Trabajo Fin de Máster

Propuesta didáctica para la enseñanza de Isometrías en el plano en 3º ESO

Didactic proposal for the teaching of Isometries of the plane for 3º ESO

Autora

Yasmina Khiar Viana

Director

Juan Bautista Marqués Moreno

Facultad de Educación

2019

Índice

A. Introducción

En este Trabajo de Fin de Máster presentamos una propuesta didáctica diseñada para la enseñanza de Movimientos en el plano en un curso de 3º de la ESO. Más concretamente, de acuerdo con la orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, en esta memoria vamos a trabajar alrededor de los siguientes contenidos:

- Traslaciones, giros y simetrías en el plano.

Estos conceptos los encontramos en el currículo correspondiente a la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas del curso 3º de ESO, dentro del Bloque 3: Geometría. Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que se tendrán en cuenta son:

Crit.MAAC.3.4. Reconocer las transformaciones que llevan a una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

Est.MAAC.3.4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

Est.MAAC.3.4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.

La estructura que vamos a seguir a lo largo de este trabajo está basada en la Teoría Antropológica de lo Didáctica de Chevallard (1999). En la Sección B se toman dos libros de texto para observar el tratamiento que se hace habitualmente de estos conceptos geométricos. La Sección C está dedicada a los conocimientos previos que suponemos adquiridos para el desarrollo de la secuencia didáctica. Tratamos la razón de ser de los movimientos en el plano que vamos a tener en cuenta en la Sección D. En la Sección E presentamos el campo de problemas que vamos a considerar así como las actividades diseñadas para ello. Las técnicas que se van a desarrollar están en la Sección F y las tecnologías que las justifican en la Sección G. Una vez realizado este recorrido, en la Sección H presentamos la propuesta de secuencia didáctica y su temporalización. Finalmente, la

Sección I recoge la prueba de evaluación que ha sido diseñada para evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la secuencia.

B. Análisis previo del proceso de enseñanza aprendizaje

Esta sección está dedicada al estado de la enseñanza de los movimientos del plano en el curso seleccionado, así como los efectos que produce sobre el alumnado esta forma de enseñar dichos objetos matemáticos. Para ello, vamos a considerar los libros de texto elaborados por de Lucas y Rey (2015) y Salvador y Molero (2018) correspondientes a 3º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñazas Aplicadas y a realizar un análisis de su contenido.

Primero, vamos a realizar un breve estudio teniendo en cuenta las categorías propuestas por Gairín y Muñoz (2005). Los autores clasifican las actuaciones de los textos como práctica docente o discente. La primera de ellas hace referencia a aquellas partes de los libros dirigidas al profesor, que a su vez se dividen en discursos (definiciones, párrafos explicativos) y en ejemplos y ejercicios resueltos. Las tareas diseñadas para los alumnos es lo que denominan práctica discente y en ella se incluirían todos los ejercicios y problemas no resueltos.

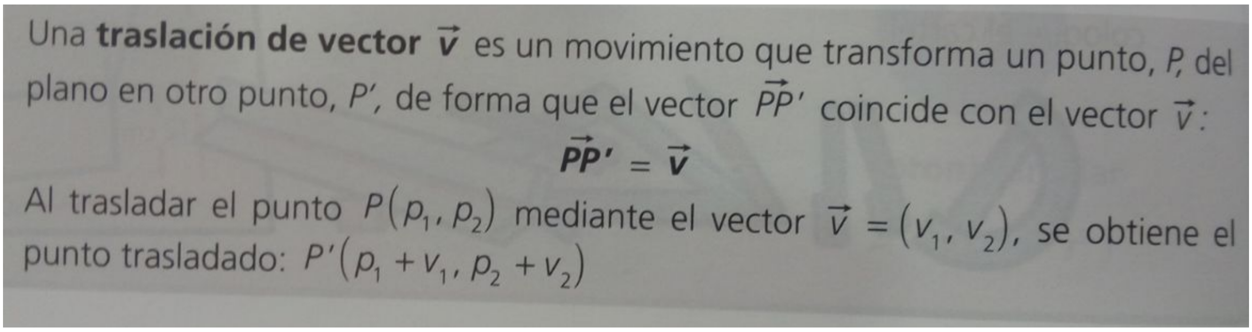
de Lucas y Rey (2015)

Los contenidos a analizar se encuentran dentro del *Capítulo 7: Geometría del plano. Movimientos* de un total de 12, tras el bloque de álgebra. Más concretamente encontramos los objetos a estudiar en las secciones 5, 6 y 7 de este capítulo.

- Práctica docente.

  Se define movimiento en el plano como "una transformación geométrica que conserva la forma y el tamaño de cualquier figura", previamente introducido por un ejemplo en el que se describen los movimientos de cierta figura. Seguidamente encontramos un problema resuelto sobre traslaciones para, a continuación, caracterizar un vector que une dos puntos $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$ como $\overrightarrow{AB} = (b_1-a_1, b_2-a_2)$.

Termina este apartado con la definición de traslación de vector $\vec{v}$ que vemos en la Figura B.1.


Una **traslación de vector $\vec{v}$** es un movimiento que transforma un punto, P, del plano en otro punto, P', de forma que el vector $\overrightarrow{PP'}$ coincide con el vector $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$$

Al trasladar el punto $P(p_1, p_2)$ mediante el vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$, se obtiene el punto trasladado: $P'(p_1 + v_1, p_2 + v_2)$

Figura B.1: Definición de traslación en de Lucas y Rey (2015)

Respecto a los giros, encontramos la siguiente definición de este movimiento:

“Un giro de centro C y ángulo α es un movimiento que transforma un punto, P, del plano en otro punto, P', de modo que los segmentos CP y CP' tengan la misma longitud y formen un ángulo con amplitud α.

$$d(C,P) = d(C,P') \text{ y } \widehat{PCP'} = \alpha \text{”},$$

y dos problemas resueltos.

Finalmente, sobre las simetrías se da la definición tanto de la central como de la axial como sigue:

“Una simetría axial de eje r es un movimiento que transforma un punto, P, del plano en otro, P', de forma que la recta r es la mediatriz del segmento PP'.

Una simetría central de centro C es un movimiento que transforma un punto, P, del plano en otro, P', de forma que el punto C es el punto medio del segmento PP'.”

Antes de la propuesta de tareas para los estudiantes, se propone un ejercicio resuelto para trabajar las simetrías.

- Práctica discente.

  En cada uno de los apartados sobre los tres movimientos encontramos un listado con actividades para trabajar dichas transformaciones. Al final del tema, en una sección denominada Actividades Finales encontramos más tareas que se ocupan de traslaciones, giros y simetrías. Por último, se dedican 3 actividades al estudio de mosaicos que involucran los objetos matemáticos que estamos estudiando. En total, en el tema se proponen a los estudiantes 45 problemas y ejercicios.

Salvador y Molero (2018)

En este libro el Capítulo 8 se dedica de forma exclusiva a movimientos en el plano y en el espacio, tras un capítulo de geometría en el plano. Este manual tiene un total de 11 capítulos. Comparando, este manual ofrece un tratamiento mucho más extenso a movimientos en el plano que el libro anterior. Por este motivo, nos vamos a centrar únicamente en las caracterizaciones que se dan de las tres transformaciones analizadas.

- Práctica docente.

  Respecto de las traslaciones encontramos la siguiente caracterización: "Si la traslación de vector libre $u = AB$ transforma un punto del plano P en otro P', entonces AB y PP' tienen igual módulo, dirección y sentido." Antes de esta definición ha sido resuelta una actividad de vectores y luego aparecen otros 3 problemas resueltos sobre una traslación a un punto, composición de traslaciones y cálculo de la traslación inversa.

  La definición que se da sobre rotaciones es la que sigue: "Para determinar un giro o rotación es necesario conocer un punto, O, el centro de giro; un ángulo α y el sentido de giro de ese ángulo. [...] Si A' es el punto girado de A, con centro O y ángulo α, entonces: $|OA| = |OA'|$ y el segmento OA forma un ángulo α con OA'". A lo largo de la sección dedicada a giros encontramos cinco actividades resueltas.

  Finalmente, en cuanto a las simetrías aparecen las siguientes definiciones:

  "Si P' es el simétrico de P en la simetría central de centro de simetría O, entonces, O es el punto medio del segmento PP'. [...]

  Si P' es el simétrico de P respecto de la simetría axial de eje r, entonces r es la mediatriz del segmento PP'."

  En este apartado encontramos tres actividades resueltas y dos ejemplos.

El final de este capítulo está dedicado a mosaicos, frisos y rosetones que sirven de representación de la presencia de estas transformaciones y sus composiciones en el mundo cotidiano.

- Práctica discente.

  En las secciones en las que se encuentra la teoría del tema, es decir, definiciones, explicaciones, etc. hay un total de 59 de actividades propuestas. Además, al final del tema en el apartado Ejercicios y problemas se proponen 87 tareas más y también encontramos una Autoevaluación con 10 cuestiones.

Tras este pequeño análisis vamos a estudiar los libros considerados desde un punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999). Para ello, vamos a considerar las nociones de razón de ser, campo de problemas, técnica y tecnología que sirven de guión para el desarrollo de este trabajo.

En de Lucas y Rey (2015) la razón de ser del estudio de los movimientos en el plano es por su presencia en la naturaleza y en la historia. Y por ello, alude a la construcción de los panales de las abejas y mosaicos árabes que podemos encontrar en la arquitectura. En el libro de Salvador y Molero (2018) la justificación se basa en la presencia de este concepto en el Universo como movimiento de los planetas, en la Arquitectura, así como en las manipulaciones (zoom, arrastre, giros,...) que se realizan en los mapas cuando se visualizan en dispositivos electrónicos.

En cuanto al campo de problemas que se presenta, ambos textos comparten la mayoría aunque en el texto Salvador y Molero (2018) podemos encontrar mayor variedad así como actividades más ricas. En el campo de problemas podemos incluir: el trabajo de los vectores a través de las traslaciones, traslación/giros/simetrías de figuras y puntos, composición de traslación/giros/simetrías, reconocimiento de traslación/giros/simetrías.

A continuación, enumeramos las técnicas que hemos encontrado en los libros consultados:

1. Módulo de un vector $u = (x,y)$: $|u| = \sqrt{x^2+y^2}$.

2. Cálculo de la traslación inversa de la de vector de traslación v = (a, b): tomar el vector $-v = (-a, -b)$.

3. Encontramos la siguiente técnica para el cálculo del centro de giro en Salvador y Molero (2018) (véase Figura B.2):

   "Para saber si dos figuras son dos figuras giradas trazamos las mediatrices de los puntos correspondientes y todas ellas deben cortarse en un mismo punto, el centro de giro. Con el trasportador de ángulos podemos entonces medir el ángulo de giro."

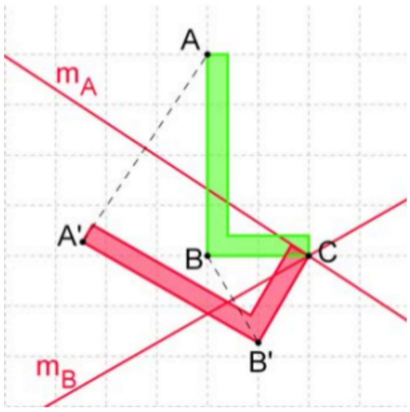


Figura B.2: Cálculo del centro de giro.

4. Componer dos giros con el mismo centro es equivalente a realizar giro de ángulo la suma de los ángulos.

5. El giro inverso de un giro de ángulo α es el giro con el mismo centro y ángulo $-\alpha$.

6. Dado un punto P, el punto P' es el simétrico de P en la simetría central de centro O si se verifica que O es el punto medio del segmento PP'.

7. El punto P' es el simétrico de P respecto de la simetría axial de eje r si r es la mediatriz del segmento PP'.

En cuanto a las tecnologías, no aparecen justificaciones o demostraciones de las técnicas en ninguno de los textos consultados excepto en el cálculo del módulo de un vector que se justifca con el Teorema de Pitágoras (Figura B.3).

El módulo de un vector se calcula utilizando el Teorema de Pitágoras. Así, el vector de coordenadas $\boldsymbol{u}$ = (x, y) tiene de módulo: $|\ \boldsymbol{u}\ | = \sqrt{x^2 + y^2}$

Figura B.3: Módulo de un vector en Salvador y Molero (2018)

Por lo tanto, teniendo en cuenta el análisis anterior, podemos concluir que se trata de un desarrollo basado en el aprendizaje de métodos y algoritmos geométricos. Esta forma de enseñanza en la que apenas encontramos las tecnologías en las que se apoyan las técnicas, no favorece el desarrollo de capacidades como pensar, razonar, argumentar sino que está más orientada a la resolución de ciertos problemas.

Además, este enfoque tan práctico en el que se muestran únicamente técnicas hace que los alumnos y alumnas carezcan de los recursos teóricos que pueden ser necesarios para enfrentarse a problemas nuevos.

C. Conocimientos previos del alumnado

En esta sección vamos a analizar los conocimientos previos que se espera que tenga el alumnado para poder afrontar la secuencia didáctica sin dificultades añadidas. También indicamos cómo vamos a medir si se tienen adquiridos dichos conocimientos y las actividades para reforzar aquellos en los que seguramente será necesario hacer hincapié. Nos centraremos en el Bloque 3 dedicado a Geometría. En relación con los otros bloques, se espera que sepan utilizar números naturales, enteros, fraccionarios y decimales así como operar con ellos y aplicar de forma correcta la jerarquía de las operaciones. Otro de los puntos que se darán por adquiridos es el manejo del lenguaje algebraico visto hasta ese curso.

Como hemos dicho, vamos a poner el foco en los contenidos del Bloque 3: Geometría de cursos anteriores que deberían poseer nuestros y nuestras estudiantes que aparecen en el currículo oficial aragonés. Se espera que se hayan adquirido los siguientes contenidos comunes a 1º y 2º de ESO:

- Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad.
- Ángulos y sus relaciones.
- Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades.
- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Medida y cálculo de ángulos de figuras planas.
- Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras.

Como podemos observar, los objetos anteriores son contenidos mínimos que, al menos en teoría, deberían haber sido aprendidos a lo largo de los cursos anteriores. Sin embargo, es posible que encontremos problemas en alguno de ellos. La primera dificultad prevista estaría en el Teorema de Pitágoras ya que, a pesar de que sea uno de los objetivos tanto de primero como de segundo, es habitual encontrar en la práctica errores en la formulación del resultado. Posiblemente también tendremos que recordar la definición de mediatriz y el procedimiento para poder construirla. Para salvar estos problemas y dificultades proponemos las siguientes actividades.

Realizaremos una valuación inicial para conocer qué contenidos mínimos de cursos anteriores han sido adquiridos y en cuáles habría que hacer un repaso previo o mayor hincapié. De forma individual, deberán contestar a una prueba escrita tipo test. Las preguntas y las posibles respuestas son las siguientes:

Actividad C.1. Selecciona la respuesta correcta.

1. Dos rectas que se cortan formando 4 ángulos de 90° se llaman:

    a) Secantes.

    b) Perpendiculares.

c) Paralelas.

2. ¿Cuántos grados sexagesimales tiene un giro completo?

   a) 300°.

   b) 180°.

   c) 360°.

3. ¿Qué lados son característicos de un triángulo rectángulo?

   a) Dos catetos y una hipotenusa.

   b) Dos hipotenusas y un cateto.

   c) Tres lados desiguales.

4. ¿Cuál es la definición de mediatriz de un segmento?

   a) Recta que pasa por el punto medio del segmento.

   b) Recta paralela al segmento.

   c) Recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio.

La siguiente actividad está diseñada como apertura de la Sesión 2. Se trata de una introducción del plano $\mathbb{R}^2$ que nos servirá para poder presentar los vectores. Pero antes de definir el concepto de vector, recordaremos los puntos en el plano y de sus coordenadas.

Una vez explicado lo anterior, pediremos un voluntario para representar en la pizarra el punto que le digamos. Una vez representado deberá elegir a un compañero o una compañera y decirle otro punto. Si se observa que algunos de los cuadrantes no están siendo considerados daremos indicaciones para que los tengan en cuenta.

Actividad C.2. Representa el punto que te han dicho. A continuación, elige a otra persona y dile las coordenadas de otro punto en un cuadrante diferente al que te han dicho a ti.

La Sesión 3 comenzará recordando el Teorema de Pitágoras, necesario para justificar la fórmula del módulo de un vector. En la pizarra, explicaremos cómo descomponer un vector cualquiera como su componente en el eje X y su componente en el eje Y para a continuación obtener su módulo utilizando el Teorema de Pitágoras. Pondremos ejemplos tomando distintos vectores.

Actividad C.3. ¿Recuerdas el Teorema de Pitágoras?

D. Razón de ser

Los movimientos en el plano son un tema que nos proporciona un acercamiento a las matemáticas justificado debido a que los conceptos que aparecen los podemos contextualizar en la vida cotidiana y nos permiten desarrollar el gusto por la belleza de las formas geométricas.

La razón de ser "matemática" que vamos a utilizar como motivación para introducir en el aula los movimientos en el plano es la búsqueda de transformaciones que preserven ángulos y distancias, es decir, isometrías.

Asimismo mostraremos la importancia de las isometrías debido a su presencia tanto en el mundo físico como en el cultural y artístico. Para ello, veremos su aplicación en los frisos, los mosaicos y las teselaciones que podemos ver a diario en el arte y la arquitectura así como en la naturaleza.

Otro motivo para el estudio de las isometrías en el plano es por el carácter interdisciplinar de estos contenidos con las asignaturas Educación Plástica, Visual y Audiovisual y Dibujo Técnico. Esta conexión con otras materias podría ser interesante para llevar a cabo algún proyecto con el alumnado como cooperación de estas disciplinas.

Podemos encontrar el uso de traslaciones, simetrías y rotaciones en obras artísticas de todas las culturas. En particular, los árabes eran especialistas en la elaboración de mosaicos y la búsqueda de lo estético. Así, en su obra La Alhambra de Granada se recogen los 17 tipos de recubrimientos del plano que existen. También cabe destacar al artista neerlandés M. C. Escher que realizó teselados a partir de modificaciones de polígonos regulares. Todas estas obras nos pueden servir para introducir a la clase en el tema y de esta forma acercar las Matemáticas al mundo cotidiano.

Para motivar la introducción de los movimientos en el plano enunciaremos a nuestro grupo-clase dos problemas. El enunciado del primero es el siguiente:

Actividad D.1. Queremos recubrir el suelo de la clase. Dibuja una figura a la que aplicándole transformaciones que no modifiquen su forma te permita hacerlo.

El problema anterior se propondrá para que el alumnado lo trabaje de forma individual. Para abordarlo les propondremos que dibujen la figura que hayan elegido y, recortando varias copias de la misma, traten de visualizar las diferentes transformaciones que pueden aplicarle y si es posible recubrir el plano. A continuación, se recogerán en la pizarra las distintas ideas que han obtenido para ir discutiendo si son soluciones posibles e ir proponiendo figuras que no hayan surgido, siriviendo de hilo conductor para la siguiente actividad. Esto nos permitirá comenzar a reconocer algunos de los conceptos que trataremos en la secuenciación (simetrías, giros,...).

El segundo problema que se ha diseñado como razón de ser consta de un mosaico con el objetivo de que encuentren la pieza mínima para generarlo e identifiquen los movimientos que en él aparecen. Les dejaremos un tiempo para que analicen el mosaico y se hará una puesta en común. Esta actividad también nos permitirá tener un primer contacto con algunos conceptos como traslación o giro.

Actividad D.2. Identifica cuál es la pieza más pequeña necesaria para elaborar este mosaico y explica con tus propias palabras qué movimientos se le ha aplicado.

E. Campo de problemas

La secuenciación didáctica va a girar en torno a tres objetos matemáticos: traslaciones, giros y simetrías. Es por esto por lo que presentamos cuatro campos de problemas: tres asociados a cada uno de los movimientos mencionados y un cuarto para tratar la composición de estos.

- Campo de problemas asociado a traslaciones.
  - Dados dos puntos A y B construir el vector $\overrightarrow{AB}$.
  - Determinar dirección, sentido y módulo de un vector.
  - Realizar la suma de vectores.
  - Dada una figura y una traslación, construir su imagen trasladada.
  - Dadas dos figuras, obtener la traslación que nos lleva de una a otra.
  - Calcular la composición de traslaciones.
  - Resolver de problemas en los que intervienen traslaciones.
- Campo de problemas asociado a rotaciones.
  - Dada una figura y una rotación, construir su imagen rotada.

- Dadas dos figuras, obtener la rotación que nos lleva de una a otra.
- Calcular la composición de rotaciones.
- Resolver de problemas en los que intervienen rotaciones.

▪ Campo de problemas asociado a simetrías.

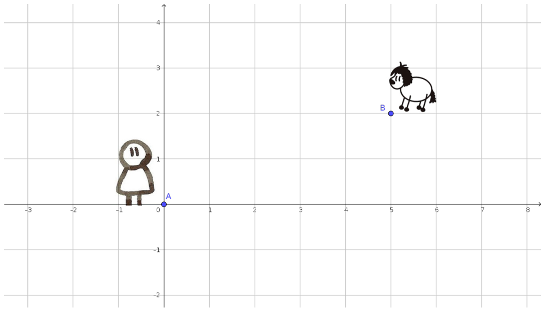
- Dada una figura y una simetría, construir su imagen simétrica.
- Dadas dos figuras, obtener la simetría que nos lleva de una a otra.
- Calcular la composición de simetrías.
- Resolver de problemas en los que intervienen simetrías.

▪ Campo de problemas asociado a la composición de movimientos.

- Obtener la transformación resultante de componer distintos movimientos.
- Calcular invariantes de los movimientos.
- Obtener los 7 frisos.

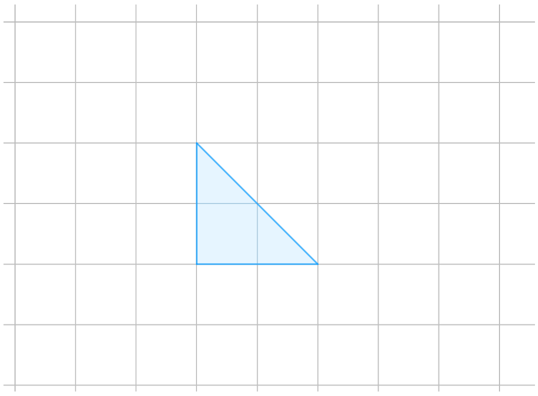
Los campos de problemas anteriormente descritos van a ser trabajados con las siguientes actividades. Las tareas destinadas al campo de traslaciones son las E.1, E.2 y E.3. Las actividades E.4 y E.5 se ocupan del campo asociado a las rotaciones. El campo de problemas asociado a las simetrías se trabaja a través de las actividades E.6, E.7 y E.8. Finalmente, los enunciados E.9, E.10 y E.11 están diseñados para trabajar el campo de problemas asociado a la composición de los movimientos estudiados utilizando, entre otras cosas, los frisos.

Actividad E.1. Estamos en el punto A y queremos ir hasta el lugar en el que está el perro, el punto B. ¿Qué caminos podemos seguir? ¿Cuál es el más corto? ¿Y si el perro quiere venir hasta nosotros?



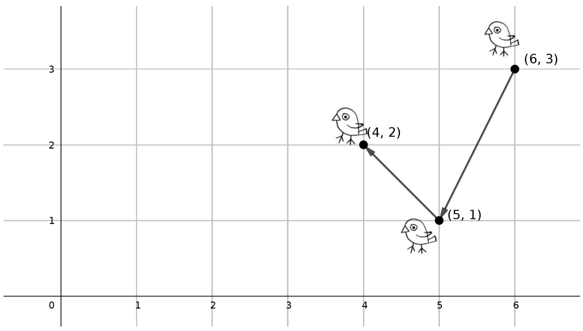
En las sesiones anteriores habremos visto cómo a partir de un punto A llegamos al punto B utilizando el vector $\overrightarrow{AB}$. A continuación, deberán deducir cómo trasladar una figura dada.

Actividad E.2. Hasta ahora hemos trasladado puntos. Si ahora queremos trasladar una figura, ¿cómo lo harías? Traslada este triángulo utilizando el vector $(2,-1)$.



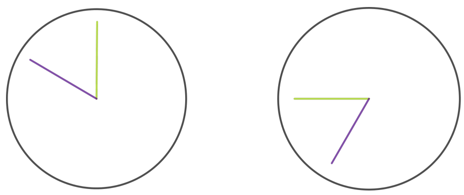
Con el siguiente problema queremos que los alumnos y alumnas deduzcan que la composición de traslaciones de vectores $\vec{u},\vec{v}$ es una traslación de vector $\vec{u}+\vec{v}$. Para ello, deberán ver la relación entre aplicar dos vectores de forma consecutiva (el extremo del primero es el origen del segundo) y aplicar el vector que nos lleva desde el origen del primero hasta el extremo del segundo.

Actividad E.3. Un pájaro ha empezado en el punto $A(6,3)$, ha volado hasta el punto $B(5,1)$ y se ha dado cuenta que se ha equivocado de lugar. Ha emprendido el vuelo de nuevo y ha llegado al destino deseado, el punto $C(4,2)$. ¿Qué traslación habría hecho si no se hubiese equivocado? ¿Hay alguna relación entre la ruta que ha hecho y la que tendría que haber hecho?



Presentaremos los giros o rotaciones a través de un objeto muy cotidiano que usan a diario: un reloj. Esto también nos permitirá hablar de los términos sentido antihorario (sentido $+$) y sentido horario (sentido $-$).

Actividad E.4. Observa los dos relojes de la figura. ¿Qué transformación hay que aplicarle al primer reloj para tener el segundo? Explícalo con tus propias palabras.



La siguiente actividad está pensada para ser realizada con GeoGebra. Deberán comprobar que aplicar dos veces la rotación de centro O y ángulo α es equivalente a aplicar una rotación con el mismo centro y ángulo 2α.

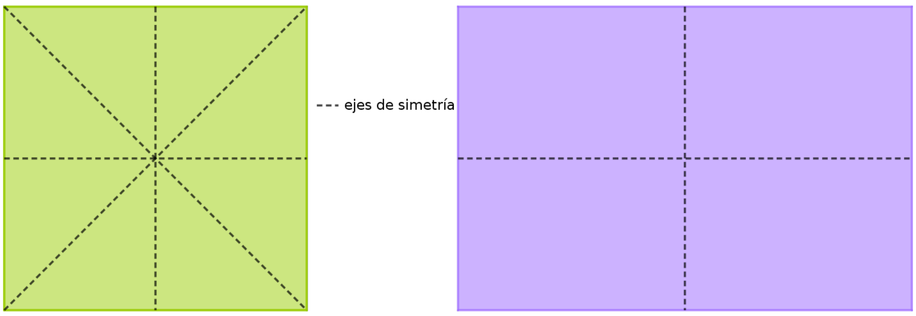
Actividad E.5. Dibuja el cuadrado $ABCD$ con $A(3,-5)$, $B(4,-5)$, $C(4,-4)$, $D(3,-4)$ y aplícale dos veces la rotación de centro el origen de coordenadas y ángulo 60° con la herramienta *Rota alrededor de un punto*. ¿Podrías conseguir lo mismo con una sola rotación? ¿Cuál sería el centro y el ángulo? Razona tu respuesta.

Utilizando una rotación de centro O y ángulo 180° podremos introducir la simetría central.

Actividad E.6. Observa la carta. ¿Hay alguna rotación que deje la carta invariante? Describe la rotación, es decir, indica el centro y el ángulo.

A continuación, presentaremos la simetría axial y el eje de simetría que poseen distintas figuras. Para ello, pondremos el siguiente enunciado:

Actividad E.7. Recorta un cuadrado en una hoja de tu cuaderno. Dóblalo para obtener dos partes iguales, que se superpongan completamente. ¿Cuántas formas de doblarlo has encontrado? ¿Qué ocurre con un rectángulo?



Para terminar la sesión dedicada a las simetrías proyectaremos la siguiente imagen para que entre toda la clase veamos qué figuras tienen simetría central, cuáles simetría axial y cuáles no son simétricas.

Actividad E.8. Describe las posibles simetrías que tienen los siguientes logos:

Para ver todos los movimientos que intervienen en los frisos, vamos a ver lo que se denomina simetría con deslizamiento. Esta transformación se obtiene al componer una simetría con una traslación. Para introducirlo, presentaremos la siguiente actividad:

Actividad E.9. Razona qué transformación obtendríamos al aplicar:

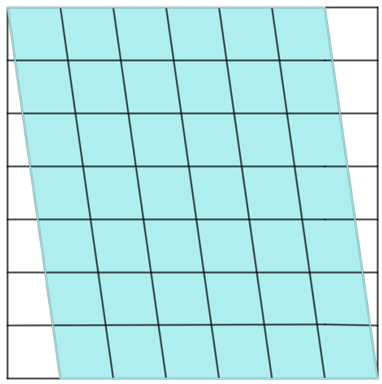
- Una traslación de vector $\vec{u}$ y otra de vector $\vec{v}$.
- Dos giros del mismo centro con ángulos α y β.
- Dos simetrías axiales con ejes paralelos.

Una vez hayan sido introucidos y ejercitados todos los movimientos, por grupos de tres en tres, deberán rellenar la siguiente tabla.

Actividad E.10. Rellenad la siguiente tabla:

	¿Preserva …		Invariantes	
Movimiento	distancias?	ángulos?	Puntos	Rectas
Traslación				
Rotación				
Simetría axial				
Simetría con deslizamiento				

En la última actividad de la secuencia didáctica definimos qué es un friso y vamos a obtener los 7 tipos diferentes que existen aplicando los movimientos aprendidos a lo largo de las sesiones anteriores. La metodología que vamos a seguir será que trabajen por parejas y les daremos a cada una la siguiente hoja para que recorten las 46 piezas coloreadas. Utilizarán 6 piezas para cada friso.



La definición de friso la hemos tomado de Jaime y Gutiérrez (1996). Les entregaremos también el siguiente texto:

Actividad E.11. En Jaime y Gutiérrez (1996) los autores dan la siguiente definición de friso:

Se llama friso a un cubrimiento de la región del espacio limitada por dos rectas paralelas. Los frisos son cubrimientos de regiones de longitud infinita pero de anchura finita.

Los frisos se obtienen al aplicar reiteradamente uno o más movimientos. Estos cuatro movimientos que se utilizan son los que hemos visto aunque deben de tener algunas propiedades:

- Traslaciones cuyo vector es paralelo a los bordes de la región del friso.

- Rotaciones de 180° cuyo centro está a la misma distancia de los dos bordes.
- Simetrías axiales con el eje paralelo o perpendicular a los bordes.
- Simetrías con deslizamiento con el eje paralelo al borde.

La combinación de estas transformaciones permiten obtener siete tipos de frisos distintos. Recorta las piezas coloreadas de la hoja y vamos a construirlos todos. Utiliza 6 piezas para cada friso y pégalas una vez hayas obtenido el friso correspondiente.

1. Traslación

2. Rotación de 180°

3. Simetría con eje vertical

4. Simetría con eje horizontal

5. Rotación 180° + simetría vertical + simetría horizontal

6. Simetría con deslizamiento

7. Simetría con deslizamiento + simetría vertical

Aprovecharemos que estamos tratando conceptos geométricos para que las alumnas y alumnos aprendan los conceptos a tratar mediante problemas más visuales y manipulativos. De esta forma, captaremos más su atención y posiblemente lograremos un mayor interés por el problema a resolver. Para ello, utilizaremos distintos materiales (tijeras, materiales de dibujo, imágenes...) y también propondremos el uso de GeoGebra. Todo ello, sin olvidar el objetivo que se persigue en la propuesta didáctica: que nuestro grupo-clase aprenda los conceptos de traslaciones, giros y simetrías así como a reconocerlos y aplicarlos.

F. Técnicas

En esta sección vamos a proponer los ejercicios diseñados para practicar las técnicas y métodos enseñados. Los tipos de ejercicios que hemos planteado en este apartado giran alrededor de los conceptos geométricos que pretendemos trabajar en la secuenciación didáctica. Con ellos, se pretende consolidar a través de momentos de trabajo de la técnica los métodos que se hayan desarrollado para enfrentar los problemas de la Sección E. En otras palabras, se ha buscado adecuar los ejercicios al campo de problemas propuesto.

La metodología que se va a seguir en su implementación en el aula es variada. Se les entregarán fotocopias con los ejercicios a resolver y corregiremos en la pizarra de forma común aquellos más relevantes. En cuanto a los agrupamientos de los alumnos, habrá ejercicios que se trabajarán individualmente y en otras ocasiones propondremos que se junten formando grupos cooperativos. Acerca de los recursos a utilizar, diseñaremos ejercicios en los que se trabaje con lápiz y papel y otros en los que utilizaremos el programa GeoGebra.

Exponemos a continuación las técnicas que se quieren desarrollar agrupándolas en las distintas isometrías que se presentan a lo largo de la secuencia didáctica:

- Técnicas asociadas a traslaciones.
    - Cálculo del vector que une los puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$: $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.
    - Módulo de un vector: $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
    - Suma de los vectores $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2)$: $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$.
    - Traslación de un punto A a través del vector $\vec{v}$: $\overrightarrow{OA} + \vec{v}$.
    - Composición de traslaciones de vector $\vec{v}$ y $\vec{w}$: traslación de vector $\vec{v} + \vec{w}$.
- Técnicas asociadas a rotaciones.

- Método para rotar una figura mediante el uso de regla y transportador.

- Método para obtener la rotación de dos figuras giradas.

- Composición de rotaciones de ángulos α y β: rotación de ángulo $\alpha+\beta$.

- Técnicas asociadas a simetrías.

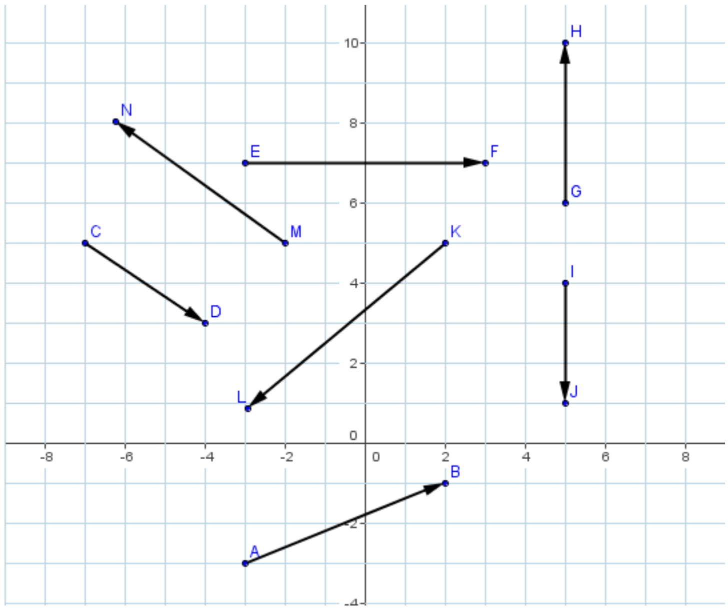
  - Construir el punto simétrico A' de A respecto a un eje (punto) r: r es la mediatriz (punto medio) del segmento AA'.

Vamos a diferenciar cuatro tipos de ejercicios atendiendo a su temática: vectores, traslaciones, giros y simetrías. A continuación, presentamos la propuesta de ejercicios para trabajar las técnicas asociadas a los vectores. Se deberán resolver de forma individual y atenderemos las dudas que vayan surgiendo. Con este primer ejercicio se pretende trabajar el cálculo de vectores dados los puntos extremos, así como su módulo aplicando la fórmula $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$. Además, también se busca que sean capaces de hallar vectores con misma dirección y sentido o con sentido contrario.

Actividad F.1.

1. Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ con $A(3,-5)$ y $B(6,3)$. Halla otro vector con el mismo sentido y otro con la misma dirección pero con sentido opuesto.

2. Halla las coordenadas de los vectores representados en la siguiente figura.



3. Di qué vectores del ejercicio anterior tienen la misma dirección, cuáles el mismo sentido y cuáles el mismo módulo.

Explicaremos cómo multiplicar un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ por un escalar $k \in \mathbb{R}$ ($k \cdot \vec{v} = (k \cdot v_1, k \cdot v_2)$ y cómo sumar dos vectores $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$. Luego, deberán resolver el siguiente ejercicio.

Actividad F.2. Sean los vectores $\vec{u} = (1, \frac{4}{3})$, $\vec{v} = (-1, 1)$ y $\vec{w} = (0, \frac{1}{5})$. Calcula:

- $\vec{u} + \vec{w}$
- $\vec{v} - \vec{w}$
- $5 \cdot \vec{w}$
- $2 \cdot \vec{v} - (\vec{u} + 5 \cdot \vec{w})$

Las siguientes tareas se ocupan de la traslación de figuras. En la primera actividad se da una figura y el vector de traslación y se pide hallar la figura trasladada.

Actividad F.3. Sea la circunferencia de centro $O(0,0)$ y radio $r = 2$ y la traslación de vector $\vec{u} = (-3,4)$. Halla el centro y el radio de la circunferencia trasladada.

En esta actividad practicarán la técnica para calcular el vector de traslación a través del siguiente ejercicio. Trabajarán de forma individual y, tras un tiempo, pondremos en común los resultados obtenidos.

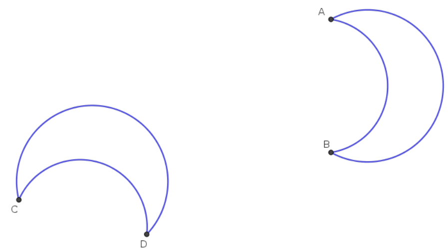
Actividad F.4. Halla el vector de traslación que transforma la estrella de arriba en la de abajo.

Y si es la estrella de arriba la trasladada, ¿qué vector sería? Relaciónalo con el anterior.

Con el siguiente ejercicio se trabaja la técnica para hallar el centro y el ángulo de un giro dadas dos figuras. Previamente, habremos explicado que dos figuras están relacionadas por un giro si las mediatrices de los puntos girados correspondientes se cruzan todas en un punto común que dará lugar al centro de giro. Para calcular el ángulo basta usar un transportador. Esta actividad se llevará a cabo con GeoGebra por parejas y deberán seguir los pasos que les facilitaremos en una fotocopia.

Actividad F.5. Vamos a ver un procedimiento para saber si una figura es una rotación de otra. Para ello, debemos encontrar el centro del giro y su ángulo. Sigue los pasos:

1. Abre el archivo actF5.ggb y encontrarás las siguientes figuras.

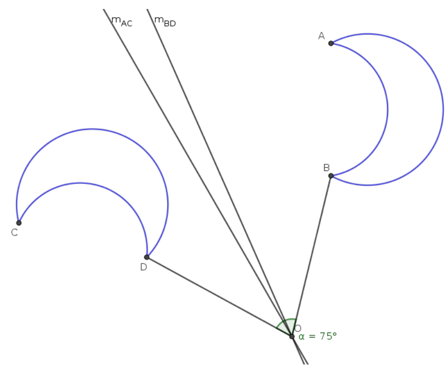


2. Traza las mediatrices de los puntos correspondientes, es decir, A y C, B y D. Para ello, recuerda que la mediatriz del segmento AC es la recta perpendicular a este que pasa por su punto medio. Para construirla traza una circunferencia con centro A y radio AC. Dibuja otra circunferencia con centro el punto C y el mismo radio. La recta que pasa por el punto de corte de estas dos circunferencias es la mediatriz.

3. Con la herramienta *Intersección* halla el punto de corte de estas dos rectas. Este punto es el centro del giro.

4. Para hallar el ángulo, utiliza *Ángulo* seleccionando dos puntos correspondientes y el centro.

El resultado final tiene que ser algo similar a esto:



G. Tecnologías

Presentamos las definiciones y razonamientos que justifican las técnicas de la sección anterior.

- Definición de vector.

  Definiremos el vector $\overrightarrow{AB}$ como el segmento orientado con origen el punto A y extremo en el punto B. Daremos las tres propiedades que lo definen:

  - Dirección: recta que contiene al vector o de cualquier recta paralela a ella.
  - Sentido: orientación indicada por la punta de flecha (hay dos posibles sentidos en una misma dirección).
  - Módulo: longitud del segmento AB.

  Explicaremos también el concepto de vectores equipolentes como vectores que tienen misma dirección, sentido y módulo.

- Fórmula del módulo de un vector.

  En la pizarra, explicaremos cómo descomponer un vector cualquiera como su componente en el eje X y su componente en el eje Y para, a continuación, obtener su módulo utilizando el Teorema de Pitágoras.

- Definición de traslación.

  Una traslación es una transformación caracterizada por un vector $\vec{v}$ de forma que un punto A se transforma en B si los vectores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son equipolentes, es decir, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

- Composición de traslaciones.

  Mediante la Actividad 4.4, demostraremos que la composición de traslaciones de vectores $\vec{u}, \vec{v}$ es una traslación de vector $\vec{u} + \vec{v}$ usando para ello la suma de vectores, previamente introducida.

- Definición de rotación.

Una rotación de centro un punto O y ángulo α transforma cada punto A en otro punto A' de forma que el ángulo $AOA' = \alpha$ y se cumple que $|OA| = |OA'|$.

- Composición de rotaciones.

  La justificación de que la composición de dos rotaciones con el mismo centro es otra rotación del mismo centro y de ángulo, la suma de los ángulos, la deducirán los alumnos mediante la realización de la Actividad 5.3.

- Definición de simetría central.

  Utilizando una rotación de centro O y ángulo 180° podremos introducir la simetría central. La definición formal que daremos es la siguiente:

  La simetría central de centro O es la aplicación que transforma un punto A en A' de forma que O es el punto medio del segmento AA'.

- Definición de simetría axial.

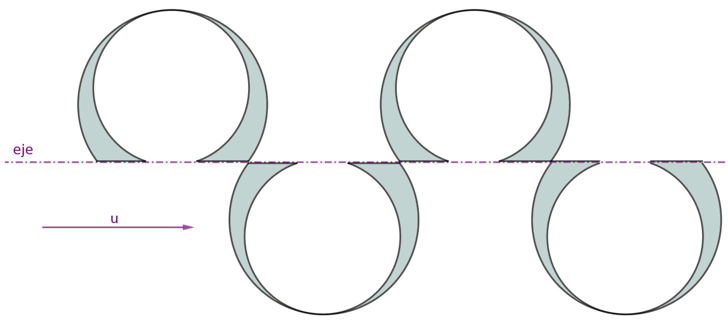
  Definiremos la simetría axial de la siguiente manera:

  La simetría axial de eje r transforma a un punto A otro punto A' de forma que la recta r es la mediatriz del segmento AA'.

- Definicion de simetría con deslizamiento.

  Definiremos la simetría con deslizamiento como una composición de una simetría axial y traslación. Este movimiento queda determinado por el eje de simetría y el vector de traslación que debe ser paralelo al eje.

  Un ejemplo de simetría con deslizamiento es el siguiente:



Debido al enfoque de aprendizaje basado en problemas de las actividades presentadas en la Sección E, se pretende que sean los propios alumnos y alumnas los que a través de los conocimientos previos, la resolución de los problemas propuestos y el debate que estos generen, sean capaces de justificar las técnicas empleadas. No se busca que los argumentos que den sean rigurosos sino que sean capaces de deducir las propiedades de cada uno de los movimientos.

No obstante, una vez finalizada la actividad en cuestión, será el profesor el que exponga, de forma común a toda la clase en la pizarra, la tecnología involucrada en cada uno de los problemas y que explique de forma razonada las técnicas a ella asociada.

H. Propuesta de secuencia didáctica

Presentamos a continuación una tabla con la propuesta didáctica diseñada y su temporalización para el aprendizaje de Movimientos en el plano así como las actividades incluidas en cada una.

Sesión	**Actividad**
Sesión 1: Introducción	Actividad C.1 (20 min) Actividad D.1 (15 min) Actividad D.2 (15 min)
Sesión 2: Vectores I	Actividad C.2 (25 min) Actividad E.1 (25 min)
Sesión 3: Vectores II	Actividad C.3 (15 min) Actividad F.1 (25 min) Actividad F.2 (10 min)
	Continúa en la página siguiente

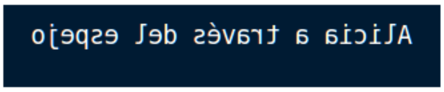
continuación de la página anterior	
Sesión	**Actividad**
Sesión 4: Traslaciones	Actividad E.2 (10 min) Actividad F.3 (10 min) Actividad F.4 (10 min) Actividad E.3 (20 min)
Sesión 5: Rotaciones	Actividad E.4 (20 min) Actividad F.5 (20 min) Actividad E.5 (10 min)
Sesión 6: Simetrías	Actividad E.6 (15 min) Actividad E.7 (20 min) Actividad E.8 (15 min)
Sesión 7: Invariantes	Actividad E.9 (20 min) Actividad E.10 (30 min)
Sesión 8: Frisos	Actividad E.11 (50 min)
Sesión 9: Prueba	Prueba de evaluación (50 min)

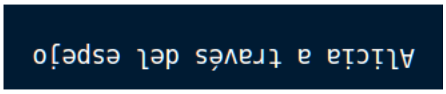
Debido a que en 3º de ESO están programadas 3 horas a la semana de Matemáticas, la duración prevista para la secuencia didáctica es de 3 semanas completas. Por supuesto, la temporalización puede ser variable por distintos motivos: el ritmo que se lleve en clase, las discusiones que surjan o si el docente cree necesario reforzar más unos puntos que otros.

I. Prueba de evaluación

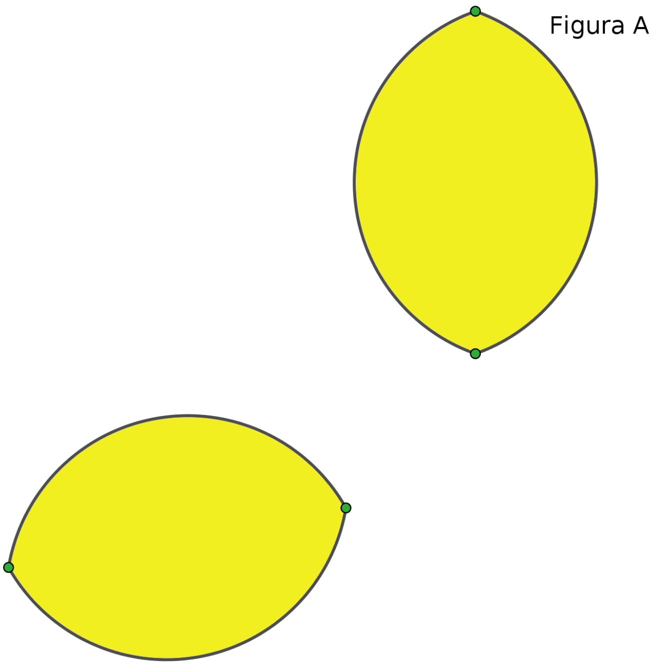
Enunciamos a continuación las preguntas de la prueba escrita diseñada para evaluar los conocimientos adquiridos y la puntuación asignada a cada tarea. El examen está pensado para ser realizado en una sesión de 50 minutos. Indicaremos a la clase que es necesario el uso de regla, compás y transportador en algunas de las preguntas.

Pregunta 1. (2 puntos) Describe los movimientos que tendrías que aplicar a las siguientes imágenes para poder leerlas normalmente.

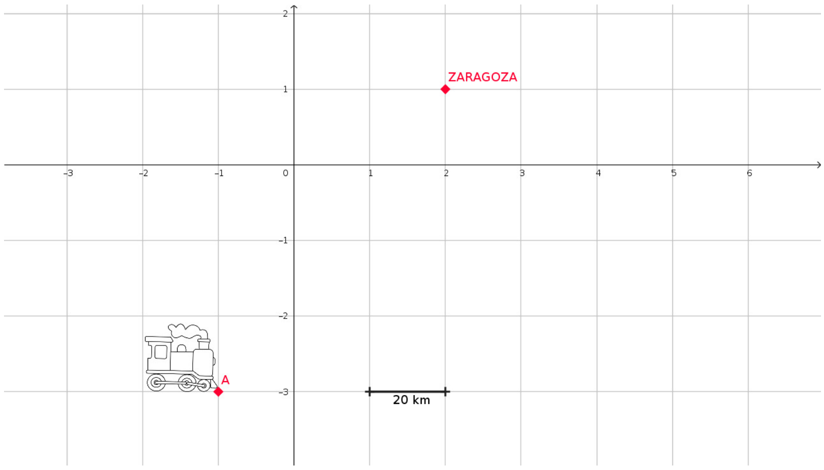




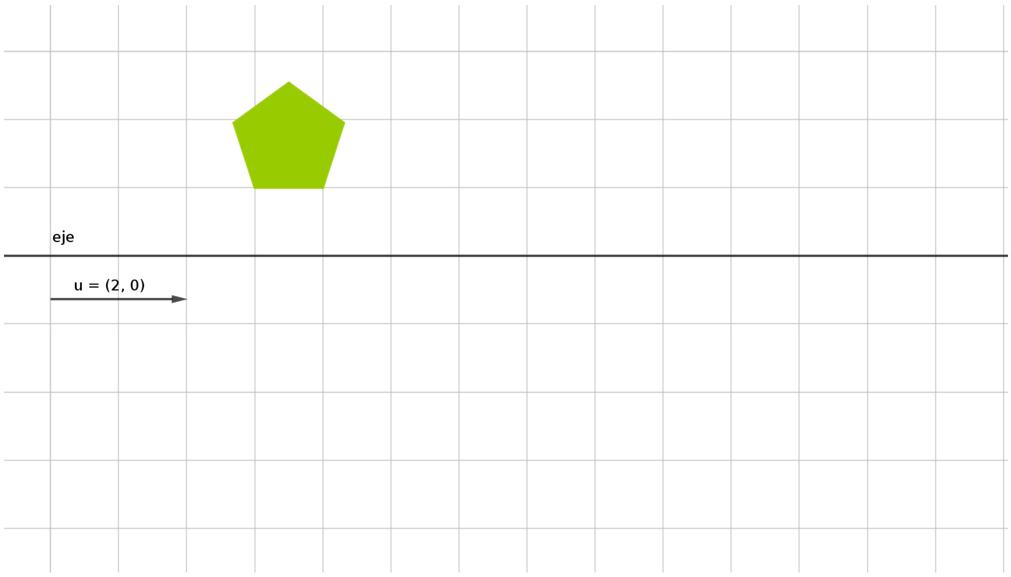
Pregunta 2. (2 puntos) Halla la rotación de forma justificada (es decir, da el centro de giro y el ángulo) que hemos aplicado a la figura *A*. Ayúdate de regla, compás y transportador.



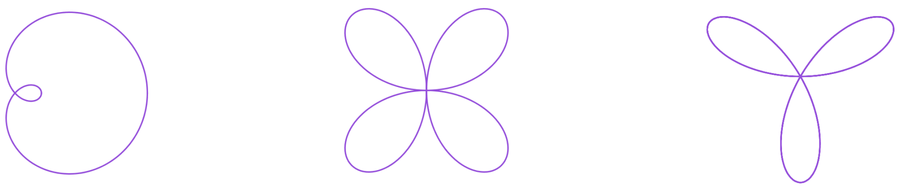
Pregunta 3. (2 puntos) Un tren que está en el punto *A* quiere tomar el camino más corto hasta Zaragoza. ¿Qué vector describe ese movimiento? ¿Qué distancia recorrerá el tren? Hállala sin usar la regla.



Pregunta 4. (2 puntos) Crea para esta figura el friso con simetría horizontal respecto al eje y traslación de vector $u = (2, 0)$. Haz tres iteraciones.



Pregunta 5. (2 puntos) ¿Qué giros dejan las figuras invariantes? Dibuja los centros de giro y da los ángulos $0° < \alpha \leq 360°$.



Evaluación

En este apartado vamos a comentar distintos aspectos de cada pregunta: campos de problemas, técnicas y tecnologías que evalúa; tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales y estándares de aprendizaje relacionados.

Pregunta 1. Con esta primera cuestión veremos si el alumnado sabe hallar las transformaciones estudiadas en clase que llevan una figura a otra así como a describirlas de forma correcta.

Tareas principales: describir las transformaciones que hay que aplicar a cada imagen.

Tareas auxiliares específicas: hallar los ejes de simetría y el ángulo de giro.

Tareas auxiliares generales: no existen.

Estándares de aprendizaje: Est.MAAC.3.4.1.

Pregunta 2. Con esta pregunta se pretende evaluar la técnica mostrada en clase para saber si una figura es una rotación de otra. Para ello, debemos encontrar el centro y el ángulo del giro.

Tareas principales: dar el centro y el ángulo del giro.

Tareas auxiliares específicas: hallar las mediatrices de los puntos correspondientes, el punto de corte de estas rectas.

Tareas auxiliares generales: medir con el transportador.

Estándares de aprendizaje: Est.MAAC.3.4.1.

Pregunta 3. A través de esta pregunta pretendemos reconocer si saben calcular un vector a partir de dos puntos así como su módulo. Aunque para que calculen la distancia deberán saber que es equivalente a calcular el módulo del vector.

Tareas principales: hallar el vector de traslación y el cálculo del módulo de este.

Tareas auxiliares específicas: aplicación de la fórmula del módulo.

Tareas auxiliares generales: interpretación de la escala, realización y simplificación de operaciones aritméticas.

Estándares de aprendizaje: Est.MAAC.3.4.1.

Pregunta 4. Con esta tarea veremos si saben interpretar y aplicar de manera correcta los movimientos del plano que se les dice.

Tareas principales: dibujar tres iteraciones correspondientes a una simetría horizontal y una traslación.

Tareas auxiliares específicas: aplicar la simetría, trasladar la figura.

Tareas auxiliares generales: no existen.

Estándares de aprendizaje: Est.MAAC.3.4.2.

Pregunta 5. Esta pregunta nos sirve para analizar si identifican los elementos que caracterizan a los giros (centro y ángulo) y el número de simetrías que tiene una figura.

Tareas principales: hallar los giros que dejan a las curvas invariantes.

Tareas auxiliares específicas: cálculo de los ángulos y los centros de giro.

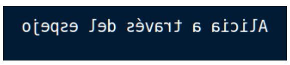
Tareas auxiliares generales: realización de operaciones aritméticas.

Estándares de aprendizaje: Est.MAAC.3.4.1.

Respuestas de los alumnos

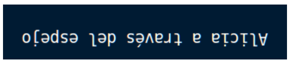
A continuación, vamos a ver las respuestas que se esperan en cada pregunta así como los posibles errores que se prevén. Además, señalaremos también las diferentes respuestas que se podrían dar en cada uno de los problemas.

Pregunta 1.



En este primer apartado la respuesta que se espera es que reconozcan que es necesario aplicar una simetría axial con eje de simetría vertical y que no corta a la imagen. El eje puede estar tanto a la izquierda como a la derecha de la frase.

El posible error que pueden cometer es que no reconozcan que tienen que hacer una simetría axial sino que piensen que hay que realizar un giro de 180°.



En la segunda imagen suponemos que dirán que hay que realiza una rotación con ángulo 180° y el centro no es relevante. También podrían dar como respuesta correcta que es necesario aplicar dos simetrías axiales: una con eje horizontal y otra con eje vertical (los dos sin cortar la frase). Del mismo modo, también podrían realizar una simetría axial horizontal y remitir al primer caso.

Uno de los errores que se espera es que crean que sólo es necesario aplicar una simetría axial con eje horizontal porque así ya estaría la frase "boca arriba" y no se den cuenta que todavía habría que hacer la vertical.

Pregunta 2.

Se espera que apliquen el método enseñado durante la secuencia didáctica para calcular el centro y el ángulo de una rotación dada una figura y su transformada.

Los errores que nos podremos encontrar será que no sepan la técnica para hacerlo y lo hagan a "ojo". Como se deja indicado en el enunciado, para dar por válido el giro hallado tendrán que razonar su respuesta. Podremos encontrar también medidas erróneas al usar el transportador y esto lo clasificaríamos como fallo en tarea auxiliar general.

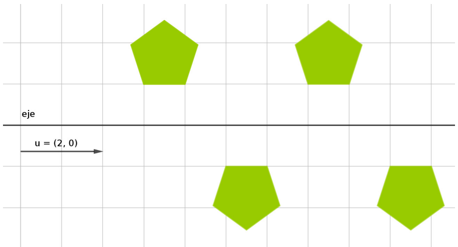
Pregunta 3.

La respuesta que suponemos que obtendremos es que hallen las coordenadas del vector con origen el punto A y extremo en Zaragoza, es decir, que calculen el vector $\vec{u} = (3,4)$. Para calcular la longitud, esperamos que calculen el módulo del vector $|\vec{u}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ y lo multipliquen por 20. Así, la distancia recorrida será de 100 km.

Otra forma de calcular la distancia que podrían realizar es que primero multipliquen las coordenadas por 20 y luego hagan el módulo: distancia$= \sqrt{(20\cdot 3)^2+(20\cdot 4)^2} = \sqrt{3600+6400} = \sqrt{10000} = 100$ km.

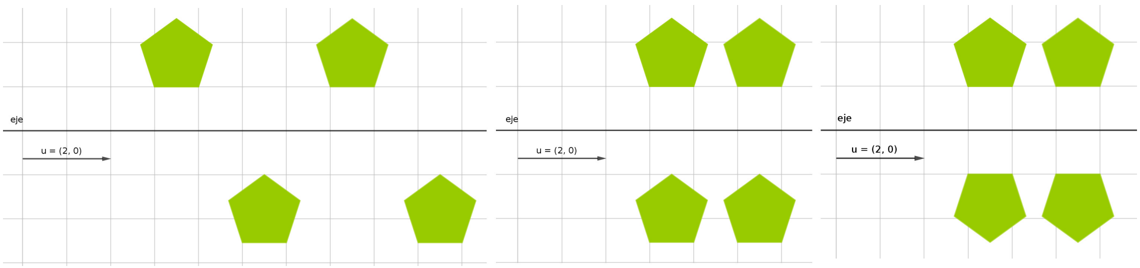
En cuanto a los errores, es posible que calculen el vector mal desde un principio debido a un error de cuentas o que den el vector opuesto. En consecuencia, es posible que la distancia recorrida también esté mal calculada (si el vector calculado es el opuesto, el módulo es el mismo). Al mismo tiempo, podremos encontrar también fallos aritméticos en el cálculo del módulo, obteniéndose así el resultado de forma errónea. Finalmente, seguramente también habrá respuestas en las que darán como resultado final directamente el módulo como distancia recorrida sin tener en cuenta la escala. Otro posible fallo con el que nos podremos encontrar es que las unidades de medida sean incorrectas o que ni siquiera las usen. Es posible también que calculen el módulo usando la regla, aunque se deja claro en el enunciado que no deben hacerlo así.

Pregunta 4.



Aquí a la izquierda dejamos la imagen de la respuesta que esperamos obtener. Este resultado final no se ve afectado por el orden en el que se apliquen las transformaciones, por lo que podrían llegar a él de dos maneras distintas.

Entre las respuestas erróneas que esperamos encontrar son las que se muestran a continuación.



De izquierda a derecha, en la primera de ellas podemos ver que aunque la traslación se ha hecho correctamente, no encontramos una simetría axial horizontal sino traslaciones verticales manteniendo la distancia al borde de la figura original. La imagen central corresponde con la aplicación de las traslaciones verticales anteriores y la del vector u. Por último, la tercera respuesta no corresponde con simetría axial + traslación sino que se puede ver como una traslación inicial de vector u y luego aplicar una simetría axial respecto al eje a los dos pentágonos.

También es posible que no realicen las tres iteraciones que se piden en el enunciado.

Pregunta 5.

Para la primera figura esperamos que el centro de giro digan uno punto cualquiera y que escriban que el único ángulo que la deja invariante es 360°. El posible error que podemos encontrar en este primer caso es que no sepan que un giro completo es 360°.

Para la figura central, las rotaciones que creemos que darán son las de ángulos 90°, 180°, 270° y 360° y con centro el centro de la figura (la unión de los cuatro pétalos).

La tercera figura tiene 3 rotaciones que la dejan invariante: todas con centro la unión de los tres pétalos y ángulos 120°, 240° y 360°.

También es posible que para los giros de 360° den cualquier centro. En cuanto a los posibles errores de estas dos últimas figuras, esperamos ángulos y centros erróneos o que no den todos los giros pedidos.

Criterios de calificación

Para la corrección de la prueba vamos a utilizar el modelo de tercios propuesto en Gairín y cols. (2012). Recordemos que se trata de un modelo en el que existe una jerarquía para clasificar los errores y el conjunto de errores atribuibles a cada categoría tiene una penalización máxima:

- Tareas principales: el conjunto de errores de este tipo puede alcanzar el 100 % de la puntuación del problema y se puede dejar de corregir.
- Tareas auxiliares específicas: se puede descontar un máximo del 67 % de la puntuación del problema y hay que continuar corrigiendo.
- Tareas auxiliares generales: la penalización por este tipo de errores puede alcanzar el 33 % de la puntuación del problema y hay que continuar corrigiendo.

Teniendo en cuenta que todas las preguntas del examen tienen una puntuación de 2 puntos, vamos a dar la misma cota superior para la suma de errores de cada tipo de tarea. Así, los errores en tareas auxiliares generales tendrán una penalización máxima de 0.6 puntos. En cuanto a las penalizaciones en tareas auxiliares específicas, se tiene que el conjunto de errores podrá sumar un máximo de 1.2 puntos. Finalmente, se podrá descontar hasta dos puntos los fallos en tareas principales.

A continuación, se describe una guía de corrección con la penalización que se atribuiría a cada error según esté presente en una tarea principal, auxiliar específica o auxiliar general.

	Penalización por error en tarea…		
Pregunta	principal ($\leq$ 2 ptos.)	aux. específica ($\leq$ 1.2 ptos.)	aux. general ($\leq$ 0.6 ptos.)
1	0.6 ptos	0.3 ptos	No existen
2	0.7 ptos	0.2 ptos	0.1 ptos
3	0.7 ptos	0.3 ptos	0.1 ptos
4	0.6 ptos	0.2 ptos	No existen
5	0.2 ptos	0.2 ptos	0.1 ptos

Comunicación de los resultados y las calificaciones

El objetivo de esta prueba escrita es medir el grado de asimilación de los contenidos tratados, teniendo en cuenta los objetivos propuestos y los criterios de evaluación así como los estándares de aprendizaje. Una vez realizada la corrección es necesario saber cómo vamos a llevar a cabo su gestión en el aula.

Para ello, vamos a describir lo que en Rochera y cols. (2001) sus autores definen como *actividades de comunicación* y *actividades de aprovechamiento*. Las actividades de comunicación son los momentos dirigidos a trasladar los resultados obtenidos en la prueba que han realizado. Por otro lado, las actividades realizadas posteriormente a la prueba para obtener beneficio de las respuestas y resultados se conocen como actividades de aprovechamiento.

La corrección tendrá una parte cuantitativa (la nota numérica resultado de aplicar la guía de correción) y una parte cualitativa en la que se realizarán comentarios atendiendo a aspectos como: el esfuerzo realizado para la preparación del examen, técnicas deducidas no explicadas en clase, el orden y limpieza en la resolución de los problemas o la forma de expresarse por escrito. Cabe señalar que no pondremos la respuesta correcta en las pruebas corregidas que devolveremos a los alumnos.

Previamente a la comunicación de las calificaciones pediremos a nuestros alumnos que respondan (10 minutos) por escrito a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué conceptos consideras que son los más importantes del tema? ¿Por qué?
2. ¿Habrías dedicado más tiempo a algún movimiento? ¿De qué forma?
3. ¿Cómo has preparado la prueba?

A continuación, se les explicarán los objetivos de cada pregunta del examen describiendo las tareas principales, auxiliareas específicas y generales, y se les dará la guía de corrección que se ha aplicado. De esta forma, verán los criterios que hemos usado y la importancia de cada error cometido.

Una vez transmitidos los criterios de corrección procederemos a comunicar los resultados. Esto se llevará a cabo repartiendo las pruebas corregidas con la nota numérica y los comentarios que sirven de *feedback* a cada estudiante. De esta forma, tratamos de favorecer el carácter formativo que debe tener la evaluación. Les daremos un tiempo para que observen su prueba y vean los errores que han cometido, si los tienen.

Con el objetivo de que observen distintas formas de estudio y valoren la estrategia individual que ha seguido cada uno así como su idoneidad viendo los resultados, comentarán la respuesta que han dado a la tercera pregunta del pequeño cuestionario anterior en grupos de 4-5 personas. Esto les permitirá reflexionar sobre la importancia de la planificación y preparación de la prueba y considerar formas de estudio que no habían contemplado.

Finalmente, señalaremos los fallos más comunes que hemos encontrado en la corrección y preguntaremos dónde está el error y cómo se resolvería, aprovechando este momento para resolver las dudas que puedan tener. Además, les daremos la opción de que repitan las preguntas que no hayan resuelto de forma correcta ofreciendo así posibilidad de mejora de la calificación.

Referencias

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *19(2)*, 221–266.

de Lucas, M., y Rey, M. J. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, 3º ESO*. Oxford University Press.

Gairín, J., y Muñoz, J. (2005). El número racional en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial. Comunicación al grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. En *Investigación en Educación Matemática IX.* Córdoba: SEIEM.

Gairín, J., Muñoz, J., y Oller, A. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En *A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261–274). Jaén: SEIEM.

Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Síntesis.

Rochera, M. J., Colomina, R., y Barberá, E. (2001). Optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de la evaluación en matemáticas. *Revista Investigación en la Escuela*, *45*, 33–44.

Salvador, A., y Molero, M. (2018). *Capítulo 8: Movimientos en el plano y el espacio*. Marea Verde. (Recuperado de: http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3A/08_Movimientos_3A.pdf)

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Boletín Oficial de Aragón, núm 105, de 2 de junio de 2016, pp. 12640 a 13458. (2016).