Universidad Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

Funciones: una propuesta didáctica para Matemáticas Académicas de 3º ESO

Functions: a didactic proposal for Academic Mathematics of Spanish Secondary – 3rd year of ESO

Autora

Sofía Led Jiménez

Directora

Inés Ramírez Alesón

Facultad de Educación

2018-2019

Índice

Nota - Referencia de género: *Todas las referencias contenidas en este trabajo para las que se utiliza la forma de masculino genérico, deben entenderse aplicables, indistintamente, a mujeres y hombres.*

A. Definición del objeto matemático a enseñar

1. Objeto matemático a enseñar, curso y asignatura en el que se sitúa.

Este Trabajo Fin de Máster pretende presentar una propuesta didáctica sobre **las funciones,** objeto matemático a enseñar, situándolo en el curso de **tercero de Educación Secundaria Obligatoria** dentro de la asignatura de **Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas** según la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Se centra concretamente en los siguientes contenidos acerca de las funciones:

- Definición de función. Variable dependiente e independiente.
- Formas de expresar una función: enunciado, tabla de valores, expresión analítica y gráfica.
- Representación de funciones a partir de enunciado, de tabla de valores y de expresión analítica.
- Características de la función de forma gráfica: dominio y recorrido, continuidad, cortes con los ejes, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetría y periodicidad.
- Características de la función a partir de su expresión analítica: dominio, cortes con los ejes y simetría.
- Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano.
- Problemas contextualizados

2. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se han considerado enseñar a lo largo de la presente unidad didáctica quedan recogidos en la siguiente tabla:

Campo de problemas	Técnicas	Tecnologías
	CP1 – Concepto de función	
CP1.1 –	**T1.1** – Comprobar que para cada valor de x	Definición de

Saber si una gráfica, expresión analítica, enunciado o tabla representa una función	existe un único valor de y.	función
CP1.2 – Interpretación de una función	**T1.2** – Identificar la variable dependiente e independiente de la gráfica e interpretar la relación que mantienen.	Definición de función
CP2 – Cambios entre sistemas de representación		
CP2.1 – De enunciado a tabla	**T2.1** – Hacer una tabla de valores con la relación entre la variable dependiente e independiente.	Definición
CP2.2 – De tabla a gráfica	**T2.2** – Representar en los ejes cartesianos los puntos de la tabla y construir la gráfica a partir de ellos.	Definición y representación
CP2.3 – De gráfica a tabla	**T2.3** – Calcular las coordenadas de puntos de la gráfica y construir una tabla de valores.	Definición y representación
CP2.4 – De enunciado a gráfica	**T2.4** – Representar la relación del enunciado en un sistema de ejes coordenados (utilizando o no una tabla de valores).	Definición y representación
CP2.5 – De gráfica a enunciado	**T2.5** – Analizar la relación que muestra la gráfica y escribir un enunciado que cumpla la relación.	Definición y representación
CP2.6 – De enunciado a expresión analítica	**T2.6** – Encontrar y escribir algebraicamente la relación entre la variable dependiente e independiente.	Definición
CP2.7 – De expresión analítica a tabla	**T2.7** – Calcular la imagen de la función para valores de x y construir la tabla.	Definición
CP2.8 – De expresión analítica a gráfica	**T2.8** – Construir una tabla de valores y representar los puntos en un sistema de ejes coordenados.	Definición y representación
CP2.9 – De gráfica a expresión analítica	**T2.9** – Obtener la relación entre la variable dependiente e independiente y plasmarlo algebraicamente.	Definición y representación

CP3 – Interpretación de las características de una función		
CP3.1 – Dominio y recorrido (dada por su gráfica)	**T3.1.1** – Dominio: Proyectar la gráfica sobre el eje de abscisas y escribir el intervalo o intervalos de valores obtenidos en el eje OX. **T3.1.2** – Recorrido: Proyectar la gráfica sobre el eje de ordenadas y escribir el intervalo o intervalos de valores obtenidos en el eje OY	Definición y representación
CP3.2 – Dominio (dada por su expresión analítica) $(*)$	**T3.2** – Obtener los valores de x para los que la función está definida.	Definición
CP3.3 – Continuidad (dada por su gráfica)	**T3.3** – Comprobar si se puede dibujar la gráfica de un solo trazo.	Definición y representación
CP3.4 – Cortes con los ejes (dada por su gráfica)	**T3.4** – Obtener las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con cada uno de los ejes de coordenadas.	Definición y representación
CP3.5 – Cortes con los ejes (dada por su expresión analítica) $(*)$	**T3.5.1** – Cortes con el eje OX: resolver la ecuación $f(x) = 0$ y obtener los puntos de corte, si existen, $(x_i, 0)$, x_i solución de $f(x) = 0$. **T3.5.2** – Corte con el eje OY: calcular $f(0)$. El punto de corte, si existe, es $\left(0, f(0)\right)$.	Definición
CP3.6 – Crecimiento y decrecimiento (dado por su gráfica)	**T3.6.1** – Crecimiento en (x_1, x_2): ver si para dos valores x_1 y x_2 próximos y tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$. Entonces f crece en (x_1, x_2). **T3.6.2** – Decrecimiento en (x_1, x_2): ver si para dos valores x_1 y x_2 próximos y tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$. Entonces f decrece en (x_1, x_2).	Definición y representación
CP3.7 – Máximos y mínimos (dado por su gráfica)	**T3.7.1** – Máximos relativos: obtener las coordenadas de los puntos en los que la función pasa de ser creciente a decreciente. **T3.7.2** – Mínimos relativos: obtener las coordenadas de los puntos en los que la función pasa de ser decreciente a creciente. **T3.7.3** – Máximo absoluto: obtener el punto de	Definición y representación

	la gráfica con mayor valor de la ordenada. **T3.7.3** – Mínimo absoluto: obtener el punto de la gráfica con menor valor de la ordenada.	
CP3.8 – Simetría (dada por su gráfica)	**T3.8.1** – Simetría respecto al eje OY (Par): doblar la gráfica por el eje OY y comprobar que las gráficas coinciden. **T3.8.1** – Simetría respecto del origen (Impar): doblar la gráfica por el eje OY y luego por el eje OX y comprobar que las gráficas coinciden.	Definición y representación
CP3.9 – Simetría (dada por su expresión analítica) $(*)$	**T3.9.1** – Simetría respecto al eje OY (Par): comprobar que $f(x) = f(-x), \forall x \in Dom\ f$ **T3.9.2** – Simetría respecto del origen (Impar): comprobar que $-f(x) = f(-x), \forall x \in Dom\ f$	Definición
CP3.10 – Periodicidad (dada por su gráfica)	**T3.10** – Observar si la gráfica de la función está formada por un dibujo que se va repitiendo en intervalos sucesivos. En caso afirmativo, obtener el periodo viendo en el eje de abscisas en qué intervalo se repite la función.	Definición y representación

$(*)$ Cuando se estudien las características de una función a partir de su expresión analítica, ésta deberá ser sencilla.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Según la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (BOE 10/12/2013), lo que hay que ver sobre el objeto matemático a estudiar, las funciones, se encuentra en el bloque 4 de dicho curso bajo el nombre también de “Funciones”. Los contenidos relativos a dicho bloque, según la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, son los siguientes:

1. Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
2. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.

3. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
4. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
5. Expresiones de la ecuación de la recta.
6. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.

Estos pueden dividirse en dos subloques: función y sus características (puntos 1,2, 3 y 4) y funciones lineal y cuadrática (5 y 6). **La presente secuencia didáctica está dirigida para abarcar el primer subloque**, y por lo tanto, el análisis de la introducción del concepto de función va a estar centrado solo en él.

Para ver cómo se justifica la introducción de las funciones, se va a analizar en una misma editorial, en concreto, la editorial Anaya, cómo se ha introducido este objeto matemático a lo largo de las diferentes legislaciones educativas.

<u>LGE (Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, BOE nº 187, de 6 de agosto de 1970)</u>

El libro que se ha analizado para esta etapa legislativa es el siguiente:

Etayo, J., Colera, J., Ruiz, A. (1979). *Matemáticas 1º.* Madrid: Anaya.

Se trata de un libro que exige a los alumnos un nivel alto de abstracción y formalismo matemático (por como introduce los contenidos y por la notación que se utiliza). En particular, en la primera sección (definiciones) del tema de funciones se comienza contando que "el concepto de función surge de la observación del mundo real. (…) los fenómenos y objetos de la naturaleza están relacionados: no son independientes". Esta sección acaba dando lugar a la definición del objeto matemático que estamos estudiando:

> **Definición**
>
> **Una función real de variable real es una aplicación de un subconjunto de R en R.**
>
> **Al conjunto inicial se le llama dominio de f y se escribe $\mathcal{D}(f)$.**
>
> **El dominio de f bien se da explícitamente, bien se supone que es el más amplio posible.**

LOGSE (Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo, BOE nº 238, de 4 de octubre de 1990)

El libro que se ha analizado para esta etapa legislativa es el siguiente:

Colera, J., García, J. E., Gaztelu, I., De Guzmán, M., Oliveira, Mª.J. (1995). *3 Matemáticas Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Anaya.

El nivel de abstracción y de formalidad matemática disminuye con respecto al libro anterior. La portada de la unidad presenta las funciones y su razón de ser: "Las funciones como instrumento para explorar los cambios de nuestro mundo. Las funciones constituyen la herramienta adecuada para la modelización de los cambios que las cosas de nuestro entorno experimentan en el espacio y en el tiempo". En la primera página de la unidad se presenta un ejemplo de gráfica contextualizada en el mundo real (altura y tiempo del vuelo de una cigüeña) para introducir el diagrama cartesiano, la escala y el dominio. A continuación, se introduce la definición de función:

> Una función relaciona dos variables a las que, en general, llamaremos x e y.
> — x es la **variable independiente** (en el ejemplo anterior, el tiempo).
> — y es la **variable dependiente** (en el ejemplo anterior, la altura).
> — La función asocia a cada valor de x **un único** valor de y.

LOE (Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, BOE nº 106, de 4 de mayo de 2006)

El libro que se ha analizado para esta etapa legislativa es el siguiente:

Colera, J., García, R., Gaztelu, I., Oliveira, Mª.J. (2006). *Matemáticas 3 Educación Secundaria.* Madrid: Anaya.

Se trata de un libro similar al anterior en cuanto a contenidos y formalismo matemático. Contiene una portada introductoria del bloque de funciones en la que se dan un par de ejemplos: "La variación del índice de la bolsa a lo largo de un año, el coste de una conferencia según su duración, son ejemplos de funciones". El siguiente par de páginas contienen ejercicios para recordar y reflexionar sobre conceptos de funciones. La primera página de la unidad se utiliza para presentar, mediante un ejemplo contextualizado en el mundo real parecido al libro anterior (altura y tiempo de vuelo de un águila), el concepto de diagrama cartesiano, escala y dominio (igual que el libro anterior). En la segunda, ya se presenta la definición de función:

Una función es una relación entre dos variables a las que, en general, llamaremos x e y.

— x es la **variable independiente** (en el ejemplo anterior, el tiempo).

— y es la **variable dependiente** (en el ejemplo anterior, la altura).

— La función asocia a cada valor de x **un único** valor de y. Se dice que y **es función** de x.

LOMCE (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, BOE nº 295, de 10 de diciembre de 2013)

Al ser la LOMCE la ley actual vigente, se ha decidido analizar dos libros de diferentes editoriales, en concreto las editoriales Anaya y Santillana, para poder aportar mayor información sobre la introducción del objeto matemático en el presente.

El libro que se ha analizado de la editorial Anaya es el siguiente:

Colera Jiménez, J., Oliveira González, Mª.J., Gaztelu Albero, I., Colera Cañas, R. (2015). *ESO 3 Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.* Madrid: Anaya.

Antes de comenzar la unidad, hay una pequeña contextualización histórica donde puede verse cómo ha evolucionado el objeto matemático de las funciones desde sus inicios (primeros conceptos asociados a ella). Comienza nombrando la razón de ser del objeto "(…) el origen de las funciones se debe a la necesidad de dar explicación a los fenómenos físicos". La unidad comienza mostrando un ejemplo de gráfica contextualizada en el mundo real, esta vez sobre la altura y tiempo de vuelo de un helicóptero, y mediante el análisis de la misma se van introduciendo los conceptos de variable, eje y su escala, dominio y recorrido. A continuación, se introduce la siguiente definición de función:

Una **función** es una relación entre dos variables a las que, en general, llamaremos x e y.

- x es la **variable independiente** (en el ejemplo del helicóptero, el tiempo).
- y es la **variable dependiente** (en el ejemplo del helicóptero, la altura).
- La función asocia a cada valor de x un único valor de y. Se dice que y **es función** de x.

El libro que se ha analizado de la editorial Santillana es el siguiente:

De la Prida Almansa, C., Gaztelu Villoria, A. Mª., González García, A., Machín Polaina, P., Pérez Saavedra, C., Sánchez Figueroa, D. (2015). *Matemáticas Enseñanzas académicas 3 ESO, SERIE RESUELVE*. Madrid: Santillana.

Al contrario que en los libros anteriores, la portada del tema no expone la razón de ser del objeto matemático estudiado, sino los contenidos que se van a adquirir durante la unidad. A diferencia de los libros anteriormente estudiados, la primera página de la unidad comienza dando la definición de función y a continuación, presentando dos ejemplos resueltos para identificar si las relaciones son o no funciones (precio de un cuaderno y nº de cuadernos comprados, peso y altura de las personas). La definición de función que presentan es la siguiente:

> Una **función** es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, *x* e *y*, de forma que a cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*.
>
> La variable *x* se denomina **variable independiente**, y la variable *y*, **variable dependiente**.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

A continuación se va a mostrar un análisis de los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se han enseñado en las diferentes legislaciones educativas en los libros estudiados en la sección anterior para observar cómo han evolucionado con el tiempo.

Destacar que se ha utilizado la numeración de los campos de problemas del apartado A.2, para comprobar qué campos de problemas de los que se pretenden ver en esta propuesta didáctica se enseñan en los libros analizados.

CAMPOS DE PROBLEMAS	Anaya 1979	Anaya 1995	Anaya 2006	Anaya 2015	Santillana 2015
CP1 - Concepto de función					
CP1.1 – Saber si una gráfica representa una función			✓		✓
CP1.1 – Saber si un enunciado representa una función					✓
CP2 - Cambios entre sistemas de representación					
CP2.1 – De enunciado a tabla		✓	✓	✓	✓
CP2.2 – De tabla a gráfica		✓	✓	✓	✓

CP2.3 – De gráfica a tabla					✓
CP2.4 – De enunciado a grafica	✓	✓	✓	✓	✓
CP2.5 – De grafica a enunciado			✓	✓	✓
CP2.6 – De enunciado a expresión analítica	✓	✓	✓	✓	✓
CP2.7 – De expresión analítica a tabla	✓	✓	✓	✓	✓
CP2.8 – De expresión analítica a gráfica	✓	✓	✓	✓	✓
CP2.9 – De gráfica a expresión analítica	✓	✓	✓	✓	✓
CP3 - Interpretación de las características de una función					
CP3.1 – Dominio de una función (dada por su gráfica)		✓	✓	✓	✓
CP3.1 – Recorrido de una función (dada por su gráfica)				✓	✓
CP3.2 – Dominio de una función (dada por su expresión analítica)	✓				✓
CP3.3 – Continuidad (dada por su gráfica)		✓	✓	✓	✓
CP3.4 – Cortes con los ejes (dada por su gráfica)					✓
CP3.5 – Cortes con los ejes (dada por su expresión analítica)					✓
CP3.6 – Crecimiento y decrecimiento (dada por su gráfica)		✓	✓	✓	✓
CP3.7 – Máximos y mínimos (dada por su gráfica)		✓	✓	✓	✓
CP3.8 – Simetría (dada por su gráfica)					✓
CP3.9 – Simetría (dada por su expresión analítica)					✓
CP3.10 – Periodicidad (dada por su gráfica)		✓	✓	✓	✓
CP3.11 – Tendencia (dada por su gráfica)		✓	✓	✓	
CP3.12 – Dibujar una función conociendo sus características					✓

En la tabla puede observarse que el libro (de los analizados) que recoge más campos de problemas es el de Santillana 2015. En particular, es un libro muy completo que contiene explicaciones más detalladas que el resto de libros analizados y con ejemplos dirigidos tras la introducción de la teoría.

Por otro lado, se observa que el libro de Anaya de 1979 no posee apenas campos de problemas sobre el objeto matemático estudiado. Esto se debe a que los contenidos que se tratan sobre funciones no son los mismos (suma y multiplicación de funciones, propiedades de las operaciones con funciones y funciones polinómicas). Además, hay que destacar el alto nivel de abstracción y de formalidad matemática que exige este libro a los alumnos. El nivel de abstracción disminuye significativamente en los otros libros analizados. En particular, los libros de Anaya de 1995, 2006 y 2015 introducen los conceptos sobre funciones con los mismos ejemplos, muchos de sus ejercicios son idénticamente los mismos, y conforme avanzan los años el número de ejercicios aumenta. Desde 1995, los libros analizados hacen que los alumnos aprendan los conceptos mediante repetición de las técnicas, predominando en ellos los ejercicios y habiendo un repertorio limitado de problemas.

Por último, comparando los libros de Anaya 2015 y Santillana 2015 se observa que este último introduce, en primer lugar, las tecnologías de los conceptos, y en segundo lugar ejemplos dirigidos donde se aplican las tecnologías previas y las técnicas asociadas. A diferencia, el libro de Anaya 2015 presenta en primer lugar ejemplos resueltos para terminar dando lugar a las definiciones correspondientes.

Las técnicas y tecnologías que utilizan (en el caso de que aparezca en el libro el campo de problemas) son las siguientes:

CP		TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Concepto de función	**1.1**	Determinar la variable dependiente e independiente y observar si a algún valor de la variable independiente le corresponde más de un valor de la variable dependiente.	Definición de función y representación gráfica.
Cambios entre sist. de representación	**2.1**	Identificar la variable dependiente e independiente y realizar una tabla de valores.	Definición de función
	2.2	Representar los puntos de la tabla de valores en un sistema de ejes coordenados y construir la gráfica a partir de ellos.	Definición y representación
	2.3	Obtener las coordenadas de varios puntos de la gráfica y recogerlas en una tabla de valores.	Definición y representación
	2.4	Representar la relación del enunciado en un sistema de ejes coordenados (utilizando o no una tabla de valores).	Definición y representación
	2.5	Interpretar la relación entre la variable	Definición y

		dependiente e independiente que muestra la gráfica y plasmarlo en un enunciado.	representación
	2.6	Identificar la variable dependiente e independiente y plasmar la relación entre las variables en una expresión analítica.	Definición
	2.7	Sustituir el valor de x en la expresión analítica de la función y calcular la imagen.	Definición
	2.8	Construir una tabla de valores y representar los puntos gráficamente.	Definición y representación
	2.9	Obtener la relación entre la variable dependiente e independiente y plasmarlo algebraicamente.	Definición y representación
Interpretación de las características de una función	**3.1**	Obtener los valores de x para los que existe la gráfica de la función. Obtener los valores que toma la variable dependiente.	Definición de dominio y recorrido y representación gráfica
	3.2	Encontrar los valores de x para los que la función está definida.	Definición de dominio
	3.3	Comprobar si la gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.	Definición y representación gráfica
	3.4	Cortes con OX: Obtener las coordenadas de los puntos en los que la gráfica atraviesa OX. Corte con OY: Obtener las coordenadas del punto en el que la gráfica atraviesa OY.	Representación gráfica
	3.5	Cortes con OX: resolver la ecuación $f(x) = 0$ y obtener los puntos $(x_i, 0)$. Corte con OY: obtener el valor $f(0)$ y el punto $\big(0, f(0)\big)$.	Definición de puntos de corte
	3.6	Comprobar si para dos valores x_1 y x_2 próximos y tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, entonces f crece en (x_1, x_2) o se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$, entonces f decrece en (x_1, x_2).	Definición y representación gráfica
	3.7	Obtener las coordenadas de los puntos en los que la gráfica pasa de ser creciente a decreciente (máximos) y viceversa (mínimos).	Definición y representación gráfica
	3.8	Comprobar que las gráficas coinciden al doblar la gráfica por el eje OY (par) o al doblar la gráfica por el eje OY y luego por el eje OX (impar).	Definición y representación gráfica

	3.9	Comprobar si se cumple que $f(x) = f(-x)$ (par) o que $f(-x) = -f(x)$ (impar), $\forall x \in Dom\ f$.	Definición
	3.10	Observar si la gráfica de la función está formada por un dibujo que se va repitiendo en intervalos sucesivos y obtener dicho intervalo.	Definición y representación gráfica
	3.11	Obtener el valor en el que la función se estabiliza	Representación gráfica
	3.12	Representar los puntos en el sistema de coordenadas, dibujar flechas que indiquen el crecimiento y decrecimiento y representar la función en el dominio indicado siguiendo las pautas.	Definiciones y representación gráfica

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Tal y como se ha descrito en el apartado anterior, los libros de texto fomentan el aprendizaje de las técnicas mediante la repetición de ejercicios. Sin embargo, el tema de funciones requiere abstracción por parte de los alumnos y el hecho de aprender los contenidos mediante repetición y memorización fomenta que cometan errores.

A continuación se van a mostrar algunos de los errores que se presentan en el artículo de Ortega, T., y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación, nº 12* (2), 209-221. En él se lleva a cabo un estudio de errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones en alumnos de 4º ESO, pero los resultados se pueden extrapolar a alumnos de 3º ESO. Algunos de los errores que cometen son:

- Cambiar la orientación positiva-negativa de los ejes cartesianos.
- Leer el eje de abscisas en sentido contrario al convenido.
- Leer el eje de ordenadas en sentido contrario al convenido.
- Cambiar el orden en que se presentan las coordenadas en los pares de puntos.
- Formación errónea de intervalos numéricos que refieren la propiedad a los ejes del diagrama cartesiano (mezclan abscisas y ordenadas en los intervalos, cambian el orden de las abscisas).
- Dificultad para distinguir entre variable dependiente e independiente y para saber en qué eje se representa cada una.

- Al calcular los extremos, fijarse en puntos y no en puntos y en un entorno de estos.
- Interpretar los extremos como puntos más altos o más bajos respecto al eje de abscisas, o también por su posición relativa al eje de abscisas.
- Utilizar el mismo criterio de extremo absoluto para los máximos y para los mínimos, "el más alto", lo que hace que el mínimo absoluto lo señalen como el más cercano al eje de abscisas.
- Representación numérica incompleta de los puntos de corte y de los extremos.
- Interpretar intervalos como puntos a la hora de representar funciones.

Por otro lado, se han recopilado a continuación otros errores comentados por profesores con experiencia en impartir Matemáticas en 3º ESO:

- No identificar a qué se llama eje de abscisas y a qué se llama eje de ordenadas.
- Graduar mal los ejes de coordenadas.
- Dificultad en la representación de valores racionales en la recta real.
- Confundir la forma de la gráfica con la trayectoria del movimiento descrito. Por ejemplo, asociar que volver al punto de salida es volver al origen de la gráfica o que alejarse del origen se corresponde con subir una montaña.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Para poder afrontar los contenidos sobre funciones que se abarcan en la presente unidad didáctica, los alumnos deberían tener los siguientes conocimientos previos:

- Números enteros, decimales y fraccionarios.
- La recta real.
- Intervalos de números.
- Representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- Lenguaje algebraico para simbolizar relaciones.
- Resolución algebraica de ecuaciones de primer y segundo grado.
- Variable dependiente e independiente.
- Evaluar una función.

- Fórmulas geométricas de áreas y volúmenes de las figuras.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Muchos de los conocimientos relacionados con el objeto matemático de las funciones se vienen enseñando desde cursos anteriores a tercero, como puede verse a continuación.

EDUCACIÓN PRIMARIA:

Se comienza a tratar el concepto de coordenadas cartesianas en **6º de Primaria**. Podemos encontrar el contenido de "Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos" dentro del Real Decreto 126/2014 del currículo básico de Educación Primaria, más concretamente dentro del bloque 4 de Geometría de dicho curso.

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA:

Durante toda esta etapa se tratan contenidos relacionados con los **números y el álgebra, la geometría y las funciones**, los cuales pueden encontrarse dentro del Anexo II de Matemáticas de la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, en los **bloques 2, 3 y 4** respectivamente. A continuación se muestran los contenidos que se estudian en los cursos de **1º y 2º** en dichos bloques y en **3º de la ESO** el bloque 2 (que se daría antes que el de funciones):

- **1º DE LA ESO:**

<u>Bloque 2: Números y Álgebra</u>

- Iniciación al lenguaje algebraico.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias.

- Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución. Interpretación de la solución. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.

Bloque 3: Geometría

- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones.
- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
- Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares.

Bloque 4: Funciones

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).
- Funciones de proporcionalidad directa. Representación.

- **2º DE LA ESO:**

Bloque 2: Números y Álgebra

- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.
- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.

Bloque 3: Geometría

- Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes.
- Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.

Bloque 4: Funciones

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.
- Funciones lineales. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

- **3º DE LA ESO:**

Bloque 2: Números y Álgebra

- Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz.
- Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo.
- Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico.
- Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico).

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

La primera sesión se utilizará para realizar una **prueba de evaluación inicial** que trate alguno de los contenidos previos que se considera necesarios para poder afrontar el objeto matemático de las funciones en este curso.

Se entregará a cada alumno una ficha con una serie de ejercicios que se detallarán a continuación. Tendrán **30 minutos para enfrentarse a los ejercicios de forma individual**, de esta manera, los últimos 20 minutos de clase se utilizarán para corregir los ejercicios en la pizarra. La metodología para la corrección será la siguiente:

1. Preguntar al grupo clase para generar un pequeño debate sobre la resolución del ejercicio y su resultado.
2. Dar pie a que algún alumno finalice el debate concluyendo la solución, o que alguno de ellos salga a la pizarra a corregirlo de forma escrita.
3. Si se considera oportuno, el profesor procederá a corregirlo en la pizarra.

De esta forma se pretende ver de qué nivel parte el grupo clase para saber cómo abordar los contenidos del tema.

<u>PRUEBA DE EVALUACIÓN INICIAL</u>:

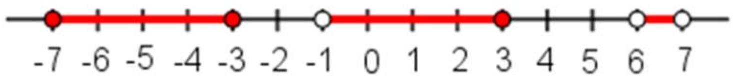
Ejercicio 1: Sean los puntos $A = (-2, 3)$, $B = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $C = (5, -1)$, $D = \left(-4, \frac{-3}{4}\right)$.

a) Dibuja un sistema de ejes coordenados y representa los puntos en él.

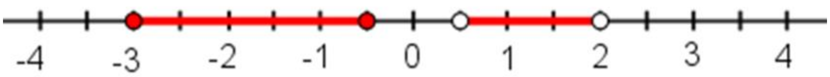
b) Indica en qué cuadrante se encuentra cada punto.

Ejercicio 2: Escribe, en cada caso, en forma de intervalos los números que se representan en los siguientes tramos de la recta real.

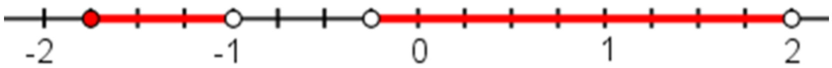
a)



b)



c)



Ejercicio 3: Dado $f(x) = -x^2 + 1$, obtén $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$ y $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Ejercicio 4: Tus padres han comenzado a darte cada semana 10 € de paga. Como eres muy ahorrador, los metes en la hucha que tienes en tu habitación. En la hucha ya tenías guardados 50 €.

a) ¿Cuánto dinero tienes en la hucha cuando ha pasado una semana? ¿Y la 3ª semana?

b) Completa la tabla de valores:

Semana	0	1	2	3	4	5
Dinero en la hucha						

c) ¿Cuál es la función que relaciona el dinero que tienes en la hucha con las semanas que pasan desde que tus padres comenzaron a darte la paga semanal?

i) $f(x) = 10 + 50x$

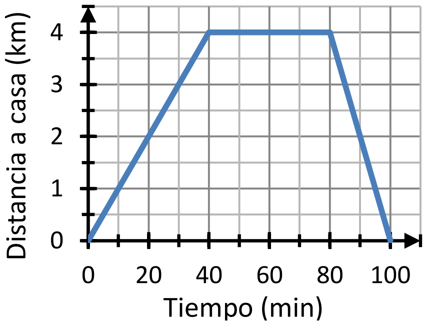
ii) $f(x) = 50 + 10x$

iii) $f(x) = 50 - 10x$

iv) $f(x) = 10x$

d) Dibuja un sistema de ejes coordenados y representa la función.

Ejercicio 5: Elige el enunciado que mejor se ajuste a la siguiente gráfica y justifica tu elección:



a) Marta ha subido una montaña en 40 minutos. Después, ha descansando durante 40 minutos y ha comenzado a descenderla, lo cual le ha costado 20 minutos.

b) Carlos ha comido en un restaurante que está lejos de su casa. Ha tardado 40 minutos en llegar andando a velocidad constante. Ha estado 40 minutos en el restaurante y después, ha vuelto a casa corriendo en 20 minutos porque estaba lloviendo.

c) He corrido durante 40 minutos dando vueltas por mi barrio y me he encontrado con unos amigos con los que he estado hablando 40 minutos. Después he vuelto a casa andando en 20 minutos.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La razón de ser que voy a considerar para introducir el objeto matemático estudiado es la de **funciones como instrumento de modelización de las relaciones que ocurren en la vida** donde se produce una dependencia entre dos variables, y que permiten realizar análisis y tomar decisiones acerca de esas relaciones.

Esta relación de las variables la estudiaremos en enunciados, expresiones analíticas, tablas y representaciones gráficas. Además, las representaciones gráficas nos permitirán aproximarnos al estudio de las características de las funciones, como paso previo a un estudio más formal de las mismas que se realizará en el Bachillerato. Durante las sesiones, se tratará de proponer a los alumnos problemas que surjan en la vida cotidiana para que ellos mismos vean la utilidad de las funciones a la hora de analizar relaciones reales y la importancia de saber obtener información de una gráfica.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Como podrá verse a continuación en el análisis histórico que se ha realizado, la razón de ser que se ha tomado para introducir el objeto matemático **coincide con la razón de ser histórica** que acabó dando lugar a las funciones.

Al igual que todos los objetos matemáticos, el de función ha ido evolucionando durante la historia. Antes de llegar al concepto tal y como se conoce en la actualidad, se tuvieron que ir superando obstáculos y dar pasos, comenzando por tablas de valores, relaciones algebraicas y numéricas, gráficas, geometría… Todo ello terminaría dando lugar al concepto de función.

Se ha considerado dividir el análisis histórico en tres periodos, donde el último se subdivide en tres subperiodos. Para realizarlo se han consultado las siguientes fuentes:

> Sastre Vázquez, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. nº 16. 141-155.
>
> Ugalde W.J. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital Matemática, Educación e Internet.* Vol *(14)*. nº1. 2-17.

Época Antigua (cultura Babilónica y Griega)

Durante este periodo no existía una idea abstracta del concepto de función. Sin embargo, comenzaron a desarrollarse conceptos relacionados con ella como son las **tablas numéricas** (concepto de **dependencia entre cantidades**).

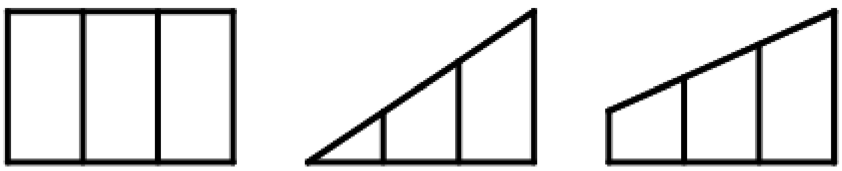
Gracias a los babilonios y a los griegos, se tienen las primeras representaciones de lo que serían las tablas de valores tal y como se conocen hoy en día. Las tablas numéricas babilónicas datan de los años 2000 a.C. – 500 a.C. y se presentan en forma de columna. Entre ellas están las que dan los cuadrados de los números del 1 al 59 y los cubos de los números del 1 al 32.

Dentro de la cultura Griega destacó Arquímedes (287 a.C. – 212 a.C.), que en sus leyes de la mecánica parece que puede apreciarse el concepto de dependencia entre cantidades. Gracias a los estudios que realizaron los griegos sobre las relaciones entre magnitudes geométricas variables se tiene un primer antecedente del concepto de función.

Edad Media (s.V - s.XV)

Este periodo se caracteriza por un estudio centrado en los fenómenos naturales, entre ellos el del movimiento. Las ideas que surgieron se desarrollaron en torno a las **cantidades variables independientes y dependientes**, pero sin llegar a darse una definición de forma específica. Por otro lado, **no se llegó a dar una definición mediante el uso de fórmulas, pero sí mediante descripciones verbales de alguna de sus propiedades y mediante gráficos.**

Destaca el francés Nicolás Oresme (1323 – 1382), el cual representó por primera vez funciones de forma gráfica. En concreto, representó como variaba la velocidad respecto al tiempo en diferentes movimientos.



Velocidad constante | Velocidad inicial cero y aceleración constante | Velocidad inicial dada y aceleración constante

No obstante, este periodo no se caracteriza por tener resultados muy trascendentes, los cuales llegarán durante el Renacimiento.

Periodo Moderno

I. s.XVI - s.XVII:

Durante este periodo se produjeron varios sucesos que permitieron el avance en el concepto de función. Entre ellos están la creación del álgebra simbólica, el estudio del movimiento como problema central de la ciencia (es decir, separado de la teología) y la unión entre el álgebra y la geometría. A continuación se presenta a los principales autores:

Galileo (1564 – 1642) introdujo en las representaciones gráficas el concepto numérico y las fórmulas para representar relaciones que se generaban entre diferentes variables (**modelización matemática** de fenómenos a través de resultados experimentales). Durante su obra se aprecia que trabajó con variables y funciones pero con expresiones de palabra y expresando los resultados en términos de proporciones (hecho que resultó ser un gran obstáculo epistemológico durante la época).

Descartes (1596 – 1650) introdujo un antecedente de lo que es hoy el **sistema coordenado**, sin usar los números negativos (otro obstáculo epistemológico). Además, desarrolló la idea de introducir una **función en forma analítica**, haciendo ver de esta manera que una ecuación en x e y era una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables. Es decir, trató con los conceptos de **dependencia entre cantidades y de variable dependiente e independiente.**

Fermat (1601 – 1665) utilizó las **ecuaciones** para representar la recta, la circunferencia con centro el origen, la parábola, la elipse y la hipérbola, es decir, aplicó el análisis a los problemas de lugares geométricos.

Leibniz (1646 – 1716) y Newton (1643 – 1727). De la mano de Leibniz aparece por primera vez la palabra "*función*", aunque no la utilizaba con el mismo significado que en la actualidad. Ambos contribuyeron al desarrollo del concepto de función introduciendo el desarrollo de una función en serie de potencias.

II. s.XVIII:

Se emplea la palabra función en el sentido de una **expresión analítica**. Durante este periodo todos los matemáticos tenían como certeza que "si dos expresiones analíticas coinciden en un intervalo, ellas coinciden en todas partes".

Johann Bernoulli (1667 – 1748) fue el primero en dar una definición de función: "Aquí denotamos por función de una variable una cantidad compuesta, de una o varias maneras, de esta cantidad variable y constantes" (Bernouilli, 1699).

Euler (1707 – 1783) dio definiciones de los conceptos de constante y cantidad variable, hasta llegar a dar su propia definición de función: "la función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes" (Euler, 1748). Fue el primero en utilizar para referirse a la función la notación de $f(x)$ en un artículo llamado "*Additamentun*".

III. s.XIX - s.XX:

La certeza del siglo anterior quedó desacreditada. Se comenzó a desarrollar dentro de la rama de las matemáticas una nueva disciplina que se dedicaba a estudiar las funciones: el Análisis. Durante el s.XX, se desliga la percepción del concepto de función del uso de variables numéricas.

Cauchy (1789 - 1857) dio una definición de función en su *"Curso de Análisis Algebraico (1827)"* en la que intervenían los conceptos de variable dependiente e independiente:

> "Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable".

Lobachevsky (1792 - 1856) dio una definición de función en la que se observa la idea de "dominio" de una función.

Dirichlet (1805 - 1859) fue el primer matemático en expresar la definición de función como se conoce en la actualidad:

> "Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x."

Caratheódory (1873 - 1950) dio una definición de función en 1917 basada en conjuntos arbitrarios que ya no eran los números reales: "una función es una regla de correspondencia desde un conjunto A en los números reales".

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

A continuación se van a presentar dos problemas que se constituyen en la razón de ser de las funciones. Con el primero se persigue que los alumnos sean capaces de analizar una situación que se les puede presentar en la vida cotidiana. Por otro lado, el problema permite introducir el concepto de variable dependiente e independiente, las diferentes formas de expresar una función (pasar de enunciado a tabla y de tabla a gráfica) y la obtención de información a partir de una gráfica. Además, al ser una situación cercana a ellos puede generarles motivación por el tema. Con el segundo problema se pretende que los alumnos vean la importancia de realizar una buena interpretación gráfica de la función y que aprendan a obtener toda la información que se presenta en ella. Para ello, se realiza el problema sobre el modelo de caída libre de objetos, para que así vean un modelo diferente al lineal. Este problema da pie a introducir los conceptos de dominio, recorrido, continuidad, cortes con los ejes y crecimiento y decrecimiento.

Problema 1: Tú y tus amigos habéis planeado ir a pasar el sábado al Parque de atracciones de Zaragoza. Os habéis informado sobre los precios de la entrada y de las atracciones y tenéis las siguientes opciones:

- **Opción A:** comprar la entrada del parque y el ticket de cada atracción en la que os montéis. La entrada cuesta 6 € y cada ticket cuesta 2 €.
- **Opción B:** comprar la pulsera que te permite entrar al parque y montar en todas las atracciones. La pulsera cuesta 21 €.
- **Opción C:** comprar la entrada del parque y comprar bonos de 5 viajes. La entrada cuesta 6 € y cada bono de 5 viajes cuesta 8 €.

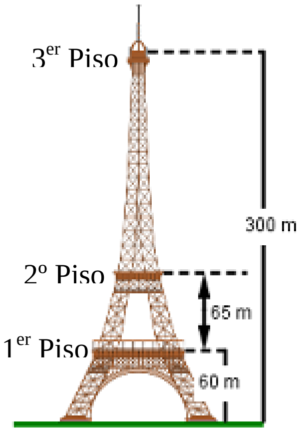
a) Completa la siguiente tabla del coste por persona según el número de atracciones en las que te montes.

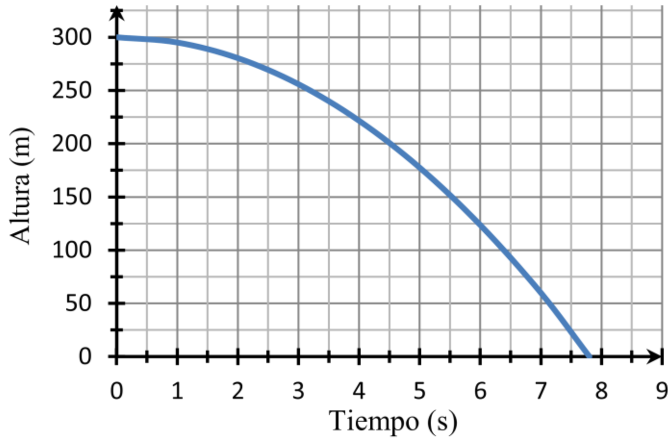
Nº de atracciones	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Coste opción A											
Coste opción B											
Coste opción C											

b) Representa gráficamente en el mismo sistema de ejes coordenados el coste en función del número de atracciones en las que te montes, según la opción que elijas.

c) ¿Cuándo os resulta más rentable elegir la opción A? ¿Cuándo os resulta más rentable elegir la opción B? ¿Cuándo os resulta más rentable elegir la opción C?

Problema 2: Cuando estabas visitando la Torre Eiffel te asomaste al exterior para hacer una foto con el móvil y se te cayó. La gráfica altura-tiempo del móvil es la siguiente:





Responde a las siguientes preguntas fijándote en la gráfica y en la imagen de la Torre Eiffel:

a) ¿En qué piso estabas cuando se te cayó el móvil?
b) ¿Cuánto tiempo tarda el móvil en llegar al suelo?
c) ¿Cuándo pasa el móvil por el 2º piso?
d) Desde el 2º piso, ¿cuánto tiempo tarda en pasar por el 1º?
e) ¿Qué velocidad media lleva la cartera en el tramo del 3er piso al 2º? ¿Y en el tramo del 2º piso al 1º? ¿Y en el tramo del 1er piso al suelo?
f) ¿Qué ocurre con la velocidad media del móvil conforme cae?
g) Dibuja una gráfica que relacione el tiempo con la velocidad media para los casos del apartado e).
h) Para obtener una mayor precisión, realiza una gráfica con la velocidad media del móvil para cada segundo. ¿A qué conclusión llegas?
i) Representa sobre la gráfica del apartado h) la función $v = 10t$.

(Nota: si los alumnos no saben la fórmula de la velocidad media, se les recordará)

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Para implementar en el aula los dos problemas anteriores se ha considerado seguir la siguiente metodología. En primer lugar, se formarán grupos de entre 3 y 4 alumnos. De esta forma, si alguno de ellos se atasca puede apoyarse en otro componente del grupo para seguir avanzando. Cada alumno dispondrá del problema en una hoja que se les entregará. Se trata de que el grupo vaya trabajando de forma autónoma el problema para que surjan conceptos relacionados con el objeto matemático de las funciones. De esta forma, el profesor estará de apoyo y de guía cuando algún grupo lo requiera (dará indicaciones o hará preguntas para conducirles hacia la solución). Conforme los grupos vayan acabando, se intentará generar un pequeño debate para corregirlos, para terminar institucionalizando los conceptos que se tratan en los problemas.

Además, se ha considerado que tras trabajar los problemas en clase, se entregue a cada alumno una ficha que contenga la gráfica del segundo problema con una mayor precisión (puede verse en el **Anexo I**), para que trabajen en casa las últimas preguntas (g, h, i) con mayor rigor e investiguen sobre el movimiento de caída libre. Estos apartados se consideran como un trabajo complementario de clase y se realiza para fomentar en los alumnos la investigación de forma autónoma y para relacionar las matemáticas, en particular las funciones, con fenómenos físicos.

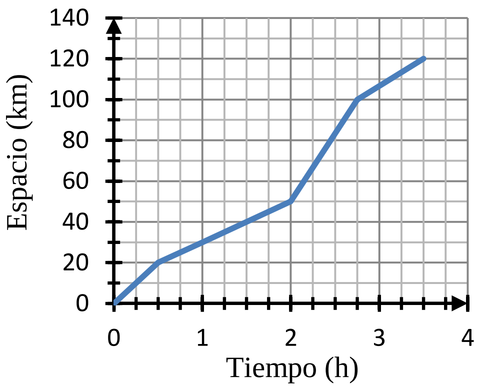
E. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Los problemas que se han diseñado para los diferentes campos de problemas se han intentado contextualizar dentro de situaciones de la vida cotidiana.

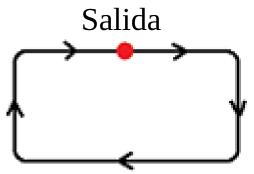
CP1 – Concepto de función

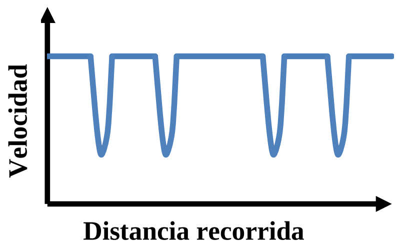
Problema 1: Propón un enunciado que describa una situación que podría ser representada por la siguiente gráfica:



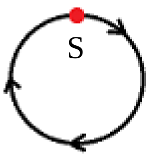
Problema 2: ¿Cómo crees que varía la velocidad de un coche de carreras cuando está dando la segunda vuelta en cada uno de los circuitos que se muestran a continuación? Escribe tu respuesta y a continuación realiza una gráfica aproximada:

Circuito ejemplo

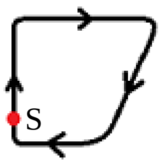


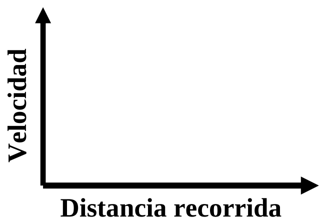


Circuito 1



Circuito 2





Problema 3: ¿Cómo cambia la velocidad de la pelota cuando va por el aire en este tiro a canasta? Explícalo por escrito y realiza una gráfica:

CP2 – Cambios entre sistemas de representación

Problema 4: El instituto está organizando una excursión de fin de curso para los alumnos de 3º de ESO. Los autobuses son de 59 plazas y hay un total de 56 alumnos en 3º, de los cuales aún no se sabe cuántos irán a la excursión. El alquiler del autobús cuesta 504 € y el centro considera que hay que pagar equitativamente según las personas que vayan.

a) Realiza una tabla de valores del precio por persona según las personas que vayan a la excursión.

b) ¿Existe alguna relación entre el precio por persona y las personas que van a la excursión? En caso afirmativo, escríbela.

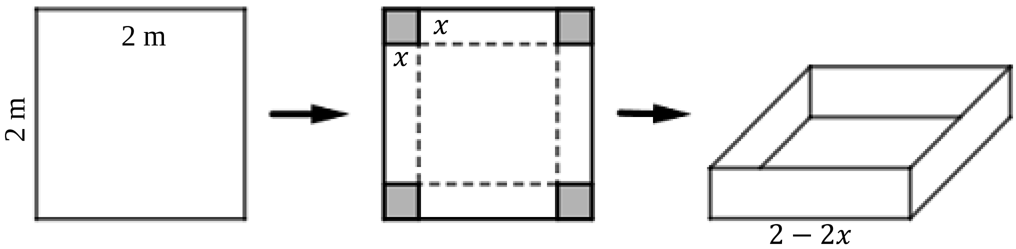
c) Dibuja un sistema de ejes coordenados y representa la situación gráficamente.

Problema 5: Dos familias van a realizar un viaje de Zaragoza a Madrid en coche. La primera, sale de Zaragoza con el coche A a las 8:30h y circula a una velocidad constante de 80 km/h. La segunda, sale de Zaragoza en el coche B a las 9:00h a una velocidad constante de 100 km/h. Sabiendo que de Zaragoza a Madrid hay 320 km, obtén las gráficas que relacionan el tiempo y el espacio de ambos coches hasta que llegan a Madrid en un mismo sistema de ejes coordenados. ¿Alcanza el coche B al coche A antes de que llegue a Madrid? ¿A qué hora llega cada coche al destino?

Problema 6: Busca en Google "*grados centígrados y grados Fahrenheit*" y utiliza el convertidor de grados Celsius a grados Fahrenheit que aparece.

a) Realiza una tabla de valores en Excel en la que recojas la equivalencia de grados Celsius a grados Fahrenheit (de 0 ºC a 100 ºC con un incremento de 10 ºC en cada anotación).
b) Realiza una gráfica en Excel con la tabla de valores que obtengas.
c) Consulta la tabla que acabas de construir y contesta a lo siguiente:
   i) Si el agua se congela a 0 ºC, ¿a cuántos grados Fahrenheit se congela?
   ii) Si el punto de ebullición del agua es de 100 ºC, ¿cuál es el punto de ebullición en grados Fahrenheit?
d) Si en Zaragoza hay una temperatura de 100 grados Fahrenheit, indica la temperatura en grados Celsius (sin utilizar el convertidor de Google).
e) Una temperatura de 0 grados Fahrenheit, ¿con qué temperatura en grados Celsius se correspondería? Una vez lo hayas razonado, comprueba tu respuesta en el convertidor de Google.

Problema 7: Dispones de una pieza cuadrada de cartón de 2 m de lado y con ella quieres construir una caja sin tapa realizando cuatro cortes cuadrados en las esquinas de la pieza, tal y como se indica a continuación:

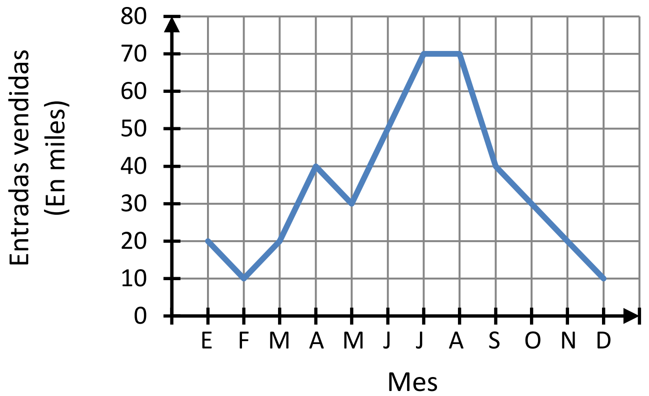


Abre el fichero de GeoGebra "*caja.ggb*" en el cual hay dibujado un cuadrado e incluye un deslizador para variar el lado de los cuadrados que tienes que recortar.

a) Mueve el deslizador para dar valores al lado del cuadrado de las esquinas. ¿Qué intervalo de valores puede tomar?
b) Obtén la expresión analítica que relaciona el volumen de la caja con el lado del cuadrado que recortas en cada esquina.
c) Realiza una tabla de valores en Excel que relacione la longitud del lado del cuadrado que se corta en las esquinas y el volumen de la caja.
d) Realiza una gráfica en Excel con la tabla de valores que obtengas en el apartado anterior. Describe la situación que muestra la gráfica.
e) ¿Cuánto tiene que medir el lado de los cuadrados que recortas para que el volumen de la caja que construyes sea máximo?

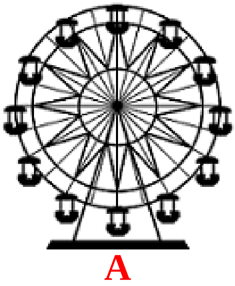
CP3 – Interpretación de las características de una función

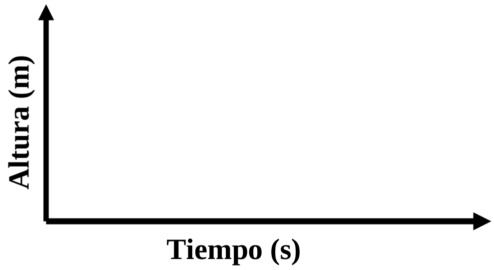
Problema 8: Los directivos del parque de atracciones Port Aventura han contratado a un equipo de matemáticos para que realicen un estudio en el que se recoja la información relativa al número de venta de entradas en su parque de atracciones. Como resultado, los matemáticos le han entregado al directivo la siguiente gráfica:



a) ¿Durante cuánto tiempo se ha hecho este estudio?
b) ¿En qué mes o meses se han vendido más entradas? ¿A qué atribuyes esto?
c) ¿En qué mes o meses se han vendido menos entradas? ¿Por qué crees que ocurre esto?
d) ¿En qué meses está aumentando la venta de entradas? ¿En qué meses está disminuyendo la venta de entradas?
e) ¿En qué meses se han vendido justo 30000 entradas?
f) ¿Cuántas entradas se vendieron en junio?

Problema 9: La siguiente noria tiene una altura de 60 metros y tarda 60 segundos en dar una vuelta completa.





a) Realiza la gráfica de la altura que alcanza la cabina A en función del tiempo durante 2 vueltas enteras.
b) ¿Qué ocurre con su gráfica?
c) Represente en el mismo sistema de ejes coordenados la gráfica de la altura de la cabina A en función del tiempo durante 2 vueltas enteras si la noria tarda 30 segundos en dar una vuelta completa. ¿Qué ocurre con esta nueva gráfica?
d) Compara las dos gráficas y explica lo que ocurre.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

CP1 – Concepto de función

En la mayoría de libros de texto, las actividades relacionadas con este campo de problemas se basan en ver la relación que existe entre dos variables. En esta propuesta se va más allá de identificar las variables y su relación.

Con el primer problema se pretende que los alumnos interpreten la gráfica de una función para dar un enunciado que se ajuste a ella; con el segundo, que dibujen una gráfica interpretando el enunciado y el esquema dado; y con el tercero, que identifiquen la dependencia de las variables y la representen en una gráfica. Estos problemas permiten que se introduzca el concepto de variable dependiente e independiente y el concepto de función.

CP2 – Cambios entre sistemas de representación

En este campo de problemas no hay mucha variación en cuanto a los problemas que se presentan en los libros de texto.

En el problema 4 los alumnos, a partir de un enunciado, tienen que construir una tabla de valores y a continuación obtener la expresión analítica y la representación gráfica. En el problema 5, a partir de un enunciado tienen que obtener las gráficas de las dos relaciones que se presentan en él, en un mismo sistema de ejes coordenados, y a partir de las gráficas construidas obtener información para responder a las preguntas. Por otro lado, en los problemas 6 y 7 se utilizan las TIC, de manera que los alumnos tienen que modificar la técnica inicial vista en los problemas 4 y 5 para utilizarla con el programa Excel y con GeoGebra. En particular, en el problema 6 se utiliza el convertidor de grados para realizar una tabla de valores en Excel y se realiza la gráfica de la tabla obtenida en el mismo programa. En el problema 7, a partir del enunciado y con ayuda de los deslizadores de GeoGebra, los alumnos tienen que obtener la expresión analítica de la relación y construir una tabla de valores y una gráfica en Excel.

Estos problemas dan lugar a que se introduzcan e institucionalicen las diferentes formas de representar una función y las técnicas para pasar de unas a otras.

CP3 – Interpretación de las características de una función

Al igual que en el campo anterior, en este las actividades no distan mucho de las que aparecen en los libros de texto.

En primer lugar, en el problema 8 los alumnos tienen que analizar la información que se presenta en la gráfica para responder a una serie de preguntas sobre un contexto real cuyas respuestas vienen dadas por la aplicación de las características de una función. En segundo lugar, para enfrentarse al problema 9 los alumnos tendrán que analizar el enunciado y construir ellos mismos la gráfica que relaciona el tiempo y la altura de la noria para poder responder a las preguntas que se les plantea.

El problema 8 permite introducir e institucionalizar los conceptos de dominio, recorrido, máximo, mínimo, crecimiento, decrecimiento y continuidad. Por otro lado, el problema 9 permite introducir el concepto de periodicidad y trabajar los anteriores.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

A la hora de realizar los problemas que se acaban de proponer se llevará a cabo la siguiente metodología:

Los **problemas 1, 2, 3, 4, 5, 8 y 9** se realizarán en el **aula ordinaria**. Para ello, se formarán **grupos heterogéneos de entre 3 y 4 alumnos**, y a cada componente se le entregará una hoja con los problemas que se vayan a trabajar durante la sesión. El profesor estará de apoyo mientras los grupos trabajan en la resolución de los problemas, y solo intervendrá en caso de que algún grupo lo necesite (dará indicaciones o hará preguntas para conducirles hacia la solución). Una vez crea que la mayoría de los alumnos han trabajado suficientemente los problemas, se generará un pequeño debate para la corrección de los mismos que dará pie a la institucionalización de los contenidos que surjan en ellos.

Los **problemas 6 y 7** se realizarán en el **aula de informática** ya que hacen uso de los programas GeoGebra y Excel. Para ello, los alumnos **trabajarán por parejas** en los ordenadores y a cada uno se le repartirá una hoja con los enunciados donde tendrán que apuntar las respuestas. En primer lugar, se les dará una pequeña explicación de las herramientas de los programas para que ellos las utilicen de forma autónoma para resolver los problemas propuestos. A continuación, se les dejará trabajar mientras el profesor está de apoyo como en el caso de los otros problemas. Si tras pasar un rato los alumnos no obtienen la fórmula del volumen que se pide en el problema 7, el profesor dará indicaciones para dirigirles hacia la solución. Una vez trabajados los problemas, durante su corrección se generará un debate y, posteriormente, la institucionalización de los contenidos tratados.

Hay que destacar que después de trabajar en clase el problema 9, se entregará a los alumnos el problema con una gráfica más precisa y pautada con la altura que va alcanzando la cabina, para que lo trabajen en casa (puede verse en el **Anexo I**). De esta manera, los alumnos realizarán de forma autónoma y más rigurosamente la gráfica, viendo como efectivamente, no está formada por segmentos. Esta actividad se considera un trabajo complementario que los alumnos tendrán que entregar al profesor para que este compruebe que han comprendido los conceptos tratados en él.

Por otro lado, se entregará a los alumnos una hoja de problemas ya que se considera importante que los alumnos practiquen la resolución de problemas de forma autónoma para ejercitar su competencia matemática. Para su corrección, pasado un tiempo se entregarán las soluciones para que comprueben las respuestas y realicen las correcciones oportunas. En caso de que tengan dudas, podrán consultárselas al profesor en el departamento o durante la última sesión de la unidad. La hoja de problemas junto con sus soluciones, figuran en el **Anexo II**; el momento de entrega de las mismas puede verse en el cronograma del apartado H.

Plantear los problemas en contextos reales y dejar que los alumnos busquen de forma autónoma las soluciones antes de introducir las técnicas y tecnologías pertinentes, hará que comprendan mejor los conceptos y cómo se aplican, además de que valoren el interés de las funciones y de su representación gráfica para la obtención de información de fenómenos (físicos, sociales, económicos, etc) a partir de ellas.

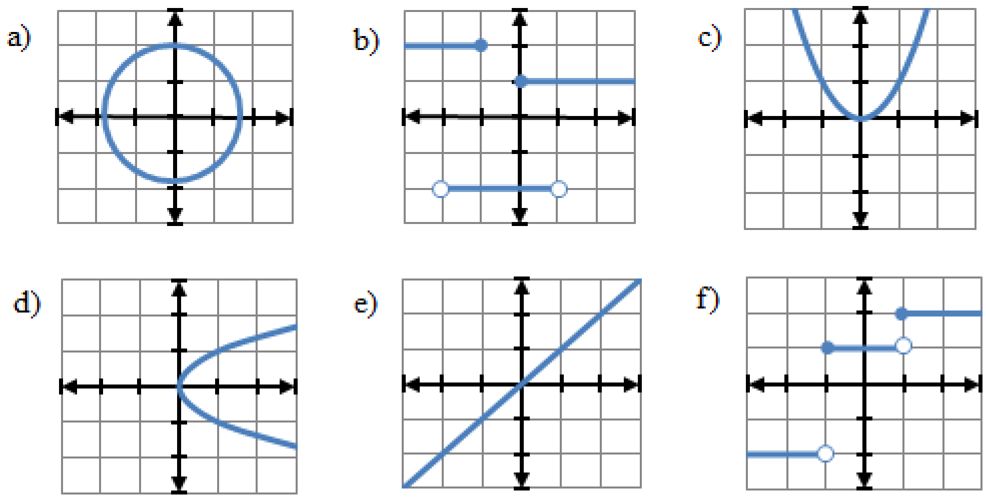
F. Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

A continuación, se van a mostrar una serie de ejercicios para que los alumnos practiquen las técnicas asociadas a cada campo de problemas.

<u>CP1 – Concepto de función</u>

Ejercicio 1: ¿Cuál de las siguientes gráficas representa una función? Justifica tu respuesta.



Ejercicio 2: Di si los siguientes enunciados pueden representar una función.

a) A cada número le asocias su doble.
b) A cada persona le asocias su número de hermanos.
c) El espacio que recorre un coche a una velocidad constante en función del tiempo.
d) A cada número le asocias sus divisores.
e) El área de un cuadrado en función de su lado.
f) A cada ecuación de segundo grado le corresponden sus soluciones.

Ejercicio 3: Di si las siguientes tablas de valores representan una función.

a)

x	0	1	2	3	4
y	0	1	2	3	4

b)

x	0	1	2	3	1
y	0	1,5	2	3.25	-4

c)

x	0	1	1	2	2
y	0	1/2	-2	1/6	-3

d)

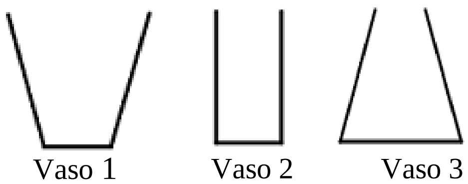
x	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8

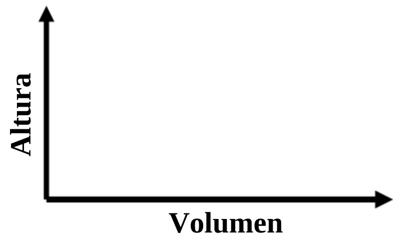
Ejercicio 4: ¿Son funciones las siguientes expresiones analíticas?

a) $y = 3x - 2$ b) $y = \sqrt[3]{x}$ c) $x^2 + y^2 = 1$

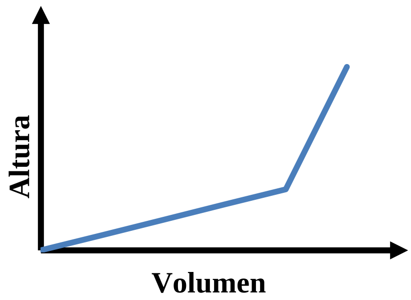
d) $x = y^2$ e) $y = 3$ f) $x = -2$

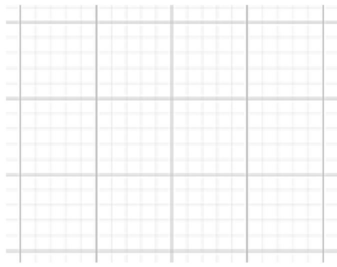
Ejercicio 5: Representa para cada vaso la gráfica que muestra cómo varía la altura del líquido del vaso a medida que cae agua de forma constante en él. Utiliza un sistema de ejes como el que aparece a continuación.





Dibuja un vaso que se corresponda con la siguiente gráfica:





CP2 – Cambios entre sistemas de representación

Ejercicio 6: Completa las siguientes tablas de valores.

a) $y = x^3$

x	-3	-2	-1	-1/2	-1/3	0	1/3	1/2	1	2	3
y											

b) $y = \frac{1}{x}$

x	-3	-2	-1	-1/2	-1/3	1/3	1/2	1	2	3
y										

¿Qué ocurre para $x = 0$?

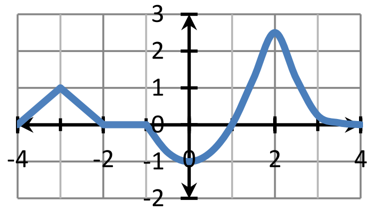
Ejercicio 7: Construye una tabla de valores de las siguientes funciones y dibuja unos ejes coordenados para representarlas gráficamente.

a) $y = 4x + 2$ b) $y = x^2 - 4$ c) $y = \frac{2x-1}{3}$

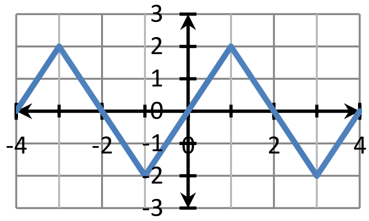
d) $y = -\frac{1}{2}$ e) $y = (x+2)^2$ f) $y = x^2 + 1$

Ejercicio 8: Obtén una tabla de valores a partir de las siguientes gráficas.

a)



b)



Ejercicio 9: Un coche circula por una autopista durante una hora a una velocidad constante de 120 km/h. Dibuja la gráfica del espacio recorrido por este coche en función del tiempo. (Recuerda que $espacio = velocidad \cdot tiempo$)

Ejercicio 10: Realiza una tabla de valores a partir de las siguientes relaciones.

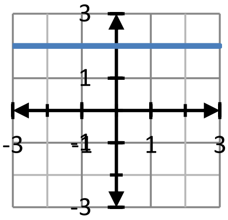
a) A cada número le corresponde su triple.
b) A cada número le corresponde su mitad.
c) Área de un círculo en función de su radio.

Ejercicio 11: Relaciona las siguientes gráficas con su expresión analítica:

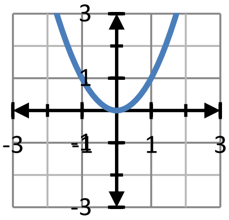
a) $y = x^2$ b) $y = -x$ c) $y = x$

d) $y = 2x + 1$ e) $y = -x^2$ f) $y = 2$

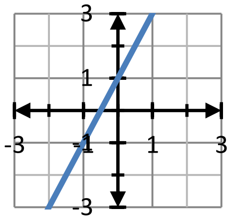
1)



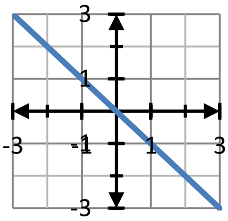
2)



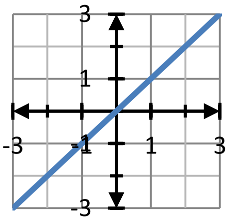
3)



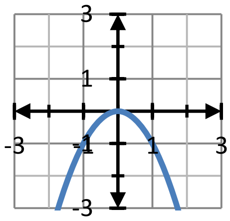
4)



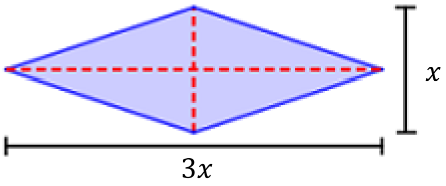
5)



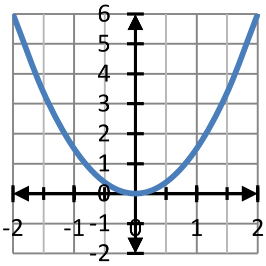
6)



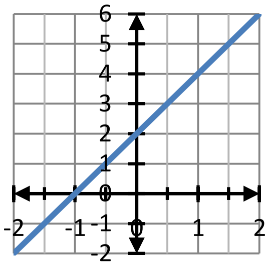
Ejercicio 12: Observa la siguiente figura y averigua cuál de las gráficas se corresponde con la función que a cada valor de x le asigna el área de la figura. Justifica tu respuesta.



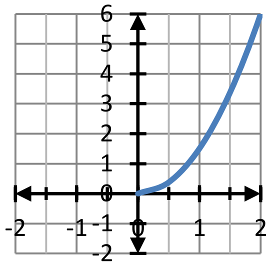
a)



b)



c)



Ejercicio 13: Escribe la expresión analítica de las siguientes relaciones y después realiza su gráfica ayudándote de una tabla de valores:

a) El resultado de sumar tres números consecutivos.
b) El área de un cuadrado en función de su lado.
c) El perímetro de un rectángulo en función de su lado sabiendo que el lado grande mide el doble que el lado pequeño.

CP3 – Interpretación de las características de una función

Ejercicio 14 (Práctica con GeoGebra): Abre los archivos *"función1.ggb, función2.ggb, función3.ggb y función4.ggb"* y responde las siguientes preguntas para las funciones que encontrarás en ellos:

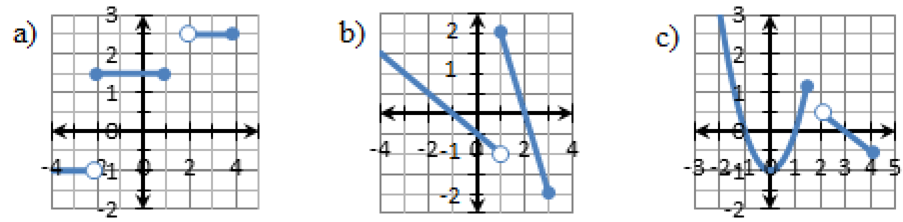
a) Obtén el dominio y recorrido con la ayuda de los deslizadores.
b) Calcula los puntos de corte con los ejes ayudándote de la herramienta intersección.
c) ¿Las funciones son continuas? Haz uso de los deslizadores para responder.
d) Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) Calcula los máximos y mínimos relativos. (Realiza una comprobación de la respuesta utilizando la herramienta *"extremos relativos"*)

Ejercicio 15: Obtén el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = x^2 - 3$ b) $y = +\sqrt{x}$ c) $y = 5x - 2$

d) $y = -4{,}6$ e) $y = \frac{5+x}{x-2}$ f) $y = |x|$

Ejercicio 16: Determina el dominio, recorrido y los cortes con los ejes de las siguientes funciones.

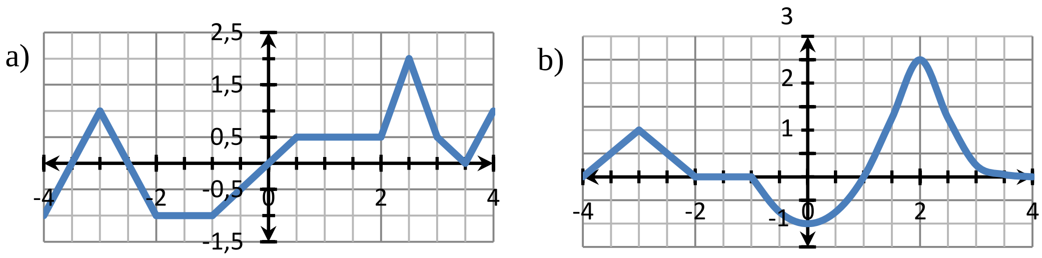


Ejercicio 17: Obtén los cortes con los ejes de las siguientes funciones.

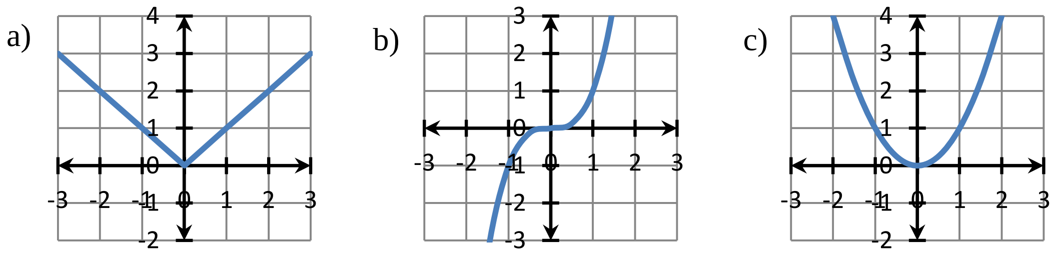
a) $y = 4x - 2$ b) $y = \frac{x^2+1}{2}$ c) $y = 7$

d) $y = x^2 - 3$ e) $y = -2x + 3$ f) $y = x^2 - 6x + 9$

Ejercicio 18: Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y las coordenadas de los máximos y mínimos de las siguientes funciones.



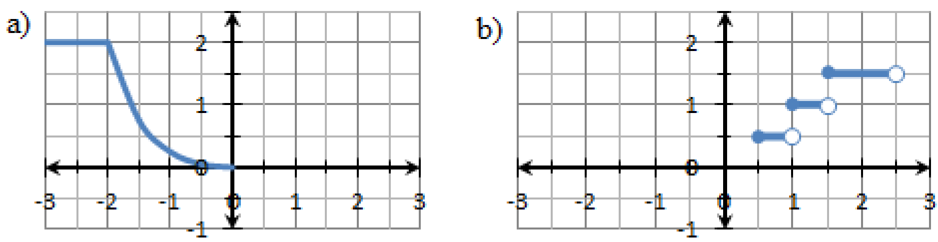
Ejercicio 19: Determina el tipo de simetría de las siguientes funciones.



Ejercicio 20: ¿Son simétricas las siguientes funciones? En caso afirmativo, di de qué tipo son.

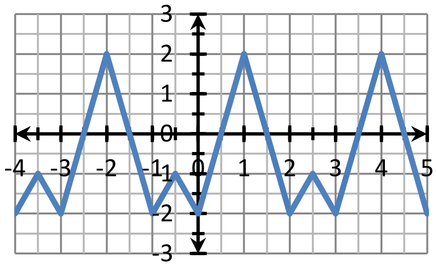
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$ d) $f(x) = x^3$

Ejercicio 21: Completa la gráfica para que la función sea simétrica respecto del eje de ordenadas.

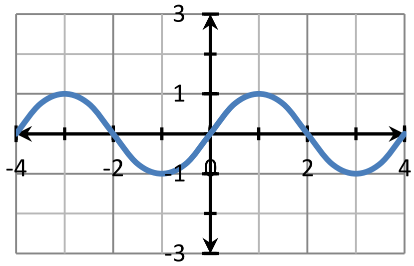


Ejercicio 22: ¿Las funciones son periódicas? En caso afirmativo, indica cuál es su periodo.

a)

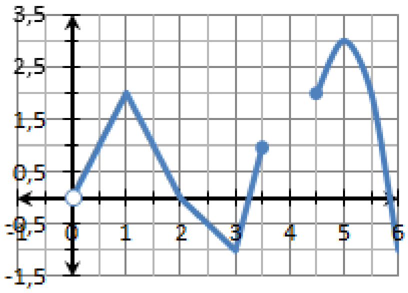


b)

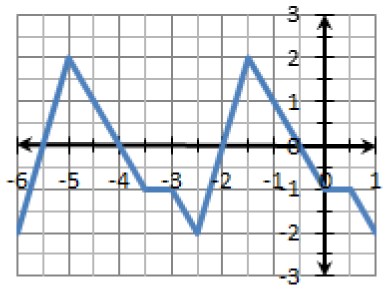


Ejercicio 23: Determina para cada función su dominio, recorrido, cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. ¿Son continuas? Justifica tu respuesta. ¿Son periódicas? En caso afirmativo determina el periodo.

a)



b)



Ejercicio 24: Dibuja unos ejes cartesianos y representa la gráfica de una función con las siguientes características:

a) Tiene como dominio: $Dom\ f(x) = (-4,-1] \cup [0,5)$
b) Es creciente en $(-4,-1) \cup (0,2)$
c) Es decreciente en $(2,5)$
d) Tiene un máximo en $(2,4)$

¿La función que has dibujado es continua?

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

CP1 – Concepto de función

Con los ejercicio 1, 2, 3 y 4 los alumnos ejercitan la técnica para identificar si una relación es una función, es decir, tienen que ver si para cada valor de x existe un único valor de y. En el ejercicio 5 tienen que ver la dependencia de dos variables realizando su gráfica.

CP2 – Cambios entre sistemas de representación

Con el ejercicio 6 los alumnos ejercitan la técnica de pasar de expresión analítica a tabla de valores; con el 7, la técnica de pasar de expresión analítica a tabla de valores y de tabla a gráfica; con el 8, la técnica de obtener una tabla de valores a partir de una gráfica; y con el 10, la técnica de pasar de enunciado a tabla de valores. Con los ejercicios 9 y 13 se ejercitan las técnicas para pasar de enunciado a expresión analítica, de expresión analítica a tabla y de tabla a gráfica. Por último, con el ejercicio 11 y 12 se ejercitan las técnicas para relacionar funciones, en el primer caso relacionar expresiones analíticas con gráficas y en el segundo, enunciados y expresiones analíticas con gráficas.

CP3 – Interpretación de las características de una función

En primer lugar, destacar que existe un ejercicio para trabajar por separado cada una de las técnicas asociadas a la interpretación de las características de una función.

Por otro lado, se pueden diferenciar dos tipos de ejercicios: aquellos donde las características se obtienen de forma gráfica y aquellos donde se obtienen a partir de la expresión analítica de la función. Para los primeros, la técnica consiste en obtener las características a partir del estudio y del análisis de la gráfica de la función; en particular dichos ejercicios son: 14 (dominio y recorrido, cortes con los ejes, continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos), 16 (dominio y recorrido, cortes con los ejes), 18 (crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos), 19 y 21 (simetría), 22 (periodicidad), 23 y 24 (todas las características). Hay que destacar, que en el ejercicio 24 los alumnos tendrán que modificar la técnica utilizada en el ejercicio 23 para representar gráficamente una función a partir de una serie de características que cumple. Para los ejercicios del segundo tipo, la técnica consiste en obtener ciertas características a partir del estudio de la expresión analítica de la función; en particular, los ejercicios son: 15 (dominio), 17 (cortes con los ejes) y 20 (simetría).

Cabe destacar, que en el ejercicio 14 los alumnos hacen uso de las TIC mediante el programa GeoGebra para facilitar el aprendizaje de la técnica para obtener de forma gráfica el dominio y recorrido, la continuidad, los cortes con los ejes, el crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de una función. El guión de prácticas de los alumnos puede verse en el **Anexo III**.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Las técnicas que se practican con los ejercicios que se han propuesto son adecuadas una vez se hayan trabajado los problemas que permiten introducir los conceptos (técnicas y tecnologías) y contextualizar el objeto matemático en la vida real. Los problemas presentados son actividades que conllevan una mayor reflexión y por tanto, es necesario dedicar más tiempo para realizarlos. Los ejercicios que se han propuesto permiten que los alumnos practiquen las técnicas y asimilen los conceptos de una forma más dirigida.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Al final de la primera sesión se entregará a los alumnos unas fichas que contengan todos los ejercicios que se van a realizar durante la unidad. Aquellos que se realizarán en clase son el 11, 12, 13, 14, 15 (a y e), 17 (a y f), 20 (a, b) y 24. Por otro lado, aquellos que se mandarán como deberes al finalizar la sesión correspondiente son los ejercicios del 1 al 10, el 15 (b, c, d, f), 16, 17 (b, c, d, e), 18, 19, 21, 22 y 23 (puede verse la distribución concreta de los ejercicios, así como de su corrección, en el cronograma que aparece en el apartado H).

En clase, los alumnos realizarán los ejercicios de forma individual, de manera que se pueda comprobar que cada uno de ellos practica las técnicas y tecnologías que se están introduciendo para la buena comprensión de las mismas. Durante la realización se irá pasando por las mesas de los alumnos para comprobar que están trabajando correctamente y que no tienen dificultades, para ayudarles en caso de que las haya. Una vez que la mayoría de los alumnos hayan trabajado los ejercicios requeridos por el profesor, se procederá a corregirlos creando debate entre ellos.

Por último, destacar que para el ejercicio 14 se utiliza GeoGebra, por lo que la sesión se impartirá en la sala de ordenadores siguiendo la metodología anteriormente dicha. El resto de ejercicios se realizarán en el aula ordinaria o en casa como deberes.

G. Sobre las tecnologías

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

En esta unidad didáctica, las técnicas quedan en su mayoría justificadas por las definiciones de los conceptos que se tratan y también por la representación gráfica de la función. Vamos a ver a continuación las definiciones que se proporcionan para cada campo de problemas.

CP1 – Concepto de función

Las técnicas que se ejercitan en este campo de problemas quedan justificadas mediante la definición de función. La definición de función que se considera adecuada para este nivel (3º ESO) es la siguiente: una función es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, x e y, de forma que a cada valor de x le corresponde un **único** valor de y. La variable x se denomina variable independiente, y la variable y se denomina variable dependiente.

CP2 – Cambios entre sistemas de representación

En este campo de problemas las técnicas quedan justificadas mediante la definición de función en sus diferentes formas de expresarse:

- La relación entre las variables viene expresada por un **enunciado**.
- La relación entre las variables viene expresada a través de pares de valores (x, y) que se recogen en una **tabla**.
- La relación entre las variables viene expresada a través de una **expresión analítica** $y = f(x)$ que hace referencia a la ecuación de la función (ecuación que cumplen todos los puntos del dominio de la función).
- La relación entre las variables viene expresada por pares de valores (x, y) representados en un sistema de ejes coordenados y que dan lugar a una **gráfica**. La variable independiente, x, se representa en el eje de abscisas (eje OX) y la variable dependiente, y, en el eje de ordenadas (eje OY).

CP3 – Interpretación de las características de una función

En este campo de problemas las técnicas quedan justificadas mediante las siguientes definiciones:

- **Dominio:** el dominio de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores de la variable independiente, x, para los cuales existe un valor de la variable dependiente, y, tal que $y = f(x)$. Lo denotamos por $Dom\ f$.
- **Recorrido:** el recorrido de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente, es decir, el conjunto de las imágenes de la función. Lo denotamos por $Im\ f$.
- **Continuidad**: una función es **continua** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo. En caso contrario, existe algún punto en el que la gráfica se interrumpe, y se dice que este es un **punto de discontinuidad** de la función.
- **Cortes con los ejes:** los puntos de corte con los ejes de una función son los puntos de intersección de la gráfica con cada uno de los ejes de coordenadas:
    - Cortes con el eje OX (si los hay): son de la forma $(a, 0)$, donde a es solución de la ecuación $f(x) = 0$.
    - Corte con el eje OY (si lo hay): es de la forma $\big(0, f(0)\big)$.
- **Creciente y decreciente:** dada una función $f(x)$ y los valores $x = a$ y $x = b$ tales que $a < b$ (a y b próximos), entonces:
    - Si $f(a) < f(b)$, la función es creciente en (a, b).
    - Si $f(a) > f(b)$, la función es decreciente en (a, b).
    - Si $f(a) = f(c) = f(b), \forall c \in (a, b)$, la función es constante en (a, b).
- **Máximos y mínimos:**
    - La función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en el punto $\big(a, f(a)\big)$ si pasa de ser creciente a decreciente en dicho punto.
    - La función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en el punto $\big(a, f(a)\big)$ si pasa de ser decreciente a creciente en dicho punto.
    - La función tiene un **máximo absoluto** si existe un punto de la gráfica con un valor máximo de la ordenada.
    - La función tiene un **mínimo absoluto** si existe un punto de la gráfica con un valor mínimo de la ordenada.
- **Simetría:**
    - La función es simétrica respecto al eje OY (función par) si $f(x) = f(-x)$ para todo valor de x que pertenezca a $Domf$.
    - La función es simétrica respecto del origen (función impar) si $-f(x) = f(-x)$ para todo valor de x que pertenezca a $Domf$.

- **Periodicidad:** una función es periódica si su gráfica está formada por un dibujo que se va repitiendo en intervalos sucesivos. Es decir, se cumple que:

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \cdots, \text{ siendo } T \text{ el valor del periodo.}$$

2. ¿Quién va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Después de que los alumnos realicen los problemas que se han mencionado en el apartado E y de que surjan los conceptos relacionados con el objeto que se está estudiando (las funciones), el profesor, con la participación de los alumnos, procederá a institucionalizar los conceptos y a justificar las técnicas utilizadas.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

El proceso de institucionalización de los aspectos relacionados con el objeto matemático que se va a seguir es el siguiente:

Una vez que los alumnos trabajen los problemas 1, 2 y 3, y tras el debate para su corrección, se introducirá la definición de función y de variable dependiente e independiente. Además, se explicará la dependencia de las diferentes variables que aparecen en los problemas. Tras trabajar los problemas 4, 5, 6 y 7 y corregirlos mediante un pequeño debate con los alumnos, se institucionalizarán las diferentes formas de representar una función y las técnicas para pasar de unas a otras de forma eficiente. Por último, después de que los alumnos respondan a las preguntas del problema 8 se generará un debate durante su corrección donde pueden surgir los conceptos deseados, y posteriormente, se institucionalizarán los contenidos de dominio y recorrido, continuidad, máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento, y tras el debate del problema 9 se institucionalizarán los conceptos de periodicidad, simetría y cortes con los ejes.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Tal y como se ha mencionado en apartados anteriores, la metodología que se seguirá para implementar la institucionalización de los conceptos será la siguiente:

Se entregará a los alumnos una ficha con los problemas que se van a tratar durante la sesión y estos trabajarán la resolución de los mismos en grupos de entre 3 y 4 personas, sin antes haberles introducido los conceptos que se trabajan. Tras dar un tiempo para que los resuelvan y cuando el profesor observe que los conceptos deseados empiezan a surgir, se corregirán los problemas creando un pequeño debate dirigido por el profesor. Después, se institucionalizarán los conceptos que hayan emergido de los problemas tratados tal y como se ha detallado en el apartado anterior. Por último, se realizarán ejercicios y problemas complementarios para que los alumnos practiquen las técnicas relacionadas con los conceptos institucionalizados (tal y como se ha especificado en el apartado F.4, algunos ejercicios se realizarán en clase y otros se mandarán como deberes).

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores y duración aproximada.

Teniendo en cuenta que en el curso de 3º ESO solo se cuenta con 3 clases lectivas de Matemáticas a la semana de una duración de 50 minutos cada una, la unidad didáctica tendrá una duración total de 10 sesiones, es decir, de 3 semanas y un día del curso académico. En particular, la secuenciación de las diferentes actividades propuestas, así como su duración aproximada pueden encontrarse en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>SESIÓN</th><th>CONTENIDOS</th><th>ACTIVIDADES</th><th>DURACIÓN</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Prueba de evaluación inicial</td><td>Realización de la prueba</td><td>30 minutos</td></tr>
<tr><td>Corrección con debate</td><td>20 minutos</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">Introducción del tema e institucionalización de función</td><td>Problema 1 de razón de ser y debate</td><td>20 minutos</td></tr>
<tr><td>Problemas 1,2 y 3 y debate</td><td>20 minutos</td></tr>
<tr><td>Institucionalización de función y variable dependiente e independiente</td><td>10 minutos</td></tr>
<tr><td>Deberes: ejercicios 1 – 5</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td rowspan="4">Representaciones de una función</td><td>Problemas 4 – 7 y debate</td><td>40 minutos</td></tr>
<tr><td>Institucionalización de las representaciones de la función</td><td>10 minutos</td></tr>
<tr><td>Deberes: ejercicios 6 – 10</td><td></td></tr>
<tr><td>Entrega de la hoja de problemas complementarios</td><td></td></tr>
</table>

4	Práctica de la técnica	Corrección de los deberes de la 2ª y 3ª sesión	30 minutos
		Ejercicios 11 – 13 y debate	20 minutos
5	Razón de ser y características de la función	Problema 2 de razón de ser y debate	20 minutos
		Problema 8 y debate	15 minutos
		Institucionalización de las características	15 minutos
6	Características de la función	Ejercicio 14 y debate	25 minutos
		Problema 9 y debate	15 minutos
		Institucionalización de las características	10 minutos
		Deberes: 16, 18, 19, 21, 22 y 23.	
		Entrega de las soluciones de los problemas complementarios	
7	Práctica de la técnica	Corrección de los deberes	30 minutos
		Ejercicios 15 (a, e), 17 (a, f), 20 (a, b) y 24 y debate	20 minutos
		Deberes: ejercicios 15 (b, c, d, f), 17 (b, c, d, e) y 20 (c, d)	
8	Práctica de la técnica	Corrección de los deberes	25 minutos
		Resolver dudas	25 minutos
9	Prueba de evaluación	Prueba de evaluación	60 minutos
10	Corrección del examen	Entrega de los exámenes	50 minutos
		Corrección en la pizarra y debate	

I. Sobre la evaluación

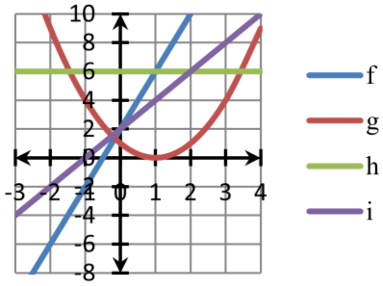
1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

El enunciado de la prueba escrita que se propone para evaluar el aprendizaje de los alumnos en la presente unidad didáctica, así como la puntuación de cada ejercicio, puede verse a continuación:

Ejercicio 1: Asocia cada expresión analítica con su gráfica. Justifica tu respuesta.

(1,5 puntos)

a) $y = 6$
b) $y = 2x + 2$
c) $y = (x - 1)^2$
d) $y = 4x + 2$



Ejercicio 2:

a) Obtén la expresión analítica de los siguientes enunciados: **(1 punto)**

i) El perímetro de un triángulo equilátero en función de su lado.

ii) A cada número se le asocia su doble más 3.

iii) El dinero que tendré en mi hucha en función del tiempo si en la actualidad ya tengo 20 € y al comenzar cada semana recibiré 10 € que guardaré en la hucha.

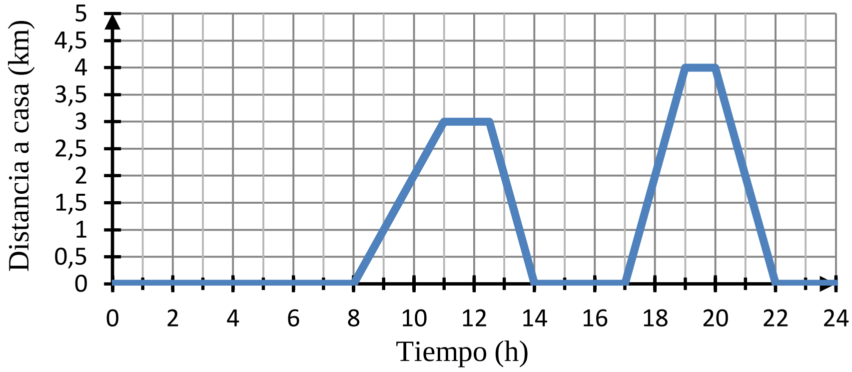
b) Representa gráficamente las relaciones del apartado anterior. **(1 punto)**

Ejercicio 3: Responde a los diferentes apartados.

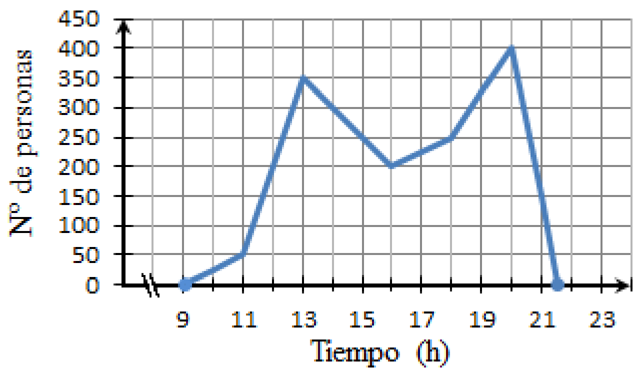
a) Ayer realizaste una excursión en bicicleta hasta un lugar que se encuentra a 20 km de tu casa. A los 20 minutos de que salieras, cuando te encontrabas a 8 km, decidiste realizar una parada de 10 minutos para recuperar fuerzas. Tras los 10 minutos de descanso, reanudaste la marcha y llegaste a tu destino una hora después de haber salido de casa. Realiza la gráfica tiempo – distancia a casa.

(1 punto)

b) Propón un enunciado que se ajuste a la siguiente gráfica. **(1 punto)**



Problema 4: La siguiente gráfica muestra la afluencia de personas a un supermercado durante un día:



Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Con qué se corresponde? Justifica tu respuesta. **(0,5 puntos)**

b) ¿Cuál es el número máximo de personas que acoge el supermercado durante el día? Justifica tu respuesta. ¿A qué hora se produce? **(0,5 puntos)**

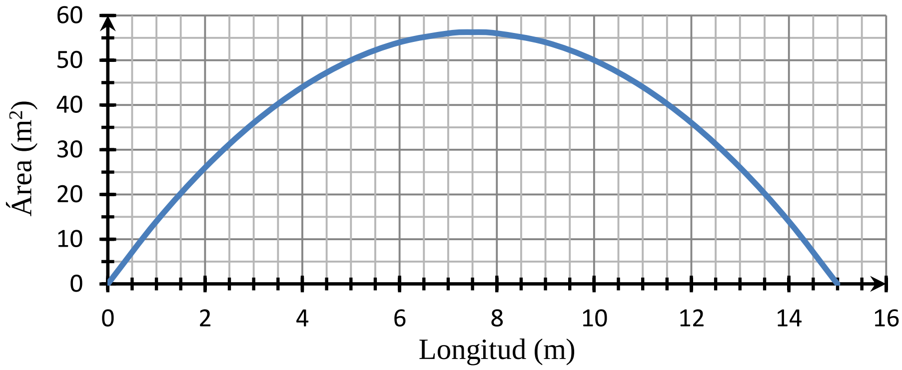
c) ¿Cuál es el mínimo número de personas que acoge el supermercado? ¿A qué hora u horas se produce y con qué se corresponde? **(0,5 puntos)**

d) ¿Cuántos clientes hay a las 16:00 h? **(0,25 puntos)**

e) Determina el recorrido de la función. **(0,25 puntos)**

f) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(0,5 puntos)**

Ejercicio 5: Queremos construir un jardín rectangular y disponemos de 30 metros de valla para hacerlo. En la siguiente gráfica se muestra la relación entre la longitud del lado largo del jardín rectangular con el área que encierra el recinto que se forma:



Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué longitud tiene que tener el lado grande para que el área que encierre el corral sea máxima? ¿Qué área se obtiene con ese valor? **(0,5 puntos)**

b) ¿Para qué valores de longitud del lado se puede obtener un valor del área? ¿A qué característica de una función se corresponden ese intervalo de valores?

(0,25 puntos)

c) ¿Se trata de una función continua o discontinua? Justifica tu respuesta.

(0,25 puntos)

d) Indica cuándo crece y cuándo decrece la función. **(0,5 puntos)**

e) ¿Hay algún corte con los ejes? Da sus coordenadas en caso de que lo haya y explica lo que significa en este caso que haya un corte con el eje. **(0,25 puntos)**

f) A partir del enunciado obtén una expresión analítica que relacione el área que encierra el jardín con el lado grande del rectángulo (Pista: ayúdate de un dibujo y de las fórmulas del perímetro y del área del rectángulo). **(0,25 puntos)**

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

El criterio de evaluación de la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, que se evalúa en esta prueba es "**Crit.MAAC.4.1.** Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica". Los estándares de aprendizaje asociados a dicho criterio, y por tanto los que se evalúan en la prueba, son los siguientes:

- **Est.MAAC.4.1.1.** Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.
- **Est.MAAC.4.1.2.** Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.
- **Est.MAAC.4.1.3.** Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.
- **Est.MAAC.4.1.4.** Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.

En particular, los estándares de aprendizaje y los campos de problemas que se evalúan en cada ejercicio se recogen en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>Ejercicio</th><th>Estándares de aprendizaje</th><th>Campos de problemas</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Est.MAAC.4.1.4.</td><td>CP2 – Cambios entre sistemas de representación</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Est.MAAC.4.1.1.</td><td rowspan="2">CP2 – Cambios entre sistemas de representación</td></tr>
<tr><td>Est.MAAC.4.1.3.</td></tr>
</table>

3	Est.MAAC.4.1.1.	CP1 – Concepto de función CP2 – Cambios entre sistemas de representación CP3 - Interpretación de las características de una función
	Est.MAAC.4.1.3.	
4	Est.MAAC.4.1.1.	CP3 - Interpretación de las características de una función
	Est.MAAC.4.1.2.	
5	Est.MAAC.4.1.1.	CP2 – Cambios entre sistemas de representación CP3 - Interpretación de las características de una función
	Est.MAAC.4.1.2.	
	Est.MAAC.4.1.4.	

Haciendo referencia a los códigos mostrados en el apartado A.2 y a las definiciones dadas en el apartado G.1, las técnicas y tecnologías que se evalúan en cada ejercicio de la prueba quedan debidamente enumeradas a continuación:

Para el **primer ejercicio** del examen, los alumnos podrán aplicar las siguientes técnicas:

T2.3 – Calcular las coordenadas de puntos de la gráfica y construir una tabla de valores.

T2.8 – Construir una tabla de valores y representar los puntos en un sistema de ejes coordenados.

Las tecnologías que sostienen estas técnicas son la definición de variable dependiente e independiente y la definición de función.

Para el **segundo ejercicio** del examen, los alumnos podrán aplicar las siguientes técnicas:

T2.4 – Representar la relación del enunciado en un sistema de ejes coordenados (utilizando o no una tabla de valores).

T2.6 – Encontrar y escribir algebraicamente la relación (que muestra el enunciado) entre la variable dependiente e independiente.

T2.8 – Construir una tabla de valores y representar los puntos en un sistema de ejes coordenados.

Las tecnologías que sostienen estas técnicas son la definición de variable dependiente e independiente y la definición de función en sus diferentes formas de representación.

En el **tercer ejercicio**, los alumnos podrán utilizar las siguientes técnicas:

T1.2 – Identificar la variable dependiente e independiente de la gráfica e interpretar la relación que mantienen.

T2.4 – Representar la relación del enunciado en un sistema de ejes coordenados (utilizando o no una tabla de valores).

T2.5 – Analizar la relación que muestra la gráfica y escribir un enunciado que cumpla la relación.

En este caso, las tecnologías que sostienen las técnicas son la definición de variable dependiente e independiente y la definición de función en sus diferentes formas de representación.

Para el **cuarto ejercicio** del examen, los alumnos pueden hacer uso de las siguientes técnicas:

T1.2 – Identificar la variable dependiente e independiente de la gráfica e interpretar la relación que mantienen.

T2.3 – Calcular las coordenadas de puntos de la gráfica.

T3.1.1 – Dominio: Proyectar la gráfica sobre el eje de abscisas y escribir el intervalo o intervalos de valores obtenidos en el eje OX.

T3.1.2 – Recorrido: Proyectar la gráfica sobre el eje de ordenadas y escribir el intervalo o intervalos de valores obtenidos en el eje OY.

T3.6.1 – Crecimiento en (x_1, x_2): ver si para dos valores x_1 y x_2 próximos y tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$. Entonces f crece en (x_1, x_2).

T3.6.2 – Decrecimiento en (x_1, x_2): ver si para dos valores x_1 y x_2 próximos y tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$. Entonces f decrece en (x_1, x_2).

T3.7.1 – Máximos relativos: obtener las coordenadas de los puntos en los que la función pasa de ser creciente a decreciente.

T3.7.3 – Mínimo absoluto: obtener el punto de la gráfica con menor valor de la ordenada.

En este caso, las tecnologías que sostienen las técnicas nombradas son la definición de variable dependiente e independiente, la definición de función y las definiciones de dominio, recorrido, crecimiento, decrecimiento, máximo relativo y mínimo absoluto.

Por último, en el **quinto ejercicio** del examen los alumnos tienen que utilizar las siguientes técnicas:

T1.2 – Identificar la variable dependiente e independiente de la gráfica e interpretar la relación que mantienen.

T2.3 – Calcular las coordenadas de puntos de la gráfica.

T2.6 – Encontrar y escribir algebraicamente la relación (que muestra el enunciado) entre la variable dependiente e independiente.

T3.1.1 – Dominio: Proyectar la gráfica sobre el eje de abscisas y escribir el intervalo o intervalos de valores obtenidos en el eje OX.

T3.3 – Comprobar si se puede dibujar la gráfica de un solo trazo.

T3.4 – Obtener las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con cada uno de los ejes de coordenadas.

T3.6.1 – Crecimiento en (x_1, x_2): ver si para dos valores x_1 y x_2 próximos y tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$. Entonces f crece en (x_1, x_2).

T3.6.2 – Decrecimiento en (x_1, x_2): ver si para dos valores x_1 y x_2 próximos y tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$. Entonces f decrece en (x_1, x_2).

T3.7.1 – Máximos relativos: obtener las coordenadas de los puntos en los que la función pasa de ser creciente a decreciente.

Las tecnologías que sostienen estas técnicas son la definición de variable dependiente e independiente, la definición de función y las definiciones de dominio, crecimiento, decrecimiento, máximo relativo, cortes con los ejes y continuidad.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

A continuación, para cada ejercicio de la prueba escrita se van a mostrar posibles métodos que pueden seguir los alumnos a la hora de resolverlos y posibles errores que pueden cometer en el proceso, en base a las técnicas nombradas en el apartado anterior.

A la hora de resolver el **primer ejercicio**, según los conocimientos enseñados en la unidad, los alumnos podrían proceder por dos métodos diferentes:

- Primer método:
  1. Obtener una tabla de valores para cada expresión analítica.
  2. Representar los puntos en la gráfica dada para ver a qué función pertenecen y relacionar la expresión analítica con la función correspondiente.

Posibles errores que pueden cometer los alumnos al llevar a cabo el método:

- Fallos aritméticos para obtener la tabla de valores.
- Colocar mal los puntos de la tabla en el sistema de ejes coordenados.
- Relacionar de forma errónea la expresión analítica con la gráfica.
- No justificar las respuestas

➢ Segundo método:

1. Obtener una tabla de valores a partir de cada gráfica.
2. Sustituir en las funciones los puntos obtenidos en las tablas para ver cuál de ellas cumple la relación recogida en la tabla.
3. Relacionar la gráfica con la expresión analítica correcta.

Posibles errores que pueden cometer los alumnos al llevar a cabo el método:

- Error al obtener las coordenadas de los puntos de las gráficas y al plasmarlo en la tabla de valores.
- Errores aritméticos al sustituir los puntos en las diferentes expresiones analíticas.
- Relacionar mal una función con una gráfica por haber comprobado que solo un punto de la gráfica pertenece a la función (las gráficas tienen puntos comunes).

En el **segundo ejercicio**, los alumnos disponen de un método para resolver el ejercicio completo, y de un segundo método para resolver el apartado b) sin haber conseguido obtener las expresiones analíticas del apartado a).

➢ Método para el ejercicio completo:

1. Identificar la variable dependiente e independiente del enunciado.
2. Plasmar la relación de las variables en forma de expresión analítica.
3. Realizar una tabla de valores a partir de las expresiones analíticas obtenidas.
4. Dibujar unos ejes coordenados debidamente graduados y representar en el sistema de ejes los puntos obtenidos en la tabla, para terminar dibujando la gráfica de la función.

➢ Método para resolver el apartado b) sin tener resuelto el a):

1. Identificar la variable dependiente e independiente del enunciado.

2. Construir una tabla de valores sin utilizar la expresión analítica, utilizando el enunciado. Por ejemplo: *"Si el lado vale 1, el perímetro es* $1 + 1 + 1 = 3$, *si el lado vale 2, el perímetro es* $2 + 2 + 2 = 6$*"*.
3. Dibujar unos ejes coordenados debidamente graduados y representar en el sistema de ejes los puntos obtenidos del análisis de los enunciados, para terminar dibujando la gráfica de la función.

Los posibles errores que pueden cometer al realizar el procedimiento son:

- No identificar cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.
- Errores a la hora de traducir el enunciado en una expresión analítica. Por ejemplo: $y = x^3$, $y = x^2 + 3$. No obtener una expresión analítica (no contestar).
- Errores aritméticos al construir la tabla de valores a partir de la expresión analítica o del enunciado.
- Errores al graduar los ejes.
- Representar la variable dependiente en el eje OX y la independiente en el eje OY.
- Errores al representar los puntos en el sistema de ejes coordenados.
- Representar la relación i) y la iii) para valores negativos de x.

En el **tercer ejercicio** los alumnos pueden realizar la resolución siguiendo el siguiente método:

➢ Método de resolución:

1. Reconocer la variable dependiente e independiente del enunciado.
2. Dibujar unos ejes coordenados para realizar una gráfica que represente la relación del enunciado.
3. Proponer un enunciado que se ajuste a la gráfica.

Posibles errores que pueden cometer al llevarlo a cabo:

- Elegir de forma errónea la variable dependiente e independiente.
- Graduar mal el sistema de ejes coordenados.
- Representar una gráfica que no se ajuste al enunciado.
- Proponer un enunciado que no se ajuste nada a la gráfica o proponer un enunciado que se ajuste a la gráfica pero que no utilice las unidades que se expresan en ella.

- Identificar la forma de la gráfica con una trayectoria y por tanto proponer un enunciado erróneo.

Al igual que en el ejercicio anterior, en el **cuarto ejercicio** los alumnos solo disponen de un método posible para su resolución:

- Método de resolución:
  1. Obtener el dominio de la función y relacionarlo con el horario en el que el supermercado está abierto.
  2. Obtener el número máximo de personas que acoge el supermercado y la hora a la que se produce.
  3. Obtener el número mínimo de personas que acoge, las horas a las que se producen y relacionarlo con que el supermercado está cerrado.
  4. Obtener los clientes que hay a las 16:00 h.
  5. Obtener el recorrido.
  6. Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

  Posibles errores que pueden cometer al poner en práctica el método:
  - Obtener un dominio erróneo.
  - Escribir mal los intervalos: cambiar de orden las coordenadas, incluir o no los extremos, obtener intervalos que no sean los correctos, escribir erróneamente algún valor (por ejemplo, poner 21:50 h en vez de 21:30 h o 21,5 h).
  - Dar el valor mínimo solo con su valor de x y no como un punto.
  - Dar el recorrido como un valor de y en vez de como intervalo.
  - Dar el crecimiento (o el decrecimiento) con puntos en vez de con intervalos.
  - Dividir más los intervalos de crecimiento. Por ejemplo: $(9, 11) \cup (11, 13)$.
  - No realizar justificaciones o realizarlas de forma errónea.

Por último se muestra el método que tienen que seguir los alumnos para resolver correctamente el **quinto ejercicio** y sus posibles errores:

- Método de resolución:
  1. Obtener la longitud del lado y el área que se obtiene con él.
  2. Obtener los valores del lado para los cuales existe área y relacionarlo con el dominio.
  3. Obtener que es una función continua y justificarlo.

4. Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Obtener los cortes con los ejes y relacionarlos con la imposibilidad de existir área para esos valores.
6. Hacer uso de fórmulas y cálculos algebraicos y aritméticos para obtener la expresión analítica que relaciona la longitud del lado con el área.

Posibles errores que pueden cometer al poner en práctica el método:

- Errores al interpretar la graduación de los ejes.
- Dar un valor erróneo de la longitud del lado y del área.
- No utilizar las unidades de superficie adecuadas.
- Escribir mal los intervalos del dominio, crecimiento y decrecimiento: cambiar de orden las coordenadas, incluir o no los extremos, obtener intervalos que no sean los correctos.
- Decir que la característica es otra diferente al dominio.
- No saber relacionar los puntos de corte con la inexistencia de área.
- No obtener la expresión analítica correcta por simplificar o despejar mal, no saber las fórmulas para poder obtenerla o no saber relacionar las variables del perímetro y del área para obtenerla.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Los criterios de calificación de la prueba escrita se basan en un modelo de penalización visto en la asignatura de Evaluación e innovación docente e investigación educativa en Matemáticas del Máster de Profesorado; **el modelo de tercios**.

Este modelo se caracteriza por lo siguiente: los errores en las tareas auxiliares generales se pueden penalizar con hasta un tercio de la puntuación total del ejercicio; los errores en las tareas auxiliares específicas (que engloban también a las generales) pueden penalizarse hasta con dos tercios de la puntuación total del ejercicio, y por último, los errores en las tareas principales se pueden penalizar hasta con el total de la puntuación del ejercicio.

Para ello, antes de presentar los modelos, para cada ejercicio se van a mostrar las diferentes tareas principales, auxiliares específicas y generales:

Ejercicio 1

TAREAS	Principales	• Relacionar cada expresión analítica con su gráfica y justificar la respuesta
	Específicas	• Sustituir las coordenadas de los puntos en la función • Realizar una tabla de valores • Representar los puntos gráficamente y ver con qué función se corresponden • Obtener coordenadas de puntos a partir de la gráfica y realizar una tabla
	Generales	• Notación matemática y explicaciones • Cálculos aritméticos al obtener la tabla de valores o al sustituir valores en las funciones

Ejercicio 2

TAREAS	Principales	• Obtener la expresión analítica de la relación que muestra cada enunciado • Realizar la gráfica de la función para cada enunciado
	Específicas	• Reconocer la variable dependiente e independiente • Realizar una tabla de valores • Evaluar la función • Graduación de los ejes • Representar puntos en los ejes coordenados
	Generales	• Cálculos aritméticos • Notación matemática • Saber qué valores puede tomar la variable independiente • Conocer la fórmula del perímetro de un triángulo equilátero

Ejercicio 3

TAREAS	Principales	• Realizar una gráfica que se ajuste al enunciado • Proponer un enunciado que se ajuste a lo que expresa la gráfica

	Específicas	• Interpretar el enunciado y reconocer la variable dependiente e independiente • Dibujar un sistema de ejes coordenados debidamente graduados. • Interpretar la gráfica de izquierda a derecha y de abajo arriba • Interpretar la graduación de los ejes
	Generales	• Explicaciones y justificaciones • Notación matemática

Ejercicio 4

TAREAS	Principales	• Obtener el dominio y relacionarlo con el horario del supermercado • Obtener el valor máximo de clientes y la hora a la que se produce • Obtener el número mínimo de clientes y relacionarlo con que el supermercado está cerrado • Obtener el número de personas que hay a las 16:00 h • Obtener el intervalo del recorrido • Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento
	Específicas	• Interpretar el enunciado y reconocer la variable dependiente e independiente • Escribir bien los intervalos • Interpretar la gráfica de izquierda a derecha y de abajo arriba • Interpretar la graduación de los ejes
	Generales	• Explicaciones y justificaciones • Notación matemática

Ejercicio 5

TAREAS	Principales	• Obtener el dominio • Obtener las coordenadas del máximo • Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento • Obtener si la función es continua y justificarlo • Obtener los cortes con los ejes y su significado • Obtener la expresión analítica que relaciona la longitud del lado y el área

	Específicas	• Interpretar el enunciado y reconocer la variable dependiente e independiente • Escribir bien los intervalos • Interpretar la gráfica de izquierda a derecha y de abajo arriba • Interpretar la graduación de los ejes
	Generales	• Conocer la fórmula del perímetro de un rectángulo • Conocer la fórmula del área de un rectángulo • Cálculos algebraicos • Utilizar las unidades de medida adecuadas • Explicaciones, justificaciones y notación matemática

A continuación, se muestra un modelo de tercios para cada método de resolución de los ejercicios del examen, donde la penalización se corresponde a la no realización de la tarea o a una mala resolución de la misma.

Modelo de tercios para el ejercicio 1:

- No relacionan bien las gráficas: hasta – 0,375 por apartado.
- Relacionan bien las gráficas pero no lo justifican o no lo hacen bien: hasta – 0,25 por apartado.
- Representación gráfica errónea de puntos: hasta – 0,125 por apartado.
- Obtención errónea de las coordenadas de los puntos a partir de la gráfica: hasta – 0,125 por apartado.
- Sustitución errónea de coordenadas de puntos en la función (variable dependiente e independiente): hasta – 0,125 por apartado.
- Fallos aritméticos al realizar la tabla de valores: hasta – 0,05 por apartado.
- Fallos aritméticos al sustituir valores en la función: hasta – 0,05 por apartado.
- Por mala notación matemática y por no realizar explicaciones (o explicaciones erróneas): hasta – 0,15.

Modelo de tercios para el ejercicio 2:

- Obtención de una expresión analítica errónea (no se ajusta nada al enunciado) o no obtención de la misma: hasta – 0,33 por apartado.
- Representación gráfica errónea de la relación: hasta – 0,33 por apartado.

- Fallos leves al obtener la expresión analítica y representación gráfica correcta de su expresión: hasta – 0,1 por apartado.
- Graduación errónea de los ejes coordenados: hasta – 0,1 por apartado.
- Representación gráfica errónea de puntos: hasta – 0,1 por apartado.
- Realizar la representación gráfica para valores de la variable independiente que no tienen sentido (valores negativos en algún caso): hasta – 0,05 por apartado.
- Fallos aritméticos al realizar la tabla de valores o al obtener valores a partir del enunciado para representarlos gráficamente: hasta – 0,05 por apartado.
- Por mala notación matemática: hasta – 0,2.

Modelo de tercios para el ejercicio 3:

- Realizar una gráfica que no se ajuste nada al enunciado: hasta – 1.
- Realizar una gráfica que se ajuste al enunciado en algunos tramos: hasta – 0,6.
- Propuesta de un enunciado erróneo: hasta – 1.
- Propuesta de un enunciado que no se ajusta a la gráfica en algunas partes: hasta – 0,6.
- Propuesta de un enunciado que se ajusta a la gráfica pero no utiliza las unidades que se expresan en ella: hasta – 0,3.
- Colocar las variables en el eje contrario: hasta – 0,5.
- Realizar una graduación errónea del sistema de ejes coordenados (a) o interpretación errónea de la graduación (b): hasta – 0,3.
- Por mala notación matemática, explicaciones erróneas o ausencia de ellas: hasta – 0,2.

Modelo de tercios para el ejercicio 4:

- Obtención errónea del dominio (nada que ver con la gráfica): – 0,25.
- No relacionar el dominio con el horario del supermercado: – 0,25.
- Determinación errónea del horario (nada que ver con la gráfica) o ausencia de respuesta: – 0,5.
- Obtener mal el nº máximo de personas o no contestar: hasta – 0,25. Análogo para la hora a la que se produce.
- Obtener mal el nº mínimo de personas o no contestar: hasta – 0,25. Análogo para las horas a las que se produce.

- Obtener un nº de clientes erróneo (o no obtenerlo) a las 16:00 h: – 0,25.
- Obtención errónea del recorrido (nada que ver con la gráfica): – 0,25.
- Obtener el nº mínimo de personas pero no las horas: hasta – 0,3.
- Expresar el dominio, recorrido, crecimiento y decrecimiento con intervalos pero poniendo las coordenadas en orden inverso: hasta – 0,15 por característica.
- Expresar el dominio, recorrido, crecimiento y decrecimiento por los puntos de inicio y final o de palabra: hasta – 0,05 por característica.
- Expresar el dominio, recorrido, crecimiento y decrecimiento con intervalos pero cometen errores al incluir o no los extremos: hasta – 0,05 por característica.
- Determinación del horario como de 9:00 a 21:50 h: – 0,05.
- No relacionar que el nº mínimo se corresponde con la apertura y cierre: – 0,05.
- Por mala notación matemática, explicaciones y justificaciones erróneas o ausencia de ellas: hasta – 0,5.

<u>Modelo de tercios para el ejercicio 5:</u>

- Obtención errónea de las coordenadas del máximo o no contestación: – 0,5.
- Obtención errónea de los valores del lado o no contestación: hasta – 0,25.
- Responder que es una función discontinua o no responder al apartado: – 0,25.
- Obtención errónea de los puntos de corte (nada que ver con la solución): – 0,25.
- No explicar el significado de los puntos de corte: – 0,2.
- Obtención errónea (nada que ver con la relación) o no obtención de la expresión analítica: – 0,25.
- Obtención de una expresión analítica con fallos leves: hasta – 0,15.
- Expresar el crecimiento con las coordenadas del intervalo en orden inverso: hasta – 0,15. Análogo para el decrecimiento.
- Expresar el crecimiento diciendo de qué punto a qué punto va o de palabra: hasta – 0,05. Análogo para el decrecimiento.
- Responder que es una función continua y no justificarlo (o hacerlo mal): – 0,05.
- Obtención de las coordenadas del máximo pero sin unidades de medida o con unas unidades de medida erróneas: – 0,05.
- No relacionar los valores que puede tomar el lado con el dominio: – 0,05.
- Determinar los puntos de corte solo con el valor de la abscisa, o dar las coordenadas de los puntos en orden inverso: hasta – 0,15.

J. Bibliografía

Alayo, F. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.* Bilbao: Universidad del País Vasco.

Bernouilli, J. (1699). *Acta Eroditorum*.

Colera Jiménez, J., Oliveira González, M., Gaztelu Albero, I., & Colera Cañas, R. (2015). *ESO 3 Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.* Madrid: Anaya.

Colera, J., García, J. E., Gaztelu, I., De Guzmán, M., & Oliveira, M. J. (1995). *3 Matemáticas Educación Secundaria Obligatoria.* Madrid: Anaya.

Colera, J., García, R., Gaztelu, I., & Oliveira, M. J. (2006). *Matemáticas 3 Educación Secundaria.* Madrid: Anaya.

De la Prida Almansa, C., Gaztelu Villoria, A. M., González García, A., Machín Polaina, P., Pérez Saavedra, C., & Sánchez Figueroa, D. (2015). *Matemáticas Enseñanzas académicas 3 ESO, SERIE RESUELVE.* Madrid: Santillana.

Etayo, J., Colera, J., & Ruiz, A. (1979). *Matemáticas 1º.* Madrid: Anaya.

Euler, L. (1748). *Introductio in Analysis Infinitorum.*

Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa (LGE). *Boletín Oficial del Estado*, Madrid, 6 de agosto de 1970, nº 187, pp. 12525-12546.

Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). *Boletín Oficial del Estado*, Madrid, 4 de octubre de 1990, nº 238, pp. 28927-28942.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE). *Boletín Oficial del Estado*, Madrid, 4 de mayo de 2006, nº 106, pp. 17158-17207.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE). *Boletín Oficial del Estado*, Madrid, 10 de diciembre de 2013, nº 295, pp. 97858-97921.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, *Boletín Oficial de Aragón*, 2 de junio de 2016, nº 105, pp. 12640-13458.

Ortega, T., & Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación, 12*(2), 209-221.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, Madrid, 1 de marzo de 2014, nº 52, pp. 19349-19420.

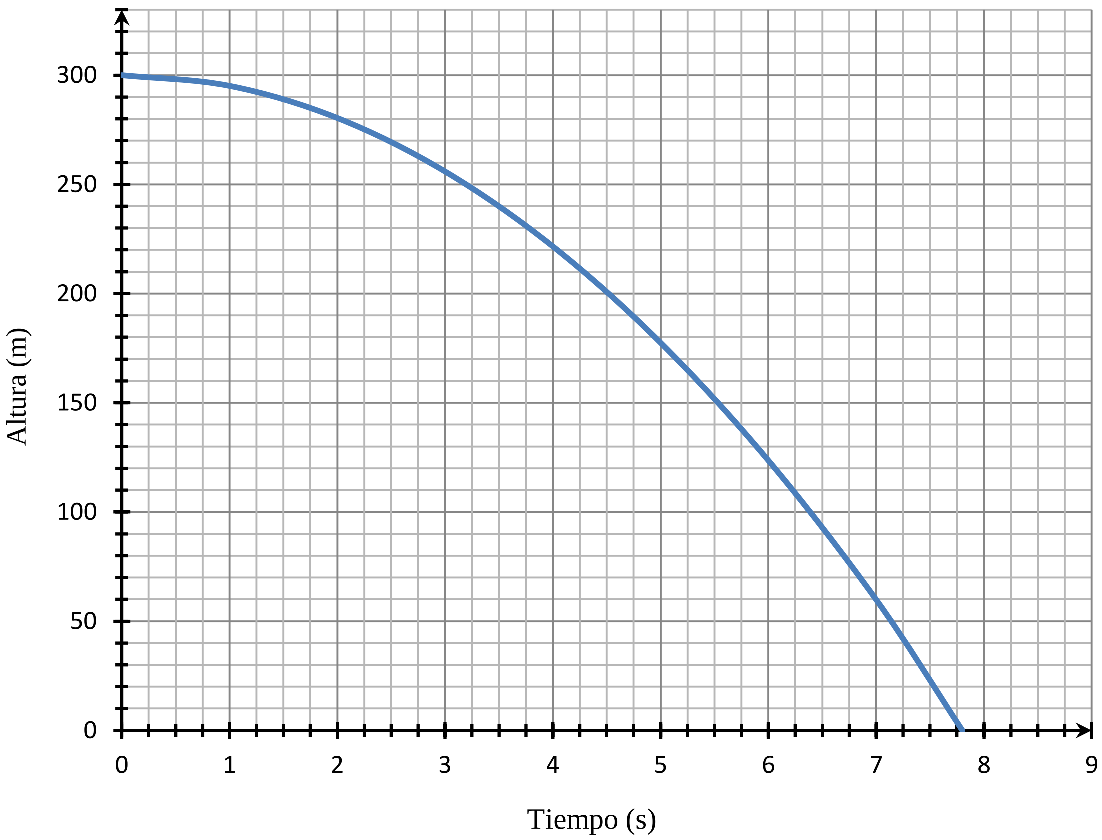
Sastre Vázquez, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *16*, 141-155.

Ugalde, W. J. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 2-17.

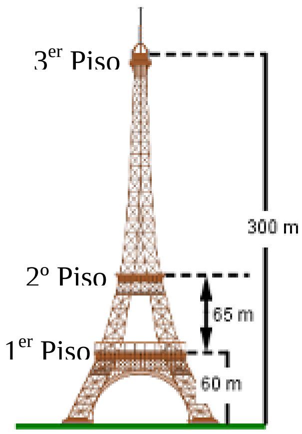
ANEXO I: Trabajo complementario para los alumnos

Problema 2 de razón de ser:

Observa la gráfica altura – tiempo de la caída del móvil y la imagen de la Torre Eiffel para contestar las siguientes preguntas:



Consulta las respuestas dadas en clase en los apartados anteriores en caso de que necesites información de ellos.



g) Dibuja una gráfica que relacione el tiempo con la velocidad media para los casos del apartado e).

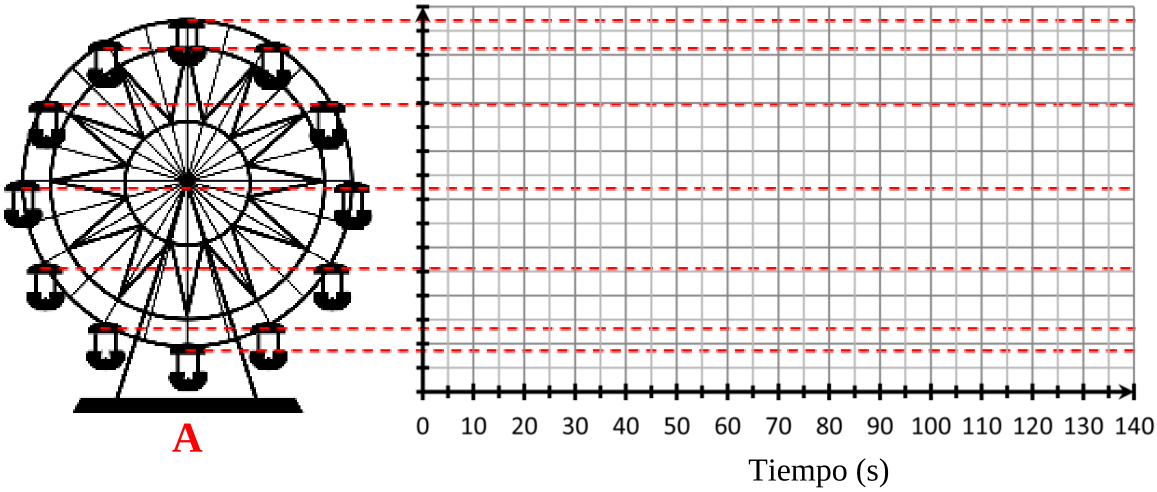
h) Para obtener una mayor precisión, realiza una gráfica con la velocidad media del móvil para cada segundo. ¿A qué conclusión llegas?

i) Representa sobre la gráfica anterior la función $v = 10t$.

j) Investiga sobre el movimiento de caída libre de objetos y realiza un comentario, ayudándote de las gráficas que has realizado en los apartados anteriores.

Problema 9: La siguiente noria tiene una altura de 60 metros y tarda en dar una vuelta completa 60 segundos.

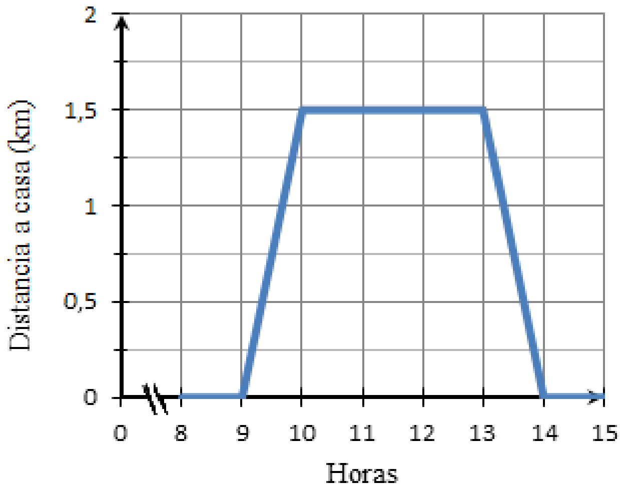
a) Realiza la gráfica de la altura que alcanza la cabina A en función del tiempo durante 2 vueltas enteras.
b) ¿Qué ocurre con su gráfica?
c) Representa en el mismo sistema de ejes coordenados la gráfica de la altura de la cabina A en función del tiempo durante 2 vueltas enteras si la noria tarda 30 segundos en dar una vuelta completa. ¿Qué ocurre con esta nueva gráfica?
d) Compara las dos gráficas y explica lo que ocurre.



ANEXO II: Hoja de problemas y sus soluciones

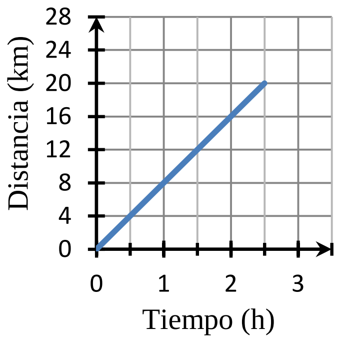
HOJA DE PROBLEMAS:

Problema 1: Escribe un enunciado que se ajuste a la siguiente gráfica.

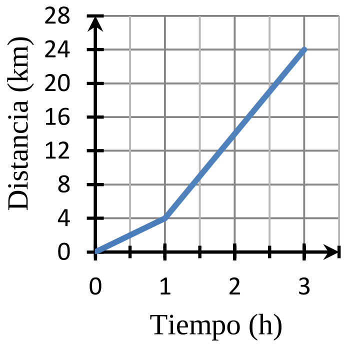


Problema 2: Las gráficas que se muestran a continuación muestran la distancia recorrida (km) en función del tiempo (h) de un día de entrenamiento de tres atletas:

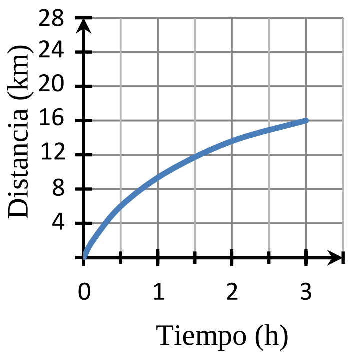
Atleta 1



Atleta 2



Atleta 3



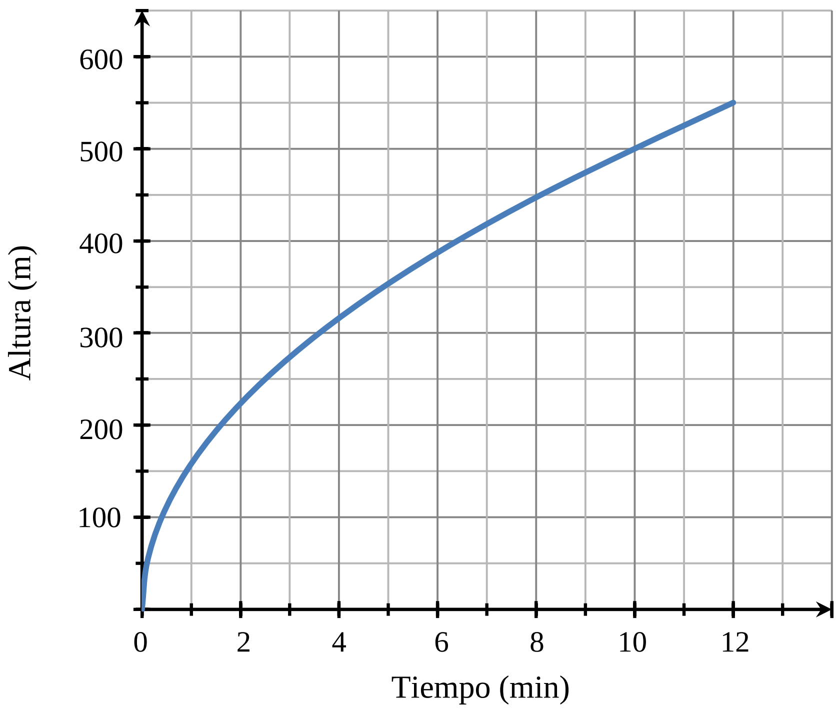
Responde las siguientes preguntas acerca de las gráficas:

a) Describe la gráfica de cada atleta mediante un enunciado que se ajuste a ella.
b) ¿Quién recorre menos trayecto?
c) ¿Cuál de ellos entrena durante menos tiempo?
d) ¿Quién alcanza más velocidad durante el entrenamiento?
e) Realiza una gráfica para un cuarto atleta que entrena durante el mismo tiempo que el atleta 2, recorre la misma distancia que el atleta 1 y durante el trayecto realiza un descanso de media hora.

Problema 3: Tú y tus padres habéis tardado 2 horas en llegar desde vuestra casa a casa de tu abuela, la cual está situada en una ciudad a 160 km de distancia. Habéis estado en su casa durante una hora y media y después habéis vuelto a vuestra casa, lo cual os ha costado una hora y tres cuartos.

a) Representa la gráfica tiempo – distancia a tu casa en unos ejes coordenados.
b) Suponiendo que habéis realizado el viaje de ida a una velocidad constante, ¿a qué velocidad habéis circulado?
c) Al igual que en el viaje de ida, el de vuelta lo habéis realizado a una velocidad constante, ¿de qué velocidad se trata?
d) ¿Qué viaje habéis realizado a una velocidad más rápida?

Problema 4: Todos los años en la noche de San Juan se suelta un globo tras la hoguera. El globo se eleva, alcanza una cierta altura y finalmente estalla. A continuación se muestra la gráfica que representa la altura con el paso del tiempo, a la que se encuentra el globo hasta que estalla:

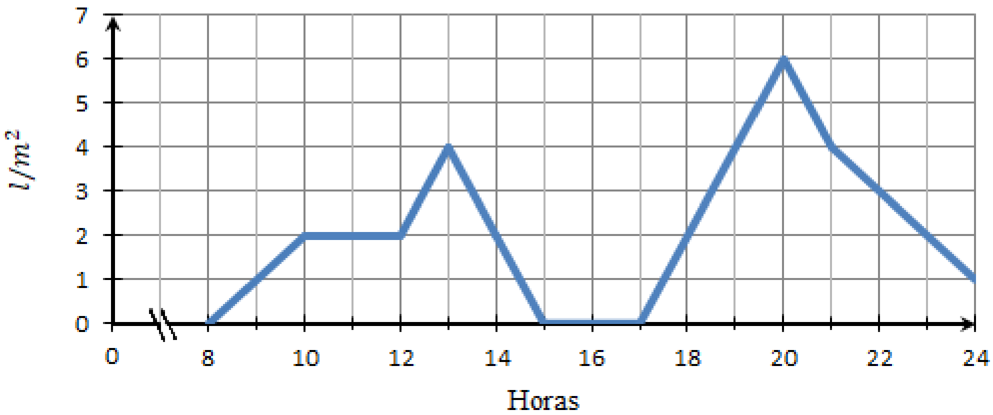


A partir de la gráfica, responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué variables intervienen? ¿Cuál de ellas es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

b) ¿Cuánta magnitud representa cada cuadrado del eje de abscisas? ¿Y del eje de ordenadas?
c) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Con qué se corresponde? Justifica tu respuesta.
d) ¿A qué altura estalla el globo? ¿Con qué característica de las funciones se puede relacionar? Justifica tu respuesta.
e) ¿Qué altura gana el globo entre el minuto 0 y el 5? ¿Y entre el 5 y el 10?
f) ¿En cuál de los dos intervalos de tiempo del apartado e) crece más rápidamente la función?

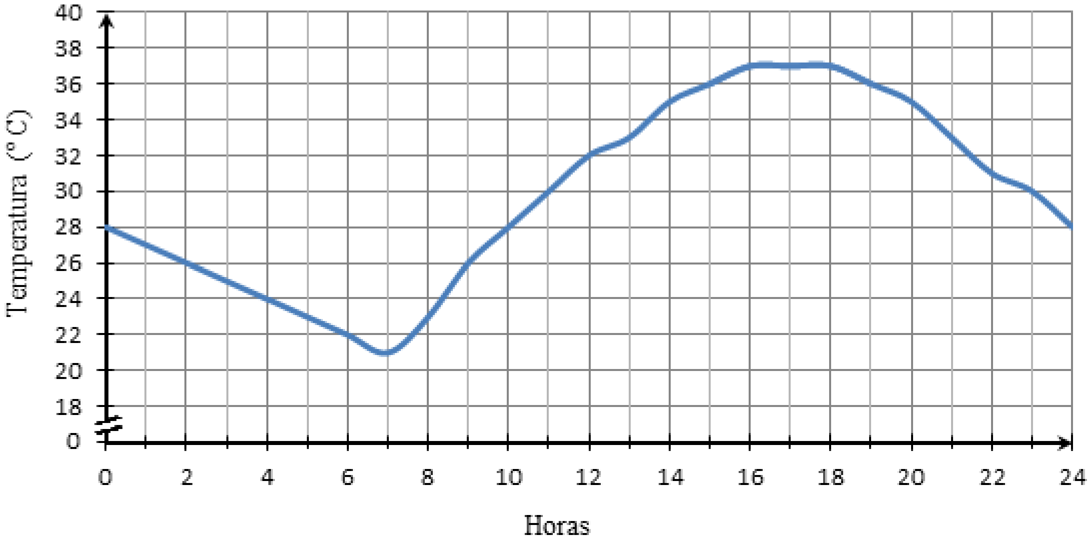
Problema 5: La siguiente gráfica representa la cantidad de litros de agua por metro cuadrado durante un día de lluvia en tu ciudad.



Responde a las siguientes preguntas:

a) Determina el dominio y el recorrido de la función.
b) ¿Durante qué horas del día está lloviendo?
c) ¿Durante qué intervalos de tiempo aumentó la cantidad de litros por metro cuadrado? ¿En cuáles disminuyó?
d) ¿A qué hora del día llovió más? ¿Cuántos litros por metro cuadrado se registraron a esa hora?
e) ¿Se trata de una función continua? Justifica tu respuesta.
f) Durante ese día saliste a la calle a la 13:30 y te olvidaste el paraguas, ¿te mojaste?

Problema 6: La siguiente gráfica representa la temperatura durante un día de verano en Zaragoza en el año 2019.



Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es su unidad de medida?

b) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Cuál es su unidad de medida?

c) ¿En qué intervalos disminuye la temperatura? ¿A qué crees que se deben estas disminuciones de temperatura?

d) ¿En qué intervalo aumenta la temperatura? ¿A qué crees que se debe este aumento de temperatura?

e) ¿A qué hora u horas se alcanza la temperatura máxima? ¿Qué valor se alcanza?

f) ¿Cuál es la temperatura mínima del día? ¿A qué hora se produce?

g) ¿Se trata de una gráfica continua? Justifica tu respuesta.

<u>SOLUCIONES:</u>

Problema 1:

Hoy he salido de casa a las 9:00 h para pasar la mañana en la piscina del pueblo, que está a 1,5 km de distancia. He tardado en llegar una hora y he estado allí hasta las 13:00 h. He tardado una hora en volver a casa.

Problema 2:

a) Atleta 1: Ha estado 2 horas y media corriendo sin parar a una velocidad constante, recorriendo un total de 20 km.

   Atleta 2: Ha estado 3 horas corriendo sin parar, aunque la primera hora ha ido algo más lento, recorriendo un total de 4 km a velocidad constante, y las siguientes dos horas ha corrido más rápido recorriendo 20 km a velocidad constante.

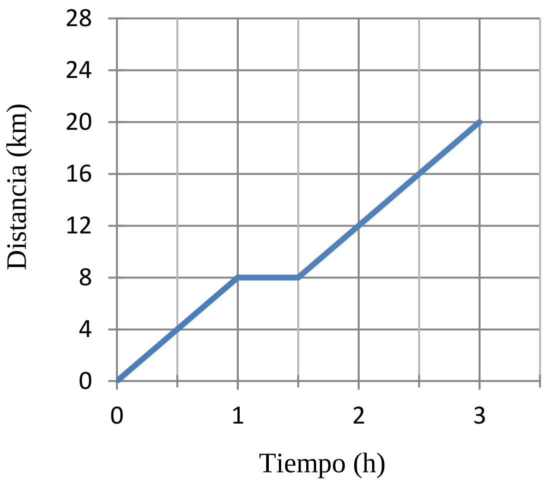
   Atleta 3: Ha estado 3 horas corriendo sin parar. Ha comenzado más rápido y ha ido bajando la velocidad, recorriendo un total de 16 km.

b) El atleta 3.

c) El atleta 1.

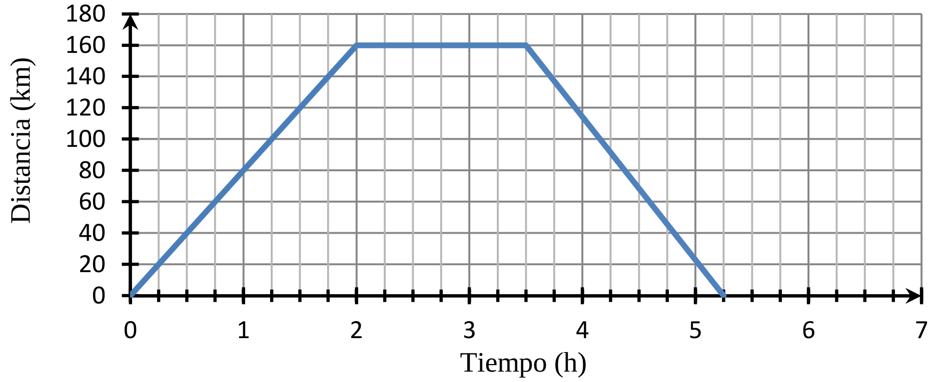
d) El atleta 2.

e)



Problema 3:

a)



b) $v_{ida} = \frac{160}{2} = 80\ km/h$

c) $v_{vuelta} = \frac{160}{1,75} = 91,43\ km/h$

d) En el segundo viaje.

Problema 4:

a) El tiempo (variable independiente) y la altura (variable dependiente).

b) Cada cuadrado en el eje de abscisas representa 1 minuto.

Cada cuadrado en el eje de ordenadas representa 50 metros.

c) $Dom f = [0, 12]$. Se corresponde con el tiempo que aguanta el globo sin estallar.

d) Estalla a los 550 m. Se puede relacionar con el recorrido de la función, que es $[0, 550]$ o con el máximo absoluto de la función que es $(12, 550)$.

e) De 0 a 5 minutos recorre 350 m de altura. De 5 a 10 minutos recorre 150 m de altura.

f) En el intervalo (0, 5) ya que recorre más altura en el mismo tiempo.

Problema 5:

a) $Dom f = [8, 24]$.

b) Llueve de 8:00 a 15:00 h y de 17:00 a 24:00 h.

c) Aumenta: $(8, 10) \cup (12, 13) \cup (17, 20)$

Disminuye: $(13, 15) \cup (20, 24)$

d) Llueve más a las 20:00 h y se registraron 6 l/m^2.

e) Es una función continua porque su gráfica puede realizarse de un solo trazo.
f) Me mojé porque a la 13:30 h estaba lloviendo.

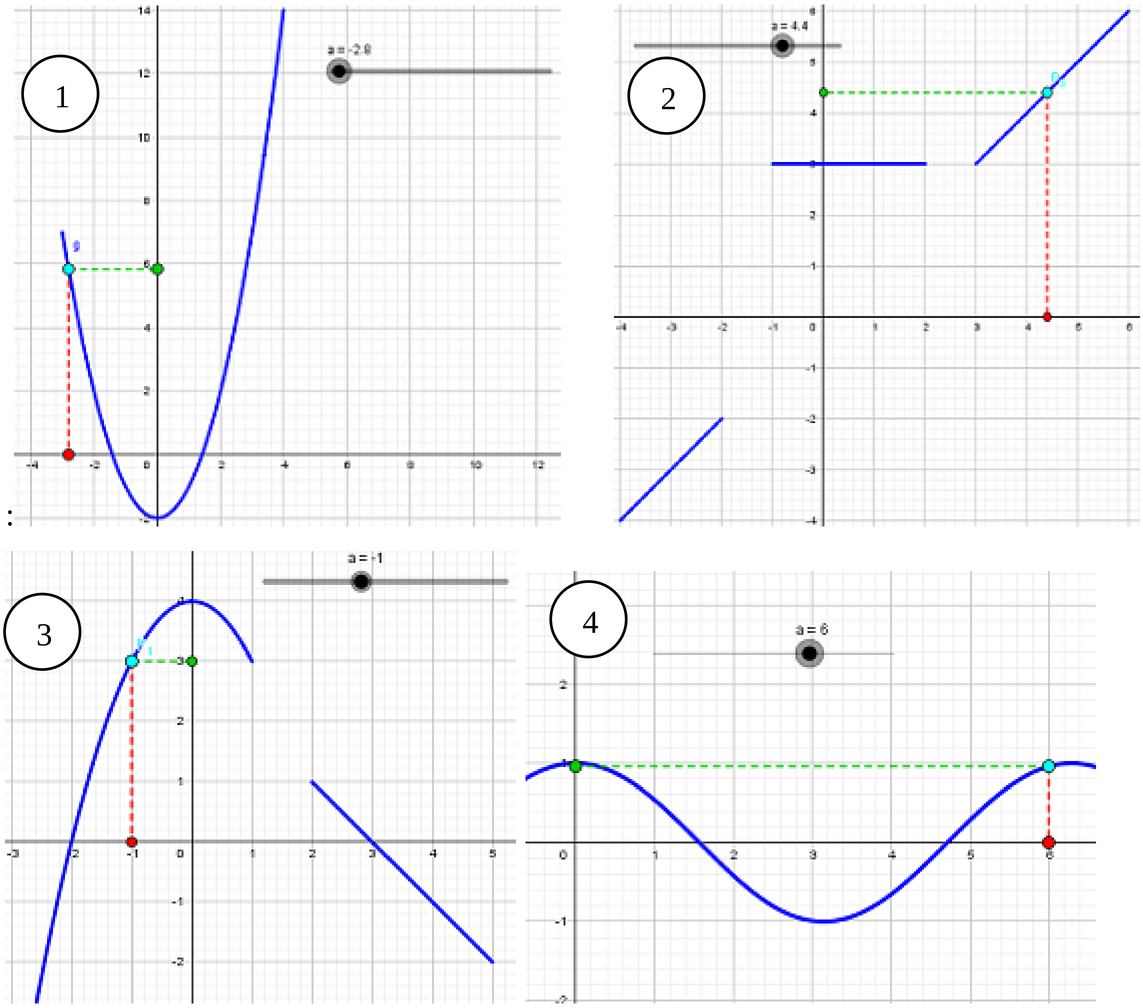
Problema 6:

a) La variable independiente son las horas.
b) La variable dependiente es la temperatura y la unidad de medida son grados centígrados.
c) La temperatura disminuye en: $(0, 7) \cup (18, 24)$.
   Las disminuciones de temperatura pueden deberse al momento del día en el que se producen. Disminuyen de madrugada y al final de la tarde.
d) La temperatura aumenta en: $(7, 16)$.
   Al igual que en el caso anterior, el aumento de temperatura puede deberse al momento del día en que se produce.
e) La temperatura máxima se alcanza a las 16:00 h, 17:00 h y 18:00 h, y el valor de la temperatura máxima es 37 ºC.
f) La temperatura mínima del día es 21 ºC y se produce a las 7:00 h.
g) Se trata de una gráfica continua ya que se puede dibujar de un solo trazo.

ANEXO III: Guión de prácticas de los alumnos

<u>Guión de los alumnos:</u>

Abre los archivos *“función1.ggb, función2.ggb, función3.ggb y función4.ggb”*. En ellos encontrarás las siguientes funciones:



1) Con la ayuda de los deslizadores obtén el dominio y recorrido de las funciones.

<u>Función 1:</u>

$Dom\ f$:

$Im\ f$:

<u>Función 2:</u>

$Dom\ f$:

$Im\ f$:

Función 3:

$Dom\ f$:

$Im\ f$:

Función 4:

$Dom\ f$:

$Im\ f$:

2) Obtén los puntos de corte con los ejes de las funciones de los 4 archivos de GeoGebra anteriores. Para obtenerlos puedes ayudarte de la herramienta intersección.

Función 1:

$Puntos\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OX$:

$Punto\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OY$:

Función 2:

$Puntos\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OX$:

$Punto\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OY$:

Función 3:

$Puntos\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OX$:

$Punto\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OY$:

Función 4:

$Puntos\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OX$:

$Punto\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OY$:

3) ¿Son continuas las cuatro funciones? Ayúdate de los deslizadores y justifica tus respuestas.

Función 1:

Función 2:

Función 3:

Función 4:

4) Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las cuatro funciones. Ayúdate de los deslizadores (piensa en las coordenadas de x e y)

Función 1:

$Intervalos\ de\ crecimiento$:

$Intervalos\ de\ decrecimiento$:

Función 2:

$Intervalos\ de\ crecimiento$:

$Intervalos\ de\ decrecimiento$:

Función 3:

$Intervalos\ de\ crecimiento$:

$Intervalos\ de\ decrecimiento$:

Función 4:

$Intervalos\ de\ crecimiento$:

$Intervalos\ de\ decrecimiento$:

5) Obtén los máximos y mínimos relativos de las cuatro funciones. Para ello, ayúdate de tus respuestas del apartado anterior.

Función 1:

$Máximos\ relativos$:

$Mínimos\ relativos$:

Función 2:

$Máximos\ relativos$:

$Mínimos\ relativos$:

Función 3:

$Máximos\ relativos$:

$Mínimos\ relativos$:

Función 4:

$Máximos\ relativos$:

$Mínimos\ relativos$:

Realiza una comprobación de tus respuestas utilizando la herramienta "*extremos relativos*".

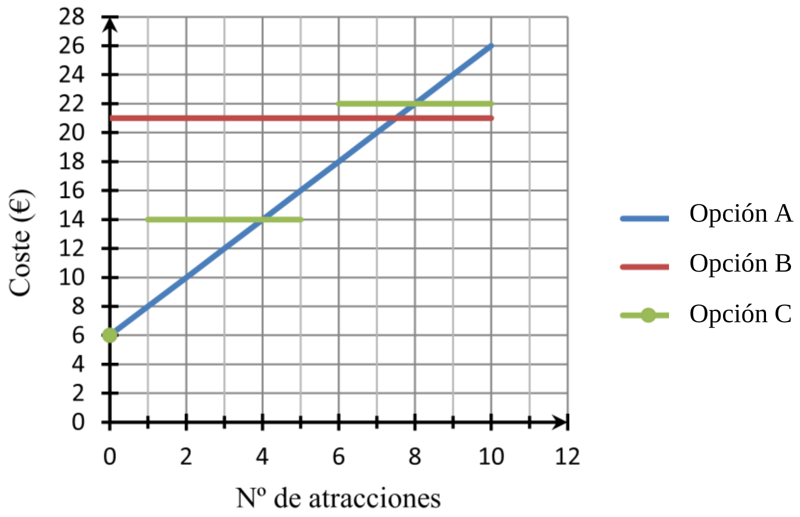
ANEXO IV: Problemas resueltos

Problema 1 de razón de ser:

a)

Nº de atracciones	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Coste opción A	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
Coste opción B	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21
Coste opción C	6	14	14	14	14	14	22	22	22	22	22

b)



c) La opción A resulta más rentable en comparación con la B si te montas de 0 a 7 atracciones. La opción A resulta más rentable que la C si te montas de 0 a 4 ó de 6 a 8 atracciones.

La opción B resulta más rentable en comparación con la A si te montas en más de 8 atracciones. La opción B resulta más rentable que la C si te montas en 6 atracciones o más.

La opción C resulta más rentable en comparación con la A si te montas solo en 5 atracciones o si te montas en 9 o 10 atracciones. La opción C resulta más rentable que la B si te montas de 0 a 5 atracciones.

Problema 2 de razón de ser:

a) El móvil tarda en caer al suelo unos 7,8 segundos.
b) Cuando se me cayó el móvil estaba en el tercer piso.
c) El móvil pasa por el 2º piso a los 6 segundos.
d) Tarda un segundo aproximadamente.

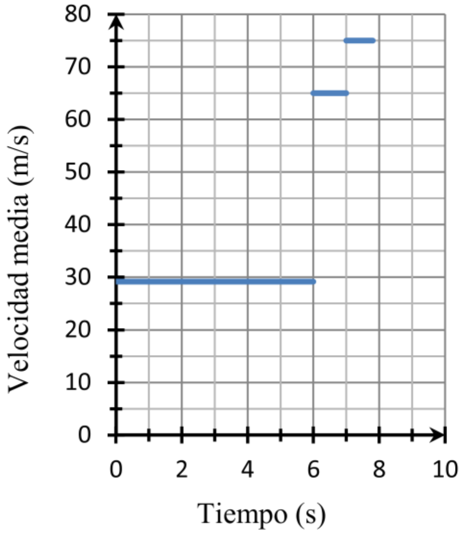
e) Velocidad media del 3^er piso al 2º: $V_m = \frac{175}{6}\ m/s$

Velocidad media del 2 piso al 1º: $V_m = 65\ m/s$

Velocidad media del 1^er piso al suelo: $V_m = \frac{60}{0{,}8} = 75\ m/s$

f) La velocidad media del móvil aumenta conforme cae.

g)



h) Velocidad media el 1^er segundo: $V_m = \frac{300-295}{1} = 5\ m/s$

Velocidad media el 2º segundo: $V_m = \frac{295-280}{1} = 15\ m/s$

Velocidad media el 3^er segundo: $V_m = \frac{280-255}{1} = 25\ m/s$

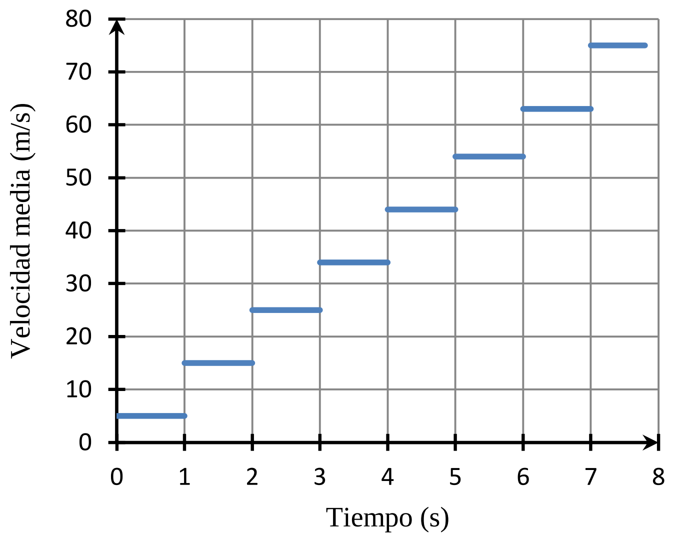
Velocidad media el 4º segundo: $V_m = \frac{255-221}{1} = 34\ m/s$

Velocidad media el 5º segundo: $V_m = \frac{221-177}{1} = 44\ m/s$

Velocidad media el 6º segundo: $V_m = \frac{177-123}{1} = 54\ m/s$

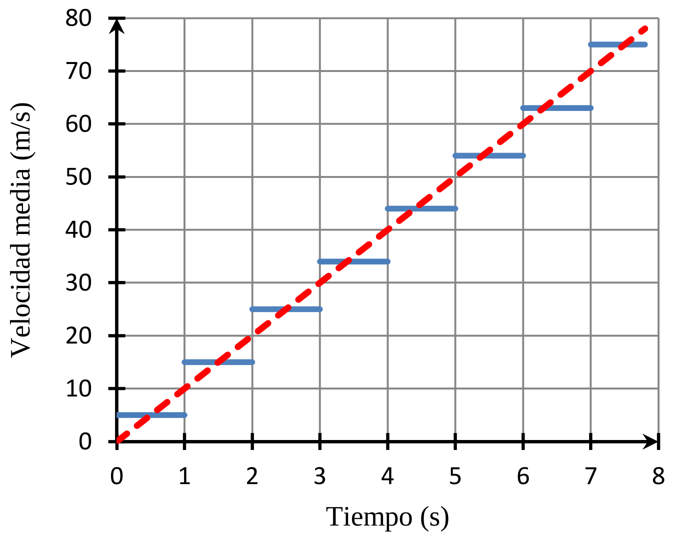
Velocidad media el 7º segundo: $V_m = \frac{123-60}{1} = 63\ m/s$

Velocidad media el último 0,8 segundo: $V_m = \frac{60}{0{,}8} = 75\ m/s$



La velocidad media parece que sigue aproximadamente una relación lineal y que no depende del peso del objeto.

i)

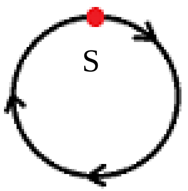


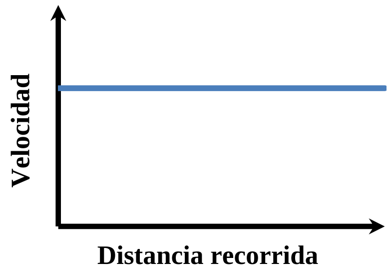
Problema 1:

Hoy he salido de casa para ir con la bici. He recorrido 20 km en media hora ya que el trayecto era llano. Después, he estado una hora y media yendo cuesta arriba y por eso he ido más lento, recorriendo un total de 30 km. A continuación he dejado la bici y he cogido un taxi para ir al pueblo de al lado, tardando 45 minutos en recorrer 50 km. Después he pillado un atasco y he tardado 45 minutos en recorrer 20 km.

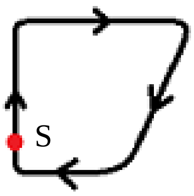
Problema 2:

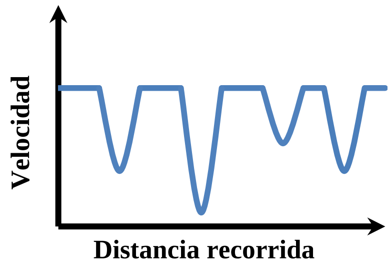
Circuito 1





Circuito 2





Problema 3:

Al principio la velocidad de la pelota es alta ya que el jugador se la proporciona. Después va bajando la velocidad hasta que llega al punto más alto de la trayectoria en el cual la velocidad es cero. Cuando pasa ese punto la velocidad comienza a aumentar por la caída de la pelota, hasta que llega a canasta.

Problema 4:

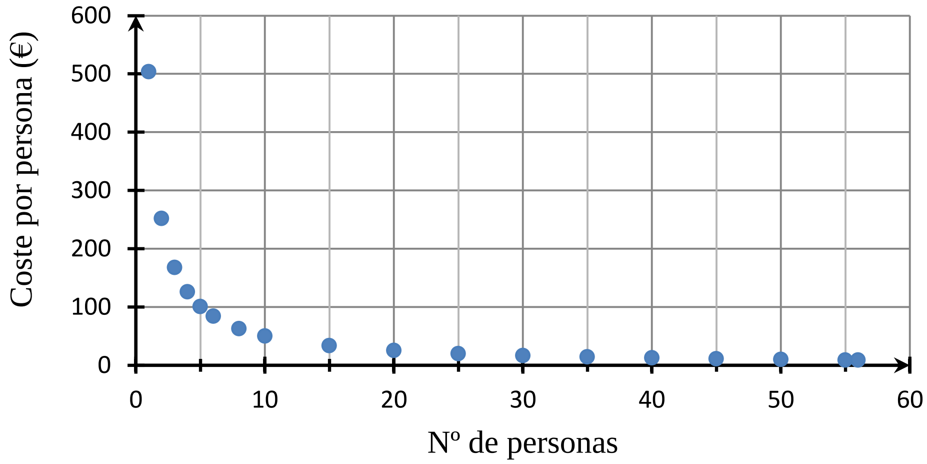
a) Para cero personas no tiene sentido calcularlo.

Personas	1	2	3	4	5	10	15	20
Precio por persona (€)	504	252	168	126	100,8	50,4	33,6	25,2

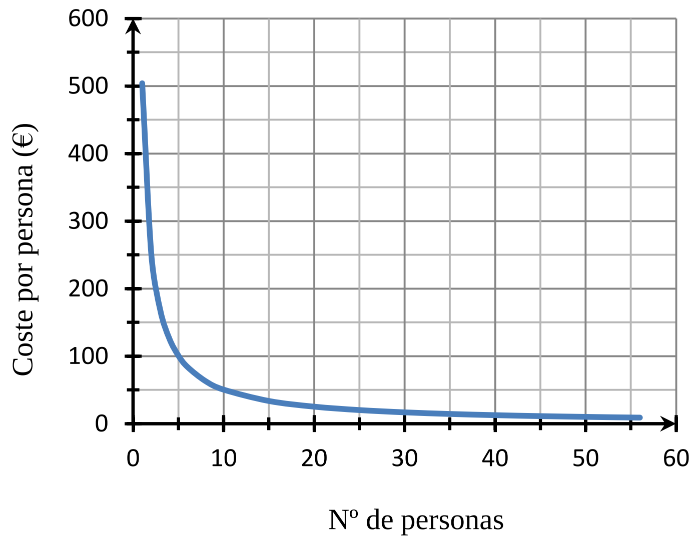
Personas	25	30	35	40	45	50	55	56
Precio por persona (€)	20,16	16,8	14,4	12,6	11,2	10,08	6,16	9

b) La relación es la siguiente: $y = \frac{504}{x}$

c)



Aunque no tiene sentido que haya personas no enteras (personas y media, personas y cuarto), para observar mejor la forma de la gráfica se unen los puntos.



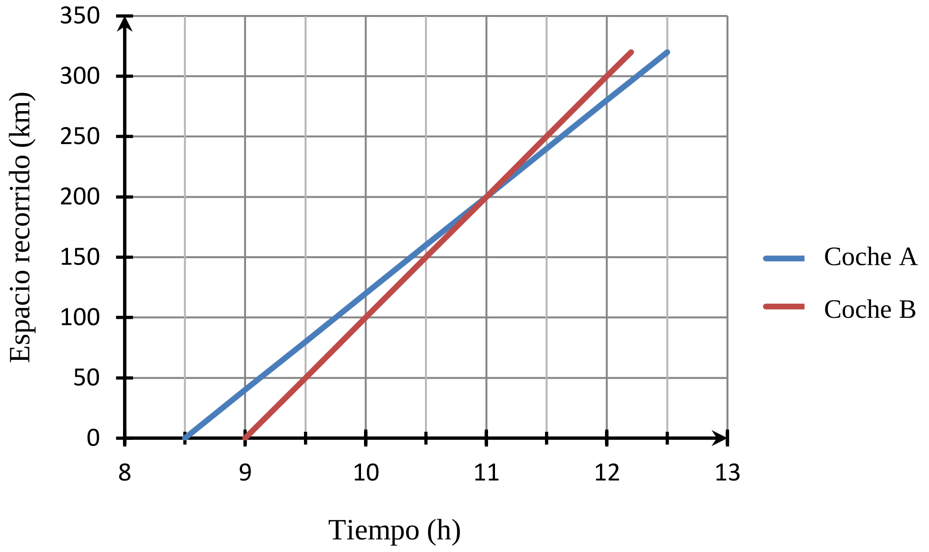
Problema 5:

Coche A:

Tiempo que pasa desde la salida (h)	1	2	3	4
Espacio recorrido (km)	80	160	240	320

Coche B:

Tiempo que pasa desde la salida (h)	1	2	3	3,2
Espacio recorrido (km)	100	200	300	320



El coche B alcanza al coche A.

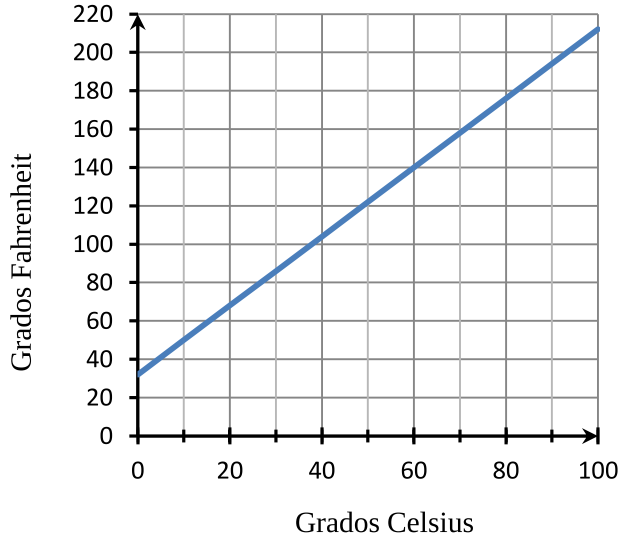
El coche A llega a Madrid a las 12:30 h y el coche B llega a Madrid a las 12:12 h.

Problema 6:

a)

Grados Celsius	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Grados Fahrenheit	32	50	68	86	104	122	140	158	176	194	212

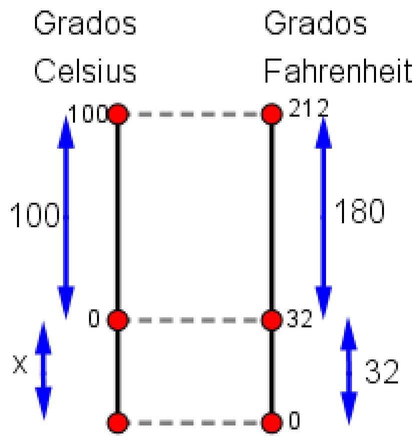
b)



c) El agua se congela a 32 grados Fahrenheit y alcanza el punto de ebullición a 212 grados Fahrenheit.

d) 100 grados Fahrenheit se corresponden con 37,7778 grados Celsius.

e)



$$180°F \longrightarrow 100°C$$

$$1°F \longrightarrow \frac{100}{180}\ °C$$

$$32°F \longrightarrow \frac{100}{180} \cdot 32\ °C$$

Por lo tanto, 0 grados Fahrenheit se corresponden con $\frac{100}{180} \cdot 32\ °C =$ 17,777778 grados Celsius bajo cero, o lo que es lo mismo, con $-17{,}777778\ °C$.

Problema 7:

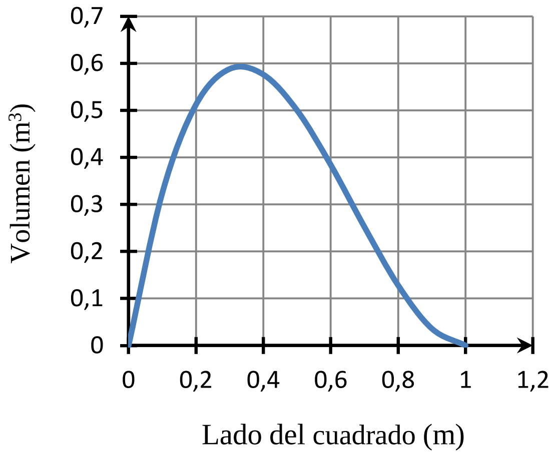
a) El lado del cuadrado que se recorta solo puede tomar valores entre 0 y 1 metros.

b) $y = x \cdot (2 - 2x)^2$

c)

x (m)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y (m^3)	0	0.324	0.512	0.588	0.576	0.5	0.384	0.252	0.128	0.036	0

d)



El volumen va aumentando conforme se aumenta el lado del cuadrado que recortas hasta un poco más de 0,3 m, después vuelve a disminuir hasta obtener un volumen nulo para $x = 1$, ya que entonces no se tiene una base para la caja y por tanto tampoco volumen.

e) Para que el volumen de la caja sea máximo el lado del cuadrado que se recorta en la esquina tiene que medir un poco más de 0,3 m pero sin llegar a medir 0,4 m.

Problema 8:

a) El estudio se ha realizado durante un año (12 meses).

b) Se han vendido más entradas en julio y agosto. Lo atribuyo a que es verano y al tener vacaciones van más personas al parque de atracciones.

c) Se han vendido menos entradas en febrero y diciembre. Lo atribuyo a que es invierno y hace frio.

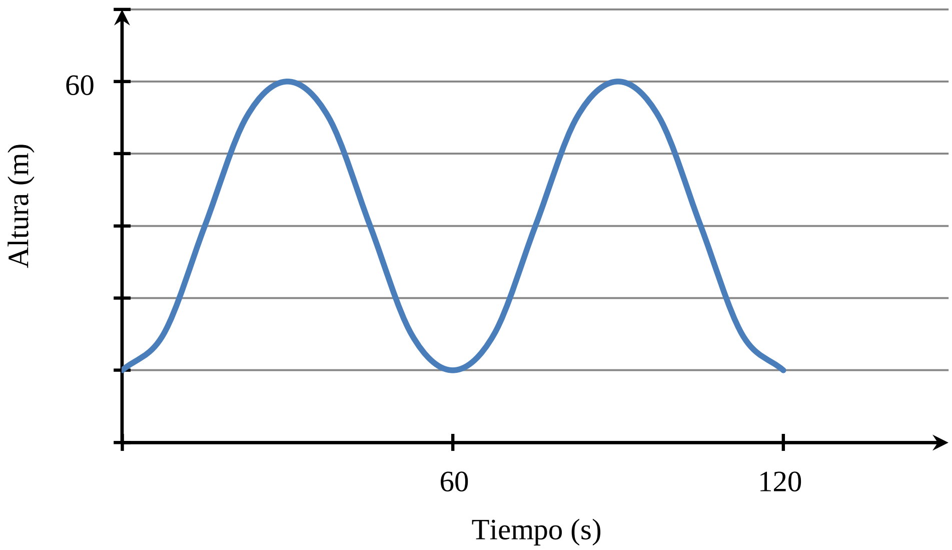
d) Meses en los que las ventas aumentan: febrero – abril y mayo – julio.
Meses en los que las ventas disminuyen: enero – febrero, abril – mayo, agosto – diciembre.

e) En mayo y en octubre.

f) En junio se vendieron 50000 entradas.

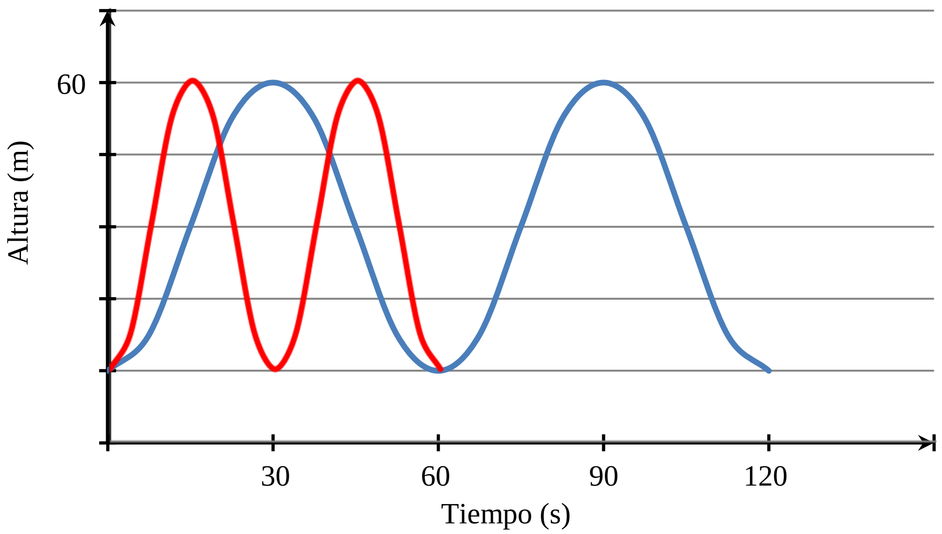
Problema 9:

a)



b) La gráfica se repite cada 60 segundos. Se trata de una función periódica de periodo T=60 segundos.

c) La nueva gráfica se repite cada 30 segundos.



d) La segunda noria da dos vueltas en la mitad de tiempo que la primera, luego el dominio es la mitad y su periodo también. La gráfica está más apretada.