Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Grado

Breve introducción a la Teoría de Decisión en ambiente de incertidumbre. Una aplicación a Modelos de Selección de Cartera.

Autor:

Francisco Javier Carela Ferrer

Director:

Juan Carlos Candeal Haro

Facultad de Economía y Empresa

2019

“Caballeros, debo recordarles que, mis probabilidades de éxito, aumentan en cada nuevo intento...”

John F. Nash

RESUMEN Y PALABRAS CLAVE

RESUMEN

En este trabajo presentaremos una introducción básica a la teoría de decisión, así como a la toma de decisiones bajo certidumbre e incertidumbre, además de algunos modelos que facilitarán su comprensión.

También introduciremos el modelo de elección de cartera de CAMP y el modelo de Markowitz aplicándolos a diversas acciones de la bolsa española y exponiendo las conclusiones a las que podamos llegar.

PALABRAS CLAVE

Decisión, certidumbre, incertumbre, modelo, alternativas, activos, riesgo, rendimiento, diversificación, cartera.

INDICE

2. MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Motivación

La motivación temática de este TFG se sustenta en la búsqueda de conocimientos acerca de la toma racional de decisiones, así como en su aplicación a diferentes conceptos financieros. También abordar algunos términos más prácticos como pueden ser las inversiones y el mundo de las finanzas desde un enfoque analítico, con la Teoría económica, siempre ha sido un tema que me ha llamado mucho la atención. Aprender durante el Grado ambos temas por separado, me han llevado a la curiosidad de querer conocer aquellas teorías que son capaces de establecer conexiones entre ambos, aclarando y explicando el comportamiento de los agentes que en ellos intervienen.

Justificación del TFG

En concordancia con la propia naturaleza del Trabajo de Fin de Grado, me remitiré a la propia guía docente de la asignatura, la cual cito textualmente: *"El TFG consiste en la realización de una memoria o proyecto en el que se ponen de manifiesto los conocimientos, habilidades, aptitudes y actitudes adquiridos por el estudiante a lo largo de la titulación. Esta memoria debe materializarse de forma escrita y contener suficientes elementos de creación personal, citando adecuadamente todas las fuentes usadas."* En base a esto, mi TFG se ha centrado en asignaturas del departamento de Análisis económico, especialmente aquellas relacionadas con la Microeconomía; desde las asignaturas de Microeconomía intermedia haciendo alusión a la teoría del consumidor en algunas ocasiones, hasta Microeconomía Avanzada (Microeconomía IV) y Decisión y juegos en lo que se refiere a la toma de decisiones bajo certidumbre e incertidumbre. También está muy relacionado con el departamento de Finanzas y Contabilidad, en tanto en cuanto se refiere a temas como la inversión, o el mercado bursátil. Asignaturas como Introducción a las Finanzas y Banca y Mercados financieros me han ayudado a aclarar estos conceptos clave. Además, el conocimiento adquirido en asignaturas como Estadística I y Estadística II me han sido de utilidad a la hora de identificar términos básicos como la Varianza o la Covarianza.

Bien es cierto que algunos modelos y conceptos aplicados en este TFG no han sido abordados en asignaturas del Grado en Economía, sin embargo, una base conceptual sólida, y una familiaridad del lenguaje analítico, me han ayudado a la rápida comprensión de modelos y teorías aquí explicadas, para los que, sin este conocimiento adquirido, su aprendizaje hubiera sido mucho más costoso. También el uso durante la carrera de herramientas prácticas tales como Excel y aprender a usar otras nuevas como Solver. Finalmente, toda esta formación ha enriquecido mi capacidad crítica para identificar fuentes de información fiables que han sido piezas clave para la elaboración del TFG.

3. CAPÍTULO TEÓRICO

3.1 INTRODUCCIÓN A LOS FUNDAMENTOS DE LA TOMA DE DECISIONES

En este capítulo introduciremos los procesos de decisión, así como la forma y metodología para resolver problemas. Utilizaremos el concepto de modelo como forma de representar la realidad, intentando siempre que la reflejen de manera clara y sencilla.

Estudiaremos situaciones relacionadas con alternativas cuantificables en términos económicos, las cuales tendrán en cuenta el futuro, lo cual implica que las decisiones conllevan un determinado nivel de **incertidumbre.**

3.1.1 MODELOS

Para intentar resolver problemas y analizar situaciones es necesario primero simplificar la realidad, y es por eso que utilizamos los modelos. Tal y como dice Vélez-Pareja (2007) "Un modelo es una representación de una realidad. Esta representación será tan detallada y precisa como se desee y como permitan los recursos disponibles" (p.2).

Existen diferentes tipos de modelos y diversas maneras de clasificarlos, nosotros estableceremos la clasificación dependiendo del modo de representar la realidad, y dependiendo de su uso:

Según el modo de representar la realidad:

1.Diagramas: Es una forma esquemática de representar la realidad, como por ejemplo los modelos representados en forma de *árbol de decisión.* Suelen tener una sencilla representación gráfica mediante por ejemplo el uso de esquemas.

2.Caja Negra: En este tipo de modelo se estudia lo que entra y lo que sale de él, sin fijarnos en el funcionamiento interno. Es utilizado en multitud de campos.

3.Causa efecto: Es otro tipo de modelo de Caja negra, en el cual se conoce como se comporta la realidad y se puede establecer una relación causa-efecto entre las variables de entrada y salida, este modelo es muy utilizado en al campo de la Psicología Conductual. ([1])

Según el uso ([2]):

1.Normativo: Es un tipo de modelo que representa la realidad desde un punto de vista teórico, diciéndonos como debería comportarse y estableciendo unas reglas de funcionamiento.

2. Descriptivo: Es un tipo de modelo que busca representar la realidad tal y como la percibe una persona.

Como los modelos simplifican la realidad, parten de hipótesis que no siempre se cumplen, y parte de la labor de un buen analista es conocer bien el modelo que escoge de manera que contemple las variables, elementos de la realidad y sus interrelaciones. Esto nos induce a una tercera clasificación de modelos:

1.Explicativos: Pretenden explicar una idea o concepto, y se requiere que sean simples y con muchas condiciones y supuestos simplificadores.

2.Aplicativos: Son una aplicación de un modelo explicativo a una realidad concreta, lo cual requiere de un gran número de variables que se excluyeron inicialmente en el modelo explicativo para que el modelo se aproxime lo máximo posible a la realidad.

Por ejemplo el concepto de equivalencia debería ser ajustado de $P = \frac{F}{(1+i)^n}$ (que sería un ejemplo de modelo explicativo) a $P = \frac{F}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_n)}$ (pasaríamos a un modelo aplicativo) de esta manera se tendría en cuenta, en este caso, que las tasas de interés no permanecen fijas en el tiempo.

3.1.2 DECISIONES

En las situaciones cotidianas de toda persona surgen situaciones que requieren una solución, y las formas para llegar a la solución pueden ser varias y los recursos disponibles escasos. En ese marco es en el que se encuentra la Economía y su tarea en la toma de decisiones. Los agentes se enfrentan a un problema cuando hay escasez de recursos y

[1] véase Watson, fundador de la escuela conductista a través de su artículo “La psicología tal y como la ve el conductista” publicado en 1913

[2] Más información en: Páez Gallego, Javier, Teorías normativas y descriptivas de la toma de decisiones: un modelo integrador. Opción [en línea] 2015, 31 Disponible en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=31045568046> ISSN 1012-1587

varias soluciones. A continuación, nos basaremos en los 6 componentes de un problema que describe Vélez-Pareja (2007, p.6):

1.La persona que lo enfrenta que es el que toma a la decisión.

2. Las variables controlables por el que decide. Son aquellas sobre las que puede influir.

3.Las variables no controlables, sobre las que la persona que lo enfrenta no tiene influencia.

4.Las alternativas, de las cuales hay algunas que solucionan el problema y son los cursos de acción que cumplen las restricciones.

5. *Las restricciones*, las cuales están relacionadas con la escasez de recursos. Algunas variables o combinaciones de variables pueden tener una o varias restricciones.

6.La decisión, se trata de escoger una alternativa eficiente (alta relación entre resultados obtenidos y recursos empleados) que produzca resultados satisfactorios.

Entre las soluciones o alternativas hay una que es la mejor y a la cual denominaremos **optima**, y a su proceso de búsqueda **optimización.**

3.1.3 EL PROCESO DE DECISIÓN

Una vez identificado el problema hay que tomar una decisión. Esta se realiza mediante una abstracción (modelo) y no se realiza en un único momento, sino que es un proceso. El resultado del proceso de decisión es la solución de un problema. Este proceso tiene 4 fases según Vélez-Pareja (2007, p.7-11) son:

Fase 1: Identificación y definición:

Esta fase comenzará con la identificación de la situación actual y de la situación deseada lo que se traduce en la identificación del problema. Después se procederá a la identificación de las restricciones que limitan el problema, reduciéndose el número de alternativas. Seguidamente se identificarán los objetivos que persigue la persona que toma la decisión, esto es, la identificación de una función objetivo y por último la construcción y validación del modelo.

Fase 2: Búsqueda de alternativas:

Es un proceso que puede ser racional, creativo o aleatorio. Dentro de esta fase se contempla que el problema puede tener implicaciones en el futuro, por lo que se tendrá que tener en cuenta **la incertidumbre.**

Fase 3: Evaluación de alternativas:

Se efectúa mediante la valoración de la función objetivo de cada una de las alternativas para luego elegir la mejor de ellas. Al igual que en la fase anterior es importante tener en cuenta los elementos de riesgo e **incertidumbre**, al igual que la actitud frente al riesgo (aversión o propensión a él).

Fase 4: Ejecución y control:

Consiste en poner en práctica la alternativa elegida y controlar que la ejecución de la solución satisfaga los objetivos mediante un seguimiento.

3.1.4 LA EVALUACIÓN DE MULTIPLES OBJETIVOS: ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

Cuando planteamos el orden y las preferencias de unas alternativas, entran en juego los objetivos. En la realidad las organizaciones tienen múltiples objetivos y los resultados no siempre se pueden medir y lo que sucede al final es que el análisis financiero-económico es uno de los elementos de juicio, entre otros, para que quien decide seleccione una alternativa.

La dificultad del análisis con múltiples objetivos radica en que el que decide no siempre es consciente de los objetivos de la organización, y por lo tanto conviene contar con un método para hacernos conscientes de los diferentes objetivos.

Si los objetivos se designan por $O_1, O_2, O_3, \ldots O_m$, los resultados de cada alternativa como $R_1, R_{2,} R_3, \ldots R_m$ y cada alternativa como $A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$ entonces se puede representar la calificación de cada alternativa así:

$$V(R_m, A_k)$$

En este caso será necesario calificar la importancia relativa de cada objetivo, a partir de valores subjetivos y conscientes a los resultados y a la vez examinar en cuánto contribuyen al logro de cada objetivo.

Por lo tanto, primero identificaremos y cuantificaremos los factores que vamos a utilizar en la evaluación. Después cuantificaremos el resto de factores asignando una escala numérica que corresponda a las diferentes categorías establecidas. Por ejemplo:

muy malo, malo, regular, bueno y muy bueno podrían ser las categorías y se le asignaría un valor a cada una por ejemplo 0, 1, 2 ,3 y 4, y a partir de aquí asignar una ponderación o peso a cada factor en relación a los demás. Por último, multiplicaremos ese valor numérico de cada factor por su peso respectivo, y al sumar los resultados obtendremos el puntaje final de cada alternativa. Se escoge la alternativa de mayor puntaje.

Lo más importante es lograr una consistencia interna entre las calificaciones, es decir, si un factor se prefiere a otro, esta preferencia se debe reflejar en los pesos; lo mismo en cuanto a la combinación de factores.

3.1.5 LA TEORÍA DE LA DECISIÓN

Modelización de la realidad

Como ya hemos dicho, un problema práctico tiene muchas variables que le afectan, y algunas de ellas impredecibles, por lo que modelizar la realidad teniendo en cuenta el mayor número posible de factores es una tarea realmente complicada (como veremos en la parte práctica de este trabajo excluimos del análisis muchos factores) A continuación expondremos la clasificación de los argumentos por los que merece la pena modelizar la realidad según Vélez-Pareja (2007 p.33):

1. Mejorar el proceso de análisis y sistematizar la toma de decisiones.
2. Para poder delegar la toma de decisiones llegando a decisiones coherentes, sin someterlas tanto a variables internas.
3. Para garantizar que se están tomando en cuenta todas las variables y alternativas pertinentes.
4. Para garantizar la equidad en las decisiones y así “resolver” los problemas éticos que con frecuencia se plantean los que deciden (conflicto de intereses).
5. Para optimizar los resultados.
6. Para apoyar la toma racional de decisiones.

Teoría descriptiva

Raiffa (1994) afirma que existe una necesidad de enseñar al decisor a tomar decisiones y se concentra en tres aspectos principales:

1. Hay que entrenar a quienes deben tomar las decisiones en el análisis sistemático de los problemas y en el uso de mecanismos que les permitan verificar la coherencia de sus apreciaciones y juicios.
2. Hay que enlazar y complementar la teoría de juegos con la realidad cotidiana.
3. Los resultados de la inferencia estadística a menudo no son útiles para al propósito de la toma de decisiones al basarse en datos históricos y encontrarnos en un contexto cambiante, y por lo tanto de incertidumbre.

Para la buena toma de decisiones es importante que el individuo sea capaz de:

- Calcular probabilidades de los diferentes estados, consecuencias o eventos del mundo.
- Asignar preferencias o utilidades para cada una de las consecuencias.
- Maximizar la utilidad subjetiva esperada.

3.2 CONCEPTOS BÁSICOS RELACIONADOS CON LOS ACTIVOS FINANCIEROS

¿Qué entendemos por activo? Según Varian (2010, p.207) “Los activos son bienes que generan un flujo de servicios a lo largo del tiempo (…) aquellos que generan dinero se les denomina **activos financieros”.**

3.2.1 CONCEPTO DE EQUIVALENCIA FINANCIERA

En la ciencia económica, el comportamiento del individuo en relación a sus decisiones se basa principalmente en las decisiones de ahorro y consumo. Los individuos pueden cambiar consumo actual por consumo futuro siempre que la utilidad obtenida sea **al menos equivalente** a la que obtendrían en el consumo actual. Esto implica una mayor cantidad de consumo futuro para alcanzar la utilidad equivalente.

Si introducimos el concepto de inversión, el individuo invertirá hasta cuando el beneficio recibido por el excedente que le paguen por su dinero sea menor que el que el individuo asigna al sacrificio del consumo actual, es decir la tasa a la cual está dispuesto a cambiar consumo actual por consumo futuro.

Se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$F = P + compensación\ por\ aplazar\ consumo \quad (1.1)$$

Donde:

F = Suma futura al final de n periodos

P = Suma de capital colocado en el periodo 0

Esta ecuación nos permite introducir el concepto de equivalencia. Tal y como afirma Vélez-Pareja (2004) “Se dice que dos sumas son equivalentes, aunque no iguales, cuando a la persona le es indiferente recibir una suma de dinero hoy (P) y recibir otra diferente (F) mayor al cabo de un periodo de tiempo. En microeconomía esta situación se mide con la tasa marginal de sustitución en el consumo. Esta relación es la base de todo lo que se conoce como matemáticas financieras” (p.2).

La diferencia entre P y F responde por el valor que le asigna el individuo al sacrificio de consumo actual y al riesgo que percibe y asume al posponer el ingreso.

3.2.2 CONCEPTO DE TASA DE INTERÉS

Cuando un agente recibe dinero en calidad de préstamo, es justo pagar una suma adicional al devolverlo, y esa suma adicional representa la ganancia producida por el capital. Por lo tanto, el interés es la compensación que reciben los individuos por el sacrificio que incurren al ahorrar una suma P. El mercado brinda la posibilidad de inversión o financiación, lo cual hace que exista el tipo de interés. Existen multitud de libros sobre matemática financiera que desarrollan mucho este concepto ([3]). Esta tasa de interés se representa con un porcentaje tal que:

$$i = \frac{I}{P} \quad (1.2)$$

Donde:

I = interés recibido o pagado en el periodo

P = monto inicial

Si combinamos (1.1) y (1.2):

$$F = P + Pi = P(1 + i)$$

En n periodos:

$$F = P(1 + i)^n \rightarrow P = \frac{F}{(1+i)^n} \quad (1.3)$$

Donde:

P = Valor descontado o valor Actual

F = Suma futura

i = Tasa de interés que establece la equivalencia (tasa de descuento)

n = número de periodos

A partir de esta fórmula se deducen todas las fórmulas de interés que se utilizan para hallar la equivalencia entre sumas de dinero en el tiempo. La tasa de descuento se determina considerando el coste del dinero, es decir, lo que paga por recibir dinero

[3] **Aching Guzmán, C.**: (2006) *Matemáticas financieras para toma de decisiones empresariales*, Edición electrónica. Texto completo en www.eumed.net/libros/2006b/cag3/

prestado, o lo que deja de ganar por el dinero que tiene. A lo que deja de ganar por el dinero que tiene se le denomina **Coste de Oportunidad.**

3.3 MODELOS DE DECISIÓN BAJO CERTIDUMBRE

Para el individuo que se enfrenta a una decisión financiera es necesario conocer los ingresos que obtendrá con una u otra alternativa de manera que pueda comparar los resultados, para ello utilizaremos dos métodos: *Valor Actual Neto* (VAN) y la *Tasa Interna de Rentabilidad* (TIR).

3.3.1 VALOR ACTUAL (VA) Y VALOR ACTUAL NETO (VAN)

El Valor Actual y el Valor Actual Neto son métodos utilizados para valorar inversiones a través de la estimación de los flujos de caja (cobros menos pagos). Tanto él VA como el VAN nos van a dar un resultado numérico, y más adelante explicaremos los criterios que seguiremos para aceptar o no una inversión.

Vélez-Pareja (2004) explica el Valor Actual como: "El valor presente de un ingreso de dinero en el futuro es aquella cantidad que se debe entregar o invertir hoy para asegurar esa misma cantidad de dinero en el futuro. Esta suma presente es equivalente al flujo de dinero que se espera recibir en el futuro" (p.13) Se trata pues de actualizar los flujos de caja futuros al presente. Analíticamente se puede expresar de la siguiente forma:

$$VA = \sum_{j} \frac{I_j}{(1+i)^j}$$

Donde:

VA = Valor Actual

I_j = Ingreso en el periodo j (flujos de caja)

i = Tasa de descuento

j = Periodo

Por otro lado, el Valor Actual Neto se obtiene de traer al presente los flujos de caja futuros a través del tipo de interés, es decir la suma de cobros futuros menos la suma de pagos futuros, ambos actualizados a una tasa de descuento. De forma analítica lo podemos expresar como:

$$VAN(i) = \sum_{j} \frac{I_j}{(1+i)^j} - \sum_{j} \frac{E_j}{(1+i)^j}$$

Donde:

VAN = Valor Actual Neto

I_j = Cobro en el periodo j (flujos de caja)

E_j = Pago en el periodo j

i = Tasa de descuento

j = Periodo

En el caso del VAN el criterio para tomar la decisión es el siguiente:

- VAN > 0 se acepta la inversión, porque significa que nuestra situación económica es mejor que la inicial al terminar el periodo.
- VAN = 0 es indiferente (sería recomendable acudir a otros métodos).
- VAN < 0 se rechaza la inversión ya que el proyecto no nos devolvería el valor invertido en él.

En el caso de que se quiera ordenar alternativas se debe escoger aquella alternativa que tenga un *Valor Actual Neto* mayor.

3.3.2 TASA INTERNA DE RENTABILIDAD (TIR)

El TIR de una inversión es la tasa de interés/rentabilidad que hace que el VAN sea cero. Es una medida de rentabilidad, por lo que va expresada en tanto por ciento.

Vélez-Pareja (2004) define el TIR como: “De modo que cuando el Valor Presente Neto es igual a cero, la tasa de interés a la cual esto provee una medida de los beneficios que produce la inversión mientras se encuentran invertidos en ese proyecto. A esta tasa de interés se le denomina *Tasa interna de Rentabilidad*” (p.23) De forma analítica lo podemos expresar como:

$$\sum_{j} \frac{I_j}{(1+i)^j} \quad - \sum_{j} \frac{E_j}{(1+i)^j} = 0$$

Donde al igual que en el VAN:

I_j = Cobro en el periodo j

E_j = Pago en el periodo j

i = Tasa de descuento

j = Periodo

Para entender el criterio de decisión usaremos el siguiente gráfico:

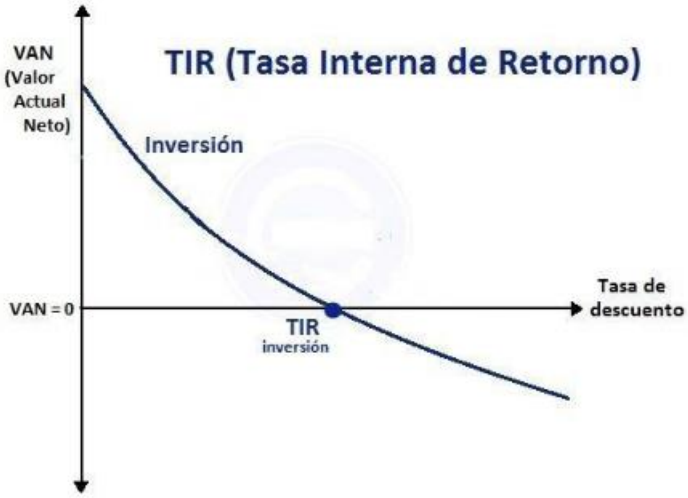


Figura: *Economipedia* (Septiembre 2017): El VAN se encuentra en el eje de ordenadas y la tasa de descuento en el eje de abscisas. El TIR será el punto en el que el VAN es cero.

Por lo tanto, siendo i la tasa de descuento de flujos de caja para el cálculo del VAN la regla de decisión en el TIR es la siguiente:

- Si la TIR es mayor que el i, se debe aceptar ya que la tasa de rendimiento interno que obtenemos es superior a la tasa de rentabilidad mínima exigida.
- Si la TIR es menor que el i del VPN, se debe rechazar ya que no se alcanza la rentabilidad mínima exigida a la inversión.
- Si la TIR es igual a i, es indiferente

Aunque existen multitud de ventajas al aplicar el VAN y el TIR como métodos para aceptar o rechazar un proyecto de inversión, también hay desventajas como la necesidad conocer la tasa de descuento ([4]).

3.4 EQUILIBRIO EN EL MERCADO DE ACTIVOS CIERTOS

En este capítulo analizaremos el funcionamiento del mercado bajo certidumbre en los flujos futuros de servicios que generan.

Bajo la hipótesis de certidumbre (hipótesis muy extrema) podemos afirmar que todos los activos tendrán la misma tasa de rendimiento, y la razón es que, si un activo tuviera una tasa de rendimiento más alta que otro y ambos fueran idénticos en todo lo demás, nadie querría comprar el activo con una tasa de rendimiento menor.

Supongamos un activo A y denominemos p_0 al precio actual de un activo y p_1 al precio esperado en el futuro. Por otro lado, un activo B que genera un tipo de interés *r*. Disponemos de 2 opciones: Invertir en el activo A y hacerlo efectivo el próximo periodo, o invertirlo en el activo B y obtener unos intereses a lo largo del periodo.

Obtendremos la siguiente ecuación:

Activo A → $p_0 x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{p_0}$

El próximo periodo el valor futuro de la inversión en el activo A será:

$$VF = p_1 x = \frac{p_1}{p_0}$$

Por otro lado, si invertirnos en el activo B el próximo periodo tendremos 1 + r euros, y si se mantuviera el equilibrio, la condición de equilibrio sería la siguiente:

Activo B→ $1 + r = \frac{p_1}{p_0}$

Si no se cumpliese la igualdad, por ejemplo:

$$1 + r > \frac{p_1}{p_0}$$

[4]Más información en: Ricardo José Canales Salinas" CRITERIOS PARA LA TOMA DE DECISIÓN DE INVERSIONES" REICE Vol. 3, No. 5, enero-junio 2015

Los individuos que posean el activo A pueden vender una unidad a p_0 e invertirlo todo en el activo B. En el siguiente periodo su inversión valdrá $p_0(1+r)$ que es mayor que p_1 como hemos expuesto arriba. De esta forma en el segundo periodo tendrá suficiente dinero para volver a comprar el activo A, y en el punto de partida habrá obtenido una mayor cantidad de dinero.

3.4.1 CONCEPTO DE ARBITRAJE

Según Varian (2010) podemos definir el arbitraje como "comprar un activo y vender otro para obtener un rendimiento seguro— se denomina **arbitraje sin riesgo** o **arbitraje** para mayor brevedad. En la medida en que haya alguna persona que busque "inversiones seguras", es de esperar que los mercados que funcionen bien eliminen rápidamente las oportunidades de realizar un arbitraje. Por lo tanto, nuestra condición de equilibrio también puede definirse como aquella situación en la que *no existe ninguna oportunidad para realizar un arbitraje.* La llamaremos **condición de ausencia de arbitraje."** (p.208)

En el ejemplo anterior cualquiera que tuviera el activo A querría venderlo (recordemos que en el ejemplo anterior $1+r>\frac{p_1}{p_0}$) ya que obtendría con seguridad suficiente dinero para volver a comprarlo en el segundo periodo, pero sin embargo, como habrá muchas personas dispuestas a ofrecer el activo A y nadie lo comprará a p_0 , esto se traducirá en que p_0 bajará hasta el punto en que se cumpla $1+r=\frac{p_1}{p_0}$

El arbitraje y el Valor Actual

También es útil expresar la función anterior de la siguiente manera:

$$p_0=\frac{p_1}{1+r}$$

Esta fórmula nos enseña que el precio actual de un activo debe ser su valor actual. Por lo tanto, expresa la condición de arbitraje en términos del valor actual y del valor futuro. Si se satisface la condición de ausencia de arbitraje podemos estar seguros de que los activos deben venderse a sus valores actuales. Cualquier desviación con respecto a la fijación del precio basada en el valor actual es una vía segura para ganar dinero.

3.4.2 APLICACIONES ECONÓMICAS

Vivienda como activo de consumo

A continuación, analizaremos aquellos activos que tienen rendimientos en forma de consumo en comparación con los activos puramente financieros.

Los activos en forma de consumo tienen su rendimiento en el hecho de poseerlos. Por ejemplo, el propietario de una vivienda no tiene que pagar alquiler, por lo tanto, el rendimiento del propietario es el hecho de que vive en ella sin pagar alquiler.

También podría entenderse como el alquiler que le cobraría a otra persona por vivir en su casa, y que por el hecho de vivir en su propia casa pierde la oportunidad de recibir ese alquiler, e incurre en un coste de oportunidad

Para exponer esto nos basaremos en el ejemplo que propone Varian (2010 p.210). Si denominamos "T" al dinero que cobraría por el alquiler de su casa, "A" al valor de la posible apreciación o depreciación del valor monetario de la vivienda a lo largo de un año y "P" al precio inicial de la vivienda, la tasa total de rendimiento de la inversión inicial en la vivienda es

$$h = \frac{T + A}{P}$$

h: tasa total de rendimiento de la inversión h: Tasa de rendimiento total

T / P: Tasa de rendimiento asociada al consumo

A / P: Tasa de rendimiento asociada a la inversión

Sea r la tasa de rendimiento de otro activo financiero, en condiciones de equilibrio el rendimiento de la inversión debería ser igual a r tal que:

$$r = \frac{T + A}{P}$$

De esta forma obtendríamos un rendimiento rP con una inversión P o en una vivienda y ahorrar T euros de alquileres y obtener A euros a final de año, el rendimiento de ambas inversiones tiene que ser el mismo, es decir:

Si $T + A < rP$ → Ganaríamos más invirtiendo en el banco y pagando alquiler

Si $T + A > rP$ → Ganaríamos más invirtiendo en vivienda

Por lo que el rendimiento total debe aumentar al tipo de interés, pero la tasa financiera de rendimiento A / P generalmente es menor que el tipo de interés (A no ser que T / P = 0). Por lo que siempre la tasa de rendimiento correspondiente a la inversión de los activos de consumo va a ser menor que la de los activos financieros, debido en parte a que el precio del activo refleja el rendimiento de forma de consumo que genera en individuos la posesión de esos activos. De igual forma si conocemos un valor alto de rendimiento en forma de consumo sí que sería razonable invertir en el teniendo en cuenta la suma con la tasa de rendimiento correspondiente a la inversión.

Los recursos agotables

Estudiaremos el equilibrio del mercado en un recurso agotable como el petróleo, tal y como hace Varian (2010, p.214) Suponiendo de base que es un mercado competitivo con muchos oferentes y no hay costes de extracción.

En este caso, el precio del petróleo deberá subir al tipo de interés, pues el petróleo que se encuentra en el subsuelo es un activo como los demás. Si a un productor le compensa conservarlo de un periodo a otro, debe proporcionarle un rendimiento equivalente al rendimiento financiero de cualquier otra inversión. Suponemos que p_{t+1} y p_t son los precios correspondientes a los periodos t y t+1 tenemos la siguiente ecuación:

$$p_{t+1} = (1 + r)p_t,$$

Esto explica que el petróleo del subsuelo es exactamente igual que el dinero colocado en el banco, que genera un rendimiento r. ya que, si el rendimiento del petróleo fuera mayor, nadie lo extraería, sino que esperarían al siguiente periodo presionando al alza el valor actual. Por el contrario, si el rendimiento del petróleo fuera menor los propietarios de los pozos lo extraerían rápidamente y lo meterían todo al banco haciendo que el pecio actual bajase.

Esto nos ha explicado la variación del precio del petróleo, pero el determinante principal es la demanda.

Supongamos que la demanda de petróleo es “D” barriles anuales y la oferta es “S” barriles anuales, por lo tanto, nos queda petróleo para T=S/D años. Cuando este se agote pasaremos a otro combustible, que podrá producirse a un coste constante de C euros el barril.

Por lo que cuando se agote el petróleo en "T" años se venderá al precio del coste del combustible sustitutivo perfecto. Lo que significa que el precio actual del barril p_0 deberá subir al tipo de interés r en los próximos T años hasta ser igual a C. Analíticamente será:

$$p_0(1+r)^T = C \quad \rightarrow \quad p_0 = \frac{C}{(1+r)^T}$$

Esta expresión nos indica las variables que afectan al precio actual del petróleo, y nos permite estudiar las posibles variaciones que le afectan. Si por ejemplo hay un descubrimiento de petróleo y por lo tanto aumenta T (que es el número de años que quedan de este recurso agotable) también aumentará $(1+r)^T$ y acabará bajando su precio inicial p_0. Si por ejemplo se produjera una innovación tecnológica que redujera el Coste C de la producción del combustible sustitutivo, también se traduciría en una reducción del precio actual.

3.5 DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE

En el capítulo anterior hemos explicado las decisiones de inversión en activos bajo certidumbre (es decir, cuando decisiones de inversión son predecibles con certeza total) y en este haremos una pequeña introducción a los conceptos de *riesgo e incertidumbre*. Después presentaremos el modelo de utilidad esperada, las actitudes del individuo frente al riesgo y algunos criterios en contexto de incertidumbre.

3.5.1 CONCEPTO DE INCERTIDUMBRE

Nos basaremos en la definición de Vélez-Pareja (2003 p.2) *"Entendemos la* ***incertidumbre*** *como aquella situación que se presenta cuando se pueden determinar los eventos posibles y no es posible asignarles probabilidades*". Hay diferentes niveles de incertidumbre y en algunos de ellos ni siquiera es posible identificar los eventos futuros (incertidumbre dura)

El consumo contingente

Si nos situamos en el marco de la teoría convencional de la elección del consumidor, trataremos de utilizarla para comprender la elección en condiciones de incertidumbre. Probablemente al consumidor le interesa conocer la distribución de probabilidades de obtener cestas de bienes de consumo diferentes. Una **distribución de probabilidades** consiste en una lista de diferentes resultados —en este caso, cestas de consumo— y la probabilidad correspondiente a cada uno de ellos. al consumidor le interesará conocer la distribución de probabilidades de obtener cestas de bienes de consumo diferentes, lo que consiste en una lista de diferentes resultados, y la probabilidad correspondiente a cada uno de ellos.

Imaginemos que los diferentes resultados de un acontecimiento aleatorio son diferentes según los estados de la naturaleza. Por lo tanto, podemos imaginar que un plan de consumo contingente es una especificación de lo que se consumirá en cada uno de los estados de la naturaleza, es decir, en cada uno de los procesos aleatorios. **Contingente** significa que depende de algo que no es seguro, por lo que **consumo contingente** significa un plan que depende del resultado de un acontecimiento. Por ejemplo, en el caso de los días lluviosos y soleados, el consumo contingente es simplemente el plan de lo que se consumirá en las diferentes condiciones meteorológicas. En el caso de una inversión consistiría en cuanto invertir en caso de un escenario favorable o un escenario desfavorable

3.5.2 CONCEPTO DE RIESGO

Según Vélez-Pareja (2003, p.6) "*Entendemos por **riesgo** aquella situación sobre la cual tenemos información, no solo de los eventos posibles, sino de sus probabilidades.*"

Entonces entendemos que el concepto de incertidumbre implica que no se asignan distribuciones de probabilidad (como la media y la desviación estándar tal y como explicaremos más adelante); el riesgo, por el contrario, implica que si se puede asignar algún tipo de distribución probabilística.

También es importante señalar que en la práctica la situación de ignorancia total es en realidad una situación que no existe, al igual que la certidumbre total. Por ejemplo, una letra del tesoro que podría considerarse un activo cierto depende de la estabilidad económica de un Estado e incluso ésta no se puede garantizar y, en consecuencia, es posible que no ocurra un evento teóricamente seguro.

3.5.3 CRITERIOS BÁSICOS EN LA TOMA DE DECISIÓN BAJO INCERTIDUMBRE

Un **criterio es normativo** cuando a través de él se estipula una conducta a seguir, y por otra parte **un criterio es descriptivo** cuando explica o describe un comportamiento observado. Sin embargo, cuando hablamos de decisiones en situaciones de incertidumbre se presentan teorías y modelos sobre los cuales no existe acuerdo, ya que ninguno de los criterios es puramente normativo ni puramente descriptivo. En el siguiente apartado nos vamos a centrar en los criterios descriptivos.

Criterios descriptivos

De la Teoría de juegos se pueden tomar algunos esquemas y conceptos. La Teoría de juegos trata de establecer estrategias a seguir cuando un individuo que debe decidir se enfrenta a otro. En estas situaciones el que decide debe intentar conocer lo que “el otro” hará y actuar consecuentemente. Una situación de competencia puede presentar situaciones en las cuales lo que gana un decisor lo pierde el otro; en este caso se dice que es un juego de suma cero. Hay situaciones o juegos de suma no cero en los cuales todos los actores ganan; entonces se dice que es un juego gana-gana; también se pueden presentar situaciones en las que todos pierden.

Matriz de pagos o de resultados: Es un arreglo de números en el que se muestran resultados numéricos (coste, ganancia o alguna medida de utilidad) asociados a una decisión y a un evento simultáneamente. Esta matriz se puede representar, en forma general, así:

		Estado de la naturaleza o eventos				
		E1	E2	E3	…	En
Decisiones	A1	R(A1,E1)	R(A1,E2)	R(A1,E3)	…	R(A1,En)
	A2	R(A2,E1)	R(A2,E2)	R(A2,E3)	…	R(A2,En)
	A3	R(A3,E1)	R(Am,En)	R(A3,E3)	…	R(A3,En)
	.	.	.	.	…	.
	.	.	.	.	…	.
	.	.	.	.	…	.
	Am	R(Am,E1)	R(Am,E2)	R(Am,E3)	…	R(Am,En)

Donde:

Ai, i = 1, 2, 3, ..., m, son las alternativas del que decide, y que controla.

Ej, j = 1, 2, 3, …, n, son los eventos o estados de la naturaleza, que no controla el que decide.

R (Ai, Ej) es la función de resultados que define el valor de la ganancia o coste.

A esta matriz se le pueden asociar algunos criterios descriptivos. Nos basaremos en unos ampliamente conocidos, presentándolos por orden creciente de dificultad descriptiva.

(1) Dominación

En términos generales, se dice que una alternativa Ak domina estrictamente a otra Ac cuando para todo Ej se tiene que R (Ak, Ej) > R (Ac, Ej). Esto significa que la alternativa Ac puede eliminarse del análisis ya que siempre Ak será mejor, lo cual reduce el número de alternativas a considerar.

(2) Principio maximin o minimax (Pesimista)

Es un criterio por el cual un individuo pesimista considera que para cada alternativa que seleccione la naturaleza actuará en la forma más perjudicial para él. Entonces a cada alternativa asocia el peor evento; pero, como se supone que es un individuo racional, seleccionará la alternativa asociada al evento que menos lo perjudique o más le favorezca.

a) <u>Principio maximin:</u> Cuando la matriz de pagos se refiere a utilidades, para cada alternativa se escoge el valor mínimo y entre ellos se selecciona el máximo.
b) <u>Principio minimax:</u> Cuando la matriz de pagos se refiere a costes, para cada alternativa se selecciona el máximo valor y entre ellos se selecciona el mínimo.

(3) Principio mini mínimo o maxi máximo (Optimista)

La idea es similar a los principios maximin y minimax, ya que se trata de un criterio que supone un individuo totalmente optimista y considera que para cada alternativa que seleccione, la naturaleza actuará de la manera más favorable para él, y asociará a cada alternativa el evento más favorable; pero como es un individuo racional escogerá la alternativa que tenga asociada el evento más favorable o el menos desfavorable entre todos los posibles.

a) <u>Principio maximax:</u> Si la matriz de resultados es de ganancias, para cada alternativa se escoge el máximo valor y entre ellos se selecciona el máximo.

b) Principio minimin: Este se refiere a la matriz de pagos cuando sus elementos son costes. Para cada alternativa se escoge el evento que produzca el menor coste, y entre ellas se escoge la que tenga asociado el menor.

(4) Principio de Laplace

El criterio de Laplace supone que, ante la falta de información, los n eventos son equiprobables. Este criterio interpreta el comportamiento del individuo que escogería la alternativa cuya suma de todos los resultados posibles o promedio fuera el máximo o el mínimo, según sean utilidades o costes por lo que establece unas probabilidades subjetivas. Esto implica la maximización del valor esperado monetario. Este principio precisamente fue precursor del concepto de utilidad esperada, el cual explicaremos más adelante.

(5) Principio de Hurwicz

Este criterio establece un parámetro α de "pesimismo" que indicaría qué tan pesimista sería el individuo. Este factor cumple con la siguiente condición: $0 \leq \alpha \leq 1$, por lo que suponiendo que se pudiera determinar, indicaría una probabilidad subjetiva de ocurrencia del peor evento $(1 - \alpha)$ y la probabilidad subjetiva de ocurrencia del mejor evento. Ese factor $(1 - \alpha)$ podría interpretarse también como el comportamiento frente al riesgo que presenta el individuo.

Con estos supuestos, el criterio interpreta la selección realizada por el individuo, de acuerdo con la siguiente expresión para cada alternativa:

$H = \alpha$ (peor evento) + $(1 - \alpha)$ (mejor evento)

(6) Principio de pena mini máxima (Savage)

Este criterio propone definir una matriz de perturbaciones, la cual representa lo que el individuo deja de ganar por no elegir la alternativa óptima. Una vez definida la matriz nos colocaremos en la columna con mayores pérdidas ya que estas vendrán dadas por el estado de la naturaleza, el cual no podemos controlar. Una vez en esta columna elegiremos la mínima pérdida al ser individuos racionales. Este proceso es igual que el criterio minimax solo que en la matriz de perturbaciones. Los elementos de la matriz se formarán mediante:

Sj = mejor resultado posible en la columna de ese elemento – elemento_j

En el caso de utilidades, S expresa lo que el individuo deja de ganar al seleccionar la alternativa óptima, cuando ocurre un determinado evento.

3.5.4 EL MODELO DE UTILIDAD ESPERADA

Funciones de utilidad y probabilidades

Este modelo es el utilizado por excelencia en contexto de riesgo o probabilidades objetivas. Utilizaremos la función de utilidad para describir las preferencias en cuanto al consumo. Pero el hecho de que estemos analizando la elección en condiciones de incertidumbre imparte una estructura especial al problema de elección. Tal y como afirma Varian (2010) "La forma de un individuo de valorar el consumo en un estado en comparación a otro dependerá de la probabilidad de que ocurra ese estado en cuestión" (pp.228)

Podemos expresar *la función de utilidad de modo que dependa tanto de las probabilidades como de los niveles de consumo.* Supondremos que estamos analizando dos estados excluyentes tal que 1 y 2, y tenemos unos consumos en los estados que son c_1 y c_2 y unas probabilidades de que ocurran esos estados de π_1 y π_2. Los dos estados son mutuamente excluyentes de forma que:

$$\pi_2 = 1 - \pi_1$$

Con esta notación podemos expresar la función de utilidad del consumo correspondiente a los estados 1 y 2 como u (c_1, c_2, π_1, π_2).

La utilidad esperada

Nos basaremos en la forma de expresar la utilidad de Varian (2010, p.229-231), ya que es una forma especialmente útil de expresar la función de utilidad:

$$u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2)$$

Esta ecuación nos dice que la utilidad puede expresarse como una suma ponderada de una función de consumo en cada estado $v(c_1)$ y $v(c_2)$ donde las ponderaciones vienen dadas por las probabilidades π_1 y π_2. Ambas probabilidades son objetivas.

Si uno de los estados es seguro de tal manera que $\pi_1 = 1$ por ejemplo $v(c_1)$ es la utilidad del consumo seguro en el estado 1. Del mismo modo que si $\pi_2 = 1$ entonces $v(c_2)$ es la utilidad del consumo en el estado 2, de tal manera que la expresión $\pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2)$ representa la utilidad media o utilidad esperada de la combinación de consumos (c_1, c_2), denominada a veces también función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern.

La utilidad de una función de utilidad esperada (valga la redundancia) se basa en que tiene una representación de función aditiva. Además, la función de utilidad esperada es única sobre transformaciones afines positivas, es decir, puede someterse a los mismos tipos de transformación monótona y seguir teniendo la propiedad de la utilidad esperada. Decimos que una función v(u) es una transformación afín positiva si puede expresarse de la forma siguiente: $v(u) = au + b$, donde $a > 0$ Si sometemos una función de utilidad esperada a una transformación afín positiva, no sólo representa las mismas preferencias, sino que también tiene la propiedad de la utilidad esperada.

Por qué es razonable la utilidad esperada

El hecho de que los resultados de una elección aleatoria sean bienes que se consumen en circunstancias diferentes significa que a la larga solo va a producirse uno de esos resultados, es decir, lloverá o hará sol o ganaremos con la inversión o perderemos. La forma en que hemos planteado el problema de elección significa que solo se producirá uno de los resultados posibles, y, por tanto, solo se realizará uno de los planes de consumo contingente.

Supongamos por ejemplo que estamos considerando la posibilidad de invertir en un activo financiero, al tomar la decisión tendremos en cuenta nuestra riqueza en tres situaciones distintas:

-Si compramos el activo financiero (c_0).

-Si compramos el activo financiero y sube su precio (c_1).

-Si compramos el activo financiero y baja su precio (c_2).

Denotaremos π_1 como la probabilidad de que el activo financiero suba de precio y π_2 como la probabilidad de que baje. Nuestras preferencias en cuanto a estos tres consumos distintos pueden representarse generalmente por medio de la función de utilidad $u(c_0, c_1, c_2, \pi_1, \pi_2)$.

Supongamos que estamos considerando la cantidad de riqueza que estaríamos dispuestos a ceder hoy a cambio de uno de los resultados posibles. Por ejemplo; cuánto dinero estaríamos dispuestos a sacrificar para que el precio del activo financiero subiera. En ese caso, esta decisión debería ser independiente de la cantidad que pudiéramos consumir en el otro estado de la naturaleza, es decir, en el caso de que el activo financiero bajase de precio.

Por lo tanto, y basándonos en Varian (2010, p.231) en condiciones de incertidumbre, hay una "independencia" natural entre los diferentes resultados porque deben consumirse por separado, es decir, en diferentes estados de la naturaleza. Las elecciones que planean hacer los individuos en un estado deben ser independientes de las elecciones que planean hacer en otros. Este supuesto se denomina supuesto de independencia e implica que la función de utilidad del consumo contingente adopta una estructura muy especial: tiene que ser aditiva de las diferentes cestas de consumo contingente.

En otras palabras, si c_0, c_1, c_2 son los consumos correspondientes a diferentes estados de naturaleza π_0, π_1, π_2 son las probabilidades de que se materialicen estos tres estados distintos. El supuesto de independencia citado antes significa que sobre los consumos fijamos las probabilidades (función de utilidad) debe adoptar la forma siguiente:

$$U(c_0, c_1, c_2) = \pi_0 u(c_0) + \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2)$$

Esta función "u" recibe normalmente el nombre de la función de utilidad de Bernoulli. Lo que ya hemos denominado anteriormente como función de utilidad esperada y que podemos observar que satisface la propiedad de que la relación marginal de sustitución entre dos bienes es independiente de la cantidad que haya un tercero. La RMS entre dos bienes adopta la forma siguiente:

$$RMS_{12} = \frac{\Delta U(c_0,c_1,c_2)/\Delta c_1}{\Delta U(c_0,c_1,c_2)/\Delta c_2} = \frac{\pi_1 \Delta u(c_1)/c_1}{\pi_2 \Delta u(c_2)/c_2}$$

Esta RMS depende únicamente de la cantidad que tengamos de los bienes 1 y 2 y no de la que tengamos del 3, ya que este modelo supone conocidas las probabilidades de realización de cada estudio de las elecciones en este contexto de la naturaleza.

3.5.5 ACTITUDES FRENTE AL RIESGO

Para vislumbrar las propiedades de la función de utilidad esperada en el análisis de la elección en condiciones de incertidumbre probabilística mostraremos un ejemplo basado en Varian (2010, p.232):

Supongamos que tenemos un consumidor con 10 euros de riqueza, y que está considerando participar en un juego que tiene el 50 por ciento de probabilidades de ganar 5 euros y el 50 por ciento de probabilidades de perderlos. Por lo que de acuerdo con el modelo de utilidad esperada:

$$\frac{1}{2}u(15)+\frac{1}{2}u(5)$$

La utilidad del valor esperado de la riqueza es la media de ambos $u(10)$ y podemos observar que:

$$u\left(\frac{1}{2}15+\frac{1}{2}5\right)=u(10)>\frac{1}{2}u(15)+\frac{1}{2}u(5) \text{ (Depende de “u”)}$$

En este caso decimos que el consumidor es contrario a correr riesgos (averso al riesgo), ya que prefiere tener el valor esperado de su riqueza a realizar el juego y posee una función de utilidad cóncava. Y en caso contrario, si prefiriera una distribución aleatoria de la riqueza a su valor esperado diríamos que es un amante del riesgo y posee una función de utilidad convexa. Para explicarlo de forma más sencilla también podríamos definir los diferentes perfiles de riesgo en base como:

<u>Averso al riesgo</u>: Si tiene que elegir entre 2 alternativas de inversión, elegirá siempre aquella de menor riesgo.

<u>Propenso al riesgo</u>: Si tiene que elegir entre 2 alternativas de inversión, elegirá siempre aquella de mayor riesgo, siempre y cuando esa alternativa le proporcione una mayor rentabilidad

<u>Neutral al riesgo:</u> Si tiene que elegir entre dos alternativas de inversión su utilidad esperada es similar a la de realizar la inversión, por lo que se mantendrá indiferente ante ambas

3.5.6 EJEMPLO DE LAS VENTAJAS DE LA DIVERSIFICACIÓN

Para entender las ventajas de la Diversificación nos basaremos en el ejemplo expuesto por Varian (2010):

> “Pasemos ahora a un tema diferente relacionado con la incertidumbre: las ventajas de la diversificación. Supongamos que estamos considerando la posibilidad de invertir 10 euros en dos empresas diferentes; una fábrica gafas de sol y otra de impermeables. Según las predicciones a largo plazo de los meteorólogos, el próximo verano tiene las mismas probabilidades de ser lluvioso que de ser soleado. (…) Diversificando, podríamos obtener un rendimiento en ambas inversiones más seguro y, por lo tanto, más atractivo si somos contrarios a correr riesgos.
>
> Supongamos, por ejemplo, que tanto las acciones de la empresa de impermeables como las de la empresa de gafas de sol cuestan actualmente 10 euros. Si el verano es lluvioso, las acciones de la empresa de impermeables valdrán 20 euros y las de la empresa de gafas de sol 5. En cambio, si el verano es soleado, las acciones de la empresa de gafas de sol valdrán 20 euros y las de la empresa de impermeables 5. Si invertimos los 10 euros en la empresa de gafas de sol, hacemos una apuesta en la que tenemos un 50 por ciento de probabilidades de ganar 20 euros y un 50 por ciento de probabilidades de ganar 5. Lo mismo ocurre si invertimos todo el dinero en la empresa de impermeables: en ambos casos, el rendimiento esperado es de 12,5 euros. Pero veamos que ocurre si invertimos la mitad del dinero en cada una de las empresas. En ese caso, si el verano es soleado, obtendremos 10 euros en la inversión en gafas de sol y 2,50 en la inversión en impermeables. Pero si es lluvioso, obtendremos 10 euros en la inversión en impermeables y 2,50 en la inversión en gafas de sol. En ambos casos, tenemos la seguridad de que acabaremos obteniendo 12,50 euros.
>
> Diversificando la inversión en las dos empresas, conseguiremos reducir su riesgo global, sin alterar el rendimiento esperado. La diversificación es muy sencilla en este ejemplo porque existe una correlación negativa perfecta entre los dos activos: cuando sube uno, baja el otro. Estas parejas de activos son extraordinariamente valiosas porque pueden reducir el riesgo espectacularmente.
>
> Sin embargo, por desgracia, también son difíciles de encontrar.” (p.236)

Los efectos de la diversificación en la práctica lo veremos en el Capítulo práctico del presente trabajo a través del modelo de Markowitz.

El papel en la bolsa de valores

La bolsa de valores desempeña un papel en el sentido que permite difundir el riesgo. La bolsa permite convertir una posición arriesgada, en la que toda la riqueza está ligada a una única empresa en una situación en la que inviertan la misma cantidad en activos muy diversos. Los propietarios iniciales de las empresas tienen un incentivo para emitir acciones en su sociedad con el fin de difundir el riesgo de esa única empresa a un gran número de accionistas. Todo esto viene explicado por Varian (2010, p.238)

Del mismo modo, los accionistas de una sociedad anónima pueden recurrir a la bolsa para redistribuir sus riesgos. Si una persona es accionista de una empresa que ha adoptado una política demasiado arriesgada o demasiado conservadora para su gusto, puede vender esas acciones y comprar otras.

En el caso de la bolsa hay un riesgo global. Un año pueden obtenerse buenos resultados y otros años malos, y alguien tiene que correr con ese tipo de riesgo. La bolsa permite transferir inversiones arriesgadas de las personas que no quieren correr riesgos a las que están dispuestas a correrlos.

3.6 APLICACIÓN AL CONTEXTO FINANCIERO: MODELO DE LA MEDIA Y LA VARIANZA

3.6.1 FUNDAMENTACIÓN

Para analizar el riesgo comenzaremos con el modelo de la media y la varianza expuesto por Varian (2010, p.243-248) suponiendo que sus preferencias se pueden describir utilizando métodos estadísticos que resumen la distribución de probabilidades de su riqueza.

Supongamos que una variable aleatoria *w* adopta valores *es* cuando s=1, …S con la probabilidad πs: la media de la distribución de probabilidades es el sumatorio de πs por ws de 1 hasta S, es decir:

$$\mu_w = \sum_{s=1}^{S} \pi_s w_s$$

Lo que nos indica la media ponderada de los valores correspondientes a cada resultado ws, utilizando como pesos las probabilidades de que ocurran. $\sum \ (w_s - \mu_w)$

La varianza de la distribución será el sumatorio de la probabilidad de los valores por la resta entre la variable aleatoria y su media, es decir:

$$\boldsymbol{\sigma_w^2} = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \, (w_s - \mu_w)^2$$

Donde:

$\boldsymbol{\sigma_w}$**:** Desviación típica

π_s: Probabilidad de que ocurran los resultados

w_s: Variable aleatoria

μ_w: Media ponderada de los valores correspondientes a cada resultado aleatorio

La varianza nos indica la dispersión de la distribución y es una medida razonable del grado de riesgo implícito. También la desviación típica que es representada por σ_w es un indicador estrechamente relacionado.

La media de una distribución de probabilidades mide el valor en torno al cual se centra la distribución.

Este modelo nos da la distribución de probabilidades de un inversor con riqueza ws y una probabilidad de π_s por lo que su media y varianza pueden expresarse tal que $u(\mu_w, \boldsymbol{\sigma_w^2})$ por lo que la utilidad dependerá de ambas, y un consumidor racional será capaz de ordenar distintas alternativas en base a su utilidad.

Continuaremos el análisis afirmando que un rendimiento esperado mayor es bueno, y además que una varianza mayor es mala, ya que como la varianza representa el riesgo los individuos racionales serán contrarios a él.

Para analizar el modelo supondremos dos activos, el primero un activo fijo libre de riesgo y con una rentabilidad fija rf (como bien podría ser un bono emitido por el estado), y el segundo un activo incierto de renta variable (una acción del IBEX35por ejemplo) el cual tiene las siguientes características: ms rendimiento del activo si ocurre el estado s: πs la probabilidad de que ocurra rm que es el rendimiento esperado y **σm su riesgo.**

También supondremos que podemos dividir nuestra cartera de acciones en ambos activos y también que sus tasas de rendimiento tienen que ser iguales.

La distribución de nuestra cartera con sus respectivos rendimientos con x proporción de cartera destinada a activos inciertos y (1—x) dedicada a activos fijos sería:

$$r_x = xr_m + (1 - x)r_f$$

Donde:

r_x: Rentabilidad activo renta variable

x: Proporción de la cartera destinada al activo de renta variable

$(1 - x)$: Proporción de la cartera destinada al activo de renta fija

r_f: Rentabilidad del activo de renta fija

Podríamos calcular la varianza del rendimiento de nuestra cartera:

$$\boldsymbol{\sigma_x^2} = +\sum_{s=1}^{S}(xm_s + (1 - x)r_f - r_x)^2\pi_s$$

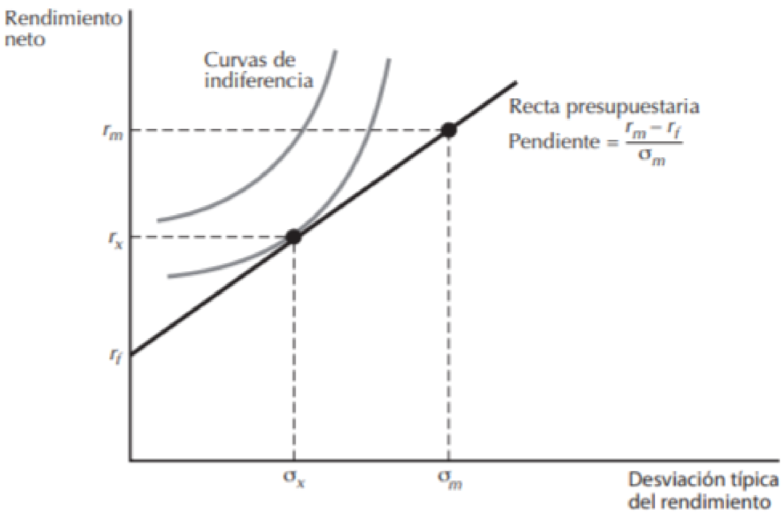
Y sustituyendo por r_x:

$$\boldsymbol{\sigma_x^2 = x^2\sigma_m^2}$$

Así pues, la desviación típica del rendimiento de la cartera es

$$\boldsymbol{\sigma_x = x\sigma_m}$$

De esta manera concluimos que dedicar una mayor parte de nuestra cartera a activos inciertos correríamos también un mayor riesgo, que en lenguaje matemático se traduce en un aumento de la varianza del rendimiento.



El riesgo y el rendimiento Varian (2010): Gráficamente observaríamos que un rendimiento esperado mayor mejoraría nuestro bienestar y una desviación típica mayor lo empeoraría, por lo que las curvas de inferencia serán positivas.

3.6.2 CONCEPTO PRECIO DEL RIESGO

En la elección optima la pendiente de la curva de inferencia se igualará a la pendiente de la recta presupuestaría, la cual denominaremos **precio del riesgo** Varian (2010, p.247) resulta:

$$\left(P = \frac{rm-rf}{\sigma m} \right)$$

Que igualándola a la pendiente de la curva de inferencia:

$$(\Delta U / \Delta \sigma) / (\Delta U / \Delta \mu) = \left(P = \frac{rm-rf}{\sigma m} \right)$$

Si supusiéramos que muchas personas eligen entre estos dos activos, cada una tuviera una RMS diferente, pero en el equilibrio todas tendrían que ser iguales ya que intercambiarían riesgos y al final el precio riesgo de todas sería el mismo.

3.6.3 CONCEPTO CANTIDAD DE RIESGO

En el apartado anterior hemos deducido que, para averiguar el riesgo respecto de un activo, tenemos que aplicar la desviación típica de su rendimiento, sin embargo, si hay muchos activos inciertos la desviación típica no es una medida adecuada para medir la cantidad de riesgo, ya que la utilidad del consumidor depende de la media y de la varianza de la riqueza total, y no de la media y la varianza de cada uno de los activos.

Para ello lo importante es saber la relación entre los rendimientos de los activos, y lo mediremos a través de la influencia marginal que representa en la utilidad total. Varian (2010, p.250)

Pasando a un lenguaje analítico mediremos el riesgo de un activo en relación al riesgo de la bolsa total tenemos la siguiente expresión:

$$\beta\ i = \frac{grado\ de\ riesgo\ del\ activo\ i}{grado\ de\ riesgo\ de\ la\ bolsa}$$

Si una acción tiene una beta 1, tiene el mismo riesgo que el mercado en su conjunto, por lo que cuando este suba un 1% la acción se comportará del mismo modo.

La beta (β_i) de una acción puede estimarse mediante métodos estadísticos para averiguar qué sensibilidad tienen las fluctuaciones de una variable respecto con otra, y existen muchas asesorías financieras que se dedican a estimar las betas de las acciones. La beta también la podremos definir estadísticamente como:

$\beta\ i = \frac{cov\ (r\ ), r_m}{var\ (r_m)}$: Covarianza entre el rendimiento de la acción y el rendimiento del mercado dividida por la varianza del mercado

Para explicarlo mejor nos basaremos en el ejemplo de Varian (2010, p.250) Vamos a representar un ejemplo, en el que el activo A puede valer o 1000 u.m o 500 u.m y el activo B 500 u. m o 1000 u.m, por lo que los activos son bienes sustitutivos (correlacionados negativamente)

Si ambos resultados son igualmente probables, el valor medio del activo sería de 250 u.m, lo que sería la cantidad máxima que estaremos dispuestos a pagar por cualquiera de los dos activos (Valor Esperado)

Sin embargo, si pudiésemos invertir en ambos activos el Valor esperado aumentaría a 500 u.m que sería lo que obtuviésemos si o si de la operación, ya que siempre que uno valga 500 u. m el otro valdrá 1.000 u.m

Observando este ejemplo podemos ver que el valor de un activo depende de cómo este correlacionado con otros y como los activos que están correlacionados negativamente son muy valiosos, ya que **reducen el riesgo.** Esto viene relacionado tal y como explicamos en el capítulo 3.5.6, con la diversificación de cartera, ya que nosotros como inversores tendremos que buscar aquellos activos que tengan una correlación negativa.

3.6.4 EQUILIBRIO EN EL MERCADO DE ACTIVOS INCIERTOS: MODELO DE CAMP

Para explicar el Modelo de Fijación de activos inciertos CAMP nos basaremos en Varian, H. (2010, p.251.254) y en Vélez-Pareja (2003, p.16-18).

Para empezar a analizar el mercado de activos nos basaremos en un principio por el cual todos los activos tienen necesariamente la misma tasa de rendimiento, una vez ajustada para tener en cuenta el riesgo.

Pondremos de ejemplo una cartera de activos inciertos en la cual el rendimiento es $\mathbf{r_m}$ y la desviación típica es el riesgo del mercado $\boldsymbol{\sigma_m}$.

Si volvemos a la ecuación del precio del riesgo $(P = \frac{rm-rf}{\sigma m})$ y recordamos que la cantidad de riesgo de un activo dado i en relación con el riesgo total del mercado es $\beta\ i$, lo que significa que para medir la cantidad total de riesgo del activo i, tenemos que multiplicar esa cantidad por el riesgo del mercado σ_m, por lo que el riesgo del activo es $\beta\ i\sigma_m$., y podremos obtener el coste del riesgo multiplicando este valor por el precio riesgo, resultando:

$$\textit{Ajuste de riesgo} = \beta i\sigma_m \frac{rm-rf}{\sigma m} \rightarrow \textit{Ajuste de riesgo} = \beta\ i\ (r_m - r_f)$$

Recordemos el significado de cada variable:

βi: Cantidad de riesgo de un activo dado i en relación con el riesgo total del mercado

σ_m: Desviación típica es el riesgo del mercado

r_m: Rentabilidad activo renta variable

r_f: Rentabilidad activo renta fija

Por lo que podemos afirmar que en el equilibrio todos los activos deben tener la misma tasa de rendimiento ajustada para tener en cuenta el riesgo, ya que si alguno tuviera una tasa de rendimiento mayor dado el riesgo todo el mundo lo compraría y haría que no se cumpliera la condición.

Analíticamente podemos expresar la anterior condición de equilibrio como:

$$r_i - \beta_i(r_m - r_f) = r_j - \beta_j(r_m - r_f)$$

Donde:

r_i: Rendimiento esperado de un activo *i*.

r_j: Rendimiento esperado de un activo *j*.

β_i: Cantidad de riesgo de un activo dado i en relación con el riesgo total del mercado.

β_j: Cantidad de riesgo de un activo dado j en relación con el riesgo total del mercado.

Por definición el riesgo de un activo libre de riesgo tiene que ser cero, por lo que $\beta_f = 0$ y si sustituimos en la ecuación anterior nos quedará la condición de equilibrio tal que:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f)$$

Por lo que "el rendimiento esperado de un activo cualquiera debe ser el rendimiento libre de riesgo más el ajuste para tener en cuenta el riesgo. Este último término refleja

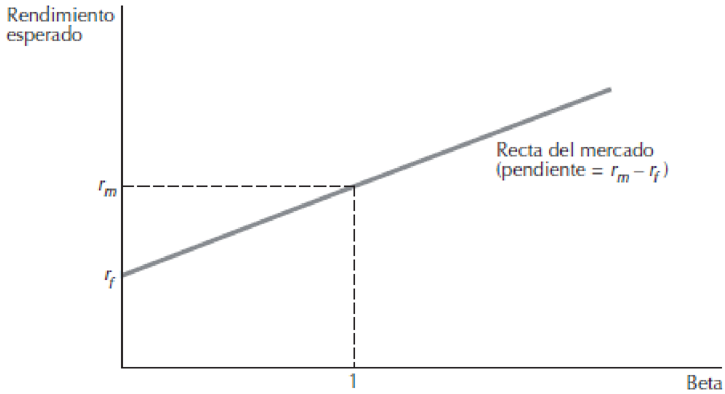
el rendimiento adicional que exigen los individuos para aceptar el riesgo del activo.

"Esta ecuación es el principal resultado del **modelo de la fijación del precio de los activos de capital (MPAC),** que se utiliza frecuentemente en el estudio de los mercados financieros". (Varian 2010, p.252)

Como se ajustan los rendimientos

Cuando estudiamos los mercados de activos en ausencia de incertidumbre, mostramos como se ajustaban los precios para igualar los rendimientos, analizaremos el mismo proceso de ajuste.

Según el modelo que acabamos de describir el rendimiento esperado de un activo debe ser el rendimiento libre de riesgo más la prima por el riesgo:



La recta de mercado Varian(2010): La recta de mercado representa las combinaciones de rendimiento esperado y beta de los activos en condiciones de equilibrio.

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f)$$

En el gráfico anterior se presenta una recta en un gráfico el eje de abscisas muestra los diferentes valores de beta, y el de ordenadas los diferentes rendimientos esperados. Según nuestro modelo, todos los activos que se encuentran en equilibrio tienen que hallarse a lo largo de esta recta llamada recta de mercado.

Recodemos que el rendimiento esperado de un activo es la variación esperada de su precio dividida por su precio actual:

$$r_i = valor\ esperado\ de\ \frac{p_1 - p_0}{p_0}$$

Incluimos el término "esperado" porque el precio futuro del activo es incierto Supongamos que nos encontramos con un activo cuyo rendimiento esperado, ajustado para tener en cuenta el riesgo, es superior a la tasa libre de riesgo:

$$\boldsymbol{r_f < r_i - \beta_i(r_m - r_f)}$$

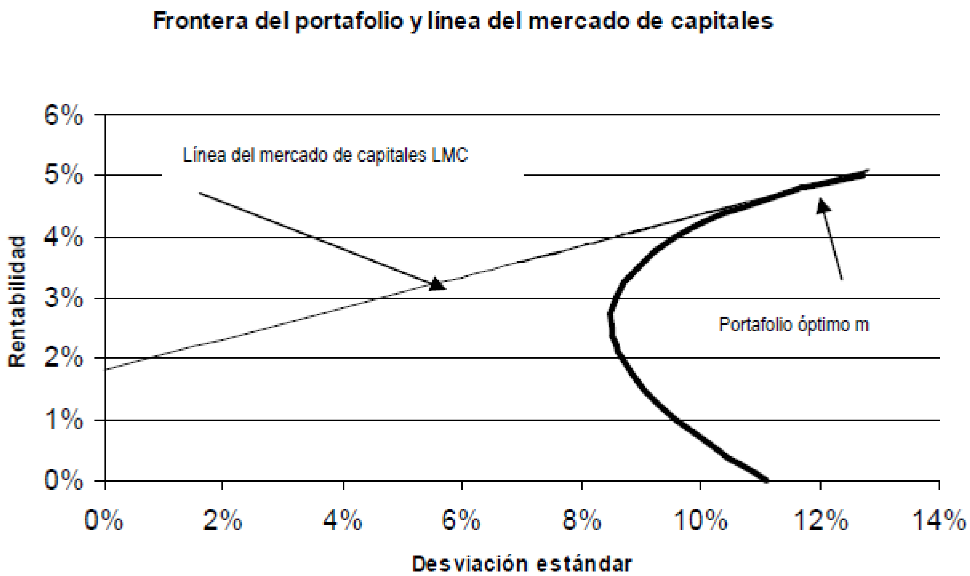
En este caso este activo es una muy buena inversión, ya que tiene un rendimiento ajustado para tener en cuenta el riesgo mayor que la tasa libre de riesgo.

Cuando los individuos descubran este activo, querrán comprarlo para ellos mismos o para vendérselo a otros, pues dado que ofrece una relación mejor entre el riesgo y el rendimiento que los demás habrá mercado para él. Pero los inversores presionarán al alza el precio actual, es decir subirán p0 lo que significa que disminuirá el rendimiento esperado, y este lo hará lo suficiente para reducir la tasa de rendimiento esperada y llevarla de nuevo a la recta de mercado.

Como conclusión podemos afirmar que es una buena inversión comprar un activo que se encuentre por encima de la recta de mercado, pues cuando los inversores descubran su mayor rendimiento presionarán al alza su precio. Sin embargo, este razonamiento lo hacemos con la hipótesis de que los agentes estén de acuerdo en cuanto a la cantidad de riesgo de los distintos activos. Si hay discrepancias sobre los rendimientos esperados o las betas, el modelo es mucho más complicado.

Cálculo de la cartera óptima

Si quisiéramos por lo tanto calcular la cartera óptima para un inversor bajo este modelo nos resultaría óptimo del inversor. Suponiendo que el inversor puede hacer combinaciones de activos libres de riesgo y activos con riesgo, gráficamente seguiría un comportamiento tal que:



Frontera del portafolio y línea del mercado de capitales Vélez-Pareja (2003): Nos relaciona la línea de mercado de capitales con el portafolio óptimo. A partir del punto señalado el inversor tendrá que pedir prestado

Recordemos la expresión de la Recta del mercado de capitales

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f)$$

Donde:

βi: Cantidad de riesgo de un activo dado i en relación con el riesgo total del mercado

r_m: Rentabilidad activo renta variable

r_f: Rentabilidad activo renta fija

r_i: Rendimiento esperado de un activo *i*

También la desviación estándar de la cartera la definíamos tal que:

$$\boldsymbol{\sigma_x = x\sigma_m}$$

Donde:

x: Proporción de la cartera destinada al activo de renta variable

$\boldsymbol{\sigma_m}$: Desviación estándar del activo de renta variable

$\boldsymbol{\sigma_x}$ **:** Desviación total de nuestra cartera

La cartera óptima la encontraremos maximizando la pendiente de la recta que une el punto de la rentabilidad libre de riesgo y la frontera eficiente (La frontera eficiente la definiremos más detalladamente en el Modelo de Markowitz). En este punto la Recta del mercado de capitales y la frontera eficiente son tangentes.

La cartera óptima por lo tanto bajo el modelo de CAMP será aquella que pertenece a la frontera eficiente, que combina una inversión sin riesgo (activo renta fija) y un nivel de riesgo deseado (riesgo de la renta variable) maximiza la rentabilidad.

Por lo tanto, la cartera óptima debe estar en la frontera eficiente, y como hemos dicho en el punto de tangencia con la recta del mercado de capitales. Pero según la teoría (Teorema de separación Tobin (1958)) no será necesario generar curvas de inferencia ni siquiera la frontera eficiente, porque un inversor siempre estará invirtiendo parte de su dinero en una cartera óptima.

Analíticamente se trata de maximizar la siguiente función

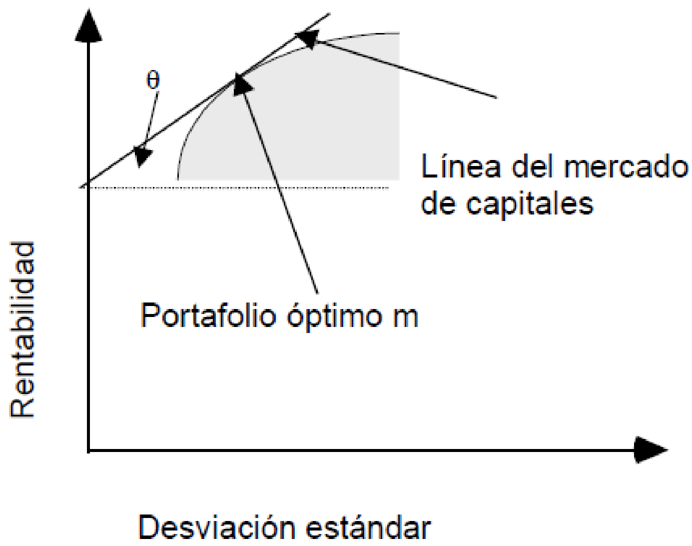
$$Maxtn\theta = \frac{R_m - r}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \propto_k \propto_j \ \sigma_{jk}}}$$

$$s.a \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \propto_i = 1 \quad (2)$$

- La ecuación (1) representa la maximización del problema, es decir encontrar la máxima rentabilidad
- La ecuación (2) se le denomina restricción presupuestaria nos indica que las proporciones de cada una de las inversiones incluidas en la cartera tiene que sumar 1

Por lo tanto, la solución gráficamente:



Línea del Mercado de Capitales, frontera eficiente y portafolio óptimo. Vélez-Pareja (2003): Tal y como se muestra en el gráfico la pendiente de la recta que pasa por m y por r es la máxima posible

El valor riesgo

A veces es interesante averiguar el riesgo de una serie de activos. Supongamos, por ejemplo, que un banco posee una cartera de acciones. Puede interesarle estimar la probabilidad de que esa cartera pierda más de un millón de euros en un determinado día. Si esa probabilidad es del 5 por ciento, decimos que la cartera tiene un “valor en riesgo” (VAR) de 1 millón de euros en un día con una probabilidad del 5 por ciento. La dificultad del VAR es encontrar un buen método para estimarlo.

Teóricamente el VAR es un buen medidor de riesgo, pero algunos analistas avisan de que "la mayor ventaja del VAR se halla en la exigencia de fijar una metodología para hacer un análisis crítico del riesgo. Las instituciones que pasan por el proceso de calcular su VAR se ven obligadas a afrontar su exposición a los riesgos financieros y a establecer una gestión adecuada del riesgo. Por tanto, el proceso de hallar el VAR puede ser tan importante como el propio número".

3.7 MODELO DE SELECCIÓN DE CARTERA: MODELO DE MARKOWITZ

Este modelo está basado en la idea de que la diversificación reduce el riesgo, por lo que, si nosotros tenemos una cartera de valores bien escogidos e invertimos en ellos, tendremos mucho menos riesgo que si invertimos todo nuestro dinero en un solo activo.

3.7.1 RIESGO SISTEMÁTICO Y NO SISTEMÁTICO

Como es lógico, cuando nos encontramos con activos inciertos, no se puede eliminar el riesgo por completo, ya que siempre existe un **riesgo sistemático**. El riesgo sistemático o riesgo de mercado es aquel que esta relacionados con cambios afectan a todos los títulos (fluctuaciones económicas, algunos cambios en la política monetaria), por lo que si diversificamos no conseguiríamos eliminarlo. Por otro lado, existe el riesgo no sistemático, que es en el que se centra Markowitz en su modelo. Este riesgo es el propio de cada título, por ejemplo, las fluctuaciones que tienen que ver con la política de la empresa en la que tenemos acciones, o el comportamiento de un sector en el que tenemos comprado un índice en base a él. Esto lo explica Vélez-Pareja (2003) en su artículo:

> Se pueden distinguir dos clases de riesgo asociados a una acción: el riesgo sistemático y el riesgo no sistemático. El primero se debe a lo que se conoce como el riesgo del mercado y está asociado a los cambios en la economía por factores internos o externos, cambios en las políticas de los países asociados, guerras, etc.; esto significa que es un riesgo que no puede compensarse adquiriendo una cierta diversidad de acciones. Esto es, es un riesgo no diversificable. El segundo, el riesgo no sistemático, se debe a factores propios o internos de la firma; es único de esa compañía y es independiente de los factores económicos, políticos o sociales. A este tipo de riesgo se asocian factores tales como huelgas, competencia, cambios tecnológicos, etc. Al ser intrínsecos de una acción, es

> posible compensar sus efectos comprando acciones de diversas firmas, de manera tal que, si una firma se ve afectada por unas causas negativas, se espera que a las otras no les suceda lo mismo y pueda compensarse el efecto negativo. Esto es un riesgo diversificable. La diversificación de un portafolio permite entonces, reducir el riesgo no sistemático." (p.2)

Si aplicamos esto, podemos obtener la siguiente fórmula.

$$\begin{aligned}&Riesgo\ total\ de\ una\ acción\\ &=\ riesgo\ sistemático\ (de\ mercado, no\ diversificable)\\ &+\ riesgo\ no\ sistemático\ (no\ relacionado\ con\ el\ mercado, diversificable)\end{aligned}$$

A medida que se aumenta el número de acciones en una cartera-portafolio el riesgo no sistemático se reduce de manera asintótica.

3.7.2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El primero en realizar una aportación a la solución del problema de selección de cartera fue Harry Markowitz (1952) y más tarde otros como Fama y Miller, Tobin, …

Markowitz propuso la regla del "valor esperado-varianza" por la cual un inversor preferirá invertir en el proyecto A a invertir en el proyecto B si se cumple algunas de las siguientes afirmaciones:

- La rentabilidad esperada de A es mayor o igual a la de B y la varianza de A es menor que la de B
- La rentabilidad esperada de A es mayor que la de B y la varianza de A es menor o igual a la de B

Vélez-Pareja (2003) afirma:

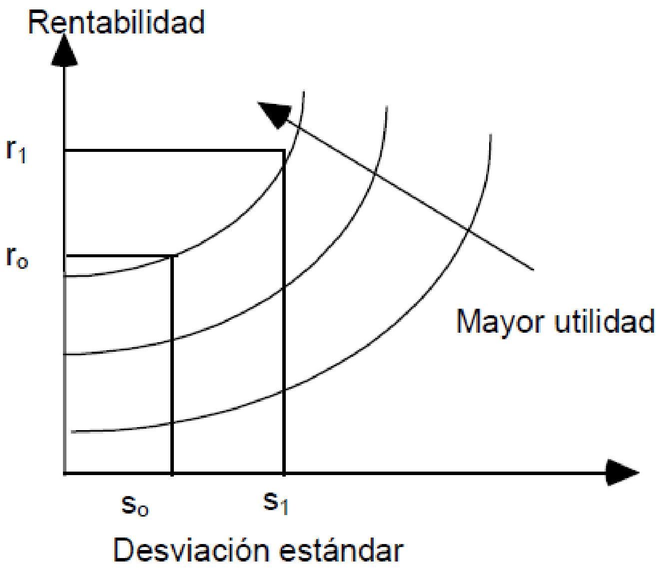
> Markowitz cogió estas ideas y las aplicó al problema de cómo dividir el dinero dentro de una cartera de acciones de manera que disminuyera su varianza (riesgo) y hacerlo que la suma de la proporción de cada acción fuera igual al total de la inversión. Además, el promedio ponderado de las rentabilidades de todas las acciones consideradas debía ser igual a una cifra preestablecida. Todo esto nos daría un conjunto de oportunidades infinitas, que son representadas en el siguiente gráfico" (p.7)

Conjunto de oportunidades Vélez-Pareja (2003): La línea de puntos representa la frontera eficiente, mientras que el área sombreada representa aquellas carteras no eficientes

Por lo tanto, un inversor racional no escogerá ninguna de las combinaciones que se sitúen por debajo de r_1, a no ser que sea a costa de reducir su varianza. Tampoco un inversor que se encuentre en r_0 escogerá una combinación que se encuentre a la derecha de s_0 ya que podría mejorar su situación.

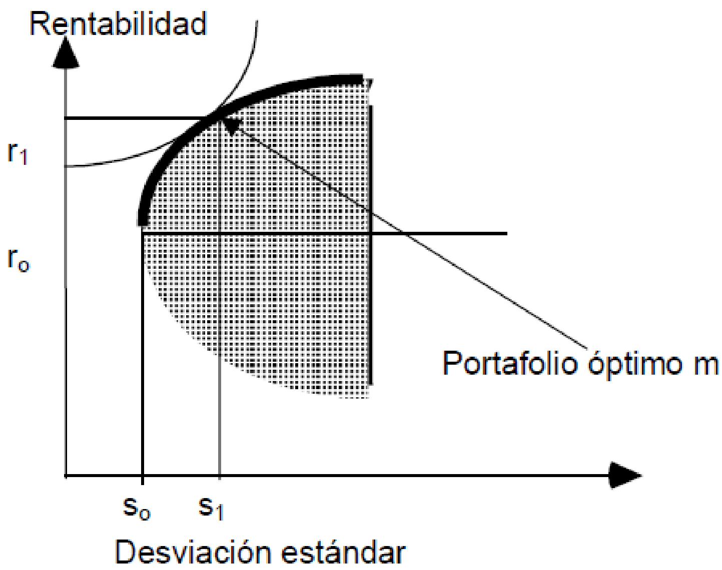
Por lo tanto, la combinación entre rentabilidades y varianzas óptimas, es decir aquellas que no pueden presentar una mayor rentabilidad dado un nivel de riesgo, ni ningún riesgo menor dada una rentabilidad viene representada por Vélez-Pareja en la gráfica por una línea de puntos denominada **frontera eficiente.**

Ahora hay que determinar que punto de la frontera eficiente es el que escogerá el inversor, y para ello lo vislumbraremos a través del siguiente gráfico que relaciona el riesgo con la rentabilidad:



Curvas de utilidad Vélez-Pareja (2003)*:* Representa las curvas de utilidad del inversor, cuanto más arriba y más a la izquierda se encuentre, mayor utilidad recibirá.

Las curvas son la representación de la función de utilidad esperada del inversor, por lo tanto, si relacionamos este concepto con la frontera eficiente obtendremos un punto de tangencia entre ambas en el que se encontrará la cartera óptima (Vélez-Pareja 2003) (p.8)



Portafolio óptimo Vélez-Pareja (2003)*:* Representa el punto de tangencia entre la frontera eficiente y las curvas de utilidad, en el que se encontrará la cartera óptima

La cartera óptima (Portafolio óptimo) será para el inversor aquel con el que no mejoraría su utilidad ni aumentando su rentabilidad dado un riesgo, ni disminuyendo su riesgo dada su utilidad.

Si pasamos al enfoque analítico el problema original fue planteado por Markowitz y viene dado por la siguiente ecuación:

$$Min \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \propto_k \propto_j \sigma_{jk} \qquad (1)$$

$$s.a$$

$$\sum_{i=1}^{m} \propto_i = 1 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \propto_i R_i = R \qquad (3)$$

Donde:

$\propto_k$: Proporción incluida en la cartera de la inversión k

$\propto_j$: Proporción incluida en la cartera de la inversión j

σ_{jk}: Covarianza de ambas inversiones en cartera

R_i: Rentabilidad de cada acción en cartera

R: Rentabilidad total de la cartera

- La ecuación (1) se le denomina restricción paramétrica y representa la suma del peso de cada inversión en la cartera, multiplicado por la covarianza entre las diferentes inversiones que componen la cartera. Esta ecuación tiene como objetico minimizar el riesgo. También tiene algunas restricciones propias como por ejemplo la de no negatividad
- La ecuación (2) se le denomina restricción presupuestaria nos indica que las proporciones de cada una de las inversiones incluidas en la cartera tiene que sumar 1

- La ecuación (3) representa la frontera eficiente y es la rentabilidad que obtendremos en cada cartera.

4. CAPÍTULO PRÁCTICO

En este capítulo aplicaremos el problema de selección de cartera a la bolsa española, para el año 2018, aunque también realizaremos un análisis comparativo inicial con el año 2017.

APLICACIÓN NUMÉRICA AL PROBLEMA DE SELECCIÓN DE CARTERA EN EL IBEX35

El problema al que se enfrenta todo inversor racional es el de maximizar su rentabilidad y minimizar el riesgo, con diferentes opciones de inversión en el caso del mercado bursátil, trata de establecer una cartera óptima de inversión. Esto surge porque la rentabilidad de las acciones depende de muchos factores que están fuera del control del inversor, surgiendo un problema de decisión bajo riesgo. Un inversor evitará invertir todo su dinero en acciones que se comporten de manera similar, ya que si todas las acciones aumentan su rentabilidad le va a ir muy bien, pero cuando todas bajen a la vez puede quebrar. Por lo tanto, trata de diversificar de manera que las pérdidas de unas puedan compensarse con la ganancia de otras. La manera de formar una cartera diversificando con una alta rentabilidad y un bajo riesgo se denomina **selección de cartera.**

4.1 DIVERSIFICACIÓN: DEMOSTRACIÓN DEL RIESGO SISTEMÁTICO Y NO SISTEMÁTICO

Como ya dijimos en la descripción del modelo La diversificación no reduce el riesgo sistemático. Para demostrarlo obtendremos los datos de la rentabilidad de mensual de 10 acciones durante los 12 meses de 2018 y 2017. Los datos los obtendremos de la página web www.investing.com

Empezaremos a formar carteras de manera que la cartera número 1 será la rentabilidad de la primera acción, la cartera número 2 será la combinación de las rentabilidades de la acción número 1 más la acción número 2, hasta la cartera 10, que estará compuesta por la rentabilidad mensual de las 10 acciones. La forma de ordenar las acciones en la cartera no tiene importancia, pero lo que sí es muy importante es el orden en el que se añaden las nuevas acciones a la cartera, es decir, porque añadir una acción y no otra. En el año 2018 hemos añadido las acciones a la cartera por orden alfabético sin fijarnos si las nuevas acciones tenían más o menos desviación típica que las acciones que ya componían la cartera **(*Tabla 1 del Anexo),**, mientras que en 2017 hemos empezado añadiendo acciones con una mayor desviación típica hasta terminar con acciones con una desviación típica muy baja **(*Tabla 2 del anexo).**

Una vez tengamos conformadas las carteras, calcularemos la desviación típica de cada cartera y haremos una representación gráfica que relacione el número de acciones que componen cada cartera y sus desviaciones

2018**(*Tabla 3 del anexo)**

Nº acciones en cartera	Desviación estandar
1	7,62%
2	7,32%
3	7,38%
4	7,33%
5	6,98%
6	7,11%
7	6,79%
8	6,61%
9	6,45%
10	6,08%

Fuente datos : www.investing.com
Tabla: elaboración propia

Podemos observar en la tabla como la desviación es mayor en aquellas carteras que están compuestas por un menor número de acciones, aunque la reducción no es muy grande. También observamos que existe una desviación típica (riesgo) que no podemos llegar a reducir, tal y como explicábamos en el capítulo anterior a través del riesgo sistemático.

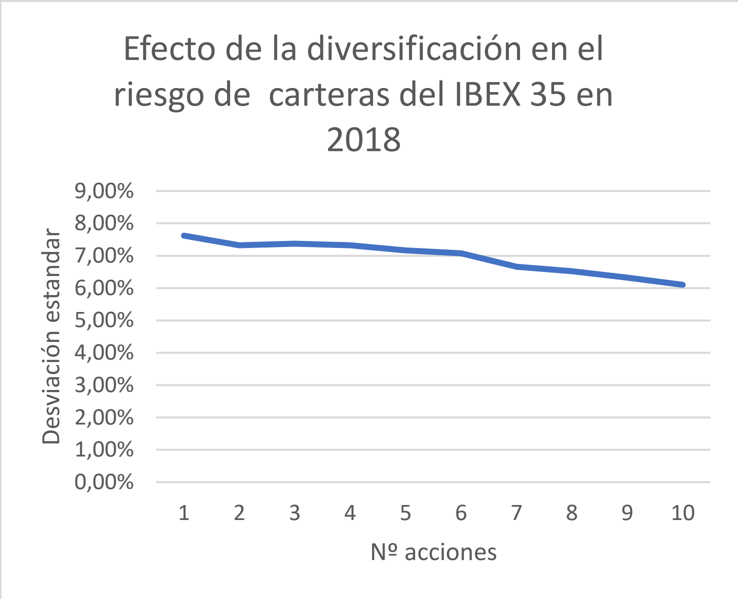


Gráfico: Elaboración propia

Gráficamente también podemos observar como la desviación típica se reduce al aumentar el número de acciones que componen la cartera.

2017**(*Tabla 4 del anexo)**

Realizaremos un análisis comparativo del comportamiento de las mismas acciones durante el año 2017, para ver si se reduce igualmente la desviación típica. Aplicaremos el mismo procedimiento descrito antes, lo que nos resultara la siguiente tabla y su correspondiente gráfico:

Nº acciones en cartera	Desviación estandar
1	10,95%
2	9,68%
3	8,59%
4	8,04%
5	7,61%
6	7,29%
7	6,99%
8	6,67%
9	6,45%
10	6,24%

Fuente datos : www.investing.com
Tabla: elaboración propia

Para 2017 podemos observar mucho mejor esa reducción, ya que la cartera que pasa de estar compuesta por una acción a estar compuesta por 10 acciones se reduce en torno a 4 puntos porcentuales, por lo que el riesgo no sistemático se reduce mucho durante este año gracias a la diversificación. También podemos comprobar que el riesgo sistemático en este año con estas combinaciones de acciones es similar al que hubo en 2018

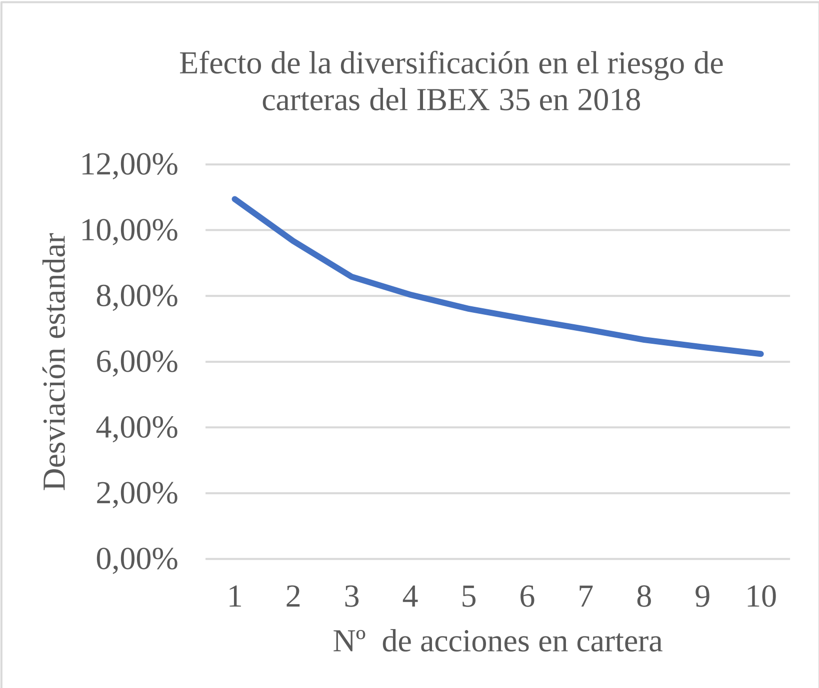


Gráfico: Elaboración propia

Gráficamente se observa muy bien la reducción en la desviación estándar a medida que aumenta el número de acciones en cartera. Esto es así porque hemos empezado introduciendo acciones con altas desviaciones típicas y después hemos metido acciones con desviaciones típicas más bajas, que hacían que se redujera el riesgo de la cartera.

4.2 ACCIONES CON COVARIANZAS NEGATIVAS

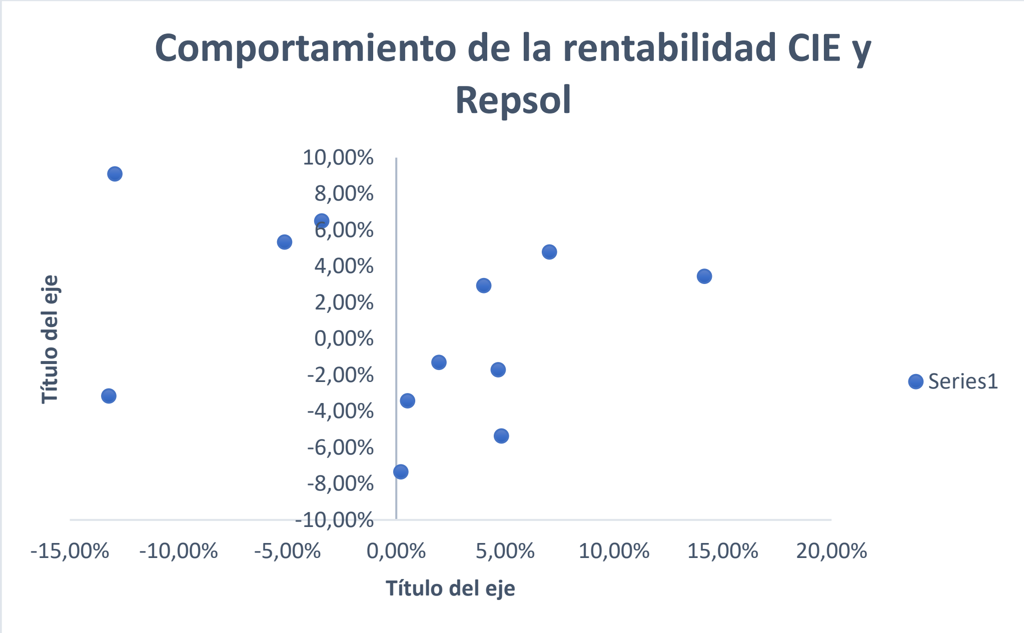
Tal y como explicamos en el capítulo teórico anterior, las acciones que tienen una covarianza negativa son ideales para la diversificación. Por lo tanto, buscaremos algunas acciones del IBEX 35 que tengan esta característica y podamos vislumbrar el efecto de la diversificación.

A continuación, presentamos una tabla con la rentabilidad mensual de CIE y REPSOL durante el año 2018, con la Media, Varianza y Desviación Estándar correspondiente a cada una:

Mes	CIE	Repsol
	% var.	% var.
1	-3,42%	6,50%
2	-5,13%	5,34%
3	-13,20%	-3,16%
4	1,97%	-1,31%
5	0,53%	-3,43%
6	4,03%	2,93%
7	-12,93%	9,10%
8	4,83%	-5,37%
9	7,04%	4,79%
10	4,69%	-1,71%
11	0,22%	-7,35%
12	14,17%	3,45%
Media	0,23%	0,82%
Varianza	0,58%	0,25%
Desviación estándar	7,61%	4,99%

Tabla:: Elaboración propia

Gráficamente se observa cierta tendencia a resultados de las rentabilidades contrarios:



Fuente datos: www.investing.com
Gráfica: elaboración propia

Cuando obtenemos la Covarianza confirmamos el análisis previo que hicimos a raíz del gráfico.

En Excel esta función se encuentra en las funciones Estadísticas =COVAR (matriz1; matriz2) matriz1 son los datos de la variable j y matriz2 son los de la variable i. En el caso de estas dos acciones, la covarianza es = -0,00061178

La definición de la Covarianza es:

$$COVij = \sum_{i}^{m} \sum_{i}^{m} \frac{(R_i - \bar{R_i})(R_j - \bar{R_j})}{n}$$

Por lo tanto, un inversor racional buscará formar una cartera con acciones que tengan una covarianza negativa, ya que la diversificación será beneficiosa para él, y en este caso la inversión en CIE y Repsol de manera conjunta es buena alternativa.

4.3 SELECCIÓN DE CARTERA ÓPTIMA

4.3.1 MODELO DE MARKOWITZ

Aplicaremos el modelo de Markowitz a 4 acciones del IBEX35 cogiendo la evolución de su rentabilidad en 2018. Para obtener los datos de las rentabilidades acudiremos a la página www.investing.com Por el interés de la práctica cogeremos 4 acciones de diferentes sectores:

- Sector Tecnológico: Amadeus
- Sector Construcción: Acciona
- Sector Energético: Iberdrola
- Sector Bancario: Banco Santander

Para vislumbrar el problema calcularemos, por partes, la covarianza entre ellas en la cartera.

Primero obtendremos una matriz de rentabilidades de las 4 acciones en sus correspondientes meses, y en la misma tabla calcularemos la Media, la cual obtendremos aplicando en EXCEL la función =PROMEDIO de la matriz correspondiente a la rentabilidad mensual de cada empresa, la Varianza la cual obtendremos aplicando la función =VAR.P a las rentabilidades, la Desviación estándar aplicando la formula =DESVEST.P y la Proporción cada acción en la cartera:

Mes	**Amadeus**	**Acciona**	**Iberdrola**	**Santander**
1	-3,83%	-8,88%	6,50%	-5,07%
2	-11,13%	8,74%	5,34%	-0,24%
3	-11,05%	-4,46%	-3,16%	-2,65%
4	0,13%	2,93%	-1,31%	1,13%
5	9,48%	3,16%	-3,43%	-11,04%
6	7,99%	3,67%	2,93%	4,95%
7	-0,44%	9,72%	9,10%	-0,17%
8	11,86%	-6,89%	-5,37%	-14,38%
9	1,20%	12,48%	4,79%	1,48%
10	-0,96%	-11,50%	-1,71%	-6,57%
11	-3,07%	-4,39%	-7,35%	-5,28%
12	3,94%	7,20%	3,45%	9,20%
Media	0,34%	0,98%	0,82%	-2,39%
Varianza	0,48%	0,58%	0,25%	0,40%

Desviación típica	6,96%	7,62%	4,99%	6,30%
Proporción	25%	25%	25%	25%

Fuente de datos: www.investing.com
Tabla:: Elaboración propia

Una vez realizado esto, podemos llegar a la matriz de covarianzas por dos caminos:

1. Calculando la matriz de excedentes, (Valor de la rentabilidad - Media), transponer dicha matriz y multiplicarla por la original, y dividirlo por el número de observaciones lo que nos resultaría la matriz de covarianzas. Sería aplicar la fórmula de la covarianza por partes:

$$COVij = \sum_{l}^{m}\sum_{l}^{m}\frac{(R_i - \bar{R_\imath})(R_j - \bar{R_\jmath})}{n}$$

2. También podemos aplicar directamente la función =COVAR en EXCEL y aplicarlo en las distintas rentabilidades y obtener la matriz de covarianzas

Aquí hemos optado por realizar la 1ª de las opciones, por lo que primero calcularemos la matriz de excedentes, restando a cada valor de la rentabilidad la media de su acción; por ejemplo, para el mes 1 de la empresa Iberdrola la operación será 6,5%-0,82%= 5,69 %

MATRIZ EXCEDENTES	Amadeus	Acciona	Iberdrola	Santander
1	-4,17%	-9,86%	5,69%	-2,68%
2	-11,47%	7,76%	4,53%	2,15%
3	-11,39%	-5,44%	-3,98%	-0,26%
4	-0,21%	1,95%	-2,13%	3,52%
5	9,14%	2,18%	-4,25%	-8,65%
6	7,65%	2,69%	2,12%	7,34%
7	-0,78%	8,74%	8,29%	2,22%
8	11,52%	-7,87%	-6,19%	-11,99%
9	0,86%	11,50%	3,98%	3,87%
10	-1,30%	-12,48%	-2,53%	-4,18%
11	-3,41%	-5,37%	-8,17%	-2,89%
12	3,60%	6,22%	2,64%	11,59%

Tabla: elaboración propia

Después transpondremos esta matriz, en Excel la forma más sencilla de hacerlo es copiar la matriz, pegar los valores al lado de nuestra matriz, volver a copiarla, y al pegarla darle al botón derecho y en opciones de pegado le daremos a transponer.

-0,041733	-0,114733	-0,113933	-0,002133	0,091367	0,076467	-0,007833	0,115167	0,008567	-0,013033	-0,034133	0,035967
-0,098617	0,077583	-0,054417	0,019483	0,021783	0,026883	0,087383	-0,078717	0,114983	-0,124817	-0,053717	0,062183
0,056850	0,045250	-0,039750	-0,021250	-0,042450	0,021150	0,082850	-0,061850	0,039750	-0,025250	-0,081650	0,026350
-0,026833	0,021467	-0,002633	0,035167	-0,086533	0,073367	0,022167	-0,119933	0,038667	-0,041833	-0,028933	0,115867

Una vez hemos obtenido las dos matrices nos dispondremos a calcular la matriz de covarianzas, la cual obtendremos multiplicando ambas matrices. En Excel se utiliza la función =MMULT (Matriz Excedentes; MatrizExcedentesTranspuesta) lo cual nos dará un único resultado, pero nosotros tenemos que obtener una matriz 4x4.

Entonces marcaremos las casillas que ocupará toda nuestra matriz y le daremos a la tecla F2 (nos aparecerá la fórmula de =MMULT), y le daremos simultáneamente a las teclas CTRL+SHIFT+ENTER. De esta operación obtendremos la siguiente matriz:

0,015418868	-0,000866365	0,007932082	-0,003984052
-0,000866365	0,021691292	0,006994908	0,001549695
0,007932082	0,006994908	0,017528975	-6,50783E-05
-0,003984052	0,001549695	-6,50783E-05	0,002072408

El último paso para calcular la Matriz de covarianzas es dividir cada valor entre 12 (número de meses que estamos analizando):

Mat. Covarianzas	0,001284906	-0,000072197	0,000661007	-0,000332004
	-0,000072197	0,001807608	0,000582909	0,000129141
	0,000661007	0,000582909	0,001460748	-0,000005423
	-0,000332004	0,000129141	-0,000005423	0,000172701

Dado que tenemos proporciones iguales de cada acción en nuestra cartera, ahora pasaremos a calcular la varianza de la cartera, aplicando la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2}\sum_i \sum_j \sigma_{ij}$$

Donde:

n = número de acciones

σ^2: Varianza de la cartera

σ_{ij}: Covarianza de las acciones i y j

Por lo que aplicando la fórmula a la matriz de varianzas y covarianzas obtendremos que la varianza de nuestro portafolio es:

$$\sigma^2 = \frac{0{,}00128+0{,}00180+0{,}00146+0{,}000172}{4^2} + \frac{2x(-0{,}0000721+0{,}000661-0{,}000332+0{,}0001291+0{,}000582-0{,}000005423}{4^2} = 0{,}0416\%$$

Como vemos, la varianza de la cartera formada por las 4 acciones es menor que la que tiene cada una por separado, por lo que la diversificación nos es beneficiosa.

Ahora pasaremos a calcular la media y la desviación típica de la cartera. Es importante comentar que el promedio se tiene calcular de forma manual, es decir, no se puede utilizar la función =PROMEDIO ya que entonces cuando vayamos a resolver con el Solver nos dará error de viabilidad.

Por lo tanto, la media de nuestro portafolio será la suma de las rentabilidades de cada acción multiplicadas por el peso que tienen en cartera y dividido entre el número de meses. Por ejemplo, para Iberdrola

$$\text{Media}_{\text{Iberdrola}} = \frac{(6{,}5\%+5{,}4\%-3{,}16\%+\cdots+3{,}45\%)*0{,}25}{12} = 0{,}002\%$$

Media cartera = -0,0663%

Como vemos la media de la cartera es inferior, incluso es negativa, y si observamos los datos eso se debe a la mala evolución del Santander en 2018, que tiene una media de rentabilidades del-2,4%. Pero si observamos la varianza vemos que se ha reducido respecto a la que tenía cada acción por separado. Esto es la ventaja de la diversificación, que al combinar diferentes acciones reducimos en mayor medida el riesgo (varianza) de lo que renunciamos a la rentabilidad (media). En nuestro caso, formaríamos una cartera sin la acción Santander, para obtener una rentabilidad positiva.

Ahora, según el problema de Markowitz fijaremos la rentabilidad que queramos obtener, por ejemplo 0,7% y a partir de ahí minimizaremos la varianza de nuestra cartera. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

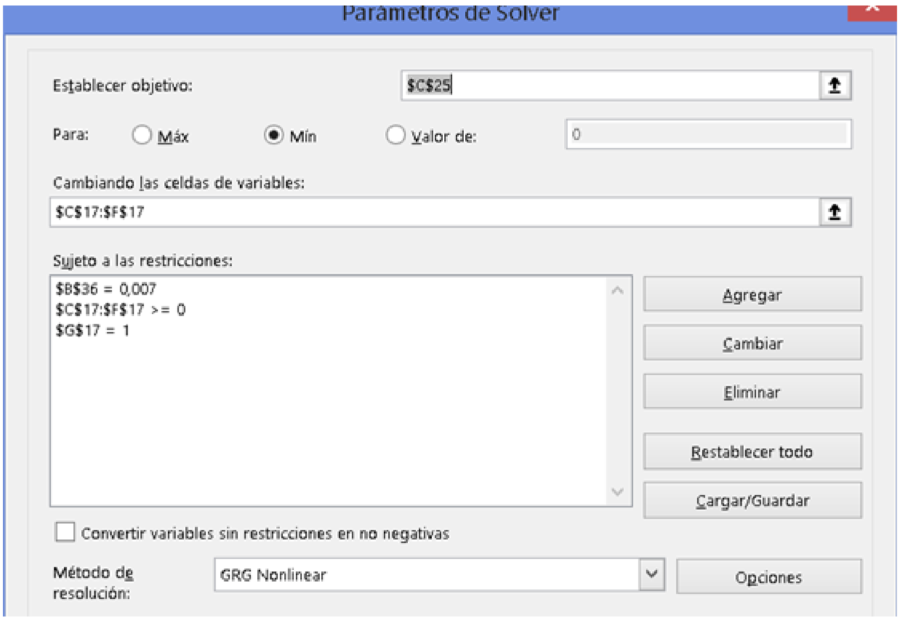
1. Definir un vector de lo que participa cada acción en nuestra cartera, es decir 25% cada una.
2. La rentabilidad promedio, que ya la teníamos calculada, es decir -0,0663%
3. Multiplicamos el vector de participación por la matriz de covarianzas que ya habíamos calculado, para ello utilizaremos la función =MMULT, siguiendo el proceso de multiplicación de matrices en Excel que hemos explicado antes. Obtendremos por lo tanto lo siguiente:

Participa*COV	0,000385428	0,000611865	0,00067481	-0,00000889639

Una vez calculado esto, obtendremos la varianza a partir del producto escalar de esta matriz y el vector de participaciones utilizando la función =SUMAPRODUCTO:

Suma producto	0,051%

Ahora que ya tenemos todos los parámetros del problema resolveremos mediante Solver. Solver es un complemento de Excel que permite resolver problemas de programación lineal y no lineal. El programa que queremos que nos resuelva es el siguiente:



Los componentes son:

- Objetivo: Minimizar la varianza
- Celdas que cambiaremos: Participaciones de las acciones en la cartera
- Restricciones
    - La media del portafolio tiene que ser 0,7%
    - No puede haber participaciones negativas
    - La suma de todas las participaciones tiene que ser igual a 1

Al resolver este programa obtendremos la siguiente composición de la cartera:

	Amadeus	**Acciona**	**Iberdrola**	**Santander**
Proporción	20,09%	47,84%	32,07%	0,00%

Como ya comentamos antes, si establecemos unos objetivos de rentabilidad positivos (lo que es razonable) nuestra cartera no estará formada por el Santander en la frontera eficiente, ya que está acción nos aportará unos valores de rentabilidad negativos, lo que nos impedirá alcanzar el objetivo.

4.3.2 MODELO CAMP

En el capítulo 3.6.4 del presente trabajo se realizó una introducción teórica al modelo de fijación de precios en activo inciertos CAMP, aquí lo utilizaremos para intentar calcular una cartera óptima.

Para calcular la cartera óptima nos basaremos en lo propuesto por Black (1972), Merton (1973) y más tarde en sus textos, por Levy y Sarna (1982), Elton y Gruyer (1995) y Benninga (1997). Para esto utilizaremos, igual que en el apartado anterior, Excel y su complemento Solver.

Suponemos 4 acciones del IBEX35 cogiendo la evolución de su rentabilidad en 2018. Para obtener los datos de las rentabilidades acudiremos a la página www.investing.com Por el interés de la práctica cogeremos 4 acciones de diferentes sectores:

- Sector Tecnológico: Amadeus
- Sector Construcción: Acciona
- Sector Energético: Iberdrola
- Sector Bancario: Banco Santander

Para vislumbrar el problema calcularemos, por partes, la covarianza entre ellas en la cartera.

Primero obtendremos una matriz de rentabilidades de las 4 acciones en sus correspondientes meses, y en la misma tabla calcularemos la Media, la cual obtendremos aplicando en EXCEL la función =PROMEDIO de la matriz correspondiente a la rentabilidad mensual de cada empresa, la Varianza la cual obtendremos aplicando la función =VAR.P a las rentabilidades, la Desviación estándar aplicando la formula =DESVEST.P y Proporción de la acción en la cartera:

Mes	**Amadeus**	**Acciona**	**Iberdrola**	**Santander**
1	-3,83%	-8,88%	6,50%	-5,07%
2	-11,13%	8,74%	5,34%	-0,24%
3	-11,05%	-4,46%	-3,16%	-2,65%
4	0,13%	2,93%	-1,31%	1,13%
5	9,48%	3,16%	-3,43%	-11,04%
6	7,99%	3,67%	2,93%	4,95%
7	-0,44%	9,72%	9,10%	-0,17%
8	11,86%	-6,89%	-5,37%	-14,38%
9	1,20%	12,48%	4,79%	1,48%
10	-0,96%	-11,50%	-1,71%	-6,57%
11	-3,07%	-4,39%	-7,35%	-5,28%
12	3,94%	7,20%	3,45%	9,20%
Media	0,34%	0,98%	0,82%	-2,39%
Varianza	0,48%	0,58%	0,25%	0,40%
Desviación típica	6,96%	7,62%	4,99%	6,30%
Proporción	25%	25%	25%	25%

Fuente de datos: www.investing.com
Tabla:: Elaboración propia

Escogeremos una tasa libre de riesgo por ejemplo de 0,5% y utilizaremos Solver para maximizar la tangente conformada por la rentabilidad promedio de la cartera.

Calcularemos la matriz de covarianzas igual que hicimos con el modelo de Markowitz por lo que calcularemos la matriz de excedentes, restando a cada valor de la rentabilidad la media de su acción; por ejemplo, para el mes 1 de la empresa Iberdrola la operación será 6,5%-0,82%= 5,69 %

MATRIZ EXCEDENTES	Amadeus	Acciona	Iberdrola	Santander
1	-4,17%	-9,86%	5,69%	-2,68%
2	-11,47%	7,76%	4,53%	2,15%
3	-11,39%	-5,44%	-3,98%	-0,26%
4	-0,21%	1,95%	-2,13%	3,52%
5	9,14%	2,18%	-4,25%	-8,65%
6	7,65%	2,69%	2,12%	7,34%
7	-0,78%	8,74%	8,29%	2,22%
8	11,52%	-7,87%	-6,19%	-11,99%
9	0,86%	11,50%	3,98%	3,87%
10	-1,30%	-12,48%	-2,53%	-4,18%
11	-3,41%	-5,37%	-8,17%	-2,89%
12	3,60%	6,22%	2,64%	11,59%

Tabla: elaboración propia

Después transpondremos esta matriz:

-0,041733	-0,114733	-0,113933	-0,002133	0,091367	0,076467	-0,007833	0,115167	0,008567	-0,013033	-0,034133	0,035967
-0,098617	0,077583	-0,054417	0,019483	0,021783	0,026883	0,087383	-0,078717	0,114983	-0,124817	-0,053717	0,062183
0,056850	0,045250	-0,039750	-0,021250	-0,042450	0,021150	0,082850	-0,061850	0,039750	-0,025250	-0,081650	0,026350
-0,026833	0,021467	-0,002633	0,035167	-0,086533	0,073367	0,022167	-0,119933	0,038667	-0,041833	-0,028933	0,115867

Una vez hemos obtenido las dos matrices nos dispondremos a calcular la matriz de covarianzas, la cual obtendremos multiplicando ambas matrices

De esta operación obtendremos:

0,015418868	-0,000866365	0,007932082	-0,003984052
-0,000866365	0,021691292	0,006994908	0,001549695
0,007932082	0,006994908	0,017528975	-6,50783E-05
-0,003984052	0,001549695	-6,50783E-05	0,002072408

El último paso para calcular la Matriz de covarianzas es dividir cada valor entre 12 (número de meses que estamos analizando):

Mat. Covarianzas	0,001284906	-0,000072197	0,000661007	-0,000332004
	-0,000072197	0,001807608	0,000582909	0,000129141

	0,000661007	0,000582909	0,001460748	-0,000005423
	-0,000332004	0,000129141	-0,000005423	0,000172701

Al igual que en el modelo de Markowitz, ahora pasaremos a la resolución:

1. Definir un vector de lo que participa cada acción en nuestra cartera, es decir 25% cada una.
2. La rentabilidad promedio, que ya la teníamos calculada, es decir -0,0663%
3. Multiplicamos el vector de participación por la matriz de covarianzas que ya habíamos calculado, para ello utilizaremos la función =MMULT, siguiendo el proceso de multiplicación de matrices en Excel que hemos explicado en la P.52 Obtendremos por lo tanto lo siguiente:

Particip*COV	0,000385428	0,000611865	0,00067481	-0,00000889639

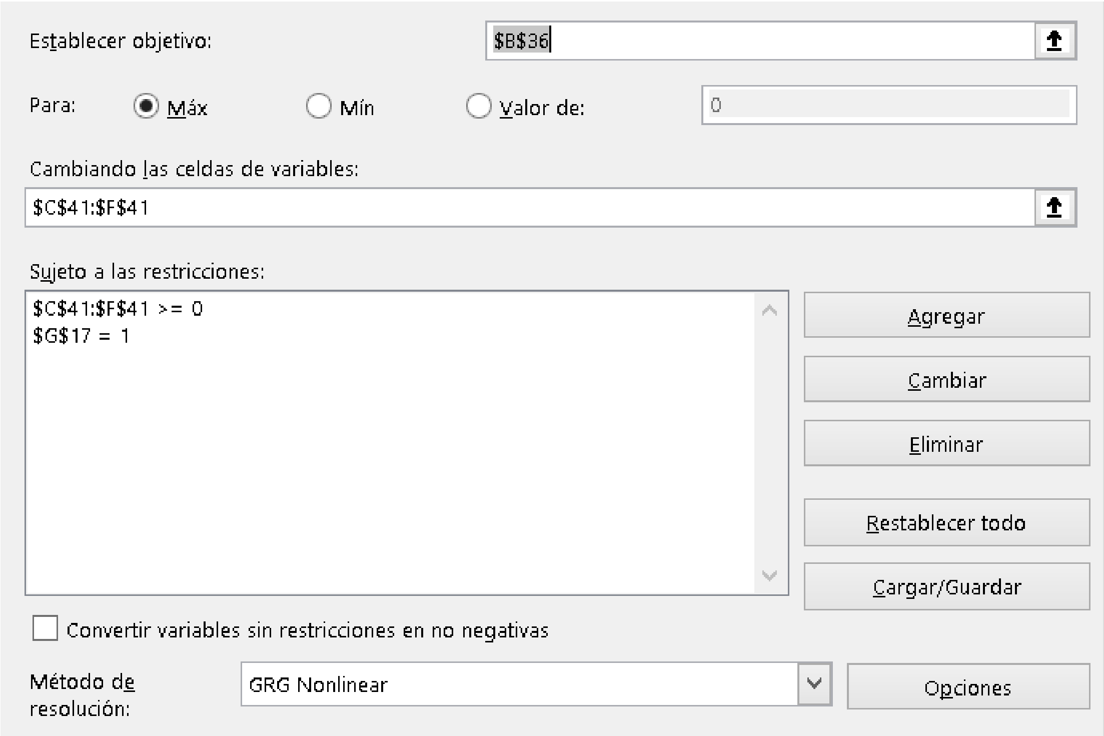
4. Una vez calculado esto, obtendremos la varianza a partir del producto escalar de esta matriz y el vector de participaciones utilizando la función =SUMAPRODUCTO:

Suma producto	0,051%

5. Como hemos supuesto una tasa libre de riesgo del 0,5% aplicaremos la expresión de la tangente:

$$tn\theta = \frac{R_m - r}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \propto_k \propto_j \sigma_{jk}}}$$

Ahora con todos los parámetros utilizaremos Solver para maximizar la tangente:



Los componentes son:

- Objetivo: Maximizar la tangente
- Celdas que cambiaremos: Participaciones de las acciones en la cartera
- Restricciones
    - No puede haber participaciones negativas
    - La suma de todas las participaciones tiene que ser igual a 1

	Amadeus	Acciona	Iberdrola	Santander
Cartera óptima	0,00%	64,10%	35,90%	0,00%

Con estos resultados podemos apreciar que ni Santander ni Amadeus se incluirían dentro de nuestra cartera, la explicación de porque Santander no lo haría es debido a que su rentabilidad media es negativa y Amadeus debido a su baja rentabilidad media (menos de la mitad que acciona o Iberdrola)

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han abordado algunos conceptos como el riesgo sistemático y no sistemático, así como la manera de identificarlos e intentar reducirlos. De los gráficos de la página 54 y 55 hemos aprendido que es importante el orden de los valores a la hora de realizar un buen análisis, ya que, por ejemplo, si añades una acción con una varianza muy elevada a una cartera con 10 acciones, el aumentar el número de acciones y diversificar más, no tiene que ser necesariamente mejor. Por lo tanto, hemos aprendido que no es tan importante diversificar más, sino diversificar mejor.

En el análisis de acciones con Covarianzas Negativas hemos podido comprobar lo difícil que es encontrar este tipo de acciones, y que, aunque las hay, en el caso de la bolsa española son escasas y con valores muy cercanos a 0.

En relación a la búsqueda de la cartera óptima, también hemos visto, gracias al modelo de Markowitz, el comportamiento tan distinto entre acciones provenientes de diferentes sectores, y como la diversificación nos permite llegar a elegir unas proporciones óptimas de acciones en nuestra cartera.

También hemos podido comprobar la relación entre el riesgo y la rentabilidad, así como su relación inversa. Sin embargo, hemos excluido del análisis algunos factores que podrían distorsionar el resultado, como por ejemplo los impuestos.

Comentarios Finales

Por supuesto todos los resultados expuestos en este trabajo no han pretendido ser más que una pequeña aproximación al complejo mundo de la teoría de decisión y los activos financieros. Este es un tema complejísimo y lo que aquí se aborda no es más que una recopilación de ideas básicas y la aplicación de un modelo. En ningún momento se pretende aconsejar sobre inversiónes en las acciones que hemos nombrado, ni formar una cartera de valores real, sino que la finalidad es simplemente la de observar y conocer el funcionamiento de algunos modelos.

También pido disculpas si en algunas partes del trabajo hay numeración, ortografía, tamaño o tipo de letra que no son las correctas, aunque se ha intentado que el trabajo estuviera lo mejor posible. Además, al haber recopilado una cantidad considerable de datos es muy posible que algunos contengan fallos de numeración o de cálculo, por lo que no considero que se puedan llegar a tomar como referencia.

Por último, agradecer a mi director Juan Carlos lo aprendido en todas las correcciones , el aporte de todos los materiales, y la cercanía y cordialidad que he recibido en todas las visitas a su despacho. A mis buenos amigos, para los que sobran las palabras, y ellos ya saben quiénes son. También agradecer a toda mi familia, en especial a mis padres y a mi hermano, por apoyarme y hacerme ver las cosas más sencillas de lo que a veces parecen.

6. BIBLIOGRAFÍA

Botero Bustillo, Carlos Andrés y Efraín Rosas Díaz (2002), *Selección de portafolios óptimos: El caso colombiano,* Trabajo de grado Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá (Citado por Vélez-Pareja).

Evans, J. H. y S. H. Archer, (1968), *Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis,* Journal of Finance, (Citado por Vélez-Pareja).

Grant, E.L., W. G. Ireson (Junio 22 – 29, 2001, pp. 104-106.) *Principles of Engineering Economy,* New York: The Ronald Press, Co, 4ª ed, 1960. The Economist**.** (Citado por Vélez-Pareja).

Hammond, Keeny y Raiffa (1999), *Decisiones inteligentes. Guía práctica para tomar mejores decisiones*. Editorial Norma, Bogotá (Citado por Vélez-Pareja).

O'Brien, John y Sanjay Srivastava (1995),*Investments A Visual Approach Modern Portfolio Theory and CAPM* .Tutor, Cincinnati: South-Western College.

Markowitz, H.M (1952): *Portfolio Selection*, Journal of Finance,7, (1), p. 77-91. (Citado por Vélez-Pareja).

(1959): *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. John Wiley & Sons. New York (Citado por Vélez-Pareja).

Morris, William T., (1964), *The Analysis of Management Decisions*, Irwin. (Citado por Vélez-Pareja).

Sharpe, William F., (1963 p. 277-293) *A Simplified Model for Portfolio Analysis* Management Science.

(1970) *Portfolio Theory and Capital Markets*, New York: McGraw-Hill (Citado por Vélez-Pareja)

(1985) *Investments*, 3rd Ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall. (Citado por Vélez-Pareja)

VARIAN, H.R.: MICROECONOMÍA INTERMEDIA: Un enfoque actual. Ed. Antoni Bosch, 8ª Ed. 2010.

Vélez-Pareja, Ignacio, “Portfolio Analysis (Análisis De Portafolio)” (Octubre 20, 2003). Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=986978 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.986978

“Decisions Under Uncertainty (Decisiones Bajo Incertidumbre)” (October 20, 2003). Available at SSRN:

https://ssrn.com/abstract=986876 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.986876

“Decisions Under Certainty: The Time Value of Money (Decisiones Bajo Certeza: El Valor Del Dinero En El Tiempo)” (October 20, 2004). Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=986875
or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.986875

“The Decision Process (El Proceso De Decision)” (January 7, 2007). Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=986521 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.986521

Tasa interna de retorno (TIR) - Definición, qué es y concepto | Economipedia
Economipedia
https://economipedia.com/definiciones/tasa-interna-de-retorno-tir.html

Actividades (ACS)
Acciones de ACS | Cotización ACS - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/acs-cons-y-serv

Acciona (ANA)
Histórico de la cotización de Acciona (ANA) - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/acciona-sa-historical-data

AENA (AENA)
Acciones de Aena | Cotización AENA - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/aena-aeropuertos-sa

Amadeus (AMA)
Acciones de Amadeus | Cotización AMA - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/amadeus-related-indices

Banco (SABE)

Acciones de Banco Sabadell | Cotización SABE - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/bco-de-sabadell

Banco (SAN)
Histórico de la cotización de Santander (SAN) - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/banco-santander-historical-data

Banco (BBVA)
Acciones de BBVA | Cotización BBVA - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/bbva

CIE (CIEA)
Acciones de Cie Automotive | Cotización CIEA - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/cie-automotive-sa

Enagás (ENAG)
Acciones de Enagás | Cotización ENAG - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/enagas

Endesa (ELE)
Acciones de Endesa | Cotización ELE - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/endesa

Ferrovial (FER)
Acciones de Ferrovial | Cotización FER - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/grupo-ferrovial

Iberdrola (IBE)
Histórico de la cotización de Iberdrola (IBE) - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/iberdrola-historical-data

Siemens (SGREN)
Acciones de Siemens Gamesa | Cotización SGREN - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/gamesa

Repsol (REP)
Acciones de Repsol | Cotización REP - Investing.com
Investing.com Español
https://es.investing.com/equities/repsol-ypf

7. ANEXO

*Tabla 1: Rentabilidades acciones 2018

Acciona		ACS		AENA		AMADEUS		B. Sabadell	
Fecha	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**
dic-18	-8,88%	dic-18	-0,15%	dic-18	-3,17%	dic-18	-3,83%	dic-18	-11,27%
nov-18	8,74%	nov-18	2,69%	nov-18	-0,67%	nov-18	-11,13%	nov-18	-3,26%
oct-18	-4,46%	oct-18	-9,72%	oct-18	-5,59%	oct-18	-11,05%	oct-18	-12,99%
sep-18	2,93%	sep-18	2,23%	sep-18	-1,97%	sep-18	0,13%	sep-18	1,29%
ago-18	3,16%	ago-18	-4,37%	ago-18	-1,87%	ago-18	9,48%	ago-18	-7,49%
jul-18	3,67%	jul-18	8,12%	jul-18	-0,06%	jul-18	7,99%	jul-18	-0,42%
jun-18	9,72%	jun-18	0,23%	jun-18	-5,36%	jun-18	-0,44%	jun-18	-0,21%
may-18	-6,89%	may-18	1,36%	may-18	-3,97%	may-18	11,86%	may-18	-11,62%
abr-18	12,48%	abr-18	10,67%	abr-18	4,55%	abr-18	1,20%	abr-18	-2,05%
mar-18	-11,50%	mar-18	11,74%	mar-18	-2,39%	mar-18	-0,96%	mar-18	-3,77%
feb-18	-4,39%	feb-18	-12,21%	feb-18	-4,45%	feb-18	-3,07%	feb-18	-9,82%
ene-18	7,20%	ene-18	-1,08%	ene-18	3,82%	ene-18	3,94%	ene-18	15,58%
BBVA		CIE		ENAGAS		ENDESA		FERROVIAL	
Fecha	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**
dic-18	-7,61%	dic-18	-3,42%	dic-18	-2,72%	dic-18	2,29%	dic-18	-2,59%
nov-18	2,72%	nov-18	-5,13%	nov-18	3,54%	nov-18	6,49%	nov-18	3,95%
oct-18	-11,02%	oct-18	-13,20%	oct-18	0,82%	oct-18	-0,70%	oct-18	-0,91%
sep-18	2,23%	sep-18	1,97%	sep-18	-2,92%	sep-18	-3,53%	sep-18	-4,08%
ago-18	-14,57%	ago-18	0,53%	ago-18	0,13%	ago-18	-2,48%	ago-18	6,42%
jul-18	3,49%	jul-18	4,03%	jul-18	-4,47%	jul-18	4,68%	jul-18	0,58%
jun-18	4,02%	jun-18	-12,93%	jun-18	9,78%	jun-18	0,27%	jun-18	0,88%
may-18	-13,24%	may-18	4,83%	may-18	-5,51%	may-18	-2,71%	may-18	-0,82%
abr-18	4,68%	abr-18	7,04%	abr-18	8,59%	abr-18	8,30%	abr-18	4,57%
mar-18	-6,69%	mar-18	4,69%	mar-18	3,78%	mar-18	3,38%	mar-18	-4,53%
feb-18	-8,96%	feb-18	0,22%	feb-18	-2,41%	feb-18	-4,42%	feb-18	-3,80%
ene-18	6,41%	ene-18	14,17%	ene-18	-8,04%	ene-18	1,37%	ene-18	-2,40%

*Tabla 2: Rentabilidades acciones 2017

SIEMENS		SABADELL		ACCIONA		AENA		BBVA	
Fecha	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**
dic-17	8,65%	dic-17	-2,01%	dic-17	-0,31%	dic-17	1,11%	dic-17	-0,97%
nov-17	-15,50%	nov-17	-1,69%	nov-17	-4,02%	nov-17	6,13%	nov-17	-4,41%
oct-17	12,72%	oct-17	-2,66%	oct-17	4,50%	oct-17	3,11%	oct-17	-0,63%
sep-17	-11,96%	sep-17	-4,39%	sep-17	-5,21%	sep-17	-6,89%	sep-17	1,87%
ago-17	-9,42%	ago-17	-2,43%	ago-17	-0,64%	ago-17	-0,73%	ago-17	-2,99%
jul-17	-25,92%	jul-17	6,41%	jul-17	-6,24%	jul-17	-3,28%	jul-17	5,31%
jun-17	-7,40%	jun-17	-3,00%	jun-17	-9,72%	jun-17	-4,92%	jun-17	0,18%
may-17	1,79%	may-17	3,85%	may-17	12,70%	may-17	10,93%	may-17	-1,32%
abr-17	-3,34%	abr-17	2,79%	abr-17	0,81%	abr-17	9,24%	abr-17	2,64%
mar-17	6,12%	mar-17	23,78%	mar-17	6,31%	mar-17	9,85%	mar-17	17,69%
feb-17	7,57%	feb-17	-0,43%	feb-17	-1,41%	feb-17	0,48%	feb-17	-1,55%
ene-17	0,83%	ene-17	5,37%	ene-17	2,50%	ene-17	3,63%	ene-17	-1,86%
ENDESA		ENAGAS		AMADEUS		REPSOL		FERROVIAL	
Fecha	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**	**Fecha**	**% var.**
dic-17	-4,70%	dic-17	-3,18%	dic-17	-0,76%	dic-17	-2,56%	dic-17	2,35%
nov-17	-4,66%	nov-17	-0,30%	nov-17	3,98%	nov-17	-4,14%	nov-17	-0,83%
oct-17	3,01%	oct-17	3,80%	oct-17	5,93%	oct-17	3,85%	oct-17	1,46%
sep-17	-5,87%	sep-17	-3,76%	sep-17	5,61%	sep-17	8,04%	sep-17	-2,73%
ago-17	1,27%	ago-17	3,64%	ago-17	0,02%	ago-17	1,90%	ago-17	4,93%
jul-17	-0,79%	jul-17	-2,71%	jul-17	-0,55%	jul-17	5,67%	jul-17	-6,14%
jun-17	-9,21%	jun-17	-7,24%	jun-17	0,96%	jun-17	-8,30%	jun-17	-3,08%
may-17	2,68%	may-17	9,59%	may-17	4,75%	may-17	2,61%	may-17	3,62%
abr-17	-1,79%	abr-17	-0,82%	abr-17	4,08%	abr-17	0,41%	abr-17	4,17%
mar-17	9,63%	mar-17	4,98%	mar-17	8,32%	mar-17	3,39%	mar-17	4,78%
feb-17	5,51%	feb-17	2,18%	feb-17	2,71%	feb-17	2,49%	feb-17	6,88%
ene-17	-5,37%	ene-17	-5,91%	ene-17	-0,98%	ene-17	1,79%	ene-17	-1,43%

*Tabla 3: Carteras por número de acciones en 2018

Nº acc.	**Rent.**	**Nº acc.**	**Rent.**	**Nº acc.**	**Rent.**	**Nº acc.**	**Rent.**		**Nº acc.**	**Rent.**		**Nº acc.**	**Rent.**	
1	-8,88%	**2**	-8,88%	**3**	-8,88%	**4**	-8,88%	-11,13%	**5**	-8,88%	-11,13%	**6**	-8,88%	-11,13%
Desv.e.	8,74%	**Desv.e.**	8,74%	**Desv.e.**	8,74%	**Desv.e.**	8,74%	-11,05%	**Desv.e.**	8,74%	-11,05%	**Desv.e.**	8,74%	-11,05%
7,62%	-4,46%	**7,32%**	-4,46%	**7,38%**	-4,46%	**7,33%**	-4,46%	0,13%	**6,98%**	-4,46%	0,13%	**7,11%**	-4,46%	0,13%
	2,93%		2,93%		2,93%		2,93%	9,48%		2,93%	9,48%		2,93%	9,48%
	3,16%		3,16%		3,16%		3,16%	7,99%		3,16%	7,99%		3,16%	7,99%
	3,67%		3,67%		3,67%		3,67%	-0,44%		3,67%	-0,44%		3,67%	-0,44%
	9,72%		9,72%		9,72%		9,72%	11,86%		9,72%	11,86%		9,72%	11,86%
	-6,89%		-6,89%		-6,89%		-6,89%	1,20%		-6,89%	1,20%		-6,89%	1,20%
	12,48%		12,48%		12,48%		12,48%	-0,96%		12,48%	-0,96%		12,48%	-0,96%
	-11,50%		-11,50%		-11,50%		-11,50%	-3,07%		-11,50%	-3,07%		-11,50%	-3,07%
	-4,39%		-4,39%		-4,39%		-4,39%	3,94%		-4,39%	3,94%		-4,39%	3,94%
	7,20%		7,20%		7,20%		7,20%			7,20%	-11,27%		7,20%	-11,27%
			-0,15%		-0,15%		-0,15%			-0,15%	-3,26%		-0,15%	-3,26%
			2,69%		2,69%		2,69%			2,69%	-12,99%		2,69%	-12,99%
			-9,72%		-9,72%		-9,72%			-9,72%	1,29%		-9,72%	1,29%
			2,23%		2,23%		2,23%			2,23%	-7,49%		2,23%	-7,49%
			-4,37%		-4,37%		-4,37%			-4,37%	-0,42%		-4,37%	-0,42%
			8,12%		8,12%		8,12%			8,12%	-0,21%		8,12%	-0,21%
			0,23%		0,23%		0,23%			0,23%	-11,62%		0,23%	-11,62%
			1,36%		1,36%		1,36%			1,36%	-2,05%		1,36%	-2,05%
			10,67%		10,67%		10,67%			10,67%	-3,77%		10,67%	-3,77%
			11,74%		11,74%		11,74%			11,74%	-9,82%		11,74%	-9,82%
			-12,21%		-12,21%		-12,21%			-12,21%	15,58%		-12,21%	15,58%
			-1,08%		-1,08%		-1,08%			-1,08%			-1,08%	-7,61%
					-3,17%		-3,17%			-3,17%			-3,17%	2,72%
					-0,67%		-0,67%			-0,67%			-0,67%	-11,02%
					-5,59%		-5,59%			-5,59%			-5,59%	2,23%
					-1,97%		-1,97%			-1,97%			-1,97%	-14,57%
					-1,87%		-1,87%			-1,87%			-1,87%	3,49%
					-0,06%		-0,06%			-0,06%			-0,06%	4,02%
					-5,36%		-5,36%			-5,36%			-5,36%	-13,24%
					-3,97%		-3,97%			-3,97%			-3,97%	4,68%
					4,55%		4,55%			4,55%			4,55%	-6,69%
					-2,39%		-2,39%			-4,45%			-4,45%	-8,96%
					-4,45%		-4,45%			3,82%			3,82%	
					3,82%		3,82%			-3,83%			-3,83%	
					-3,17%		-3,17%			14,17%			-3,83%	

Tabla 3*: Carteras por número de acciones en 2018

Nº acc.	Rent.			Nº acc.	Rent.			Nº acc.	Rent.			Nº acc.	Rent.		
7	-8,88%	-11,13%	6,41%	8	-8,88%	-11,13%	6,41%	9	-8,88%	-11,13%	6,41%	10	-8,88%	-11,13%	6,41%
Desv.e.	8,74%	-11,05%	-3,17%	Desv.e.	8,74%	-11,05%	-3,17%	Desv.e.	8,74%	-11,05%	-3,17%	Desv.e.	8,74%	-11,05%	-3,17%
6,79%	-4,46%	0,13%	-0,67%	6,61%	-4,46%	0,13%	-0,67%	6,45%	-4,46%	0,13%	-0,67%	6,08%	-4,46%	0,13%	-0,67%
	2,93%	9,48%	-5,59%		2,93%	9,48%	-5,59%		2,93%	9,48%	-5,59%		2,93%	9,48%	-5,59%
	3,16%	7,99%	-1,97%		3,16%	7,99%	-1,97%		3,16%	7,99%	-1,97%		3,16%	7,99%	-1,97%
	3,67%	-0,44%	-1,87%		3,67%	-0,44%	-1,87%		3,67%	-0,44%	-1,87%		3,67%	-0,44%	-1,87%
	9,72%	11,86%	-0,06%		9,72%	11,86%	-0,06%		9,72%	11,86%	-0,06%		9,72%	11,86%	-0,06%
	-6,89%	1,20%	-5,36%		-6,89%	1,20%	-5,36%		-6,89%	1,20%	-5,36%		-6,89%	1,20%	-5,36%
	12,48%	-0,96%	-3,97%		12,48%	-0,96%	-3,97%		12,48%	-0,96%	-3,97%		12,48%	-0,96%	-3,97%
	-11,50%	-3,07%	4,55%		-11,50%	-3,07%	4,55%		-11,50%	-3,07%	4,55%		-11,50%	-3,07%	4,55%
	-4,39%	3,94%	-2,39%		-4,39%	3,94%	-2,39%		-4,39%	3,94%	-2,39%		-4,39%	3,94%	-2,39%
	7,20%	-11,27%	-4,45%		7,20%	-11,27%	-4,45%		7,20%	-11,27%	-4,45%		7,20%	-11,27%	-4,45%
	-0,15%	-3,26%	3,82%		-0,15%	-3,26%	3,82%		-0,15%	-3,26%	3,82%		-0,15%	-3,26%	3,82%
	2,69%	-12,99%			2,69%	-12,99%	-2,72%		2,69%	-12,99%	3,82%		2,69%	-12,99%	3,82%
	-9,72%	1,29%			-9,72%	1,29%	3,54%		-9,72%	1,29%	-2,72%		-9,72%	1,29%	-2,72%
	2,23%	-7,49%			2,23%	-7,49%	0,82%		2,23%	-7,49%	3,54%		2,23%	-7,49%	3,54%
	-4,37%	-0,42%			-4,37%	-0,42%	-2,92%		-4,37%	-0,42%	0,82%		-4,37%	-0,42%	0,82%
	8,12%	-0,21%			8,12%	-0,21%	0,13%		8,12%	-0,21%	-2,92%		8,12%	-0,21%	-2,92%
	0,23%	-11,62%			0,23%	-11,62%	-4,47%		0,23%	-11,62%	0,13%		0,23%	-11,62%	0,13%
	1,36%	-2,05%			1,36%	-2,05%	9,78%		1,36%	-2,05%	-4,47%		1,36%	-2,05%	-4,47%
	10,67%	-3,77%			10,67%	-3,77%	-5,51%		10,67%	-3,77%	9,78%		10,67%	-3,77%	9,78%
	11,74%	-9,82%			11,74%	-9,82%	8,59%		11,74%	-9,82%	-5,51%		11,74%	-9,82%	-5,51%
	-12,21%	15,58%			-12,21%	15,58%	3,78%		-12,21%	15,58%	8,59%		-12,21%	15,58%	8,59%
	-1,08%	-7,61%			-1,08%	-7,61%	-2,41%		-1,08%	-7,61%	3,78%		-1,08%	-7,61%	3,78%
	-3,17%	2,72%			-3,17%	2,72%	-8,04%		-3,17%	2,72%	-2,41%		-3,17%	2,72%	-2,41%
	-0,67%	-11,02%			-0,67%	-11,02%			-0,67%	-11,02%	-8,04%		-0,67%	-11,02%	-8,04%
	-5,59%	2,23%			-5,59%	2,23%			-5,59%	2,23%	6,49%		-5,59%	2,23%	6,49%
	-1,97%	-14,57%			-1,97%	-14,57%			-1,97%	-14,57%	-0,70%		-1,97%	-14,57%	-0,70%
	-1,87%	3,49%			-1,87%	3,49%			-1,87%	3,49%	-3,53%		-1,87%	3,49%	-3,53%
	-0,06%	4,02%			-0,06%	4,02%			-0,06%	4,02%	-2,48%		-0,06%	4,02%	-2,48%
	-5,36%	-13,24%			-5,36%	-13,24%			-5,36%	-13,24%	4,68%		-5,36%	-13,24%	4,68%
	-3,97%	4,68%			-3,97%	4,68%			-3,97%	4,68%	0,27%		-3,97%	4,68%	0,27%
	4,55%	-6,69%			4,55%	-6,69%			4,55%	-6,69%	-2,71%		4,55%	-6,69%	-2,71%
	-2,39%	-8,96%			-2,39%	-8,96%			-2,39%	-8,96%	8,30%		-2,39%	-8,96%	8,30%
	-4,45%				-4,45%				-4,45%		3,38%		-4,45%		3,38%
	3,82%				3,82%				3,82%		-4,42%		3,82%		-4,42%
	-3,83%				-3,83%				-3,83%		1,37%		-3,83%		1,37%
	-11,13%				-11,13%				-11,13%				-11,13%		-2,59%
	-11,05%				-11,05%				-11,05%				-11,05%		3,95%
	0,13%				0,13%				0,13%				0,13%		-0,91%
	9,48%				9,48%				9,48%				9,48%		-4,08%
	7,99%				7,99%				7,99%				7,99%		6,42%
	-0,44%				-0,44%				-0,44%				-0,44%		0,58%
	11,86%				11,86%				11,86%				11,86%		0,88%
	1,20%				1,20%				1,20%				1,20%		-0,82%
	-0,96%				-0,96%				-0,96%				-0,96%		4,57%
	-3,07%				-3,07%				-3,07%				-3,07%		-4,53%
	3,94%				3,94%				3,94%				3,94%		-3,80%
	-11,13%				-11,13%				-11,13%				-11,27%		-2,40%

*Tabla 4: Carteras por número de acciones en 2017

Nº acc.	8,65%	Nº acc.	8,65%	Nº acc.	8,65%	Nº acc.	8,65%	1,11%	Nº acc.	8,65%	1,11%	Nº acc.	8,65%	1,11%
1	-15,50%	2	-15,50%	3	-15,50%	4	-15,50%	6,13%	5	-15,50%	6,13%	6	-15,50%	6,13%
Desv.e.	12,72%	Desv.e.	12,72%	Desv.e.	12,72%	Desv.e.	12,72%	3,11%	Desv.e.	12,72%	3,11%	Desv.e.	12,72%	3,11%
10,95%	-0,12	9,68%	-0,12	8,59%	-0,12	8,04%	-0,12	-6,89%	7,61%	-0,12	-6,89%	7,29%	-0,12	-6,89%
	-9,42%		-9,42%		-9,42%		-9,42%	-0,73%		-9,42%	-0,73%		-9,42%	-0,73%
	-25,92%		-25,92%		-25,92%		-25,92%	-3,28%		-25,92%	-3,28%		-25,92%	-3,28%
	-7,40%		-7,40%		-7,40%		-7,40%	-4,92%		-7,40%	-4,92%		-7,40%	-4,92%
	1,79%		1,79%		1,79%		1,79%	10,93%		1,79%	10,93%		1,79%	10,93%
	-3,34%		-3,34%		-3,34%		-3,34%	9,24%		-3,34%	9,24%		-3,34%	9,24%
	6,12%		6,12%		6,12%		6,12%	9,85%		6,12%	9,85%		6,12%	9,85%
	7,57%		7,57%		7,57%		7,57%	0,48%		7,57%	0,48%		7,57%	0,48%
	0,83%		0,83%		0,83%		0,83%	3,63%		0,83%	3,63%		0,83%	3,63%
			-2,01%		-2,01%		-2,01%			-2,01%	-0,97%		-2,01%	-0,97%
			-1,69%		-1,69%		-1,69%			-1,69%	-4,41%		-1,69%	-4,41%
			-2,66%		-2,66%		-2,66%			-2,66%	-0,63%		-2,66%	-0,63%
			-4,39%		-4,39%		-4,39%			-4,39%	1,87%		-4,39%	1,87%
			-2,43%		-2,43%		-2,43%			-2,43%	-2,99%		-2,43%	-2,99%
			6,41%		6,41%		6,41%			6,41%	5,31%		6,41%	5,31%
			-3,00%		-3,00%		-3,00%			-3,00%	0,18%		-3,00%	0,18%
			3,85%		3,85%		3,85%			3,85%	-1,32%		3,85%	-1,32%
			2,79%		2,79%		2,79%			2,79%	2,64%		2,79%	2,64%
			23,78%		23,78%		23,78%			23,78%	17,69%		23,78%	17,69%
			-0,43%		-0,43%		-0,43%			-0,43%	-1,55%		-0,43%	-1,55%
			5,37%		5,37%		5,37%			5,37%	-1,86%		5,37%	-1,86%
					-0,31%		-0,31%			-0,31%			-0,31%	-4,70%
					-4,02%		-4,02%			-4,02%			-4,02%	-4,66%
					4,50%		4,50%			4,50%			4,50%	3,01%
					-5,21%		-5,21%			-5,21%			-5,21%	-5,87%
					-0,64%		-0,64%			-0,64%			-0,64%	1,27%
					-6,24%		-6,24%			-6,24%			-6,24%	-0,79%
					-9,72%		-9,72%			-9,72%			-9,72%	-9,21%
					12,70%		12,70%			12,70%			12,70%	2,68%
					0,81%		0,81%			0,81%			0,81%	-1,79%
					6,31%		6,31%			6,31%			6,31%	9,63%
					-1,41%		-1,41%			-1,41%			-1,41%	5,51%
					2,50%		2,50%			2,50%			2,50%	-5,37%

*Tabla 4: Carteras por número de acciones en 2017

Nº acc.	8,65%	1,11%	-3,18%	Nº acc.	8,65%	1,11%	-3,18%	Nº acc.	8,65%	1,11%	-3,18%	Nº acc.	8,65%	1,11%	-3,18%	2,35%
7	-15,50%	6,13%	-3,83%	8	-15,50%	6,13%	-3,83%	9	-15,50%	6,13%	-3,83%	10	-15,50%	6,13%	-3,83%	-0,83%
Desv.e.	12,72%	3,11%	5,85%	Desv.e.	12,72%	3,11%	5,85%	Desv.e.	12,72%	3,11%	5,85%	Desv.e.	12,72%	3,11%	5,85%	1,46%
6,99%	-0,12	-6,89%	-4,21%	6,67%	-0,12	-6,89%	-4,21%	6,45%	-0,12	-6,89%	-4,21%	6,24%	-0,12	-6,89%	-4,21%	-2,73%
	-9,42%	-0,73%	2,96%		-9,42%	-0,73%	2,96%		-9,42%	-0,73%	2,96%		-9,42%	-0,73%	2,96%	4,93%
	-25,92%	-3,28%	-1,84%		-25,92%	-3,28%	-1,84%		-25,92%	-3,28%	-1,84%		-25,92%	-3,28%	-1,84%	-6,14%
	-7,40%	-4,92%	-2,32%		-7,40%	-4,92%	-2,32%		-7,40%	-4,92%	-2,32%		-7,40%	-4,92%	-2,32%	-3,08%
	1,79%	10,93%	7,51%		1,79%	10,93%	7,51%		1,79%	10,93%	7,51%		1,79%	10,93%	7,51%	3,62%
	-3,34%	9,24%	-1,54%		-3,34%	9,24%	-1,54%		-3,34%	9,24%	-1,54%		-3,34%	9,24%	-1,54%	4,17%
	6,12%	9,85%	6,87%		6,12%	9,85%	6,87%		6,12%	9,85%	6,87%		6,12%	9,85%	6,87%	4,78%
	7,57%	0,48%	7,55%		7,57%	0,48%	7,55%		7,57%	0,48%	7,55%		7,57%	0,48%	7,55%	6,88%
	0,83%	3,63%	-4,98%		0,83%	3,63%	-4,98%		0,83%	3,63%	-4,98%		0,83%	3,63%	-4,98%	-1,43%
	-2,01%	-0,97%			-2,01%	-0,97%	-0,76%		-2,01%	-0,97%	-0,76%		-2,01%	-0,97%	-0,76%	
	-1,69%	-4,41%			-1,69%	-4,41%	3,98%		-1,69%	-4,41%	3,98%		-1,69%	-4,41%	3,98%	
	-2,66%	-0,63%			-2,66%	-0,63%	5,93%		-2,66%	-0,63%	5,93%		-2,66%	-0,63%	5,93%	
	-4,39%	1,87%			-4,39%	1,87%	5,61%		-4,39%	1,87%	5,61%		-4,39%	1,87%	5,61%	
	-2,43%	-2,99%			-2,43%	-2,99%	0,02%		-2,43%	-2,99%	0,02%		-2,43%	-2,99%	0,02%	
	6,41%	5,31%			6,41%	5,31%	-0,55%		6,41%	5,31%	-0,55%		6,41%	5,31%	-0,55%	
	-3,00%	0,18%			-3,00%	0,18%	0,96%		-3,00%	0,18%	0,96%		-3,00%	0,18%	0,96%	
	3,85%	-1,32%			3,85%	-1,32%	4,75%		3,85%	-1,32%	4,75%		3,85%	-1,32%	4,75%	
	2,79%	2,64%			2,79%	2,64%	4,08%		2,79%	2,64%	4,08%		2,79%	2,64%	4,08%	
	23,78%	17,69%			23,78%	17,69%	8,32%		23,78%	17,69%	8,32%		23,78%	17,69%	8,32%	
	-0,43%	-1,55%			-0,43%	-1,55%	2,71%		-0,43%	-1,55%	2,71%		-0,43%	-1,55%	2,71%	
	5,37%	-1,86%			5,37%	-1,86%	-0,98%		5,37%	-1,86%	-0,98%		5,37%	-1,86%	-0,98%	
	-0,31%	-4,70%			-0,31%	-4,70%			-0,31%	-4,70%	-2,56%		-0,31%	-4,70%	-2,56%	
	-4,02%	-4,66%			-4,02%	-4,66%			-4,02%	-4,66%	-4,14%		-4,02%	-4,66%	-4,14%	
	4,50%	3,01%			4,50%	3,01%			4,50%	3,01%	3,85%		4,50%	3,01%	3,85%	
	-5,21%	-5,87%			-5,21%	-5,87%			-5,21%	-5,87%	8,04%		-5,21%	-5,87%	8,04%	
	-0,64%	1,27%			-0,64%	1,27%			-0,64%	1,27%	1,90%		-0,64%	1,27%	1,90%	
	-6,24%	-0,79%			-6,24%	-0,79%			-6,24%	-0,79%	5,67%		-6,24%	-0,79%	5,67%	
	-9,72%	-9,21%			-9,72%	-9,21%			-9,72%	-9,21%	-8,30%		-9,72%	-9,21%	-8,30%	
	12,70%	2,68%			12,70%	2,68%			12,70%	2,68%	2,61%		12,70%	2,68%	2,61%	
	0,81%	-1,79%			0,81%	-1,79%			0,81%	-1,79%	0,41%		0,81%	-1,79%	0,41%	
	6,31%	9,63%			6,31%	9,63%			6,31%	9,63%	3,39%		6,31%	9,63%	3,39%	
	-1,41%	5,51%			-1,41%	5,51%			-1,41%	5,51%	2,49%		-1,41%	5,51%	2,49%	
	2,50%	-5,37%			2,50%	-5,37%			2,50%	-5,37%	1,79%		2,50%	-5,37%	1,79%	