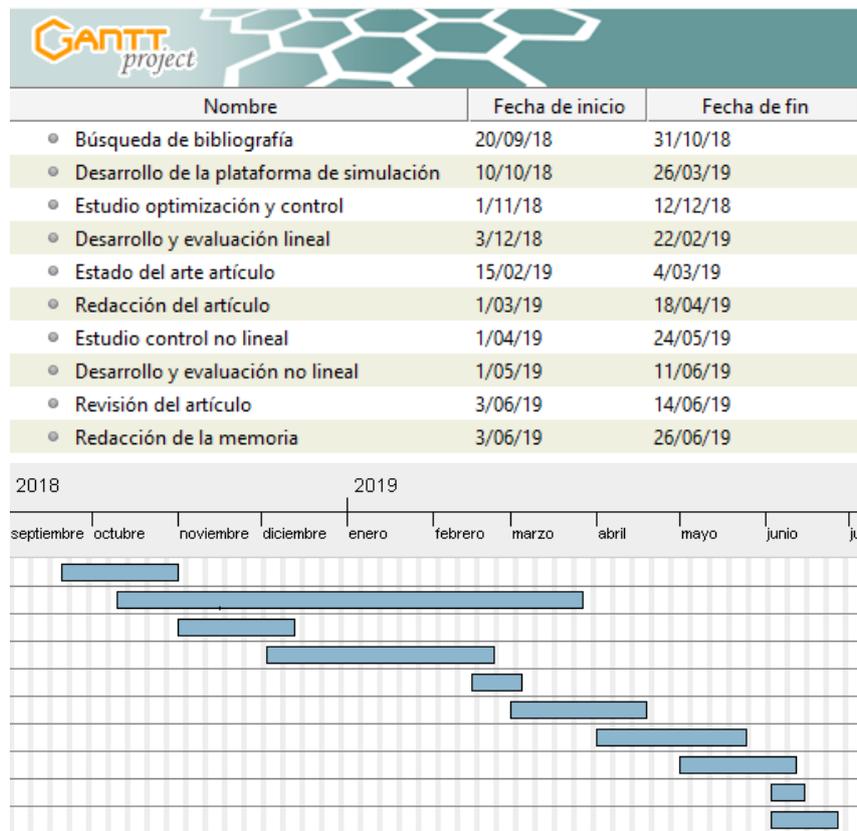


Figura 1.3: Cronograma del trabajo realizado para el TFG.

Capítulo 2

Definición del problema y modelos de comportamiento

"In mathematics the art of proposing a question must be held of higher value than solving it"

Georg Cantor

El objetivo fundamental de este Capítulo es explicar las bases del problema, aportando las definiciones fundamentales y detallando los diferentes modelos de comportamiento dinámico de los objetivos. Con estos modelos trabajaremos en los Capítulos 3 y 4 para evaluar las estrategias de control.

2.1. Definición del problema

Los problemas de atrapamiento están formados por dos grupos de entidades diferentes. El primer grupo está formado por los objetivos o presas, que son las entidades que queremos controlar, llevándolas a unas localizaciones deseadas. Al número de presas del grupo lo llamaremos m , mientras que usaremos el subíndice $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ para denotar a cada presa. Así, nuestro objetivo es llevar a las presas a un subconjunto de posiciones deseadas $\mathcal{P}^d = \{\mathbf{p}_j^d\}_{j=1}^m \in \mathbb{R}^{2m}$. Durante este proceso, la posición de las presas evolucionará de una configuración inicial $\mathcal{P}^0 = \{\mathbf{p}_j^0\}_{j=1}^m \in \mathbb{R}^{2m}$ hasta \mathcal{P}^d teniendo diferentes posiciones $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_j\}_{j=1}^m \in \mathbb{R}^{2m}$ por el camino.

El motor de este movimiento es la interacción del grupo de presas con el equipo de robots, que, siguiendo con la analogía, se llamaran cazadores. Similarmente a las presas, se denota como n al número de cazadores en el equipo, con i el índice que corresponde

a cada uno de ellos. El movimiento de los cazadores queda descrito por el subconjunto $\mathcal{H} = \{\mathbf{h}_i\}_{i=1}^{i=n} \in \mathbb{R}^{2n}$. A lo largo del trabajo se asume que todos los cazadores comparten un sistema de referencia de coordenadas global y cartesiano. Además, los cazadores conocen en todo momento el movimiento de las presas, que es fuertemente no lineal y ligado a sus posiciones, como se desarrolla más adelante. Así, el sistema global, formado por las presas y los cazadores, queda descrito por la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{p}}_j = f_j(\mathcal{P}, \mathcal{H}), \quad (2.1)$$

donde f_j es la función que gobierna el movimiento de la presa j . Esta función, además de ser no lineal, se considera continua y derivable. Por tanto, el principal objetivo es diseñar una estrategia de control para \mathcal{H} tal que lleve a \mathcal{P} hasta \mathcal{P}^d siguiendo la dinámica f_j .

2.2. Descripción de los modelos dinámicos

En esta Sección describe los dos modelos dinámicos que se van a considerar para evaluar las estrategias de control diseñadas. Como se verá a continuación, también se incluyen otros dos modelos dinámicos que se basan en los dos primeros pero que además contemplan una perturbación en su formulación. Además, como la primera estrategia de control tiene una componente de linealización, añadiremos aquí la versión linealizada de los cuatro modelos. Así, la denominación de los modelos se hace de acuerdo a cómo la distancia presa-cazador afecta al movimiento de la presa:

- Modelo Inverso, extraído de [8].
- Modelo Exponencial, extraído de [9].
- Modelo Inverso Perturbado, adaptado del Modelo Inverso.
- Modelo Exponencial Perturbado, adaptado del Modelo Exponencial.

2.2.1. Modelo Inverso

Este modelo se basa en un campo de potenciales de acción

$$W(\mathcal{H}, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{1}{\|\mathbf{d}_{ij}\|} \quad (2.2)$$

donde

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{p}_j - \mathbf{h}_i, \quad (2.3)$$

es el vector que va de la presa j al cazador i . La dinámica de las presas se obtiene por medio de la diferenciación de este campo

$$\dot{\mathbf{p}}_j = f_j^1(\mathcal{P}, \mathcal{H}) = \gamma_j \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{d}_{ij}}{\|\mathbf{d}_{ij}\|^3}, \quad (2.4)$$

siendo γ_j un parámetro escalar positivo.

La intuición que radica en este modelo es que la presa trata de escapar lo más lejos posible de los cazadores, con una intensidad inversamente proporcional a la distancia con ellos. Al incluir γ_j en la dinámica permitimos que, dentro del modelado, podamos incluir eventos reales como la irritación de la presa, fatiga o enfermedad.

Para la linealización del modelo se usa una aproximación de Taylor en torno al punto de equilibrio estable $(\mathcal{P}^d, \mathcal{H}^d)$. La obtención de este punto de equilibrio es parte de la primera estrategia de control y se desarrolla en el Capítulo 3. Así, la linealización de f_j es

$$\dot{\mathbf{p}}_j = f_j(\mathcal{P}, \mathcal{H}) \simeq \left. \frac{\partial f_j}{\partial \mathcal{P}} \right|_{\substack{\mathcal{P}=\mathcal{P}^d \\ \mathcal{H}=\mathcal{H}^d}} (\mathcal{P} - \mathcal{P}^d) + \left. \frac{\partial f_j}{\partial \mathcal{H}} \right|_{\substack{\mathcal{P}=\mathcal{P}^d \\ \mathcal{H}=\mathcal{H}^d}} (\mathcal{H} - \mathcal{H}^d). \quad (2.5)$$

Si llamamos

$$\mathbf{A}_{ji} = \left. \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{p}_i} \right|_{\substack{\mathcal{P}=\mathcal{P}^d \\ \mathcal{H}=\mathcal{H}^d}}, \text{ y } \mathbf{B}_{ji} = \left. \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{h}_i} \right|_{\substack{\mathcal{P}=\mathcal{P}^d \\ \mathcal{H}=\mathcal{H}^d}}, \quad (2.6)$$

entonces la Eq. (2.5) queda como

$$\dot{\mathbf{p}}_j \simeq \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_{ji} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_j^d) + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{ji} (\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_i^d). \quad (2.7)$$

Desde este punto de vista, se puede computar un modelo lineal e incremental en espacio de estados que represente todo el sistema

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{B}\mathbf{h}, \quad (2.8)$$

con $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{ij}]$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= [\mathbf{p}_1^T \quad \mathbf{p}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{p}_m^T]^T, \\ \mathbf{h} &= [\mathbf{h}_1^T \quad \mathbf{h}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{h}_n^T]^T. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La linealización de este modelo produce las matrices

$$\mathbf{A}_{jj} = \gamma_j \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{I}_2 \|\mathbf{d}_{ij}^d\|^3 + 3 \|\mathbf{d}_{ij}^d\| \mathbf{d}_{ij}^d (\mathbf{d}_{ij}^d)^T}{\|\mathbf{d}_{ij}^d\|^5}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{B}_{ji} = \gamma_j \frac{-\mathbf{I}_2 \|\mathbf{d}_{ij}^d\|^3 + 3 \|\mathbf{d}_{ij}^d\| \mathbf{d}_{ij}^d (\mathbf{d}_{ij}^d)^T}{\|\mathbf{d}_{ij}^d\|^5}, \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{d}_{ij}^d = \mathbf{p}_j^d - \mathbf{h}_i^d$ es el vector en el punto de linealización. Un hecho a remarcar es que \mathbf{A}_{ji} es $\mathbf{0}$ porque los modelos que se están contemplando no consideran interacciones entre presas. De hacerlo, este término sería fácilmente incluido en la formulación. En la Fig. 2.1 se muestra un ejemplo de trayectoria seguida por una presa (en verde) que tiene la dinámica descrita. Los cuadrados amarillos describen las posiciones iniciales y en rojo las posiciones finales. Remarcar que todos los escenarios de simulación tienen un límite de ± 5 m y que, como la idea es visualizar las diferencias entre dinámicas, los cazadores están quietos para ver como se mueven las presas.

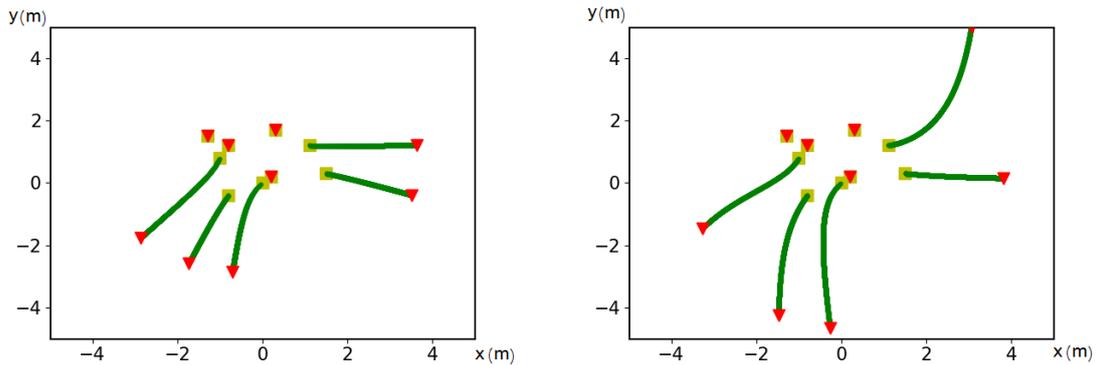


Figura 2.1: Comparativa del comportamiento de 5 presas ante 4 cazadores. A la izquierda, Modelo Inverso; a la derecha, Modelo Inverso Perturbado.

Como ya se ha comentado, este modelo sirve de base para generar uno nuevo en el que se adiciona un término que se adapta de [21]. La idea de este término es que las presas no sólo reaccionan al movimiento de los cazadores sino que también reaccionan a fenómenos del medio ambiente. La forma que adopta esta perturbación es un campo vectorial. Por ejemplo, podemos modelar fenómenos en los que la presa va a una zona de sombra en verano, o zonas con pendiente. Además, este planteamiento permite expandir el campo de aplicación de las soluciones a otros dominios, como la propagación de focos de fuego en espacios con viento. La modificación de este modelo genera la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{p}}_j = f_j^1(\mathcal{P}, \mathcal{H}) + \mathbf{W}(\mathbf{p}_j)\mathbf{p}_j, \quad (2.12)$$

donde $\mathbf{W}(\mathbf{p}_j)$ modela el campo vectorial lineal. En el caso de un campo constante, esta perturbación sólo provoca una variación en 2.11, sumándole el término $\mathbf{W}(\mathbf{p}_j^d)$:

$$\mathbf{A}_{jj} = \gamma_j \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{I}_2 \|\mathbf{d}_{ij}^d\|^3 + 3 \|\mathbf{d}_{ij}^d\| \mathbf{d}_{ij}^d (\mathbf{d}_{ij}^d)^T}{\|\mathbf{d}_{ij}^d\|^5} + \mathbf{W}(\mathbf{p}_j^d), \quad (2.13)$$

Es a este modelo al que se llama *Modelo Inverso Perturbado* y la Fig. 2.1 muestra un ejemplo de este comportamiento. Es importante notar la diferencia entre los dos Modelos en la Fig. 2.1, teniendo en cuenta que lo único que cambia es la perturbación añadida.

2.2.2. Modelo Exponencial

En este modelo, la presa tiene dos comportamientos diferentes en función de cuán cerca está el grupo de cazadores de ella. Si existe un cazador dentro de un círculo de radio r centrado en \mathbf{p}_j , la presa j se pone “furiosa”, mientras que si no es este el caso, diremos que la presa está “calmada”. En ambos escenarios, el movimiento de la presa está gobernado por un potencial de acción Gaussiano. Esta dinámica se describe como

$$\dot{\mathbf{p}}_j = f_j^2(\mathcal{P}, \mathcal{H}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_j \mathbf{d}_{ij} e^{-\chi_{ij}}, & \text{si } \|\mathbf{d}_{ij}\| > r \\ \sum_{i=1}^n \beta_j \alpha_j \mathbf{d}_{ij} e^{-\chi_{ij}}, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (2.14)$$

donde $\chi_{ij} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es igual a

$$\chi_{ij} = \frac{1}{\sigma_{ij}^2} \mathbf{d}_{ij}^T \mathbf{d}_{ij}, \quad (2.15)$$

y $\alpha_j > 0$, $\beta_j > 0$ dos constantes arbitrarias. En particular, es β_j es el que se usa para describir la intensidad del enfado de las presas.

La linealización de la ecuación 2.14 da lugar al siguiente modelo

$$\mathbf{A}_{jj} = \mu_j \sum_{i=1}^n e^{-\chi_{ij}} \left(\mathcal{I} - \frac{2}{\sigma_{ij}^2} \mathbf{d}_{ij}^d (\mathbf{d}_{ij}^d)^T \right), \quad (2.16)$$

y

$$\mathbf{B}_{ji} = \mu_j \sum_{i=1}^n e^{-\chi_{ij}} \left(-\mathcal{I} + \frac{2}{\sigma_{ij}^2} \mathbf{d}_{ij}^d (\mathbf{d}_{ij}^d)^T \right), \quad (2.17)$$

con

$$\mu_j = \begin{cases} \alpha_j, & \text{si } \|\mathbf{p}_j - \mathbf{h}_i\| > r \\ \beta_j \alpha_j, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2.18)$$

En la Fig. 2.2 se muestra un ejemplo del comportamiento de este modelo en las mismas condiciones que para la Sección anterior.

Similarmente al Modelo Inverso, se construye un caso Perturbado del Modelo Exponencial que radica en el hecho de que las presas no sólo se ven perturbadas por los cazadores, también por el entorno. Este nuevo modelo se expresa como

$$\dot{\mathbf{p}}_j = f_j^2(\mathcal{P}, \mathcal{H}) + \mathbf{W}(\mathbf{p}_j) \mathbf{p}_j \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{W}(\mathbf{p}_j)$ es la misma constante descrita en la Sección anterior. La Fig. 2.2 da buena cuenta del cambio que sufre el comportamiento de la presa ante la presencia de la perturbación.

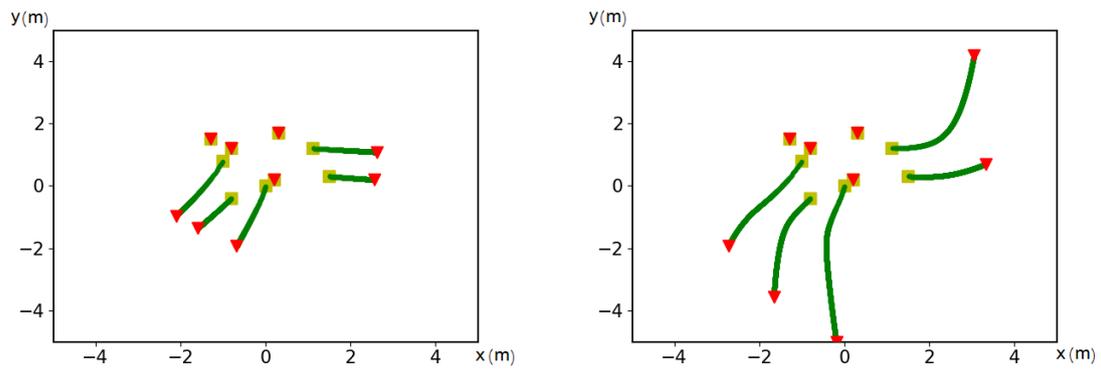


Figura 2.2: Comparativa del comportamiento de 5 presas ante 4 cazadores. A la izquierda, Modelo Exponencial; a la derecha, Modelo Exponencial Perturbado.

Capítulo 3

Estrategias de control basadas en linealización y optimización

” The absence of evidence is not the evidence of absence”

Tayfur Altiok and Benjamin Melamed

La primera solución de control que se propone en el trabajo se basa en la aproximación lineal de la dinámica no lineal de las presas, que hemos desarrollado en el Capítulo anterior. A continuación se describen las dos partes fundamentales de la estrategia: la obtención del punto de operación y el diseño de la ley de control.

3.1. Ley de Control

En primer lugar, se describe la Ley de Control, asumiendo que ya conocemos el punto de linealización del sistema; más tarde se desarrolla como se obtiene \mathcal{H}^d . Una vez que se tienen los modelos linealizados y se conoce el punto de operación óptimo con respecto a la posición deseada de las presas, se puede construir un regulador MIMO. Para este problema, y siguiendo la idea de optimización que acompaña al problema de formación, se considera una estrategia de control centralizada LQR [22]. La razón de emplear una solución centralizada en lugar de una distribuida radica en el hecho de que esta estrategia propone una primera aproximación al problema. Como se extiende en los Capítulos 5 y 6, el futuro trabajo buscará aplicar técnicas distribuidas a partir de los algoritmos de este trabajo. Volviendo al controlador, el LQR minimiza la función de coste

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{p}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{p}(t) + \mathbf{h}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{h}(t)) . \quad (3.1)$$

Las matrices $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ponderan la entrada y la salida del sistema en la optimización (del controlador). La solución a este problema se obtiene a partir de la matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ que resuelve la ecuación algebraica de Riccati en tiempo continuo,

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B})(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) + \mathbf{Q}, \quad (3.2)$$

De aquí se deriva el regulador

$$\mathbf{L} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}), \quad (3.3)$$

y la consiguiente ley de control

$$\mathbf{h}(t) = -\mathbf{L}\mathbf{p}(t). \quad (3.4)$$

Esta ley de control, en definitiva, busca la solución que no sólo lleva a las presas a sus posiciones deseadas, como se ve en el primer término de la Eq. (3.1); sino que también optimiza las acciones de control para que sean lo más suaves y menos costosas posibles, como se ve en el segundo término de la Eq. (3.1).

3.2. Punto de operación

En esta solución, la linealización se aplica en torno al conjunto de posiciones deseadas para las presas \mathcal{P}^d . Así, la búsqueda del conjunto de posiciones deseadas de los cazadores (o \mathcal{H}^d) está resolviendo, de forma implícita, un problema de formación en el que la solución ofrece un conjunto de posiciones de los cazadores que satisface

$$f_j(\mathcal{P}^d, \mathcal{H}^d) = 0, \quad (3.5)$$

para todo $j \in 1, \dots, m$. El algoritmo de optimización escogido es *Levenberg-Marquardt* debido a su capacidad de encontrar rápida y exitosamente el punto de operación del sistema cuando el problema es multi-variable y vectorial. Sin embargo, en esta etapa, cualquier otro método de optimización que cumpla estas condiciones puede emplearse sin afectar a la solución general.

De todas las posibles configuraciones que cumplen la Eq. (3.5), aquellas que distribuyen de forma uniforme a los cazadores en torno a las presas y las colocan más cerca de la manada exhiben mejores propiedades de control, como acciones de control más fuertes o mayor maniobrabilidad. Para favorecer una distribución uniforme de los cazadores, establecemos una posición inicial $\mathcal{H}^0 = \{\mathbf{h}_i(0)\}$, rodeando a las presas. La forma de esta posición inicial es la de una circunferencia de radio R en la que la distribución de los cazadores es espacialmente igual, donde R es una constante positiva y arbitraria,

$$\mathbf{h}_i(0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j + R \begin{pmatrix} \cos(2\pi i/n) \\ \sin(2\pi i/n) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

con $i = 1, \dots, n$.

Para lidiar con el requerimiento de proximidad de los cazadores a las presas, primero debemos considerar que las funciones que describen la dinámica de las presas se basan en potenciales de acción que decrecen con la distancia. Esto implica que el método numérico va a tender a buscar el conjunto \mathcal{H}^d alejando a los cazadores de las presas. En el infinito, la velocidad de las presas debido a la interacción de los cazadores es cero, cumpliendo la Eq. (3.5) pero corrompiendo el objetivo de control. Para superar esta limitación, introducimos en el método numérico un término de penalización en la función de coste que castiga las soluciones que llevan a los cazadores fuera del área inicial de radio R . De esta manera, se busca el punto de equilibrio

$$\mathcal{H}^d = \min_{\mathcal{H}} (\|\mathcal{H} - \mathcal{H}_0\|) \quad (3.7)$$

sujeto a $f_j(\mathcal{P}^d, \mathcal{H}) = 0$.

De esta forma, el algoritmo general que describe la primera solución de control para el problema de atrapamiento es el siguiente:

Algorithm 1 Algoritmo Computacional de la Ley de Control

- 1: **Input:** n, m, f_j, \mathcal{P}^d
 - 2: **Output:** $\mathcal{H}^d, \mathbf{L}$
 - 3: $[\mathcal{H}^d, \text{OK}] = \text{solve}(n, m, f_j, \mathcal{P}^d)$, Eqs. (3.5)-(3.7)
 - 4: **if** OK **then**
 - 5: $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \text{linearize}(f_j, \mathcal{P}^d, \mathcal{H}^d)$, Eqs. (2.5)-(2.8)
 - 6: $\mathbf{L} = \text{findLQR}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, Eqs. (3.1)-(3.4)
 - 7: **end if**
-

La Fig- 3.1 muestra un ejemplo de los resultados que proporciona dicho algoritmo.

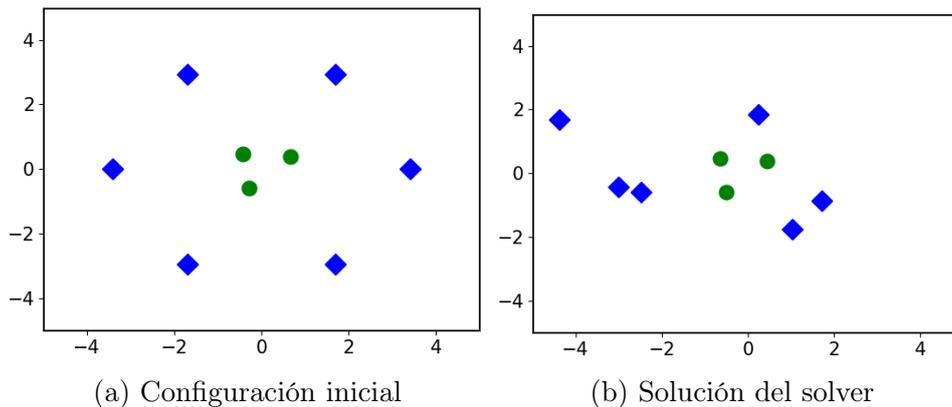


Figura 3.1: Funcionamiento del solver numérico para el caso de 6 cazadores (azul) y 3 presas (verde) con el Modelo Inverso.

Capítulo 4

Análisis no lineal: control no lineal y adaptativo

”In order to solve this differential equation you look at it until a solution occurs to you”

George Polya

Este Capítulo tiene como objetivo el desarrollo de estrategias de control que no necesiten de la linealización del sistema para poder llevar a cabo la tarea de atrapamiento. Una desventaja inherente a cualquier solución linealizada es que esta falla a medida que nos alejamos del punto de operación. Además, como se verá a continuación, estas estrategias permiten diseñar, de forma casi intuitiva, una ley de control adaptativa para los parámetros del sistema, haciendo más atractiva la propuesta. Para ello, en un primer lugar, se darán unas pequeñas pinceladas sobre la teoría de estabilidad de Lyapunov, que es la base para los diseños de este Capítulo. Seguidamente, se discuten las diferentes aproximaciones al problema estudiadas para luego detallar la escogida. Por último, se aborda la deducción de la ley de adaptación a partir de la estrategia de control no lineal original.

4.1. Breve introducción a la teoría de estabilidad de Lyapunov

Para poder comprender de donde se obtiene la estrategia de control que se desarrolla en este Capítulo, primero hay que introducir una serie de conceptos que nos van a acompañar en nuestro camino. La teoría de Lyapunov viene del estudio de sistemas dinámicos a partir de las ecuaciones diferenciales que los describen. De forma general, esta teoría dice que cualquier punto de equilibrio \mathbf{X}^0 (en nuestro caso, $\mathbf{X}^0 = (\mathcal{P}^0, \mathcal{H}^0)$) es estable si todas las

soluciones que parten de este punto permanecen en el entorno de \mathbf{X}^0 . Este postulado se aplica a las funciones de la forma $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X})$.

Una de las herramientas que proporciona Lyapunov dentro de su teoría es poder caracterizar cuándo un sistema es global y asintóticamente estable. En esos casos no es necesario hablar de un punto de equilibrio concreto \mathbf{X}^0 en tanto que todo $\mathbf{X} \in D$ es un punto de equilibrio estable, con $D \in \mathbb{R}^n$ el dominio del problema y n su dimensión. La idea es tener una herramienta que nos permita diseñar un controlador que haga que nuestro sistema sea global y asintóticamente estable. Para ello, Lyapunov estableció el siguiente teorema: si encontramos una función $V(\mathbf{X})$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\mathbf{X}) \text{ es una función escalar} \\ V(\mathbf{X}) \geq 0 \text{ (positiva definida)} \\ \dot{V}(\mathbf{X}) \leq 0 \text{ (negativa definida)} \\ V(\mathbf{X}) \rightarrow +\infty \text{ si } \|\mathbf{X}\| \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (4.1)$$

entonces el sistema definido por $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X})$ es global y asintóticamente estable. En el Anexo A.1 se extiende formalmente las definiciones de equilibrio y estabilidad.

Por tanto, el objetivo va a ser diseñar una acción, \mathbf{u} , que haga cumplir las cuatro condiciones de (4.1) para el sistema de atrapamiento en bucle cerrado.

4.2. Selección del Estado a controlar

Para comenzar esta Sección, hay que tener presente que nuestro objetivo de control es llevar al conjunto \mathcal{P} a \mathcal{P}^d por medio del movimiento de los cazadores, representado por el conjunto \mathcal{H} . Teniendo esto en cuenta, en el TFG se han planteado tres opciones de definición de estado y acción:

1. La posición de las presas y cazadores es el estado y la velocidad de los cazadores es la acción: $\mathbf{X} = [\mathbf{p}^T, \mathbf{h}^T]^T$ y $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{h}}$.
2. La distancia entre presas y cazadores es el estado y la velocidad de los cazadores es la acción: $\mathbf{X} = \mathbf{d}_{ij}$, definido en la Eq. (2.3), y $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{h}}$.
3. La posición de las presas es el estado y la posición de los cazadores es la acción: $\mathbf{X} = \mathbf{p}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{h}$.

La opción elegida finalmente ha sido la tercera, en la que la posición de las presas se controla mediante la acción directa sobre la posición de los cazadores. Esta elección ha permitido también hacer analogías más directas con la primera estrategia de control, en la que $\mathbf{X} = \mathbf{p}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{h}$. El análisis detallado de las implicaciones de cada representación se puede consultar en el Anexo A.2. Por último, no debemos olvidar que el problema es bidimensional y que cada presa o cazador aporta 2 variables al sistema.

4.3. Desarrollo teórico de la estrategia de control

Partiendo del estado y acción seleccionados, se puede formular el sistema como

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}(\mathbf{X}, \mathbf{u}) + \mathbf{N}(\mathbf{X}, \mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{W}\mathbf{X} \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{X} = \mathbf{p}^T$ es el estado, $\mathbf{u} = \mathbf{h}^T$ es la acción y $\mathbf{M}(\mathbf{X}, \mathbf{u})$ y $\mathbf{N}(\mathbf{X}, \mathbf{u})$ son

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{h}) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{p}_m, \mathbf{h}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = [G_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{h}) \quad \dots \quad G_m(\mathbf{p}_m, \mathbf{h})] \quad (4.3)$$

funciones no lineales y dependientes tanto del estado como de la acción. El término $\mathbf{W}\mathbf{X}$ es $\mathbf{0}$ para los modelos en los que no hay perturbación. En particular, las funciones $F_j(\mathbf{p}_1, \mathbf{h})$ y $G_j(\mathbf{p}_1, \mathbf{h})$ vienen de f_j , de forma que partimos la función original que describe la dinámica de las presas para que el sistema pueda explicarse de acuerdo a la Eq. (4.2). Por ejemplo, para el Modelo Inverso,

$$\begin{aligned} F_j &= a_j \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{p}_j}{\|\mathbf{d}_{ij}\|^3} \\ G_j &= a_j \sum_{i=1}^n \frac{-1}{\|\mathbf{d}_{ij}\|^3} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para el Modelo Exponencial

$$\begin{aligned} F_j &= \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_j \mathbf{p}_j e^{-\chi_{ij}}, & \text{si } \|\mathbf{d}_{ij}\| > r \\ \sum_{i=1}^n \beta_j \alpha_j \mathbf{p}_j e^{-\chi_{ij}}, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \\ G_j &= \begin{cases} \sum_{i=1}^n -\alpha_j e^{-\chi_{ij}}, & \text{si } \|\mathbf{d}_{ij}\| > r \\ \sum_{i=1}^n -\beta_j \alpha_j e^{-\chi_{ij}}, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

A partir de este punto, para simplificar la lectura, se van a omitir las dependencias del estado y acción en los términos \mathbf{M} y \mathbf{N} .

En todos los casos, ya que el objetivo de control no es hacer $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ si no llevar \mathcal{P} a \mathcal{P}^d , para poder aplicar estas técnicas debemos realizar el siguiente cambio de variable

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{p}^d \quad (4.6)$$

de forma que realmente, el objetivo del sistema de control sea hacer que $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$. Este cambio de variable, que facilita el objetivo de control, supone un cambio en la Eq. (4.2), teniendo

$$\dot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{M}} + \mathbf{M}^d + \mathbf{N}\mathbf{u} + \mathbf{W}\mathbf{X}. \quad (4.7)$$

Con la función que describe, de forma general, el sistema de atrapamiento (independientemente de la dinámica concreta de las presas), es hora de diseñar el controlador. Para ello, hay varias técnicas que podrían ajustarse al problema. Todas ellas emanan de lo discutido en la Sección 4.1 y su formulación formal se puede ver en los Anexos A.3 y A.4. A modo de resumen, se ha comprobado que la formulación necesaria para aplicar la mayoría de estas técnicas no se ajusta directamente a la representación elegida, lo que, con los conocimientos disponibles, imposibilita su aplicación.

Esto ha llevado a una búsqueda de la acción que utilice (4.1) directamente. Se ha considerado la siguiente función de Lyapunov, $V = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ para obtener

$$\dot{V} = \mathbf{X}^T\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^T(\widetilde{\mathbf{M}} + \mathbf{M}^d + \mathbf{N}\mathbf{u} + \mathbf{W}\mathbf{X}) \quad (4.8)$$

Así, si se escoge una acción tal que se satisface la siguiente expresión

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^T(\mathbf{N}\mathbf{N}^T)^{-1}(-\widetilde{\mathbf{M}} - \mathbf{M}^d - g(\mathbf{X}) - \mathbf{W}\mathbf{X}). \quad (4.9)$$

ya tenemos la ley de control para los sistemas, donde es importante notar que el término de la derecha en la igualdad también depende de la acción. Por último, si sustituimos la Eq. (4.9) en la Eq. (4.8), tenemos

$$\dot{V} = \mathbf{X}^T\dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{X}^T g(\mathbf{X}) \leq 0. \quad (4.10)$$

La función $g(\mathbf{X})$ puede tener la forma que queremos con tal de que haga que $-\mathbf{X}^T g(\mathbf{X}) \leq 0$. Por simplicidad, escogemos $g(\mathbf{X}) = K_u\mathbf{X}$.

El problema entonces reside en el cálculo de la acción que satisface la Eq. (4.10). Una vez que se tiene esta ley de control, un inconveniente principal nos asalta: en \mathbf{u} , $\widetilde{\mathbf{M}}$, \mathbf{M}^d y \mathbf{N} dependen de \mathbf{u} , así que en cada instante hay que resolver numéricamente la Eq. (4.9) para calcular la posición de los cazadores. Este problema, que nace de que el sistema es no lineal tanto en el estado como en la acción, no es abordado en la literatura y por ahora, la única forma de resolverlo es numéricamente. Siendo este el caso, el problema de optimización, que se resuelve usando *Levenberg-Marquardt* de nuevo, busca hacer que

$$\widetilde{\mathbf{M}} + \mathbf{M}^d + \mathbf{N}\mathbf{u} + \mathbf{W}\mathbf{X} - g(\mathbf{X}) = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

Los motivos de reformular la Eq. (4.9) a la Eq. (4.11) es para aligerar el coste computacional que requiere la optimización.

Es interesante notar que la idea de alto nivel de la propuesta de control consiste en compensar la dinámica no lineal del sistema, sustituyéndola por la dinámica deseada, procedimiento típico en la mayoría de esquemas y soluciones de control. Las particularidades de este caso son:

- Se proporciona una forma compacta de ley de control para una clase de sistemas que no se discuten en la literatura: sistemas no lineales tanto en el estado como en la acción.

- Se tiene una forma ágil de proceder para el diseño de una ley de adaptación, como se verá en la siguiente sección.

4.4. Generalización de la estrategia a sistemas adaptativos

El mayor inconveniente de la estrategia que se acaba de diseñar y, en general, de cualquiera que fía su éxito en el conocimiento preciso de la dinámica del sistema, es que el comportamiento se deteriora si los parámetros se desvían de los que se han estimado. Así, como se discute a continuación, la teoría de estabilidad de Lyapunov da, de forma implícita, la forma de diseñar una ley de adaptación para el controlador.

Para ello, primero se va a cambiar la formulación de la Eq. (4.7) para que aparezcan, de forma explícita, los parámetros del sistema:

$$\dot{\mathbf{X}} = \widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{a} + \mathbf{M}^d\mathbf{a} + \mathbf{N}\mathbf{u} + \mathbf{W}\mathbf{X} \quad (4.12)$$

donde \mathbf{a} es el vector de parámetros del sistema. En concreto, los parámetros que se estiman en este trabajo son las γ_j en el Modelo Inverso e Inverso Perturbado; y las α_j en el Modelo Exponencial y Exponencial Inverso. Como es de esperar, el conocimiento de esos parámetros es limitado, de forma que tendremos

$$\dot{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{a}}\widetilde{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{a}}\mathbf{M}^d + \mathbf{N}\mathbf{u} + \mathbf{W}\mathbf{X}. \quad (4.13)$$

La desviación entre \mathbf{a} y $\hat{\mathbf{a}}$ supondrá que se deje de cumplir (4.1) y el fallo en la estabilidad y convergencia del sistema. Por tanto, hay que cambiar ligeramente V para que se vuelvan a cumplir las condiciones de estabilidad global y asintótica. Si definimos

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{a}}^T\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{a}} \quad (4.14)$$

siendo \mathbf{S} una matriz de pesos para ponderar la velocidad de adaptación y $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}$, se tendrá que

$$\dot{V} = \mathbf{X}^T\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^T(\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{a} + \mathbf{M}^d\mathbf{a} + \mathbf{N}\mathbf{u} + \mathbf{W}\mathbf{X}) + \dot{\tilde{\mathbf{a}}}^T\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{a}}. \quad (4.15)$$

Si se aplica la ley de control de la Eq. (4.9), habrá que hacer que

$$\dot{\tilde{\mathbf{a}}}^T\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{X}^T(\widetilde{\mathbf{M}} + \mathbf{M}^d)\tilde{\mathbf{a}} = 0. \quad (4.16)$$

Despejando, se obtiene

$$\dot{\tilde{\mathbf{a}}}^T = -\mathbf{X}^T(\widetilde{\mathbf{M}} + \mathbf{M}^d)\mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad (4.17)$$

que indica como deben evolucionar los parámetros estimados para que el sistema sea estable y converja a la solución deseada. Es importante remarcar que, aunque se cumplan todas las condiciones de (4.1), no es necesario que el sistema acabe con $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}$. Esto es algo habitual en las leyes de adaptación en tanto que el cambio de los parámetros estimados es función de la proximidad del estado a nuestro objetivo.

Capítulo 5

Análisis de los resultados

"Pure mathematics is on the whole distinctly more useful than applied. For what is useful above all is technique, and mathematical technique is taught mainly through pure mathematics"

G. H. Hardy

Este Capítulo evalúa las soluciones de control propuestas en los Capítulos 3 y 4. La base fundamental de esta evaluación es la simulación a partir de los modelos del Capítulo 2. Para ello, se analiza por separado la estrategia basada en linealización-optimización y las estrategias no lineales, dejando para el Capítulo 6 las conclusiones de comparar las dos aproximaciones.

5.1. Evaluación del control basado en linealización y optimización

En esta Sección se analiza empíricamente el sistema de control basado en linealización y optimización del Capítulo 3. Con ese objetivo se llevan a cabo dos tipos de análisis principales. Pero antes hay que definir una serie de conceptos.

En primer lugar, para el estudio de los sistemas se van a definir dos métricas de error. Por un lado, interesa que el sistema acabe convergiendo a la configuración deseada. Para ello, se caracterizan las situaciones en las que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{p}}_j(t) = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, es decir, cuando el conjunto de presas \mathcal{P} llega a un estado estacionario. Por otro lado, ya que el conjunto de equilibrios del sistema no es único,

también interesa caracterizar el hecho de que se haya llegado al equilibrio deseado (el conjunto \mathcal{P}^d). Por consiguiente, se define

$$\text{MAE}(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \|\mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_j^d\| \quad (5.2)$$

como el máximo error absoluto en el instante t , denotando como E al límite cuando este valor tiene a infinito, que es la mejor medida del funcionamiento global del sistema. Así, tanto E como la convergencia permiten distinguir dos fenómenos diferentes. El conjunto \mathcal{P} se dice que alcanza el conjunto deseado \mathcal{P}^d si y sólo si $E \leq \epsilon$ y el sistema ha convergido. En ese caso, diremos que se ha alcanzado el *éxito*. Si $E \leq \epsilon$ pero el sistema no es convergente, no se puede asegurar que \mathcal{P} permanece dentro de la esfera m -dimensional de radio ϵ cuando $t > K$. De forma similar, las presas pueden converger a un conjunto \mathcal{P} distinto de \mathcal{P}^d , rompiendo la condición $E \leq \epsilon$.

Los valores concretos de los parámetros de los diferentes modelos son:

- Modelo Inverso: $\gamma_j = 1$
- Modelo Exponencial: si hay una presa, $\sigma_{ij} = 100$, $\alpha_j = 1,5$, $\beta_j = 0,5$; en otro caso, $\sigma_{ij} = 1$, $\alpha_j = 100$, $\beta_j = 0,85$. En ambos casos, $r = 1$ m.
- Matriz de perturbación del medio ambiente

$$\mathbf{W}(\mathbf{p}_j) = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0,02 & -0,002 \\ -0,007 & 0,06 \end{bmatrix}.$$

- $\epsilon = 0,2$ m; $K = 1000$.

El radio para la posición deseada de los cazadores se ha fijado en $R = 2$ m en todos los experimentos.

Para comenzar se introduce un ejemplo ilustrativo para mostrar cuál es el funcionamiento del sistema. Este ejemplo está formado por un grupo de 3 presas que se mueven siguiendo la dinámica del Modelo Inverso. Por otro lado, tenemos a nuestra disposición un equipo de 5 cazadores que se mueven siguiendo el Algoritmo 1.

La Fig. 5.1 describe las trayectorias de los elementos del sistema: en $t = 0$, las presas comienzan dentro de una *región de atracción* centrada en sus posiciones deseadas mientras que los cazadores comienzan en las posiciones que ha obtenido el solver numérico (cuadrados amarillos). La llamada región de atracción es un círculo al rededor de la posición de las presas que modela la distancia a la que se han alejado de donde se supone que deberían estar. Debido a la discrepancia entre la posición inicial de las presas y la posición deseada, los cazadores se mueven siguiendo la ley de control diseñada (líneas azules), haciendo que cambie la posición de las presas (líneas verdes). Los triángulos rojos

muestran la posición final de las entidades. En el caso de las presas, estas se encuentran en sus posiciones deseadas, marcadas por los triángulos magenta. Por contra, los cazadores, normalmente, acaban en posiciones relativamente lejanas de las iniciales, demostrando la diferencia entre el problema de formación para encontrar \mathcal{H}^d y el problema de atrapamiento. De la Fig. 5.1 se puede comprobar que los cazadores, en un primer momento, se

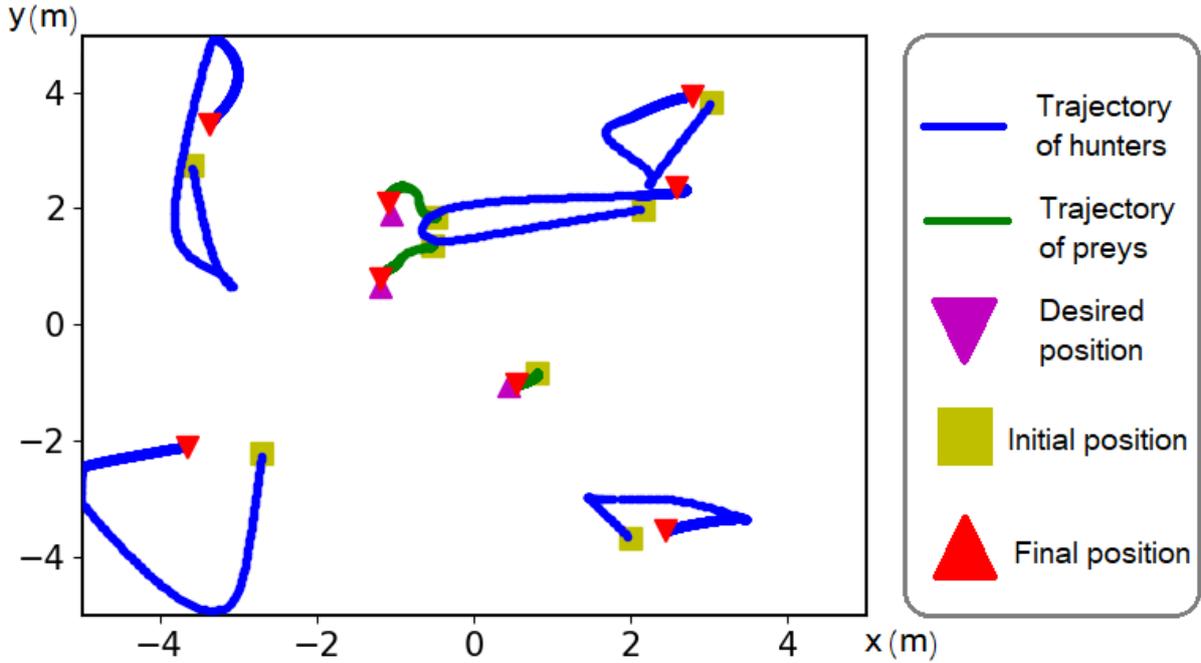


Figura 5.1: Comportamiento del ejemplo ilustrativo.

alejan de las presas para luego volver a posiciones más cercanas. La razón detrás de este comportamiento es que, inicialmente, los cazadores tienden a reducir la intensidad de sus interacciones con las presas. Una vez que estas interacciones tienen la intensidad necesaria y son suficientemente suaves, los cazadores puede llevar a las presas a \mathcal{P}^d sin riesgo de llegar a una situación inestable.

Una vez que se tiene en mente el comportamiento del sistema, se va a describir el primer experimento sobre la estrategia de control. La idea se focaliza en analizar el funcionamiento del solver numérico en su tarea de encontrar un candidato apropiado para el conjunto de posiciones de los cazadores \mathcal{H}^d . El objetivo es evaluar cuántos cazadores necesita el solver para obtener una solución exitosa. Para este test se ha diseñado un entorno en el que las variables son el número de presas y el número de cazadores. Para cada Modelo, tanto n como m varían de $[1, 1]$ hasta $[10, 10]$, probando cada combinación 100 veces con posiciones aleatorias de las presas.

La Fig. 5.2 muestra los resultados obtenidos. Dado un determinado número de presas m , el solver necesita al menos $n = m$ cazadores para ser exitoso en su tarea. En esencia, cada cazador aporta 2 grados de libertad al sistema mientras que cada presa supone 2 condiciones para satisfacer $\dot{\mathbf{p}}_j = 0$. Así, en tanto que se está trabajando en un espacio de

estados lineal, se necesita que $n = m$ para tener una solución para el sistema de ecuaciones. Además, también se observa que hay una degradación en el funcionamiento del solver cuando n es mucho mayor que m porque hay demasiadas variables de decisión que ajustar ($2n$), pasando de ratios del 100 % de convergencia del solver numérico hasta ratios del 80 % en el Modelo Exponencial. Un comportamiento similar se observa cuando m se incrementa. Esto se debe a que la dimensionalidad (y por tanto la complejidad) del problema crece, haciendo que la tarea de optimización del solver sea más difícil. Ciertamente, es importante notar las diferencias entre los casos de 1 presa y 7 presas en ambos modelos. El solver presenta ratios de convergencia de un 100 % con una presa mientras que, con 7 presas, sólo consigue un 61 % (en ambos casos con 7 cazadores). El otro elemento remarcable de este

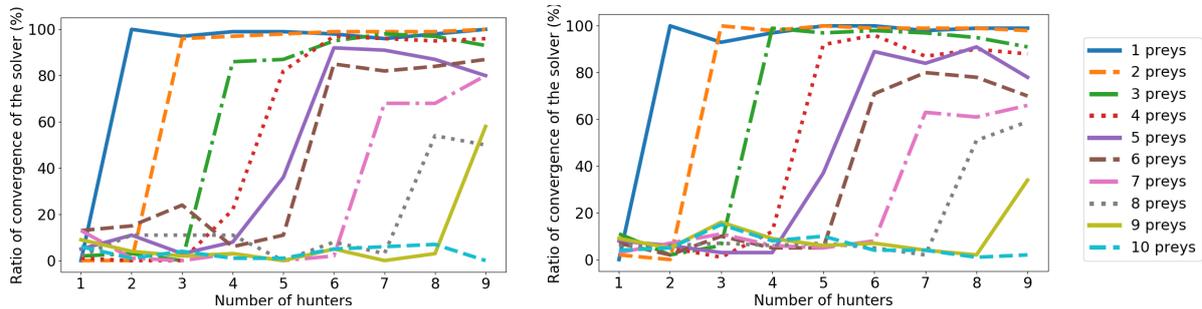


Figura 5.2: Comportamiento del solver con respecto al número de cazadores: en la izquierda, el Modelo Inverso; a la derecha, el Modelo Exponencial.

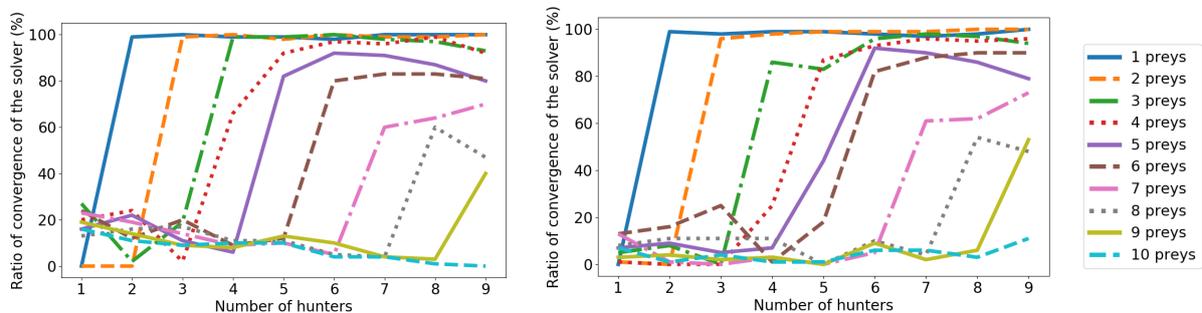


Figura 5.3: Comportamiento del solver con respecto al número de cazadores en los casos Perturbados: en la izquierda, el Modelo Inverso; a la derecha, el Modelo Exponencial.

estudio es el hecho de que los resultados con los cuatro Modelos son similares: los Modelos Inverso y Exponencial presentan porcentajes parecidos, como se puede comprobar en la Fig. 5.2. Esto se extrapola a sus correspondientes modelos perturbados porque la inclusión del término $\mathbf{W}(\mathbf{p}_j)$ no implica un cambio en la dimensionalidad del problema, grados de libertad o complejidad en el solver. Esto se puede comprobar en la Fig. 5.3.

El segundo análisis concierne a los efectos del tamaño de la región de atracción en la posición de cazadores y presas. Previamente ya se ha definido el concepto de región de atracción; únicamente comentar que este se extiende también a los cazadores, de forma

que inicialmente tanto cazadores como presas comienzan dentro de unas regiones de radio R_h y R_p centradas en sus posiciones deseadas. La posición inicial concreta es una distribución uniforme dentro de esa región. De esta forma, nuestro objetivo es comprobar la robustez de la solución diseñada, teniendo en cuenta que cualquier solución linealizada es localmente estable. Así, la idea es comprobar cuán lejos se puede alejar el sistema del punto de equilibrio sin que este diverga. Para ello, se estudian dos configuraciones para cada Modelo: 4 cazadores versus 2 presas; y 7 cazadores versus 3 presas. Los valores que adoptan en el experimento R_h y R_p varían entre 0 m y 1 m, evaluando cada combinación 100 veces con posiciones iniciales de presas y cazadores escogidas aleatoriamente siguiendo la distribución uniforme ya comentada. En estas simulaciones se medirá el porcentaje de veces que el sistema consigue el éxito.

La Fig. 5.4 muestra los principales resultados del experimento. En primer lugar, se demuestra que la estrategia de control es robusta en la acción (la posición de los cazadores), consiguiendo los mismos resultados independientemente del tamaño de R_h . Por el contrario, el sistema es mucho más sensible a su estado (la posición de las presas). Desde este punto de vista, el Modelo Exponencial obtiene unos resultados más uniformes porque los ratios de éxito son similares a pesar de cambios en R_p . Por otro lado, el Modelo Inverso presenta mejores ratios de éxito cuando $R \leq 0,3$ m, pero es menos robusto cuando el tamaño de la región de atracción crece, manifestando diferencias más grandes entre diferentes R_p .

Además, se puede notar como aún cuando $R_h = 0$ m y $R_p = 0$ m, los ratios de éxito no son del 100 % necesariamente. La explicación radica en el hecho de que el solver no asegura que la configuración que encuentra sea estable. Así, $\nabla \dot{\mathbf{p}}_j$ puede apuntar en una dirección de cambio rápido y cualquier pequeño movimiento de los cazadores puede alejar a las presas de sus posiciones deseadas. Esta es la razón por la que el funcionamiento del solver con los diferentes Modelos es similar mientras que los ratios de éxito si son diferentes. Configuraciones iniciales con $\dot{\mathbf{p}}_j(t) = 10^{-18}$ m/s pueden crecer hasta un estado inestable imposible de controlar por los cazadores. El Modelo Exponencial sufre más este fenómeno, de forma que nunca se llega a alcanzar un 100 % de éxito. Sus no linealidades son más fuertes que las del Modelo Inverso, por lo que es más probable llegar a situaciones inestables. Además, de la evaluación de los modelos se comprueba que sólo en un número muy reducido de casos el sistema converge a configuraciones diferentes que la deseada. Esto se manifiesta en los resultados de la Tabla 5.1, donde, en el peor caso (Modelo Exponencial Perturbado), en un total de 5 de 10000 intentos las presas convergen a una configuración final diferente de la deseada. De nuevo mirando la Tabla 5.1, se demuestra que el sistema realmente sólo llega a dos tipos de escenarios: o el sistema alcanza el éxito o falla en las dos métricas. Por ejemplo, para el Modelo Inverso, en general se llega a un 84.22 % de éxito para el caso 4-2 mientras que el porcentaje de fallo para el Modelo Exponencial llega al 59.22 %. En ambos casos hay que resaltar que estos porcentajes recogen los resultados para todos los R_p y R_h . Su desglose ha sido comentado previamente gracias a la Fig. 5.4. Otra conclusión interesante surge de comparar los resultados de un Modelo con los de su correspondiente Perturbado. La perturbación se gestiona de forma satisfactoria por el

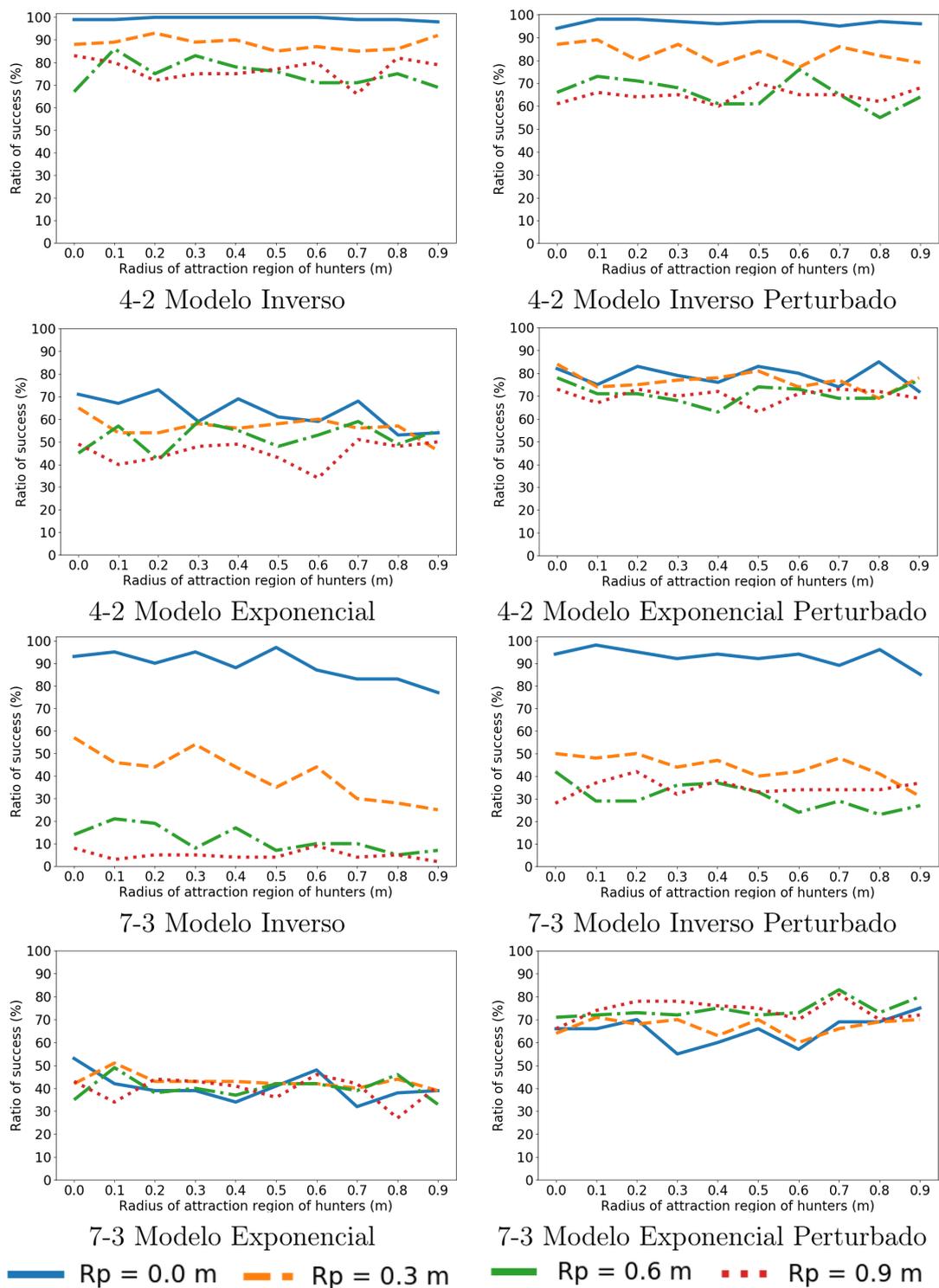


Figura 5.4: Éxito de la estrategia de control lineal con respecto al radio de la región de atracción de cazadores y presas.

4 cazadores y 2 presas	Inverso	Inverso Pert.	Exponencial	Exponencial Pert.
!Converge & !E	14.87 %	20.34 %	25.09 %	45.08 %
!Converge & E	0.91 %	2.89 %	1.01 %	1.23 %
Converge & !E	0.00 %	0.01 %	0.02 %	0.03 %
Converge & E	84.22 %	76.76 %	73.88 %	53.66 %
7 cazadores y 3 presas	Inverso	Inverso Pert.	Exponencial	Exponencial Pert.
!Converge & !E	33.83 %	47.57 %	29.57 %	40.32 %
!Converge & E	1.77 %	4.07 %	0.41 %	0.41 %
Converge & !E	0.01 %	0.03 %	0.01 %	0.05 %
Converge & E	64.39 %	48.33 %	70.01 %	59.22 %

Tabla 5.1: Resultados globales del controlador lineal.

controlador, pero genera peores resultados. Los ratios de éxito son ligeramente mejores en los casos no perturbados debido a que la perturbación no se ve afectada por el movimiento de los cazadores. Aún en ese caso, el equipo de robots consigue, por ejemplo, un ratio de éxito del 65 % para el Modelo Exponencial.

Por último, para finalizar el análisis del sistema de control del Capítulo 3, se puede asegurar que el sistema tiene un comportamiento mejor en el caso de 4 cazadores y 2 presas que en el caso de 7 cazadores y 3 presas. En definitiva, el caso 7-3 es más difícil de gestionar para el solver numérico, de forma que también es más fácil que el resultado que ofrezca sea una configuración inestable. Sin embargo, en ambos casos el controlador proporciona unos resultados aceptables, consiguiendo el objetivo de atrapamiento en un número suficientemente alto de casos.

5.2. Evaluación de las estrategias no lineales

Como se ha podido ver en la Sección anterior, la estrategia de control basado en linealización y optimización presenta unos resultados satisfactorios. Sin embargo, tres son los principales inconvenientes de esta solución:

- **El sistema sólo es exitoso en entornos cercanos al punto de linealización.** Como todo sistema basado en su linealización, a medida que nos alejamos del punto de operación la aproximación (a partir de Taylor) empieza a alejarse del sistema real, perdiendo su efectividad. Los experimentos relativos al ratio de éxito en función de la región de atracción manifiestan este fenómeno.
- **Necesidad de obtener el punto de equilibrio del sistema.** Por otro, el usar técnicas basadas en linealización requiere un punto de operación en torno al cual diseñar el controlador. En este problema se ve como la obtención de este punto no es trivial, necesitando técnicas de optimización no lineal para encontrar una solución.

Aunque el funcionamiento del solver numérico es robusto, como se demuestra en los experimentos de la Fig. 5.2, la estrategia de control se ve limitada.

- **Necesidad de conocer de forma precisa la dinámica de las presas.** Aunque la solución es general y válida para cualquier modelo dinámico de las presas, el sistema de control necesita conocer de forma precisa esa dinámica para construir el controlador LQR. En ese sentido, cualquier modificación en los parámetros dificultaría el cumplimiento de nuestro objetivo de atrapamiento.

Por ello, el Capítulo 4 desarrolla una estrategia de control que supera, de forma teórica, estos tres inconvenientes. Para probar que esta afirmación es correcta, se van a realizar los mismos experimentos que en la Sección anterior y así poder comparar ambas estrategias. Dada la naturaleza de la nueva estrategia de control, ya no es necesario realizar experimentos de eficiencia del solver numérico ya que ahora no se necesita trabajar sobre ningún punto de operación concreto. Así, se usan las mismas métricas y los mismos parámetros para las dinámicas que definimos en la Sección 5.1, pero en este caso no es necesario especificar ninguna R .

Como primera toma de contacto, se describe un ejemplo análogo al de la Sección 5.1. Un grupo de 5 cazadores deben llevar a un grupo de 3 presas a sus posiciones deseadas. La primera diferencia aparece en $t = 0$. Como se puede ver en la Fig 5.5, ahora los cazadores comienzan en posiciones que rodean a las presas siguiendo la Eq. 3.6 con $R = 4,5$ metros. Esa disposición no tiene nada de óptima y es simplemente una configuración “razonable” ante un problema de atrapamiento. Por todo lo demás, las condiciones de este experimento son similares a las de la Sección anterior. Los cazadores siguen las trayectorias azules buscando, en primer lugar, modular la intensidad de las interacciones con las presas para que estas no sean ni muy intensas ni muy débiles. Una vez que consiguen el objetivo de mover a las presas a las posiciones deseadas (trayectorias verdes), los cazadores tienden a alejarse un poco para facilitar una configuración de velocidad cero estable.

Otro ejemplo interesante para ver la flexibilidad de esta estrategia de control se muestra en la Fig 5.6. Como se puede ver, la disposición de los cazadores en $t = 0$ es totalmente arbitraria, ni siquiera es necesario que sea simétrica. Además, la distancia de la presa a su posición deseada es mayor que las contempladas en la estrategia anterior (en este caso, la distancia entre \mathbf{p}^0 y \mathbf{p}^d es de 1,5 metros). Como se puede ver, el comportamiento de los cazadores es bastante natural: el cazador de la izquierda, ante la necesidad de desplazar a la presa en su misma dirección, se aleja de ella suavemente, para contenerla. Por otro lado, el cazador de la derecha se da prisa en ponerse en una posición opuesta a su compañero, acercándose más en tanto que la presa debe ir en la dirección opuesta a su movimiento. Una vez que la presa está cerca de la posición deseada, este cazador se aleja para aliviar la intensidad de la interacción con ella. Tanto en el ejemplo anterior como en este podemos ver como las acciones de control son un tanto discontinuas, fruto de la discretización de un controlador diseñado en un espacio continuo y de una acción que actúa directamente sobre la posición de los cazadores.

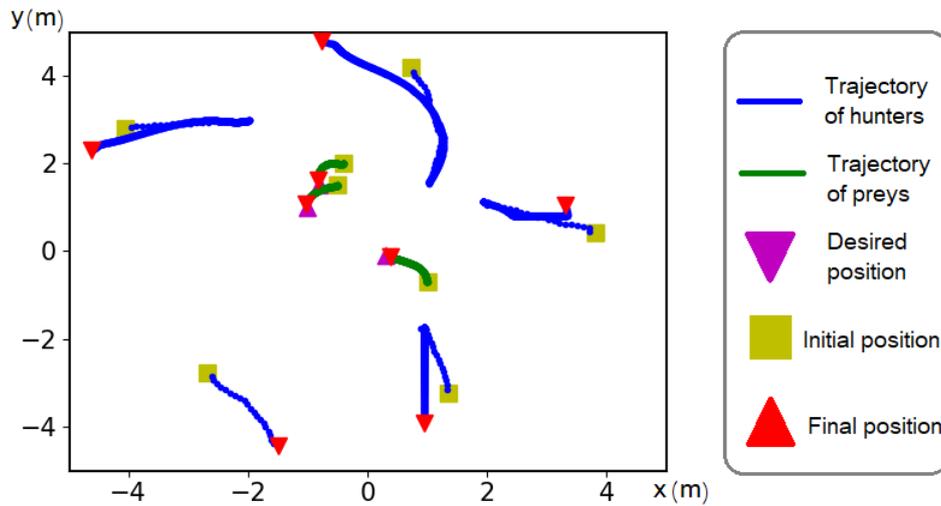


Figura 5.5: Comportamiento del controlador no lineal para el caso de 5 cazadores y 3 presas con Modelo Inverso.

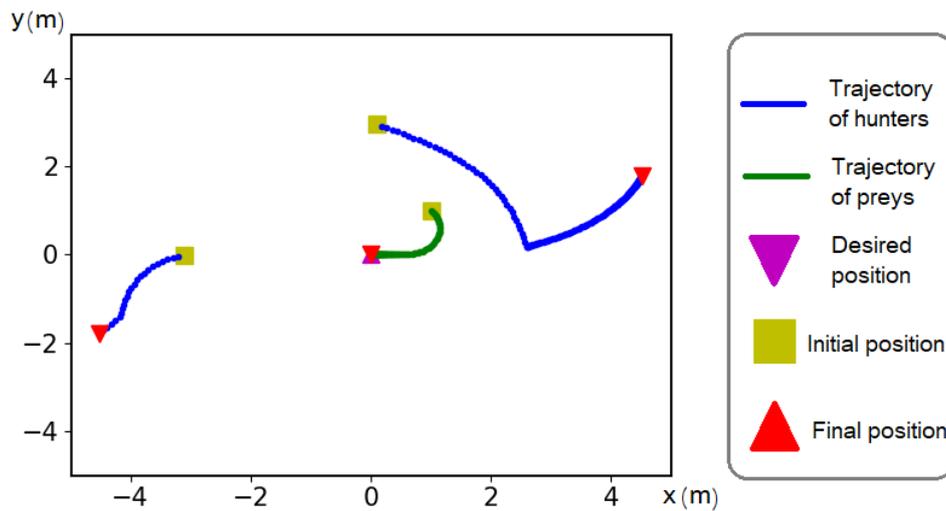


Figura 5.6: Comportamiento del controlador no lineal para el caso de 2 cazadores y 1 presa con Modelo Inverso.

Con la intención de poder comparar de forma objetiva ambas estrategias se va a realizar el mismo experimento de evaluación del éxito aplicando el controlador diseñado en el Capítulo 4. Para ello, se presentan los mismos casos, 4 cazadores y 2 presas; 7 cazadores y 3 presas; y un caso adicional de 2 cazadores y 1 presa. La idea es poder ofrecer un conocimiento más profundo del sistema en términos de coste computacional. Sin embargo, en este caso, dado el coste computacional de la solución, se realizarán 100 simulaciones por configuración y modelo, en lugar de las 10000 de la Sección anterior. La razón es el elevado tiempo de simulación necesario para esta última situación y como veremos a continuación, la alta tasa de éxito de la solución.

Los ratios de éxito del experimento son los mostrados en la Tabla 5.2. A primera vista, los resultados son sustancialmente mejores que con el controlador basado en linealización y optimización. En todos los casos, independientemente del Modelo (como sucede en la Sección 5.1 entre Modelo Inverso y Exponencial) o de la configuración de cazadores y presas, se consiguen ratios de éxito del 96-100 %. Esa razón lleva a no incluir una Figura similar a la Fig. 5.4, ya que no aportaría ninguna información más allá de cuatro líneas superpuestas entorno al 100 %. Ahora bien, una de las razones de que los resultados no sean del 100 % para todas las situaciones y modelos es que la teoría de Lyapunov estudia sistemas continuos, mientras que cualquier implementación de un controlador es en tiempo discreto. Esta discretización afecta a la continuidad de las soluciones que obtiene la estrategias. Por otro lado, la necesidad de calcular numéricamente la acción en cada instante hace que pueda haber fallos en la precisión de la solución. De cualquier forma, con una correcta elección de K_u siempre se consiguen ratios de éxito por encima del 95 %.

2 cazadores y 1 presa	Inverso	Inverso Pert.	Exponencial	Exponencial Pert.
!Converge & !E	1 %	0 %	2 %	0 %
!Converge & E	0 %	0 %	0 %	0 %
Converge & !E	0 %	5 %	2 %	3 %
Converge & E	99 %	95 %	96 %	97 %
4 cazadores y 2 presas	Inverso	Inverso Pert.	Exponencial	Exponencial Pert.
!Converge & !E	3 %	2 %	0 %	1 %
!Converge & E	0 %	0 %	0 %	0 %
Converge & !E	0 %	0 %	3 %	3 %
Converge & E	97 %	98 %	97 %	96 %
7 cazadores y 3 presas	Inverso	Inverso Pert.	Exponencial	Exponencial Pert.
!Converge & !E	0 %	0 %	0 %	3 %
!Converge & E	0 %	0 %	0 %	0 %
Converge & !E	1 %	4 %	1 %	2 %
Converge & E	99 %	96 %	99 %	95 %

Tabla 5.2: Resultados globales del controlador lineal.

Respecto al coste computacional, la solución es mucho más exigente que la diseñada en el Capítulo 3. Ahora, en cada instante, hay que calcular numéricamente la acción de control, lo que repercute directamente en el tiempo de muestreo que se puede seleccionar. La Tabla 5.3 recoge valores medios y máximos para los distintos números de cazadores y presas manejados en el experimento anterior. Así, para los casos 2-1 y 4-2, un tiempo de muestreo T de 100 ms es aceptable mientras que para el caso 7-3 es imposible, en tanto que el cálculo de la acción en cada instante cuesta en torno a 200 ms, siendo todos tiempos de cómputo estables y similares con los 4 modelos diferentes.

Otro aspecto importante a comentar es que la flexibilidad de la solución de control no lineal implica también cierta labor de ajuste de parámetros del controlador. Así, dependiendo de la aplicación, hay que ajustar el valor de K_u para que la acción sea lo suficientemente intensa para poder abordar la velocidad de las presas. En ese sentido, los

	2 cazadores y 1 presa	4 cazadores y 2 presas	7 cazadores y 3 presas
Coste medio (ms)	8.7	41.8	224.5
Coste máximo (ms)	33.2	140.5	7731

Tabla 5.3: Coste computacional para distinto número de cazadores y presas.

valores que hemos ajustado son:

- Modelo Inverso: $K_u = 4,0$.
- Modelo Exponencial: $K_u = 3,0$.
- Modelo Inverso Perturbado: $K_u = 6,0$.
- Modelo Exponencial Perturbado: $K_u = 10,0$.

Además, como se puede ver en los valores que se acaban de mostrar, K_u es mayor para los modelos con perturbación ya que no sólo debe vencer la dinámica de las presas si no también el del campo que las perturba.

El ajuste de parámetros toma mayor relevancia en el caso del controlador adaptativo. La Fig. 5.7 muestra un ejemplo del funcionamiento de esta estrategia. Además, también se muestra la evolución de los parámetros (en este caso, la γ_j del Modelo Inverso) que se están adaptando en tiempo real. Este es un ejemplo de que no es necesario que los parámetros estimados tengan que converger a los reales para que el controlador sea exitoso. En particular, $\gamma_1 = 5$ mientras que $\hat{\gamma}_1(0) = 2$, llegando a valer $\hat{\gamma}_1 = 0,3$. Por otro lado, ahora hay que ajustar también el valor de \mathbf{S} para que la dinámica de adaptación no sea demasiado lenta o demasiado brusca. En cualquier caso, el estudio de la estrategia adaptativa necesita de una mayor profundización para que se pueda comparar con las otras dos propuestas.

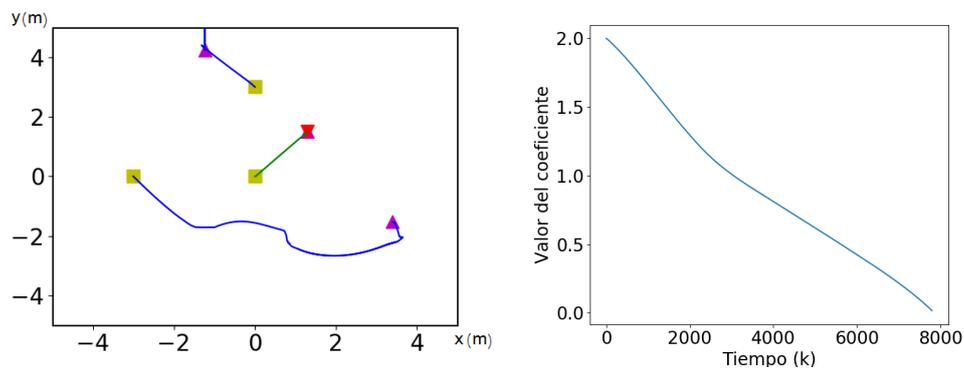


Figura 5.7: Ejemplo del controlador adaptativo con 2 cazadores y 1 presa: a la izquierda, las trayectorias para el Modelo Inverso; a la derecha, la evolución de γ_1 .

Capítulo 6

Conclusiones

” Analysis of adaptive systems is difficult because they are complicated”

Åstrom and Wittenmark

El Trabajo de Fin de Grado ha presentado un conjunto de estrategias que tienen como objetivo llevar a un grupo de presas a unas posiciones deseadas por medio del control del movimiento de un equipo de robots. Todas las estrategias presentadas tienen como una de sus características fundamentales la generalidad y flexibilidad. Generalidad en tanto que son aplicables a cualquier número de presas y cualquier número de cazadores. Flexibilidad en tanto que pueden usarse ante cualquier dinámica de movimiento de las presas, incluidas aquellas fuertemente no lineales tanto en la posición de los cazadores como en la posición de las presas. Estos dos conceptos hacen que las estrategias sean aplicables en un número amplio y diverso de escenarios, como la gestión de evacuaciones, la extinción de incendios o la vigilancia de animales en reservas.

En particular, se ha comprobado como una estrategia basada en la búsqueda óptima del punto de operación y posterior control óptimo LQR consigue este atrapamiento de forma exitosa, con resultados aceptables. En cambio, tres son los inconvenientes de esta solución: no es aplicable cuando nos alejamos mucho del punto de operación, se necesita conocer la dinámica exacta de las presas, y la solución es centralizada. La segunda estrategia de control, fundamentada en la teoría de estabilidad de Lyapunov, permite superar el primero de los inconvenientes. Así, los resultados obtenidos son sustancialmente mejores que en el primer caso, pues al satisfacer que se cumplen las condiciones de estabilidad global asintótica nos aseguramos que el sistema acaba convergiendo al escenario deseado. Otra ventaja de emplear esta teoría es se ha podido deducir una ley de adaptación, paralela y simultánea a la de control, que modifica los parámetros para que acaben convergiendo a los valores necesarios para la estabilidad del sistema. Así, el conocimiento exhaustivo de la dinámica de las presas ya no es una restricción. En cualquier caso, esta última solución necesita de mayor profundización.

Las líneas de trabajo futuras tienen como misión atacar los dos mayores inconvenientes de las propuestas de control. En primer lugar, el diseño de una estrategia que sea de carácter distribuido. La naturaleza de los problemas que abordan los sistemas multi-robot invita al desarrollo de algoritmos que permitan montar, sobre los propios robots, sistemas de regulación que se sirvan de las medidas locales del equipo para tomar las mejores decisiones con respecto al objetivo de atrapamiento. Las limitaciones en comunicaciones, flexibilidad y accesibilidad pueden ser superadas mediante estrategias distribuidas, a costa de un aumento en la complejidad formal del problema. Por otro lado, pese al gran éxito de las estrategias no lineales diseñadas, existe el problema del tiempo de cómputo. La otra línea de trabajo apunta en encontrar maneras de conseguir una ley de control, similar a las obtenidas, sin la necesidad de resolver numéricamente la acción de control. Este no deja de ser un problema que deriva de uno mayor que no se aborda en la literatura: el control no lineal cuando la dinámica del sistema también es no lineal con respecto a la acción.

Apéndice A

Anexos

A.1. Más sobre la teoría de estabilidad de Lyapunov

En esta sección de los Anexos se profundiza sobre la teoría de estabilidad de Lyapunov, ofreciendo la definición formal de estabilidad junto con los diferentes tipos de estabilidad que distingue.

De forma más rigurosa, un punto de equilibrio \mathbf{X}^0 es estable en el sentido de Lyapunov si

$$\forall R > 0, \exists r > 0 \Rightarrow \|\mathbf{X}^0\| > r \Rightarrow \|\mathbf{X}(t)\| < R \quad \forall t \geq 0 \text{ y } R > r. \quad (\text{A.1})$$

En otras palabras, si se escoge una esfera (de dimensión la misma que \mathbf{X}) de un radio arbitrario R , siempre existe un esfera de radio r más pequeña tal que, da igual donde se empiece dentro de esa esfera, que nunca se saldrá de la esfera de radio R . Esta definición se puede ampliar, de forma que se dice que un sistema es asintóticamente estable si, además de cumplirse (A.1)

$$\exists r_0 > 0 \quad \|\mathbf{X}^0\| < r_0 \Rightarrow \mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{0} \text{ y } t \rightarrow \infty. \quad (\text{A.2})$$

Como se puede ver, a diferencia de los sistemas lineales, en los sistemas no lineales el concepto de estabilidad va siempre ligado a un estado del sistema concreto. Llegados a este punto, se puede pensar que se ha salido del fuego para caer en las brasas, porque se sigue necesitando un punto de equilibrio, igual que en los sistemas linealizados. Sin embargo, la teoría de Lyapunov proporciona la vía de escape necesaria. Si

$$r_0 = +\infty \quad (\text{A.3})$$

entonces el sistema es globalmente y asintóticamente estable. Este es el único caso en el que no es necesario hablar estado de equilibrio. Más bien, se podría decir que todo el conjunto de posibles estados del sistema es estable.

Por último, existe una extensión de la definición de estabilidad asintótica que además proporciona una noción de tiempo de convergencia del sistema. En efecto, si se parte de (A.2) y, además,

$$\exists \alpha > 0, \exists \lambda > 0 \Rightarrow \forall t \geq 0, \|\mathbf{X}(t)\| < \alpha \|\mathbf{X}^0\| e^{-\lambda t}. \quad (\text{A.4})$$

entonces el sistema es asintóticamente estable y tiene una constante de tiempo de estabilización λ . Si se cumple también (A.3) la definición es válida de forma global. En ambos casos, se dice que el sistema es exponencialmente estable. Aunque no es directo, α cumple una función de retraso en el sistema

$$\text{si } \alpha = e^{\lambda \tau_0} \Rightarrow \alpha e^{-\lambda t} = e^{-\lambda(t-\tau_0)} \quad (\text{A.5})$$

Es de estos enunciados de donde Lyapunov obtiene la base para determinar las condiciones para diseñar un sistema que sea localmente estable, asintóticamente estable, etc. En particular, (4.1) detalla esas condiciones para un sistema global y asintóticamente estable. Por otro lado, en el Capítulo 4 se hace uso continuado de la derivada de la función escalar V . De forma más general,

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = \frac{d}{dt} V(\mathbf{X}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{dt} \stackrel{\text{autónomo}}{=} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} V(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{X}} \quad (\text{A.6})$$

que no depende de t en el caso de sistemas autónomos. Para el caso de sistemas no autónomos

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.7})$$

la derivada de V si que depende de t y los desarrollos que se han estado realizando se complican. La Eq. (A.6) ya no es válida y \dot{V} depende de t . La generalización de la teoría de estabilidad de Lyapunov a sistemas no autónomos da lugar al Lema de Barbalat. Este lema dice que si se tiene una función $g(t)$ que tiende a un límite finito cuando t tiende a infinito y $\dot{g}(t)$ está acotada ($\exists \alpha > 0 \forall t \geq 0 \Rightarrow \|\dot{g}(t)\| \leq \alpha$), entonces $\dot{g}(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito. Todo ello da lugar a que si se encuentra una V tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\mathbf{X}) \text{ es una función escalar} \\ V(\mathbf{X}) \geq \beta \text{ (está acotada inferiormente)} \\ \dot{V}(\mathbf{X}) \leq 0 \text{ (negativa definida)} \\ \ddot{V}(\mathbf{X}) \leq \alpha \text{ (está acotada superiormente)} \end{array} \right. \quad (\text{A.8})$$

entonces el sistema, que es no autónomo, es globalmente y asintóticamente estable.

A.2. Discusión sobre el estado y la acción elegidos

En primer lugar, se discute la opción de elegir como estado la posición de las presas y los cazadores y elegir como acción la velocidad de los cazadores. De forma general, controlar

un sistema en el que la acción es la velocidad de alguno de los estados (en nuestro caso, $\dot{\mathbf{h}}$) genera unas acciones más suaves que controlando directamente la posición de los estados (en nuestro caso, \mathbf{h}). Por ello, en un primer momento se plantea el sistema

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M} + \mathbf{N}\mathbf{u} \quad (\text{A.9})$$

donde $\mathbf{X} = [\mathbf{p}^T, \mathbf{h}^T]^T$ es el estado, $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{h}}^T$ es la acción y \mathbf{M} y \mathbf{N} son

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{h}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{p}_m, \mathbf{h}) \\ \mathbf{0}_{2n \times 1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2m \times 2n} \\ \mathbf{I}_{2n} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

No se debe olvidar que el problema es bidimensional y que cada presa o cazador aporta 2 variables al sistema. El problema de esta opción es que la acción no puede influir de forma directa en nuestro objetivo de control, que es llevar a las presas a las posiciones deseadas. De forma más explícita, si se escoge, por ejemplo, $V = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{X}$, entonces

$$\dot{V} = \mathbf{X}^T\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^T(\mathbf{M} + \mathbf{N}\mathbf{u}). \quad (\text{A.11})$$

Si queremos que $\dot{V} \leq 0$, en ese caso lo más precavido es diseñar una acción que sea

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^T(\mathbf{N}\mathbf{N}^T)^{-1}(-\mathbf{M} - g(\mathbf{X})). \quad (\text{A.12})$$

para asegurar que la dinámica de las presas no hace que $\dot{V} > 0$. El producto $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$ no es inversible en tanto que

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2m \times 2(n+m)} \\ \mathbf{0}_{2(m \times m)} | \mathbf{I}_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Por lo tanto, con las técnicas que se han visto no se puede usar esta opción para el estado. Esta conclusión es extensible a cualquier elección de V ya que, en todas ellas, vamos a tener el término $\dot{\mathbf{X}}$ en \dot{V} . Así, se puede concluir que la aplicación directa de (4.1) es bastante más difícil que en las otras opciones, complicando enormemente la búsqueda de una V que permita diseñar un sistema global y asintóticamente estable.

La segunda opción tiene una discusión un tanto diferente ya que plantea el control de la distancia entre las presas y los cazadores, más que el control de la posición de las presas directamente. Una formulación del problema en la que el interés del atrapamiento no fuera llevar a cada presa a su posición deseada sino mantener a las presas en una posición relativa fija sería perfecta para este planteamiento. Así, cada variable de estado controlaría la distancia relativa de cada presa con cada cazador, aumentando la dimensión del estado \mathbf{X} a $2nm$. Junto con el aumento en la dimensionalidad del problema, hay que analizar si esta aproximación permite realmente llevar a las presas a una posición absoluta concreta. Parece más sencillo evaluar este problema en configuraciones de n cazadores y 1 presa,

modulando \mathbf{d}_{i1} para llevar a la presa a un lugar indicado. Sin embargo, esta evaluación es bastante más compleja para $m > 1$. Llegar a una conclusión llevaría un gran trabajo teórico y nos desvía de la dirección del Trabajo Fin de Grado, así que por eso se descarta la segunda opción.

A.3. Linealización realimentada

Una de las técnicas estudiadas para el problema de atrapamiento es la linealización basada en cambio de variables, lo que comúnmente se llama linealización realimentada (Feedback Linearization). Formalmente, el problema consiste en convertir el sistema

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})u \xrightarrow{z=z(\mathbf{X})} \text{sistema lineal} \quad (\text{A.14})$$

que, en esencia, lo que hace es cambiar el sistema para verlo de una forma más sencilla mediante un cambio de variables

$$z^{(n)} = f(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(n-1)}, t) + b(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(n-1)}, t)u = v. \quad (\text{A.15})$$

Dado el sistema en espacio de estados, dependiendo de donde se aplique este cambio de variable se habla de linealización realimentada en la entrada si z involucra a la acción y se habla de linealización realimentada en entrada y salida si z involucra tanto a la acción como al estado del sistema. Así, de forma general, la secuencia de operaciones para el control sería

$$\text{medir } \mathbf{X} \rightarrow \text{computar } z \rightarrow \text{aplicar } v \quad (\text{A.16})$$

A.4. Backstepping y Sliding Mode Control

La Sección A.1 describe de forma general la teoría de estabilidad de Lyapunov. Muchos modelos de control se han desarrollado a partir de esta teoría con la intención de tener una aproximación más directa a los problemas de control. De estas técnicas, dos sobresalen especialmente.

La primera es el *Backstepping*, que básicamente considera sistemas del tipo

$$\begin{cases} \dot{\mu} = f(\mu) + g(\mu)\epsilon \\ \dot{\epsilon} = \mathbf{u} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

donde $(\mu^T, \epsilon^T)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ es el estado y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ es la acción de control. Suponiendo que se encuentra una función V que satisface

$$\frac{\partial V}{\partial \mu}(f(\mu) + g(\mu)\epsilon) \leq -\mathcal{W}(\mu) \quad (\text{A.18})$$

donde $\mathcal{W}(\mu)$ es una función positiva definida y $\phi(\mu) = \epsilon$ con $\phi(0) = 0$; entonces se puede aplicar una ley de control que satisface las condiciones de la Eq. (4.1) de la forma

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \phi}{\partial \mu} (f(\mu) + g(\mu)\epsilon) - \frac{\partial V}{\partial \mu} g(\mu) - k(\epsilon - \phi(\mu)) \quad (\text{A.19})$$

con k una constante positiva. La razón de que a esta técnica se le llame *Backstepping* es por su estructura recursiva, en la que el cálculo de \mathbf{u} depende del cálculo de ϵ , que a su vez depende de ϕ , que es ϵ en la iteración anterior.

La otra técnica que se va a comentar es el *Sliding Mode Control*, que tiene una traducción un poco más amigable que el *Backstepping* y que tiene una forma muy parecida al anterior. La única diferencia sustancial es que ahora el sistema se describe mediante

$$\begin{cases} \dot{\mu} = f(\mu, \epsilon) + g_\mu(\mu, \epsilon) \\ \dot{\epsilon} = f_a(\mu, \epsilon) + G_a(\mu, \epsilon)(\mathbf{u} + g_\epsilon(\mu, \epsilon, \mathbf{u})) \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

A primera vista se ve como la formulación de esta segunda técnica es bastante más compleja y requiere de más restricciones en las funciones f , f_a , g_ϵ , g_μ y G_a . Además, la acción de control \mathbf{u} puede estar relacionada de forma no lineal con el estado del sistema.

Apéndice B

Artículo ETFA

A Multi-robot Cooperative Control Strategy for Non-linear Entrapment Problems

Eduardo Sebastián
University of Zaragoza
Zaragoza, Spain

Eduardo Montijano
University of Zaragoza
Zaragoza, Spain

Abstract—This paper presents a multi-robot entrapment problem where a group of non-cooperative preys are driven to a set of desired positions by controlling a team of robotic hunters. The main source of complexity is the non-linear behavior of the preys, which is tightly coupled with the position of the hunters. In the paper we analyze the use of a linearized control solution, providing a general framework to solve the entrapment problem for a non-specific number of preys and hunters, and any behavioral model. In order to apply a linear controller, we discuss the search of the operating point for each hunter and its particular control law. Finally, we evaluate the algorithm with different examples of prey dynamics via simulations, analyzing their convergence and the number of hunters needed to control them depending on the size of the group of preys.

I. INTRODUCTION

Nowadays, the study of multi-robot systems (MRS) in a control context is achieving a great attention. There is a large variety of problems which can be resolved by the application of algorithms that govern the behavior of a team of robots [1]. This work addresses the entrapment of a group of preys by a team of robotic hunters, which is a particular instance of motion coordination [2].

The entrapment problem - closely related to pursuit-evasion - aims to drive some targets to a desired position with a certain number of constraints. Control strategies have handled entrapment problems using different tools in the literature. In [3] a single target is surrounded by a group of robots following an elliptical orbit. A similar problem is solved in [4] but, in this case, the entrapment is based on the real-time measurement of the motion of the target without the need of a dynamical model. More recently, [5] shows an opposite perspective: the controller governs the evader, trying to maximize the time it can escape from multiple pursuers. Reinforcement Learning is applied in [6] to obtain an Unmanned aerial vehicle (UAV) policy in a pursuit-evasion context. The work in [7] proposes bio-inspired strategies in pursuit-and-evasion tasks. In all these approaches, the MRS is in charge of capturing a single target.

Other methods deal with the task of controlling more than one target, exploiting the idea of herding. The work in [8] presents a model in which the team of robots encircles the group of targets. The individual motion of the robots is designed in such a way that the team behaves as a single unicycle. The general objective is to drive the unicycle to a desired position without considering the particular location of each target beyond that they must stay within the circle formed

by the robots. A strategy in which a single robot drives a group of targets to desired positions, one by one, is discussed in [9]. The robot switches to a new target when it detects the current one is already in its objective. Compared to these solutions, our approach proposes a centralized controller for multiple robots, which not only encircles the group of targets but also drives all of them simultaneously to their desired individual positions. In order to do this, we require a formation configuration of the robots that yields a stable behavior of the targets.

Closely related to this problem is the problem of formation control of teams of robots. Formation tasks represent one of the most basic and essential control tools in MRS [10]. Due to the strong mathematical component of this problem, geometric tools, distributed control and graph theory are the base of the solutions [11]. Articles such as [12] employ graph theory as the framework to solve topological issues, showing how to describe different architectures of formation. This approach is shared by [13], focusing in triangular sensor formations. Dynamic environments are considered in [14]. In [15] a formation containment problem is performed by a group of robots whose topology is controlled by distributed algorithms sustained in the consensus of their partial measurements. In a different fashion but with the same ambition, Neural Networks [16] are one of the cornerstones of newly proposed optimal formation solutions. However, the general objective in formation control is driving coordinately a group of robots to a given configuration. In our problem, the formation part of the algorithm provides an equilibrium point for the system, similarly to [17], leaving the movement of the robots to the entrapment part.

The main contribution of this paper is a general framework to solve the entrapment of a team of non-cooperative targets with non-linear dynamics. Given the set of desired positions for the targets, we first solve an optimization problem to compute a stable formation of robot positions. This formation is used to find a linear approximation of the target dynamics and to compute a control law by classic linear techniques. The approach is valid for any dynamical model of the targets and any number of robots and targets. We demonstrate this empirically with simulations for the models used in [8] and [9], as well as modifications of these models where the environment also affects the target dynamics.

The remainder of the article is organized as follows: Section II defines the problem and the notation. Then, in

Section III, the control solution is presented, focusing on the two main points of the strategy: how to find the equilibrium point of the whole system and the design of the control laws of the robotic hunters. After that, we include in Section IV the description of two dynamical models for the preys and their associated linearized models. Section V provides the simulation results, ending the paper with the conclusions in Section VI.

III. CONTROL SOLUTION

Our control solution will be based on the linear approximation of the non-linear dynamics of the system. Given a stable point of the system, (P^*, H^*) , using Taylor's linearization we can approximate f_j by

$$f_j \approx -f_j(P^*, H^*) + \frac{\partial f_j}{\partial P} \bigg|_{P^*, H^*} (P - P^*) + \frac{\partial f_j}{\partial H} \bigg|_{P^*, H^*} (H - H^*) \quad (2)$$

If we denote

$$A_j = \frac{\partial f_j}{\partial P} \bigg|_{P^*, H^*}, \text{ and } B_j = \frac{\partial f_j}{\partial H} \bigg|_{P^*, H^*} \quad (3)$$

then, Eq. (2) becomes

$$\dot{p}_j \approx \sum_{i=1}^n A_{ji} (p_i - p_i^*) + \sum_{i=1}^n B_{ji} (h_i - h_i^*) \quad (4)$$

From this, removing the operating point, we can compute a linear state-space representation of the whole system

$$\dot{p} = A p + B h \quad (5)$$

with $A = [A_{ji}]$, $B = [B_{ji}]$ and

$$p = \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* & \dots & p_n^* \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

In order to calculate the complete two sets of elements that can be computed in (5) the partial derivatives of the state and input, and the operating conditions of the system. The first part is trivial as the states that the derivatives can be calculated from the known non-linear model. However, finding the operating point of the hunters, H^* , requires the further discussion.

Operating point. In our approach, the linearization is applied around the desired position of the preys P^* . Thus, finding the desired position of the hunters H^* is solving, implicitly, a formation problem in which the solution gives the set of hunters' positions that satisfies

$$f_j(P^*, H^*) = 0 \quad (7)$$

for all $j \in \{1, \dots, n\}$. For this we use the *Levenberg and Marquardt* optimization method, due to its capacity of finding a fast and successful operating point for the system. However, any other optimization method can be used without affecting the overall solution.

Among all the possible configurations of hunters that fulfill Eq. (7), those that spread the hunters uniformly around the prey and those that locate them closer to the herd will exhibit better control properties, e.g. providing stronger control inputs on the preys and more maneuverability. In order to favor uniform distributions of the hunters, we feed the solver initial positions of the hunters, $H_0 \in [D_0]$, surrounding the preys

where f_j is the function governing the motion of prey j , that will also be considered continuous and derivable. Therefore, the general objective is to design a control strategy for H_0 to drive P to P^* under dynamics f_j .

The success of the controller is tightly linked to the notion of equilibrium point. As a common framework in entrapment and, generally, in control problems, this point is known or relatively easy to obtain. However, in this setting given the non-linear nature of the preys, the computation of an equilibrium formation is not trivial, requiring additional tools. In order to find a set, H^* , that maintains the group of preys in P^* . Given this formation, it should be noted that the control problem is not equivalent to that of reaching this configuration, but this knowledge can help in the design of a linear controller to solve the entrapment.

Also note that the number of preys n and hunters m play a special role in the entrapment, since they give the dimension and degree of freedom of the problem and the dimension of each prey is independent, setting the dimension of the control problem to $2n$. On the other hand, the degrees of freedom are $2m$, taking into account that the motion of each hunter is also independent. Another interesting feature is, therefore, to analyze the number of hunters needed to successfully control the motion of the group of preys. This second part will be addressed explicitly in the paper via simulation.

with $d_j^* = p_j^* - h_j^*$ the vectors at the linearization point. Note that $d_j^* \neq 0$ because the model does not consider specific interactions between preys. Nonetheless, this term could be easily included in the formulation.

We go further in the model, adding a concept of performance adapted from [20]. The idea of this term is that preys also react to the environment according to another vector field. This can help modeling preference of the preys to move to areas where there is shade in the summer or to avoid, if possible, locations with slope. In addition, this term helps expanding the set of applications of our solution to other domains, like fire spreading in a windy field. The modified model is described by the following equation:

$$\dot{p}_j = f_j^*(P, H) + W(p_j) \quad (19)$$

where $W(p_j)$ models the linear spatial vector field. In the case of a constant field this perturbation only provokes a variation in (17), adding the term $W(p_j)$. We coin this new dynamic as *Inverse Model Perturbed*.

Exponential Model

In this model, the prey has two different behaviors depending on how close is the set of hunters from it: if there is a hunter within a circle of radius r centered in p_j , the prey behaves "agony", whereas if no hunters are close the prey is made "valiant". In both scenarios the prey movement is led by a Gaussian perturbation function. The dynamics are described by

$$\dot{p}_j = f_j^*(P, H) + \begin{cases} \sum_{i=1}^m \alpha_i d_{ij} e^{-\beta_i \|d_{ij}\|} & \text{if } \|d_{ij}\| > r \\ \sum_{i=1}^m \beta_i d_{ij} e^{-\alpha_i \|d_{ij}\|} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (20)$$

where $\chi_i \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is set equal to

$$\chi_i = \alpha_i d_{ij} e^{-\beta_i \|d_{ij}\|} \quad (21)$$

and $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ are arbitrary constants. In particular, the parameter β_i is the one used to describe the agony behavior of the prey.

Applying the linearization in Equation (20) yields the following model

$$A_{ij} = \frac{\partial f_j^*}{\partial P} \bigg|_{P^*, H^*} \left(Z - \frac{2}{\alpha_i} d_{ij}^* \alpha_i \right) \quad (22)$$

and

$$B_{ij} = \frac{\partial f_j^*}{\partial H} \bigg|_{P^*, H^*} \left(Z - \frac{2}{\beta_i} d_{ij}^* \beta_i \right) \quad (23)$$

with

$$p_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{if } \|d_{ij}\| > r \\ \beta_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad (24)$$

Similarly to Inverse Model, we construct a perturbed case of Exponential Model, which relies on the same preys but can be disturbed not only by the presence of the hunters but

also on environmental circumstances or other position-based events. This, this variation is expressed by

$$\dot{p}_j = f_j^*(P, H) + W(p_j) \quad (25)$$

where $W(p_j)$ is a set of constants described in the previous model.

V. RESULTS

In this section we evaluate explicitly the control approach for the two dynamical models presented in Section IV under different conditions and numbers of hunters and preys. In order to study the performance of the control solution, we define two metrics of error. Firstly, we are interested in studying the convergence of the entrapment problem. To do this, we characterize the situation in which

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|p_j(t) - p_j^*\| = 0 \quad (26)$$

for all $j \in \{1, \dots, n\}$, that is, when the set of all preys P reaches a stationary state. Given that the set of equilibria of the system is not unique, in a second stage we are not only in analyzing convergence, but also measuring if the equilibrium reached is the desired one. Therefore, we define

$$MAE(t) = \sum_{j=1}^n \|p_j(t) - p_j^*\| \quad (27)$$

as the mean absolute error of the configuration at time t , and we will denote E as the limit of this value when t goes to infinity, which better describes the global performance of the system. Hence, both E and convergence permit the distinction between two different phenomena: the set of preys P can be said to reach the desired set of positions P^* if and only if $E \leq \epsilon$ and the system has converged. In this case, it is said to achieve success. If $E > \epsilon$, the system does not converge, it can not be ensured that P stays within the m -dimensional sphere of radius ϵ when $t \rightarrow \infty$. Similarly, the preys can converge to a set P different from P^* , breaking the condition $E \leq \epsilon$.

The parameters used for the preys in the different models are:

- Inverse Model: $\gamma_i = 1$.
- Exponential Model: if there is one prey, $\alpha_1 = 100$, $\beta_1 = 1.5$, $\delta_1 = 0.5$; otherwise, $\alpha_1 = \alpha_2 = 100$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.85$. In both cases, $r = 1$.
- Environment perturbation matrix: $W(p_j) = W = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.002 \\ -0.002 & 0.06 \end{bmatrix}$.

The radius for the desired position of the hunters has been set for $R_h = 20$ m in all the experiments.

The evaluation of the models has three different stages. In Subsection V-A we present an illustrative example of 5 hunters and 3 preys with Inverse Model, then, the efficiency of the solver is tested in Subsection V-B; finally, the success of the control solution is evaluated in Subsection V-C by-carrying a different combination of preys, hunters and models.

in an equal-spacially distributed circumference of radius R_p , being θ an arbitrary positive constant.

$$h_i(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n p_j + R \begin{pmatrix} \cos(2\pi i/\alpha) \\ \sin(2\pi i/\alpha) \end{pmatrix} \quad (8)$$

with $i = 1, \dots, n$.

To address the proximity requirement, we first need to consider that typical functions to describe the prey dynamics are based on artificial potentials decreasing with the distance. This implies that the numeric solver will tend to search the set H^* by moving the hunters away from the preys. In the future, the velocity of the preys due to the interaction with the hunters will be zero, satisfying Eq. (7) but computing the control objective. To overcome this limitation, we introduce in the solver a penalty term in the cost function to punish solutions which leave the hunters out of the initial area of radius R_p . I.e., we look for the equilibrium point

$$H^* = \arg \min \|H - H_0\| \quad (9)$$

subject to $f_j(P^*, H) = 0$. Fig. 1 represents a typical initial configuration of the system and the solution found by the algorithm for the dynamics described in (9).

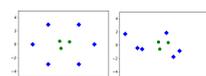


Fig. 1. Performance of the solver for the case 6 hunters (blue) and 3 preys (green).

Control Law

Once the model is available, we can discuss the construction of the MMIO regulator. In the paper we consider a well-known centralized LQR strategy [19], characteristic example of an optimum controller. The reason of addressing a centralized controller instead of a distributed one resides in the fact that this work proposes a first approach to the problem. Future work will deal with the problem of finding a distributed strategy based on this methodology. Hence, we maintain the cost function

$$J = \int_0^{\infty} (p^T Q p(t) + h^T R h(t)) dt \quad (10)$$

The matrices $Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ and $R \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ weight the input and output on the optimization. The solution to the Riccati equation $P \in \mathbb{R}^{(2n+2m) \times (2n+2m)}$ that solves for the continuous time algebraic Riccati equation

$$P \dot{A} - P \dot{A}^T - (A^T B^T R^{-1} B^T P + P \dot{A} + Q) = 0 \quad (11)$$

From this, we obtain the regulator

$$L = (R^{-1} B^T P B)^{-1} (B^T P \dot{A}) \quad (12)$$

and the control law

$$h(t) = -L p(t) \quad (13)$$

The general procedure which describes the proposed solution is given in Algorithm 1.

Algorithm 1 Control Law Computation Algorithm

```

1 Input:  $n, m, f, P^*, H_0$ 
2 Output:  $H^*, L$ 
3 [1]:  $Q = \gamma I_{2n} + \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ , Eq. (7)-(9)
4 if OK then
5    $A, B = \text{linearize}(f, P^*, H_0)$ , Eq. (2)-(5)
6    $L = \text{find}(Q, R, B)$ , Eq. (10)-(12)
7 end if

```

IV. PREY MODELS

In this section we describe two different prey dynamical models that will be considered in the simulations and their associated linearized model. Their formulation comes from how the distance from the hunters affects the preys:

- Inverse Model, extracted from [8].
- Exponential Model, extracted from [9].

Inverse Model

This model is based on the artificial potential field

$$V(H, P) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\|d_{ij}\|} \quad (14)$$

where

$$d_{ij} = P_j - h_i \quad (15)$$

is the vector from prey j to hunter i . The prey dynamics are then obtained by differentiation of the field

$$\dot{p}_j = -f_j(P, H) = -\sum_{i=1}^m \frac{d_{ij}}{\|d_{ij}\|^2} \quad (16)$$

with γ_j being an extra positive scaling parameter to provide the model additional dynamism.

The intuition behind this model is that preys try to move as far as possible from the hunters, which move in turn inversely proportional to the distance. The use of γ_j in the dynamics allows the inclusion of real-behavior events like limitation of the prey, fatigue or illness.

The result of the linearization provides the matrices,

$$A_{ij} = \gamma_j \sum_{i=1}^m \frac{d_{ij} (d_{ij}^T d_{ij} + 3\|d_{ij}\|^2)}{\|d_{ij}\|^5} \quad (17)$$

$$B_{ij} = \gamma_j \sum_{i=1}^m \frac{d_{ij} (d_{ij}^T d_{ij} + 3\|d_{ij}\|^2)}{\|d_{ij}\|^5} \quad (18)$$

2 constraints of each prey to satisfy $\dot{p}_j = 0$. Thus, the solver needs $m = 2$ in order to find a solution for the system of equations. On the other hand, there is also a degradation in the performance of the solver when n is much greater than m because there are too many decision variables to adjust (24), moving from ratios of convergence of 100% to ratios of 80% in Exponential Model. A similar behavior happens when m increases because the dimensionality of the problem grows, making the task of the solver more difficult. Indeed, the solver must find the solution for $2m$ equations. For instance, notice the differences between 1 prey and 7 preys in both models, where we have ratios of convergence of the 100% with 1 prey while, with 7 preys, we only achieve a 61% with 1 hunters.

The other remarkable feature is the fact that the results with all the models are similar. Inverse and Exponential Model present similar percentage numbers, as it can be seen in the simulations of Fig. 3; furthermore, we do not include the results of the perturbed version of both models because the inclusion of $W(p_j)$ does not imply a change in the dimensionality, degrees of freedom or complexity of the solver.

C. Analysis of success of the controller

The second analysis concerns the effects of the attraction region in the positions of preys and hunters. Since linearized control solutions are well known to be only locally stable, the objective of this section is to analyze how far away from the equilibrium point can hunters and preys be without diverging. In order to assess the robustness of the system, we set two different configurations for each model: 4 hunters - 2 preys and 7 hunters - 3 preys.

We place each entity with uniform probability inside a ball centered at the desired position and with different radius R_h for the preys and R_p for the hunters. The value of R_h and R_p move from 0 m to 1 m, testing 100 random initial prey placements in each combination and measuring the percentage of times that the system achieves success. Fig. 4 shows the outcomes of the experiment. The results demonstrate that the control strategy is robust in the action (the position of the hunters), obtaining the same performance independently on the size of the attraction region. However, the system is much more sensitive to its states (the position of the preys). From this particular point of view, Exponential Model presents a more uniform behavior because the success is similar despite of changes in R_h . On the other hand, Inverse Model presents better ratios of success when $R_h \leq 0.3$ m, but it is less robust with respect to large attraction region sizes, manifesting larger differences between R_h .

Moreover, we notice that even when $R_h = 0$ m and $R_p = 0$ m, the ratios of success are not 100% necessarily. The explanation is that the solver can not create the provided configuration is stable. Thus, (P_j, H_j) may point on a direction of fast change and any small movement of the hunters could move the preys far away from their desired positions. This is the reason why the solver has the same performance in the models but the results in success disagree. Initial configurations of $p_j(t) = 10^{-3}$ m/s may grow up to an unstable

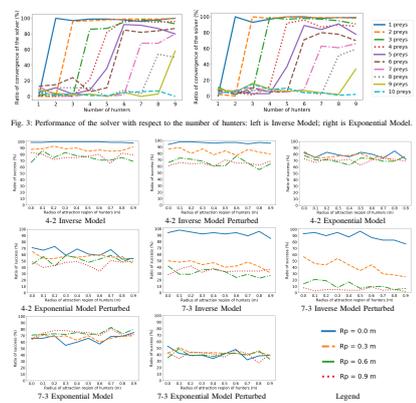


Fig. 3. Performance of the solver with respect to the number of hunters: left is Inverse Model, right is Exponential Model.

state impossible to tackle by the hunters. Exponential Model suffers more this phenomena, never reaching 100% ratios of success. Its non-linearities are stronger than non-linearities of Inverse Model and, thus, there is a higher probability that the initial solution provided by the solver were unstable. Besides, evaluation of the models addressed that only in sporadic times the system converge to a different configuration from the desired one. In the worst case (Exponential Perturbed Model), a total of 5 out of 1000 times the preys reach a different final configuration. Therefore, the system presents two final states: one of the system successes or the system fails in both E

Finally, we can conclude that the performance of the system in the case of 4 hunters and 2 preys is better than its respective analogue of 7 hunters and 3 preys. This is due to the fact that, for the solver, it is more difficult to find a stable H^* when n and m increases, degrading the solution. As it was explained in Subsection V-B. However, in both cases the controller yields acceptable results, achieving the entrapment in a sufficiently large percentage of test cases.

VI. CONCLUSIONS

This article has presented a general strategy to entrap a group of preys, driving them to desired positions by using a coordinated team of robotic hunters. A well-known LQR control law, along with a numerical solver to find the adequate operating point of the hunters, achieves the entrapment of the preys with successful results. The proposed solution can be used for any dynamical model that describes the behavior of the preys, as well as different numbers of preys and hunter robots, allowing the application of the strategy in several different contexts. In this paper we have analyzed the control strategy with four different non-linear models, evaluating them in different configurations and demonstrating the validity of the whole solution. Future research will be aimed at finding a distributed solution to the entrapment problem and applying more general non-linear control techniques.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by ONRG-NICOP-grant No2909-19-1-2007 and Spanish projects IU2-2018-TEC-10 and DGA T484E. We are grateful for their support.

REFERENCES

- Y. Cao, W. Yu, W. Ren, and G. Chen, "An overview of recent progress in multi-agent coordination: consensus, formation, and flocking," *IEEE Communications Surveys and Tutorials*, vol. 16, no. 1, pp. 82-106, 2013.
- Y. Ren, E. Petráš, and L. Petráš, "Robust distributed multi-agent systems," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 18, no. 5, pp. 448-456, 2002.
- E. Montijano, J. Prada, A. Garrigós, and C. Sagüés, "Distributed consensus for multi-agent systems with uncertainties," *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 491-496, 2011.
- F. A. Garcia Azcárate and S. Chouhrouh, "The entrapment/steering problem of autonomous mobile robots," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Applied Informatics*, pp. 22-29, 2008.
- A. V. Maki, D. Chaffin, S. M. Mason, and M. M. Mataric, "Towards analysis of an ensemble of multiple robots," in *International Conference on Computational Intelligence*, pp. 135-142, 2005.
- B. Yavas, E. Sagüés, L. Sukki, and C. Sagüés, "On developing a new consensus algorithm for multi-agent systems," in *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 481-486, 2011.
- J. D. Sussangchittavong and S. P. Ghosh, "The effectiveness of applications of bio-inspired algorithms to persistent group coordination," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Applied Informatics*, vol. 34, no. 2, pp. 217-234, 2004.
- M. M. Mataric, "Multi-agent systems: A review of research on robot-induced learning of multiple agents," *Australian Intelligent Systems Engineering Journal*, vol. 2, no. 1, pp. 127-132, 2000.
- K. Chaffin, M. C. Park, and H. B. Ahn, "A survey of multi-agent formation control," *Automation*, vol. 53, pp. 424-440, 2019.
- M. Mochizuki and M. Ejima, "Cough detection methods in multi-agent systems for multiple announcements," in *IEEE Conference on Intelligent Systems for Design and Innovation*, pp. 21-26, 2018.
- B. D. Olfund, C. N. B. Hahn, and J. M. Hendrickson, "Rapid control architectures for autonomous formations," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 28, no. 6, pp. 46-60, 2008.
- M. J. B. Jeannerod, A. R. Buxton, and R. D. Smith, "Unconscious control of interpersonal forces with multiple constraints," *Systems and Control Letters*, vol. 9, no. 2, pp. 181-189, 1989.
- J. Alami-Mari, E. Mestajoin, T. Nagele, O. Billiau, M. Schwager, and D. Rus, "Distributed multi-robot formation control in dynamic environments," *Autonomous Robots*, vol. 43, no. 5, pp. 1079-1100, Jan 2019.
- Y. Cao, W. Ren, and Z. Meng, "Distributed consensus control for multiple autonomous vehicles with double integrator dynamics," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Applied Informatics*, vol. 18, no. 4, pp. 926-935, 2001.
- Y. Cao, W. Ren, and K. M. Vasanthakumari, "Optimal formation of multiple mobile robots based on a recurrent neural network," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Applied Informatics*, vol. 27, no. 2, pp. 69-78, 2001.
- A. M. Spong, S. V. Voulgaris, and D. Tarokh, "Optimal role and position assignment in multi-robot freely reconfigurable formations," *Automatica*, vol. 46, pp. 1621-1632, 2010.
- M. M. Mataric, A. R. Buxton, and C. E. Gazeau, "Topological and geometric flock control for autonomous systems," vol. 31, pp. 107-117, 2003.
- G. F. Franklin, D. J. Powell, and A. P. Naor, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 4th ed. Prentice Hall, 2002.
- K. A. Branson and B. Weston, "The determination of kinematic parameters of a robot arm using an open loop approach," *Journal of Automatic Control*, vol. 7, no. 1, pp. 105-111, 1968.

Bibliografía

- [1] Y. Cao, W. Yu, W. Ren, and G. Chen, “An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 9, no. 1, pp. 427–438, 2013.
- [2] T. Arai, E. Pagello, and L. E. Parker, “Editorial: Advances in multi-robot systems,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 18, no. 5, pp. 655–661, 2002.
- [3] E. Montijano, A. Priolo, A. Gasparri, and C. Sagues, “Distributed entrapment for multi-robot systems with uncertainties,” in *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, 2013, pp. 403–408.
- [4] F. A. Gianluca Antonelli and S. Chiaverini, “The entrapment/escorting mission, an experimental study using a multirobot system,” *IEEE Robotics & Automation Magazine*, pp. 22–29, 2008.
- [5] A. V. Moll, D. W. Casbeery, E. Garcia, and D. Milutinovic, “Pursuit-evasion of an evader by multiple pursuers,” in *International Conference on Unmanned Aircraft Systems*, 2018, pp. 133–142.
- [6] B. Vlahov, E. Squires, L. Strickl, and C. Pippin, “On developing a uav pursuit-evasion policy using reinforcement learning,” in *17TH IEEE International Conference on Machine Learning and Applications*, 2018, pp. 859–864.
- [7] L. O. Singh and R. Devanathan, “Comparative study of the performance of application of bio-inspired strategies to pursuit evasion game under feedback laws,” in *18TH IEEE International Conference on Control, Automation and Systems*, 2018, pp. 276–281.
- [8] A. Pierson and M. Schwager, “Controlling noncooperative herds with robotic herders,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 34, no. 2, pp. 517–525, 2018.
- [9] R. A. Licitra, Z. I. Bell, E. A. Doucette, and W. E. Dixon, “Single agent indirect herding of multiple targets: A switched adaptive control approach,” *IEEE Control System Letters*, vol. 2, no. 1, pp. 127–132, 2018.
- [10] K.-K. Oh, M.-C. Park, and H.-S. Ahn, “A survey of multi-agent formation control,” *Automatica*, vol. 53, pp. 424–440, 2015.

- [11] M. Mesbahi and M. Egerstedt, *Graph theoretic methods in multiagent networks*. Princeton University Press, 2010.
- [12] B. D. Anderson, C. Yu, B. Fidan, and J. M. Hendrickx, “Rigid graph control architectures for autonomous formations,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 28, no. 6, pp. 48—63, 2008.
- [13] M. Basiri, A. N. Bishop, and P. Jensfelt, “Distributed control of triangular formations with angle-only constraints,” *Systems and Control Letters*, vol. 59, no. 2, pp. 147—154, 2010.
- [14] J. Alonso-Mora, E. Montijano, T. Nageli, O. Hilliges, M. Schwager, and D. Rus, “Distributed multi-robot formation control in dynamic environments,” *Autonomous Robots*, vol. 43, no. 5, pp. 1079–1100, Jun 2019.
- [15] Y. Cao, D. Stuart, W. Ren, and Z. Meng, “Distributed containment control for multiple autonomous vehicles with double-integrator dynamics: Algorithms and experiments,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 19, no. 4, pp. 929—938, 2011.
- [16] Y. Wang, L. Cheng, Z.-G. Hou, J. Yu, and M. Tan, “Optimal formation of multi-robot systems based on a recurrent neural network,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 27, no. 2, pp. 69–78, 2016.
- [17] A. R. Mosteo, E. Montijano, and D. Tardioli, “Optimal role and position assignment in multi-robot freely reachable formations,” *Automatica*, vol. 81, pp. 305 – 313, 2017.
- [18] H. K. Khalil, *Nonlinear Control*. Pearson Press, 2015.
- [19] A. K.J. and W. B., *Adaptive Control*. Addison Wesley, 1989.
- [20] B. N.L, *Matemática Discreta*. Vicens Vives, 1994.
- [21] K. A. Browning and R. Wexler, “The determination of kinematic properties of a wind field using doppler radar,” *Journal of Applied Meteorology*, vol. 7, no. 1, pp. 105–113, 1968.
- [22] G. F. Franklin, D. J. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 4th ed. Prentice Hall PTR, 2001.