Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Una propuesta didáctica para la enseñanza de la Combinatoria en 4º de E.S.O.

A didactic proposal for the teaching of Combinatorics for 4º E.S.O.

Autor

Eduardo Royo Amondarain

Director

José Manuel Anoz Menéndez

Facultad de Educación

2019

Índice

A. Introducción

A lo largo del presente Trabajo de Fin de Máster nos proponemos desarrollar una secuencia didáctica que aborde la introducción en la Enseñanza Secundaria Obligatoria de una importante rama de las Matemáticas: la Combinatoria.

La propuesta se realizará para la asignatura *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*, impartida en el 4º curso de la E.S.O. Si acudimos al currículo oficial (Departamento de Educación, Cultura y Deporte, 2016), es precisamente en este curso cuando podemos encontrar entre los contenidos mínimos del bloque de Probabilidad y Estadística una mención explícita a la combinatoria, además de a otros contenidos relacionados con esta. De entre estos, abordaremos con mayor profundidad los siguientes:

- Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.
- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.
- Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.

Así mismo, se utilizarán como guía los siguientes criterios de evaluación, presentes también en el currículo autonómico:

- Crit.MAAC.5.1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.
- Crit.MAAC.5.2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.

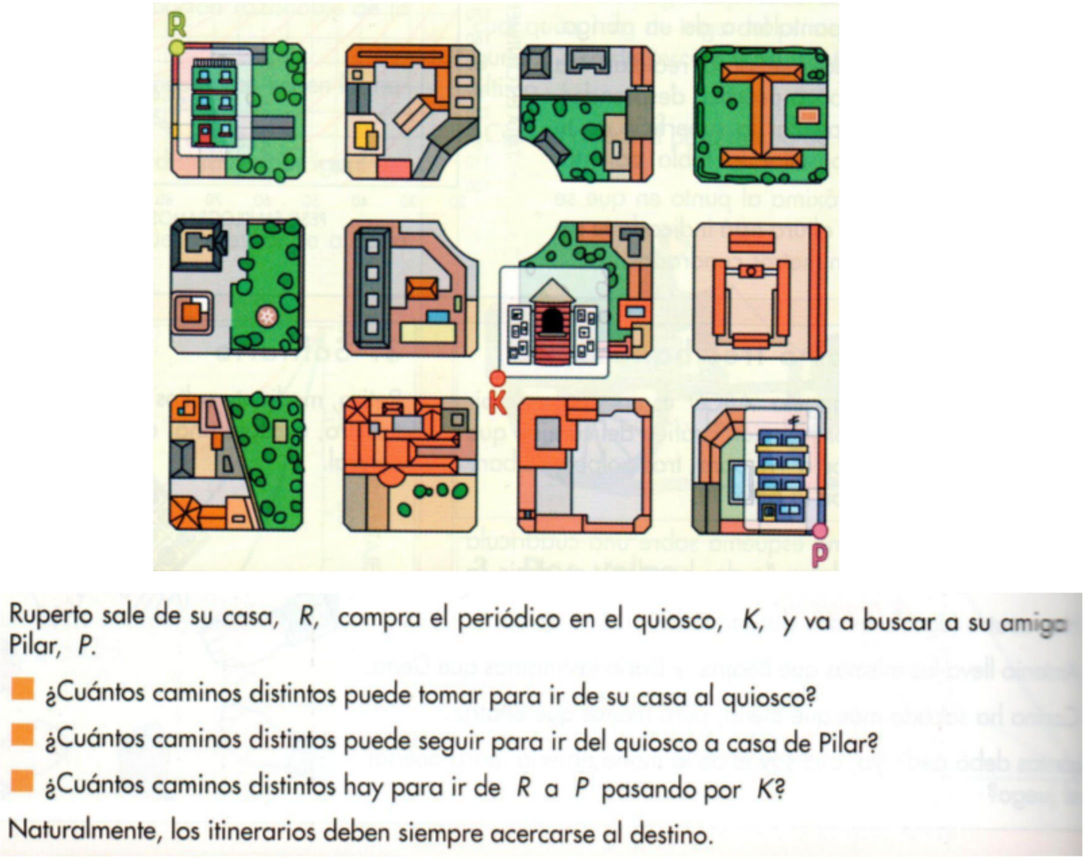
Respecto a la metodología, esta propuesta se vertebra en torno a dos ejes. En primer lugar, buscamos justificar la necesidad de estudiar combinatoria aludiendo a sus aplicaciones. Para ello, nos valdremos tanto de contextos cotidianos cercanos al alumnado como de su utilización instrumental para otras disciplinas, como la Física Estadística o la Termodinámica. En segundo lugar, adoptaremos un enfoque basado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999), tratando así de seguir una secuencia de momentos de estudio que aborde el trabajo autónomo del alumnado con carácter previo a la institucionalización de los nuevos conceptos. De esta forma, los campos de problemas se plantearán poniendo en el centro el contexto, tanto cotidiano como físico, y el hecho de que puedan constituirse en razón de ser de las técnicas y de sus correspondientes tecnologías. Estos abordarán situaciones en las que sea necesario contar, agrupar u ordenar ciertos conjuntos, que podrán o no contener repeticiones. Así mismo, se analizarán casos en los que pueda o no importar el orden de los elementos. Mediante estos problemas, se introducirán las técnicas de variaciones, permutaciones y combinaciones. Además, se aprovecharán estos conceptos para introducir la notación factorial y combinatoria, finalizando la unidad con el conocido triángulo de Pascal aplicado a la deducción de las propiedades de los números combinatorios y el binomio de Newton.

A lo largo del presente documento desarrollaremos los aspectos anteriores, comenzando en la Sección B por un análisis del tratamiento habitual de los conceptos estudiados a la hora de introducirlos en la Educación Secundaria. Tras establecer en la Sección C los conocimientos previos que ha de tener el alumnado para afrontar con éxito la secuencia didáctica diseñada, en la Sección D se presentarán los problemas que ejercerán de razón de ser de la Combinatoria. La Sección E se dedica a los campos de problemas que se abordan en la secuencia y cómo estos introducen modificaciones sobre la técnica inicial, mientras que los tipos de ejercicios previstos para ejercitar los nuevos conceptos se recogen en la Sección F. La Sección G trata los momentos de institucionalización de la secuencia propuesta, cuya temporalización se detalla en la Sección H. Por último, en la Sección I se propone una prueba escrita para evaluar el aprendizaje del alumnado, finalizando el documento con las referencias bibliográficas pertinentes.

B. Análisis previo del proceso de enseñanza aprendizaje

En esta sección pretendemos analizar cómo se introduce habitualmente la Combinatoria en la Educación Secundaria. Para ello, hemos estudiado varias propuestas didácticas dirigidas a 4º de la ESO, de entre las cuales hemos seleccionado dos para un análisis más detallado: una elaborada por la editorial Anaya (Colera y cols., 2004) y otra desarrollada por Marea Verde (Salvador y Molero, 2018).

Respecto a cómo justifican la introducción de la Combinatoria, encontramos diferentes enfoques en las propuestas. En primer lugar, en el libro de Anaya comienza la unidad correspondiente planteando varios problemas, sin proveer mayores explicaciones al respecto, tal y como recogemos en la Figura B.1. Únicamente en la tercera página del tema se define escuetamente la rama de las matemáticas que se va a estudiar (ver Fig. B.2), si bien



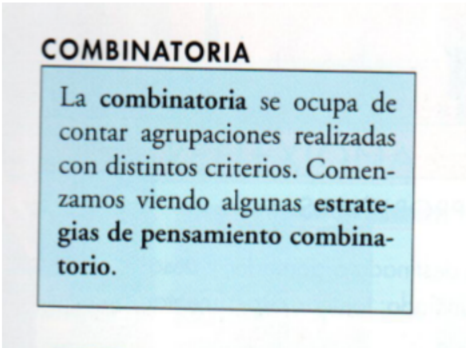
Ruperto sale de su casa, *R*, compra el periódico en el quiosco, *K*, y va a buscar a su amiga Pilar, *P*.

- ¿Cuántos caminos distintos puede tomar para ir de su casa al quiosco?
- ¿Cuántos caminos distintos puede seguir para ir del quiosco a casa de Pilar?
- ¿Cuántos caminos distintos hay para ir de *R* a *P* pasando por *K*?

Naturalmente, los itinerarios deben siempre acercarse al destino.

Figura B.1: Justificación de la combinatoria en la propuesta de Anaya (Colera y cols., 2004).

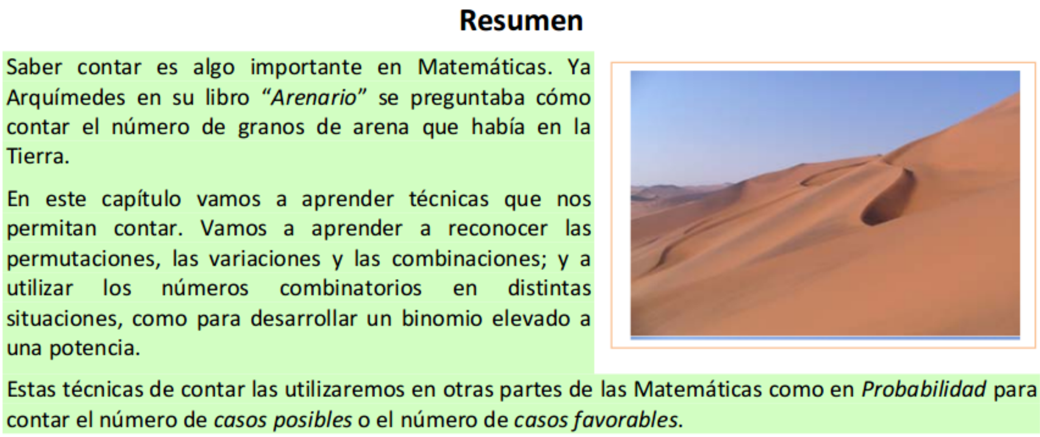
no encontramos ninguna justificación explícita acerca de la necesidad de su introducción. En cualquier caso, consideramos que la justificación se lleva a cabo de forma implícita, a través de los problemas que se van proponiendo en el texto, relacionados en todos los casos con elecciones que han de ser tomadas en diferentes contextos. Por su parte, en la propuesta de Marea Verde sí encontramos un primer párrafo destinado a justificar la necesidad de introducir la combinatoria, que además aprovecha para hacer referencia a las nuevas técnicas que se abordarán en la unidad. Como vemos en la Fig. B.3, se lleva a cabo una referencia histórica a Arquímedes (quizá poco apropiada, al no ser un problema que guarde gran relación con la unidad), y se alude a la naturaleza instrumental que tiene la disciplina en relación con la Probabilidad.



COMBINATORIA

La **combinatoria** se ocupa de contar agrupaciones realizadas con distintos criterios. Comenzamos viendo algunas **estrategias de pensamiento combinatorio.**

Figura B.2: Definición de la combinatoria en la propuesta de Anaya (Colera y cols., 2004).



Resumen

Saber contar es algo importante en Matemáticas. Ya Arquímedes en su libro *"Arenario"* se preguntaba cómo contar el número de granos de arena que había en la Tierra.

En este capítulo vamos a aprender técnicas que nos permitan contar. Vamos a aprender a reconocer las permutaciones, las variaciones y las combinaciones; y a utilizar los números combinatorios en distintas situaciones, como para desarrollar un binomio elevado a una potencia.

Estas técnicas de contar las utilizaremos en otras partes de las Matemáticas como en *Probabilidad* para contar el número de *casos posibles* o el número de *casos favorables*.

Figura B.3: Justificación de la combinatoria en la propuesta de Marea Verde (Salvador y Molero, 2018).

En lo que respecta a los campos de problemas, técnicas y tecnologías, el texto de Marea Verde introduce de forma sucesiva las diferentes definiciones, para posteriormente dar algunos ejemplos resueltos que sirven de justificación de cada una de las técnicas que se presentan. Así, tras cada una de estas técnicas, se plantean una serie de ejercicios con los que trabajar el objeto que se acaba de introducir. Únicamente cuando ya se han presentado todos ellos, y tras una nueva sección de ejercicios circunscritos a cada una de las técnicas, se incluye una sección de problemas. En el texto de Anaya en cambio, se opta por presentar en primer lugar algunos problemas seleccionados que motiven los conceptos a introducir, para a continuación introducir parte de las técnicas (el principio multiplicativo y el diagrama de árbol, justificadas en ambos casos mediante ejemplos resueltos) y proponer una serie de actividades con las que trabajar dichas técnicas. El resto de la unidad, en la que se presentan el resto de técnicas y objetos matemáticos, se estructura de forma similar a la propuesta de Marea Verde: discurso tecnológico a través de ejemplos resueltos, seguido de la presentación de la técnica general y una propuesta de actividades asociadas a cada una de las técnicas, finalizando la unidad con una colección de problemas. En ambos casos, las técnicas introducidas son similares; plasmamos como referencia un listado con las presentadas en la propuesta de Anaya, incluyendo algunas de las definiciones dadas (con mínimas modificaciones):

- **Diagramas en árbol.** Se introduce esta técnica mediante ejemplos concretos (reparto de trofeos y posibilidades de acierto en una quiniela).
- **Variaciones con repetición.** Disponemos de m elementos. Las agrupaciones ordenadas de n de ellos se llaman variaciones con repetición. Al número de ellas se le designa por
$$VR_{m,n} = m^n.$$
- **Variaciones sin repetición.** Disponemos de m elementos. Las agrupaciones ordenadas de n de ellos, sin que se repita ninguno, se llaman variaciones sin repetición u ordinarias. Al número de ellas se le designa por
$$V_{m,n} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots}_{n \text{ factores decrecientes}}.$$
- **Permutaciones.** Las distintas formas en que se pueden ordenar los m elementos de un conjunto se llaman permutaciones. Su número se designa por P_m y es igual al

número de variaciones de m elementos tomados de m en m, esto es,

$$P_m = V_{m,m} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

- **Combinaciones.** Disponemos de m elementos. Se llaman combinaciones a las distintas agrupaciones que se pueden formar tomando n de ellos, sin que se puedan repetir. Su número se designa por $C_{n,m}$, y viene dado por

$$C_{m,n} = \frac{V_{m.n}}{P_m}.$$

- **Factoriales y números combinatorios.** Al producto de n factores decrecientes

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1,$$

se le denota también por $n!$, y al número $C_{m,n}$ se le designa también por $C_{m,n} = \binom{m}{n}$, y verifica las siguientes propiedades:

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1, \tag{B.1}$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}, \tag{B.2}$$

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{m}. \tag{B.3}$$

- **Triángulo de Tartaglia/Pascal y Binomio de Newton.**

Por otro lado, conviene introducir en este punto la categorización de los problemas simples de combinatoria que emplean Dubois (1984) y Batanero y cols. (1997), y que permite clasificarlos atendiendo a cuatro dimensiones, que resumimos a continuación:

- **Modelo implícito combinatorio**, que puede basarse en la *selección* de una muestra de objetos de una de igual o mayor tamaño, en la *distribución* de un conjunto de objetos sobre otro (habitualmente contextualizado en un reparto en cajas, diferentes o idénticas) o en la *partición* de un conjunto en varios subconjuntos de menor tamaño.

- **Tipo de operación combinatoria**, dependiendo de si la solución al problema es una permutación, una variación o una combinación (con o sin repetición, en los últimos dos casos).

- **Objetos involucrados**. Números, letras, personas u otros elementos.

- **Valores de** m **y** n. Mayores o menores dependiendo la intención didáctica.

Entre los resultados obtenidos por Batanero y cols. (1997), que analizan las competencias en combinatoria de un conjunto de alumnos de Secundaria antes y después de ser instruidos en esta disciplina, cabe destacar el hecho de que únicamente al enfrentarse a los problemas de *selección* los alumnos instruidos demuestran una ventaja notable, siendo esta mucho menor cuando el modelo implícito de las cuestiones planteadas se correspondía con *distribuciones* o *particiones*. Este efecto es atribuido por parte de los autores a un sesgo en los campos de problemas presentados en los manuales, que priman el modelo de selección e incluso llegan a omitir los correspondientes a las particiones. A este respecto, cabe destacar que los campos de problemas propuestos en los dos textos que aquí analizamos no escapan a este sesgo y, aun cuando introducen problemas variados en lo que al resto de dimensiones planteadas se refiere, dan una gran preferencia al modelo implícito de selección, siendo esta tendencia más acusada en la propuesta de Colera y cols. (2004).

Finalmente, cabe destacar algunas conclusiones adicionales al respecto de los efectos que ambos enfoques tienen en el proceso de enseñanza aprendizaje. En primer lugar, de la propuesta de Anaya valoramos positivamente que se plantee un momento de primer encuentro y exploratorio, que da la oportunidad al alumnado de desarrollar por sí mismo las técnicas necesarias para enfrentarse a los nuevos campos de problemas, favoreciendo en definitiva el desarrollo del pensamiento autónomo (English, 2005). No obstante, consideramos que los contextos elegidos para ello son mejorables. Un ejemplo de esto sería uno de los problemas introductorios, que pregunta sobre las diferentes formas de plegar sellos. Así mismo, se echa en falta una motivación algo más explícita de los nuevos conceptos que se introducen.

Respecto de la propuesta de Marea Verde, consideramos positivo el intento de introducir elementos del desarrollo histórico de las matemáticas, motivando así la presentación de los nuevos conceptos. No obstante, creemos que debe llevarse a cabo un esfuerzo mayor en este aspecto, que permita conectar la historia de las matemáticas con el planteamiento de problemas que puedan servir para llevar a cabo un momento de estudio exploratorio por parte del alumnado.

C. Conocimientos previos del alumnado

Dado que el principal objetivo de la secuencia didáctica diseñada es introducir los conceptos básicos asociados a la Combinatoria (combinaciones, permutaciones y variaciones), la necesidad de conocimientos previos por parte del alumnado será reducida para esta parte. No obstante, dado que estos objetos se conectan con la Probabilidad a través de la regla de Laplace, será necesaria cierta familiaridad con el vocabulario y la terminología empleada para cuantificar situaciones relacionadas con el azar. Además, el empleo de factoriales y en general de fracciones que involucran productos de enteros en numerador y denominador, requiere de una mínima soltura a la hora de simplificar fracciones, así como un conocimiento de las propiedades básicas de sumas y productos (incluyendo por ejemplo la conmutatividad de ambas o la propiedad distributiva).

Si tenemos en cuenta el currículo previo seguido por el alumnado, tanto en las *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas* de 3º de la E.S.O. como en la asignatura *Matemáticas* de 1º y 2º, encontramos entre otros los siguientes contenidos mínimos y criterios de evaluación asociados:

1º y 2º ESO - Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones.
- Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural. Operaciones.
- Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.
- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.
3º ESO - Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos. Permutaciones, factorial de un número.
- Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.

1º y 2º ESO - Crit.MA.2.1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.
- Crit.MA.2.2. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números

en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.
- Crit.MA.2.3. Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental.
- Crit.MA.2.4. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.
- Crit.MA.2.6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.
3ºESO - Crit.MAAC.5.4. Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento.

A la vista de la lista anterior, así como de otros aspectos del currículo que no hemos mencionado explícitamente, consideramos razonable esperar que la formación previa del alumnado cumpla con los mínimos requeridos para afrontar la secuencia propuesta con éxito.

En cualquier caso, con el objetivo de garantizar que en efecto los contenidos previos necesarios están adquiridos, se prevén varias medidas. Respecto al manejo de fracciones, en una programación didáctica ordenada de la forma habitual el docente habría impartido con anterioridad los contenidos correspondientes, por lo que si existiese cualquier deficiencia en este ámbito podría haber sido detectada y, en su caso, subsanada. Por otro lado, los problemas que se utilizan como razón de ser en la primera sesión de la secuencia (descritos en la siguiente sección), cumplirán también una función de evaluación inicial sobre los conocimientos de probabilidad del alumnado. De este modo, si se detectan carencias que impidan o dificulten la impartición de la secuencia, se recomienda dedicar una sesión adicional a refrescar los saberes previos y trabajar las técnicas ya conocidas con problemas sencillos de Probabilidad. Finalmente, el trabajo en el aula se estructurará en grupos, favoreciendo así que los estudiantes puedan comparar y compartir sus técnicas y soluciones (English, 2005), y con lo que se espera también minimizar el impacto de las lagunas individuales que el alumnado pueda tener.

D. Razón de ser

Para nuestra propuesta de razón de ser de la combinatria vamos a rescatar elementos de los textos analizados en la Sección B que valoramos positivamente. Tal y como argumentábamos, consideramos apropiado comenzar con una serie de problemas que puedan generar un momento de estudio de primer encuentro o exploratorio, en términos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). Así mismo, pretendemos dotar a estas cuestiones generatrices de un contexto cercano al alumno, que pruebe su valor tanto para la vida cotidiana como para el desarrollo de otras disciplinas matemáticas y científico-técnicas. Por otro lado, destacábamos también el valor de introducir elementos de la **historia de las matemáticas** en la introducción de sus conceptos, aspecto que también trataremos de abordar en esta propuesta.

En línea con lo expuesto anteriormente, como razón de ser de la combinatoria emplearemos problemas contextualizados en diferentes ámbitos. En primer lugar, en **situaciones cercanas al alumno** (que puedan despertar su motivación) como pueden ser los relacionados con diferentes tipos de juegos (por ejemplo juegos de mesa o de cartas, torneos deportivos, etc.). Además, se introducirán también problemas relacionados con la **física estadística**, que servirán para poner de manifiesto el carácter instrumental de los conceptos presentados a la hora de abordar estudios superiores. Conviene aclarar que la conveniencia de este último punto estará supeditada a un buen funcionamiento del grupo clase, que cuente con un grado de motivación suficientemente alto para este tipo de cuestiones. En cualquier caso, si el docente que impartiese la secuencia así lo decidiese, el contexto de estos últimos problemas podría ser sustituido por uno más clásico, como aclararemos más adelante.

Cabe destacar que entre las razones históricas que dieron origen a esta disciplina matemática se encuentra la correspondencia entre Pascal y Fermat acerca de varios juegos de apuestas. Con este hecho en mente, nos proponemos también introducir algunos conceptos a través de los mismos problemas que estos dos célebres matemáticos resolvieron en sus cartas, y que históricamente sirvieron para formalizar el estudio de la Probabilidad y la Combinatoria.

Así, planteamos una secuencia de tres primeros problemas que se abordarán en la secuencia didáctica durante su primera sesión, y que servirán como razón de ser de la combinatoria. Los enunciados facilitados al alumnado serán los siguientes:

Actividad 1. Lanzando dados.

Antoine Gombard, *Caballero de Meré*, era un aristócrata francés aficionado a los juegos de azar. Por su experiencia con los dados, sabía que resulta ventajoso apostar a que saldrá al menos un seis al lanzar 4 veces un dado convencional. ¿Sabrías demostrar si estaba en lo cierto?

Actividad 2. A por el doble seis.

Basándose en el resultado anterior, también pensaba que sacar un seis doble al lanzar dos dados, era *seis veces más difícil* que sacar un seis lanzando solo uno. Así, deducía que si lanzaba dos dados un total de 24 veces (6 veces más que en la apuesta anterior), también sería ventajoso apostar a que saliese al menos un seis doble. Como en este segundo caso siempre acababa perdiendo dinero, recurrió a un gran matemático de la época, Pascal, para que le diese una explicación del fenómeno. Ponte en la piel de este insigne matemático y trata de proporcionar una respuesta al *Caballero de Meré*.

Actividad 3. No hay tiempo para más.

Para resolver problemas como los que hemos visto, Pascal se puso en contacto con un contemporáneo suyo, Fermat. Ambos se cartearon durante un tiempo, y en esas misivas resolvieron diferentes problemas matemáticos, creando para ello herramientas que hasta entonces no existían. Trata de resolver uno de estos problemas, que puede enunciarse así: "Dos personas apuestan cierta cantidad de dinero. Para decidir quién se lo lleva, se lo juegan a cara o cruz, pero es necesario puntuar 5 veces para ganar. En cierto momento de la partida, cuando van 4 a 3, se ven forzados a interrumpir el juego. ¿Cómo tendrían que hacer el reparto para que fuese *lo más justo posible*?".

Respecto a la metodología de impartición, los enunciados anteriores se deberán repartir entre el alumnado, que se organizaría en pequeños grupos de 2 ó 3 personas. Tras una breve introducción histórica y motivacional, pero sin indicaciones sobre las técnicas a utilizar, se señalaría que pueden comenzar a resolver las cuestiones planteadas. Se espera que de esta forma el alumnado trabaje autónomamente, recordando las técnicas adquiridas durante el curso anterior pero también dando la oportunidad de que se desarrollen técnicas propias (English, 2005). A lo largo de la sesión, y especialmente en los momentos en los que los que los diferentes grupos vayan avanzando con cada problema, se contrastarán las diferentes ideas surgidas, de forma que los propios estudiantes pongan en común sus progresos. Para llevar a cabo esta dinámica, el profesor/a supervisaría este proceso y seleccionaría algunas de las resoluciones (o *intentos de*), invitando al alumnado a comunicar sus resultados a la clase, pudiendo recibir cierta ayuda del propio profesor.

Con los dos primeros problemas propuestos, se espera poder trabajar algunos conceptos de probabilidad, como el principio multiplicativo o la regla de Laplace. Dependiendo de las propuestas del alumnado (por ejemplo si se detectan algunas carencias en los conocimientos previos del alumnado), el profesor podría recordar brevemente la regla de Laplace, con el objetivo de que ningún grupo se quedase totalmente bloqueado.

Por otra parte, con el tercer problema se pretende fomentar la capacidad de reflexión sobre algunos conceptos propios de la probabilidad, en especial al tener la necesidad de dar un significado concreto al enunciado "*lo más justo posible*". Se prevé que entre los intentos de solución para este segundo problema esté un reparto proporcional a los puntos; en esta coyuntura, se argumentaría la problemática que supone si se intenta extender a otros casos en los que uno de los dos jugadores no haya puntuado (y sin embargo tenga posibilidades de ganar, por lo que no parece razonable que no se lleve nada en el reparto). Si bien este problema se presta a una resolución mediante un diagrama de árbol, si este no surgiese del propio alumnado se evitaría su institucionalización por parte del docente, reservando este momento para la Actividad 5, que se llevaría a cabo en la siguiente sesión.

E. Campo de problemas

En esta sección presentamos los diferentes problemas que se presentarán a lo largo de la secuencia didáctica, y que nos servirán como punto de partida para que el alumnado se aproxime a los conceptos matemáticos que queremos estudiar.

Antes de exponer las actividades que conforman la secuencia didáctica, conviene resaltar que se han seguido las recomendaciones de Batanero y cols. (1997) a la hora de plantear siguiente colección de problemas. Así, teniendo en cuenta las observaciones realizadas en la Sección B, la principal diferencia de nuestra propuesta con las de (Colera y cols., 2004) y (Salvador y Molero, 2018) es que a los campos de problemas planteados en ambos manuales (que incluyen problemas con contextos cercanos al alumno para variaciones, permutaciones y combinaciones), se añaden por un lado problemas con un contexto cercano a la Física Estadística, y por otro se trata de paliar el acusado sesgo en favor de los problemas de selección, incluyendo para ello enunciados basados en la distribución y la partición de conjuntos.

En primer lugar planteamos un problema de clasificación de enunciados, cuya resolución debe ser en la medida de lo posible grupal. Para ello, presentaremos al alumnado una serie de enunciados de diferentes ejercicios de combinatoria, incluyendo situaciones que ejemplifiquen los principales conceptos a abordar durante la secuencia: variaciones con repetición, variaciones ordinarias, permutaciones, combinaciones y combinaciones con repetición. Así, a cada estudiante se le entrega un papel con uno de los enunciados impresos, y se explica que deberán formar cinco grupos según el *tipo* de problema matemático que les ha tocado. Para una clase con 25 alumnos, proponemos los enunciados presentados en la Sección F (desde F.1 hasta F.25). Se plantea el siguiente enunciado:

Actividad 4. Cada oveja con su pareja.

Lee con atención el ejercicio que te ha tocado, se trata de un problema de *Combinatoria*, que se soluciona *contando*. Pero atención, la actividad de hoy **no consiste en encontrar la solución** al enunciado. En vez de eso, **compara tu enunciado** con el de otros compañeros y compañeras, y busca similitudes y diferencias.
La tarea es la siguiente: al final de la clase deberá haber 5 grupos clasificados según el *tipo de problema*, y deberéis argumentar por qué os habéis organizado así.

Conforme la actividad avance, se espera que el alumnado conjeture sobre las características que hacen diferentes a unos problemas de otros, pudiendo aparecer de forma natural las ideas de repetición y orden. Al finalizar la actividad se conformarán 5 grupos, cada uno de los cuales deberá explicar cuáles son los motivos matemáticos que les han llevado a agruparse de esa forma. Esta institucionalización por parte de los alumnos se recogerá por escrito, de forma que más adelante puedan revisarla y, en su caso, corregirla. En cualquier caso, cada grupo recibiría el nombre correspondiente a la categoría de los problemas que lo forman.

Tras la actividad anterior, se procederá a una recontextualización de los primeros problemas de la secuencia, debiendo modificar técnica inicial (uso de los saberes previos sobre la probabilidad, aplicando el principio multiplicativo a los sucesos independientes), para pasar a un conteo de casos favorables que puede realizarse en términos de variaciones con repetición. Además, se asegurará la introducción de los diagramas de árbol a través de la Actividad 3 (la última actividad de la primera sesión).

Actividad 5. Reinterpretación de la primera sesión.

1. En la primera sesión nos planteábamos la probabilidad de sacar al menos un seis lanzando un dado cuatro veces. ¿Puedes replantear este problema para que encaje en alguno de los grupos que hemos creado?

2. En la Activdad 3 estudiamos la situación de dos jugadores que apuestan para ver quién llega antes a 5 caras (o a 5 cruces) y que, en un momento dado, van 4 a 3. Una herramienta muy útil que ayuda a resolver este problema es el llamado **diagrama de árbol**, con el que podemos ir analizando todas las opciones posibles. Aplicado a este caso, tendríamos algo así:

4 – 3

5 – 3   4 – 4

5 – 4   4 – 5

Completa el diagrama anterior indicando la probabilidad de llegar a cada uno de los resultados finales.

3. Utiliza la técnica anterior para estudiar los siguientes casos:

a) Cuando van empate a 3 caras y 3 cruces.

b) Cuando han salido 4 caras y ninguna cruz.

La actividad se trabajaría en los recién creados grupos y finalizaría con una puesta en común de las conclusiones alcanzadas, que idealmente incluiría una institucionalización por parte del alumnado de las variaciones con repetición. En caso contrario, esta correría a cargo del profesor, que aclararía que el problema puede encajarse en las variaciones con repetición, y cómo estas se resuelven de forma sencilla gracias al principio multiplicativo. Por otra parte, se espera que los apartados dedicados al diagrama de árbol sirvan para ejemplificar su utilidad a la hora de registrar todas las configuraciones posibles en un problema dado, pudiendo así potenciar su uso para las actividades siguientes. En el caso de que el alumnado no supiese trabajar con ellos, el profesor/a resolvería dos ejemplos sencillos en la pizarra, explicando con detalle el funcionamiento de estos diagramas y haciendo hincapié en los principos de exclusión y exahustividad que deben regir su construcción.

A continuación se plantea una actividad para abordar las variaciones ordinarias o sin repetición (o simplemente variaciones). Para ello se plantea el siguiente problema, de contexto relativamente familiar:

Actividad 6. El acceso a los Grados.

A la hora de estudiar un grado (tanto los correspondientes a los Ciclos Formativos como a la Universidad), existe una gran demanda que hace que muchas personas no puedan acceder a su primera opción. Para repartir las plazas disponibles, se pide antes de iniciar el curso cada alumno y alumna rellene una lista con sus preferencias ordenadas. Imagina que consideras una oferta de 10 estudios diferentes, pero que al rellenar la lista únicamente puedes elegir 5 de ellos (en el orden que desees). ¿De cuántas formas puedes cumplimentar la solicitud?

En un primer momento, se pregunta a los grupos en qué categoría ubican el problema presentado, permitiendo un debate abierto si existen discrepancias al respecto. Una vez se resuelva esta cuestión (contando con la asistencia del profesor/a si lo estimase necesario), se indica al alumnado que deben buscar una estrategia para resolverlo. Si se detectan dificultades, puede sugerirse que se intente resolver cambiando los datos por otros más sencillos, tratando de generalizar el proceso. Una vez finalizada la actividad, se propone la siguiente modificación, que introduce las permutaciones:

Actividad 7. Ya he elegido pero, ¿cómo lo ordeno?

En el caso anterior, imagina que la normativa te permite escribir en una lista los 10 estudios que quieres solicitar. ¿De cuántas formas podrías ordenar la lista resultante?

Análogamente al problema anterior, se pregunta en primer lugar en qué categoría engloban la situación, para a continuación indicar que deben resolverla. Una vez finalizada la actividad, se abrirá paso a un momento de institucionalización de los conceptos tratados (variaciones y permutaciones), procurando que sean los propios alumnos los que las definan y expliquen las técnicas que les han permitido resolver los problemas, procurando generalizar el proceso. En este punto, el profesor/a recordará la notación del factorial (introducido ya en el curso pasado) mediante la siguiente activdad:

Actividad 8. Simplificando la notación: el factorial.

El curso pasado vimos cómo el producto de los primeros n números enteros podía expresarse de forma abreviada mediante la notación del factorial, denotado por una exclamación. Es decir,

$$n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Trata de aprovechar esta notación para simplificar las expresiones de las **variaciones** y las **permutaciones**.

Al finalizar la sesión, se procurará que el alumnado conozca las expresiones generales de variaciones y permutaciones, utilizando además la notación factorial.

A continuación se plantean dos problemas que ejemplifican la necesidad de abordar el estudio de la combinatoria, contextualizándolos dentro de la Física Estadística y que giran en torno al objeto matemático de las *combinaciones*, en primer lugar sin repetición. Cabe destacar que, tal y como advertimos en la Sección D, el contexto de las dos actividades siguientes puede sustituirse, si se estima necesario, por un reparto de bolas idénticas en cajas diferenciadas.

Actividad 9. Combinando fermiones.

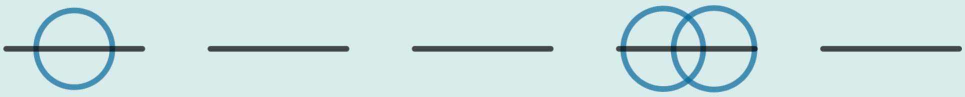
Como sabrás por otras asignaturas, la materia se compone de diferentes partículas, como el electrón, el protón o el neutrón. Estas partículas pertenecen a una familia mayor, los *fermiones* (denominados así en honor al físico italiano Enrico Fermi). Los fermiones se reparten en niveles de energía de manera que, en cada nivel, puede bien no haber fermión, bien haber uno (pero no más). Sabiendo lo anterior, ¿de cuántas formas podrán repartirse 3 fermiones idénticos en 5 niveles de energía?

Una posible configuración de fermiones.

Al plantear este primer problema, seguiríamos con la filosofía de las actividades anteriores y preguntaríamos en qué grupo deberíamos ubicar esta situación y por qué, garantizando que en la reflexión colectiva se hiciese hincapié en que la principal diferencia con los casos vistos anteriormente es la no ordenación del conjunto seleccionado. Tras esto, se daría paso a que buscasen estrategias para resolver el problema, sugiriendo en su caso que comenzasen por otros repartos (por ejemplo manteniendo los 5 niveles de energía pero repartiendo 1, 2, 4 ó 5 fermiones, y variando después también el número de niveles), para posteriormente tratar de generalizar el proceso. Superada la actividad, se daría paso a la siguiente extensión, que introduce las combinaciones con repeticiones:

Actividad 10. ¿Y los bosones?

Además de los fermiones, existen otras partículas que no encajan en esta categoría: los *bosones* (un ejemplo es el fotón, el transmisor de la luz). Los bosones también ocupan diferentes niveles de energía pero, a diferencia de los fermiones, en cada nivel pueden alojarse cualquier número de ellos. Entonces, ¿sabrías decir de cuántas formas podrán repartirse 3 bosones idénticos en 5 niveles de energía?



Una configuración de bosones.

En esta actividad se procedería también como en el problema anterior, buscando en todo caso que el trabajo del alumnado fuera lo más autónomo posible. La intención con ambos problemas es que los números combinatorios puedan introducirse a través de su resolución, comenzando por el estudio de algunos casos particulares y tratando de generalizar el proceso mediante su análisis. Por su parte, el Problema 4 exige una reflexión sobre cómo influye la repetición en las formas de agrupar conjuntos sin orden. De esta forma, si bien es posible aplicar la técnica desarrollada para el problema anterior, se hace necesario modificarla para poder resolverlo con éxito. Para ello, si la reinterpretación de las variables en términos de partículas y huecos o separadores no surgiese de forma espontánea, se indicaría al alumnado que tratase casos más sencillos y que tratase de buscar la relación entre ambas situaciones. En este punto se institucionalizarían los números combinatorios, introduciendo además la notación simplificada mediante la siguiente actividad:

Actividad 11. Los números combinatorios.

Las soluciones al problema de los fermiones, con m niveles de energía y n fermiones, aparecen con mucha frecuencia en matemáticas, y por eso disponemos de una notación simplificada para nombrarlos: los números combinatorios $C_{m,n}$, que se escriben así:

$$C_{m,n} \equiv \binom{m}{n}.$$

- Expresa las soluciones a los dos problemas anteriores con esta notación.
- ¿Podrías expresarlas ayudándote de factoriales? Trata de generalizarlo.

Para finalizar la actividad, se indicaría que en las próximas sesiones se estudiarán algunas de las propiedades de estos números, que los hacen más sencillos de lo que parecen.

En efecto, en la siguiente actividad abordamos el estudio de las propiedades más notables de los números complejos, si bien se tratará que sea el propio alumnado el que las deduzca a partir de la visualización de los primeros pisos del triángulo de Tartaglia o Pascal, una vez resuelto:

Actividad 12. El triángulo de Tartaglia/Pascal.

Vamos a estudiar algunas interesantes propiedades de los números combinatorios $C_{m,n}$. Para ello, conviene distribuirlos en forma de pirámide como en la figura, poniendo los que tienen el mismo valor de m en filas, ordenadas de menor a mayor valor de n, como en la siguiente figura:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
m=0 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
m=1 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
m=2 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
m=3 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
m=4 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
m=5 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
m=6 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

- Representa el triángulo anterior sustituyendo cada número por su valor.
- Observa con atención el resultado, ¿qué patrones puedes deducir?
- Expresa las relaciones encontradas mediante números combinatorios.

En esta actividad se espera que el alumnado pueda observar la simetría del triángulo, de la que se deduce que $C_{m,n} = C_{m,m-n}$, así como que los extremos del triángulo son siempre la unidad. Si no surgiese de forma natural que cada número combinatorio puede calcularse a partir de la suma de dos del piso de arriba más cercano (esto es, que $C_{m,n} = C_{m-1,n} + C_{m-1,n-1}$), se sugeriría que intentasen buscar relaciones entre las filas.

Finalmente, esta actividad se dedica al último concepto que queríamos introducir: el binomio de Newton y su conexión con la combinatoria. Para ello, se comienza generalizando una expresión conocida como el cuadrado de la suma y pidiendo calcular los siguientes casos:

Actividad 13. El binomio de Newton

Seguramente la siguiente expresión te resulte familiar:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Si en vez de elevar $(x+y)$ al cuadrado, consideramos un exponente general m, obtenemos el denominado **binomio de Newton.**

- Calcula el binomio de Newton para $m = 3$ y $m = 4$.

$(x+y)^3 =$

$(x+y)^4 =$

- Antes de simplificar las expresiones anteriores, esto es, de agrupar términos idénticos, ¿cuántos sumandos había en cada caso?
- Si ahora nos fijamos en los coeficientes de cada término concreto (por ejemplo, el de x^2y para $m = 3$), ¿cómo podríamos relacionarlos con la combinatoria? ¿Podríamos formular alguna pregunta que encajase en las categorías que venimos estudiando?
- Escribe los coeficientes del binomio para $m = 1,2,3,4$ en filas, disponiéndolos igual que en el triángulo de Tartaglia/Pascal. ¿Qué has obtenido? Trata de explicar el resultado.

A lo largo de esta actividad, se espera que sean capaces de conectar sus conocimientos algebraicos con los nuevos conceptos, en especial con los números combinatorios. Conforme los grupos se vayan enfrentando a los diferentes apartados, el profesor/a deberá fomentar el ejercicio de la conjetura y la reflexión, indicando que para generalizar el proceso deberán utilizar alguno de los objetos matemáticos vistos con anterioridad. Al acabar la actividad, habrá de explicarse cómo, gracias a las propiedades de los números combinatorios, resulta extremadamente sencillo calcular los primeros términos del binomio, lo que les podrá ser de gran utilidad en un futuro.

Para terminar la secuencia, planteamos como colofón una última actividad que permite repasar los principales conceptos de la unidad, relacionándolos mediante progresivas modificaciones del enunciado y poniendo así el foco en las estructuras subyacentes de cada tipo de problema.

Actividad 14. De variaciones a combinaciones

Disponemos de tres cajas, una verde, una roja y una azul. Por cada una de las cajas, disponemos de una pelota de su mismo color.

a) ¿De cuántas formas diferentes podemos emparejar las pelotas y las cajas?

b) ¿De cuántas formas diferentes podemos repartir las pelotas en las cajas?

c) Contesta a los apartados a) y b) suponiendo que las tres pelotas son iguales (por ejemplo, son todas negras).

d) Repite los apartados anteriores para el caso de dos pelotas y recoge tus resultados en una tabla.

Con las variaciones introducidas en un problema de contexto sencillo y baja dificultad operacional, se espera que el alumnado afiance los contenidos anteriores y establezca relaciones entre los diferentes objetos matemáticos, así como que afiance las ideas de repetición, igualdad y disparidad de los objetos combinados, pudiendo razonar qué tipo de configuraciones son posibles en cada caso.

F. Técnicas

A continuación se presenta la colección de ejercicios que se presentará en el aula, y que siguiendo las recomendaciones de Batanero y cols. (1997), trata de cubrir las diferentes dimensiones de un ejercicio de combinatoria básico (descritas en la Sección B). Para ello, se plantean enunciados que cubren las variaciones con y sin repetición, las permutaciones y las combinaciones sin y con repetición, por este orden. Además, se incluyen ejemplos de los tres modelos implícitos descritos por (Dubois, 1984) (selección, distribución y partición), así como contextos cercanos al alumno que exigen combinar objetos, números, letras o personas. Finalmente, para algunos de los problemas se proponen valores de los parámetros m y n altos, con el objetivo de que los métodos de listado e indexación sistemática no puedan ser empleados (o al menos, no sin modificación). Los enunciados son los siguientes:

F.1. Si en mi armario tengo 10 camisetas, 4 pantalones y 3 pares de zapatillas, ¿de cuántas formas diferentes me puedo vestir?

F.2. En la carta de mi restaurante favorito hay cuatro primeros platos, cuatro segundos y cinco postres. ¿Cuántas combinaciones diferentes puedo probar?

F.3. Actualmente, las matrículas de los vehículos se identifican por cuatro números y tres letras (las 27 del abecedario excepto la Q, la Ñ y las vocales). ¿Cuántas matrículas diferentes se pueden hacer por este método?

F.4. Sara colecciona bolígrafos especialmente llamativos y, ante las peticiones de dos de sus amigos, decide compartir con ellos 6 que tiene repetidos, uno de cada color. ¿De cuántas formas puede repartirlos entre ambos? (Darle los seis a uno de los dos también es una opción).

F.5. Durante dos semanas, cinco alumnos y alumnas de intercambio vienen al instituto, y han de asistir a las clases de 3º de la E.S.O., para lo que la dirección del centro debe decidir cómo repartirlos entre los dos grupos existentes, 3ºA y 3ºB. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

F.6. Juan se fue de intercambio a Francia y, a su vuelta, trajo una taza y un imán para regalar a su familia. Quería haber tenido cuatro regalos, uno por persona, pero no le queda otro remedio que elegir cómo repartirlos. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

F.7. Tengo una baraja de cartas española, con 40 cartas en total. ¿De cuántas formas es posible robar dos ases?

F.8. Tres amigas se apuntan a una carrera popular, en la que participan 100 personas, y se preguntan en qué posición quedará cada una. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay?

F.9. Estoy preparando una *playlist* para una fiesta que organizo en casa, y he reducido la selección a 20 canciones. Sin embargo, quiero reducirla todavía más y quedarme con una lista ordenada de 12 temas. ¿Cuántas opciones diferentes tengo para hacerla?

F.10. Jaime tiene en su casa 4 tazas de café y 6 platos en los que apoyarlas, siendo tanto las tazas como los platos diferentes entre sí. ¿De cuántas formas puede servir cuatro cafés?

F.11. En el viaje de fin de curso compré diferentes *souvenirs* para mi familia (mi abuela, mis dos hermanas, mi madre y mi padre). Como fui previsora, compré cinco, así que tengo uno para cada persona, aunque no he decidido cómo repartirlos. ¿De cuántas formas puedo hacerlo?

F.12. Decidimos comprarnos un videojuego entre tres compañeros de clase para que nos salga más barato, y acordamos tenerlo una semana cada uno. Hay que decidir en qué orden se reparte, ¿cuántas opciones tenemos?

F.13. En un laboratorio, debemos verter cuatro sustancias químicas a un matraz, pero no sabemos en qué orden debemos añadirlas. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?

F.14. Nos fijamos en que tenemos 6 libros apilados en la mesa y los recogemos para llevarlos a la estantería. Vamos a colocarlos, pero no nos decidimos sobre en qué orden ponerlos. ¿Cuántas opciones hay?

F.15. Naima lleva en su estuche 4 bolígrafos de la misma marca, de color negro, azul, rojo y verde. Es un poco despistada y suele intercambiar los tapes de los bolígrafos. ¿De cuántas formas diferentes puede combinarlos?

F.16. En Educación Física toca balonmano: somos 14 y me ha tocado elegir a los 6 compañeros y compañeras que irán en mi equipo. ¿Cuántos equipos diferentes puedo hacer?

F.17. Queremos hacer una encuesta en un Instituto que cuenta con 500 estudiantes. Como no tenemos recursos para entrevistar a todos, seleccionamos una muestra de 10 alumnos. ¿De cuántas formas podemos elegirla?

F.18. En una cumbre internacional se reúnen 30 dirigentes políticos, que se saludan entre sí con un apretón de manos. Si todo el mundo se saluda entre sí, ¿cuántos apretones de manos hay?

F.19. A una amiga y a ti os toca en una rifa un juego de 6 dados de colores, todos diferentes entre sí. Si decidís repartir el premio a partes iguales (tres dados para ella y tres para ti), ¿de cuántas formas podéis repartirlos?

F.20. A María le han tocado 3 entradas para ir al concierto de su grupo favorito. ¿De cuántas formas puede repartir dos entradas entre sus cuatro amigos?

F.21. ¿De cuántas formas es posible repartir 5 manzanas en 2 fruteros diferentes?

F.22. Tres amigas estamos cenando y nos preguntan sobre qué postres queremos, dando a elegir entre 5 opciones. Como no lo sabemos, le pedimos dos minutos para pensarlo y cogemos una servilleta para pedir la comanda. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay?

F.23. Voy a la papelería con la intención de comprar cinco bolígrafos azules para mi hermano, y me encuentro con que hay tres marcas que los venden exactamente al mismo precio. ¿De cuántas formas puedo completar el encargo?

F.24. El profesor de Matemáticas indica que pondrá *un positivo* a cada estudiante que salga a resolver un problema a la pizarra durante el primer trimestre, para lo que habrá un total de 20 oportunidades. Si en clase hay 20 alumnos y alumnas, ¿de cuántas formas diferentes se pueden repartir los positivos?

F.25. A mi hermano pequeño le han regalado un sobre con cromos (que, como es bien conocido, pueden ser repetidos). En el sobre vienen 4 cromos, y la colección completa tiene 100. ¿Cuántas combinaciones diferentes de cromos podría haber en el sobre?

Respecto a las técnicas que se espera ejercitar con estos ejercicios, conviene hacer una aclaración. El enfoque metodológico que hemos adoptado, fundado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999), nos lleva a buscar que sea el propio alumnado el que, enfrentándose a una serie de problemas generatrices (descritos en la sección anterior), sea capaz de generar y desarrollar sus propias técnicas. De hecho, se espera que al ser enfrentados a problemas de combinatoria novedosos, sean capaces de desplegar una variedad de estrategias y razonamientos para llegar a su resolución. Tal y como apunta English (2005), en estas circunstancias el alumnado habitualmente trata de proceder mediante el uso de dibujos o diagramas, tablas y listados (que pueden o no ser sistemáticos). Con la ayuda puntual del profesor/a, se espera poder recoger las ideas que vayan surgiendo y, en su caso, institucionalizar las técnicas de consenso surgidas. De esta forma, se garantiza ademaś la adecuación de las técnicas a los campos de problemas propuestos, ya que son precisamente estos últimos los que motivan la necesidad de introducir las primeras.

En cualquier caso, y sin perjuicio de lo anterior, se tendrán como técnicas de referencia hacia las que converger el listado sistemático de casos posibles y los diagramas de árbol. Estos últimos, además de encontrarse entre los contenidos curriculares de obligada impartición, son una de las principales herramientas tanto para representar situaciones relacionadas con la Probabilidad y la Combinatoria como para abordar la resolución de los problemas asociados a ambas ramas (Roldán-López de Hierro y cols., 2018). Por estos motivos y para garantizar la aparición de los diagramas de árbol en la secuencia, se introducen en la Actividad 5, dedicada a reinterpretar los problemas de la primera sesión, con lo que esperamos sirva como punto de partida que fomente su uso. En cualquier caso, si esta presentación de la técnica de forma *guiada* no fuese suficiente para que algunos de los grupos tratasen de aplicarla en las sesiones sucesivas, el profesor/a podría complementar las técnicas propuestas por el alumnado explicando las alternativas correspondientes (esto es, ejemplificando la aplicación del diagrama de árbol a los diferentes problemas).

Respecto a la metodología a seguir, a lo ya mencionado cabe añadir algunas recomendaciones más. Siguiendo con las indicaciones de English (2005), resulta conveniente favorecer el pensamiento autónomo del alumnado, así como dar suficiente libertad para emplear estrategias propias y crear un entorno adecuado en el que estas puedan ser discutidas entre los propios alumnos y alumnas. De forma, las técnicas y tecnologías que surjan de cada estudiante deben comunicarse y sostenerse ante el escrutinio público de sus pares, pudiendo ser rechazadas, aceptadas o, en el caso más general, ampliadas y mejoradas.

G. Tecnologías

Como venimos advirtiendo en las secciones precedentes, la metodología que vertebra la secuencia didáctica que aquí se expone implica que el alumnado se enfrente en primer lugar a problemas novedosos que le exijan, a través de momentos de primer encuentro, generar nuevas técnicas que les permitan enfrentarse a ellos. Además, durante este periodo debe tratar de garantizarse, tal y como propone English (2005), la máxima autonomía por parte del alumnado. Así, permitiendo que exploren diferentes técnicas y representaciones, se posibilita que establezcan las necesarias conexiones entre estas, lo que redunda en una mayor comprensión de las estructuras matemáticas subyacentes.

Una vez completada la primera fase, de carácter exploratorio, los alumnos y alumnas deberán poner en común las técnicas desarrolladas, fomentando el debate grupal acerca de las justificaciones dadas para la validez o idoneidad de cada una de las técnicas comunicadas. De esta forma, se espera que sea el propio alumnado el que asuma buena parte de la responsabilidad en la construcción del discurso tecnológico-teórico, actuando el docente como un agente verificador externo, en la medida en la que esto sea posible. Únicamente al finalizar este proceso se sintetizarían las conclusiones alcanzadas en la pizarra, institucionalizando de esta forma las nuevas técnicas junto con sus tecnologías asociadas.

Entre el tipo de argumentaciones que se espera obtener por parte del alumnado, cabe mencionar la reducción de la complejidad de los problemas planteados mediante el análisis de otros equivalentes, con valores de m y n menores. Así, resolviendo algunos casos sencillos, podría razonarse mediante inducción y llegar tanto a la solución del problema en cuestión como a una generalización que permita expresar el resultado en términos algebraicos. No obstante, se consideraría suficiente alcanzar mediante este método la solución al problema particular, pudiendo quedar la generalización de la expresión algebraica a cargo del docente. Por otro lado, se espera también que el uso de listas sistemáticas y de diagramas de árbol pueda justificar algunas de las técnicas introducidas. A lo largo de la secuencia, se trabajarán al menos las tecnologías necesarias para las fórmulas de las variaciones, permutaciones y combinaciones, además de las propiedades de los números combinatorios, para las que se procurará favorecer una justificación de tipo recursivo (admitiendo para ello el uso de ejemplos concretos). Además, una vez las fórmulas para los diferentes objetos hayan sido institucionalizadas, se demandará al alumnado que a la hora de resolver un problema mediante su aplicación, justifique debidamente las condiciones en las cuáles puede aplicar cada una (por ejemplo, para las combinaciones es necesario que no importe el orden y no puedan repetirse los elementos seleccionados).

En cualquier caso, si el profesor/a considera que las justificaciones provistas por el alumnado carecen de la profundidad necesaria, este asumirá la institucionalización de las técnicas y tecnologías introducidas, si bien tratará de favorecer con anterioridad que sea el propio alumnado el que desarrolle las argumentaciones pertinentes, incluso aunque sea de forma guiada.

H. Propuesta de secuencia didáctica

Presentamos a continuación la secuenciación temporal de las actividades presentadas en las secciones anteriores, indicando también los contenidos que trabajarán en cada una de las sesiones, de unos 50 minutos de duración. Dado que en 4^{o} de la E.S.O. se dispone de cuatro horas semanales, la secuencia se desarrollaría a lo largo de dos semanas completas.

Sesión	Contenidos	Actividades
S1	Regla de Laplace, diagrama de árbol, principio multiplicativo.	1,2,3
S2	Repeticiones, orden, variaciones con repetición.	4,5
S3	Variaciones, permutaciones, factorial.	6,7,8
S4	Combinaciones (sin/con repetición), números combinatorios.	9,10,11
S5	Triángulo de Pascal, propiedades de los núm. combinatorios.	12
S6	Binomio de Newton.	13
S7	Conectando variaciones y combinaciones, repaso.	14,4
S8	Prueba de evaluación.	Sección I

I. Prueba de evaluación

Para evaluar el grado de aprendizaje realizado por los alumnos y alumnas, se ha diseñado una prueba escrita, prevista para una sesión de 50 minutos. Junto con el enunciado de la prueba, que se ofrece a continuación, presentamos en las subsecciones siguientes los aspectos que pretendemos evaluar, así como las respuestas esperadas, los criterios de calificación a emplear y una propuesta metodológica para la comunicación y discusión de los resultados.

Prueba escrita

Se proponen los siguientes cuatro problemas, precedidos por un encabezamiento general que advierte al alumnado sobre la necesidad de justificar los resultados obtenidos:

Encabezamiento

LEER ANTES DE EMPEZAR: Como explicamos en clase, para obtener la máxima calificación en cada problema deberás justificar las técnicas que apliques, indicando por qué es posible hacerlo.

Pregunta 1 (2 puntos)

Juan y su hermano pequeño Luis tienen que lavar los platos y deciden zanjar quién lo hará utilizando dos dados de cuatro caras. Así, acuerdan que Luis lanzará ambos dados y que si obtiene al menos un cuatro, se librará de la tarea. ¿Qué probabilidad tiene cada uno de ganar la apuesta?

Pregunta 2 (3 puntos)

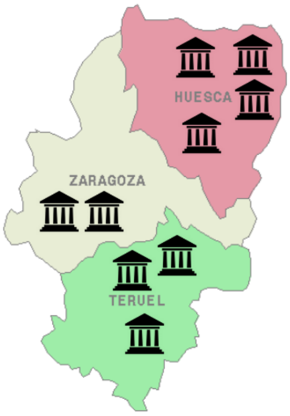
Carlota ha preparado un estante en su habitación para colocar sus 10 libros favoritos.

a) ¿De cuántas formas puede ordenarlos?

b) De los diez libros, seis forman parte de dos trilogías: una fantástica y otra de suspense. Si cada trilogía tiene que colocarse en el estante con sus tres ejemplares juntos y en orden, ¿De cuántas formas podrá ordenar los 10 libros en el estante?

c) Finalmente, Carlota duda sobre cuánto peso aguantará el estante y decide colocar únicamente tres libros, olvidando la restricción de mantener unidas las trilogías. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Pregunta 3 (2 puntos)



El Gobierno de Aragón tiene un total de 9 Departamentos, cuyas sedes, en principio, podrían repartirse entre las tres provincias: Huesca, Zaragoza y Teruel. Si atendemos únicamente al número de sedes que se ubican en cada provincia (y no a cuáles son), ¿de cuántas formas es posible hacer este reparto?

Pregunta 4 (3 puntos)

El mes pasado el abuelo de Lucía se jubiló, y le pidió ayuda a su nieta para recoger su abarrotado despacho. Tras archivar carpetas repletas de documentos y cargar con numerosas cajas, entre ambos dejaron el despacho vacío. Ya en su casa, Lucía advirtió que sin querer se había llevado en el bolsillo un trozo de papel garabateado, en el que se podía leer lo siguiente:

Si tenemos 19 elementos, hay...

...$\wedge\wedge CQ\delta$ formas de escoger un grupo de 5.

...27132 formas de escoger un grupo de 6.

...50388 formas de escoger un grupo de 7.

Si tenemos 20 elementos, entonces hay...

...38760 formas de escoger un grupo de 6.

...$\gamma\gamma\varsigma Q\otimes$ formas de escoger un grupo de 7.

Como ves, dos de los números se han emborronado y han quedado ilegibes.

a) ¿Podrías ayudar a Lucía a averiguar el valor de estos dos números?

b) Calcula, sin realizar ninguna multiplicación o división, cuántas formas hay de escoger un grupo de 14 elementos de un total de 21 (puedes hacer uso de los resultados obtenidos en el apartado anterior).

Aspectos a evaluar

En esta subsección presentamos para cada pregunta los campos de problemas, técnicas y tecnologías que pretende evaluar cada una de las preguntas de la prueba escrita. Además, y dado que para calificar la prueba se seguirá un modelo tipo tercios, siguiendo la propuesta de Gairín y cols. (2012), recogemos también las tareas objeto de la evaluación, clasificándolas según sean principales (**TP**), auxiliares específicas (**TAE**) o auxiliares generales (**TAG**). Finalmente, se indican los códigos de los estándares de aprendizaje de la LOMCE que se relacionan con cada pregunta, para lo cual se incluye a continuación el listado completo:

Estándares de aprendizaje evaluables.

- Est.MAAC.5.1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación.
- Est.MAAC.5.1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter alea-

torio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.

- Est.MAAC.5.1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.

- Est.MAAC.5.1.4. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones.

- Est.MAAC.5.1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.

- Est.MAAC.5.2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias.

- Est.MAAC.5.2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia.

- Est.MAAC.5.2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada.

- Est.MAAC.5.2.4. Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas.

Pregunta 1. Con la primera pregunta de la prueba se pretende evaluar el aprendizaje del alumno a la hora de interpretar correctamente problemas relacionados con juegos de azar, la capacidad de encontrar una técnica que resuelva el problema y el saber justificar lo apropiado de su uso (por ejemplo, si se opta por una estrategia probabilística, apoyarse en que el lanzamiento de cada dado es independiente para componer las probabilidades).

Respecto a las tareas a evaluar, se plantean la siguiente lista (en la que algunos elementos pueden o no estar presentes, dependiendo de la estrategia empleada para la resolución):

- **TP** Interpretar el enunciado del problema.

- **TP** Plantear una estrategia que permita llegar a la resolución del problema (por ejemplo regla de Laplace o probabilidad compuesta / condicionada), justificando su idoneidad.

- **TAE** Realizar el recuento de casos favorables frente a casos totales, aplicando el principio multiplicativo.
- **TAE** Componer adecuadamente las probabilidades, (sucesos independientes), teniendo en cuenta la casuística del problema (por ejemplo, realizando un diagrama de árbol o una tabla).
- **TAG** Realizar adecuadamente los productos y sumas de las fracciones involucradas.
- **TP** Interpretar y contextualizar el resultado obtenido.

El problema planteado, al incluir contenidos probabilísticos contextualizados, se conecta con casi todos los estándares de aprendizaje evaluables, incluyendo los siguientes:

Est.MAAC.5.1.2., Est.MAAC.5.1.3., Est.MAAC.5.1.5., Est.MAAC.5.2.1., Est.MAAC.5.2.2., Est.MAAC.5.2.3. y Est.MAAC.5.2.4.

Pregunta 2.a) En este primer apartado se evalúa el desempeño a la hora de resolver un problema (o ejercicio) que involucra permutaciones. Las técnicas a evaluar se reducen bien a aplicar la definición, bien a deducirla para el caso particular, debiendo justificar el procedimiento en los conceptos de ordenación y no repetición. Así, se plantean las siguientes tareas evaluables:

- **TP** Interpretar el enunciado, identificando qué tipo de configuraciones (formas de ordenarlos) son posibles.
- **TP** Encontrar una estrategia de resolución y justificar su idoneidad.
- **TAE** Aplicar correctamente la definición de permutación o, en su caso, deducirla para el caso particular.
- **TAG** Realizar correctamente los productos involucrados.
- **TP** Contextualizar el resultado final.

El apartado se conecta con los siguientes estándares de aprendizaje evaluables:

Est.MAAC.5.1.1., Est.MAAC.5.2.1.

Pregunta 2.b) En este apartado se introduce una modificación sobre el apartado anterior, esperando evaluar la capacidad de reconocer las permutaciones en un contexto algo más complejo, en el que es necesario reflexionar sobre qué tipo de configuraciones son posibles, si bien las técnicas y tecnologías evaluadas son las mismas que en el apartado anterior. Las tareas evaluables son por tanto muy similares a las del apartado a):

- **TP** Interpretar el enunciado, identificando qué tipo de configuraciones son posibles.
- **TP** Encontrar una estrategia de resolución (incluyendo la reducción del problema al caso anterior para un número de elementos menor) y justificar su idoneidad.
- **TAE** Aplicar correctamente la definición de permutación o, en su caso, deducirla para el caso particular.
- **TAG** Realizar correctamente los productos involucrados.
- **TP** Contextualizar el resultado final.

Estándares de aprendizaje: Est.MAAC.5.1.1., Est.MAAC.5.2.1.

Pregunta 2.c) Como tercer apartado del problema, se introduce una modificación para ver si el alumnado es capaz de reconocer el paso de permutaciones a variaciones, añadiendo a las técnicas evaluadas con anterioridad las correspondientes a las variaciones. Las tareas planteadas son las siguientes:

- **TP** Interpretar el enunciado, identificando qué tipo de configuraciones son posibles.
- **TP** Encontrar una estrategia de resolución y justificar su idoneidad.
- **TAE** Aplicar correctamente la definición de variación o, en su caso, deducirla para el caso particular.
- **TAE** Si se usa la notación factorial, manipularla adecuadamente.
- **TAG** Realizar correctamente los productos y cocientes involucrados.
- **TP** Contextualizar el resultado final.

Estándares de aprendizaje: Est.MAAC.5.1.1., Est.MAAC.5.2.1.

Pregunta 3. En la tercera pregunta de la prueba se presenta un problema de combinaciones con repetición contextualizado, evaluando la capacidad para encontrar una estrategia de resolución, que puede ir desde aplicar la definición debidamente justificada, hasta analizar el tipo de configuraciones posibles y organizando la información por medio de tablas o diagramas de árbol (si bien estos procedimientos están penalizados por su coste temporal). Se presenta un esquema de tareas similar a las preguntas anteriores:

- **TP** Interpretar el enunciado, identificando qué tipo de configuraciones son posibles.
- **TP** Encontrar una estrategia de resolución y justificar su idoneidad.
- **TAE** Aplicar correctamente la definición de combinación (con o sin repetición), o, en su caso, deducirlas para el caso particular.
- **TAE** Manipular adecuadamente los números combinatorios y factoriales involucrados.
- **TAG** Realizar los productos y cocientes de números enteros.
- **TP** Contextualizar el resultado final.

Estándares de aprendizaje: Est.MAAC.5.1.1., Est.MAAC.5.2.1.

Pregunta 4.a) En el primer apartado del problema se deja abierta la posibilidad de emplear diferentes estrategias, queriendo evaluar la capacidad para encontrar un método (óptimo o no) de resolución para un problema que involucra múltiples números combinatorios. Así, se evalúa también la capacidad de reconocerlos y de bien emplear sus propiedades, bien aplicar sus definiciones (o deducirlas para el caso particular). Las tareas a realizar se clasifican como sigue:

- **TP** Interpretar el enunciado, identificando qué tipo de ordenamientos se plantean en el texto.
- **TP** Encontrar una estrategia de resolución (definición de los números combinatorios, deducción o uso de sus propiedades) y justificar su idoneidad.
- **TAE** Aplicar correctamente la definición de combinación, o, en su caso, deducirla para ambos casos particulares.
- **TAE** Aplicar correctamente las propiedades de los números combinatorios o, en su caso, manipular adecuadamente los factoriales.

- **TAG** Realizar los productos y cocientes o sumas y restas de números enteros.
- **TP** Contextualizar el resultado final.

Estándares de aprendizaje: Est.MAAC.5.1.1., Est.MAAC.5.2.1.

Pregunta 4.b) En este segundo apartado, mediante la prohibición de realizar ninguna multiplicación o división, se persigue forzar la resolución mediante las propiedades de los números combinatorios, evaluando tanto la capacidad de encontrar esta estrategia como la correcta ejecución técnica. Si se desconociese, a partir de los datos disponibles podría intentarse una *deducción* de estas propiedades, al menos para el caso particular por el que se pregunta. En línea con lo anterior, se plantean las siguientes tareas evaluables:

- **TP** Encontrar una estrategia de resolución a partir de los datos proporcionados u obtenidos en el apartado anterior y justificar su idoneidad.
- **TAE** Aplicar correctamente las propiedades de los números combinatorios.
- **TAG** Realizar correctamente la suma de enteros.
- **TP** Expresar correctamente el resultado final.

Estándares de aprendizaje: Est.MAAC.5.1.1., Est.MAAC.5.2.1.

Respuestas esperadas

En esta subsección presentamos las diferentes estrategias de resolución previstas para cada una de las preguntas de la prueba escrita, así como los posibles errores en los que puede incurrir el alumnado.

Pregunta 1. Una posible solución pasa por interpretar el enunciado del problema en términos probabilísticos. Así, al tener los dados cuatro caras, tenemos que la probabilidad de obtener un cuatro lanzando un único dado es de $1/4$, frente a la probabilidad de no obtenerlo, que es su complementaria: $1-1/4=3/4$. Para que Juan gane la apuesta, necesita que en ambos dados no salga cuatro; aplicando que el lanzamiento de ambos dados es independiente podemos multiplicar la probabilidad de que no salga en un único dado por sí misma, obteniendo:

$$P_{\text{Juan}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}, \tag{I.1}$$

mientras que su hermano ganará con la probabilidad complementaria, $7/16$, por lo que el hermano mayor ha logrado un acuerdo ventajoso para sus intereses.

Una variante de esta estrategia es calcular directamente la probabilidad que tiene el hermano pequeño de ganar, aplicando los mismos razonamientos que anteriormente pero añadiendo un grado de complejidad más, y es que en este caso habría que considerar la suma de las probabilidades de los diferentes casos en los que ganaría. Por un lado, tiene una probabilidad de $1/4$ de ganar con el primer dado lanzado, con independencia de lo que saque en el segundo. Además, si no obtiene un cuatro en el primer lanzamiento ($3/4$), todavía tiene $1/4$ de posibilidades de lograrlo. Sumando ambas componentes, se llega a

$$P_{\text{hermano}} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16}. \tag{I.2}$$

En este punto, un error que podría cometerse sería emplear como segundo sumando $1/4$, obviando que de esta forma estaríamos *contando dos veces* el caso en el que se obtienen dos cuatros.

Como estrategia alternativa (aunque similar) se plantea la regla de Laplace junto con un conteo de las configuraciones posibles, aplicando el principio multiplicativo para cuantificar los posibles resultados a partir de cada lanzamiento individual. Así, por un lado, el número total de configuraciones es equivalente a considerar de cuántas formas pueden escogerse las caras de dos dados de cuatro, $4 \cdot 4 = 16$, y por el otro puede considerarse de cuántas formas pueden elegirse las caras que no sean cuatro en cada dado, obteniendo $3 \cdot 3 = 9$ casos en los que ganaría Juan. La probabilidad P_{Juan} sería entonces el cociente entre los casos favorables y los casos totales, obteniendo idéntico resultado al anterior.

Pregunta 2.a) En este caso, basta identificar la situación con las permutaciones de un conjunto, que para diez elementos son $10! = 3\,628\,800$. Una estrategia alternativa sería equivalente a deducir la expresión de las permutaciones, considerando cómo al elegir el primer libro tengo 10 opciones, que debo multiplicar por las 9 opciones que me quedan para elegir el segundo libro, y así sucesivamente hasta llegar al último libro, esto es:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1 = 10! = 3\,628\,800. \tag{I.3}$$

Un posible error sería no darse cuenta de que los elementos no pueden repetirse, obteniendo en ese caso el resultado equivalente a las variaciones con repetición (10^{10}).

Pregunta 2.b) La estrategia a seguir pasa por darse cuenta de que, al agrupar cada trilogía, el problema es equivalente a ordenar 6 elementos (dos de los cuales son las trilogías, que ahora van *pegadas*). Entonces, de forma análoga al problema anterior, se obtiene que hay $6! = 720$ formas.

Pregunta 2.c) En este caso, se puede identificar directamente que el número de formas son las variaciones de 10 elementos tomados de 3 en 3, obteniendo $10!/7! = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$ formas. Alternativamente, el razonamiento a seguir es equivalente a deducir la expresión de las variaciones, considerando que al elegir el primer libro hay 10 opciones, al elegir el segundo 9 y al elegir el tercero 8; aplicando el principio multiplicativo se llegaría al resultado. Un posible error sería no considerar la no repetición, el mismo que en el apartado 2.a), llegando a 10^3, mientras que otro sería calcular únicamente el número de ordenamientos para tres elementos ($3! = 6$) al no entender que estos se escogen sobre el conjunto total.

Pregunta 3. En este caso una posible estrategia pasa por identificar la situación con las combinaciones con repetición, en cuyo caso el problema se resuelve de forma inmediata. Alternativamente, la resolución implica seguir un razonamiento similar a la deducción de la expresión de este objeto matemático. Así, puede argumentarse que el número de formas de repartir los nueve Departamentos entre las tres provincias es equivalente a considerar nueve elementos y dos *separadores* que los dividen en tres zonas (una por cada provincia). En forma de diagrama, si cada D representa un Departamento y cada $|$ un separador, una posible configuración sería

$$DDD|DDD|DDD. \tag{I.4}$$

Así, el problema se reduce a identificar de cuántas formas podemos colocar los dos separadores en el conjunto de los 11 elementos formado por los 9 Departamentos y los propios separadores. Este problema (de cuántas formas podemos elegir dos elementos de un total de 9, sin importar el orden), es justo un problema de combinaciones, por lo que en este punto el problema podría resolverse de forma inmediata como $\binom{11}{2}$.

Si las combinaciones no se identificasen como tales, todavía sería posible resolver el problema llevando a cabo una *deducción* del número combinatorio particular, teniendo en cuenta que pueden calcularse primero las variaciones (primero escogemos sobre 11 elementos y después sobre los 10 restantes, obteniendo un total de 110 casos), para dividir después por 2 y eliminar la dependencia del orden en el que escogemos cada pareja, quedando $110/2 = 55$ casos.

Aunque sería algo complejo de ejecutar, existe también la posibilidad de resolver el problema desde el comienzo con un diagrama de árbol, si bien no es el método esperado ya que está previsto trabajar esta técnica durante la secuencia didáctica.

Pregunta 4.a) Este apartado se plantea de forma que sea posible emplear al menos dos estrategias diferentes para resolverlo, si bien el coste computacional de estas es muy desigual y resulta conveniente dedicar un tiempo a elegir el método óptimo. En primer lugar, si se identifica correctamente que los números del problema se corresponden con varios números combinatorios, es posible utilizar las propiedades vistas durante la secuencia para deducir las dos incógnitas por las que se pregunta. Así, se tiene que cumplir que

$$\binom{19}{5} + \binom{19}{6} = \binom{20}{6}, \tag{I.5}$$

de donde, aprovechando los valores que nos da el enunciado, se deduce que

$$\binom{19}{5} = 38760 - 27132 = 11628, \tag{I.6}$$

procediendo de forma análoga para el cálculo de $\binom{20}{7}$. Algo más laborioso resulta calcular directamente los números combinatorios por los que se pregunta, para lo que es necesario bien aplicar la definición (que lleva a $19!/(5!14!)$ en el caso anterior), bien elaborar una estrategia como la descrita en el problema anterior para calcular las combinaciones de 19 elementos tomados de 5 en 5 (y de 20 tomados de 7 en 7), calculando primero las variaciones y dividiendo en cada caso por las permutaciones para eliminar las multiplicidades introducidas por los diferentes ordenamientos.

Pregunta 4.b) En este segundo apartado se pretende forzar al alumnado a utilizar las propiedades de los números combinatorios, sin mencionarlo explícitamente. Así, sería necesario aplicar tanto la simetría de los números combinatorios como la propiedad que ya podía utilizarse en el apartado anterior, de forma que

$$\binom{21}{14} = \binom{21}{7} = \binom{20}{7} + \binom{20}{6} = 116\,280 \tag{I.7}$$

donde se han utilizado los resultados del apartado anterior. Si estas propiedades no fueran recordadas, podría intentarse deducir alguna de ellas a partir de la observación que se realiza en el enunciado sobre que es posible utilizar los datos del apartado anterior para calcularlos. Para ello, cabe preguntarse qué ocurre con un número combinatorio cuando se añade un elemento al total sobre el que se escoge. Si originalmente teníamos $\binom{n}{k}$ formas de elegir k elementos, es claro que al añadir un elemento más al total esas mismas formas se mantienen (basta no tener en cuenta el nuevo elemento). Además, faltan por contar todas las agrupaciones en las que se incluye el nuevo elemento. En estas, es necesario escoger $k-1$ elementos sobre los n originales; si expresamos todo la anterior en un lenguaje algebraico, llegamos a

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \tag{I.8}$$

que es una de las propiedades que necesitábamos para resolver el ejercicio.

Criterios de calificación

A continuación damos los criterios de calificación para la prueba escrita, tratando de que permitan poner el énfasis de la evaluación en la realización de las tareas principales y, en menor medida, de las auxiliares específicas, descritas en la Sección I. Para ello, seguiremos un modelo de tercios, en el que cada grupo de tareas tendrá una cota máxima a la penalización que puede recibir por los errores cometidos, según los siguientes pesos:

Tipo de tarea	Penalización máxima
TP	Puntuación total
TAE	$2/3$ de la puntuación
TAG	$1/3$ de la puntuación

Adicionalmente, planteamos una serie de pautas para la corrección de la prueba, con el objetivo de que al ser empleadas por diferentes correctores puedan minimizar la dispersión en las calificaciones obtenidas. En primer lugar, los fallos cometidos en las tareas principales, si son considerados suficientemente graves, implicarán no seguir corrigiendo la pregunta en cuestión. Por el contrario, los fallos cometidos en las tareas auxiliares no podrán ser causa de interrupción de la corrección, debiendo seguir examinando la producción y asumiendo el error como si no hubiese sido cometido. Como excepción a esta última regla quedarían los casos en los que el error simplificase tanto el problema que implicase la desaparición de las tareas principales o las tareas auxiliares específicas que quedasen por evaluar, en cuyo caso serían penalizadas.

Por otra parte, y respecto a las penalizaciones por las tareas principales, añadimos varios criterios específicos más. En varias de las **TP** se indica que deberá justificarse la aplicación de las definiciones de los diferentes objetos matemáticos. Si se aplican correctamente pero se omite cualquier tipo de justificación, se penalizaría con $1/3$ de la puntuación asignada al apartado. Además, incluimos una restricción a la **TP** final en cada pregunta (contextualización del resultado final, común a todas ellas): la penalización por error u omisión en esta tarea tendría una cota máxima de $1/5$ de la puntuación total.

Comunicación de los resultados

Las producciones de los alumnos, una vez corregidas y fotocopiadas, les serán devueltas a la mayor brevedad para que puedan obtener el *feedback* necesario sobre sus aciertos y errores, tratando así de garantizar una evaluación formativa. Así, además de la calificación numérica de cada ejercicio, se añadiría un comentario en cada una de las cuatro preguntas explicando bien el porqué de la penalización aplicada y cómo podría evitarse la próxima vez, bien indicaciones que les permitieran ampliar sus conocimientos (por ejemplo, sugiriendo un método de resolución alternativo). Además, se les propondría un problema como tarea para casa (que incidiese en los puntos flacos o ampliase conocimientos) que permitiría subir $1/3$ (sobre 10) la puntuación de la prueba.

Por otra parte, el profesor/a seleccionaría las estrategias de resolución y los errores más comunes detectados en cada ejercicio que, previamente anonimizados, serían proyectados y discutidos grupalmente. Además, en esta discusión se explicarían los criterios de corrección y calificación seguidos por el docente, tratando así de optimizar las *actividades de comunicación* del proceso de evaluación, en los términos de Rochera y cols. (2001). Siguiendo la misma filosofía, se procuraría también potenciar las actividades de aprovechamiento mediante la resolución colectiva del problema que más dificultades hubiese planteado. Tras esta, se invitaría a que dos o tres alumnos/as explicasen al resto de la clase los errores que hubiesen cometido en el problema en cuestión. Con la combinación de estas actividades de comunicación y aprovechamiento se completaría el proceso de evaluación de la prueba escrita, que se daría por finalizado en este punto.

Referencias

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 181–199. Recuperado de https://doi.org/10.1023/A:1002954428327 doi: 10.1023/A:1002954428327

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Colera, J., Gatztelu, I., García, R., Oliveira, M., y Martínez, M. (2004). *Matemáticas 4 - Opción B*. Barcelona: Anaya.

Departamento de Educación, Cultura y Deporte. (2016). Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón,* núm 105, de 2 de junio de 2016, pp. 12640 a 13458.

Dubois, J. G. (1984, 01 de Feb). Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 37–57. Recuperado de https://doi.org/10.1007/BF00380438 doi: 10.1007/BF00380438

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121–141). Boston, MA: Springer US. Recuperado de https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_6 doi: 10.1007/0-387-24530-8_6

Gairín, J. M., Muñoz, J. M., y Oller, A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261–274). Jaén: SEIEM.

Rochera, M. J., Colomina, R., y Barberá, E. (2001). Optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de la evaluación en matemáticas. *Revista Investigación en la Escuela*, *45*, 33–44. Recuperado de https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/60470

Roldán-López de Hierro, A. F., Batanero, C., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Épsilon*, 49–63. Recuperado de https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon100_8.pdf

Salvador, A., y Molero, M. (2018). Capítulo 14: Combinatoria. En *Matemáticas 4ºB de E.S.O.* (p. 411-446). España: Apuntes Marea Verde. Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/4B/14_Combinatoria_4B.pdf