UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

MÁSTER EN MODELIZACIÓN E INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA, ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN.

Trabajo de fin de máster:

Biálgebras y Dobles de Drinfeld Asociativos

Javier Medrano Guillén

Director: Fernando Montaner Frutos

Septiembre 2019

Índice

1. Introducción

Una de las estructuras algebraicas que más interés ha suscitado desde el siglo XX han sido los grupos cuánticos y, asociados a estos, el concepto de biálgebra. En particular, las álgebras de Hopf han suscitado un tremendo interés debido a la relevancia que tienen con respecto a la construcción de los grupos cuánticos [C-P]. El origen de los grupos cuánticos está en el *Inverse Scattering Method* de la física cuántica y los sistemas integrables que conducen a la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter (QYBE a partir de ahora), y desde esta a los mencionados grupos, que son álgebras de Hopf no conmutativas [D] en contraste con las conmutativas asociadas a los grupos algebraicos [W], aunque originadas previamente [Sw]. Los grupos cuánticos más importantes (asociados a álgebras de Kac-Moody) se pueden construir como deformaciones (en el sentido algebraico) de las envolventes universales de estas álgebras, lo que en su "primer paso infinitesimal"da lugar a la noción de biálgebra de Lie, que también está ligada con la noción de Grupo de Poisson-Lie [D].

Motivados por estas ideas, varios autores han introducido nociones de biálgebra que generalizan las biálgebras de Lie introducidas por Drinfeld, como es el caso de las biálgebras asociativas introducidas por Zelyabin [Z] y análogos en la clase de las álgebras de Jordan, con la intención de relacionar su construcción con la de las biálgebras de Lie, tal como sucede con las álgebras asociativas utilizando el conmutador como producto o las de Jordan con la construcción de Kantor-Koecher-Tits. Esta clase de biálgebras ha sido también estudiada por Aguiar y denominada como *álgebras de Hopf infinitesimales* [Ag1].

Además, las biálgebras asociativas en el sentido de Drinfeld han sido consideradas en estudios de combinatoria y, más concretamente, en el estudio del cd-index de politopos [Ag2].

El propósito del presente trabajo es el estudio de algunos aspectos fundamentales de las biálgebras asociativas en el sentido de Drinfeld y, en particular, de modo paralelo a la situación que es fundamental en el estudio de las biálgebras de Lie, se abordará el estudio de los análogos de los dobles de Drinfeld y, particularmente, de la relación de su estructura con las soluciones de la versión asociativa de la ecuación de Yang-Baxter Clásica (ACYBE) en las biálgebras asociativas de Drinfeld que se pueden denominar *triangulares*, en nomenclatura que extiende la de las biálgebras de Lie.

2. Preliminares

2.1. Álgebras, Coálgebras y Biálgebras

En este capítulo, como ya hemos adelantado, daremos un enfoque vectorial al concepto de álgebra, generando estructuras duales que son centrales para el estudio de las biálgebras. Así pues, comenzamos por definir un álgebra como sigue:

Definición 2.1. *Un conjunto A se dice que es un **álgebra sobre k** si es un espacio vectorial sobre k y tiene dos aplicaciones lineales, $\mu : A \otimes A \to A$ y $\eta : k \to A$.*

Como vamos a trabajar con álgebras asociativas y unitales, impondremos, respectivamente, que los dos siguientes diagramas conmuten:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes id"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes k \arrow[l, "id \otimes \eta"'] \arrow[dl] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

El primer diagrama nos está diciendo que $\mu(\mu(a \otimes b) \otimes c) = \mu(a \otimes \mu(b \otimes c))$, que obviamente nos da la asociatividad, mientras que la segunda nos da las propiedades del elemento unitario (es decir, que si llamamos $1_A = \eta(1)$, entonces $\mu(1_A \otimes a) = \mu(x \otimes 1_A) = x$).

Dual al concepto de álgebra se encuentra el de coálgebra, que esencialmente consiste en dar la vuelta a las flechas de todos los diagramas anteriores.

Definición 2.2. *Sea C un espacio vectorial sobre un cuerpo k. Decimos que es una **coálgebra** si existen dos aplicaciones lineales $\Delta : C \to C \otimes C$ y $\epsilon : C \to k$.*

Como en el caso de la asociatividad y la unidad, se generan los conceptos de **coasociatividad** y **counidad**, que vienen dados porque los siguientes diagramas conmuten:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr] & \\
k \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon \otimes id"'] \arrow[r, "id \otimes \epsilon"] & C \otimes k
\end{tikzcd}$$

Notar aquí que los diagramas de la definición son los duales de los que nos daban la asociatividad y unidad en las álgebras.

Introducimos a continuación una notación para la comultiplicación (pues, en principio, no es una operación sencilla o intuitiva de notar). En general, la comultiplicación se puede escribir de dos maneras que usaremos dependiendo de la situación:

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum_{i,j \in I} \lambda_{ij}^c (x_i \otimes x_j)$$

para ciertos $c_{(i)}$ o λ_{ij}^c que dependen de c, con $\{x_i\}_{i \in I}$ base de A. La primera de las dos notaciones es la conocida como notación de Sweedler y es una de las más usadas.

Ahora podemos definir el concepto de biálgebra de manera natural y como cabría esperar.

Definición 2.3. *Decimos que B es una **biálgebra asociativa** si es a la vez un álgebra asociativa unital y una coálgebra, de manera que ambas estructuras sean compatibles.*

Las distintas nociones de compatibilidad darán lugar a diferentes tipos de biálgebras. La que se suele imponer normalmente (y que, unido al concepto de antípoda, da lugar a las álgebras de Hopf) es que μ y η sean morfismos de coálgebras (o, equivalentemente, que Δ y ϵ sean morfismos de álgebras) [Sl].

Nosotros, no obstante, vamos a usar un tipo de biálgebra distinto, el formado por las biálgebras de Drinfield. Para poder introducir este concepto, vamos a necesitar primero dotar de una estructura de álgebra al conjunto A^*. Si A es un álgebra (y, por tanto, un espacio vectorial), $A \otimes A$ es nuevamente un espacio vectorial. Debido al carácter funtorial del dual, la comultiplicación, a través del funtor dual, define una operación en $(A \otimes A)^*$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{F}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{F}"] \\ A^* & (A \otimes A)^* \arrow[l, "\mathrm{F}(\Delta)"] \end{tikzcd}$$

Como tenemos que $A^* \otimes A^* \subseteq (A \otimes A)^*$, este funtor define una operación en A^*. Es decir, si tenemos nuestra comultiplicación con la notación que hemos fijado más arriba, y tenemos dos funciones α_1 y $\alpha_2 \in A^*$, entonces

$$(\alpha_1 \cdot \alpha_2)(a) = \sum_{(a)} \alpha_1(a_{(1)}) \cdot \alpha_2(a_{(2)}) = \sum_{i,j \in I} \lambda_{ij}^a \alpha_1(x_i)\alpha_2(x_j)$$

Este hecho nos permitirá por fin definir el doble de Drinfeld.

2.2. Doble de Drinfeld

Ahora, podemos definir el álgebra $D(A, \Delta)$ (llamada **doble de Drinfeld**) como el espacio $A \oplus A^*$ que se obtiene de manera natural dotado de la única multiplicación asociativa que hace invariante la forma bilineal, con la condición de que tanto A como A^* sean subálgebras.

$$<,>: A \oplus A^* \times A \oplus A^* \longrightarrow k$$

de manera que, si $a \in A$ y $\alpha \in A^*$, $< a, \alpha >=< \alpha, a >= \alpha(a)$. Ahora ya estamos en disposición de definir lo que es una biálgebra de Drinfield.

Definición 2.4. *Decimos que $D(A, \Delta)$ es una **biálgebra en el sentido de Drinfield** (o álgebras de Hopf infinitesimales) si se cumple:*

1. *A es una biálgebra*

2. *La forma bilineal* $<,>$ *definida anteriormente es invariante (i.e.,* $<(a+\alpha)\cdot(b+\beta), c+\gamma> = < a+\alpha, (b+\beta)\cdot(c+\gamma)>$*)*

3. *El split extension* $A \oplus A^*$ *mantiene la misma estructura que* A *(es decir,* $A \oplus A^*$ *es una álgebra asociativa si* A *lo es, es una álgebra de Lie si* A *lo es, etc.)*

Este concepto está muy relacionado con el concepto de triple de Manin, que originalmente está relacionado con álgebras de Lie. Recordamos qué es:

Definición 2.5. *Un* ***triple de Manin*** *es una terna* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ *donde* $\mathfrak{p}$ *es un álgebra de Lie con un producto escalar invariante no degenerado y subálgebras de Lie no isotrópicas* $\mathfrak{p}_1$ *y* $\mathfrak{p}_2$ *de manera que* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$

Para el caso finito-dimensional se puede comprobar que hay una correspondencia uno a uno entre las biálgebras de Lie y los triples de Manin [D]. Para el caso infinito dimensional sigue existiendo una relación pero el triple de Manin no es único, ya que cualquier otro $\mathfrak{p}_2$ que sea denso en el dual $\mathfrak{p}^*$ da lugar a la misma biálgebra. Este concepto se puede hacer extensivo de manera sencilla a biálgebras asociativas, de modo que esencialmente es lo mismo dar un triple de Manin que dar una biálgebra en el sentido de Drinfeld.

El ejemplo clásico de esto es el triple de Manin que se genera al tomar $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}^*$ (es decir $\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}^*$). Este ejemplo se puede generalizar tomando como $\mathfrak{p}_2 = B$, donde $B \subseteq \mathfrak{p}^*$ es denso en $\mathfrak{p}^*$.

Como nosotros estamos trabajando con álgebras asociativas, tendremos que ver cómo debe funcionar nuestra forma bilineal para que A sea una biálgebra de Drinfield. Al ser una forma bilineal, sabemos que si a, $b \in A$ y α, $\beta \in A^*$, entonces $< a, b >= 0$ y $< \alpha, \beta >= 0$. Ahora solamente nos falta ver cómo funcionan los elementos del tipo $a \cdot \alpha$ con esta forma bilineal. Por linealidad, nos bastará ver cómo funciona con elementos simples (es decir, elementos que solamente pertenezcan a A o a A^*):

$$< \alpha \cdot a, b >=< \alpha, ab >= \alpha(ab) = (\alpha \circ L_a)(b) \tag{2.1}$$

$$< \alpha \cdot a, \beta >=< \beta, \alpha \cdot a >=< \beta \cdot \alpha, a >= (\beta \cdot \alpha)(a) \tag{2.2}$$

$$< a \cdot \alpha, b >=< b, a \cdot \alpha >=< ba, \alpha >= \alpha(ba) = (\alpha \circ R_a)(b) \tag{2.3}$$

$$< a \cdot \alpha, \beta >=< a, \alpha \cdot \beta >= (\alpha \cdot \beta)(a) \tag{2.4}$$

Donde la multiplicación $\alpha \cdot \beta$ es la operación en el dual que hemos obtenido a través de la comultiplicación y L_a y R_a define la multiplicación a izquierda y derecha respectivamente.

Ahora bien, como siempre que aparece una nueva estructura en álgebra (y, en general, en matemáticas), nos gustaría poder clasificarla de alguna manera. Para ello introducimos el concepto de *classical twist*.

Definición 2.6. *Sean dos biálgebras de Drinfield iguales (salvo isomorfismo) con comultiplicaciones Δ_1 y Δ_2. Llamamos **classical twist** a la comultiplicación $\Delta_1 - \Delta_2$. Decimos que dos biálgebras de Drinfield son **compatibles** si la diferencia de sus comultiplicaciones es un classical twist (es decir, si son iguales salvo isomorfismo).*

Otro concepto interesante que aparece de manera natural es preguntarse a qué doble de Drinfeld da lugar la comultiplicación trivial: $\Delta(a) = 0 \otimes 0 \ \ \forall a \in A$. No es difícil comprobar que esto da lugar al doble $A \otimes E$, donde $E = A^*$ como conjunto y que cumple que $E^2 = 0$. Esta biálgebra en el sentido de Drinfeld será central en el resultado final del trabajo.

Definición 2.7. *Un doble de Drinfeld se dirá que es una **biálgebra cotrivial** si está generado por la comultiplicación trivial.*

2.3. Biálgebras Coborde, Triangulares y la Ecuación Clásica de Yang-Baxter

El concepto de doble de Drinfield da lugar a un conceptos central para el resultado que buscamos

Definición 2.8. *Un par (A, r), con A biálgebra y $r \in A \otimes A$ se dice una **biálgebra coborde** si la comultiplicación Δ en A es de la forma*

$$\Delta(x) = (1 \otimes x)r - r(x \otimes 1)$$

A una comultiplicación como la de arriba se le llama **derivación respecto a** r, y se puede escribir Δ_r.

Para poder ver qué derivaciones van a ser interesantes dentro de la búsqueda de estructuras compatibles con la original necesitamos conocer la ecuación clásica de Yang-Baxter [C-P]. Originalmente, la ecuación clásica de Yang-Baxter (CYBE de ahora en adelante) tiene su origen en la teoría de álgebras de Lie y su envolvente universal, con aplicación directa en física (concretamente en mecánica cuántica). Surge de manera natural al tratar de encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y su deformación para cierto $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ sea de Lie.

Dada una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, decimos que $r = \sum_i a_i \otimes b_i \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ es una solución de CBYE si

$$[r^{12}, r^{13}] + [r^{12}, r^{23}] + [r^{13}, r^{23}] = 0$$

en $U(\mathfrak{g})$, su envolvente universal, con

$$r^{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1$$

$$r^{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$$

$$r^{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$$

Nosotros, no obstante, estamos interesados en álgebras asociativas, de manera que vamos a adaptarlo a nuestro caso. Partimos de cierta álgebra asociativa A. Si tenemos un $r = \sum a_i \otimes b_i \in A \otimes A$, nos gustaría que la deformación

$$\Delta(x) = (1 \otimes x)r - r(x \otimes 1) = \sum a_i \otimes b_i x - x a_i \otimes b_i$$

$\forall\ x \in A$ fuera coasociativa. Viendo la condición de coasociatividad del diagrama del apartado anterior, esto significa que $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$. Antes de dar la condición, recordar que decimos que un elemento $r \in A \otimes A$ es $A - invariante$ si

$$a \cdot r = r \cdot a \ \ \forall a \in A$$

El siguiente resultado se puede encontrar en [Ag2].

Proposición 2.9. *Una derivación Δ_r de un elemento $r = \sum_i a_i \otimes b_i$ es coasociativa si y solamente si el elemento*

$$r^{13} r^{12} - r^{12} r^{23} + r^{23} r^{13} \in A \otimes A \otimes A$$

es $A - invariante$

Demostración. Tenemos, por un lado, que

$$(\Delta_r \otimes id) \circ \Delta_r(x) = (\Delta_r \otimes id)\left(\sum_i a_i \otimes b_i x - x a_i \otimes b_i\right) =$$

$$= \sum_{i,j} a_j \otimes b_j a_i \otimes b_i x - a_i a_j \otimes b_j \otimes b_i x - (a_j \otimes b_j x a_i \otimes b_i - x a_i a_j \otimes b_j \otimes b_i) =$$

$$= r^{12} r^{23} \cdot x - r^{13} r^{12} \cdot x - r^{12}(1 \otimes x \otimes 1) r^{23} + x \cdot r^{13} r^{12} \tag{2.5}$$

Por otro lado

$$(id \otimes \Delta_r) \circ \Delta_r(x) = (id \otimes \Delta_r)\left(\sum_i a_i \otimes b_i x - x a_i \otimes b_i\right) =$$

$$= \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_j b_i x - a_i \otimes b_i x a_j \otimes b_j - (x a_i \otimes a_j \otimes b_j b_i - x a_i \otimes b_i a_j \otimes b_j) =$$

$$= r^{23} r^{13} \cdot x - r^{12}(1 \otimes x \otimes 1) r^{23} - x \cdot r^{23} r^{13} + x \cdot r^{12} r^{23} \tag{2.6}$$

Igualando (2.5) y (2.6), tenemos que la derivación es coasociativa si y solamente sí

$$r^{12} r^{23} \cdot x - r^{13} r^{12} \cdot x - r^{23} r^{13} \cdot x + x \cdot r^{13} r^{12} + x \cdot r^{23} r^{13} - x \cdot r^{12} r^{23} = 0$$

y esto ocurre si y solamente si $r^{13} r^{12} - r^{12} r^{23} + r^{23} r^{13} \in A \otimes A \otimes A$ es $A-$*invariante*. □

Este resultado origina, de manera análoga al caso de álgebras de Lie, dos conceptos relacionados. El que se construye de manera natural respecto al resultado anterior sería el siguiente:

Definición 2.10. *Una biálgebra coborde se dice* ***cuasi-triangular*** *si* $r \in A \wedge A$ *y cumple la proposición anterior (i.e,* Δ_r *es coasociativa).*

No obstante tiene interés (como veremos en el resultado final) el caso en el que la relación de A-*invarianza* viene dado porque el elemento de $A \otimes A \otimes A$ dado por la condición necesaria y suficiente de coasociatividad sea 0. Es decir, cuando se cumple la versión asociativa de la ecuación clásica de Yang-Baxter:

$$r^{13} r^{12} - r^{12} r^{23} + r^{23} r^{13} = 0$$

Definición 2.11. *Una biálgebra coborde se dice* ***triangular*** *si* $r \in A \wedge A$ *y satisface la versión asociativa de la ecuación clásica de Yang-Baxter.*

Ahora estamos en disposición de enunciar el resultado principal que se prueba en el siguiente apartado:

Teorema 2.12. *Una biálgebra de Drinfield* $D(A, \Delta)$ *es compatible con la trivial si, y solamente si es triangular.*

3. Caracterización de las Biálgebras Triangulares

Para demostrar esto, probaremos primero un lema auxiliar, en cuya demostración veremos una idea que será usada también en la demostración del resultado principal.

Lema 3.1. *Sea* (A, Δ) *una biálgebra de Drinfield asociativa. Si* A *es compatible con la trivial, entonces es coborde con* $\Delta = \Delta_r$ *con* $r \in A \wedge A$

Demostración. Como A es equivalente a la biálgebra trivial, tenemos que $D(A, \Delta) = A \oplus A^* = A \oplus E$, donde E es un subespacio de $D(A)$ totalmente isotrópico y una subálgebra trivial (i.e., $E^2 = 0$). Como $E \subset A \oplus A^*$, tomamos $q : E \to A$ la proyección de E sobre A a través de A^*.

Ahora, está claro que $A^* = \{\alpha - q(\alpha) | \alpha \in E\}$. Además, por ser A^* totalmente isotrópico, tenemos que $0 =< \alpha - q(\alpha), \beta - q(\beta) >$, y como E también es totalmente isotrópico tenemos que

$$< \alpha, q(\beta) >= - < q(\alpha), \beta > \tag{3.1}$$

$\forall\ \alpha, \beta \in E$.

Por tanto, tenemos que $Ker(q) = q(E)^\perp$. Así pues, por el primer teorema de isomorfía, tenemos que $E/Ker(q) = E/q(E)^\perp \cong q(E)$. Por otro lado, es fácil ver que $E/q(E)^\perp \cong q(E)^*$, por lo tanto $q(E) \cong q(E)^*$. Esto ocurre si y solamente si $q(E)$ es de dimensión finita [J].

Así pues, tomamos $\{x_1, ..., x_n\}$ una base de $q(E)$, y la extendemos a $\{x_1, ..., x_n\} \cup \{y_i\}_{i \in I}$ una base de A. Ahora cogemos una "base dual"[1] formada por $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \cup \{\beta_i\}_{i \in I}$, de manera que se cumpla:

1. $< \alpha_i, x_j >= \delta_{ij}$
2. $< \beta_i, y_j >= \delta_{ij}$
3. $< \alpha_i, y_j >=< \beta_i, x_j >= 0$

[1]Notar que esto **no** tiene por qué ser una base de E, y de hecho para el caso infinito no lo será

Ahora, por (3.1), tenemos que $< q(\beta_i), \alpha_k >= - < \beta_i, q(\alpha_k) >= 0$. Es decir, $\beta_i \in q(E)^{\perp}$, luego $q(\beta_i) = 0$, y por tanto $\mathcal{B} = \{\alpha_1 - q(\alpha_1), ..., \alpha_n - q(\alpha_n)\} \cup \{\beta_i\}_{i \in I}$ se expande linealmente en un subespacio denso de A^*.

Ahora, definimos r como sigue:

$$r = \sum_{i=1}^{n} q(\alpha_i) \otimes x_i$$

Comprobemos que efectivamente este es el r que buscamos.

$$r = \sum_{i=1}^{n} q(\alpha_i) \otimes x_i = \sum_{i,k} < \alpha_k, q(\alpha_i) > x_k \otimes x_i \overset{(3.1)}{=} -\sum_{i,k} < \alpha_i, q(\alpha_k) > x_k \otimes x_i =$$

$$= -\sum_{k} x_k \otimes \left(\sum_{i} < \alpha_i, q(\alpha_k) > x_i \right) = -\sum_{k} x_k \otimes q(\alpha_k)$$

Por lo tanto $r \in A \wedge A$. Ahora, como el conjunto $\mathcal{B}$ expande en un conjunto denso de A^*, probaremos que

$$< (1 \otimes x)r - r(x \otimes 1), \gamma \otimes \delta >=< x, \gamma \cdot \delta > \ \forall \gamma, \delta \in \mathcal{B}$$

, lo que es equivalente al resultado. Veamos todas las combinaciones posibles.

Si $\gamma = \beta_k$ y $\delta = \beta_l$, tenemos que por un lado, claramente $< x, \beta_k \cdot \beta_l >= 0$. Por otro lado,

$$< (1 \otimes x)r - r(x \otimes 1), \gamma \otimes \delta > \overset{r \in A \wedge A}{=} < -\sum_{i} x_i \otimes x \cdot q(\alpha_i) - \sum_{i} q(\alpha_i) \cdot x, \beta_k \otimes \beta_l >=$$

$$= -\sum_{i} < x_i, \beta_k >< x \cdot q(\alpha_i), \beta_l > + < q(\alpha_i) \cdot x, \beta_k >< x_i, \beta_l >= 0$$

ya que $< \beta_j, x_i >= 0 \ \forall \ 1 \leq i, j \leq n$.

Ahora, sea $\gamma = \alpha_k - q(\alpha_k)$ y $\delta = \beta_l$. Vamos a ver los dos factores de la operación bilineal por separado. Por un lado, tenemos que

$$< r(x \otimes 1), (\alpha_k - q(\alpha_k) \otimes \beta_l >= \sum_i < q(\alpha_i) \cdot x, \alpha_k - q(\alpha_k >< x_i, \beta_l >= 0$$

ya que $< x_i, \beta_l >= 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n, \ l \in I$. Por otro lado,

$$< (1 \otimes x)r, (\alpha_k - q(\alpha_k) \otimes \beta_l >= -\sum_i < x_i, \alpha_k - q(\alpha_k) >< x \cdot q(\alpha_i), \beta_l >=$$

$$= -\sum_i < x_i, \alpha_k >< x \cdot q(\alpha_i), \beta_l >= - < x \cdot q(\alpha_k), \beta_l >= - < x, q(\alpha_k)\beta_l >=$$

$$=< x, (\alpha_k - q(\alpha_k)) \cdot \beta_l >$$

Aquí hemos usado que A es totalmente isotrópico, la asociatividad de la biálgebra y que $< x, \alpha_k \cdot \beta_l >= 0 \ \forall \ k, l$.

Análogamente obtenemos que $< (1 \otimes x)r - r(x \otimes 1), \beta_l \otimes (\alpha_k - q(\alpha_k) >=< x, \beta_l \cdot (\alpha_k - q(\alpha_k)) >$, sin más que tener en cuenta que en este caso tendremos que $r(x \otimes 1), \beta_l \otimes (\alpha_k - q(\alpha_k) >= 0$.

Ahora nos falta probar que $< (1 \otimes x)r - r(x \otimes 1), (\alpha_k - q(\alpha_k) \otimes (\alpha_l - q(\alpha_l) >=< x, (\alpha_k - q(\alpha_k)) \otimes (\alpha_l - q(\alpha_l)) >$. Como antes, lo separemos en dos partes:

$$< (1 \otimes x)r, (\alpha_k - q(\alpha_k)) \otimes (\alpha_l - q(\alpha_l) >=$$
$$= -\sum_i < x_i, \alpha_k - q(\alpha_k) >< x \cdot q(\alpha_i), \alpha_l - q(\alpha_l) >=$$
$$= - < x \cdot q(\alpha_k), \alpha_l - q(\alpha_l) >=< x, -q(\alpha_k)\alpha_l) >$$

Análogamente, tenemos que $< (x \otimes 1)r, (\alpha_k - q(\alpha_k)) \otimes (\alpha_l - q(\alpha_l)) >= - < x, \alpha_k q(\alpha_l) >$. Pero como A es totalmente isotrópico y $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0 \ \forall i, j$ (por ser E una subálgebra trivial), tenemos que

$$< x, (\alpha_k - q(\alpha_k))(\alpha_l - q(\alpha_l)) >=< x, -q(\alpha_k)\alpha_l - \alpha_k q(\alpha_l)) >$$

lo que prueba el resultado. $\square$

Veamos ahora la equivalencia usando la versión asociativa de la ecuación clásica de Yang - Baxter y la definición de biálgebra triangular y coborde.

Teorema 3.2. *Una biálgebra A es equivalente a la biálgebra trivial (con la misma multiplicación de A) si y solamente si (A, r) es una biálgebra triangular para un $r \in A \wedge A$.*

Demostración. Supondremos primero que A es equivalente a una biálgebra trivial. Usaremos la notación establecida en el lema anterior. Gracias a ese lema ya hemos visto que A es una biálgebra coborde, así que basta ver que r satisface la versión asociativa de la ecuación clásica de Yang - Baxter. Ahora, como A^* es una subálgebra de $D(A)$, $\forall\ \alpha, \beta \in E$, $(\alpha - q(\alpha)) \cdot (\beta - q(\beta)) \in A^*$. Este producto se descompone en $A \oplus E$ como sigue:

$$(\alpha - q(\alpha)) \cdot (\beta - q(\beta)) = -q(\alpha)\beta - \alpha q(\beta) + q(\alpha)q(\beta) = [q(\alpha)q(\beta)] + [-\beta \circ R_{q(\alpha)} - \alpha \circ L_{q(\beta)}]$$

con $R_a(x) = x \cdot a$ y $L_a(x) = a \cdot x$. Esto es así por varios motivos. Primero, $\alpha \cdot \beta = 0$ ya que E es una subálgebra trivial. Segundo, $\alpha \cdot q(\beta) \subset A \oplus E$, de manera que tiene parte en A y parte een E. La parte en A queda definida por la operación bilineal $\forall \gamma \in E$ como sigue:

$$< \alpha \cdot q(\beta), \gamma >=< \gamma \cdot \alpha, q(\beta) >= 0$$

ya que $E^2 = 0$, por lo que la parte de $\alpha \cdot q(\beta)$ que nos queda es la que está contenida en A, es decir $\alpha \circ L_{q(\beta)}$.

Como Esto tiene que estar en A^*, tiene que ocurrir que

$$q(\alpha)q(\beta) = q(\beta \circ R_{q(\alpha)} + \alpha \circ L_{q(\beta})$$

o, lo que es lo mismo, que $\forall\ \gamma \in E$

$$< \gamma, q(\alpha)q(\beta) > - < \gamma, q(\beta \circ R_{q(\alpha)}) > - < \gamma, q(\alpha \circ L_{q(\beta)}) >= 0$$

Ahora, tenemos que

$$< \gamma, q(\beta \circ R_{q(\alpha)}) >= - < q(\gamma), \beta \circ R_{q(\alpha)}) >= - < \beta, q(\gamma)q(\alpha) >$$

Equivalentemente, $< \gamma, q(\alpha \circ L_{q(\beta)}) >= - < \alpha, q(\beta)q(\gamma) >$. Por tanto, tiene que ocurrir que

$$< \gamma, q(\alpha)q(\beta) > + < \beta, q(\gamma)q(\alpha) > + < \alpha, q(\beta)q(\gamma) >= 0$$

Ahora, como $E = k < \alpha_1, ..., \alpha_n > + q(E)^{\perp}$, para cualquier $\alpha \in E$ tenemos que $q(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} < \alpha, x_i > q(\alpha_i) =< 1 \otimes \alpha, r >$. Por tanto, tenemos que

$$< \gamma, q(\alpha)q(\beta) >=< \gamma, < 1 \otimes \alpha, r >< 1 \otimes \beta, r >>=$$

$$= \sum_{i,j} \alpha(x_i)\gamma(q(\alpha_i))\beta(x_j)\gamma(q(\alpha_j)) =< \gamma \otimes \alpha \otimes \beta, r^{12}r^{13} >$$

Aplicando el mismo razonamiento para los otros dos sumandos, obtenemos que

$$< \gamma \otimes \alpha \otimes \beta, r^{12}r^{13} > + < \beta \otimes \gamma \otimes \alpha, r^{12}r^{13} > + < \alpha \otimes \beta \otimes \gamma, r^{12}r^{13} >= 0$$

No obstante, es inmediato comprobar[2] que:

$< \beta \otimes \gamma \otimes \alpha, r^{12}r^{13} >=< \gamma \otimes \alpha \otimes \beta, r^{31}r^{32} >$
$< \alpha \otimes \beta \otimes \gamma, r^{12}r^{13} >=< \gamma \otimes \alpha \otimes \beta, r^{23}r^{21} >$

Por tanto, obtenemos que

$$< \gamma \otimes \alpha \otimes \beta, r^{12}r^{13} + r^{31}r^{32} + r^{23}r^{21} >= 0$$

Es decir, como $E \otimes E \otimes E$ es denso en $(A \otimes A \otimes A)^*$, tenemos que

$$r^{12}r^{13} + r^{31}r^{32} + r^{23}r^{21} = 0$$

o equivalentemente (ya que $r^{ij} = -r^{ji}$)

$$r^{12}r^{13} + r^{13}r^{23} - r^{23}r^{12} = 0$$

lo que prueba que r cumple la versión asociativa de la ecuación clásica de Yang-Baxter.

Ahora supondremos que (A, r) es una biálgebra triangular, para cierta $r = \sum \lambda_{ij} x_i \otimes x_j \in A \wedge A$ con $\lambda_{ij} = -\lambda ji$. Consideramos $D(A) = A \oplus A^*$, y definimos $\rho : A^* \to A$ con $\rho(\alpha) =< 1 \otimes \alpha, r >= \sum \lambda_{ij} < \alpha, x_j > x_i$. Definimos $E = Im(Id + \rho) = \{\alpha + \rho(\alpha) | \alpha \in A^*\}$. Claramente $D(A) = A \oplus E$, de manera que probaremos que E es una subálgebra trivial de $D(A)$ y que es totalmente isotrópico.

[2] Igual esto se podría demostrar o hacer más hincapié, aunque efectivamente es inmediato

Para lo segundo, basta ver que si $\alpha, \beta \in A^*$, tenemos que

$$< \alpha + \rho(\alpha), \beta + \rho(\beta) >=< \rho(\alpha), \beta > + < \alpha, \rho(\beta) >=$$

$$=<< 1 \otimes \alpha, r >, \beta > + < \alpha, < 1 \otimes \beta, r >>=< \beta \otimes \alpha, r > + < \alpha \otimes \beta, r >= 0$$

ya que $r \in A \wedge A$. Es decir, E es totalmente isotrópico.

Ahora queremos ver que $(\alpha + \rho(\alpha))(\beta + \rho(\beta)) = \alpha\beta + \rho(\alpha)\beta + \alpha\rho(\beta) + \rho(\alpha)\rho(\beta) = 0$. Para ello, probaremos que es ortogonal a cualquier elemento de $D(A)$.

Primero, si $x \in A$, tenemos

$$(*) < x, \alpha\beta + \rho(\alpha)\beta + \alpha\rho(\beta) + \rho(\alpha)\rho(\beta) >=< x, \alpha\beta > + < x, \rho(\alpha)\beta) > + < x, \alpha\rho(\beta) >$$

Pero

$$< x, \alpha\beta >=< \alpha \otimes \beta, (1 \otimes x)r - r(x \otimes 1) >=$$
$$=< \beta, < \alpha \otimes 1, (1 \otimes x)r >> - < \alpha, < 1 \otimes \beta, r(x \otimes 1) >>=$$
$$=< \beta, x \cdot < \alpha \otimes 1, r >> - < \alpha, < 1 \otimes \beta, r > \cdot x >=$$
$$=< \beta, x \cdot \rho(\alpha) > - < \alpha, \rho(\beta) \cdot x >= - < x, \rho(\alpha)\beta) > - < x, \alpha\rho(\beta) >$$

ya que $r \in A \wedge A$. Es decir

$$< x, \alpha\beta >= - < x, \rho(\alpha)\beta) > - < x, \alpha\rho(\beta) > \tag{3.2}$$

Por tanto, $(*) = 0$. Finalmente, sea $\gamma \in A^*$. El producto queda

$$(**) < \gamma, \rho(\alpha)\beta) > + < \gamma, \alpha\rho(\beta) > + < \gamma, \rho(\alpha)\rho(\beta) >$$

$$< \gamma, \rho(\alpha)\beta >=< \beta\gamma, \rho(\alpha) >= \sum \lambda_{ij} < \beta\gamma, < \alpha, x_j > x_i >=$$

$$= \sum \lambda_{ij} < \alpha, x_j >< \beta \otimes \gamma, \Delta(x_j) >=$$

$$= \sum \lambda_{ij} < \alpha, x_j >< \beta \otimes \gamma, (1 \otimes x_i)r - r(x_i \otimes 1) >=$$
$$= \sum \lambda_{ij} < \alpha, x_j > (- < \gamma, x_i \rho(\beta) > - < \beta, \rho(\gamma) x_i >) =$$
$$= - < \gamma, \left(\sum \lambda_{ij} < \alpha, x_j > x_i \right) \rho(\beta) > - < \beta, \rho(\gamma) \left(\sum \lambda_{ij} < \alpha, x_j > x_i \right) >=$$
$$= - < \gamma, \rho(\alpha)\rho(\beta) > - < \beta, \rho(\gamma)\rho(\alpha) >$$

De manera similar, tenemos que

$$< \gamma, \alpha\rho(\beta) >= - < \alpha, \rho(\beta)\rho(\gamma) > - < \gamma, \rho(\alpha)\rho(\beta) >$$

Por lo tanto $(**)$ se convierte en

$$- < \beta, \rho(\gamma)\rho(\alpha) > - < \alpha, \rho(\beta)\rho(\gamma) > - < \gamma, \rho(\alpha)\rho(\beta) >$$

Que es 0 siempre y cuando r satisfaga CYBE.

$\square$

4. Conclusiones

El resultado que hemos probado en el apartado anterior supone una caracterización de las biálgebras compatibles con el biálgebra trivial, observando la relación de estas con las biálgebras triangulares, además de la relación que hemos visto con la ACYBE a lo largo del trabajo. Esto que hemos probado es igualmente cierto (con, esencialmente la misma demostración) para biállegaras de Lie y, por lo tanto, para las CYBE.

La proyección natural que tiene esta línea de investigación sería tratar de generalizar una caracterización para la compatibilidad de dos biálgebras cualesquiera. Hay que tener en cuenta el grado de complejidad añadida que esto supone, pues estamos hablando de dos comultiplicaciones cualesquiera.

La idea sería caracterizar, incluso, las biálgebras pseudo-cuasi-triangulares, en analogía a la idea desarrollada en (citar aquí el artículo Montaner-Stolin-Zelmanov), donde se determinan las clases de biálgebras pseudo-cuasi-triangulares por la relación de compatibilidad, determinando un elemento r çanónicoz todos los posibles elementos que proporcionan comultiplicaciones compatibles. Las biálgebras pseudo-cuasi-trianqulares son aquellas en las que la derivación Δ_r vienen dadas por una r que no está necesariamente en $A \otimes A$, sino en una compleción de este espacio para una cierta topología inducida por la topología de A (sumas no necesariamente finitas de elementos de $A \otimes A$ [D]). En el caso del artículo [M-S-Z]

Otra posible extensión del trabajo sería tratar de estudiar estas condiciones para otras clases de álgebras (variedades) que resulten de interés. Si Drinfeld planteó estas definiciones para álgebras de Lie y nosotros las hemos estudiado para álgebras asociativas, ¿qué condiciones se generarían para álgebras alternativas (o de Jordan)? Y, más en general, ¿qué condiciones tiene que cumplir una variedad cualquiera de álgebras para que sobre ella se pueda definir la noción de doble de Drinfeld y con ella la de biálgebra en el sentido de Drinfeld? A ese respecto pueden ser importantes los resultados sobre coálgebras contenidos en [A-C-M].

Referencias

[Ag1] Aguiar, M. *On the Associative Analog of Lie Bialgebras*, Journal of Algebra 244, 2001.

[Ag2] Aguiar, M. *Infinitesimal Hopf Algebras*, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 2014.

[C-P] Chari, V. and Pressley, A. *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

[D] Drinfeld, V. *Quantum Groups*, Proceedings International Congress of Mathematicians, Berkeley, 798-820., 1986

[J] Jacobson, N. *Lectures in Abstract Algebra II. Linear Algebra*, Springer, 1953

[M-S-Z] Montaner, F., Stolin, A., Zelmanov, E. *Classification of Lie bialgebras over current algebras*, Selecta Math. (N.S.) 16, no. 4, 935-962, 2010

[A-C-M] Aquella, J.A., Cortés, T., Montaner, F. *Nonassociative Coalgebras*, Comm. Algebra, 22, 4693-4716, 1994

[Sl] Selig, J.M. *A Very Basic Introduction to Hopf Algebras*, Faculty of Business, Computing and Information Management, 2010.

[Sw] Sweedler, M.E. *Hopf Algebras*, Mathematics Lecture Notes Series. Benjamin, New York.,1969

[W] Waterhouse, W.C. *Introduction to Affine Group Schemes*, Springer, 1979

[Z] Zelyabin, V.N. *Jordan Bialgebras And Their Relation to Lie Bialgebras*, Algebra and Logic, 36, 1997.