



Trabajo Fin de Grado

Estudio de la regulación y la sincronización entre los distintos componentes de turbinas de gas axiales

Study of synchronization and matching between components of an axial gas turbine

Autor

Said El Kadmiri Pedraza

Directores

Eva María Llera Sastresa
Enrique Teruel Doñate

Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza

Grado de Ingeniería Mecánica

Curso 2018/19

Resumen

En el siguiente trabajo se abordará el algoritmo de sincronización entre componentes de una turbina de gas axial, tanto a régimen estacionario como a régimen transitorio. A continuación, se realizará un modelo matemático con Matlab implementando dichos algoritmos y se desarrollará un controlador PID capaz de regular la cantidad de combustible necesaria para acelerar o decelerar una turbina de gas.

El trabajo será estructurado de forma secuencial. Primero se desarrollará el algoritmo capaz de hallar los puntos de trabajo del compresor y la turbina a diversas velocidades de rotación cuando estos se encuentran en equilibrio mecánico. Una vez hallados, se partirá de un punto de equilibrio para acelerar o decelerar la turbina de gas mediante el algoritmo de sincronización entre componentes a régimen transitorio. Obtenidos dichos algoritmos, se implementarán en Matlab con datos genéricos relativos a los mapas de características y de las propiedades del combustible y de los gases que intervienen.

ÍNDICE

Memoria

1	Introducción	1
2	Algoritmo de sincronización para la regulación a régimen estacionario de una turbina de gas	5
	2.1 <i>Sincronización con dispositivos adicionales: turbina libre y tobera</i>	9
	2.1.1. <i>Matching con turbina libre</i>	9
	2.1.2. <i>Matching con tobera</i>	10
3	Algoritmo de sincronización para la regulación a régimen transitorio de una turbina de gas	12
4	Control dinámico de la turbina de gas	16
5	Modelización del sistema en Matlab	18
	5.1. <i>Adaptación de los mapas de características</i>	18
	5.1.1. <i>Elección de diversos puntos del mapa a diferentes velocidades adimensionales</i>	18
	5.1.2. <i>Interpolación polinómica de los puntos definidos a velocidad adimensional constante</i>	19
	5.2. <i>Funciones y programas adicionales necesarios para utilizar los algoritmos de sincronización</i>	22
	5.2.1. <i>Interpolación lineal entre velocidades adimensionales</i>	22
	5.2.2. <i>Interpolación lineal a la misma velocidad adimensional</i>	23
	5.2.3. <i>Definición de una función inversa para las funciones anteriores</i>	23
	5.3. <i>Aplicación del algoritmo de sincronización entre componentes a régimen estacionario</i>	24
	5.4. <i>Aplicación del algoritmo de sincronización entre componentes a régimen transitorio y control dinámico PID</i>	28
6	Conclusión y reflexiones	32

Anexos

I	Magnitudes, Principios y Ecuaciones.	34
<i>I.1</i>	<i>Entalpía total o de parada</i>	34
<i>I.2</i>	<i>Primer Principio de la Termodinámica</i>	35
<i>I.3</i>	<i>Segundo Principio de la Termodinámica</i>	35
<i>I.4</i>	<i>Relaciones entre magnitudes para flujo isoentrópico en un gas perfecto</i>	36
<i>I.4.1.</i>	<i>Relación temperatura-presión</i>	36
<i>I.4.2.</i>	<i>Velocidad del sonido</i>	36
<i>I.4.3.</i>	<i>Número de Mach y relaciones isoentrópicas</i>	38
<i>I.5</i>	<i>Ciclo Brayton</i>	40
<i>I.6</i>	<i>Propulsión Aeronáutica</i>	43
II	Mapas de características	46
<i>II.1</i>	<i>Mapa de características del compresor</i>	46
<i>II.2</i>	<i>Mapa de características de la turbina</i>	51
<i>II.3</i>	<i>Cámara de combustión</i>	51

1 Introducción

En el siguiente trabajo se realizará un estudio sobre las condiciones de sincronización entre componentes de una turbina de gas en régimen estacionario y en régimen transitorio. Se estudiarán y diseñarán los algoritmos que rigen estas condiciones y se proyectarán en un programa informático de código abierto, que en este caso será Matlab. Una vez obtenidos los resultados de ambos estudios, se procederá al control dinámico de la turbina de gas mediante un control PID.

Una turbina de gas es una máquina térmica capaz de realizar un ciclo Brayton¹ termodinámico, y está formada por tres componentes fundamentales: compresor, cámara de combustión y turbina.

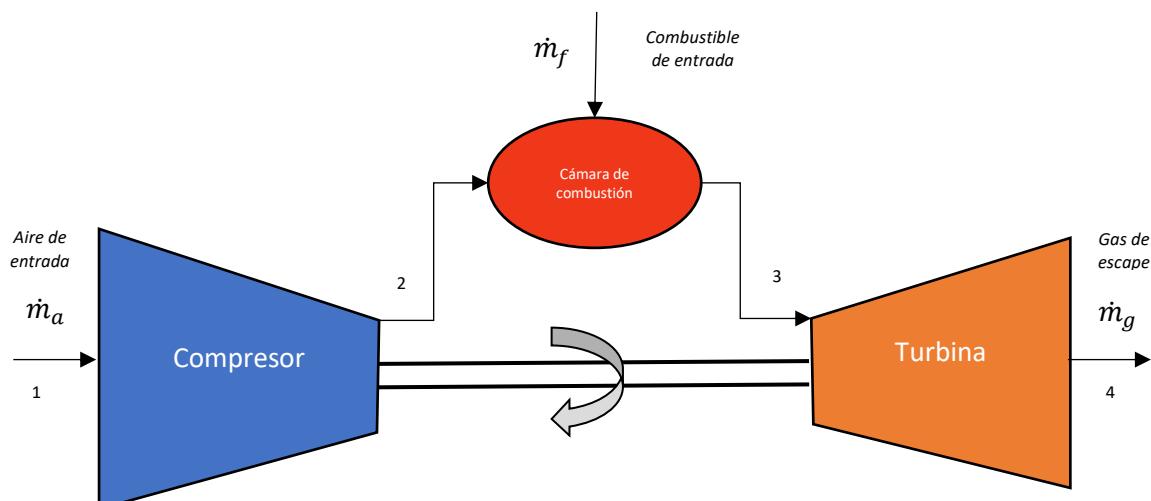


Ilustración 1.1. Esquema de una turbina de gas

En su configuración más sencilla, el fluido es sometido a tres procesos fundamentales:

- 1) Compresión adiabática y no isoentrópica entre 1 y 2.
- 2) Combustión o adición de calor a presión constante entre 2 y 3.
- 3) Expansión adiabática y no isoentrópica entre 3 y 4.

El compresor² es el dispositivo capaz de realizar el proceso 1. Este comprime el aire, aumentando su presión para así poder ser quemado en la cámara de combustión³ (proceso 2). En esta se produce la mezcla del flujo de aire con el flujo de combustible y se fuerza una reacción de combustión para aumentar la temperatura del gas. Este se expande posteriormente en la turbina⁴, siguiendo el proceso 3.

Escogiendo un volumen de control que comprende los tres componentes (compresor, cámara de combustión y turbina), podemos aplicar las siguientes ecuaciones:

¹ Explicación del Ciclo Brayton en el Anexo I

² Estudio del compresor en el Anexo II

³ Estudio de la cámara de combustión en el Anexo II

⁴ Estudio de la turbina en el Anexo II

- Ecuación de conservación del flujo másico.

$$\frac{dM}{dt} = \sum_{in} \dot{m}_{in} - \sum_{out} \dot{m}_{out}$$

Si aplicamos la ecuación de continuidad del flujo másico en su forma unidimensional, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{dM}{dt} = \dot{m}_a + \dot{m}_f - \dot{m}_g$$

- Ecuación de la energía.

$$\frac{d}{dt} \left[M \left(\frac{c^2}{2} + gz + u \right) \right] = \sum_{in} \dot{m}_{in} \left(h_{in} + \frac{c_{in}^2}{2} + gz_{in} \right) - \sum_{out} \dot{m}_{out} \left(h_{out} + \frac{c_{out}^2}{2} + gz_{out} \right) + \dot{Q} - \dot{W}$$

Podemos emplear la ecuación de la energía aplicada a cada componente. Suponemos para cada componente un volumen de control adiabático con el exterior ($\dot{Q} = 0$) y que la diferencia de energía potencial es despreciable.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[M \left(\frac{c^2}{2} + gz + u \right) \right]_c &= \dot{m}_a \left(h_1 - h_2 + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \right) + \dot{W}_C = \dot{m}_a (h_{01} - h_{02}) + \dot{W}_C \\ \frac{d}{dt} \left[M \left(\frac{c^2}{2} + gz + u \right) \right]_{CC} &= \dot{m}_g \left(h_2 - h_3 + \frac{c_2^2 - c_3^2}{2} \right) + \dot{Q}_{CC} = \dot{m}_g (h_{02} - h_{03}) + \dot{Q}_{CC} \\ \frac{d}{dt} \left[M \left(\frac{c^2}{2} + gz + u \right) \right]_T &= \dot{m}_g \left(h_3 - h_4 + \frac{c_3^2 - c_4^2}{2} \right) - \dot{W}_T = \dot{m}_g (h_{03} - h_{04}) - \dot{W}_T \end{aligned}$$

En régimen estacionario, los términos $\frac{dM}{dt}$ y $\frac{d}{dt} \left[M \left(\frac{c^2}{2} + gz + u \right) \right]$ se anulan, de forma que:

$$\dot{m}_g = \dot{m}_a + \dot{m}_f$$

$$\dot{W}_C = \dot{m}_a (h_{02} - h_{01})$$

$$\dot{Q}_{CC} = \dot{m}_g (h_{03} - h_{02})$$

$$\dot{W}_T = \dot{m}_g (h_{03} - h_{04})$$

Utilizando el modelo de gas perfecto:

$$\dot{W}_C = \dot{m}_a c_{pa} (T_{02} - T_{01})$$

$$\dot{Q}_{CC} = \dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{02})$$

$$\dot{W}_T = \dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{04})$$

Para que la turbina de gas esté en equilibrio mecánico, la potencia desarrollada por la turbina deberá ser igual a la potencia consumida⁵ por las cargas en el eje. En el caso de la turbina de gas axial de un solo eje, el único componente que consume potencia es el compresor, por lo tanto:

$$\eta_{mec} \dot{W}_T - \dot{W}_C = 0$$

$$\dot{m}_a c_{pa} (T_{02} - T_{01}) = \eta_{mec} \dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{04})$$

⁵ El eje de la turbina sufrirá unas pérdidas mecánicas debidas al rozamiento, que denotaremos con un rendimiento mecánico η_{mec} .

Utilizando la definición de rendimiento isoentrópico⁶ y empleando las relaciones isoentrópicas del modelo de gas perfecto:

$$\begin{aligned}\dot{m}_a c_{pa} T_{01} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right) &= \eta_{mec} \dot{m}_g c_{pg} T_{03} \left(1 - \frac{1}{T_{03}/T_{04}} \right) \\ \dot{m}_a c_{pa} T_{01} \frac{1}{\eta_c} \left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma_a-1}{\gamma_a}} - 1 \right) &= \eta_{mec} \dot{m}_g c_{pg} T_{03} \eta_T \left(1 - \left(\frac{1}{p_{03}/p_{04}} \right)^{\frac{\gamma_g-1}{\gamma_g}} \right)\end{aligned}$$

En el caso en el que la turbina de gas no estuviera en equilibrio mecánico, este sería debido a un desequilibrio de potencia.

$$\begin{aligned}\eta_{mec} \dot{W}_T - \dot{W}_C &= \Delta \dot{W} \neq 0 \\ \eta_{mec} \dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{04}) - \dot{m}_a c_{pa} (T_{02} - T_{01}) &= \Delta \dot{W} \\ \eta_{mec} \dot{m}_g c_{pg} T_{03} \eta_T \left(1 - \left(\frac{1}{p_{03}/p_{04}} \right)^{\frac{\gamma_g-1}{\gamma_g}} \right) - \dot{m}_a c_{pa} T_{01} \frac{1}{\eta_c} \left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma_a-1}{\gamma_a}} - 1 \right) &= \Delta \dot{W}\end{aligned}$$

Este desequilibrio de potencia nos reportaría un desequilibrio en el momento de fuerzas, que consecuentemente nos aceleraría o deceleraría el eje de la turbina de gas.

$$\Delta \dot{W} = \Delta M \omega, \quad \Delta M = J \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta \dot{W}}{\omega}, \quad \omega d\omega = \frac{\Delta \dot{W}}{J} dt$$

A través de una turbomáquina térmica el salto de presión es una función del flujo másico y de la velocidad de rotación del eje. Esta relación está normalizada para cada tipo y modelo de turbomáquina mediante los mapas de características⁷.

Los mapas de características representan variables adimensionales o quasi-adimensionales. Las que más emplearemos son:

- La relación (o ratio) de presión.

En el compresor está definido como la presión total a la salida del dispositivo, dividido por la presión total a la entrada, mientras que en la turbina es al revés. De esta manera, este valor es siempre mayor que 1.

$$\beta_C = \frac{p_{02}}{p_{01}}, \quad \beta_T = \frac{p_{03}}{p_{04}}$$

- Flujo másico corregido (o adimensional).

En el Anexo II nos adentraremos más en su estudio. Su forma general es:

$$\frac{\dot{m} \sqrt{T_0}}{p_0}$$

⁶ Estudio del rendimiento isoentrópico y las relaciones isoentrópicas en el Anexo I

⁷ Estudio de los mapas de características de componentes en Anexo II.

- Velocidad de rotación adimensional (o corregida).

Tal y como sucede con el flujo másico corregido, en el Anexo II explicaremos su obtención y su significado físico. De forma general, la velocidad de rotación corregida está definida como:

$$\frac{N}{\sqrt{T_0}}$$

- Eficiencia isoentrópica.

Explicada en el Anexo I. Se suele representar como:

$$\eta_s$$

Los mapas de componentes nos aportan una información crucial para hallar la sincronización entre turbina y compresor a régimen estacionario. Estos mapas pueden ser introducidos en un programa⁸, de manera que obtengamos dos variables de salida en función de dos variables de entrada.

En los apartados sucesivos de la memoria explicaremos los procesos de regulación estacionaria y regulación transitoria en una turbina de gas axial. Tomaremos los mapas de componentes del compresor y turbina como funciones de las variables hasta ahora comentadas y realizaremos de forma iterativa estos procesos de sincronización para encontrar los distintos puntos de funcionamiento de la turbina de gas. Finalmente, modelizaremos el sistema y aplicaremos los algoritmos diseñados para comprobar la funcionalidad de los mismos.

⁸ Realizado en el programa diseñado, correspondiente al Apartado 5.

2

Algoritmo de sincronización para la regulación a régimen estacionario de una turbina de gas

En este apartado determinaremos el algoritmo de sincronización entre turbina y compresor en una turbina de gas a régimen estacionario⁹. El eje gira a velocidad constante, ya que los componentes están en equilibrio mecánico ($\Delta\dot{W} = 0$)

Este algoritmo se basa en tres ecuaciones principales:

- Ecuación de continuidad de flujo másico: $\dot{m}_g = \dot{m}_a + \dot{m}_f - \dot{m}_b \approx \dot{m}_a + \dot{m}_f$

En régimen estacionario, el flujo másico de gas es el resultado de la contribución del flujo másico de aire, el flujo másico de combustible y el flujo de pérdidas. Tomamos despreciables las fugas de aire en el compresor.

En términos de flujo másico corregido, magnitud de entrada a los mapas de componentes:

$$\left[\frac{\dot{m}_g \sqrt{T_{03}}}{p_{03}} \right]_T = \left[\frac{\dot{m}_a \sqrt{T_{01}}}{p_{01}} \frac{p_{01} \sqrt{T_{02}}}{p_{02} \sqrt{T_{01}}} \right]_C \left[\frac{\dot{m}_g p_{02} \sqrt{T_{03}}}{\dot{m}_a p_{03} \sqrt{T_{02}}} \right]_{CC}$$

- Ecuación de continuidad de velocidad de rotación: $N = N_c = N_T$

Dado que el compresor y la turbina están colocados en el mismo eje, poseen la misma velocidad de rotación en régimen estacionario.

En términos de velocidad de rotación corregida:

$$\left[\frac{N}{\sqrt{T_{03}}} \right]_T = \left[\frac{N}{\sqrt{T_{01}} \sqrt{T_{02}}} \right]_C \left[\frac{\sqrt{T_{02}}}{\sqrt{T_{03}}} \right]_{CC}$$

- Ecuación del equilibrio de potencias: $\Delta\dot{W} = \eta_{mec} \dot{W}_T - \dot{W}_C = 0$

La turbina se encuentra en régimen estacionario mecánico, y esto necesita de un equilibrio de potencia en el eje.

$$0 = \eta_{mec} \dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{04}) - \dot{m}_a c_{pa} (T_{02} - T_{01})$$

Esta ecuación, expresada en función de las relaciones de presión p_{02}/p_{01} y p_{03}/p_{04} , y las eficiencias isoentrópicas de compresor y turbina, respectivamente, η_C, η_T resulta:

$$\Delta\dot{W} = 0 = \eta_{mec} \left[\dot{m}_g c_{pg} T_{03} \eta_T \left(1 - \left(\frac{1}{p_{03}/p_{04}} \right)^{\frac{\gamma_g-1}{\gamma_g}} \right) \right]_T - \left[\dot{m}_a c_{pa} T_{01} \frac{1}{\eta_C} \left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma_a-1}{\gamma_a}} - 1 \right) \right]_C$$

El proceso de regulación entre componentes de una turbina de gas no es secuencial, pero sí convergente. Por lo tanto, es necesario un algoritmo de sincronización capaz de encontrar el punto de equilibrio entre compresor y turbina de forma iterativa. Este algoritmo viene explicado a continuación.

⁹ Basado en el libro *Gas Turbine Theory* [1].

Elegimos un punto de funcionamiento del compresor: $\frac{\dot{m}_a\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}, \frac{N}{\sqrt{T_{01}}}$

$$(\eta_c, \beta_c) = f\left(\frac{\dot{m}_a\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}, \frac{N}{\sqrt{T_{01}}}\right) \rightarrow \text{Mapas del compresor}$$

Determinamos el valor del salto de temperatura, de la temperatura a la salida y de la presión a la salida.

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{1}{\eta_c} \left(\beta_c^{\frac{\gamma_a-1}{\gamma_a}} - 1 \right) + 1, \quad T_{02} = T_{01} \frac{T_{02}}{T_{01}}$$

$$p_{02} = \beta_c p_{01}$$

Determinamos el flujo máscico de aire:

$$\dot{m}_a = \frac{\dot{m}_a\sqrt{T_{01}}}{p_{01}} \frac{p_{01}}{\sqrt{T_{01}}}$$

Calculamos la potencia consumida por el compresor:

$$\dot{W}_c = \dot{m}_a c_{pa} (T_{02} - T_{01}) = \dot{m}_a c_{pa} \frac{1}{\eta_c} T_{01} \left(\beta_c^{\frac{\gamma_a-1}{\gamma_a}} - 1 \right)$$

En la cámara de combustión suponemos una caída de presión constante debida a pérdidas por rozamiento frío. No tenemos en cuenta las pérdidas debidas al intercambio térmico.

$$\frac{p_{03}}{p_{02}} = 1 - \frac{\Delta p_{023}}{p_{02}}, \quad p_{03} = \frac{p_{03}}{p_{02}} p_{02}$$

Expresamos la caída de presión en base a las condiciones de entrada del compresor:

$$\frac{p_{03}}{p_{01}} = \frac{p_{03}}{p_{02}} \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{03}}{p_{02}} \beta_c, \quad p_{03} = \frac{p_{03}}{p_{01}} p_{01}$$

Inicio del bucle externo

Implementa las ecuaciones de continuidad de flujo, de velocidad de rotación y de equilibrio de potencias.

Suponemos una $\frac{p_{03}}{p_{04}} = \beta_T$

Determinamos $\frac{\dot{m}_g\sqrt{T_{03}}}{p_{03}}$ con el mapa de presión de la turbina. Suponemos que es independiente de la velocidad de rotación corregida.

$$\frac{\dot{m}_g\sqrt{T_{03}}}{p_{03}} = f\left(\beta_T, \frac{N}{\sqrt{T_{03}}}\right) \approx f(\beta_T) \rightarrow \text{Mapa turbina}$$

Inicio del bucle interno

Implementa el algoritmo que satisface la continuidad de flujo y la relación entre ΔT_{032} y el dosado f .

$$\dot{m}_g = \dot{m}_a \rightarrow \text{Solo para la primera iteración}$$

Utilizamos la ecuación de continuidad de flujo.

$$\frac{\dot{m}_g \sqrt{T_{03}}}{p_{03}} = \frac{\dot{m}_a \sqrt{T_{01}}}{p_{01}} \frac{\dot{m}_g p_{01}}{\dot{m}_a p_{03}} \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{01}}}$$

$$\sqrt{\frac{T_{03}}{T_{01}}} = \frac{\frac{\dot{m}_g \sqrt{T_{03}}}{p_{03}}}{\frac{\dot{m}_a \sqrt{T_{01}}}{p_{01}}} \frac{m_a p_{03}}{m_g p_{01}}$$

$$T_{03} = T_{01} \frac{T_{03}}{T_{01}}$$

Determinamos el dosado necesario¹⁰ para alcanzar la temperatura T_{03} , y con ello \dot{m}_g/\dot{m}_a :

$$f = \frac{T_{03} - T_{02}}{C_1} \quad (\text{Función lineal } T_{03} - T_{02})$$

$$\dot{m}_f = \dot{m}_a f$$

$$\dot{m}_g = \dot{m}_a + \dot{m}_f$$

Fin del bucle interno, hasta que \dot{m}_g converja al valor anterior.

Determinamos la eficiencia de la turbina mediante el mapa de la turbina:

$$\frac{N}{\sqrt{T_{03}}} = \frac{N}{\sqrt{T_{01}}} \frac{\sqrt{T_{01}}}{\sqrt{T_{03}}}$$

$$\eta_T = f \left(\frac{p_{03}}{p_{04}}, \frac{N}{\sqrt{T_{03}}} \right)$$

Determinamos las propiedades del gas a la salida de la turbina:

$$\frac{T_{04}}{T_{03}} = \eta_T \left(\left(\frac{1}{\beta_T} \right)^{\frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g}} - 1 \right) + 1, \quad T_{04} = T_{03} \frac{T_{04}}{T_{03}}$$

$$p_{04} = p_{03} \frac{1}{\beta_T}$$

¹⁰ He asumido que el salto de temperatura en la cámara de combustión es lineal con el dosado. El coeficiente C_1 es una función del poder calorífico del combustible y puede ser obtenido mediante tablas. Ver Anexo II.

Determinamos la potencia producida por la turbina:

$$\dot{W}_T = \dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{04}) = \dot{m}_g c_{pg} \eta_T T_{03} \left(1 - \left(\frac{1}{\beta_T} \right)^{\frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g}} \right)$$

Determinamos la diferencia de potencia entre turbina y compresor:

$$\Delta \dot{W} = \eta_{mec} \dot{W}_T - \dot{W}_C$$

Expresamos el $\Delta \dot{W}$ como una función de todos los parámetros que influyen en el consumo y producción de potencia en el eje:

$$\Delta \dot{W} = \eta_{mec} \dot{m}_g c_{pg} \eta_T T_{03} \left(1 - \left(\frac{1}{\beta_T} \right)^{\frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g}} \right) - \dot{m}_a c_{pa} \frac{1}{\eta_C} T_{01} \left((\beta_C)^{\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a}} - 1 \right)$$

Establecemos la condición del generador de gases calientes:

$$\Delta \dot{W} = \dot{W}_{load} = 0$$

$$\beta_T = \left(1 - \frac{\Delta \dot{W} + \dot{m}_a c_{pa} \frac{1}{\eta_C} T_{01} \left((\beta_C)^{\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a}} - 1 \right)}{\eta_{mec} \dot{m}_g c_{pg} \eta_T T_{03}} \right)^{\frac{\gamma_g}{1-\gamma_g}} = \left(1 - \frac{0 + W_C}{\eta \dot{m}_g c_{pg} \eta_T T_{03}} \right)^{\frac{\gamma_g}{1-\gamma_g}}$$

Cierre del bucle externo cuando $\Delta \dot{W} = 0$

2.1. Sincronización con dispositivos adicionales: turbina libre y tobera

Una vez hallado el equilibrio de la turbina de gas simple obtenemos un gas caliente a alta presión a la salida de la turbina. La energía de este fluido puede ser aprovechada, bien en una turbina externa conectada a un transformador, bien con una tobera propulsiva, o bien con ambos dispositivos.

2.1.1. Matching con una turbina libre

Vamos a suponer que la velocidad de rotación de la turbina externa es tal que se alcanza el punto de mayor eficiencia de la misma en el punto de operación del punto de diseño. Vamos a suponer que entre los límites de trabajo de la turbina libre p_{04}/p_{05} es una función de $\dot{m}_g \sqrt{T_{04}}/p_{04}$, es decir, que no entra en choking.

Hallamos el flujo adimensional a la salida de la turbina de alta presión:

$$\frac{\dot{m}_g \sqrt{T_{04}}}{p_{04}}$$

La turbina no entra nunca en choking, por lo tanto, β es una función del flujo másico corregido.

$$\beta_{TL} = \frac{p_{04}}{p_{05}} = f\left(\frac{\dot{m}_g \sqrt{T_{04}}}{p_{04}}\right)$$

Hallamos la eficiencia isoentrópica de la turbina:

$$\eta_{TL} = f\left(\beta_{TL}, \frac{N_{TL}}{\sqrt{T_{04}}}\right)$$

Determinamos el salto de temperatura, la temperatura a la salida y la presión a la salida:

$$\frac{T_{05}}{T_{04}} = \eta_{TL} \left(\left(\frac{1}{\beta_{TL}} \right)^{\frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g}} - 1 \right) + 1, \quad T_{05} = T_{04} \frac{T_{05}}{T_{04}}$$

$$p_{05} = p_{04} \frac{1}{\beta_{TL}}$$

Obtenemos la potencia de la turbina:

$$\dot{W}_{TL} = \dot{m}_g c_{pg} (T_{04} - T_{05})$$

Definimos la eficiencia del ciclo termodinámico como la potencia producida por la turbina libre entre la potencia calorífica producida en la cámara de combustión:

$$\eta_{ciclo} = \frac{\dot{W}_{TL}}{Q_{CC}} = \frac{\dot{m}_g c_{pg} (T_{04} - T_{05})}{\dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{02})} = \frac{T_{04} - T_{05}}{T_{03} - T_{02}}$$

2.1.2. Matching con una tobera propulsiva

Si en lugar de la turbina externa colocamos una tobera, podemos calcular la fuerza de impulsión del motor.

Comenzamos calculando la velocidad del flujo a la salida de la tobera¹¹.

$$c_{pg} T_{04} = c_{pg} \left(T_5 + \frac{c_5^2}{2c_{pg}} \right)$$

$$c_5 = \sqrt{2c_p(T_{04} - T_5)}$$

$$M_5 = \frac{c_5}{a_5} = \frac{\sqrt{2c_p(T_{04} - T_5)}}{\sqrt{\gamma R T_5}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{T_{04}}{T_5} - 1 \right)}$$

Aplicamos la ecuación de la fuerza de impulso de un motor aeronáutico¹²:

$$\begin{aligned} F_{uninstalled} &= (p_5 - p_1)A_5 - m_a c_1 + (m_a + m_f)c_5 = \\ &= p_1 \left(\frac{p_5}{p_1} - 1 \right) A_5 - m_a \sqrt{\gamma R T_1} \frac{c_1}{\sqrt{\gamma_a R T_1}} + m_a \sqrt{\gamma R T_1} \frac{\sqrt{T_5}}{\sqrt{T_1}} (1 + f) \frac{c_5}{\sqrt{\gamma R T_5}} = \\ &= p_{01} \frac{p_1}{p_{01}} \left(\frac{p_{05}}{p_{01}} \frac{p_5}{p_{05}} \frac{p_{01}}{p_1} - 1 \right) A_5 - m_a \sqrt{\gamma R T_{01}} \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_{01}}} \left(\frac{\sqrt{T_{05}}}{\sqrt{T_{01}}} \frac{\sqrt{T_{01}}}{\sqrt{T_1}} \frac{\sqrt{T_5}}{\sqrt{T_{05}}} (1 + f) M_5 - M_1 \right) = \\ &= p_{01} \left(\frac{\frac{p_{05}}{p_{01}} \left(1 + \frac{\gamma_g - 1}{2} M_5^2 \right)^{\frac{\gamma_g}{\gamma_g - 1}} \left(1 + \frac{\gamma_a - 1}{2} M_1^2 \right)^{-\frac{\gamma_a}{\gamma_a - 1}} - 1}{\left(1 + \frac{\gamma_a - 1}{2} M_1^2 \right)^{-\frac{\gamma_a}{\gamma_a - 1}}} \right) A_5 + m_a \sqrt{\gamma R T_{01}} \left(\frac{\frac{\sqrt{T_{05}}}{\sqrt{T_{01}}} \left(1 + \frac{\gamma_a - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\gamma_g - 1}{2} M_5^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (1 + f) M_5 - M_1}{\left(1 + \frac{\gamma_a - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned}$$

Adimensionalizando la fuerza de impulso, obtenemos una función de distintos parámetros adimensionales:

$$\frac{F_{uninstalled}}{p_{01} A_5} = g_1 \left(\frac{p_{05}}{p_{01}}, M_1, M_5, \gamma_a, \gamma_g \right) + g_2 \left(A_5, \frac{m_a \sqrt{T_{01}}}{p_{01}}, \frac{\sqrt{T_{05}}}{\sqrt{T_{01}}}, M_1, M_5, \gamma_a, \gamma_g \right)$$

$$\frac{F_{installed}}{p_{01} A_5} = \frac{F_{uninstalled}}{p_{01} A_5} - \frac{F_D}{p_{01} A_5}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{p_{05}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \frac{p_{03}}{p_{02}} \frac{p_{04}}{p_{03}} \frac{p_{05}}{p_{04}} = \beta_c \frac{p_{03}}{p_{02} \beta_c} \beta_T \frac{p_{05}}{p_{04} \beta_{tobera}}$$

¹¹ Estudio de la tobera en Anexo II.

¹² Ecuaciones de la propulsión aeronáutica en Anexo I.

$$\frac{\sqrt{T_{05}}}{\sqrt{T_{01}}} = \frac{\sqrt{T_{02}}}{\sqrt{T_{01}}} \frac{\sqrt{T_{03}}}{\sqrt{T_{02}}} \frac{\sqrt{T_{04}}}{\sqrt{T_{03}}} \frac{\sqrt{T_{05}}}{\sqrt{T_{04}}} = g_3(\beta_c, \eta_c, f, \beta_T, \eta_T, \eta_{tobera})$$

Análogamente a la turbina de baja presión para producción eléctrica, podemos definir un rendimiento propulsivo:

$$\eta_p = \frac{F_{installed} c_1}{\dot{Q}_{cc}}$$

Hemos implementado el algoritmo de sincronización de componentes de la turbina de gas en base a las condiciones de operación del compresor elegidas, determinando el punto de funcionamiento de la turbina que cumple las ecuaciones de continuidad de flujo máscio y velocidad de rotación, así como la ecuación de equilibrio de potencias.

Para cada velocidad de rotación y un rango de β en el compresor determinado, podemos hallar el rango de funcionamiento de la máquina. Para ello, escogemos una velocidad de rotación corregida del compresor ($\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}$) y recorremos, desde el punto del compresor de mayor β admisible hasta el de menor β .

Con este estudio podremos determinar los puntos de mayor eficiencia del ciclo a régimen estacionario, además de poder establecer los límites de trabajo de la máquina: emisiones, temperaturas máximas soportables, *surge line*...

3 Algoritmo de sincronización para la regulación a régimen transitorio de una turbina de gas

Una vez estudiada la regulación de la turbina de gas en régimen estacionario podemos preguntarnos qué ocurriría si existieran fluctuaciones en las variables que condicionan el equilibrio del sistema. Por ejemplo, en las condiciones del aire a la entrada del compresor T_{01}, p_{01} o la cantidad de combustible utilizado \dot{m}_f .

Vamos a emplear una hipótesis muy importante: el proceso transitorio es puramente mecánico, es decir, no tiene en cuenta los procesos transitorios internos al fluido. Adicionalmente, tomaremos la turbina de gas como un sólido rígido.

Esto implica que la ecuación de continuidad de flujo en régimen estacionario siga siendo válida, así como la ecuación de la continuidad de la velocidad de rotación corregida.

- Ecuación de continuidad de flujo másico:

$$\left[\frac{\dot{m}_g \sqrt{T_{03}}}{p_{03}} \right]_T = \left[\frac{\dot{m}_a \sqrt{T_{01}}}{p_{01}} \frac{p_{01} \sqrt{T_{02}}}{p_{02} \sqrt{T_{01}}} \right]_C \left[\frac{\dot{m}_g p_{02} \sqrt{T_{03}}}{\dot{m}_a p_{03} \sqrt{T_{02}}} \right]_{CC}$$

- Ecuación de compatibilidad de la velocidad de rotación:

$$\left[\frac{N}{\sqrt{T_{03}}} \right]_T = \left[\frac{N}{\sqrt{T_{01}} \sqrt{T_{02}}} \right]_C \left[\frac{\sqrt{T_{02}}}{\sqrt{T_{03}}} \right]_{CC}$$

Sin embargo, la ecuación de equilibrio de potencias generalmente no se cumple, ya que las condiciones de trabajo del compresor y la turbina pueden verse modificadas muy fácilmente al verse sometidas a cambios externos como T_{01}, p_{01} o m_f .

$$\Delta \dot{W} = \eta_{mec} \left[\dot{m}_g c_{pg} T_{03} \eta_T \left(1 - \left(\frac{1}{\beta_T} \right)^{\frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g}} \right) \right]_T - \left[\dot{m}_a c_{pa} T_{01} \frac{1}{\eta_C} \left((\beta_C)^{\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a}} - 1 \right) \right]_C \neq 0$$

La potencia y el momento de fuerzas en el eje de la turbina de gas están relacionados mediante la velocidad de giro de la máquina.

$$\Delta \dot{W} = \Delta M \omega$$

Siguiendo la Segunda Ley de Newton, sabemos que este desequilibrio de momento genera una aceleración angular en el eje, que puede acelerar o decelerar la turbina de gas dependiendo del balance de potencia.

$$\Delta M = \frac{\Delta \dot{W}}{\omega} = J \frac{d\omega}{dt}$$

Homólogamente al caso de la regulación en régimen estacionario, la regulación a régimen transitorio¹³ es un proceso no secuencial que conlleva la elaboración de un algoritmo iterativo que encuentre el punto de funcionamiento de turbina y compresor, que en este caso satisfaga las dos ecuaciones de continuidad anteriormente explicadas, y que integre la ecuación del desequilibrio de momento para calcular la nueva velocidad de rotación corregida en cada instante de tiempo.

Para ello, escogeremos un punto de equilibrio hallado previamente con el proceso de regulación en régimen estacionario, y realizaremos variaciones en las condiciones de entrada al compresor T_{01} , p_{01} y en el flujo mísico de combustible \dot{m}_f .

Tomaremos la hipótesis de que el flujo mísico corregido en la turbina sea constante. Es decir, vamos a suponer que el sistema regula p_{03} y T_{03} ante cambios en la cantidad de combustible introducida.

$$\frac{\dot{m}_g \sqrt{T_{03}}}{p_{03}} = K$$

Escogemos un punto de equilibrio a régimen estacionario con velocidad de rotación corregida $\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}$.

Tomamos $T_{01} = T_{01,eq} + \Delta T_{01}$, $p_{01} = p_{01,eq} + \Delta p_{01}$ y $\dot{m}_f = \dot{m}_{f,eq} + \Delta \dot{m}_f$.

Inicio del bucle externo.

Implementa la ecuación de la potencia, la Segunda Ley de Newton y la integración de la potencia instantánea para hallar la variación de la velocidad de rotación.

Inicio del bucle interno.

Este algoritmo tiene como objetivo la aplicación de la ecuación de continuidad de flujo en la turbina de gas.

Determinamos el flujo mísico de aire:

$$\dot{m}_a = \frac{\dot{m}_a \sqrt{T_{01}}}{p_{01}} \frac{p_{01}}{\sqrt{T_{01}}}$$

Hallamos el flujo mísico de gas:

$$\dot{m}_g = \dot{m}_f + \dot{m}_a$$

Determinamos el dosado:

$$f = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a}$$

Determinamos la nueva temperatura en 3.

$$T_{03} = C_1 f + T_{02}$$

Determinamos la presión a la salida de la cámara de combustión.

$$p_{03} = \frac{\dot{m}_g \sqrt{T_{03}}}{K}$$

¹³ Basado en el libro *Gas Turbine Theory* [2]. El algoritmo desarrollado en el trabajo difiere en la elección de T_{03}/T_{01} como una función del flujo mísico de combustible.

Hallamos el salto de presión en el compresor:

$$\beta_c = \frac{p_{03}}{p_{01}} \frac{p_{02}}{p_{03}}$$

Determinamos el nuevo punto del compresor:

$$\frac{\dot{m}_a \sqrt{T_{01}}}{p_{01}} = f \left(\beta_c, \frac{N}{\sqrt{T_{01}}} \right) \rightarrow \text{Búsqueda Inversa}$$

$$\eta_c = f \left(\frac{\dot{m}_a \sqrt{T_{01}}}{p_{01}}, \frac{N}{\sqrt{T_{01}}} \right)$$

Hallamos el salto de temperatura en el compresor y la temperatura de salida del aire.

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{1}{\eta_c} \left(\beta_c^{\frac{\gamma_a-1}{\gamma_a}} - 1 \right) + 1, \quad T_{02} = T_{01} \frac{T_{02}}{T_{01}}$$

Cerramos el bucle interno cuando encontremos convergencia en \dot{m}_a

Calculamos el punto de operación en la turbina:

$$\frac{N}{\sqrt{T_{03}}} = \frac{N}{\sqrt{T_{01}}} \frac{\sqrt{T_{01}}}{\sqrt{T_{03}}}$$

$$\beta_T = f \left(\frac{\dot{m}_g \sqrt{T_{03}}}{p_{03}}, \frac{N}{\sqrt{T_{03}}} \right) \approx f \left(\frac{\dot{m}_g \sqrt{T_{03}}}{p_{03}} \right) \rightarrow \text{Búsqueda inversa}$$

$$\eta_T = f \left(\beta_T, \frac{N}{\sqrt{T_{03}}} \right)$$

Hallamos las propiedades del gas a la salida de la turbina:

$$\frac{T_{04}}{T_{03}} = \eta_T \left(\left(\frac{1}{\beta_T} \right)^{\frac{\gamma_g-1}{\gamma_g}} - 1 \right) + 1, \quad T_{04} = T_{03} \frac{T_{04}}{T_{03}}$$

$$p_{04} = p_{03} \frac{1}{\beta_T}$$

Calculamos la potencia consumida por el compresor:

$$\dot{W}_C = \dot{m}_a c_{pa} (T_{02} - T_{01})$$

Calculamos la potencia desarrollada por la turbina:

$$\dot{W}_T = \dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{04})$$

Hallamos la potencia neta del ciclo:

$$\Delta \dot{W} = \eta_{mec} \dot{W}_T - \dot{W}_c$$

Con la potencia neta calculamos el desequilibrio de momento de fuerzas en el eje de la turbina, que mediante la Segunda Ley de Newton produce una aceleración de la máquina:

$$\Delta M = \frac{\Delta \dot{W}}{\omega_{eje}} = \frac{\Delta \dot{W}}{\frac{2\pi}{60} N} = J_{eje} \frac{d\omega}{dt} = J_{eje} \frac{d\left(\frac{2\pi}{60} N\right)}{dt}$$

$$NdN = \frac{1}{J_{eje}} \frac{60^2}{4\pi^2} \Delta \dot{W} dt$$

Integramos la ecuación anterior para un incremento de velocidad en el eje ΔN :

$$\int_0^{\Delta N} NdN = \frac{\Delta N^2}{2} = \int_0^{\Delta t} \frac{1}{J_{eje}} \frac{60^2}{4\pi^2} \Delta \dot{W} dt$$

Podemos realizar una integración numérica basada en el método del trapecio en un intervalo de discretización Δt , de tal forma que obtengamos el incremento de velocidad absoluta.

$$\Delta N_k = \sqrt{\int_0^{\Delta t} \frac{2}{J_{eje}} \frac{60^2}{4\pi^2} \Delta \dot{W} dt} \approx \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{J_{eje}} \frac{\Delta \dot{W}_k + \Delta \dot{W}_{k-1}}{2} \Delta t}$$

Cuanto más pequeño sea el tiempo de discretización, más nos acercaremos al valor real de la integral. Sumamos este valor de incremento de velocidad absoluta del eje a la velocidad absoluta anterior del eje.

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta N$$

Adimensionalizamos la nueva velocidad de rotación para el compresor y la turbina:

$$\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}, \frac{N}{\sqrt{T_{03}}}$$

Cerramos el bucle externo. Fin del transitorio cuando $\Delta \dot{W} \rightarrow 0$

Con este algoritmo hemos hallado el procedimiento para obtener la respuesta del transitorio ante cambios en las condiciones de equilibrio $T_{01}, p_{01}, \dot{m}_f$.

4 Control dinámico de la turbina de gas

Hemos estudiado el transitorio de la turbina de gas, es decir, cómo cambia la velocidad de rotación de la máquina ante estímulos externos, tales como cambios de temperatura y presión a la entrada del compresor.

No obstante, hasta ahora solo hemos hablado de cómo se comporta, y no de cómo queremos que se comporte. Quizá nos interese mantener una velocidad adimensional constante cuando baje o suba la temperatura T_{01} o la presión p_{01} . Para ello hay que tener en cuenta cual será la variable sobre la que queremos actuar: la cantidad de combustible.

Para que el sistema se autorregule a nivel transitorio, dada una referencia de velocidad, debemos colocar el sistema en bucle cerrado.

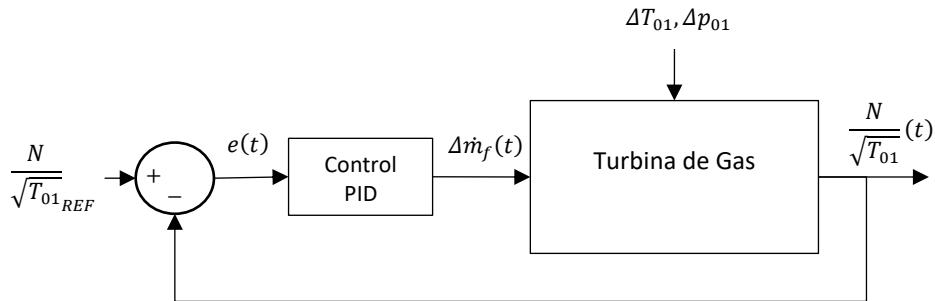


Ilustración 4.1. Esquema simple del control de una turbina de gas.

Partiendo de una perturbación en el estado de equilibrio el sistema sufrirá un cambio en la potencia neta, generando así un desequilibrio de momento que se traducirá en una variación de la velocidad del eje de rotación de la turbina de gas. Esta variación la deberemos comparar con una velocidad de rotación de referencia.

La diferencia entre la velocidad de rotación corregida relativa en el instante actual y la velocidad de rotación de referencia nos dará un error, que será función del tiempo.

$$e(t) = y_{ref} - y(t) = \frac{N}{\sqrt{T_{01,REF}}} - \frac{N}{\sqrt{T_{01}}}(t)$$

Vamos a realizar un control PID¹⁴ aplicado al modelo de estados discretos que hemos diseñado en el apartado de regulación transitoria, que tendrá la siguiente forma:

$$C(t_k) = P(t_k) + I(t_k) + D(t_k)$$

Siendo P, I y D las acciones proporcionales, integrales y derivativas del control empleado en el modelo de estados discretos.

¹⁴ Extraído del libro *Control PID Avanzado*. [7]

- Acción proporcional. La acción realizada es directamente proporcional al error.

$$P(t) = K_p (y_{ref}(t) - y(t))$$

En el sistema de estados discretos que utilizaremos en el modelo:

$$P(t_k) = K_p e(t_k) = K_p (y_{ref}(t_k) - y(t_k))$$

Siendo t_k el instante k-ésimo en el que se realiza el muestreo.

- Acción integrativa. La acción realizada es directamente proporcional a la integral del error.

$$I(t) = \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt = \frac{K_p}{T_i} \int_0^t (y_{ref}(t_k) - y(t_k)) dt$$

En el modelo de estados discretos, utilizamos una integración numérica siguiendo el método del trapecio, de manera que:

$$I(t_k) = \frac{K_p}{T_i} \frac{e(t_k) + e(t_{k-1})}{2} \Delta t$$

Donde $\Delta t = t_k - t_{k-1}$

- Acción derivativa. La acción realizada es proporcional a la derivada del error.

$$D(t) = K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

En el modelo discreto:

$$D(t_k) = K_p T_d \frac{e(t_k) - e(t_{k-1})}{\Delta t}$$

Donde $\Delta t = t_k - t_{k-1}$

Para hallar las constantes óptimas para la regulación, emplearemos el método de Ziegler-Nichols de las oscilaciones. Este método se basa en aumentar la ganancia del control proporcional (K_p) hasta que el sistema se vuelve inestable para un control puramente proporcional K_{crit} . Este valor máximo nos reportará un valor del período de oscilación crítica T_{crit} .

Una vez obtenida esta constante proporcional utilizaremos las relaciones de Ziegler-Nichols¹⁵ para hallar las constantes del PID:

$$\begin{aligned} K_p &= 0,6 K_{crit} \\ T_i &= \frac{T_{crit}}{2} \\ T_d &= \frac{T_{crit}}{8} \end{aligned}$$

¹⁵ Extraído del libro *Control PID Avanzado*. [8]

5 Modelización del sistema en Matlab

En el siguiente apartado se explicará el programa desarrollado en Matlab que integra los algoritmos de regulación en régimen estacionario y en régimen transitorio de la turbina de gas. En este programa, además, se han aplicado los conocimientos de control de sistemas dinámicos explicados en la sección anterior.

El programa consta de varias partes:

- Modelización y adaptación de los mapas de características de compresores y turbinas utilizadas en la configuración estudiada.
- Elaboración de distintos programas y funciones adicionales que permitan el acceso a los mapas de forma eficiente.
- Aplicación del algoritmo de regulación en régimen estacionario de la turbina de gas en la configuración estudiada. Obtención de los puntos de funcionamiento de la turbina de gas en equilibrio de potencias.
- Aplicación del algoritmo de regulación en régimen transitorio de la turbina de gas. Control del sistema ante cambios de las condiciones de equilibrio.

5.1. Adaptación de los mapas de características

He utilizado los datos arrojados por el programa GasTurb 13 de una turbina de gas genérica¹⁶ para la configuración básica (compresor, cámara de combustión y turbina). Para poder hacerlos accesibles a cualquier operación en Matlab, en cada mapa de características ha sido necesario realizar las siguientes operaciones:

5.1.1. Elección de diversos puntos del mapa a diferentes velocidades adimensionales.

Obtenemos de esta manera tres vectores, uno de flujo adimensional $\overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_0}}{p_0}}$, uno relación de presiones $\vec{\beta}$, y uno de eficiencias isoentrópicas $\vec{\eta}$ para cada velocidad adimensional $\overrightarrow{\frac{N}{\sqrt{T_0}}}$ de cada componente de la turbina de gas. Para todas las velocidades de rotación adimensionales almacenadas en el vector $\overrightarrow{\frac{N}{\sqrt{T_0}}}$, obtenemos las matrices asociadas $\overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_0}}{p_0}}, \vec{\beta}, \vec{\eta}$ de cada componente, de manera que encontramos las siguientes relaciones entre variables:

En el compresor:

$$\vec{\beta}_{HPC} = f\left(\overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}}, \overrightarrow{\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}}\right)$$

¹⁶ En general, los mapas de características de compresores y turbinas no son de dominio público, así que he tomado una adaptación aportada por la versión Trial del programa GasTurb 13 [3].

$$\vec{\eta}_{HPC} = f \left(\overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}}, \overrightarrow{\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}} \right)$$

En la turbina:

$$\overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_{03}}}{p_{03}}} = f \left(\vec{\beta}_{HPT}, \overrightarrow{\frac{N}{\sqrt{T_{03}}}} \right)$$

$$\vec{\eta}_{HPT} = f \left(\vec{\beta}_{HPT}, \overrightarrow{\frac{N}{\sqrt{T_{03}}}} \right)$$

No obstante, tal y como se explica en el Anexo II sobre los mapas de características, el mapa de la turbina que relaciona las presiones y el flujo másico adimensional puede considerarse independiente de la velocidad de rotación adimensional. Es decir, que en efectos prácticos:

$$\overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_{03}}}{p_{03}}} = f(\vec{\beta}_{HPT})$$

5.1.2. Interpolación polinómica de los puntos definidos a velocidad adimensional constante.

Una vez establecidas las relaciones anteriores, interpolamos los puntos escogidos para cada velocidad adimensional. Los polinomios obtenidos se evalúan en puntos discretos, de forma que obtenemos, para cada polinomio y un vector de evaluación (ya sea $\overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_0}}{p_0}}$ o $\vec{\beta}$ en su caso), un vector que reúne los valores de las funciones.

En el compresor:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}}(N/\sqrt{T_{01}})_1 \\ \overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}}(N/\sqrt{T_{01}})_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}}(N/\sqrt{T_{01}})_k \end{array} \right)_{HPC} &\rightarrow \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\beta_1}(N/\sqrt{T_{01}})_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\beta_{k_c}}(N/\sqrt{T_{01}})_{k_c} \end{array} \right)_{HPC} \\ \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}}(N/\sqrt{T_{01}})_1 \\ \overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}}(N/\sqrt{T_{01}})_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}}(N/\sqrt{T_{01}})_k \end{array} \right)_{HPC} &\rightarrow \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\eta_1}(N/\sqrt{T_{01}})_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\eta_{k_c}}(N/\sqrt{T_{01}})_{k_c} \end{array} \right)_{HPC} \end{aligned}$$

En la turbina:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\beta_{HPT}}(N/\sqrt{T_{03}}) &\rightarrow \overrightarrow{\frac{m\sqrt{T_{03}}}{p_{03}}}(N/\sqrt{T_{03}}) \\ \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\beta_1}(N/\sqrt{T_{03}})_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\beta_{k_t}}(N/\sqrt{T_{03}})_k \end{array} \right)_{HPT} &\rightarrow \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\eta_1}(N/\sqrt{T_{03}})_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\eta_{k_t}}(N/\sqrt{T_{03}})_{k_t} \end{array} \right)_{HPT} \end{aligned}$$

Donde k_c y k_t son los de velocidades adimensionales definidas para el compresor y turbina, respectivamente.

Obtenemos, para los componentes estudiados en el modelo, los siguientes mapas de características:

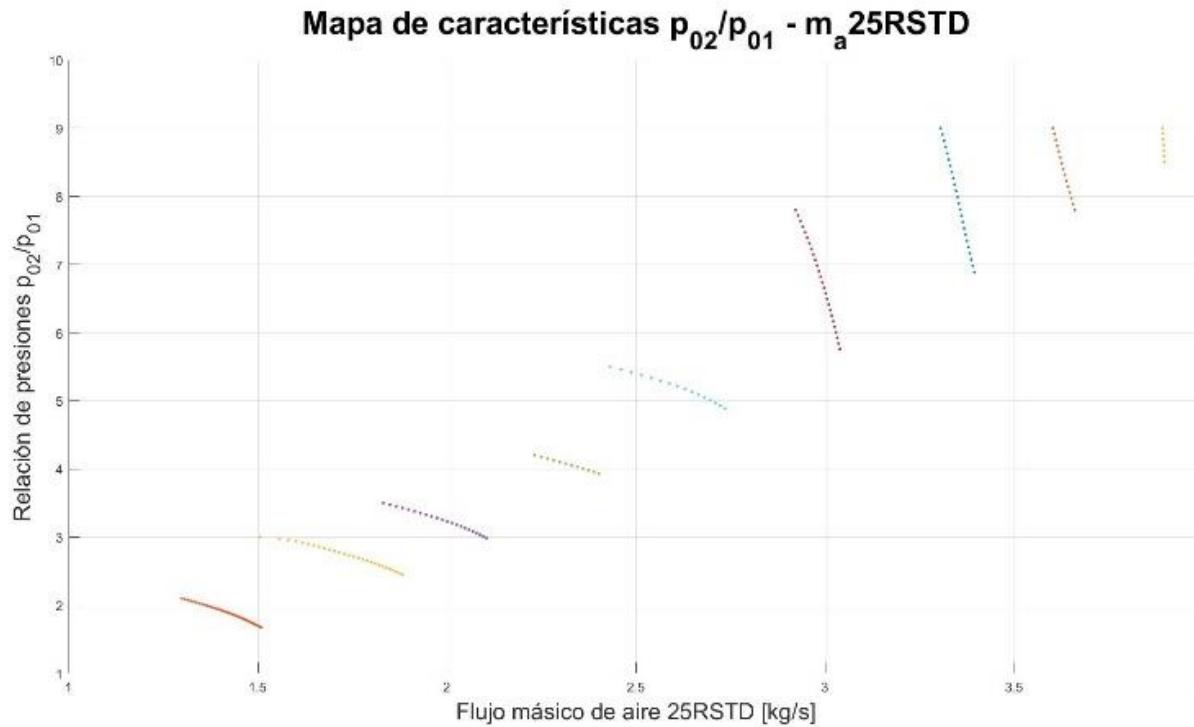


Ilustración 5.1. Mapa relación de presiones – Flujo adimensional del compresor

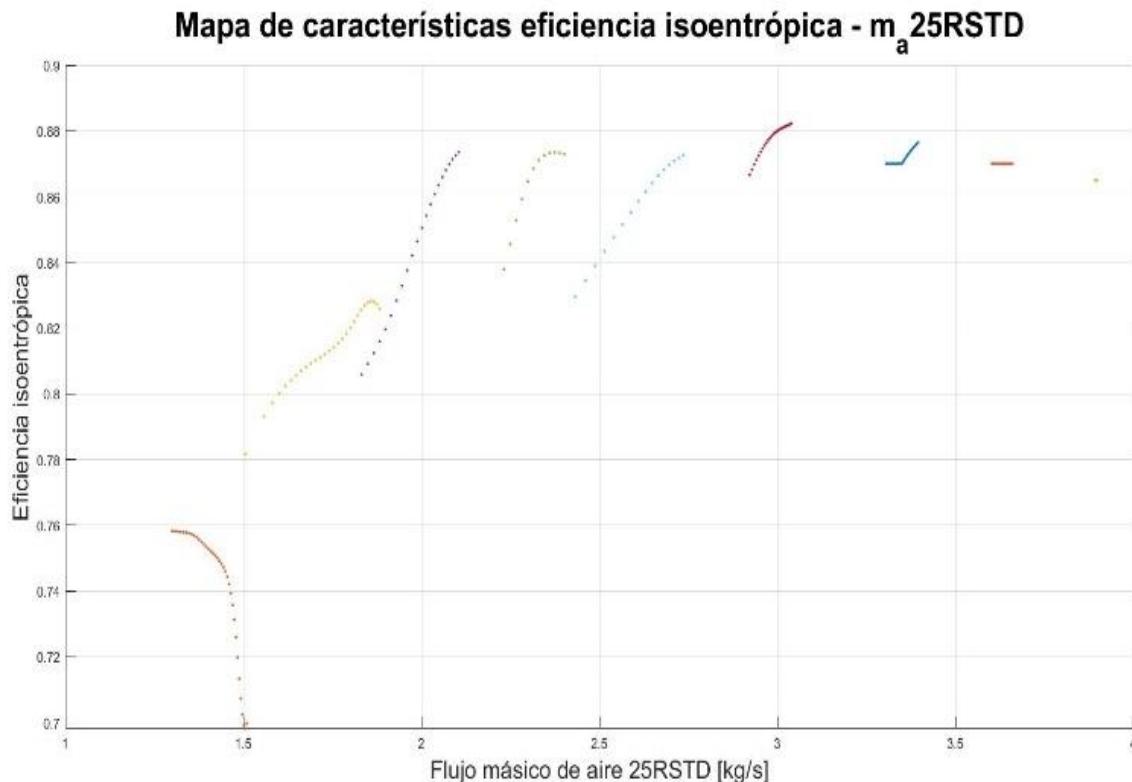


Ilustración 5.2. Mapa de eficiencia isoentrópica – Flujo adimensional del compresor

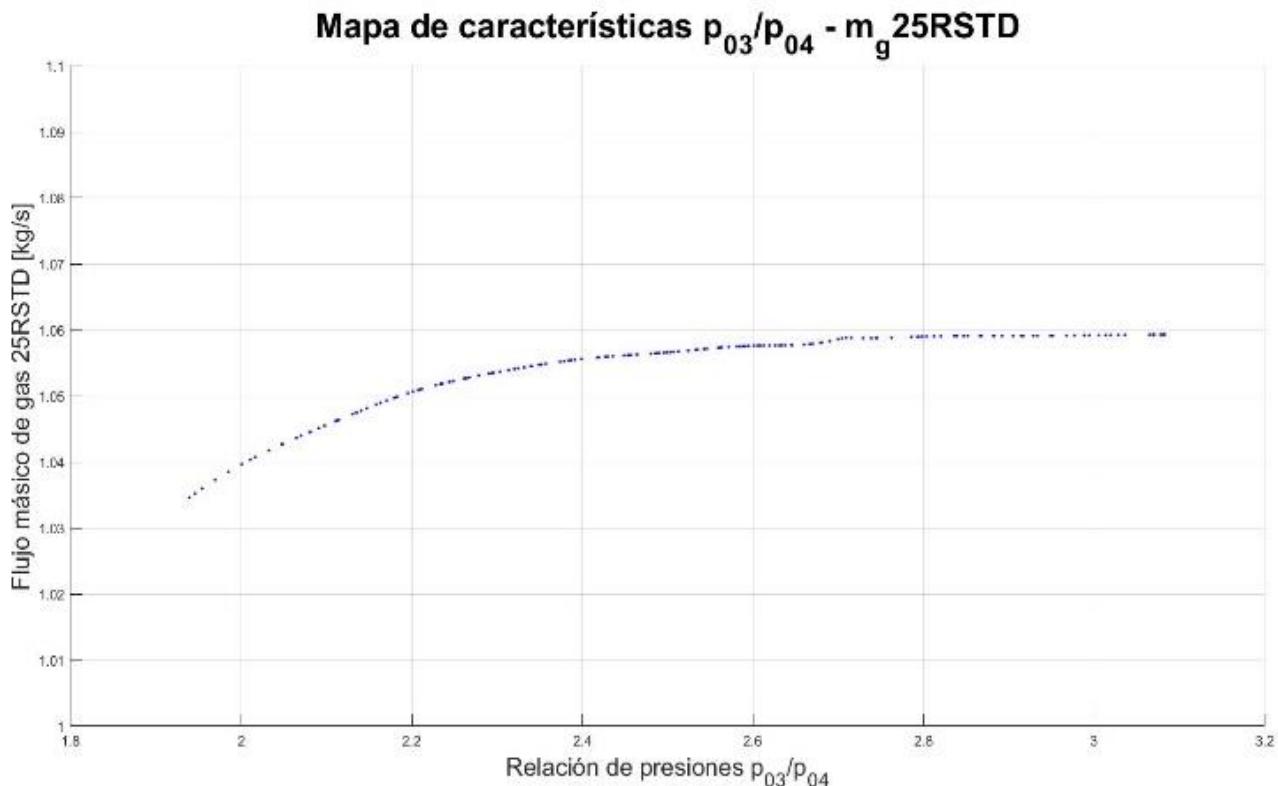


Ilustración 5.3. Mapa relación de presiones – Flujo adimensional de la turbina

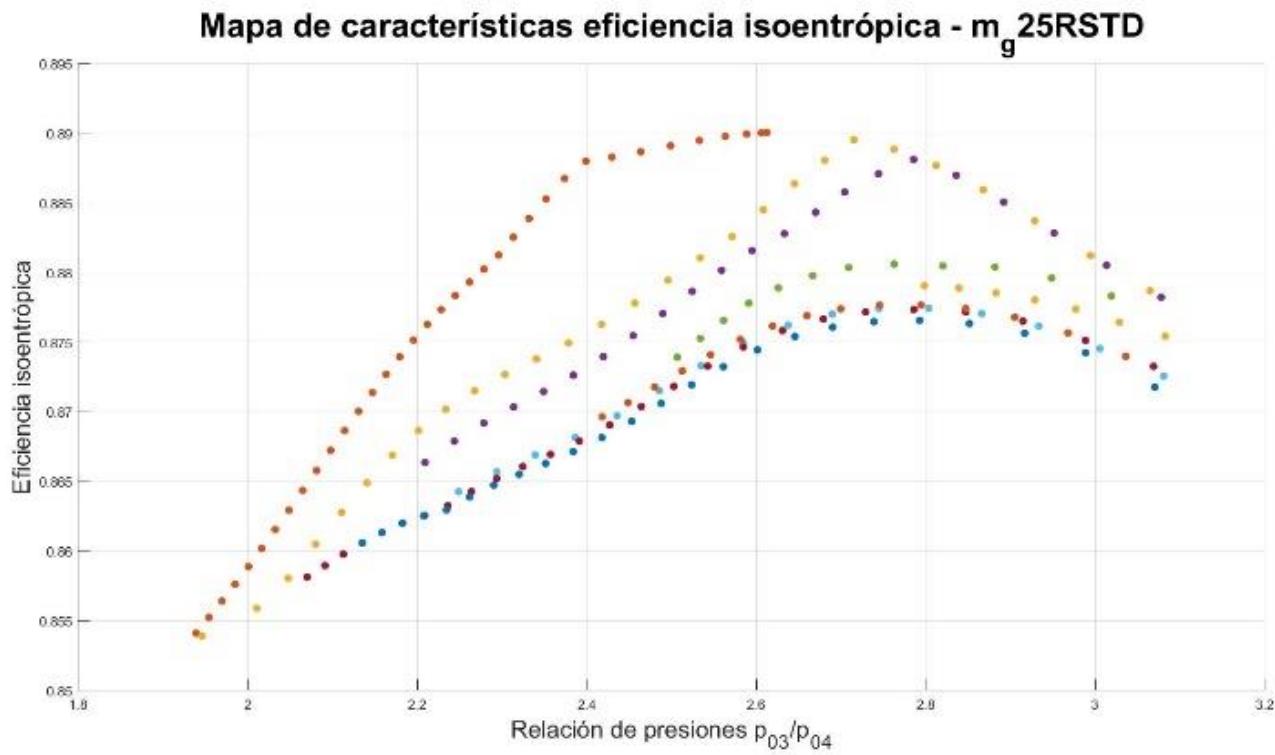


Ilustración 5.4. Mapa de eficiencia isoentrópica – Relación de presiones de la turbina

5.2. Funciones y programas adicionales necesarios para utilizar los algoritmos de sincronización

La discretización de las matrices que representan matemáticamente los mapas de componentes nos limita en muchos sentidos el acceso a distintos puntos que no han sido definidos. Para ello, es necesario interpolar entre vectores y/o puntos para hallar valores que no han sido previamente definidos.

Para llevar a cabo el algoritmo de sincronización de componentes es necesario, en algún momento, definir funciones de forma inversa. Un ejemplo de ello sería obtener el valor del flujo másico adimensional en el compresor, dada una relación de presión a una velocidad de rotación determinada. Hay que tener en cuenta que algunas funciones no tienen inversa, como el mapa presión-flujo másico adimensional de la turbina. Cuando esta entra en choking, β deja de ser una función del flujo másico adimensional de entrada y no puede ser definida.

5.2.1. Interpolación lineal entre velocidades adimensionales.

Realizando el proceso anterior hemos expresado en forma matricial $\frac{\overrightarrow{m\sqrt{T_0}}}{p_0}, \vec{\beta}, \vec{\eta}$ para un vector $\overrightarrow{\frac{N}{\sqrt{T_0}}}$, cuyos valores han sido fijados a la hora de realizar la interpolación. No obstante, en el caso de tener otra velocidad adimensional distinta comprendida entre los límites mínimos y máximos del vector $\overrightarrow{\frac{N}{\sqrt{T_0}}}$, no tenemos definidas las funciones anteriormente obtenidas.

Para ello, recurrimos a la interpolación lineal entre velocidades adimensionales. Sea un valor $\frac{N}{\sqrt{T_0}}_n$ tal que:

$$\frac{N}{\sqrt{T_0}_i} < \frac{N}{\sqrt{T_0}_n} < \frac{N}{\sqrt{T_0}_{i+1}}$$

Siendo el coeficiente i una posición cualquiera del vector $\overrightarrow{\frac{N}{\sqrt{T_0}}}$, los vectores $\frac{\overrightarrow{m\sqrt{T_0}}}{p_0}_n, \vec{\beta}_n, \vec{\eta}_n$ asociados al $\frac{N}{\sqrt{T_0}_n}$ de entrada mantendrán la misma proporción lineal respecto de los vectores $\left(\frac{\overrightarrow{m\sqrt{T_0}}}{p_0}_i, \vec{\beta}_i, \vec{\eta}_i\right)$, y $\left(\frac{\overrightarrow{m\sqrt{T_0}}}{p_0}_{i+1}, \vec{\beta}_{i+1}, \vec{\eta}_{i+1}\right)$ que $\frac{N}{\sqrt{T_0}_n}$. De manera que:

$$\frac{N}{\sqrt{T_0}_n} = a \frac{N}{\sqrt{T_0}_i} + (1 - a) \frac{N}{\sqrt{T_0}_{i+1}}$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{m\sqrt{T_0}}}{p_0}, \vec{\beta}, \vec{\eta}\right)_n = a \left(\frac{\overrightarrow{m\sqrt{T_0}}}{p_0}, \vec{\beta}, \vec{\eta}\right)_i + (1 - a) \left(\frac{\overrightarrow{m\sqrt{T_0}}}{p_0}, \vec{\beta}, \vec{\eta}\right)_{i+1}$$

Obtenemos un valor del coeficiente de interpolación igual a:

$$a = \frac{\frac{N}{\sqrt{T_0}_n} - \frac{N}{\sqrt{T_0}_{i+1}}}{\frac{N}{\sqrt{T_0}_i} - \frac{N}{\sqrt{T_0}_{i+1}}}, \quad \forall a \in (0,1)$$

5.2.2. Interpolación lineal a la misma velocidad de rotación adimensional.

Dado que no tenemos una función continua de $\frac{\overrightarrow{m\sqrt{T_0}}}{p_0}, \vec{\beta}, \vec{\eta}$ para cada velocidad de rotación, sino valores discretos con una resolución de discretización alta (como se puede ver en las figuras de los mapas del compresor y turbina obtenidos), deberemos interpolar linealmente entre puntos contiguos.

De manera similar al proceso realizado en el punto anterior, obtenemos una relación:

En el compresor

$$a_1 = \frac{\frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}} - \frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}_{i+1}}{\frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}_n - \frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}_i}$$

$$(\beta_{HPC}, \eta_{HPC})_n = a_1(\beta_{HPC}, \eta_{HPC})_i + (1 - a_1)(\beta_{HPC}, \eta_{HPC})_{i+1}$$

En la turbina

$$a_2 = \frac{\beta_{HPT}_n - \beta_{HPT}_{i+1}}{\beta_{HPT}_i - \beta_{HPT}_{i+1}}$$

$$\left(\frac{m\sqrt{T_{03}}}{p_{03}}, \eta_{HPT}\right)_n = a_2 \left(\frac{m\sqrt{T_{03}}}{p_{03}}, \eta_{HPT}\right)_i + (1 - a_2) \left(\frac{m\sqrt{T_{03}}}{p_{03}}, \eta_{HPT}\right)_{i+1}$$

5.2.3. Definición de una función inversa para las funciones anteriores.

Esta funcionalidad y las circunstancias críticas nombradas se han implementado también en el programa.

5.3. Aplicación del algoritmo de sincronización entre componentes a régimen estacionario

Una vez creados todos los programas paralelos necesarios para acceder a todas las posiciones de los mapas de características, aplicamos el algoritmo de sincronización a régimen estacionario.

Para ello, debemos definir las condiciones de contorno¹⁷ del problema:

6. Condiciones de entrada al compresor (p_{01}, T_{01})
7. Características del aire y del gas ($c_{pa}, \gamma_a, c_{pg}, \gamma_g$)
8. Coeficiente de pérdida de presión en la cámara de combustión Δp_{023}
9. Coeficiente $C_1 = \Delta T_{023}/f$ ligado al salto de temperatura en la cámara de combustión
10. Rendimiento mecánico del eje η_{mec}
11. Velocidad de rotación absoluta del eje N .

Como se explica en el Anexo II sobre los mapas de características, estos normalmente vienen expresados en variables estandarizadas, de forma que la velocidad adimensional de rotación viene en porcentaje relativo a la velocidad de rotación del punto de proyecto y el flujo másico corregido viene expresado en relación a las condiciones estándar.

$$N_{rel} = 100 \cdot \frac{\left(\frac{N}{\sqrt{T_0/T_{std}}} \right)}{\left(\frac{N}{\sqrt{T_0/T_{std}}} \right)_{DP}} \quad (\%)$$

$$m_x 25RSTD = \frac{m_x \sqrt{T_0/T_{std}}}{p_0/p_{std}} \quad [kg/s]$$

Para ello debemos definir también las temperaturas en el punto de proyecto para cada componente de la turbina de gas.

- Temperatura en el punto de proyecto del compresor: $T_{01,DP}$
- Temperatura en el punto de proyecto de la turbina: $T_{03,DP}$

Con todas las variables y constantes definidas, junto con todas las variables auxiliares oportunas para una mejor manejabilidad del programa, podemos proceder a la escritura del algoritmo en Matlab.

Dado que este algoritmo se basa en la elección de un punto arbitrario del mapa del compresor, podemos definir varios puntos del compresor a cada velocidad adimensional de rotación, realizando en bucle el algoritmo diseñado para obtener todos los puntos, a una misma velocidad adimensional de rotación, de equilibrio estacionario de la turbina de gas.

Los resultados de la sincronización a régimen estacionario vienen expresados en las gráficas siguientes:

¹⁷ Algunas de las condiciones de contorno se han determinado en base a los datos arrojados por el programa GasTurb 13 [3].

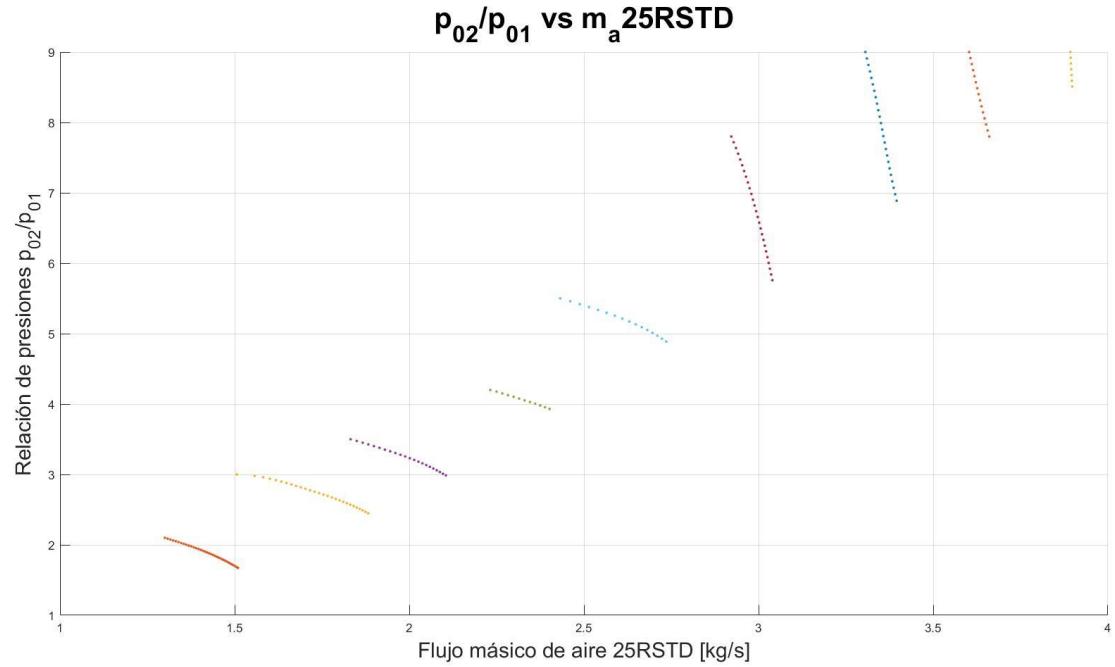


Ilustración 5.5. Puntos de sincronización de la turbina de gas a régimen estacionario en el compresor

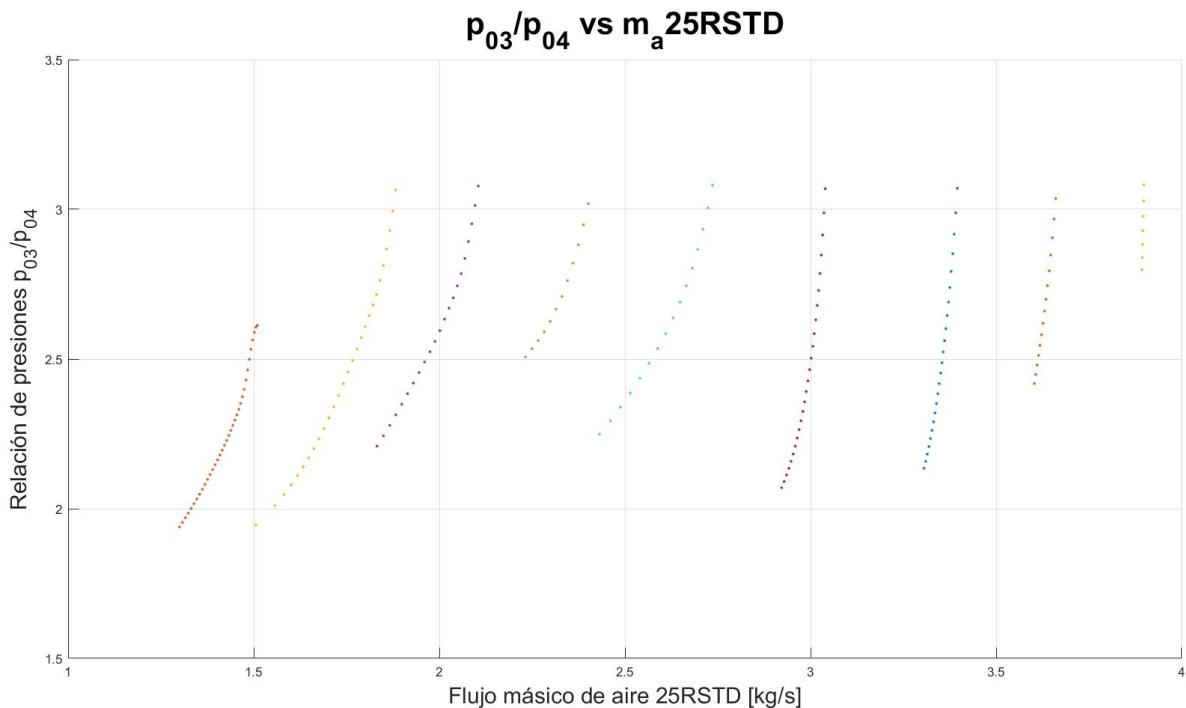


Ilustración 5.6. Puntos de funcionamiento de la turbina de gas a régimen estacionario en la turbina.

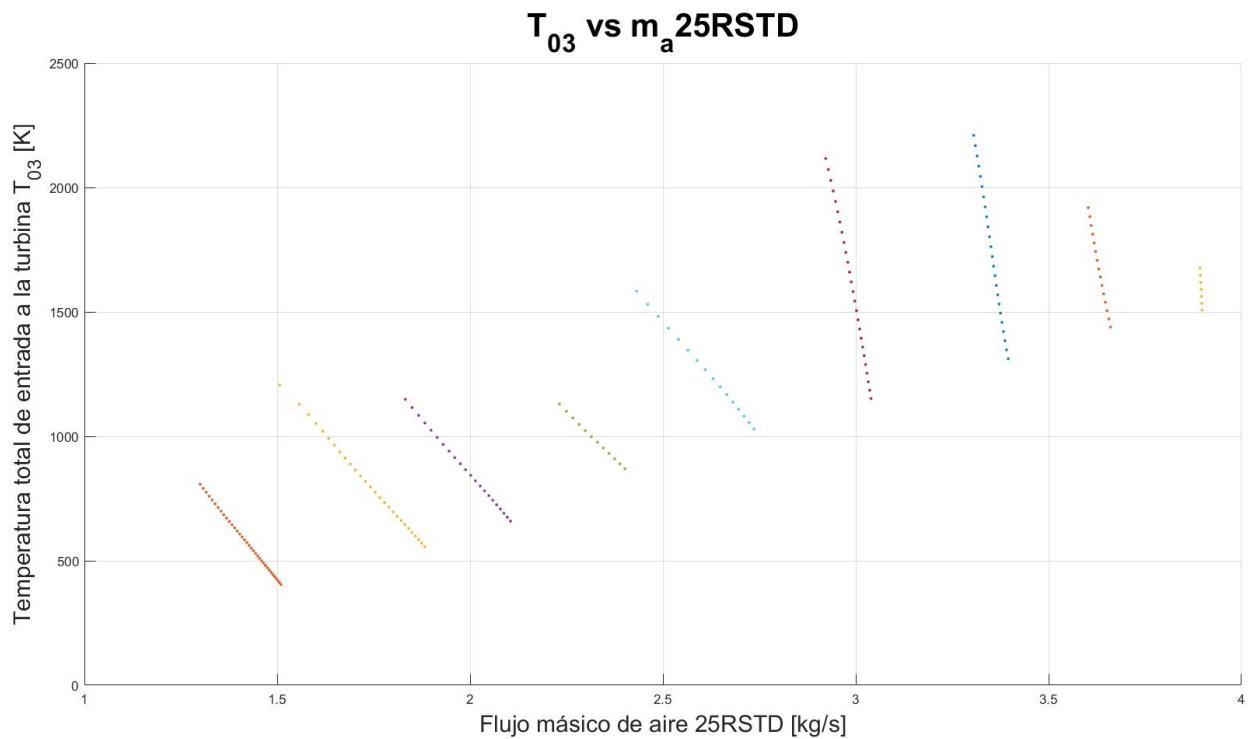


Ilustración 5.7. Temperatura total a la entrada de la turbina en los distintos puntos de funcionamiento a régimen estacionario de la turbina de gas

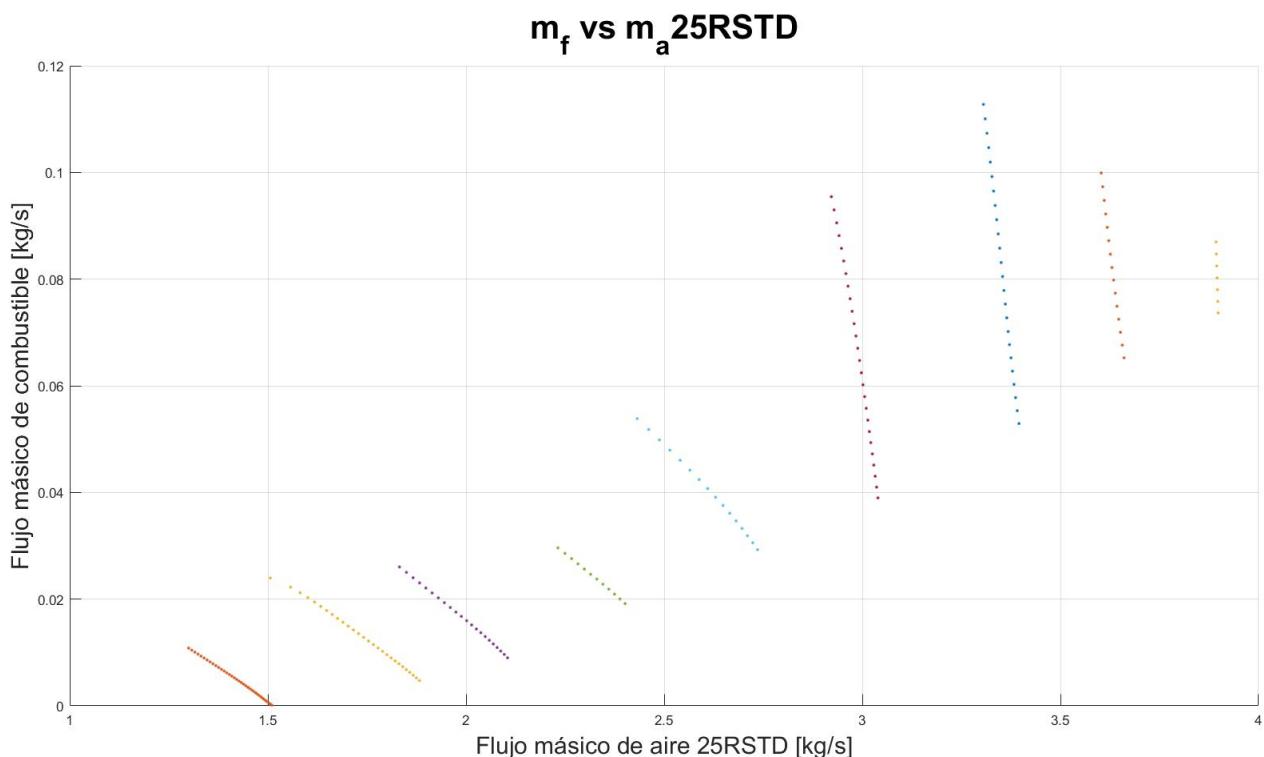


Ilustración 5.8. Flujo másico de combustible necesario para la sincronización estacionaria de los distintos componentes

Como podemos observar en la *Ilustración 5.6*, la relación de presión de la turbina aumenta conforme aumenta el flujo másico de aire a una velocidad de rotación adimensional fija. Es decir, es mayor la influencia del flujo másico que la relación de presión del compresor sobre la potencia consumida.

En la *Ilustración 5.7* vemos cómo a mayor relación de presión en el compresor, mayor es la temperatura total de entrada a la turbina. Esto es debido a que T_{02} es mayor porque p_{02}/p_{01} también lo es. Esto también explica que la T_{03} sea también mayor a velocidades de rotación más altas.

En la *Ilustración 5.8*, el flujo másico de combustible aumenta con el ratio de presión en el compresor de una forma muy similar a cómo lo hace la temperatura T_{03} . Esto pone en evidencia la proporcionalidad entre la temperatura a la entrada de la turbina y el flujo másico de combustible.

Como podemos observar, existen diferentes puntos a una misma velocidad de rotación adimensional que satisfacen la condición de equilibrio de potencias. Esto es debido a que todos los parámetros de los que depende este equilibrio varían unos en relación con los otros.

$$\Delta\dot{W} = 0 = \eta_{mec} \left[\dot{m}_g c_{pg} T_{03} \eta_T \left(1 - \left(\frac{1}{\beta_T} \right)^{\frac{\gamma_g-1}{\gamma_g}} \right) \right]_T - \left[\dot{m}_a c_{pa} T_{01} \frac{1}{\eta_C} \left(\beta_C^{\frac{\gamma_a-1}{\gamma_a}} - 1 \right) \right]_C$$

Los resultados del modelo a régimen estacionario nos proporcionan el punto de partida del modelo a régimen transitorio que a continuación vamos a estudiar.

5.4. Aplicación del algoritmo de sincronización entre componentes a régimen transitorio y control dinámico PID

En el Apartado 5 del trabajo sobre el control del sistema hemos hablado de un modelo a estados, no continuo. Dado que la herramienta de la que disponemos para simular el comportamiento a transitorio es un algoritmo iterativo, para el estudio realizado ha sido más eficiente emplear un modelo a estados con tiempos de muestreo reducidos.

Por lo tanto, antes de aplicar el algoritmo desarrollado del transitorio debemos establecer dicho tiempo de muestreo, que corresponderá también con el Δt de integración numérica de la potencia neta del ciclo para obtener el incremento de velocidad de rotación. También deberemos elegir el tiempo de realización de la prueba del transitorio, que nos definirá el número de veces que deberá ser utilizado el algoritmo del transitorio.

Tomaremos un punto de equilibrio del sistema a régimen estacionario y modificaremos la referencia de velocidad de rotación adimensional. Este será nuestro escalón, sobre el que estudiaremos la respuesta a transitorio.

Por otra parte, implementaremos un bucle cerrado donde compararemos la velocidad de rotación en una iteración k -ésima con la velocidad de rotación adimensional de referencia. El error (diferencia entre ambas velocidades) amplificado mediante una ganancia proporcional K_p nos dará un incremento (o disminución) del flujo másico de combustible.

Utilizando el método de Ziegler-Nichols de las oscilaciones, realizaremos varias pruebas hasta encontrar la ganancia crítica del proporcional (K_{crit}) y el período de oscilación crítico (T_{crit}), de forma que finalmente obtendremos el control PID adecuado para nuestro sistema dinámico.

Estos son los datos iniciales a introducir:

- Tiempo de muestreo y tiempo de prueba del transitorio: $\Delta t, t_{prueba}$
- Velocidad de rotación adimensional de referencia: N_{ref}
- Momento de inercia del eje de rotación: J_{eje}
- Punto de equilibrio estático: vector con las variables necesarias de entrada, obtenido mediante el programa del subapartado anterior.
- Ganancia del control proporcional: K_p

Tras la realización de varias pruebas de ensayo-error sobre el modelo, obtenemos K_{crit} y T_{crit} , por lo tanto, introducimos los datos nuevos:

- Ganancia del control proporcional actualizada: K_p
- Constante de tiempo del integrador: T_i
- Constante de tiempo del derivativo: T_d

La respuesta del sistema a régimen transitorio viene representada en las *Ilustraciones 5.9, 5.10, 5.11, 5.12 y 5.13*, una vez implementado el algoritmo de sincronización y el control PID ante un cambio en la referencia de velocidad adimensional relativa de 100% a 80% y de 80% a 90%.

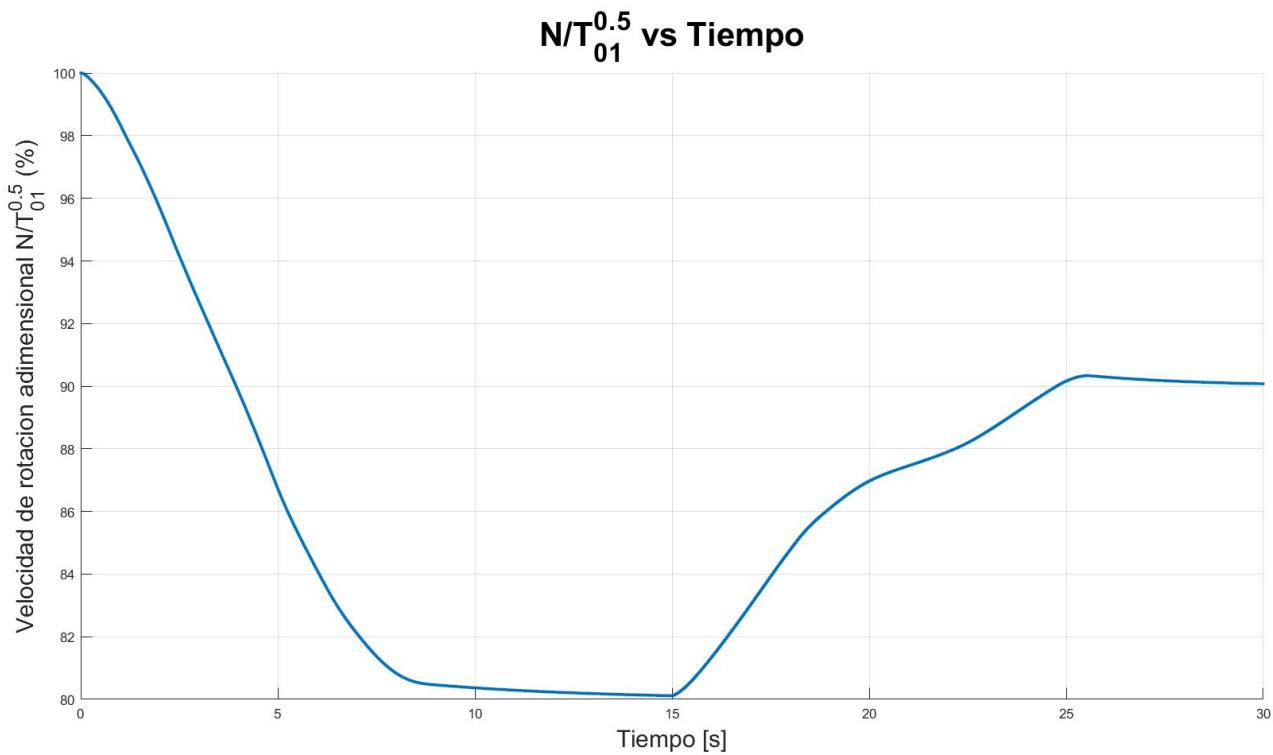


Ilustración 5.9. Respuesta a transitorio de la velocidad corregida relativa ante dos escalones: de 100 a 80 (%) y de 80 a 90 (%)

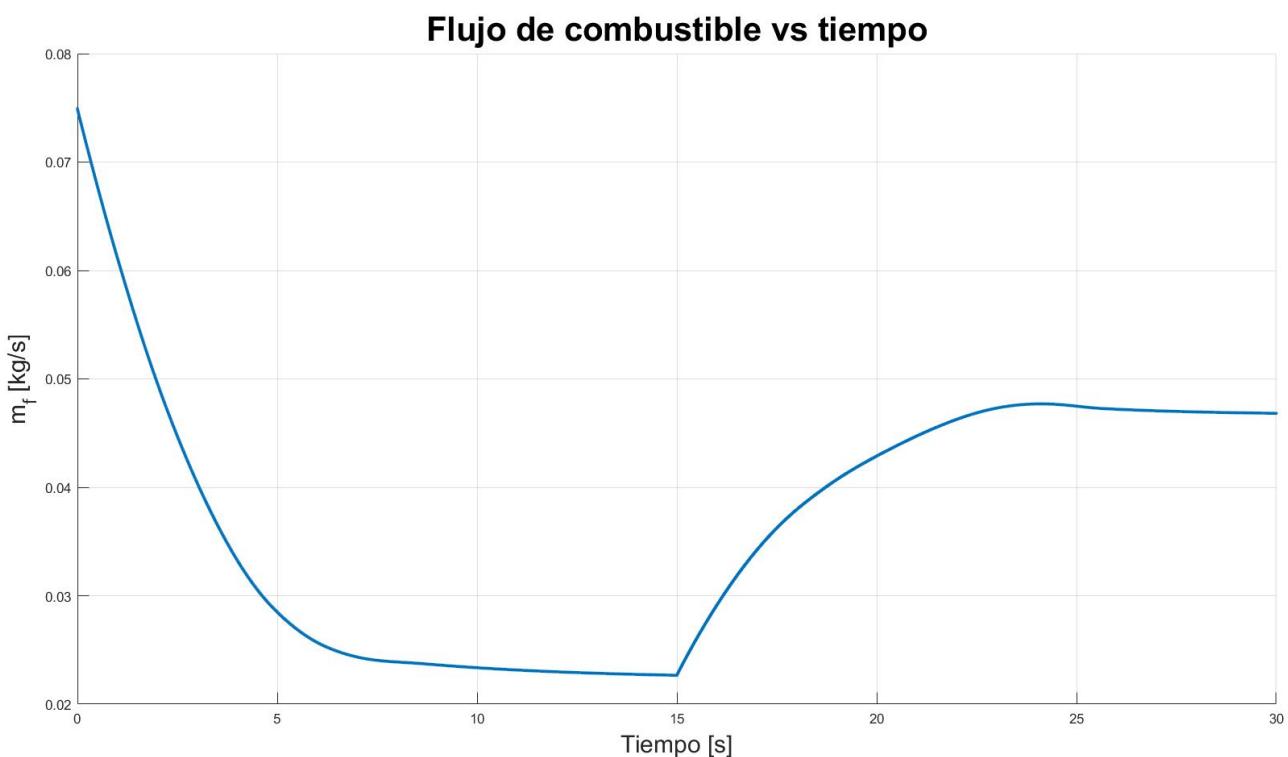


Ilustración 5.10. Respuesta a transitorio del flujo mÁsico de combustible de entrada ante dos escalones en la velocidad adimensional de referencia: de 100 a 80 (%) y de 80 a 90 (%)

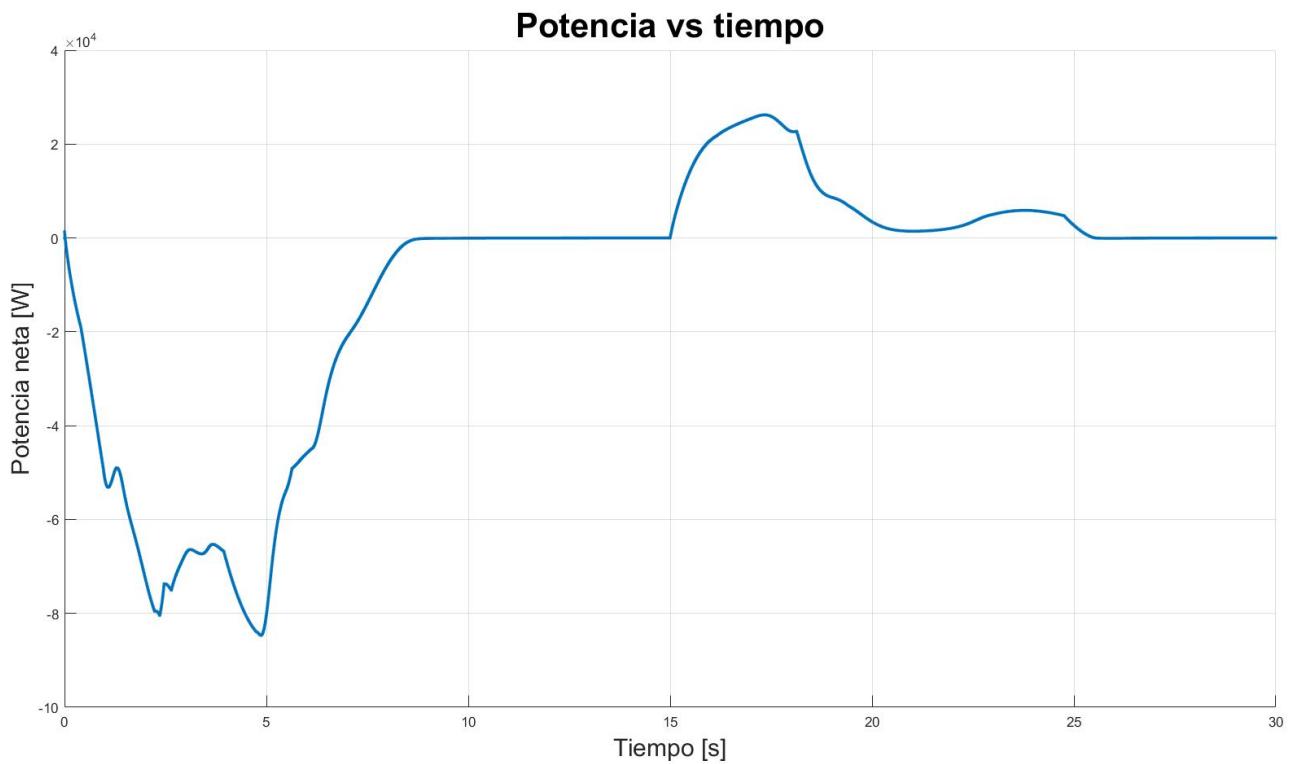


Ilustración 5.11. Respuesta a transitorio de la potencia neta del ciclo ante los dos escalones anteriores.



Ilustración 5.12. Líneas de deceleración y aceleración en el mapa del compresor. La línea roja representa la línea de deceleración, la línea verde la de aceleración.

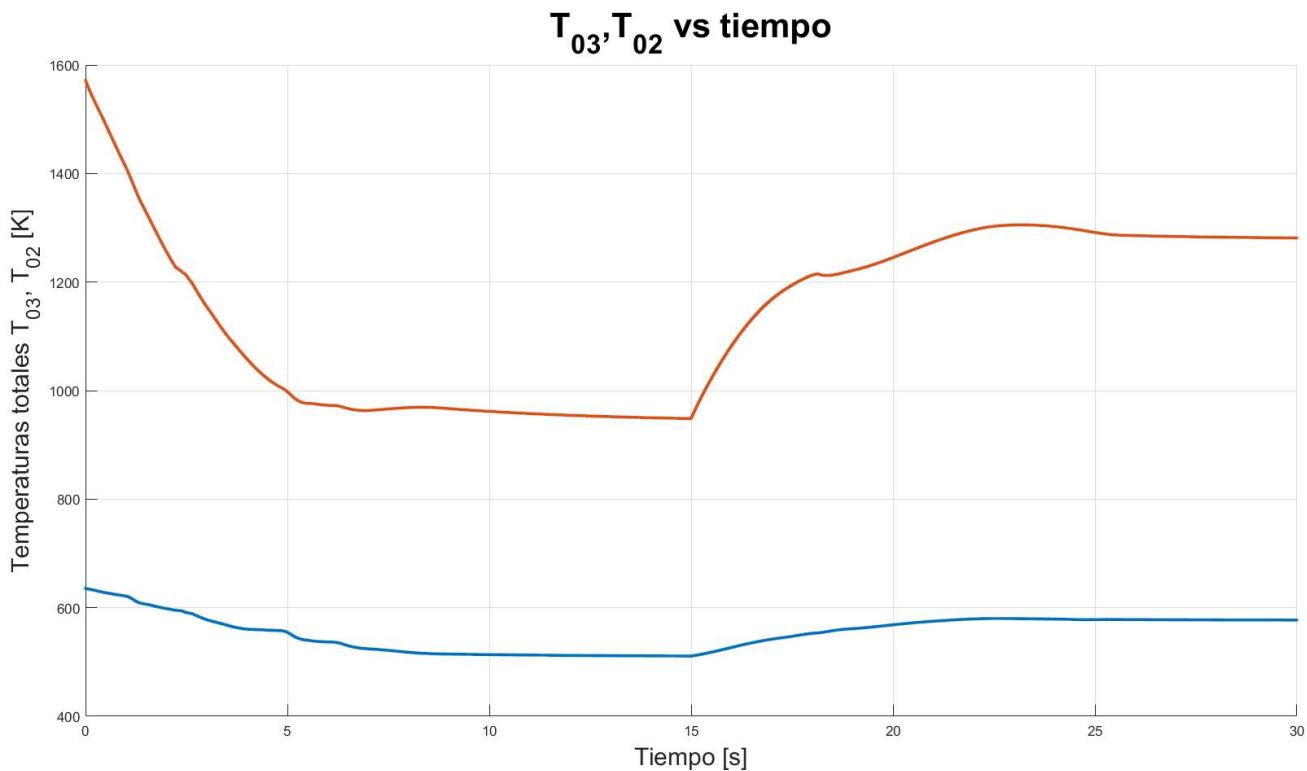


Ilustración 5.13. Respuesta a transitorio de las temperaturas totales a la salida del compresor y a la entrada de la turbina ante los dos escalones anteriores.

La línea roja representa la temperatura a la entrada de la turbina, la línea azul la temperatura a la salida del compresor.

Como podemos observar, cuando aparece un cambio en la referencia de velocidad, el sistema de control actúa sobre el flujo de combustible arrojado a la cámara de combustión (ver *Ilustración 5.10*). Es decir, este tipo de regulación no toma una temperatura total de entrada a la turbina constante, tal y como se puede observar en la *Ilustración 5.13*. Por otra parte, podemos ver que no toda la variación de T_{03} es debida a la cantidad de combustible, sino también a las condiciones del gas a la salida del compresor.

Un cambio en la cantidad de combustible introducido produce una variación en la potencia neta del ciclo. Al decelerar la turbina de gas, la potencia neta es negativa: el compresor consume mayor potencia que la que produce la turbina, y lo contrario sucede cuando esta acelera. Ver *Ilustración 5.11*.

El sistema ha sido controlado, de manera que se ha reducido el tiempo del transitorio hasta el límite de amortiguamiento crítico. Este control no es totalmente perfecto, y se puede observar en la *Ilustración 5.9* que al acelerar la turbina de gas hay un pico de sobreoscilación antes de alcanzar el régimen estacionario.

En la *Ilustración 5.12* podemos observar el recorrido que realiza el compresor durante la aceleración y deceleración de la turbina de gas en su mapa de características. Un control eficaz debería alejarse lo máximo posible de las líneas de funcionamiento crítico del compresor.

6 Conclusión y reflexiones

El estudio realizado me ha servido para reflexionar sobre la complejidad detrás de los métodos de generación eléctrica y de propulsión aeronáutica mediante el uso de turbinas de gas, al mismo tiempo que dicha complejidad puede ser gestionada aplicando la razón y los elementos matemáticos, físicos y tecnológicos de los que disponemos.

Al mismo tiempo, al realizar este trabajo he llegado a entender que todo el conocimiento adquirido por un estudiante de ingeniería (y de cualquier ámbito distinto) ha sido ya desarrollado por grandes científicos e ingenieros de la historia. Una historia que nosotros, las nuevas generaciones de ingenieros, debemos seguir construyendo.

Este trabajo ha sido el resultado de años de aprendizaje, de metas y de objetivos cumplidos, pero también de fracasos. La perseverancia y la búsqueda por resolver nuevos retos fue la mayor motivación que me animó a escoger esta temática.

Todo el conocimiento adquirido en la Universidad de Zaragoza, junto a una experiencia inigualable en la Universidad de Génova han hecho forjar los cimientos de un ciudadano crítico, tanto en el ámbito de la ingeniería como en mundo del día a día.

ANEXOS

Magnitudes, Principios y Ecuaciones.

En este primer anexo realizaré ciertas aclaraciones y explicaciones sobre ecuaciones y magnitudes empleadas a lo largo de la memoria.

1.1. Entalpía total o de parada

La entalpía total o de parada es una magnitud que se define mediante la deceleración de un fluido hasta que alcanza una energía cinética nula siguiendo un proceso adiabático y de derrame, es decir, donde el calor y el trabajo intercambiados son nulos.

Empleando la ecuación de la energía para un volumen de control abierto adiabático, con intercambio de trabajo nulo y con diferencia de alturas despreciables:

$$h_1 + \frac{c_1^2}{2} = h_2 = h_{02}$$

La entalpía total recoge tanto la energía estática como la cinética del fluido en cualquier estado. Esta magnitud es de gran importancia para el estudio de las turbomáquinas térmicas, donde tanto la componente de presión como la componente de energía cinética son importantes en cada estado y posición de la máquina.

Basándonos en la entalpía total, podemos obtener otras magnitudes totales como la temperatura total, la presión total, etc. Para ello emplearemos la hipótesis de gas perfecto y de flujo isoentrópico.

I.2. Primer Principio de la Termodinámica

En un sistema cerrado, donde no hay intercambio másico con el exterior, una modificación de la energía interna de la masa contenida en su interior es debida a un intercambio de calor o un intercambio de trabajo con el exterior:

$$\Delta E = m\Delta \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right) = Q - W$$

En un sistema abierto, donde sí existe intercambio de masa, establecemos un volumen de control constante en el tiempo.

$$\frac{dE_{VC}}{dt} = \sum_{out} \dot{m}_{out} \left(h_{out} + \frac{c_{out}^2}{2} + gz_{out} \right) - \sum_{in} \dot{m}_{in} \left(h_{in} + \frac{c_{in}^2}{2} + gz_{in} \right) = \dot{Q} - \dot{W}$$

I.3. Segundo Principio de la Termodinámica

Se define una nueva magnitud denominada entropía, que relaciona la temperatura de un cuerpo con el intercambio de calor con su entorno.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_{gen}$$

El Segundo Principio de la Termodinámica dice que la componente de entropía generada δS_{gen} nunca puede ser negativa. En otras palabras, cuando un proceso es adiabático la variación de entropía puede ser nula en el caso óptimo ($\delta S_{gen} = 0$), siendo imposible que esta sea negativa.

La variación de entropía es, por lo tanto, una medida de la irreversibilidad de un proceso entre dos estados.

1.4. Relaciones entre magnitudes para flujo isoentrópico en un gas perfecto¹⁸

1.4.1. Relación entre presiones y temperaturas en un proceso adiabático e internamente reversible.

La ecuación de Gibbs nos relaciona los dos principios de la Termodinámica en una sola ecuación, mediante la hipótesis de flujo internamente reversible: $\delta S_{gen} = 0$. Si aplicamos además la hipótesis de gas perfecto y utilizamos las magnitudes totales anteriormente explicadas:

$$T_0 ds_0 = dh_0 - \frac{1}{\rho_0} dp_0 = c_p dT_0 - \frac{RT_0}{p_0} dp_0$$

$$ds_0 = c_p \frac{dT_0}{T_0} - R \frac{dp_0}{p_0}$$

Integrando entre dos estados obtenemos el siguiente resultado:

$$\Delta s_0 = c_p \ln \frac{T_{02}}{T_{01}} - R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}}$$

Si además añadimos la hipótesis de flujo isoentrópico:

$$0 = c_p \ln \frac{T_{02}}{T_{01}} - R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}}, \quad \frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{R}{c_p}}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Obtenemos la relación entre temperaturas y presiones en un proceso isoentrópico, es decir, adiabático e internamente reversible.

1.4.2. Velocidad local del sonido.

Sea un flujo que se mueve a velocidad sónica $c = a$, a su paso sufre una transformación infinitesimal debida a una perturbación en el campo del flujo (onda de expansión, onda de compresión...). Aplicamos las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos para flujo isoentrópico con área de paso constante.

a) Ecuación de continuidad:

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a + da)$$

$$\rho a = \rho a + \rho da + ad\rho + d\rho da$$

Despreciando infinitésimos de segundo orden:

$$da = -\frac{d\rho}{\rho} a$$

¹⁸ Extraídas del libro *Modern Compressible Flow* [4].

b) Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned}
 p + \rho a^2 &= (p + dp) + (\rho + d\rho)(a + da)(a + da) = \\
 &= p + dp + (\rho a + \rho da + ad\rho + d\rho da)(a + da) = \\
 &= p + dp + (\rho a^2 + \rho a da + a^2 d\rho + ad\rho da) + (\rho a da + \rho da^2 + ad a d\rho + d\rho da^2)
 \end{aligned}$$

Despreciando infinitésimos de segundo y tercer orden:

$$p + \rho a^2 = p + dp + \rho a^2 + \rho a da + a^2 d\rho + \rho a da$$

$$0 = dp + 2\rho a da + a^2 d\rho$$

$$da = -\frac{a^2 d\rho + dp}{2\rho a}$$

Unimos la ecuación de continuidad con la ecuación de la cantidad de movimiento.

$$\frac{a^2 d\rho + dp}{2\rho a} = \frac{d\rho}{\rho} a$$

Y finalmente obtenemos la expresión de la velocidad del sonido para flujo isoentrópico.

$$a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s$$

Utilizando la relación entre temperatura y presión en un proceso isoentrópico mediante la ecuación de Gibbs, podemos determinar que:

$$\begin{aligned}
 \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
 p_1 T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= p_2 T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = cte
 \end{aligned}$$

Aplicando la ley de los gases ideales:

$$\begin{aligned}
 p T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= \left(\frac{p}{R\rho^\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} = cte, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = cte \\
 d\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) &= 0 = dp \frac{1}{\rho^\gamma} - \gamma p \frac{1}{\rho^{\gamma+1}} d\rho \\
 \frac{dp}{d\rho} &= \frac{\gamma p \frac{1}{\rho^{\gamma+1}}}{\frac{1}{\rho^\gamma}} = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma R T
 \end{aligned}$$

De manera que obtenemos la expresión de la velocidad del sonido para flujo isoentrópico de un gas perfecto en función de las propiedades del gas y de su temperatura:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\gamma R T}$$

1.4.3 Número de Mach y relaciones entre magnitudes totales y estáticas

El número de Mach relaciona la velocidad de un flujo con la velocidad de propagación de las ondas (velocidad del sonido) en el fluido.

$$M = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{\gamma RT}}$$

Para números de Mach bajos el fluido puede considerarse como incompresible, mientras que en cercanías al valor unitario y para valores superiores, los efectos de la compresibilidad del gas son apreciables.

$$\begin{aligned} M \ll 1, & \quad \text{flujo subsónico} \\ 0.8 > M > 1.1, & \quad \text{flujo transónico} \\ M = 1, & \quad \text{flujo sónico} \\ M > 1, & \quad \text{flujo supersónico} \\ M > 5, & \quad \text{flujo hipersónico} \end{aligned}$$

El fenómeno de *choking* se produce cuando un flujo alcanza el Mach unitario. En este momento, la hipótesis de flujo subsónico deja de explicar el comportamiento del fluido y el flujo másico deja de ser una función de la diferencia de presión.

El número de Mach unitario se alcanza en la superficie más estrecha por la que pasa el fluido, y esta define la cantidad de masa que podrá pasar a la velocidad del sonido local en ese punto. La sección entra en *choking* (ahogamiento) y se bloquea la cantidad de flujo másico.

En el Anexo II hablaremos de los mapas del compresor y de la turbina. Allí volveremos a hablar sobre el fenómeno de *choking*.

Podemos expresar una relación entre magnitudes totales y magnitudes estáticas mediante el número de Mach utilizando las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos.

a) Temperatura.

Empleamos la hipótesis de gas perfecto y las relaciones entre calores específicos:

$$R = c_p - c_v, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$T_0 = T + \frac{c^2}{2c_p} = T + \frac{\gamma RT}{2c_p} \frac{c^2}{\gamma RT} = T + \frac{\gamma(c_p - c_v)T}{2c_p} M^2$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2$$

b) Presión.

Utilizamos la relación entre presiones y temperaturas obtenidas mediante la resolución de la ecuación de Gibbs para flujo isoentrópico.

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

c) Densidad.

Aplicamos la ecuación de los gases ideales:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\frac{p_0}{RT_0}}{\frac{p}{RT}} = \frac{p_0}{p} \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right)^{-1}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

I.5. Rendimiento isoentrópico

En una máquina no isoentrópica que puede ser modelizada mediante un proceso isoentrópico, el rendimiento isoentrópico representa la cuota de energía perdida por irreversibilidades en el sistema respecto al trabajo máximo (o mínimo, en el caso de máquinas que consumen energía) que podría producirse (o consumirse) si dicha máquina fuera isoentrópica.

Esta definición puede extenderse a cualquier transformación no isoentrópica que en el caso ideal pudiera ser modelizada mediante un proceso isoentrópico.

En un compresor la potencia es consumida. La potencia mínima corresponde con la situación isoentrópica, aplicamos el modelo de gas perfecto:

$$\eta_c = \frac{W_s}{W} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}} = \frac{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}{\frac{T_{02s}}{T_{01}} - 1} = \frac{\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{1}{\eta_c} \left[\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + 1$$

En el caso de una turbina que produce potencia:

$$\eta_T = \frac{W}{W_s} = \frac{h_{04} - h_{03}}{h_{04s} - h_{03}} = \frac{\frac{T_{04}}{T_{03}} - 1}{\frac{T_{04s}}{T_{03}} - 1} = \frac{\frac{T_{04}}{T_{03}} - 1}{\left(\frac{p_{04}}{p_{03}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}$$

$$\frac{T_{04}}{T_{03}} = \eta_T \left[\left(\frac{1}{p_{03}/p_{04}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + 1$$

1.5. Ciclo Brayton

Un ciclo termodinámico está constituido por un número n de estados y n procesos que se repiten de forma cíclica, de manera que el estado n corresponde con el estado 1 del ciclo.

El ciclo Brayton es un ciclo termodinámico formado por cuatro estados y cuatro procesos.

- Proceso 1: Compresión adiabática e isoentrópica entre 1 y 2.
- Proceso 2: Aumento de la temperatura mediante adición de calor a presión constante entre 2 y 3.
- Proceso 3: Expansión adiabática e isoentrópica entre 3 y 4.
- Proceso 4: Disminución de la temperatura mediante expulsión de calor entre 4 y 1.

Este ciclo termodinámico se aproxima al ciclo termodinámico de la turbina de gas, en el que intervienen un compresor no ideal, una cámara de combustión con pérdidas de presión y una turbina no isoentrópica.

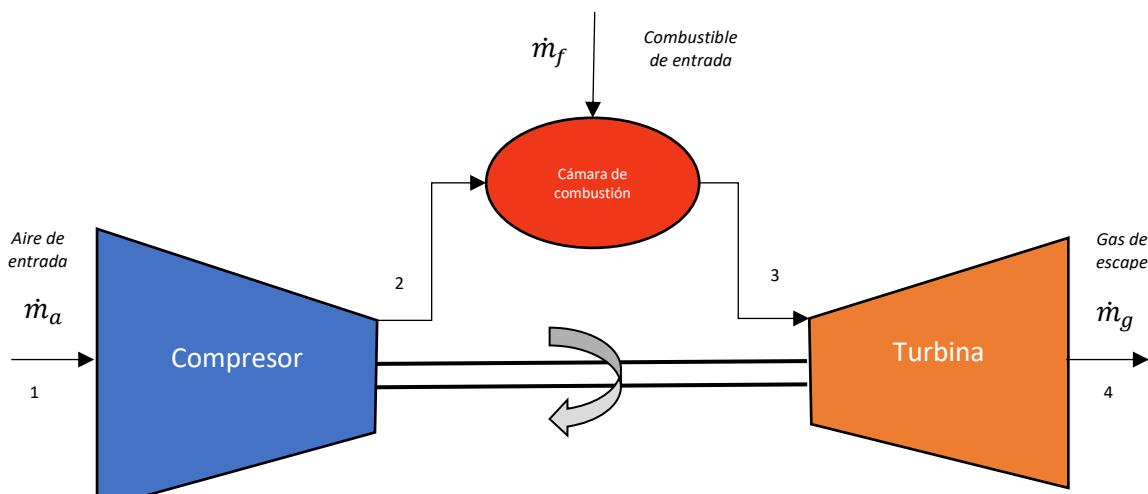


Ilustración 1.1. Esquema de una turbina de gas

- Proceso 1: Compresión adiabática no isoentrópica del gas entre 1 y 2.
- Proceso 2: Aumento de la temperatura del gas mediante combustión a presión no constante entre 2 y 3.
- Proceso 3: Expansión adiabática no isoentrópica del gas entre 3 y 4.

Para abordar el funcionamiento termodinámico de la turbina de gas vamos a abordar el caso ideal, es decir, el Ciclo Brayton.

Despreciamos la variación de energía potencial gravitatoria y utilizamos el modelo de gas perfecto.

1) Proceso de compresión adiabática e isoentrópica entre 1 y 2.

Aplicamos un balance de energía al volumen de control que rodea al compresor.

$$\dot{m}_a \left(h_2 + \frac{c_2^2}{2} + gz_2 \right) - \dot{m}_a \left(h_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1 \right) = \dot{Q} - \dot{W} = 0 - \dot{W}_c$$

$$-\dot{W}_c = \dot{m}_a (h_{02} - h_{01}) = \dot{m}_a c_{pa} (T_{02} - T_{01})$$

2) Proceso de adición de calor a volumen constante entre 2 y 3.

Realizamos un balance de masa sobre la cámara de combustión.

$$\dot{m}_a + \dot{m}_f = \dot{m}_g$$

Aplicamos el balance de energía en la cámara de combustión.

$$\dot{m}_g \left(h_3 + \frac{c_3^2}{2} + gz_3 \right) - \dot{m}_g \left(h_2 + \frac{c_2^2}{2} + gz_2 \right) = \dot{Q} - \dot{W} = \dot{Q}_{cc} - 0$$

$$\dot{Q}_{cc} = \dot{m}_g (h_{03} - h_{02}) = \dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{02})$$

3) Proceso de expansión adiabática entre 3 y 4.

$$\dot{m}_g \left(h_4 + \frac{c_4^2}{2} + gz_4 \right) - \dot{m}_g \left(h_3 + \frac{c_3^2}{2} + gz_3 \right) = \dot{Q} - \dot{W} = 0 - \dot{W}_T$$

$$\dot{W}_T = \dot{m}_g (h_{03} - h_{04}) = \dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{04})$$

La eficiencia del Ciclo Brayton es la máxima que se puede conseguir, ya que no se consideran las pérdidas de presión por adición de calor ni pérdidas isoentrópicas en compresor y turbina. Despreciando la cantidad de combustible e igualando calores específicos a presión constante:

$$\begin{aligned} \eta_{ciclo} &= \frac{\dot{W}_T + \dot{W}_C}{\dot{Q}_{cc}} = \frac{\dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{04}) - \dot{m}_a c_{pa} (T_{02} - T_{01})}{\dot{m}_g c_{pg} (T_{03} - T_{02})} \approx \frac{T_{03} - T_{04} - T_{02} + T_{01}}{T_{03} - T_{02}} = \\ &= 1 - \frac{T_{04} - T_{01}}{T_{03} - T_{02}} = 1 - \frac{T_{01}}{T_{02}} \frac{\frac{T_{04}}{T_{03}} \frac{T_{03}}{T_{02}} \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}{\frac{T_{03}}{T_{02}} - 1} = \\ &= 1 - \frac{T_{01}}{T_{02}} \frac{\left(\frac{p_{04}}{p_{03}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{T_{03}}{T_{02}} \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{T_{03}}{T_{02}} - 1} \end{aligned}$$

En el Ciclo Brayton solo hay dos presiones, por lo tanto:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{03}}{p_{04}}$$

$$\eta_{ciclo} = 1 - \frac{T_{01}}{T_{02}} \frac{\frac{T_{03}}{T_{02}} - 1}{\frac{T_{03}}{T_{02}} - 1} = 1 - \frac{T_{01}}{T_{02}}$$

En términos de presiones:

$$\eta_{ciclo} = 1 - \frac{T_{01}}{T_{02}} = 1 - \left(\frac{p_{01}}{p_{02}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Cuanto mayor es el salto de presión en el compresor, mayor es la eficiencia del ciclo termodinámico.

I.6. Propulsión aeronáutica¹⁹

La turbina de gas puede ser utilizada en una planta industrial para producción eléctrica, o bien puede ser empleada para un motor de propulsión aeronáutica mediante el uso de una tobera propulsiva. En este apartado veremos cómo podemos calcular la fuerza de impulsión de un motor aeronáutico en función de las propiedades termodinámicas del flujo en su interior.

Tomamos un volumen de control que rodee al motor aeronáutico:

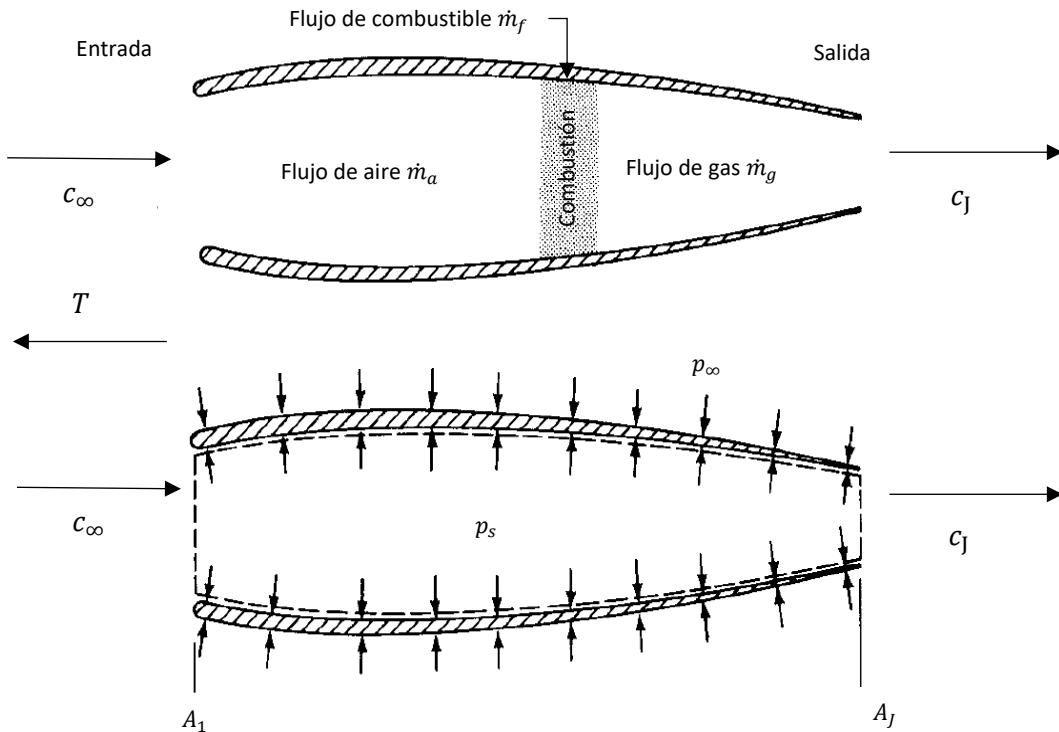


Ilustración I.1. Esquema del volumen de control de un motor aeronáutico

Cabe destacar que la presión estática es constante alrededor del volumen de control y toma el valor p_∞ . Las velocidades de entrada y de salida del flujo en el motor son diversas, y toman valores de c_∞ y c_J respectivamente.

Aplicamos las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos al volumen de control.

- Ecuación de continuidad:

Aplicamos la ecuación de continuidad en su forma integral.

$$\frac{dM_{motor}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

¹⁹ Basado en el libro *Introduction to Flight* [5].

Si suponemos régimen estacionario, las únicas entradas y salidas de flujo másico son la entrada y la salida del motor, junto con el flujo másico de combustible:

$$\int_{S_c} \rho c_x dS = 0 = -\rho_a A_1 c_{\infty x} + \rho_J A_J c_{Jx} - \dot{m}_f$$

$$\rho_J A_J c_{Jx} = \rho_a A_1 c_{\infty x} + \dot{m}_f$$

En término de flujos másicos:

$$\dot{m}_J = \dot{m}_a + \dot{m}_f$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento:

Aplicamos la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{c} dV + \int_{S_c} \rho \vec{c} (\vec{c} - \vec{c}_c) \vec{n} dS = \int_{S_c} \vec{\tau} \vec{n} dS + \int_{V_c} \rho \vec{f}_m dV$$

Suponemos régimen estacionario y fuerzas másicas despreciables:

$$\int_{S_c} \rho \vec{c} (\vec{c} - \vec{c}_c) \vec{n} dS = \int_{S_c} \vec{\tau} \vec{n} dS$$

Tomamos la ecuación vectorial en el eje x y tomamos como referencia de movimiento el volumen de control:

$$\int_{S_c} \rho \vec{c}_x \vec{c}_x \vec{n} dS = \int_{S_c} \vec{\tau} \vec{n} dS$$

Descomponiendo cada lado de la ecuación en las entradas y salidas de la superficie del volumen de control:

$$\int_{S_c} \rho \vec{c}_x \vec{c}_x \vec{n} dS = -\rho_{\infty} c_{\infty x}^2 A_1 + \rho_J c_{Jx}^2 A_J$$

$$\int_{S_c} \vec{\tau} \vec{n} dS = \int_{S_c} (\vec{\tau} - \vec{I} p) \vec{n} dS = p_{\infty} A_1 - p_J A_J - F_{Ext}$$

La ecuación de la cantidad de movimiento nos resulta:

$$-\rho_{\infty} c_{\infty x}^2 A_1 + \rho_J c_{Jx}^2 A_J = p_{\infty} A_1 - p_J A_J - F_{Ext}$$

$$p_{\infty} A_1 + \rho_{\infty} c_{\infty x}^2 A_1 = p_J A_J + \rho_J c_{Jx}^2 A_J + F_{Ext}$$

Utilizando la ecuación de la continuidad de flujo:

$$p_{\infty} A_1 + \dot{m}_a c_{x\infty} = p_J A_J + \dot{m}_J c_{xJ} + F_{Ext}$$

$$p_{\infty} A_1 + \dot{m}_a c_{x\infty} = p_J A_J + (\dot{m}_f + \dot{m}_a) c_{xJ} + F_{Ext}$$

$$F_{Ext} = p_{\infty}A_1 + \dot{m}_a c_{x\infty} - p_J A_J - (\dot{m}_f + \dot{m}_a) c_{xJ}$$

Esta sumatoria de fuerzas externas es la contribución de la diferencia de presión entre la superficie interna y la externa de la superficie del volumen de control a lo largo del eje x más la fuerza de rozamiento viscoso y la fuerza de empuje:

$$F_{Ext} = F_p + F_{roz} - T$$

Dado que el tubo de flujo es simétrico en el eje x, la fuerza resultante como diferencia de fuerzas a lo largo de la superficie del volumen de control resulta:

$$F_p = p_{\infty}(A_1 - A_J)$$

Reescribiendo la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$p_{\infty}A_1 + \dot{m}_a c_{x\infty} - p_J A_J - (\dot{m}_f + \dot{m}_a) c_{xJ} = p_{\infty}(A_1 - A_J) + F_{roz} - T$$

$$T = A_J(p_J - p_{\infty}) - \dot{m}_a c_{x\infty} + (\dot{m}_a + \dot{m}_f) c_J - F_{roz}$$

Si suponemos que la presión a la entrada del compresor p_1 es igual a la presión estática en el ambiente p_{∞} y que las condiciones a la salida del motor (subíndice J) corresponden con la salida de la tobera propulsiva (estado termodinámico 5) y además despreciamos las pérdidas por rozamiento obtenemos la siguiente ecuación:

$$T = A_5(p_5 - p_1) - \dot{m}_a c_1 + (\dot{m}_a + \dot{m}_f) c_5$$

En el caso en el que el motor se mueve a baja velocidad o está parado:

$$T = A_5(p_5 - p_1) + (\dot{m}_a + \dot{m}_f) c_5$$

|| Mapas de características

En este anexo se explicarán los mapas de características de los componentes de una turbina de gas y las variables adimensionales que vienen representadas.

II.1. Mapa de características del compresor²⁰

El compresor es una turbomáquina cuyo objetivo es aumentar la presión de un fluido. Este proceso de compresión se realiza mediante estadios rotor-estator que, sucesivamente, aumentan la energía cinética del fluido y la transforman en energía de presión.

Vamos a analizar el estadio del compresor tomando el modelo unidimensional.

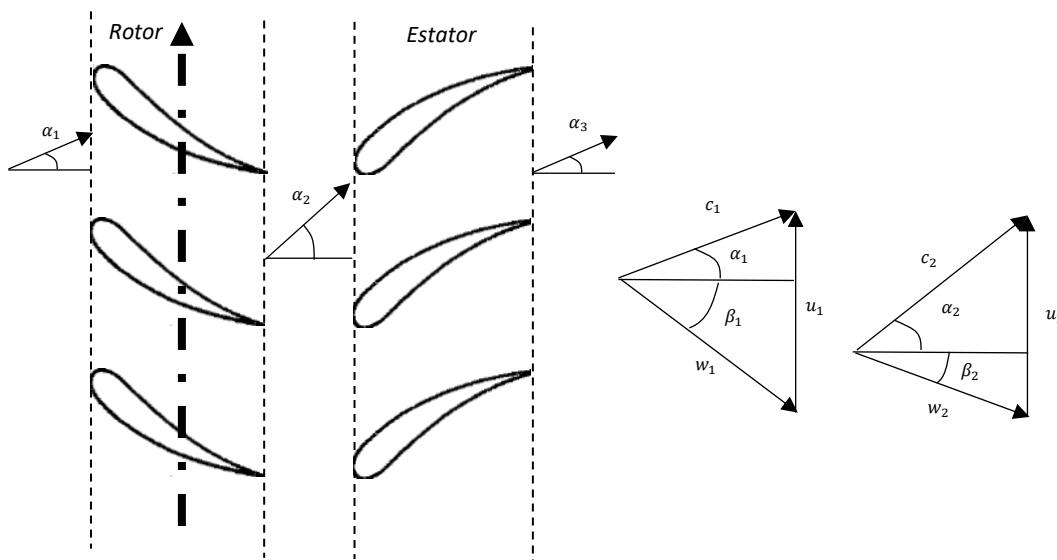


Ilustración II.1. Estadio de un compresor.

El rotor gira con una velocidad de rotación ω . Estudiando un estadio del compresor en un radio cualquiera, obtenemos una velocidad lineal de arrastre:

$$u = u_1 = u_2 = \omega r$$

Si suponemos que la velocidad axial permanece constante a lo largo del estadio y que el ángulo de salida del estator es igual al de entrada en el rotor:

$$\begin{aligned} c_x &= c_{x1} = c_{x2} \\ \alpha_3 &= \beta_3 = \alpha_1 \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de Euler en el rotor, obtenemos los siguientes resultados analizando los triángulos del estadio de compresor:

$$W = u(c_{\theta2} - c_{\theta1}) = u(c_x \tan \alpha_2 - c_x \tan \alpha_1) = u c_x (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1)$$

²⁰ Basado en el libro *Gas Turbine Theory* [6]

En términos de ángulos de las palas:

$$W = u(c_{\theta 2} - c_{\theta 1}) = u(u - c_x \tan \beta_2 - u + c_x \tan \beta_1) = uc_x(\tan \beta_2 - \tan \beta_1)$$

Es decir: $\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1 = \tan \beta_2 - \tan \beta_1$, $\tan \beta_2 - \tan \alpha_2 = \tan \beta_1 - \tan \alpha_1$

El balance de energía en el estadio es igual a la variación de entalpía total, dado que en el rotor el proceso es adiabático, y en el estator no se produce ni intercambio de trabajo ni de calor.

$$W = h_{02} - h_{01} = h_{03} - h_{01}$$

Si aplicamos la hipótesis de gas perfecto y de flujo isoentrópico:

$$W = c_p(T_{03} - T_{01}) = c_p T_{01} \left(\frac{T_{03}}{T_{01}} - 1 \right) = c_p T_{01} \left[\left(\frac{p_{03}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

Podemos relacionar la cinemática y la termodinámica del estadio:

$$W = c_p T_{01} \left[\left(\frac{p_{03}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = uc_x(\tan \beta_2 - \tan \beta_1)$$

Expresamos la relación de presión en función del resto de variables:

$$\frac{p_{03}}{p_{01}} = \left[\frac{\omega r c_x}{c_p T_{01}} (\tan \beta_2 - \tan \beta_1) + 1 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[\frac{\omega r c_x}{c_p T_{01}} (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) + 1 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Es decir, que la relación de presión de un estadio de compresor depende del ángulo de deflexión de la pala, entre otras variables.

$$\xi = \beta_1 - \beta_2$$

A priori, podríamos pensar que podríamos aumentar el ángulo de deflexión tanto como quisieramos, pero nos toparíamos con otro problema: la separación de la capa límite.

Dado que en el rotor el fluido debe expandirse para aumentar su velocidad relativa, se produce un mayor riesgo de que se desprenda la capa límite que mantiene pegado el flujo a las palas del compresor. Un aumento del ángulo de deflexión tiende a acelerar de forma más violenta el flujo y con ello aumentar el gradiente de presión en una sección del rotor. La aproximación unidimensional no es válida porque dicho flujo ya no es constante a lo largo del eje x.

Este fenómeno es una fuente de ineficiencia, y en ocasiones puede ser crítico para el funcionamiento del compresor. Es denominado *surge* y se manifiesta a gran escala en la turbina de gas en forma de flujo invertido.

Podemos expresar el trabajo del estadio en función del ángulo de entrada del flujo al rotor y del ángulo de la pala a la salida del rotor.

$$W = u \Delta c_\theta = u(u - c_x \tan \beta_2 - c_x \tan \alpha_1) = u[u - c_x(\tan \beta_2 + \tan \alpha_1)]$$

$$\frac{W}{u^2} = 1 - \frac{c_x}{u}(\tan \beta_2 + \tan \alpha_1)$$

Definiendo las siguientes variables adimensionales:

$$\frac{W_s}{u^2} = \psi, \quad \frac{c_x}{u} = \varphi, \quad \tan \alpha_1 + \tan \beta_2 = k, \quad \eta_s = \frac{W}{W_s}$$

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$\eta_s \psi = 1 - \varphi k$$

Aplicando la hipótesis de gas perfecto:

$$\frac{W_s}{u^2} \frac{W}{W_s} = \frac{c_p(T_{03s} - T_{01})}{u^2} \frac{W}{W_s} = 1 - \frac{c_x}{u} (\tan \beta_2 + \tan \alpha_1)$$

Manipulando la ecuación anterior:

$$\left(\frac{p_{03}}{p_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{u^2}{c_p T_{01}} \frac{1}{\eta_s \psi} [1 - \varphi k]^2 + 1$$

Vemos que si el flujo entra con ángulo α_1 y no hay separación de la capa límite (β_2 se mantiene constante), el coeficiente k también es constante. Siguen las siguientes conclusiones:

- Al aumentar la velocidad axial c_x del flujo a u constante, aumentamos el flujo másico, ya que $\dot{m}_a = \rho A c_x$, y este aumento de velocidad axial reduce el salto de presión en el estadio.
- Al aumentar la velocidad de rotación del rotor (aumentamos u) a velocidad axial constante, la relación de presión aumenta.

De esta manera podemos justificar que, en el mapa de características del compresor, al aumentar el flujo másico a velocidad de giro constante, la relación de presión disminuya, y que al aumentar la velocidad de rotación aumente la relación de presión.

No obstante, en el mapa del compresor representamos diferentes magnitudes adimensionales a las empleadas anteriormente. Dado que el flujo no es unidimensional, más variables deben ser tenidas en cuenta para el estudio adimensional.

Podemos definir las propiedades del flujo a lo largo del compresor como una función de las siguientes variables:

$$F(D, N, m, p_{01}, p_{02}, RT_{01}, RT_{02}) = 0$$

Utilizando el teorema π de Buckingham, adimensionalizamos las variables anteriores reduciendo el número de variables independientes:

$$F(D, N, m, p_{01}, p_{02}, RT_{01}, RT_{02}) = G\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}, \frac{T_{01}}{T_{02}}, \frac{m\sqrt{RT_{01}}}{D^2 p_{01}}, \frac{ND}{\sqrt{RT_{01}}}\right) = 0$$

Tomando como constantes las variables D y R , que dependen de la geometría y del tipo de gas:

$$F\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}, \eta_s, \frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}, \frac{N}{\sqrt{RT_{01}}}\right) = 0$$

Donde $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ es la relación de presión en el compresor, η_s es la eficiencia isoentrópica del compresor, $\frac{m\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}$ es el flujo másico corregido (o adimensional), y $\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}$ es la velocidad de rotación adimensional.

Podemos interpretar el significado físico de algunas de estas variables adimensionales:

$$\frac{m\sqrt{RT}}{D^2 p} = \frac{\rho A c_x \sqrt{RT}}{D^2 p} = \frac{\frac{p}{RT} A c_x \sqrt{RT}}{D^2 p} = \frac{A c_x \sqrt{k}}{D^2 \sqrt{k RT}} \propto \frac{c_x}{\sqrt{k RT}} \propto M_x$$

$$\frac{ND}{\sqrt{RT}} \propto \frac{c_r}{\sqrt{k RT}} \propto M_r$$

El flujo másico corregido y la velocidad de rotación adimensional están relacionados con el número de Mach axial y radial, respectivamente. Esto explica que a altas velocidades de rotación el flujo entre en choking y las curvas del mapa de características²¹ tiendan a ser verticales.

En práctica, las variables adimensionales se normalizan en función del punto de diseño y de las condiciones estándar del aire. Estas variables son las siguientes:

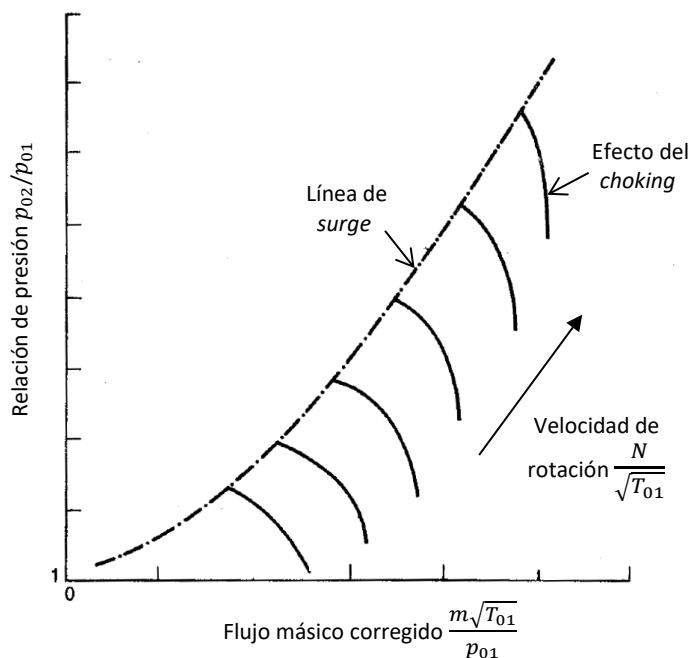


Ilustración II.2. Mapa genérico de un compresor axial.

- Flujo corregido relativo a las condiciones estándar:

$$m_a 25 RSTD = \frac{m_x \sqrt{T_0 / T_{std}}}{p_0 / p_{std}} [kg/s]$$

²¹ Extraído del libro *Gas Turbine Theory* [9].

- Velocidad de rotación adimensional relativa:

$$N_{rel} = 100 \cdot \frac{\left(\frac{N}{\sqrt{T_{01}/T_{std}}} \right)}{\left(\frac{N}{\sqrt{T_{01}/T_{std}}} \right)_{DP}} (\%)$$

La eficiencia isoentrópica²² del estadio (y como consecuencia, del compresor) tiende a disminuir conforme aumenta c_x a velocidad de rotación constante.

$$\eta_s = \frac{1}{\psi} (1 - \varphi k)$$

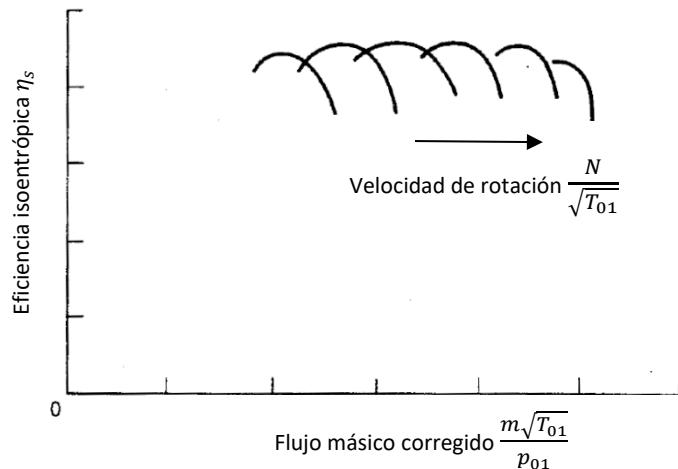


Ilustración II.3. Mapa de eficiencia del compresor axial

²² Extraído del libro *Gas Turbine Theory*. [9].

II.2. Mapa de características de la turbina²³

A diferencia del estadio del compresor, el estadio de la turbina no sufre riesgo de desprendimiento de la capa límite, ya que el flujo siempre está sometido a un gradiente de presión tal que empuja el flujo contra la pala.

De forma análoga al compresor, las variables adimensionales a estudiar son las siguientes:

$$F\left(\frac{p_{03}}{p_{04}}, \eta_s, \frac{m\sqrt{T_{03}}}{p_{03}}, \frac{N}{\sqrt{T_{03}}}\right) = 0$$

Dado que la turbina trabaja a temperaturas más altas es más probable que entre en choking en algún estadio. Por ello se suele representar el flujo máscio en función de la relación de presión, al contrario que en el mapa del compresor.

El mapa que relaciona el ratio de presiones con el flujo máscio depende de la velocidad adimensional de rotación. No obstante, esta dependencia suele despreciarse y se toma una única curva que modela el comportamiento de la turbina a distintas velocidades de rotación.

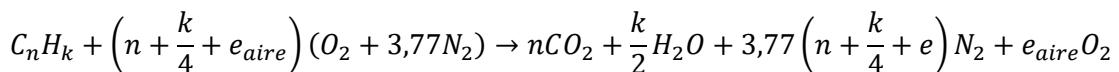
$$\frac{m\sqrt{T_{03}}}{p_{03}} = f\left(\frac{p_{03}}{p_{04}}, \frac{N}{\sqrt{T_{03}}}\right) \approx f\left(\frac{p_{03}}{p_{04}}\right)$$

II.3. Cámara de combustión

La cámara de combustión es el componente de la turbina de gas en el que se produce la combustión del aire con un combustible. Es el componente más sensible de la turbina de gas, ya que debe soportar las mayores presiones y temperaturas del ciclo.

Vamos a enfocarnos simplemente en la relación entre el salto de temperatura en la cámara y la cantidad de combustible introducida.

Una reacción química de combustión completa²⁴ con exceso de aire e_{aire} resulta:



La energía desprendida debida a la combustión es absorbida por los productos de la combustión. En una reacción estequiométrica ($e_{aire} = 0$) la cantidad de productos es la mínima, es decir, es la situación en la que la energía absorbida por unidad de masa de gas es máxima, y esto hace

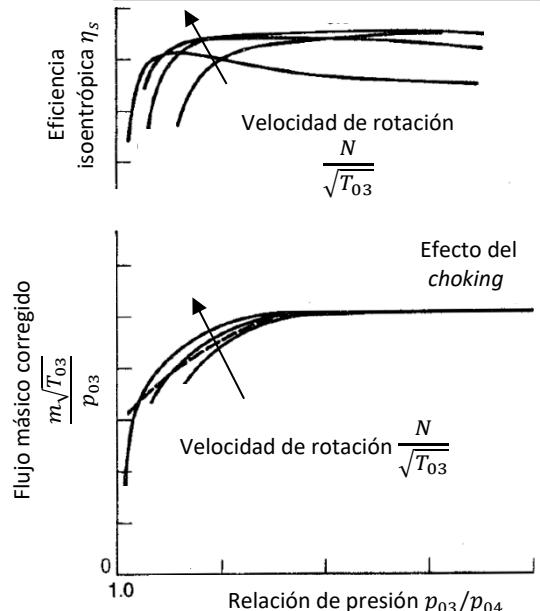


Ilustración II.5. Mapas de la turbina

²³ Extraído del libro *Gas Turbine Theory*. [10].

²⁴ Extraído de los apuntes de la materia Ingeniería Térmica. [11]

que la temperatura sea la mayor posible. Esta temperatura se denomina *temperatura adiabática de llama*.

Esta temperatura disminuye conforme aumentamos la cantidad de productos de la reacción.

Definimos el dosado como la relación entre el flujo mísico de combustible y el flujo mísico de aire:

$$f = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a} = \frac{m_f}{m_a} = \frac{nM(C) + kM(H)}{\left(n + \frac{k}{4} + e_{aire}\right)(2M(O) + 2 \cdot 3,77M(N))}$$

$$f = \frac{12n + k}{137,56 \left(n + \frac{k}{4} + e_{aire}\right)}$$

Si planteamos el balance de energía en la cámara de combustión y aplicamos la hipótesis de gas perfecto:

$$m_f h_{0f}(T_f) + m_a c_{pa} T_{02} = m_g c_{pg} T_{03}$$

$$c_{pg} T_{03} = \frac{f h_{0f}(T_f) + c_{pa} T_{02}}{1 + f}$$

Es decir, la energía del gas a la salida depende de la energía interna del combustible, de la temperatura del aire a la entrada de la cámara de combustión y del dosado f . Este último depende a su vez de la cantidad de aire en exceso.

$$\frac{T_{03}}{T_{02}} = \frac{f \frac{h_{0f}(T_f)}{T_{02}} + c_{pa}}{c_{pg}(1 + f)} = \frac{h_{0f}(T_f)}{c_{pg}} \frac{f}{1 + f} \frac{1}{T_{02}} + \frac{c_{pa}}{c_{pg}} \frac{1}{1 + f}$$

La cámara de combustión trabaja normalmente en exceso de aire para reducir la temperatura del gas a la salida, es decir, a bajo dosado, por lo tanto, podemos despreciar el efecto del denominador. Además, el calor específico del gas y del aire son similares:

$$\frac{T_{03}}{T_{02}} \approx \frac{h_{0f}(T_f)}{c_{pg}} \frac{1}{T_{02}} f + \frac{c_{pa}}{c_{pg}} \approx \frac{h_{0f}(T_f)}{c_{pg}} \frac{1}{T_{02}} f + 1 = \frac{C_1 f}{T_{02}} + 1$$

$$\Delta T_{032} = T_{03} - T_{02} \approx \frac{h_{0f}(T_f)}{c_{pg}} f = C_1 f$$

El resultado es que el salto de temperatura en la cámara de combustión y la proporción de combustible-aire son, aproximadamente, directamente proporcionales.

Referencias

- [1]. Saravanamuttoo, H.I.H.; Rogers, G.F.C. y Cohen H. (2013). *Gas Turbine Theory* (5º ed.). Noida, India: Pearson Education, Ltd. 8.3 *Prediction of performance of simple gas turbines: Equilibrium running line of a gas generator* (pp. 383-386).
- [2]. Saravanamuttoo, H.I.H.; Rogers, G.F.C. y Cohen H. (2013). *Gas Turbine Theory* (5º ed.). Noida, India: Pearson Education, Ltd. 9.5 *Prediction of performance – further topics: Transient behaviour of gas turbines* (pp. 427-431).
- [3]. GasTurb (13) “software”. (2017). Melatener Straße 70, 52074 Aachen, Germany: GasTurb GmbH. Obtenido de <http://www.gasturb.de/index.html>.
- [4]. Anderson J. D. Jr. (1990). *Modern Compressible Flow* (2º ed.). Singapur: MacGraw-Hill Publishing Company. 3.3 *One-Dimensional Flow: Speed of sound and Mach number* (pp. 52-56).
- [5]. Anderson J. D. Jr. (1989). *Introduction to Flight* (3º ed.). MaryLand, EEUU: MacGraw-Hill Book Company. 9.4. *Propulsion: Jet Propulsion – The thrust equations* (pp. 491-495).
- [6]. Saravanamuttoo, H.I.H.; Rogers, G.F.C. y Cohen H. (2013). *Gas Turbine Theory* (5º ed.). Noida, India: Pearson Education, Ltd. 5.2 *Axial flow compressors - Elementary theory* (pp. 185-188).
- [7]. Astrom K. J. y Hagglund T. (2009). *Control PID Avanzado*. Madrid, España. Pearson Educación S.A. 3.1. *El controlador PID* (pp. 67-76).
- [8]. Astrom K. J. y Hagglund T. (2009). *Control PID Avanzado*. Madrid, España. Pearson Educación S.A. 6.2. *Método de Ziegler-Nichols y procedimientos relacionados* (pp. 170-171).
- [9]. Saravanamuttoo, H.I.H.; Rogers, G.F.C. y Cohen H. (2013). *Gas Turbine Theory* (5º ed.). Noida, India: Pearson Education, Ltd. 5.12 *Axial flow compressors – Axial compressor characteristics* (pp. 255-262).
- [10]. Saravanamuttoo, H.I.H.; Rogers, G.F.C. y Cohen H. (2013). *Gas Turbine Theory* (5º ed.). Noida, India: Pearson Education, Ltd. 7.5 *Axial and radial flow turbines – Overall turbine performance* (pp. 355-256).
- [11]. Uche Marcuello, F. J. Departamento de Ingeniería Mecánica (2017). EINA, Universidad de Zaragoza. *Ingeniería Térmica. Grado IM. Tema 1.1. Combustión (fundamentos y balance de masa)*.