

Trabajo Fin de Máster

Propuesta didáctica para la enseñanza de
funciones en 2º E.S.O

Didactical proposal for teaching functions
for 2nd E.S.O course

Autora

Elia Esteva de Andrés

Directora

Elena Gil Clemente

Facultad de Educación

Año 2019

Índice

1. Introducción	2
1.1 Definición del objeto matemático a enseñar	2
1.2 Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático	3
1.2.1 Justificación habitual de la introducción del objeto matemático.....	3
1.2.2 Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente	4
1.2.3 Efectos que produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno.....	10
2. Propuesta de aprendizaje.....	11
2.1 Conocimientos previos del alumno	11
2.1.1 Conocimientos previos necesarios	11
2.1.2 Prueba de conocimientos previos	11
2.2 Razones de ser del objeto matemático a introducir	12
2.2.1 Razones históricas que dieron origen al objeto	12
2.2.2 Problemas que constituyen la razón de ser del objeto matemático y metodología para su implementación en el aula.....	13
2.3 Campo de problemas.....	17
2.4 Técnicas.....	34
2.5 Tecnologías	41
2.6 Proceso de institucionalización	43
2.7 Secuenciación.....	44
2.8 Evaluación.....	46
3. Referencias.....	60
4. Anexos	62

1. Introducción

En la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, se especifica la contribución de la materia para el desarrollo de lo que denominan competencias clave que se definen como “las capacidades de poner en práctica de forma integrada los conocimientos adquiridos, las habilidades, aptitudes, actitudes y rasgos de la personalidad que permiten enfrentarse con éxito y eficazmente a situaciones diversas para la realización personal, la inclusión social y la vida laboral”.

El razonamiento matemático contribuye al desarrollo intelectual de los individuos, potencia la estructuración mental, y favorece la toma de decisiones justificada en argumentos fundamentados.

Entre los contenidos que se abordan en esta materia nos encontramos con pilares básicos que sustentan los cimientos del conocimiento como la aritmética o la geometría, sobre los que se apoyan otros, percibidos como secundarios, como son las funciones.

Las relaciones funcionales se encuentran en numerosos ejemplos de nuestro día a día. Comprender procesos funcionales es esencial para el análisis de lo que nos rodea con objeto, no sólo de conocerlo, sino también de preverlo, estimarlo y cuantificarlo. Estudiarlos en la etapa secundaria obligatoria, en la que los alumnos se acercan a la edad adulta, es de gran importancia, y esa es la razón por la que he escogido este objeto matemático para realizar el TFM.

Este tema engloba la institucionalización de otras muchas nociones como la proporcionalidad y el álgebra, y el trabajo de capacidades como la visión espacial y la abstracción, por lo que consideramos que es fundamental no solo en sí mismo, sino para el asentamiento de otros muchos conceptos útiles para su formación como ciudadanos.

1.1 Definición del objeto matemático a enseñar

El objeto matemático escogido es el bloque IV de Funciones en el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Los contenidos incluidos en el currículo son:

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.

- Funciones lineales: cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representación gráfica de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de la representación gráfica.
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas

1.2 Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Para estudiarlo hemos analizado:

- El Currículo oficial (Bloque 4: Funciones 2º ESO)
- Varios libros de texto habituales en España (Anaya 2000 y 2003, SM, Santillana)
- Libro de texto utilizado en Singapur con objeto de mostrar una comparativa

1.2.1 Justificación habitual de la introducción del objeto matemático

En los libros de texto habituales en España el bloque de funciones viene propuesto al final del resto de módulos. A pesar de que cuando se introduce el bloque todo el programa está impartido a excepción de la Estadística y Probabilidad y la Geometría, en su planteamiento, no se hace referencia a ninguno de ellos. Especialmente llamativo es que no se relacione con la proporcionalidad, módulo con el que está estrechamente enlazado y que es un tema central en 2º de ESO.

La introducción de las funciones suele hacerse a través de situaciones que tratarían de hacer visible su utilidad: el uso de tablas de datos, gráficos, o la relación entre variables. En ocasiones aparecen nociones históricas sobre el concepto (Imagen 1). Es habitual que vengan acompañadas de algunas preguntas (Imagen 2) con intención de hacerles reflexionar sobre las causas y los efectos de distintos fenómenos.

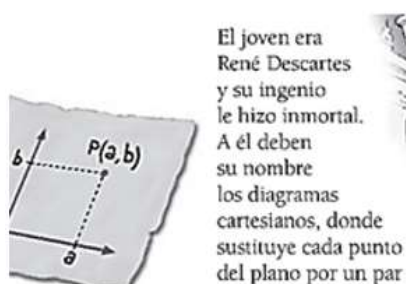


Imagen 1: Libro Anaya 2º ESO

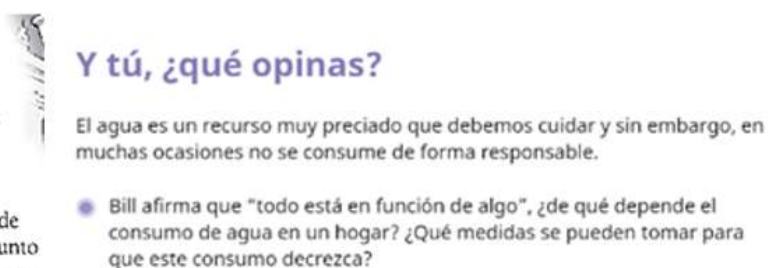


Imagen 2: Libro SM 2º ESO

Tras esta introducción que hace pensar en un enfoque más comprensivo, los libros comienzan con apartados que por lo general son similares (coordenadas cartesianas, correspondencia, tablas, gráficas, funciones lineales y otros tipos de funciones), en los que se plantean ejercicios basados en técnicas repetitivas desconectados de la citada introducción.

En el libro usado en Singapur, por el contrario, hay más coherencia entre el planteamiento y el desarrollo del tema. Se parte de la observación y análisis de situaciones cercanas, como puede ser la colocación de alumnos en clase (Imagen 3), la ubicación de un tesoro o la distancia recorrida por un camión (Imagen 4). Posteriormente, se transforma este fenómeno en imágenes, como son la representación de puntos en el plano o gráficas. Por último, se introduce la concepción abstracta del propio objeto matemático, en este caso, la función.

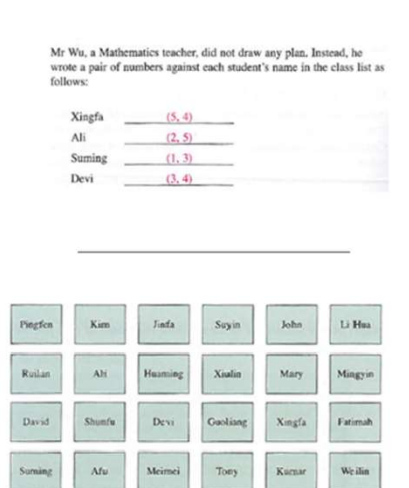


Imagen 3: Libro Método Singapur 1º ESO

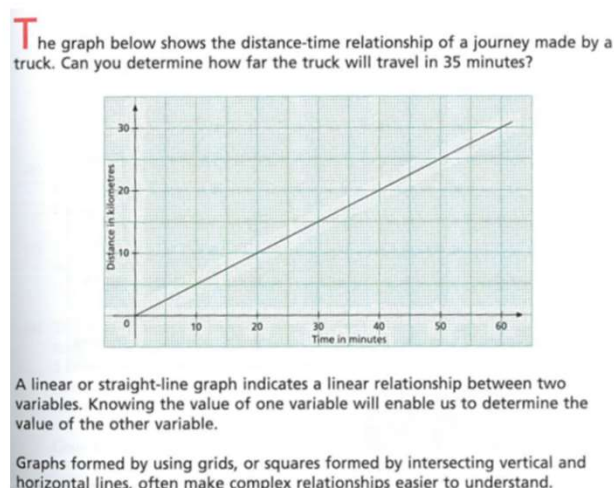


Imagen 4: Libro Método Singapur 1º ESO

Es un método mucho más fiel a los orígenes de este objeto matemático, que nace con el objeto de explicar fenómenos de la naturaleza que se repiten, con la finalidad de modelizarlos para generalizar y prever consecuencias.

1.2.2 Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente

A través del análisis de varios libros de texto habituales llegamos a la conclusión de que no existe un campo de problemas en sí mismo en la introducción de este objeto matemático, más allá de algunos problemas finales en el tema, que habitualmente se realizan a modo de repaso, si el tiempo lo permite.

La mayor parte de la enseñanza se dedica a un amplio número de técnicas descontextualizadas, justificadas a través de tecnologías en forma de definiciones de conceptos, intercaladas entre las anteriores.

Sin embargo, en el libro utilizado en Singapur, la introducción del concepto sí que parte de la presentación de un campo de problemas que, para su resolución, requiere de técnicas y tecnologías que se trabajan a continuación.

- Campos de problemas: *¿Qué tipo de problemas van a resolver?*

C1: Enunciados de la vida cotidiana, de la economía y de la física para obtener la expresión algebraica de una función a través de la construcción de una tabla y de la expresión gráfica:

Dado un enunciado, se le pide al alumno que exprese la función en su notación algebraica, para solucionar el problema indicado concreto (modelizar, analizar, prever, calcular o estimar), contestando a las preguntas que se formulan (Imagen 5 y 6)

C2: Interpretación de gráficas sobre fenómenos de la realidad:

Dada una gráfica contextualizada, se le pide al alumno que la interprete y conteste a las preguntas formuladas acerca de la misma (Imagen 7 y 8)

Santiago ha medido la temperatura en su jardín cada hora. Describe la evolución de la temperatura en el jardín a partir de la gráfica. (●●○)



Imagen 7: Libro SM2º ESO

Una flecha sigue una trayectoria parabólica. La gráfica que describe la altura de la flecha en función del tiempo es la siguiente. (●●○)



- ¿Cuál es la altura desde la que se lanza la flecha?
- ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?
- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

Imagen 8: Libro SM2º ES

- Técnicas: *¿Qué se le pide al alumno “saber hacer”?*

T1: Representar puntos en el eje de coordenadas cartesianas

- T1.1. Representar puntos en el eje dadas sus coordenadas: Dadas sus coordenadas deben ser capaces de situarlas en el eje de cartesianas y representar los puntos.
- T1.2. Identificar coordenadas a partir de su representación. Dados puntos representados en el plano deben ser capaces de indicar las coordenadas de cada uno.

T2: Distinguir relaciones funcionales de otras relaciones

T2.1 Dada una gráfica, deberán comprobar que para cada punto x existe una sola correspondencia en el eje de ordenadas y (Imagen 9).

¿Representa esta gráfica a una función?

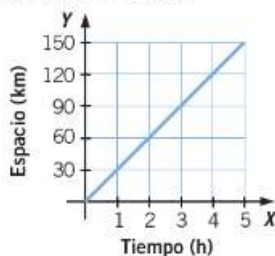


Imagen 9: Libro SM 2º ESO

T2.2 Dada una tabla de datos deberán comprobar si para un mismo valor de x hay un solo valor de y en la tabla (Imagen 10).

Estudia si estos valores son de una función.

Tiempo (h)	12	13	14	15	16	17
Altura (m)	3	6	6	9	8	7

Imagen 10: Libro SM 2º ESO

T3: Características de funciones a través de sus gráficas.

T3.1 Dominio y recorrido. Para hallar el dominio de la función deben observar qué rango de valores ocupa la coordenada x en el eje de abscisas. Para hallar el recorrido harán lo mismo con la coordenada y en el eje de ordenadas (Imagen 11)

53. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones.

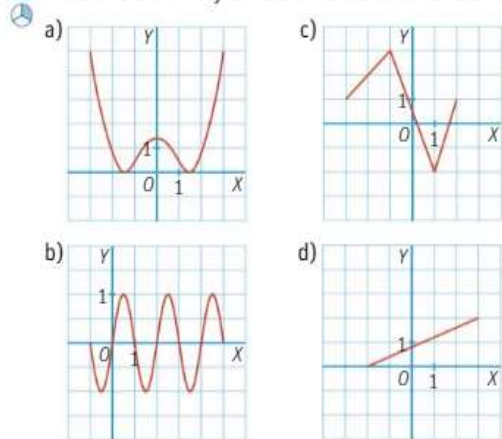


Imagen 11: Libro SM 2º ESO

56. Indica los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de cada una de las siguientes funciones.

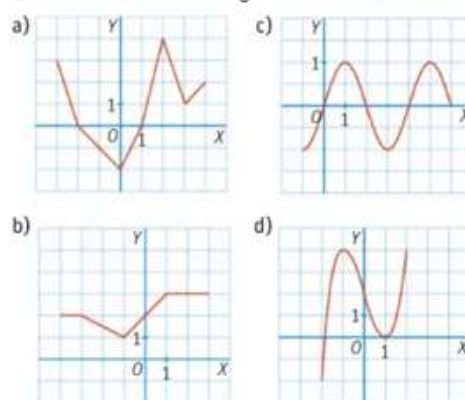


Imagen 12: Libro SM 2º ESO

T3.2 Crecimiento y decrecimiento (solo aparecen en SM). Para saber si una función es creciente o decreciente deben recorrer el eje de las ordenadas de izquierda a derecha para comprobar qué ocurre con el valor $y = f(x)$ cuando la x aumenta (Imagen 12)

T3.3 Máximos y mínimos (solo aparece en SM). Deberán observar la gráfica a la izquierda y a la derecha de manera que determinen “posibles máximos y mínimos”. Si por la izquierda del punto la función crece y por la derecha decrece, entonces diremos que el punto es un máximo (Imagen12)

T3.4 Puntos de corte con los ejes Para obtener los puntos en los que la función corta los ejes cartesianos deberán sustituir por cero el valor de cada variable en la expresión y comprobar cuál es el valor que toma la otra (Imagen 12)

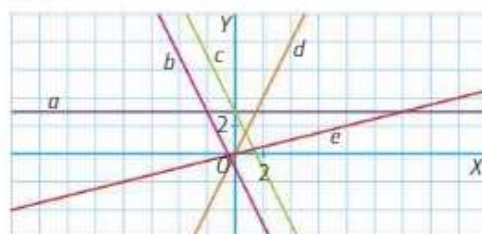
T4: Funciones lineales y afines

T4.1 Diferenciar tipos de funciones (constantes, proporcionales y afines):

T4.1.1 A partir de su expresión algebraica. En los libros de texto consultados, y así lo mantendremos en nuestra propuesta, se llama función constante a $y = k$, función proporcional a $y = mx$ y función afín a $y = mx + n$. El término lineal englobará a $y = k$ y a $y = mx$.

T4.1.2 A partir de su representación gráfica. Para ello, tendrán en cuenta características como que las funciones proporcionales ($y = mx$) pasan por el origen, las afines ($y = mx + n$) cortan al eje y en el punto $(0,n)$ donde n es la ordenada en el origen y las constantes son una recta horizontal ($y = k$) (Imagen 13)

22. Asocia cada una de las rectas con la ecuación correspondiente.



A. $y = -2x + 3$

C. $y = 2x$

E. $y = -2x - 1$

B. $y = 3$

D. $y = \frac{1}{4}x$

Imagen 13: Libro SM 2º ESO

T4.2 Hallar el valor de la ordenada en el origen de una función lineal o afín dada su expresión algebraica. Deberán calcular el valor de la ordenada en el origen sustituyendo el valor de x por cero.

T4.3 Hallar el valor de la pendiente de una función lineal o afín:

T4.3.1 Dadas las coordenadas de dos puntos: Deben calcular la variación respectiva del eje y con respecto a la variación del eje x para obtener la pendiente. (Imagen 15)

21. Calcula, en cada caso, la pendiente de la recta que pasa por los puntos indicados.
- a) $A(5, 1)$ y $B(7, -7)$
 - b) $A(-1, 3)$ y $B(4, 23)$
 - c) $A(1, 1)$ y $B(-3, 9)$
 - d) $A(0, 4)$ y $B(4, -32)$

Imagen 15: Libro SM 2º ESO

T4.3.2: Dada su expresión algebraica: Deben extraer el valor que acompaña a la x. (Imagen 16)

59. Indica la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de estas funciones y represéntalas.
- a) $y = 2x - 5$
 - b) $y = -2x - 3$
 - c) $y = 4 - 3x$
 - d) $y = \frac{1}{2}x - 1$

Imagen 16: Libro SM 2º ESO

T4.4: Relaciones entre las distintas expresiones de funciones lineales y afines:

T4.4.1 Representar la gráfica de una función dada la tabla: Dada una tabla de valores deben representarla gráficamente colocando punto a punto en los ejes de coordenadas y posteriormente uniendo los puntos (siempre que la variable pueda tomar los valores intermedios) (Imagen 14). Obtenemos una recta.

Copia y completa la tabla, y representa la función que relaciona las magnitudes.

Leche (l)	1	3	5	9	10
Precio (€)	0,65	1,95	3,25	5,85	6,50

Imagen 14: Libro SM 2º ESO

T4.4.2 Hallar la tabla de valores dada su expresión algebraica. Dada la expresión algebraica de una función, deben sustituir uno a uno los valores de x para obtener los de y, y así hallar la tabla de valores que toma la función.

T4.4.3 Representar la gráfica de la función dada su expresión algebraica: Dada su expresión algebraica, deberán aplicar la T4.4.2 sustituyendo uno a uno los valores de x para obtener los de y , y así hallar la tabla de valores de la función, para aplicar la T.4.4.1 y representarla gráficamente.

T4.2.3 Hallar la tabla de datos dada la gráfica de una función: Dada su representación gráfica, deben extraer las coordenadas de los puntos y con ello construir la tabla de datos de la función.

T4.2.5. Obtener la expresión algebraica de una dada su gráfica: Dada su gráfica, deben calcular el valor de la pendiente y de la ordenada en el origen para así extraer la expresión algebraica de la función.

- Tecnologías: *¿Cómo se justifican las técnicas?*

Aparecen únicamente definiciones de conceptos a excepción de una única relación; la que se da entre la pendiente y el crecimiento de una función lineal o afín.

- Definición de plano cartesiano
- Definición de función
- Definición de dominio de una función (Solo en SM, no en Anaya)
- Definición de crecimiento de una función (Solo en SM, no en Anaya)
- Definición de máximos y mínimos (Solo en SM, no en Anaya)
- Definición de ordenada en el origen de una función
- Definición de pendiente de una recta
- Definición y propiedades de funciones lineales
- Definición y propiedades de funciones afines
- Relación entre la pendiente y el crecimiento de una función

El libro de SM amplía los contenidos de funciones, tratando el dominio, la monotonía y los máximos y mínimos. En el libro de Anaya no aparecen estos apartados. En cuanto al resto no hay diferencias significativas en la manera de abordarlos.

En los libros utilizados en Singapur, los campos de problemas están más definidos, ya que intentan dar sentido a los conceptos que se introducen conforme surge la necesidad, involucrando un mayor número de ellos en cada tipo de problema. Estos libros relacionan conceptos vistos con anterioridad como la proporcionalidad o las ecuaciones.

Las técnicas aparecen integradas en los propios problemas y se plantean de una forma más globalizada. Por ejemplo, a la hora de introducir los tipos de funciones lineales, que

habitualmente se hace de forma separada en los libros de texto tradicionales, los libros utilizados en Singapur introducen todos al mismo tiempo, a través de los problemas, indicando que la función $y + 3 = 0$ es la función $y = mx + n$ en la que m es 0. Hablan de funciones lineales todo el tiempo, como un concepto global con casuísticas diferentes, no como conceptos distintos.

Las tecnologías aparecen como argumentos que fomentan la comprensión del alumno sobre las técnicas y problemas planteados. Por ejemplo, comienzan a trabajar el concepto de pendiente a partir de la comparación entre dos carreteras, en las que observan su inclinación, explicando que la pendiente que la representa corresponde a la razón entre la variación vertical y la variación horizontal (Imagen 17)

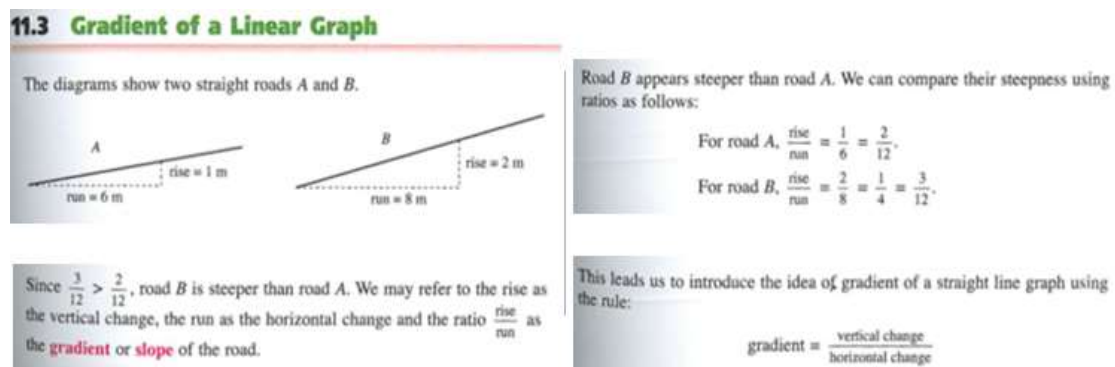


Imagen 17: Libro Singapur 1º ESO

Una vez se ha introducido el concepto, y solo cuando se ha asimilado desde su razón de ser, se proponen técnicas a modo de reglas que puedan facilitar los cálculos posteriores, como ésta mostrada en la Imagen 18, para el cálculo de la pendiente a partir de dos puntos dados:

Ben has suggested the following rule for calculating the gradient of line PQ:

$$\text{gradient of line } PQ = \frac{\text{y-coordinate of B} - \text{y-coordinate of A}}{\text{x-coordinate of B} - \text{x-coordinate of A}}$$

Imagen 18: Libro Método Singapur 1º ESO

1.2.3 Efectos que produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno

La abundancia en los libros de texto de técnicas y ejercicios repetitivos, descontextualizados de problemas que les den sentido, puede acentuar una visión de las matemáticas como una ciencia abstracta desligada de la realidad.

Félix Alayo afirma que “la orientación que tradicionalmente se da a este tema es sumamente abstracta y en la mayoría de los casos carece completamente de sentido para nuestros alumnos. Dificilmente adquirirán una comprensión global sobre los comportamientos y tendencias generales de funciones y gráficas. Cuando se les plantee una situación nueva, volverán a cometer exactamente los mismos errores que antes de iniciar el tema y la utilidad de lo

aprendido será casi exclusivamente la de superar con éxito las matemáticas escolares”, (Alayo, 1989. p.39)

La habitual ejecución sistemática propuesta por los libros de muchos ejercicios hace que se pierda de vista el sentido real del estudio de las funciones, como la comprensión de la relación entre variables. En consecuencia, los alumnos suelen trabajar con modelizaciones de la realidad en forma de expresiones algebraicas, sin ser conscientes de que lo son (por ejemplo, trabajando con la expresión de una función proporcional).

Además, “el centrarse de forma aislada en funciones afines en esta etapa hace que se pierda de vista que éstas son solo un ejemplo de entre muchas relaciones existentes, y que se produzcan respuestas similares en cualquier problema” (Fernández, Llinares, 2010, p.289).

Este habitual planteamiento, puede dificultar la comprensión del alumno.

2. Propuesta de aprendizaje

2.1 Conocimientos previos del alumno

2.1.1 Conocimientos previos necesarios

A la hora de abordar el bloque de funciones en 2º ESO es necesario que el alumno tenga los siguientes conocimientos previos, que consideramos aprendidos ya que aparecen en el currículo del curso anterior, 1º ESO.

- Representación de números racionales en la recta numérica.
- Concepto de proporcionalidad.
- Conocimientos de expresiones algebraicas y del valor numérico de estas expresiones.
- Fórmulas geométricas de áreas y volumen y relaciones físicas básicas.

2.1.2 Prueba de conocimientos previos

Haremos uso del programa Socrative Student en el que, a través de los móviles, realizarán una prueba de respuesta múltiple en el que deberán seleccionar la respuesta correcta, argumentando sus respuestas en la posterior puesta en común. En esta prueba se trabajarán todos los conceptos que hemos nombrado anteriormente.

Nos permitirá sacar una conclusión realista acerca de qué conceptos están comprendidos o cuales hay que trabajar. Podremos extraer los resultados de la prueba automáticamente, sin necesidad de esperar a la posterior sesión, y debatir sobre ellos en el aula, permitiéndonos aclarar

los conceptos que generen confusión. Lo haremos proyectando los resultados de forma anónima de manera que nos permita hablar de “respuestas erróneas” en el aula, sin tener que dirigirnos a los estudiantes concretos. Esta prueba puede verse en el Anexo I.

2.2 Razones de ser del objeto matemático a introducir

Una de las contribuciones clave de las matemáticas es ayudarnos a conocer y analizar el mundo que nos rodea y ese es el principal motivo para enseñar las funciones: conocer las relaciones entre magnitudes en campos relevantes para el conocimiento del mundo, y que conecten con temas que ellos estudian.

Las funciones modelizan el comportamiento del mundo, y a través de su estudio podremos predecir a corto y largo plazo posibles consecuencias ante nuevos cambios, razón fundamental para realizar un profundo trabajo con ellas.

Analizaremos relaciones en el mundo de la física a través de las leyes del movimiento, relaciones entre magnitudes geométricas como áreas, perímetros y longitud de los lados y relaciones en el campo de la economía.

2.2.1 Razones históricas que dieron origen al objeto

Las razones de ser de esta propuesta se encuentran en la línea de las razones históricas que dieron origen a la aparición del objeto matemático, la comprensión entre la relación entre dos magnitudes cambiantes en las que existe una interrelación causa efecto, en ámbitos geométricos y físicos principalmente.

Aunque el concepto de función ha sufrido una intensa evolución a través de más de 2000 años, desde los primeros atisbos de su aparición, ha estado ligado a estudios sobre diversos casos de dependencias entre cantidades de diferentes magnitudes.

Destacamos por su importancia y significatividad, tres momentos en la historia, en el que se reconocen nuevas expresiones funcionales que aportan nuevos conocimientos para la creación del concepto actual de función:

- *Primeras tablas de datos:* En Babilonia se presentan las primeras representaciones de lo que hoy denominamos “funciones expresadas en tablas de datos”. Tablillas de arcilla, con filas y columnas repletas de números, relacionados entre sí, como las primeras ternas pitagóricas.

- *Primeras representaciones gráficas de funciones:* En 1361, con Nicolas Oresme comienza, lo que hoy denominamos, la representación gráfica de las funciones, mostrando “intensidades” de una magnitud dependiente de otra, caracterizada por su carácter más cualitativo que cuantitativo.

- *Primeras expresiones algebraicas:* Durante los siglos XV y XVI, se desarrolla la notación algebraica de las funciones, en el campo de la física (movimiento, aceleración, velocidad y espacio recorrido). En el siglo XVII comenzó a desarrollarse la geometría analítica como método de expresión de las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de coordenadas. Por primera vez se sostiene la idea de que una relación algebraica entre x e y es un medio para construir la dependencia entre dos cantidades variables, de manera que permite el cálculo de una de ellas correspondiente a través de los valores dados de la otra.

Euler comienza a utilizar el término “expresión analítica” y utiliza $f(x)$. Posteriormente, Lagrange (1736-1813) y Dirichet (1837) se aproximan a las definiciones actuales de función cómo esta: *“Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x ”*.

Poco a poco, se libera al concepto de función de la exclusividad de la intuición geométrica.

Queremos, por tanto, que el estudio de las funciones ayude a generalizar y modelizar relaciones y así poder realizar análisis sobre lo sucedido, y estimaciones y predicciones sobre lo que sucederá. Comenzaremos con un análisis cualitativo, estudiaremos gráficas y obtendremos las expresiones analíticas y algebraicas de las mismas, tal y como vino sucediendo en la historia de su creación y descubrimiento.

2.2.2 Problemas que constituyen la razón de ser del objeto matemático y metodología para su implementación en el aula

Comenzaremos a trabajar a partir de situaciones y problemas que requieren el uso de distintas representaciones y el paso de unas representaciones a otras.

La metodología para la implementación de estos problemas siempre partirá de una reflexión, primeramente, individualizada, para, posteriormente, generar debate en el aula. Trabajaremos siempre que sea posible en grupos heterogéneos de tres o cuatro alumnos, fomentando la comunicación y pidiéndoles que razonen tanto las respuestas escogidas como las que no consideran correctas, justificando sus decisiones. De esta manera, aseguraremos su comprensión y fomentaremos razonamientos congruentes.

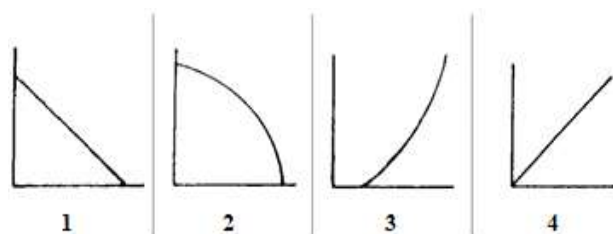
El docente guiará para que sean ellos mismos los que resuelvan, uno a uno, los problemas de forma razonada. El objeto de estos ejercicios introductorios es darle sentido a la aparición de las funciones, mostrando su utilidad y aplicabilidad.

Para ello planteamos cinco problemas, todos ellos contextualizados con el objeto de que comprendan que la variación en una de las magnitudes produce cambios en la otra, a través de un planteamiento y cuestiones que les hagan pensar.

En los *dos primeros*, trabajaremos la relación entre variables y sus representaciones gráficas en ejes no graduados.

Los *tres siguientes* mostrarán relaciones funcionales en los tres ámbitos sobre los que queremos contextualizar el estudio de funciones: la economía, geometría y física, campos estudiados por los alumnos en otras materias. En todos ellos se trabajará la modelización de una situación a través de gráficas y de la expresión algebraica.

Problema 1: Aquí tenemos cuatro situaciones expresadas verbalmente y cuatro gráficas. Relaciona cada situación con cada una de las gráficas, y explica tus decisiones.



- Ganancias de una empresa que comienza y evoluciona positivamente (meses / ganancias)
- Precio que pagaremos según peso de las judías (kg de judías / coste)
- Agua del depósito a medida que nos vamos duchando todos en casa (número de personas / agua en el depósito)
- Distancia al destino si mantenemos una velocidad constante en el viaje (minutos, distancia al destino)

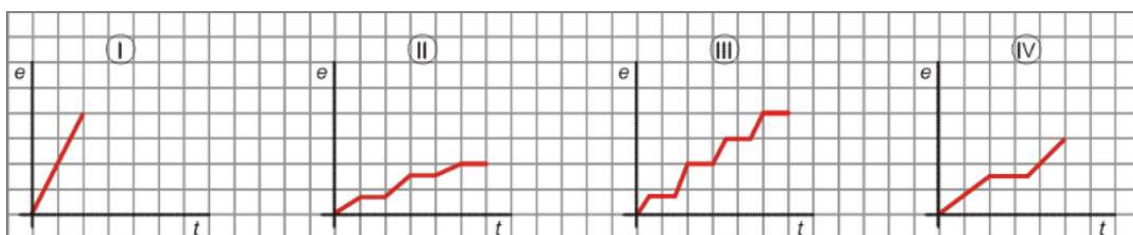
Pretendemos comenzar con un análisis gráfico cualitativo con objeto de que reflexionen sobre la relación entre dos variables. Planteamos un ejercicio que no requiera cálculos con objeto de que puedan resolverlo, sin necesidad de conceptos previos. Fomentaremos así, la comprensión de las relaciones de forma global, reflexionando acerca de qué ocurre con una variable cuando la otra aumenta (o disminuye), razonando sobre la situación y no calculando aisladamente punto a punto para representarlos, ya que así perderían el contexto y el significado.

Se prevé que la discusión en el aula esté entorno a la distinción de las gráficas 1 y 2 con las situaciones c y d, y las gráficas 3 y 4 con las situaciones a y b. Suponemos que no tendrán dificultades a la hora de identificar las funciones crecientes (ganancias de empresa y coste de judías) de las decrecientes (agua y distancia al destino). Sin embargo, sí aparecerán muy probablemente cuanto tengan que discernir entre la función lineal de la que no lo es. Plantearemos, entonces, preguntas que guíen su razonamiento cómo si el nivel de beneficios es

regular y crece en la misma medida cada mes, por ejemplo, o cómo lo hace el precio de las judías, que es fijo por cada kilo comprado.

Problema 2: Dadas estas gráficas y las situaciones que relatamos, identifica cada gráfica con cada situación justifica tus decisiones.

- Recorrido realizado por un autobús urbano.
- Paseo en bicicleta por el parque, parando una vez a beber agua.
- Distancia recorrida por un coche de carreras en un tramo de un circuito.
- Un cartero repartiendo el correo.



En este problema se les exige que razonen las relaciones con una variable que no aparece en los ejes, la velocidad. Prevemos que las dificultades aparezcan a la hora de discernir entre las gráficas II y III con las situaciones a y d. Para ello les invitaremos a que reflexionen en el espacio recorrido en el mismo tramo de tiempo en ambas, lo que posteriormente definiremos como constante de proporcionalidad en esos tramos, la pendiente, que en este caso representará la velocidad.

Problema 3: Las imágenes de este ejercicio aparecen en el Anexo 2.

Problema extraído de la plataforma DESMOS (¹) en el que, partiendo de una imagen de dos sets de lego, uno valorado monetariamente y otro no, se les pide, en primer lugar, una estimación del coste del set no valorado inicialmente.

Posteriormente, aparecen unos ejes de coordenadas que reflejan el precio en dólares (y) en función del número de piezas (x) y se les invita a dibujar la gráfica que representa esta relación y explicar por qué la han dibujado así.

En la siguiente pantalla, el sistema muestra los resultados de varios sets de lego y te ofrece una recta para que la coloques de manera que pueda modelizar esa relación.

¹ Plataforma

Desmos <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/57e563aa072703f509160cc2#preview/f1319cb6-f972-4fed-a524-0aeebc97e74c>

Te muestra tu estimación anterior y la expresión algebraica que correspondería y con la nueva información, te pide que vuelvas a estimar un valor para el set. Y muestra tu nueva estimación con respecto a la realidad.

El sistema pide, entonces al alumno que identifique y explique qué significa en términos de piezas de lego ese valor de la constante de proporcionalidad (en este caso 0,125) (más adelante sabrán que se refiere a la pendiente)

En la última pantalla aparece un video en el que se ve cómo se monta el set y cómo aumenta el precio progresivamente a medida que aumentan las piezas.

Este problema da sentido a la aparición de las funciones, mostrando nuestra necesidad de estas para la ejecución de predicciones en una situación contextualizada.

Problema 4: En un colegio quieren imprimir el logo de olimpiadas en las camisetas de sus alumnos. Para ello, la directora ha pedido presupuesto en dos tiendas de la zona. En la tienda A el coste es de 6 € por camiseta impresa las diez primeras camisetas, y 3€ a partir de las siguientes. En la tienda B el coste es de 6 € por camiseta las primeras veinte impresas, y a partir de la siguiente, 1,5 € por camiseta.



- Estima sin realizar previamente una tabla de datos, un gráfico aproximado que represente la relación entre el número de camisetas y el coste para cada una de las tiendas.
- ¿Has representado esas relaciones con líneas rectas o no? ¿Por qué?
- A partir del enunciado, obtén ahora una tabla de valores para ambas tiendas.
- ¿Cuál de ellas elegiremos si queremos imprimir 9 camisetas? ¿Y 19? ¿Y 25?

A través de este problema, realizarán una comparación de dos situaciones y decidirán sobre la conveniencia de cada una de ellas, dándose cuenta de que, a partir de un número determinado de camisetas, es más conveniente una de las dos tiendas, y para cantidades inferiores, la otra.

Problema 5: En una granja donde tenemos vacas, disponemos de 20 metros de alambre y queremos vallarles un terreno rectangular. ¿Cómo podríamos distribuir la valla para que nuestras vacas dispongan de más terreno? Reflexiona sobre ello, y coméntalo posteriormente con tus compañeros.



- a. ¿Qué ocurrirá con el espacio si hacemos muy pequeño uno de sus lados, por ejemplo, uno o dos metros?
- b. ¿Y si fijamos igualdad en los cuatro lados del rectángulo?
- c. Escoge ahora tú un valor intermedio y observa qué ocurre con la superficie que les queda a las vacas.
- d. ¿Podrías dibujar en una gráfica aproximadamente cómo representaríamos la longitud de los lados y el área del recinto?

En este problema pretendemos que reflexionen acerca de qué ocurrirá con el área a medida que vamos modificando la longitud de los lados con perímetro constante, deduciendo, a través de pruebas, que el máximo área de un rectángulo será el cuadrado, el caso en el que sus lados coincidan en longitud. Verán que la modelización de una función no solo te permite calcular valores de una variable dados los de otra, sino que te aporta una visión general de la que puedes extraer relevantes conclusiones.

2.3 Campo de problemas

A través de estudios realizados (Shell Centro, 1990), sabemos que existen verdaderas dificultades derivadas de la representación punto a punto a través de ejes cartesianos graduados, forma en la que se introducen las funciones en secundaria. Estos estudios relatan lo beneficioso de un primer análisis cualitativo, que no es habitual salvo, quizá, en las primeras edades, a través del cual comprendan qué es una relación funcional entre dos variables y que prepare a los estudiantes para la interpretación y construcción de gráficas a partir de cierta información.

Por todo ello, en la propuesta que hacemos en este proyecto, partiremos de un comienzo del trabajo cualitativo de las funciones, que posteriormente se simultaneará con el tratamiento cuantitativo habitual. Esta introducción permitirá a los alumnos conocer de una manera más amplia las relaciones funcionales, sin ceñirse a los tipos de funciones concretas que es habitual estudiar. De esa manera le daremos sentido a la introducción del objeto matemático en el aula.

Estableceremos *cuatro campos de problemas* que a su vez delimitarán las fases del aprendizaje: la interpretación y representación de funciones, la modelización de fenómenos antes de conocer las propiedades de distintas funciones con objeto de darle sentido al bloque, la introducción de las funciones lineales a través de un concepto conocido por ellos como es la proporcionalidad y, por último, problemas de aplicación completos, en los que se integrarán técnicas y tecnologías aprendidas. El alumno irá construyendo el concepto de función a través

del planteamiento de situaciones y problemas que requieren el uso de distintas representaciones, y la transformación de unas en otras.

Una vez planteado cada campo de problemas, se afianzará la ejecución y control de destrezas para resolverlos, a través de ejercicios que contendrán un porcentaje alto en técnicas necesarias para ello. Las tecnologías surgirán al mismo tiempo que las técnicas como justificación de éstas, en los propios campos de problemas y a través de ellas se institucionalizarán los contenidos de la unidad.

Abordaremos los campos de problemas en grupos heterogéneos de dos o tres alumnos, fomentando el debate entre ellos. Una vez los grupos vayan llegando a un consenso, reflexionaremos conjuntamente todos sobre las posibles soluciones, válidas o no. EL profesor estará presente como guía para los alumnos, realizándoles preguntas que les hagan pensar.

Para los problemas C1B.4, C1B.5 y C1B.6 haremos uso de las TIC, en los dos primeros GeoGebra y en el C1B.6 los teléfonos con el objeto de encontrar la información que nos piden.

Una vez que se haya generado debate, que esperamos que sea rico, acerca de las opciones y se haya llegado a un consenso en el aula, el profesor institucionalizará distintos conceptos que anotarán en sus cuadernos, como los distintos tipos de funciones, la proporcionalidad, o el crecimiento, para que posteriormente puedan consultarlos, revisarlos y trabajarlos.

C1: Campo de problemas 1: Interpretación y representación de puntos en el plano y de gráficas.

A través de este tipo de actividades pretendemos analizar y conseguir la comprensión del concepto de función, generando destrezas que permitan al alumno desarrollar lo que podríamos denominar un “sentido de las funciones” (lo asemejaríamos al sentido numérico), a través del trabajo habitual con la expresión gráfica de relaciones expresadas verbalmente primeramente en unos ejes no graduados. Enumeramos el tipo de problemas con los que nos encontraremos:

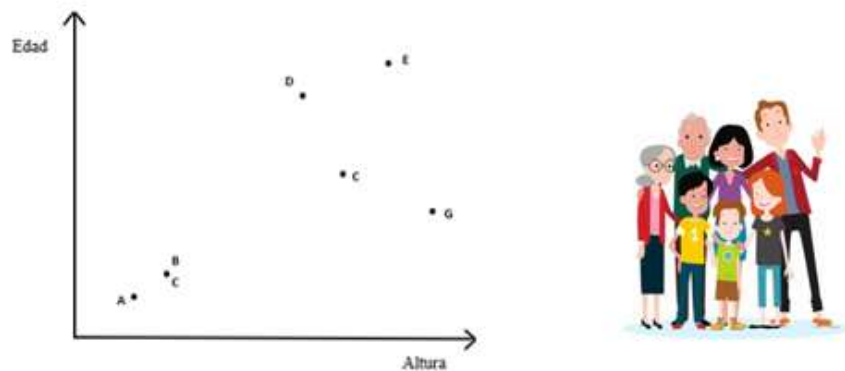
C1A. Interpretación de puntos en el plano.

Se presentan unos ejes de coordenadas en el que tan solo se muestran los puntos y los nombres de las variables y se pide que lo interpreten, identificando los puntos o respondiendo a las preguntas que se les enuncian.

En este tipo de problemas los alumnos deberán ser capaces de interpretar puntos en el plano a través de ejes no graduados. Es frecuente comenzar situando un punto por sus coordenadas, y en este tipo de ejercicios no podrán hacerlo de esta manera. Eliminando las coordenadas, favoreceremos la comprensión de la relación entre variables. Además, los ejes

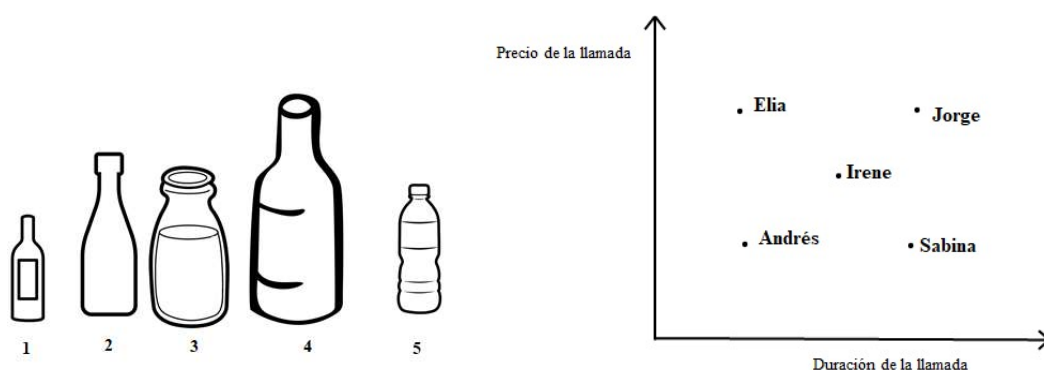
vienen intercambiados en muchos de los casos con respecto a lo que es habitual, para que deban fijarse en qué información nos dan.

C1A.1: Puedes observar un dibujo de una familia que está representado en el eje de coordenadas de su izquierda. Identifica a cada miembro de la familia en los ejes. Fíjate en qué variable viene representada en cada eje y contesta a las preguntas razonando el porqué de tu respuesta:



- ¿Quién es mayor, la abuela o el abuelo?
- ¿Quién es mayor, la niña o el niño que lleva un número uno en la camiseta?
- ¿Quién es mayor, la madre o el padre?

C1A.2: Tenemos varias botellas que vamos a almacenar. Para ello necesitamos colocarlas por orden de altura o anchura en nuestras estanterías. Coloca cada botella en los ejes en forma de punto para que podamos verlo. Fíjate qué representa cada eje.

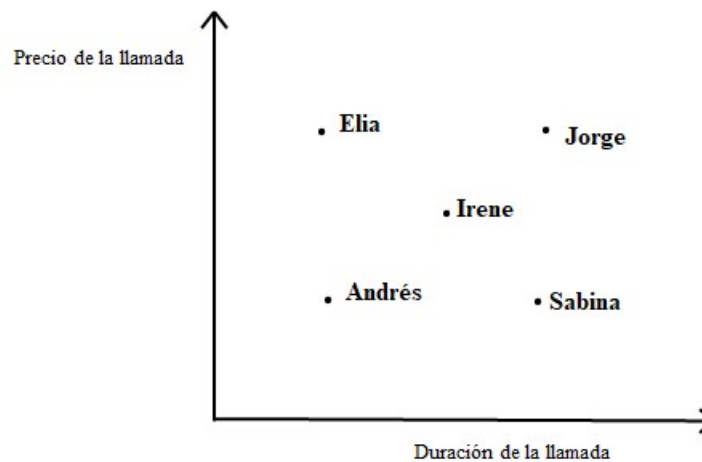


Además, contesta a las siguientes preguntas razonando el porqué de tu respuesta:

- ¿Las hubieras colocado igual si los ejes estuvieran intercambiados?
- ¿Podría estar alguno de los puntos sobre los ejes?

- c. ¿Dónde encontraremos la botella más alta? ¿Y la más ancha? ¿Hay alguna botella que es, a su vez, más ancha y alta que todas?

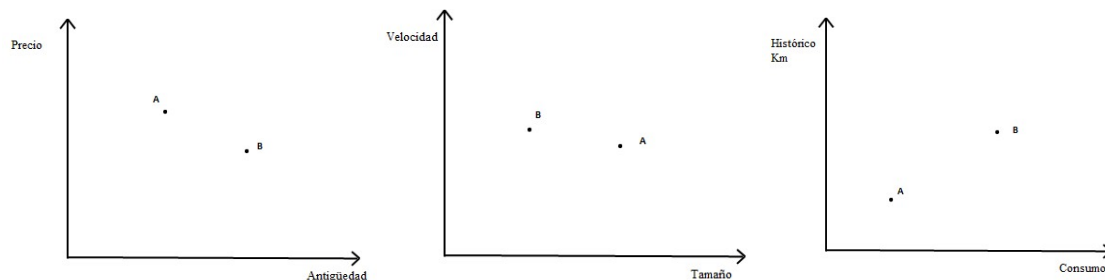
C1A.3: Este gráfico muestra las llamadas telefónicas de un fin de semana desde un mismo lugar. En los ejes aparece el precio de la llamada y la duración, pero no si los destinos fueron nacionales o internacionales. Contesta a las preguntas razonando el porqué de tu respuesta:



- Di uno que sepas que hizo una llamada internacional
- Di uno que sepas que hizo una llamada local
- ¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente?
- Si hicieras una llamada, ¿dónde preferirías que estuviese el punto que te representase?

En este problema, se pregunta por una variable de la que no se dan datos, el carácter de la llamada. Esto les ayudará a comprender cuánta información podemos extraer de una gráfica.

C1A.4: Las siguientes gráficas describen características de dos coches. Un turismo y un monovolumen. Contesta a las preguntas razonando el porqué de tu respuesta.



- ¿Qué coche es más antiguo? ¿El turismo o el monovolumen?
- ¿Verdadero o falso?
 “El vehículo más antiguo adquiere menos velocidad”
 “El vehículo con más capacidad mantiene un histórico de Km mayor”
 “El vehículo más pequeño consume más”

“El vehículo más nuevo consume más”

C1B: Interpretación y representación de gráficas.

En este apartado se presentan varios tipos de problemas. El primero en el que deben representar gráficamente las situaciones que se les describen, para lo que deberán analizar cómo varía una variable con la evolución de la otra. En un segundo tipo se les pide que asocien gráficas a situaciones dadas. En estos ejercicios se les presentarán varios tipos de funciones de manera que su visión sea global, aunque luego solo se trabajen detalladamente las funciones lineales en este curso. Finalmente, comenzaremos con la introducción de problemas cuantitativos de representación de funciones, en los que les pediremos que estimen primeramente la forma de la gráfica, cerciorándose, posteriormente, de si es correcta a través de los valores de las variables.

C1B.1: Muestra en una gráfica las siguientes situaciones

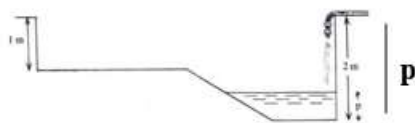
- a. Cuánto más rápido corra, antes llegaré al colegio (Ejes de representación: velocidad, tiempo)
- b. Si somos más personas para recoger naranjas, acabaremos antes (Ejes de representación: número de personas, tiempo)
- c. “Cuándo voy a correr, los primeros 10 minutos comienzo a andar cada vez más rápido, hasta que empiezo a trotar y cuando llego a una velocidad la mantengo otros 10 min, después hago un sprint y finalmente voy bajando el ritmo hasta que continúo andando y freno. (Ejes de representación: distancia recorrida, tiempo)
- d. Cuánto más pago, más disminuye mi deuda (Ejes de representación: Pago y deuda)
- e. Un viaje en tren consta de 3 paradas y puede llevar 100 personas. En la primera se bajan 20 y suben 3; en la segunda se bajan 30; en la tercera se bajan 20 y suben 2; la última parada es el final del trayecto (Ejes de representación: Número de pasajeros, tiempo).
- f. Un aparcamiento cobra 2 € por hora y nosotros estamos 6 horas y media (Ejes de representación: Tiempo, coste)

C1B.2: Se está rellenando la siguiente piscina con una manguera que vierte agua con un caudal constante. A continuación, se muestra una sección transversal de la piscina.



Describe con palabras cómo varía con el tiempo la altura p. A continuación, construye un gráfico que muestre aproximadamente lo que has descrito antes con palabras.

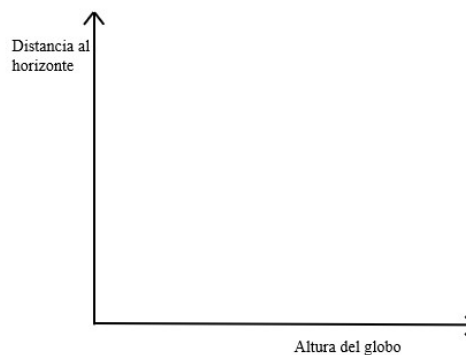
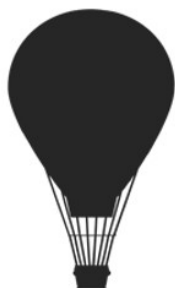
Una piscina rectangular diferente se llena de una manera similar:



Haz una gráfica que muestre cómo varía con el tiempo la altura p que alcanza el agua. Supón que la piscina tarda 30 minutos en llenarse hasta el borde.

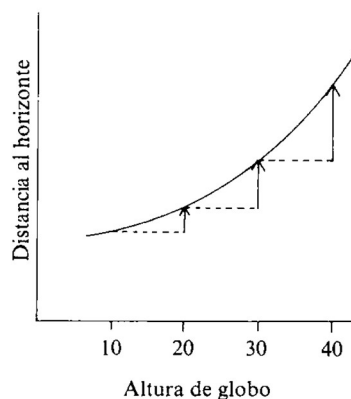
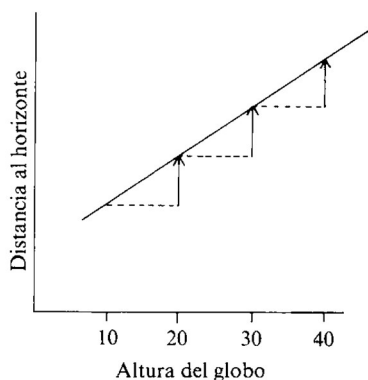
C1B.3: ¿Hasta dónde podemos ver cuando viajamos en globo? Luis ha tomado los siguientes datos hace unos días cuando viajaba en globo por una zona bastante llana.

Altura del globo (metros)	Distancia al horizonte (Km)
5	8
10	11
20	16
30	20
40	23
50	25
100	33
500	80
1000	112



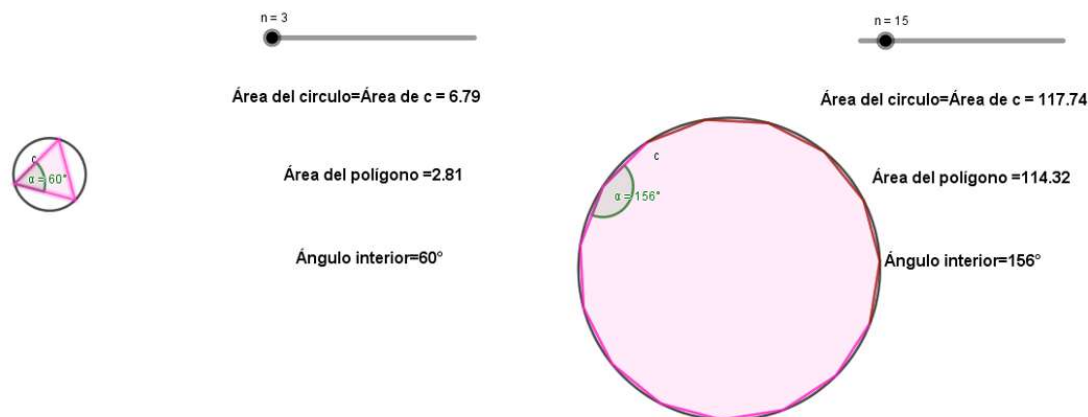
Sin marcar los puntos exactamente, intenta realizar una gráfica aproximada que describa la relación entre la altura del globo y la distancia al horizonte (Fíjate en los ejes)

¿A cuál de las siguientes imágenes se parece más la gráfica que has diseñado? Fíjate para ello, si la distancia al horizonte aumenta de forma constante o no.

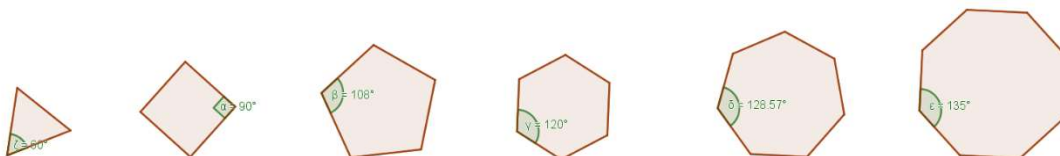


C1B.4: Entra en el archivo de GeoGebra “Diferencia entre el área del polígono inscrito en la circunferencia y el área de la circunferencia según el número de lados del polígono” y mueve

el deslizador para comprobar cómo varían las áreas del polígono y la circunferencia a medida que aumentamos o disminuimos el número de lados. Representa gráficamente cómo varía la diferencia de estas áreas a medida que aumentamos el número de lados del polígono inscrito en la circunferencia.



C1B.5: Representa en una gráfica la medida de cada ángulo interior de un polígono regular en función del número de lados. Para ello genera en GeoGebra distintos polígonos regulares y obtén la medida de sus ángulos interiores.



C1B.6: Obtén el historial de temperaturas medias mensuales en Zaragoza durante un año y represéntalas en un gráfico. ¿En qué mes se alcanzaron temperaturas máximas y mínimas? ¿Cuáles fueron? (Para esta actividad pueden usar el móvil)

C2: Campo de problemas 2: Uso de funciones para modelizar situaciones

En este tipo de problemas daremos información en forma de texto y construiremos la expresión algebraica que representa la relación entre las variables. No solo trabajaremos con funciones lineales, sino que lo haremos con otro tipo de funciones. (proporcionales, afines, de proporcionalidad inversa o cuadráticas). El objeto es que comprendan las relaciones funcionales, aprendan a analizar la situación y a transformarla en la expresión algebraica. Pretendemos que encuentren la expresión que relaciona las dos variables sin conceptos previos ni técnicas para ello. Éstas se verán posteriormente, una vez hayan asimilado el sentido o la razón de ser de éstas a través de este tipo de problemas. Por la ausencia de conocimientos previos, será imprescindible

la labor del docente como guía en la resolución de estos problemas. En el anexo III se puede ver una posible forma de resolución en el aula, en la que se detallan los razonamientos que se propiciarán.

C2.1: (Función lineal o de proporcionalidad) En una clase de 28 alumnos, se realiza una prueba de matemáticas de 18 preguntas. El profesor le pide a Jorge que corrija las pruebas de sus compañeros con las siguientes condiciones:

- Las preguntas podrán calificarse como correctas o incorrectas, sin términos intermedios
- Todas tendrán el mismo peso en la calificación global
- Las notas deberán expresarse con un número entero entre 0 (mostrará que no ha habido ningún acierto) y 10 (mostrará una prueba con todas las preguntas correctas)

Obtén una forma general de calcular la calificación de cada uno de ellos sabiendo el número de respuestas correctas, sin necesidad de ir uno por uno. Conocidas las notas de nuestros compañeros, ¿podremos hallar los aciertos de cada uno?

C2.2: (Función lineal o de proporcionalidad) Disponemos de las medidas de un grupo de 40 niños expresadas en metros. Necesitamos expresarlas en centímetros, ¿Cómo podemos transformar nuestras medidas en centímetros de forma general sin necesidad de ir una por una?

C2.3: (Función cuadrática) Halla el área de distintos cuadrados de lados: 2,6,10 y 15 cm. Conocidas las medidas de los lados de un cuadrado, ¿cómo podemos obtener su área? ¿Cómo obtienes una forma general?

C2.4: (Función lineal o de proporcionalidad) Si sabemos que un coche puede viajar a 150 km/hora. ¿Cómo podemos averiguar cuántos metros recorre cada segundo?

C2.5: (Función afín) Irene ha ahorrado 18 € y cada semana ahorra 6 € más. Andrés tiene 146 € y cada semana gasta 8 €. ¿Cuántas semanas tienen que pasar para que Irene y Andrés tengan el mismo dinero?

C2.6: (Función afín) En una compañía de autobús el precio del billete sufre una recarga para maletas con peso superior a 5 kg. El billete cuesta 35 €. La recarga es de 7 € por kg. ¿Cómo podemos calcular el precio del billete dados los kg de las maletas?

C2.7: (Función lineal o de proporcionalidad) Francho tiene en su casa un circuito de trenes en miniatura. A las 17h pone en marcha uno de los trenes y a las 17h y 10 min ha hecho 20 vueltas al circuito. Si detiene el tren a las 10 h 23 m ¿cuántas vueltas al circuito habrá dado? ¿Cuánto tiempo habrá pasado si ha dado 100 vueltas?

C2.8: (Función de proporcionalidad inversa) Tenemos un rectángulo hecho de papel cuya área es 20 cm². Con este mismo rectángulo queremos construir otros de diferentes medidas, pero manteniendo la misma área. ¿Cuánto tendrán que medir sus lados?

C3: Campo de problemas 3: Funciones lineales y afines

Una de las situaciones más conocidas por parte de los estudiantes de 2º ESO es la proporcionalidad. La proporcionalidad, tal y como ya se ha introducido en el campo de problemas C2, se modeliza a través de funciones lineales y $y=mx$. Aprovecharemos el conocimiento de esta relación de proporcionalidad para estudiarla más en profundidad, extenderla a relaciones de proporcionalidad con cantidad inicial, e introducir conceptos como tipos de variables (discretas o continuas), o pendiente como razón entre variables en dichas funciones lineales.

Este campo de problemas se introduce tras haber visto en el aula técnicas de representación, y de características de funciones a través de su gráfica.

C3A: Obtención de funciones a partir de enunciados.

A partir de situaciones de proporcionalidad directa, estudiaremos esta relación básica entre magnitudes, en esta ocasión utilizando un lenguaje funcional.

C3A.1: El precio de un bolígrafo en la papelería cercana es de 0,30 €.

- a) Calcula el coste de comprar estos bolígrafos: 1,2,3,4,5,7,8. Genera una tabla de datos.
- b) Representa gráficamente los puntos de la tabla.
- c) Fíjate en la gráfica, ¿cuánto cuestan 16 bolígrafos? ¿Cuántos bolis te dan por 3,60€?
- d) ¿Tiene sentido unir los puntos de la gráfica? ¿Por qué?

C3A.2: Queremos comprar patatas a 0,30 € el kilo.

- a) Calcula y anota en una tabla los precios que pagaremos si compramos los siguientes kilos de patatas: 1, 1,5, 2, 2,7, 4,5,7.
- b) Representa gráficamente los puntos de la tabla.
- c) ¿Tiene sentido unir los puntos de la gráfica? ¿Por qué?

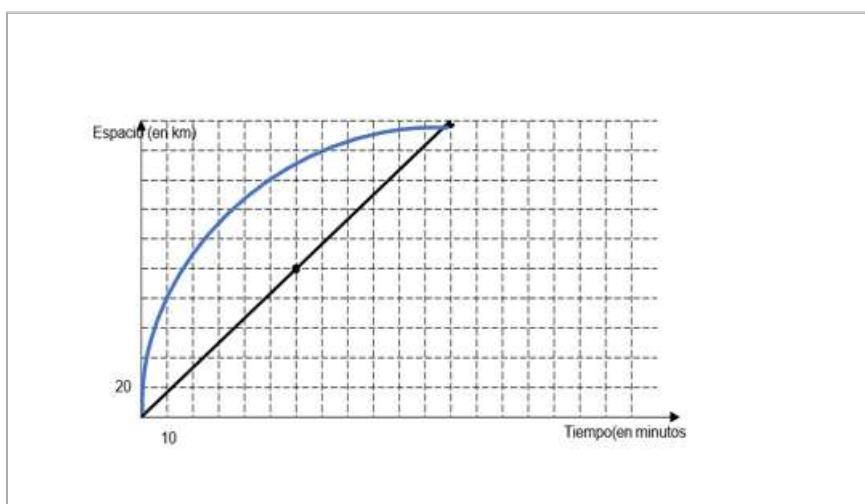
Hay una importante diferencia entre ambos ejemplos: no podemos comprar fracciones de bolígrafos (1,5 o 2,7 bolígrafos) y en cambio sí podemos comprar fracciones de kilos de patatas (1,5 o 2,7 kilos de patatas). En este momento se hablará en el aula del concepto de función discreta y continua.

C3B: Relación entre pendiente y constante de proporcionalidad.

A través de estos problemas introduciremos y finalmente institucionalizaremos el concepto de pendiente, que aparecerá como variación de una variable (y) con respecto a la otra

(x) en forma de velocidad, precio por kilo o el precio por m² en la vivienda. De esta manera daremos sentido a la aparición del concepto de pendiente como constante de proporcionalidad, que se extiende posteriormente a funciones afines $y = mx + n$, donde la proporcionalidad se produce entre x e (y-n)

C3B.1: Dos familias comienzan sus vacaciones de camino a la costa en coche. La siguiente gráfica muestra el viaje de ambas familias, uno representado en azul y otro en negro. Ambas recorrerán un total de 200 km. El eje horizontal representa el tiempo de viaje (en minutos), y el eje vertical, el espacio recorrido (en kilómetros).

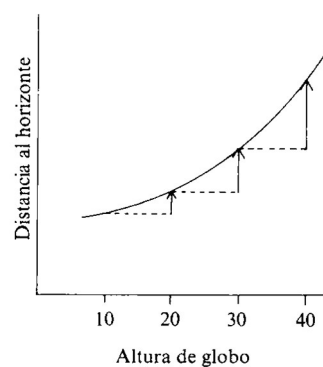
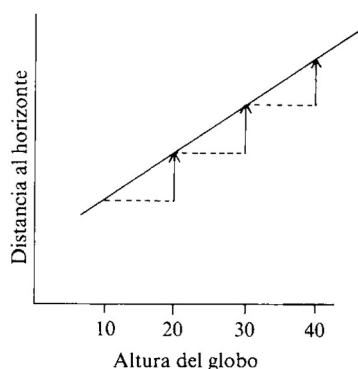


- Asigne a la variable tiempo los valores 10, 20, 40, 60, 80 y 120. Anota en tu cuaderno el espacio recorrido aproximado en cada caso para cada familia.
- ¿Qué velocidad media ha llevado cada una de las dos familias en el total del recorrido?
- Calcula otras velocidades medias en intervalos distintos para cada familia.
- ¿Cómo describirías la diferencia entre los viajes realizados por las dos familias?

En este ejercicio guiaremos a la clase para que observen que, si el cociente entre el espacio y el tiempo es constante en cualquier intervalo, las dos variables son directamente proporcionales y la función es lineal. Y en este caso, la constante de proporcionalidad representa la velocidad media del coche en el trayecto total.

Si el avance espacio por cada unidad de tiempo no es constante, nos encontramos ante una función no lineal, en este caso como en el camino azul o la segunda gráfica que mostramos.

C3B.2 Volveremos, entonces, al problema del globo en el que se les indicaba que aproximaran sin calcular los puntos la gráfica del globo, veremos de nuevo los distintos crecimientos, uno proporcional (por cada unidad de una variable la otra crece siempre lo mismo) y otro no lineal (por cada unidad de una variable la otra crece cada vez más)



C4: Campo de problemas 4: Problemas de aplicación.

El C4 contiene los problemas que se presentarán al aula en los que se aplicarán todos los conocimientos adquiridos y trabajados en este módulo en problemas contextualizados (técnicas y tecnologías). Pretendemos que utilicen el lenguaje funcional aprendido para describir fenómenos cualitativa y cuantitativamente.

Pediremos que interpreten, para cada problema contextualizado, los conceptos estudiados como pendiente, ordenada en el origen, crecimiento y otros.

C4A: Problemas sin números

Generaremos este tipo de ejercicios a través de la plataforma DESMOS.

C4A.1: Planteamos un ejercicio a modo de juego, un “quien es quien” de funciones, denominado “Polygraph”. Un jugador escoge una gráfica que su contrincante tendrá que adivinar haciéndole preguntas a las que éste solo podrá responder Sí y No.

Observaremos diálogos en los que intervendrán preguntas cómo si es creciente o decreciente, si es lineal, si pasa por el origen, si la pendiente es positiva o si la ordenada en el origen es un número determinado.

Pretendemos que utilicen un lenguaje funcional, hablando con propiedad sobre las características propias de las funciones, ahora que ya lo conocerán.



C4A.2: Dado un material adicional que muestre una determinada situación, pediremos a los alumnos que representen funciones en gráficas o les haremos preguntas al respecto que exija la interpretación, comprensión o representación de la relación.

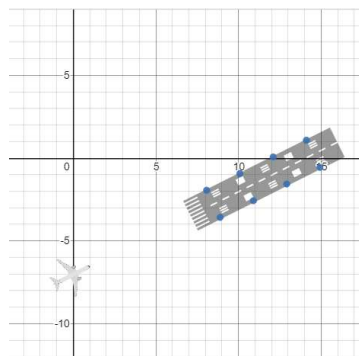
C4A.2.1 Dado este gift² en el que aparecen dos niños columpiándose:



- Representa en una gráfica cómo varía la distancia entre ambos en el tiempo. ¿Es creciente o decreciente? ¿En qué intervalo? Señala un máximo.
- Representa en una gráfica cómo varía la distancia de la cadera del niño al suelo. ¿Es una línea o no? ¿Crece o decrece? ¿En qué intervalo? Señala un mínimo.
- Representa en una gráfica cómo varía la distancia de la niña al poste superior de sujeción del columpio.

En este ejercicio se les exige la representación gráfica de distintas relaciones funcionales sobre una misma situación.

C4A.2.2: Presentamos una gráfica en la que aparece un avión y un túnel por la que debe pasar. El alumno deberá calcular la expresión algebraica de la recta que describe la trayectoria correcta del avión.



²DESMOS: <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5ce6e24386af780c5450bc87>

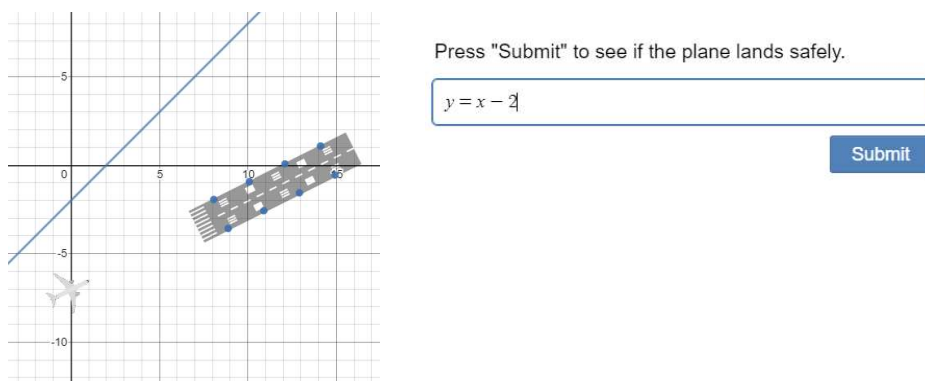


Imagen 19: Intento fallido

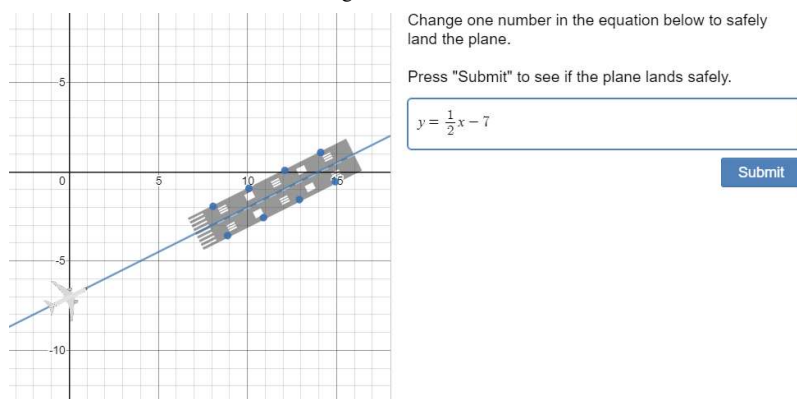


Imagen 20: Expresión algebraica correcta

Lejos de ser un ejercicio que se supere a través de intentos injustificados, exigiremos que cada uno haga una única apuesta, pidiéndoles que dibujen en primer lugar la recta que desean describir y definan la expresión algebraica de la misma, justificando los valores escogidos para la pendiente y la ordenada en el origen de la recta, y verbalizando su razonamiento.

Por ejemplo, en este caso, deducirán, una vez dibujada la recta (Imagen 21) que el valor de la ordenada en el origen de la recta que buscan es -7, ya que es el punto de corte con el eje de ordenadas, el valor que toma la coordenada y cuando el valor de la coordenada x es 0.

Para decidir qué valor debe tomar la pendiente, reflexionarán primeramente que ésta será positiva, ya que la recta es creciente, que será menor que uno, ya que el valor de la coordenada y crece un valor menor de la unidad por cada unidad de avance de la coordenada x. Concretamente, podrán acercarse al valor correcto de $\frac{1}{2}$ observando que, aproximadamente por cada 3 unidades de desplazamiento de la variable y, la variable x avanza 6 unidades.

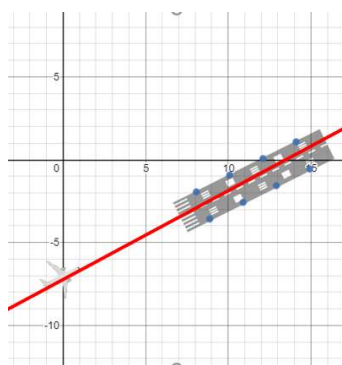


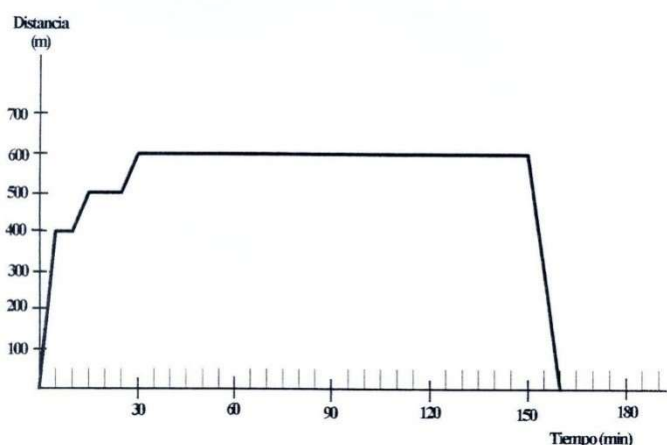
Imagen 21

El objetivo es que sean capaces de estimar en “una buena dirección” el valor de la ordenada en el origen y de la pendiente, no que lo encuentren el valor exacto, reflexionando sobre ello y justificando su elección, meditada y argumentada. Ello implicará una buena comprensión de los conceptos fundamentales que están detrás de esta actividad.

C4B: Problemas con números

Posteriormente, realizaremos problemas de aplicación cuantitativos, en los que aplicaremos las destrezas de interpretación, modelización, cálculo y representación de funciones.

C4B.1: En su recorrido diario al instituto, Pedro pasa por la panadería y luego se detiene en la siguiente esquina a esperar a un compañero. Al final de las clases regresa a su casa. Te mostramos la gráfica de su recorrido, contesta las siguientes cuestiones y justifica tus respuestas:

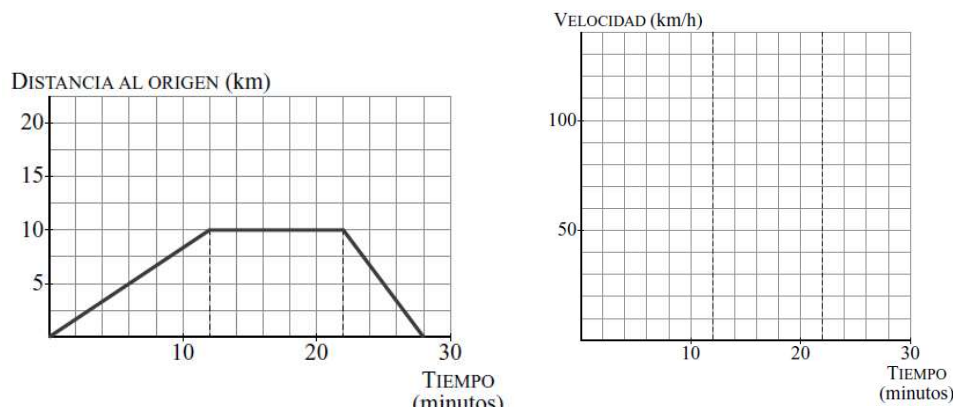


- ¿Qué información crees puede proporcionarnos esta gráfica?
- ¿Cuál es el recorrido de esta función? ¿Qué representa?
- Indica el máximo y el mínimo de esta función e interprétalos.
- ¿Cuál es el dominio de esta función? ¿Qué representa?
- ¿Cuánto tarda en comprarse un bollo?
- ¿Tiene que esperar mucho a su compañero?
- ¿Cuánto duran las clases? ¿Cómo has podido saberlo?

- h. Si las clases comienzan a las 4 de la tarde, ¿a qué hora sale de casa? ¿Dónde estaba a las 3:32? ¿Y a las 3:36? ¿Y a las 3:54?
- i. ¿Qué representaría la pendiente de esta función en sus distintos tramos? ¿Varía? ¿Qué significa en cada uno de ellos? Interpreta su valor.
- j. ¿Qué interpretación le damos a una pendiente nula? ¿De qué tipo sería la función en ese tramo?

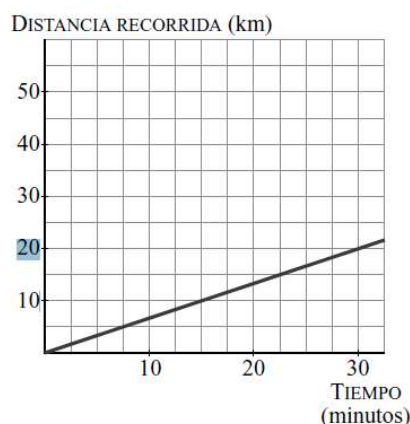
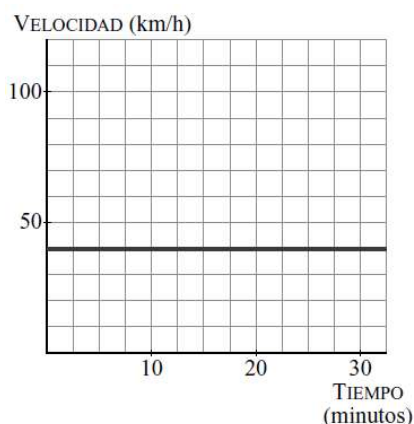
C4B.2 Un motorista sale de cierta pequeña población y viaja por carretera, a velocidad más o menos constante, hasta la población vecina. Allí se detiene para hacer una gestión y después regresa por el mismo camino, también a velocidad constante. El viaje queda reflejado en esta gráfica, que relaciona la distancia en cada instante al punto de partida con el tiempo transcurrido.

Contesta a las siguientes cuestiones y justifica tus respuestas.



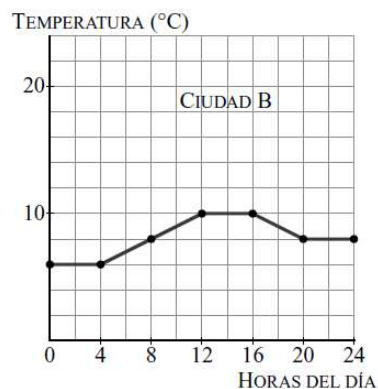
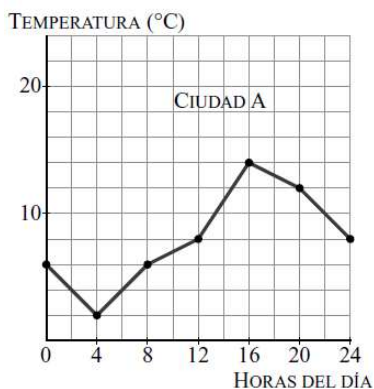
- a. ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Qué representa?
- b. ¿Cómo interpretarías el tramo en el que la pendiente es nula? ¿Qué tramo sería exactamente?
- c. ¿Cómo es la pendiente a partir del minuto 20? ¿Qué deducimos de ella?
- d. ¿Cuál es el recorrido de la función? ¿Qué representa? Calcula la velocidad media del viaje de ida y la velocidad media del viaje de vuelta. ¿A qué corresponde ese valor?
- e. Completa esta gráfica de velocidad- tiempo.

C4B.3: Las gráficas siguientes corresponden al movimiento de un tractor que se desplaza por una carretera a velocidad constante. Contesta las siguientes cuestiones y justifica tus respuestas.



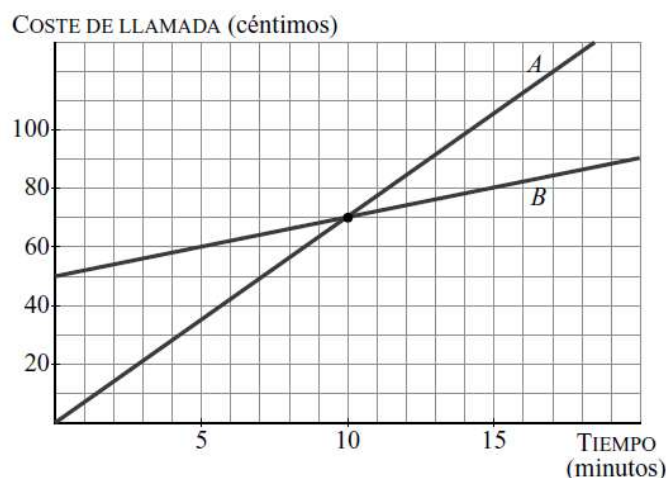
- Interpreta para este problema el valor de la pendiente. Calcúlalo.
- ¿Cuál es el recorrido? ¿Y el dominio? ¿Qué significan?
- ¿Cuál de estas igualdades refleja la relación entre la distancia, en kilómetros, y el tiempo en horas?
 - $D = 30t$ $D = 40t$ $D = 50/t$ $t = 40D$ $D t = 30$
- Dibuja, sobre los mismos ejes, las gráficas correspondientes para un camión que se desplaza a 80 kilómetros por hora. ¿Cómo denominaremos a la velocidad en lenguaje de funciones?
- ¿Qué diferencias habrá entre esta nueva recta y la anterior en lenguaje de funciones?

C4B.4: En las gráficas puedes observar las siete mediciones de la temperatura tomadas a lo largo de un día, en dos ciudades diferentes. Contesta las siguientes cuestiones y justifica tus respuestas.



- ¿Cuál son los máximos y los mínimos de cada una de las dos ciudades?
- ¿En cuál de las dos son más bruscas las variaciones de temperatura? ¿Cómo describirías esas variaciones en lenguaje funcional? ¿A qué término hacen referencia?
- ¿Cómo será el valor absoluto de la pendiente de la ciudad con el clima más suave con respecto a la otra?

C4.5: La gráfica representa el coste de las llamadas telefónicas, según el tiempo transcurrido, en dos compañías diferentes, A y B. Contesta las siguientes cuestiones y justifica tus respuestas.



- ¿De qué tipo son las siguientes funciones? ¿Lineales o afines? Explica por qué.
- ¿Qué representa la ordenada en el origen de cada una de las dos? ¿Qué valor toma?
- ¿En la compañía A, qué dos magnitudes son proporcionales? ¿Y en la B? ¿Qué significa?
- ¿Cuánto cuesta una llamada de 5 minutos en cada compañía? ¿Y una llamada de 15 minutos? ¿Necesitas calcular para ello sus expresiones algebraicas? Si es así, calcúlalas.

Modificaciones de la técnica inicial que va a exigir la realización de los problemas:

Los problemas planteados inicialmente como razón de ser no requerían apenas del conocimiento de ninguna técnica por parte de los alumnos ya que se secuenciaban preguntas para guiar a la clase con el objetivo de su resolución.

Los problemas planteados en los campos de problemas suponen unas pequeñas modificaciones progresivas de las pocas técnicas requeridas para la resolución de los iniciales.

A través del campo de problemas C1, los alumnos aprenderán las técnicas relativas a la representación e interpretación de puntos en el plano.

Tal y como está planteado el campo de problemas C2, no se supone el conocimiento de técnicas previas, ya que se plantean problemas contextualizados que den sentido a la aparición del objeto matemático, en los que se modelizan situaciones con la ayuda del docente, asegurándonos de que los estudiantes comprenden el sentido de las mismas, y no se aferran a conceptos no comprendidos y a técnicas mecánicas de ejecución sin sentido.

A través de estos problemas, aprenderán a generar tablas de datos como paso previo a la obtención de la expresión algebraica de la función.

Es para resolver los problemas pertenecientes al campo de problemas C3, cuando necesitaremos de su conocimiento de una colección de técnicas que introduciremos previamente, como son las referidas a la obtención de las características de una función a través de su gráfica, como el dominio, el recorrido, la monotonía, la continuidad y los máximos y mínimos.

2.4 Técnicas

Los primeros campos de problemas introducirán la necesidad de las funciones y darán sentido a su aparición, trabajando, sin técnicas ni conceptos previos en un principio, algo que les permitirá comprender sin “tener que denominar nada por su nombre”, justificando la aparición, el sentido y la utilidad de las funciones.

Posteriormente, se afianzará la ejecución y control de destrezas para resolverlos, a través de ejercicios que contendrán un porcentaje alto en técnicas necesarias para ello. Los campos de problemas ejercitados, por tanto, darán sentido a su vez a la aparición de estas técnicas, que nacen como soporte y ayuda para la resolución con éxito de los mismos, abordando entonces los siguientes campos de problemas propuestos.

En el caso de las técnicas los ejercicios se realizarán de forma individual, aunque posteriormente se corrijan siempre que sea necesario en común. El objetivo de las técnicas es que adquieran destrezas que les permitan abordar los campos de problemas sin dificultad, y es importante que realicen un número amplio de ejercicios para ello. Por eso consideramos que es más oportuno que cada uno realice sus ejercicios por separado.

T1. Representación de puntos en el plano y de funciones a partir de tablas

T1A: Representación de puntos en el plano a través de sus coordenadas: Dadas coordenadas, deberán ser capaces de representarlas en los ejes cartesianos. Para ello encontrarán en primer lugar la ubicación de la coordenada X e irán subiendo o bajando hasta la altura de la coordenada Y.

T1A.1: Representa los siguientes puntos en el eje de coordenadas: A (8,-5), B (-7, 1),

C (1,3), D (0,-4), E (0,0), E (-8, -8), F (-1, -4)

T1A.2: Representa cuatro puntos cuya abscisa sea igual a la ordenada.

T1B: Representación de funciones a partir de tabla o fórmula: Dada una tabla de datos o una ecuación, los alumnos deberán representar punto a punto en el plano los puntos correspondientes definidos en la tabla con la técnica 1 descrita. Una vez situados los puntos deben unirlos con una línea que definirá su gráfica solo si la variable puede tomar valores intermedios (continua)

T1B.1: De la siguiente función conocemos los siguientes puntos. Representála gráficamente.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	4	6	8	10	12

T1B.2: Halla algunos puntos de la función $Y = 3x - 2$ y represéntala gráficamente. ¿Cuántos puntos debes hallar como mínimo?

T2. Transformaciones en la representación de funciones lineales y afines: Tabla de datos y expresión algebraica de una función

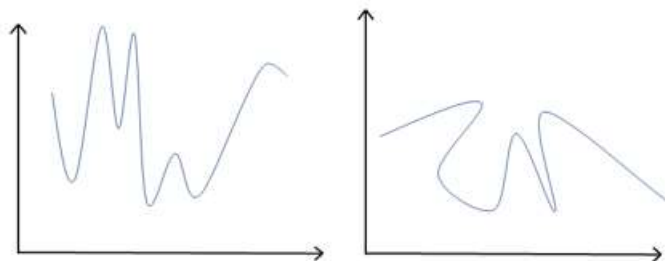
T2A: Hallar la tabla de valores dada su expresión algebraica. Dada la expresión algebraica de una función, deben sustituir uno a uno los valores de x para obtener los de y , y así hallar la tabla de valores que toma la función.

T2B: Obtener la expresión algebraica de una dada su gráfica. Dada su gráfica, deben calcular el valor de la pendiente y de la ordenada en el origen para así extraer la expresión algebraica de la función.

T3. Características de una función a través de su gráfica.

T3A: Diferenciar funciones de las que no lo son a través de su gráfica: Deberán comprobar que para cada punto x existe una sola correspondencia en el eje de ordenadas, y . Para ello pueden trazar mentalmente segmentos verticales desde cada punto x que les permitan corroborar si es o no una función (si solo hay una correspondencia por cada x será una función, en el caso contrario no)

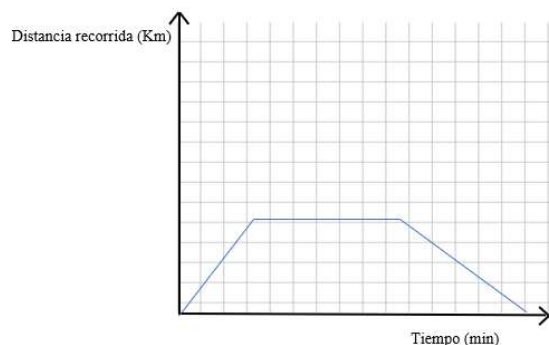
T3A.1 ¿Representan estos gráficos a una función? Razona tu respuesta



T3B: Obtención del dominio y recorrido de una función a través de su gráfica: Los alumnos deben observar, una vez representada la función, qué rango de valores ocupa la coordenada x (desplazándose por el eje de coordenadas x de izquierda a derecha) para obtener el

dominio. De la misma manera, lo harán con el valor de y desplazándose de abajo arriba en el eje de ordenadas, y obtendrán el recorrido.

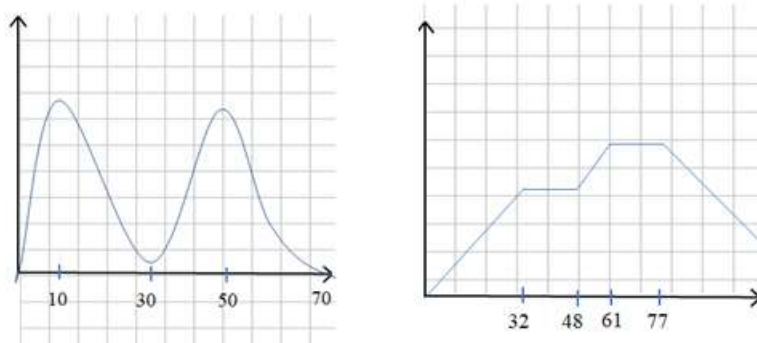
T3B.1: La siguiente gráfica representa un viaje en coche por diferentes carreteras. ¿A qué corresponderá el dominio de la función? Calcúlalo. ¿Y el recorrido?



T3C: Continuidad a través de la gráfica: Para comprobar si una función es continua, los alumnos deben observar si “presenta saltos” o agujeros en su recorrido. Si no presenta saltos es continua.

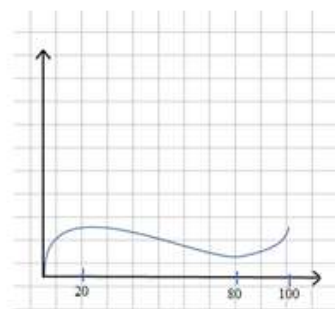
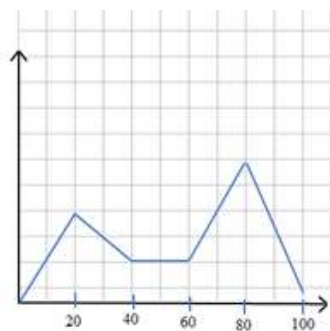
T3D: Monotonía de una función a través de su gráfica: Si a medida que crecen los valores de x observaremos si los valores de y crecen, decrecen, o permanecen constantes. Si los valores de y crecen, la función es creciente, y, al contrario, decreciente. En esta técnica analizaremos a través de ejercicios distintos tipos de crecimiento que podemos encontrarnos.

T3D.1: Señala en qué intervalos las funciones son crecientes, decrecientes o constantes:



T3E: Identificar los máximos y mínimos de una función a través de su gráfica: Deberán observar la gráfica de izquierda a derecha para seleccionar puntos susceptibles de ser un máximo o un mínimo. Si por la izquierda del punto la función crece y por la derecha decrece, entonces es un máximo. Si por la izquierda decrece y por la derecha crece entonces diremos que es un mínimo.

T3E.1: Especifica donde alcanza máximos y mínimos relativos esta función.



T4: Análisis de funciones lineales y afines

T4A: Cálculo de la ordenada en el origen:

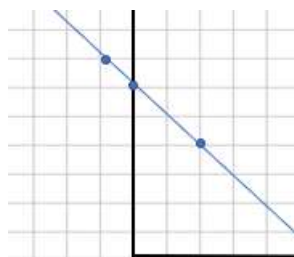
T4A.1: Dada la expresión analítica de la función: El alumno deberá sustituir el valor de la variable x por 0 para hallar el valor de la ordenada en el origen, el punto $(0, y)$, que representará el corte de la función en el eje de ordenadas. O simplemente darse cuenta de que es siempre el valor que viene sumando o restando y que no va acompañado de la variable.

T4A.1.1 Dadas las siguientes funciones calcula su ordenada en el origen:

- a) $y = 20$
- b) $y = 5x + 2$
- c) $y = x - 5$

T4A.2 Dada la representación gráfica: El alumno deberá identificar el punto situado en el eje de ordenadas, es decir el punto tal que su coordenada primera es cero.

T4A.2.1 Dada la siguiente gráfica, calcula su ordenada en el origen:



T4A.3. Dadas las coordenadas de dos puntos: Calcularán, en primer lugar, el valor de la pendiente de la recta, a partir de lo que obtendrán parte de la expresión analítica ($y = mx + n$). Sustituyendo los valores del punto podrán calcular el valor de n .

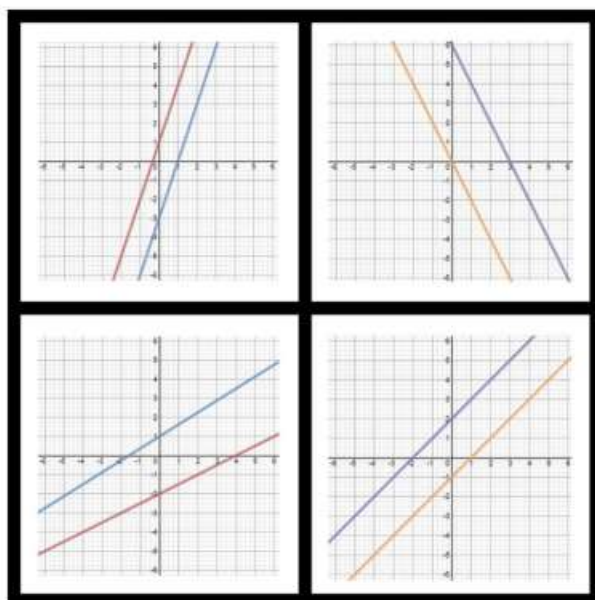
T4A.3.1: Dadas las siguientes coordenadas de dos puntos sobre los que pasa una función, calcula la ordenada en el origen de dicha función:

- a) Función que pasa por $(0, 4)$ y $(3, 2)$
- b) Función que pasa por $(-1, 3)$ y $(8, -5)$

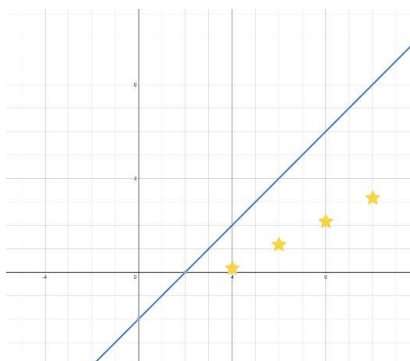
T4B: Cálculo de la pendiente:

T4B.1: Visualización e identificación de la pendiente en la gráfica: En este primer apartado aparecen ejercicios cualitativos que fomentan la comprensión del concepto de pendiente ofreciendo una visión gráfica. Los alumnos podrán resolverlos en muchos casos con la opción de probar distintas elecciones hasta dar con la correcta:

T4B.1.1: En este ejercicio tienen que descartar una opción de entre las cuatro ofrecidas y argumentar su respuesta. Cuando se den cuenta de que es el tercer cuadrante el que no corresponde, analizaremos cual es la diferencia expresada en lenguaje de funciones. Son las únicas rectas que no son paralelas, es decir, que no tienen la misma pendiente. Esta primera visión gráfica mejorará su comprensión y el trabajo posterior.



T4B.1.2: En este ejercicio, realizado a través del portal “Desmos”, los alumnos tendrán que hallar la función lineal o afín que pase por los puntos marcados en amarillo. Se les facilitará el valor de la ordenada en el origen, debiendo hallar el valor correcto de la pendiente para que la recta pase por todos los puntos estrellados. Cuando inserten el valor de la expresión algebraica el programa les devolverá la recta correspondiente, pudiendo comprobar si su estimación es correcta o no. Además, asimilarán que un valor absoluto de la pendiente mayor implica una mayor inclinación de la recta.



1

Change one number in the row below to fix the Marbleslide.

2

$y = x - 2$

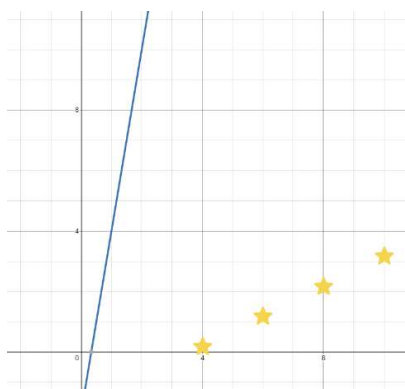


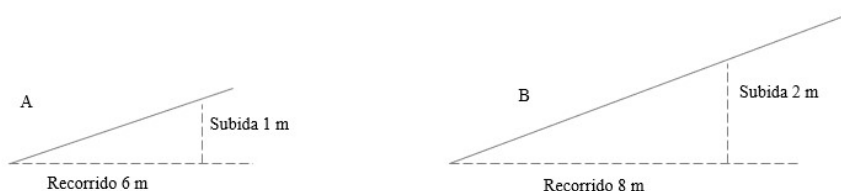
Imagen 22: Respuesta errónea. Expresión $y = 6x - 2$

T4B.2: Cálculo efectivo de la pendiente de una recta a partir de diferentes datos:

T4B2.2.1. Si se facilitan las coordenadas de dos puntos: El alumno deberá calcular la variación del eje de ordenadas y dividirla por la del eje de abscisas, tal y como se habrá introducido en el campo de problemas visto con anterioridad a este apartado.

Para ello, dados dos puntos $P_1 (x_1, y_1)$ y $P_2 (x_2, y_2)$ siendo $x_1 < x_2$, que pasan por la recta cuya pendiente queremos conocer, calcularemos la distancia recorrida en el eje vertical con respecto al eje horizontal entre ambos puntos:

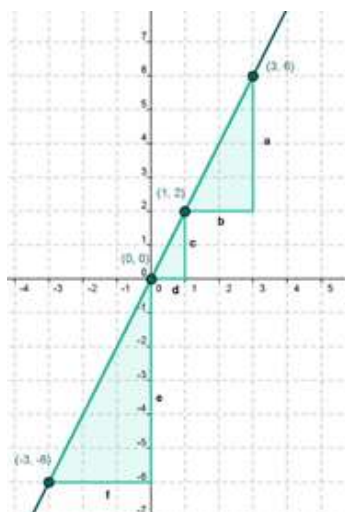
$$\text{Pendiente} = m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$



T4B2.2.1.1. Dada una función que pasa por los puntos (8,2) y (10,4) calcula la pendiente de ésta.

T4B2.2.2. Si se facilita la gráfica: Extraeremos de la misma la información de las coordenadas de los ejes y aplicaremos la técnica descrita en el apartado T4B2.2.1.

T4B2.2.2.1 Representa una tabla de valores con los puntos que aparecen en la recta del gráfico. Determina los cocientes a/b , c/d y e/f . ¿Qué representan? Halla la expresión algebraica de la recta del gráfico.



T4B2.2.3. Si se facilita la ecuación de la recta: El alumno deberá fijarse en el número que acompaña a la x , la pendiente. Supone la razón de proporcionalidad, es decir el número de veces que aumentará la variable y por cada unidad de la x .

T4B2.2.3.1 Obtén la pendiente de la siguiente función: $y = 3x + 4$.

T5: Relación entre la pendiente y la monotonía de una función lineal o afín:

La pendiente nos indicará la inclinación de la recta representada, siendo positiva cuando la recta crece y negativa cuando la recta decrece. Cuanto mayor es la pendiente, la recta estará más inclinada de manera que si la pendiente de una recta es, en valor absoluto, superior a la de otra, la inclinación de la primera recta será mayor que la de la segunda.

T5.1 Dibuja las siguientes funciones y comenta qué diferencias hay entre ellas.

- Dibuja $y = 2$ e $y = -2$. Describe su crecimiento.
- Dibuja $y = 2x$ e $y = -2x$. Describe su crecimiento.
- Dibuja $y = 2x - 5$ e $y = -2x - 5$. Describe su crecimiento.
- Dibuja $y = 2x$, $y = 3x$ e $y = 5x$. Describe su crecimiento.
- Dibuja $y = -2x$, $y = -3x$ e $y = -5x$. Describe su crecimiento.
- ¿Qué conclusión podrías extraer acerca del significado de la pendiente?

A través de la visualización de rectas en este ejercicio comprobarán que, cuando la pendiente m es positiva, la función crece y cuando es negativa, la función decrece. Además, que cuánto mayor sea el valor absoluto de la pendiente $|m|$, más inclinada estará la recta.

2.5 Tecnologías

Las tecnologías surgirán al mismo tiempo que las técnicas como justificación de ellas, en los propios campos de problemas y a través de ellas se institucionalizarán los contenidos de la unidad.

Será el profesor el que, una vez haya guiado a los alumnos en la resolución de campos de problemas, institucionalice los conceptos justificando las técnicas con las tecnologías.

En el aula se trabajará, como ya hemos explicado, a través de los problemas. El docente hará de guía, ayudándoles cuando necesiten y haciendo las preguntas oportunas para guiar el razonamiento. Los alumnos generalmente (a excepción del trabajo de técnicas y de pequeñas reflexiones individuales) trabajarán en grupo. Se generará debate en el aula para la resolución de los problemas.

Una vez se hayan resuelto, será el profesor el que institucionalice los conceptos y los clarifique en la pizarra, al mismo tiempo que ellos los copian en sus cuadernos, como referencia para su estudio. Pero todo esto será posterior al descubrimiento de los conceptos a través de su razón de ser mostrada en los problemas.

Posteriormente, habiendo puesto “nombre” a los conceptos ya comprendidos con anterioridad, se trabajarán las técnicas de manera individual, con la intención de ejercitar destrezas que les permitan resolver los campos de problemas de aplicación, en los que se cerrará el proceso de enseñanza aprendizaje del módulo de funciones.

A continuación, mostramos las tecnologías sobre las que se justificarán las técnicas anteriormente descritas:

Representación de puntos en el plano a través de sus coordenadas: La T1A viene justificada por la definición de coordenadas cartesianas como “proyecciones ortogonales de un punto sobre los ejes de valores”, cuya finalidad es representar parejas de puntos llamadas coordenadas que se forman con un valor x y un valor y representado como $P(x,y)$. El origen es el punto $(0,0)$ y ayuda a localizar puntos en el plano de coordenadas”

Representación de funciones a partir de tabla o expresión algebraica: La T1B viene justificada por la definición de variable discreta y continua, siendo aquellas que toma valores enteros y reales respectivamente.

Diferenciación de funciones de las que no lo son: La T3A viene justificada por la definición de función como “Una función es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, x e y , de forma que a cada valor de x le corresponde un único valor de y .”

Obtención del dominio y recorrido de una función a través de su gráfica: La T3B viene justificada por la definición de dominio y recorrido de una función cómo:” Dominio es el conjunto de puntos que puede tomar la variable independiente x, puntos para los que la función está definida. Recorrido es el conjunto de puntos que puede tomar la variable dependiente y”

Continuidad a través de la gráfica: La T3C se justifica por la definición de monotonía: Una función es continua en (a,b) si es continua en cualquier punto $c \in (a,b)$, es decir, si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

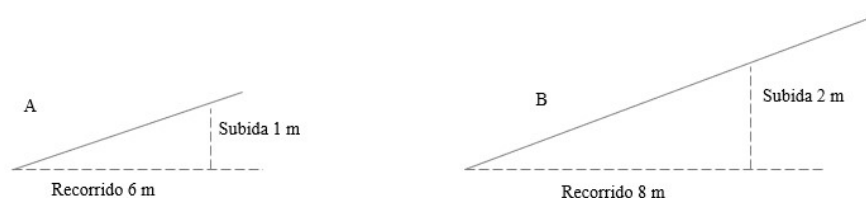
Monotonía de una función a través de su gráfica: La T3D se justifica a través de la definición de crecimiento y decrecimiento: Siendo a y b dos valores de la variable x en la función f(x), si $a > b$:

- Si $f(a) > f(b)$, f(x) es creciente entre a y b
- Si $f(a) < f(b)$, f(x) es decreciente entre a y b
- Si $f(a) = f(b)$ la función es constante en a y b

Identificación de máximos y mínimos de una función a través de su gráfica: La T3E viene justificada por la definición de máximos y mínimos de una función: “Una función continua tiene un máximo en el punto $x=a$ cuando pasa de ser creciente a decreciente en ese punto. Una función continua tiene un mínimo en el punto $x=a$ cuando pasa de ser decreciente a creciente en ese punto.”

Cálculo de la ordenada en el origen de una función: La T4A viene justificada por la definición de puntos de corte de una función cómo “Los puntos de corte con el eje x tienen la coordenada y igual a 0”, y a la inversa”, y la ordenada en el origen como “el punto cuyo valor de $x = 0$ ”)

Cálculo de la pendiente de una función: La T4B vendrá justificada a través del concepto de pendiente cómo la “variación que sufre de punto a punto el eje de coordenadas (y) (incremento en altura), con respecto a la variación sufrida por el eje de abscisas (x) (recorrido horizontal)



En el caso de la T4B.2.2.3, en el que se nos facilita la ecuación de la recta, podríamos justificarlo planteando una expresión $y = mx + n$, y suponiendo por ejemplo dos puntos (x_0, mx_0)

+ n) y $(x_1, mx_1 + n)$, sobre los que queremos calcular la pendiente, para lo que calculamos la variación de la coordenada y sobre la variación de la coordenada x

$$m = \frac{(mx_1+n)-(mx_0+n)}{x_1-x_0} = \frac{m(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)} = m$$

Consideramos, finalmente, que este tipo de justificación supera los contenidos y razonamientos previstos para este nivel, por lo que optamos por introducir esta técnica (T4B.2.2.3) sin justificación alguna en este curso

Relación entre la pendiente y la monotonía de una función lineal o afín. La T5 sólo se justificará a través de ejemplos como el mostrado T.5.1

2.6 Proceso de institucionalización

A continuación, definimos el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático

Campo de problemas 1: A través de la realización de los problemas del campo de problemas 1, introduciremos la representación de puntos en el plano a través de sus coordenadas, tablas o expresiones algebraicas. También la representación de funciones a partir de tablas o de su expresión algebraica.

Campo de problemas 2: A través de los problemas de uso de funciones para modelización de situaciones los alumnos comprenderán distintas formas de relación entre variables. Se institucionalizarán, una vez finalizado el campo de problemas, la definición de función y sus posibles representaciones. Además de características de las funciones extraídas a través de su gráfica cómo dominio, crecimiento, y máximos y mínimos que se pondrán en práctica a continuación con la introducción de las técnicas asociadas (T3).

A través del campo de problemas 3, el profesor institucionalizará los conceptos de función lineal y afín, variable continua y discreta (C3A.1 y C3A.2) y el de ordenada en el origen y pendiente (C3B.1). A continuación, se trabajarán las técnicas asociadas a estos dos últimos conceptos (T4)

Por último, con la realización de problemas de aplicación correspondientes al último campo de problemas nos aseguraremos de que todos los conceptos quedan claros y son aplicados en el aula, algo que dará sentido a la impartición del tema y será como un resumen de todos los conceptos aprendidos en el mismo.

2.7 Secuenciación

El primer día realizaremos una prueba de nivel a través del programa Socrative. La información obtenida en esta prueba nos será de mucha utilidad para saber qué conceptos recuerdan, cuáles no, y dónde se encuentran las mayores dificultades. Al utilizar una prueba que ofrece resultados inmediatos, podremos comenzar ese mismo día con los problemas que dan sentido a la introducción del objeto matemático. El planteamiento, reflexión y discusión profunda de estos problemas continuará en la siguiente sesión.

En las siguientes tres sesiones abordaremos los problemas pertenecientes al primer campo de problemas, comenzando por un análisis cualitativo en la representación de puntos del plano, a la que le seguirán actividades de representación de funciones (de varios tipos y no solo las que veremos en profundidad). El objetivo de este enfoque primeramente cualitativo es que desarrollen su capacidad estimativa, evitando que se refugien en la representación punto a punto sin comprensión, de manera que deban reflexionar y comprender la relación entre variables para resolverlos. Finalmente, introduciremos problemas que incorporen sistemas de ejes graduados, para cuya resolución impartiremos la primera de las técnicas.

Proseguiremos, dos sesiones más, con los problemas de uso de funciones para modelizar situaciones, trabajados a través de reflexiones grupales y debate en el aula, en los que, a partir de un enunciado en forma de texto, trataremos de extraer conclusiones generalistas que nos permitan calcular el valor de la variable dependiente para cualquier valor de la independiente. Trabajaremos a través de estos problemas sin conceptos previos, ni técnicas aprendidas y, solo una vez haya finalizado el campo de problemas, se institucionalizarán los conceptos de definición de función y sus representaciones y múltiples características extraídas a partir de su gráfica cómo dominio, crecimiento, y máximos y mínimos.

En la octava sesión comenzaremos a trabajar de forma individual las técnicas asociadas al análisis de funciones a través de su gráfica. Se realizarán numerosos ejercicios, que les permitan desarrollar destrezas, por lo que utilizaremos un total de dos sesiones.

Posteriormente, introduciremos a través de la proporcionalidad las funciones lineales (C3), cuya pendiente será la razón de proporcionalidad. En la décima y undécima sesión se institucionalizarán los conceptos de función lineal, afín, pendiente y ordenada en el origen. Acompañaremos estos importantes conceptos con sus técnicas asociadas de cálculo (T4)

A partir de la duodécima sesión, comenzaremos con los problemas de aplicación, partiendo, al igual que en todos los bloques de la unidad, de un enfoque cualitativo, para terminar con uno cuantitativo. Por considerar estas sesiones como las más relevantes y útiles, dedicaremos dos a la resolución de estos problemas.

Finalmente, haremos la prueba de conocimientos en la sesión decimocuarta, que corregiremos conjuntamente en la décimo quinta (se autoevaluarán) y cuya asimilación comprobaremos en la décimo sexta con la realización de la segunda prueba de conocimientos. Dedicamos hasta tres sesiones a la evaluación, incorporándolas en nuestro plan de trabajo como sesiones formativas, en las que tendrán la oportunidad de autoevaluarse, y enfrentarse a los problemas de la primera prueba de nuevo para comprobar por si mismos la consecución de objetivos propuestos.

Sesión	Contenidos	Actividad
1	Prueba de conocimientos previos	Prueba de conocimientos previos. Problemas introductorios
2	Problemas introductorios Razón de ser	Problemas introductorios
3	Problemas cualitativos: Interpretación de puntos en ejes de coordenadas	CIA (C1A.1, C1A.2, C1A.3, C1A.4)
4	Problemas cualitativos y cuantitativos de interpretación y representación de gráficas	C1B (C1B.1, C1B.2, C1B.3) y T1
5	Problemas cualitativos y de representación	C1B (C1B.4, C1B.5, C1B.6) y T1
6	Uso de funciones para modelizar situación	C2 (C2.1, C2.2, C2.3, C2.4) y T2
7	Uso de funciones para modelizar situación	C2 (C2.5, C2.6, C2.7, C2.8) y T2
8	Análisis de funciones a través de la gráfica	T3 (T3A, T3B, T3C, T3D, T3E)
9	Análisis de funciones a través de la gráfica	T3 (T3A, T3B, T3C, T3D, T3E)
10	Proporcionalidad. Funciones lineales	C3 (C3A.1, C3A.2) y T4
11	Pendiente y ordenada	C3 (C3B.1) y T4
12	Problemas de aplicación	C4 (C4A.1, C4A.2.1, C4A.2.2) y T5
13	Problemas de aplicación	C4 (C4B.1, C4B.2, C4B.3, C4B.4) y T5
14	Evaluación	Prueba de contenidos
15		Revisión y corrección conjunta de prueba de contenidos
16		Segunda prueba de contenidos

2.8 Evaluación

Hemos diseñado una prueba de 50 minutos con un total de 6 preguntas para las que, a continuación, detallamos, los objetivos de evaluación, las respuestas esperadas, los posibles errores, y la definición de las tareas ya que evaluaremos a través del modelo de tercios.

Estableceremos, para cada pregunta, tres tipos de tareas (o los que haya, en su defecto):

- Tareas Principales que podrán penalizarse hasta un 100%, dejando de corregir la pregunta.
- Tareas auxiliares específicas, cuya penalización será como máximo de un 67%, y en las que se continuará siempre corrigiendo el ejercicio
- Tareas auxiliares generales, cuya penalización será como máximo de un 33%, y en las que, de la misma manera, se continuará siempre corrigiendo el ejercicio.

Los criterios y estándares de evaluación de aprendizaje del Bloque 4º del currículo de 2º ESO pueden encontrarse en el Anexo IV de este trabajo.

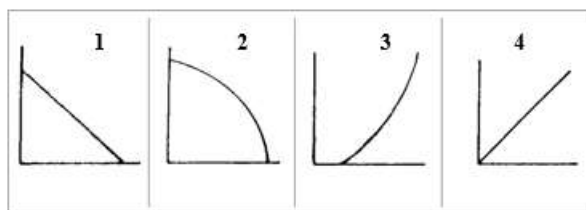
La siguiente sesión a la prueba de contenidos se dedicará a la corrección de ésta en común y a la autoevaluación por parte de cada alumno. En la última sesión de evaluación formativa se realizará un ejercicio similar al primero, que nos permitirá valorar, y a ellos comprobar, la correcta comprensión de los objetivos. La valoración final personalizada será entregada y comentada por parte del profesor de forma individual a cada alumno.

Prueba de contenidos

[**Pregunta 1**] (1,5 puntos) Identifica estas gráficas con las situaciones que te presentamos. Argumenta el porqué de tus respuestas con un lenguaje de funciones.

- a. ¿Cómo varían la cantidad de ahorro del que dispongo a lo largo de mi vida?
- b. ¿Cómo varía el coste de las naranjas que compramos según la cantidad que adquirimos?
- c. ¿Cómo varía la altura de una vela a medida que se consume?

- d. ¿Cómo varía la altura de un telesilla que baja por la montaña?



Objetivos de evaluación pregunta 1:

En la primera pregunta evaluaremos el primer campo de problemas C1B: Interpretación y representación de gráficas. Valoraremos en la corrección la capacidad para interpretar representaciones matemáticas mediante gráficas y la capacidad de describir relaciones funcionales mediante palabras o texto, asociando, en este caso, cada gráfica con la situación correspondiente. Nos interesará especialmente la distinción por la monotonía de las funciones, exigiendo que diferencien claramente las funciones crecientes de aquellas que son decrecientes. Valoraremos que sean capaces de diferenciar aquellas lineales de las que no lo son por el contexto descrito, en el que deberán valorar si el crecimiento es proporcional con el aumento por unidad de la otra variable o, por el contrario, no lo es.

Los estándares de aprendizaje asociados al mismo serán Est.MA.4.3.2 y Est.MA.4.4.4.

Respuestas esperadas pregunta 1: No se prevén grandes dificultades en la diferenciación de las gráficas 1 y 2 con las situaciones c y d y de la 3 y 4 con las situaciones a y b. Esperamos una mayor complicación cuando deban diferenciar entre funciones lineales de las que no lo son.

De esa manera, penalizaremos de distinta manera una confusión entre gráficas a y b por una c o d, en cuyo error encontraremos evidente una falta de comprensión a una confusión entre la a y la b, en la que el error tendrá una penalización menor, en base a lo que queremos evaluar, y lo que se ha trabajado.

En esta pregunta de la prueba escrita será imprescindible el razonamiento aportado, ya que sin él no podemos evaluar si el concepto está comprendido por lo que, sin razonamiento, podremos eliminar la calificación de la pregunta.

Posibles errores en pregunta 1:

- Cataloga la gráfica a o b como la c o d o a la inversa; es decir, identifica una función creciente como una decreciente.

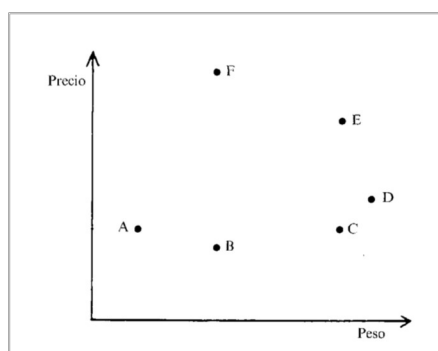
- Cataloga la gráfica a como la b, o la c como la d o a la inversa; es decir, confunde dos gráficas crecientes o decrecientes, siendo una lineal y otra no.
- No adjunta razonamiento alguno o no es correcto.

Definición de tareas pregunta 1: En este caso solo contemplamos tareas principales.

Tareas principales: (Máxima penalización 100%)

- Identificar cuáles de las situaciones expuestas son representadas por funciones con tramos crecientes, decrecientes, o constantes. (Penalización máxima 1,5 puntos)
- Identificar qué relaciones son proporcionales (aumento constante de la variable y por cada unidad de la variable x) y por tanto responden a funciones lineales y cuales no (Penalización máxima 1 punto)
- Justificar con lenguaje de funciones sus respuestas (Penalización máxima: 1,5 puntos)

[**Pregunta 2**] (1,5 puntos) Cada punto de este gráfico representa una un saco de garbanzos. Contesta a las cuestiones razonando tu respuesta.



- ¿Qué saco es el más pesado?
- ¿Qué saco es el más barato?
- ¿Qué sacos valen lo mismo?
- ¿Cuáles pesan lo mismo?
- ¿Qué saco sale mejor de precio? ¿F o C? ¿Por qué?
- ¿Qué saco sale mejor de precio? ¿B o C? ¿Por qué?

Objetivos de la evaluación pregunta 2: En la pregunta 2 evaluaremos el campo de problemas C1A: Interpretación de puntos en el plano a través de gráficas cualitativas. Los alumnos deberán ser capaces de interpretar puntos en el plano a través de ejes no graduados. Mediremos su capacidad de comprensión a través de la comparación de los puntos de los ejes en un problema contextualizado, en el que se les pide que tomen decisiones o concluyan acerca de características relativas a los sacos de garbanzos.

Los estándares de aprendizaje asociados al mismo serán Est.MA.4.3.2 y Est.MA.4.4.4.

Respuestas esperadas pregunta 2:

- Para encontrar cual es el saco más pesado buscará la variable peso en los ejes de coordenadas, la situará en el eje de abscisas y buscará el punto situado más a la derecha, es decir, el punto cuyo valor de la variable x es mayor, el D.
- Para encontrar cual es el saco más barato buscará la variable precio en los ejes de coordenadas, la situará en el eje de ordenadas y buscará el punto situado más abajo, es decir, el punto cuyo valor de la variable y es menor, el B.
- Para identificar dos sacos que valgan lo mismo, buscará dos puntos situados a la misma altura en el eje de ordenadas (variable precio), llegando a la conclusión de que son A y C.
- Para identificar dos sacos que pesen lo mismo, buscará dos puntos con el mismo valor de la variable x (situados a la misma altura en el eje de abscisas), llegando a la conclusión de que son F y B y E y C.
- Para ver qué saco vale menos, si F o C, ubicará ambos en los ejes dándose cuenta de que el saco F pesa menos y vale más, y el saco C pesa más y vale menos, concluyendo con que es el saco C el que vale menos.
- Para hacer lo mismo con los sacos B y C, observará que su precio es similar, pero, sin embargo, el saco C incorpora una cantidad mucho mayor de garbanzos que el B, concluyendo con que es este saco el más económico.

Posibles errores en pregunta 2: Penalizaciones. Tres respuestas erróneas implican la penalización total del problema, ya que concluiríamos con que no ha comprendido lo que queremos verificar.

- No diferencia cual es el saco más pesado
- No diferencia cual es el saco más barato
- No identifica aquellos sacos que se sitúan en el mismo valor del eje de ordenadas.
- No identifica aquellos sacos que se sitúan en el mismo valor del eje de abscisas.
- No identifica cual presenta un valor de la variable precio menor, para una misma cantidad x : F o C.

- No identifica cual presenta un valor de la variable precio menor, para una misma cantidad x: B o C.
- No razona sus respuestas o lo hace de forma errónea.

Definición de tareas pregunta 2: Solo definimos tareas principales.

Tareas principales: (Penalización máxima: 1,5 puntos. 0,5 puntos por pregunta errónea. Tres respuestas erróneas implican la penalización total del problema, ya que concluiríamos con que no ha comprendido lo que queremos verificar. Definimos las penalizaciones máximas:

- Diferencia cual es el saco más pesado (0,5 puntos)
- Diferencia cual es el saco más barato (0,5 puntos)
- Identifica aquellos sacos que se sitúan en el mismo valor del eje de ordenadas (0,4 puntos)
- Identifica aquellos sacos que se sitúan en el mismo valor del eje de abscisas (0,4 puntos)
- Identifica cual presenta un valor de la variable precio menor, para una misma cantidad x: F o C (0,4 puntos)
- Identifica cual presenta un valor de la variable precio menor, para una misma cantidad x: B o C (0,4 puntos)
- Razona correctamente sus respuestas (0,5 puntos)

[**Pregunta 3**] (2 puntos) Una señora alquila un coche a una compañía. Las tarifas son las siguientes: 150 € por el alquiler de este más 1,50 € por cada hora que lo tiene alquilado. ¿Cómo podremos calcular cuánto debe pagar a cada hora del día? Dibuja una gráfica que represente el coste hora a hora desde las 8 am hasta las 8 pm Justifica tu respuesta.

Objetivos de la evaluación pregunta 3: A través de la pregunta 3 evaluaremos los campos de problemas C2 (Modelización de funciones), C1B Representación de gráficas y C4 Problemas de aplicación.

La solución de este problema requerirá el uso de las técnicas T1A (Representación de puntos en el plano a partir de sus coordenadas) y T1B (Representación de puntos en el plano a partir de tablas)

Los estándares de aprendizaje que se medirán en esta pregunta serán Est.MA.4.2.1, Est.MA.4.4.1, Est.MA.4.4.2, Est.MA.4.4.3 y Est.MA.4.4.4.

Respuestas esperadas pregunta 3:

Método I: (Modeliza con expresión analítica)

- Modeliza la función $y=150 + 1,5x$, siendo y el coste y x las horas que está alquilado

- Sustituye en la ecuación los valores de $x = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, obteniendo los valores de la variable y .
- Representa los puntos en los ejes de coordenadas, uniendo los puntos.
- Argumenta los pasos que ha dado.
- Método I versión II: Obtiene una tabla de valores para la función proporcional $y=1,50x$ y posteriormente le suma a cada valor de y la cantidad de 150.

Método II: (No utiliza expresión analítica)

- Sustituye los valores posibles de la variable $x = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ uno a uno, para obtener los correspondientes de la variable y .
- Representa punto a punto los valores en los ejes de coordenadas.
- Argumenta los pasos que ha dado.

Posibles errores en pregunta 3:

- Errores en la identificación de la variable dependiente e independiente, identificándolas al revés.
- Errores en la obtención de la expresión algebraica de la función.
- Errores en el cálculo de la tabla de valores porque parten de unos valores erróneos para la variable $x = 8,9,10,11,12,13,14,15,16$ que reflejarían la hora y no la cantidad de horas que el coche ha estado alquilado $x=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$.
- Error en el cálculo de la tabla de valores multiplicando a la variable x el valor de 150 en vez del valor 1,5 y sumando 1,5 en vez de 150.
- Errores a la hora de representar los puntos en los ejes de coordenadas para representar el gráfico de la función, partiendo del punto $(0,0)$ y representando la función lineal $y=1,50x$ y no la afín $y=150 + 1,50x$.
- Errores en la representación gráfica de puntos en los ejes de coordenadas (punto a punto).
- Errores en la representación gráfica de puntos en los ejes (escalas).

Definición de tareas pregunta 3:

Definición de tareas método I (Utiliza la expresión algebraica)

Tareas principales: (Máxima penalización: 2 puntos). Definimos penalizaciones máximas:

- Modeliza correctamente la función (1 punto)

- Obtiene los valores que toman las variables x e y (ya sea en forma de tabla o no) (0,75 puntos)
- Es capaz de representar gráficamente esos valores (0,5 puntos)
- Argumenta o justifica el camino utilizado para llegar a esa gráfica (0,5 puntos)

Tareas auxiliares específicas: (Máxima penalización $\frac{2}{3}=1,33$ puntos. Penalizamos 0,5 máximo por cada tarea descrita. Continuamos corrigiendo). Describimos penalizaciones máximas:

- Identifica los posibles valores de la variable $x= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ (0,5 puntos)
- Representa correctamente cada variable en el eje que le corresponde. (0,5 puntos)
- Representa correctamente los puntos en el plano (sin fallos en la representación propiamente dicha o en las escalas) (0,5 puntos)

Tareas auxiliares generales: (Máxima penalización: $\frac{1}{3}=0,66$ puntos: 0,2 por fallo)

- Errores aritméticos de cálculo.
- Calcula correctamente los valores de la tabla de datos que utilizará para la representación gráfica

Definición de tareas método II (No utiliza la expresión algebraica)

Tareas principales: (Máxima penalización: 2 puntos). Definimos penalizaciones máximas:

- Obtiene los valores que toman las variables x e y (ya sea en forma de tabla o no) (1 punto)
- Es capaz de representar gráficamente esos valores (0,75 puntos)
- Argumenta o justifica el camino utilizado para llegar a esa gráfica (0,5 puntos)

Tareas auxiliares específicas: (Máxima penalización $\frac{2}{3}=1,33$ punto. Penalizamos 0,5 máximo por cada tarea descrita. Continuamos corrigiendo). Describimos penalizaciones máximas:

- Identifica los posibles valores de la variable $x= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ (0,5 puntos)
- Representa correctamente cada variable en el eje que le corresponde. (0,5 puntos)
- Representa correctamente los puntos en el plano (sin fallos en la representación propiamente dicha o en las escalas) (0,5 puntos)

Tareas auxiliares generales: (Máxima penalización: $\frac{1}{3}=0,66$ puntos: 0,2 por fallo)

- Errores aritméticos de cálculo.
- Calcula correctamente los valores de la tabla de datos que utilizará para la representación gráfica

[Pregunta 4] (2 puntos) Unos amigos deciden alquilar una sala de fiestas un sábado por 500 €. Deciden que todos los que vengan a la fiesta pagarán la misma cantidad. La sala admite un aforo máximo de 50 personas.

¿Cómo dependerá lo que paga cada uno del número de amigos que acudan? Representa aproximadamente cómo variará la aportación por amigo en función del número de amigos que acuden. ¿Cuál será el dominio y el recorrido de esa función? Razona tu respuesta

Objetivos de la evaluación pregunta 4:

A través de la pregunta 4 evaluaremos los campos de problemas C2 (Modelización de funciones), C1B (Representación de gráficas), C3A (Obtención de funciones a partir de enunciados - C3: Funciones lineales: Proporcionalidad) y C4 (Problemas de aplicación). La solución de este problema requerirá el uso de las técnicas T1 (Representación de puntos en el plano y funciones a partir de tablas (T1A y T1B)) y T2B (Cálculo del dominio y el recorrido de una función).

Los estándares de aprendizaje que se medirán en esta pregunta serán Est.MA.4.2.1, Est.MA.4.4.1, Est.MA.4.4.2, Est.MA.4.4.3 y Est.MA.4.4.4.

Respuestas esperadas pregunta 4:

Método I: (Utiliza la expresión algebraica)

- Obtiene, a través de primeros cálculos con ejemplos, la expresión analítica de la función descrita, modelizando la situación: $y = \frac{500}{x}$
- Calcula una tabla de valores para los valores posibles de $x = \{1,50\}$
- Representa gráficamente los puntos en los ejes de coordenadas
- A través de la gráfica define el dominio y el recorrido de la función y explica qué representa.

Método II: (No utiliza la expresión algebraica)

- Calcula, para cada uno de los valores posibles de $x = \{1,2,3,4,5, 6 \dots 50\}$, los valores de y , y los agrupa en una tabla
- Representa gráficamente punto a punto en los ejes de coordenadas.
- Extrae el dominio de la función de la tabla como los valores posibles de la variable x y el recorrido a su vez como los valores posibles de la variable y .

Posibles errores en pregunta 4:

- Errores en la definición de lo que será la variable dependiente (coste por persona) de la independiente (número de amigos)
- Errores en la extracción de la expresión analítica suponiendo una expresión como $y=500x$
- Errores en la delimitación de los valores que puede tomar la variable x asignándole el valor 0 o valores superiores a 50 (aforo máximo).
- Errores en el cálculo de valores de la variable y a partir de los valores posibles de la variable x .
- Errores en la representación gráfica de las mismas por la definición de los ejes al revés.
- Errores en la representación punto a punto por errores en escalas.
- Error en la definición del dominio o recorrido por definir, por ejemplo, el dominio, como los valores posibles de y o a la inversa.

Definición de tareas pregunta 4:

Definición de tareas para el método I (Utiliza la expresión algebraica)

Tareas principales (Máxima penalización: 2 puntos). Definimos penalizaciones máximas:

- Obtener la expresión analítica de la función $y = \frac{500}{x}$ (1 punto)
- Obtener los valores de coste por persona en función del nº de personas de 1 a 50 (1 punto)
- Representar gráficamente el precio por persona en función del nº de personas (1 punto)
- Calcular y explicar qué representa el dominio de la función (0,5 puntos)
- Calcular y explicar qué representa el recorrido de la función (0,5 puntos)

Tareas auxiliares específicas (Máxima penalización: $\frac{2}{3} = 1,33$ puntos). Definimos penalizaciones máximas:

- Cálculo de la tabla de valores para los valores de x (0,5 puntos)
- Representa punto a punto en la gráfica (0,5 puntos)

- Define correctamente las escalas para las dos variables (0,5 puntos)

Tareas auxiliares generales (Máxima penalización $\frac{1}{3} = 0,66$ puntos). Definimos penalizaciones máximas:

- Cálculos aritméticos a la hora de obtener los diferentes valores de las variables (0,2 por error. Máximo 5 errores)

Definición de tareas para el método II (No utiliza la expresión algebraica)

Tareas principales (Máxima penalización: 2 puntos)

- Obtener los valores de coste por persona en función del número de personas de 1 a 50 (1 punto)
- Representar gráficamente el precio por persona en función del número de personas (1 punto)
- Definir correctamente el dominio de la función (0,5 puntos)
- Definir correctamente el recorrido de la función (0,5 puntos)

Tareas auxiliares específicas. Igual que en método I

Tareas auxiliares generales. Igual que en método I

[**Pregunta 5**] (1,5 puntos) Calcula la pendiente y ordenada en el origen de las siguientes funciones. Indica si son crecientes o decrecientes. Explica por qué.

- Función que pasa por los puntos (3,6) y (-1, 13)
- Función que pasa por los puntos (0,3) y ((4,0)
- $Y = \frac{4}{3}x - 2$

Objetivos de la evaluación pregunta 5:

La pregunta cinco pretende valorar las destrezas adquiridas en el trabajo de técnicas fundamentalmente. A través de esta pregunta evaluaremos su comprensión de ambos conceptos y su capacidad para la obtención de los mismos con enunciados y datos ofrecidos distintos.

A través de la pregunta 5 evaluaremos la adquisición de las técnicas T3A (Cálculo de la ordenada en el origen. (T3A1 Partiendo de la expresión analítica / T3A.2 partiendo de la representación gráfica / T3A.3 Partiendo de las coordenadas de dos puntos)), T3B (Cálculo de la pendiente

(T3B2.2.1. Si se facilita la ecuación de la recta, T3B2.2.2. Si se facilitan las coordenadas de dos puntos)) Y T4 (Interpretación sobre la monotonía de la función a través de la pendiente)

El estándar de aprendizaje relacionado con esta pregunta será Est.MA.4.4.1.

Respuestas esperadas pregunta 5:

Para el cálculo de la pendiente:

Método I: Dibujando en primer lugar la función, medirá la variación en la altura partido por la variación en el eje de abscisas. En el primer ejemplo, calculará la variación del eje de ordenadas midiendo la diferencia entre los dos puntos y partiendo por la variación en el eje de las abscisas.

$$m = \frac{6 - (-13)}{3 - (-1)} = \frac{19}{4} = 4,75$$

Método II: Partiendo de las coordenadas de los puntos, restará el valor de la variable y de ambos y lo partirá por la diferencia entre los valores de la variable x de ambos para obtener la pendiente.

Método III: (Apartado c): Identifica el valor que acompaña a la variable x en la expresión analítica de la función.

Para el cálculo de la ordenada:

Método I: Para el cálculo de la ordenada se valdrá de la propia gráfica para observar el punto en el que el valor de x es 0, es decir, el punto situado en el eje de ordenadas.

Método II: A partir del valor obtenido de la pendiente (m) sabremos que la ecuación de la recta es $y = mx + b$, siendo b la ordenada en el origen. En el primer ejemplo y tendremos que la ecuación de la recta es $y = 4,75x + b$. Entonces, sustituiremos el primer punto en esa ecuación obteniendo el valor de $b = 6 - 4,75 \cdot 3 = 6 - 14,25 = -8,25$. Podrán comprobar haciendo lo mismo con el otro punto.

Método III: Si se les facilita un punto (0,b), sabrán que esa coordenada b es la ordenada en el origen ya que acompaña a un valor de x que es cero.

Método IV: A partir de la expresión algebraica deducirán la ordenada como el valor que no acompaña a la pendiente, en el caso del apartado c, -2.

Posibles errores en pregunta 5:

- Identificación errónea de la pendiente como la ordenada en el origen y a la inversa.
- Aplicación de la T3B2.2.2 errónea restando los valores de las coordenadas x y dividiéndolos por la resta de valores de la coordenada y. ($\frac{2}{3}$ en vez de $\frac{3}{2}$)
- Identificación errónea de la ordenada en el origen en el método IV tomando el valor 2 y no -2.
- Identificación errónea de la ordenada en el origen por el método I, tomando el valor (x, 0) en vez del valor (0,x).
- No justifica su respuesta.

Definición de tareas en pregunta 5:

Tareas principales: (Máxima penalización 1,5 puntos (0,75 ordenada y 0,75 pendiente).

- Cálculo de la pendiente por alguno de los métodos descritos.
 - Errores en procedimiento de método I, II y III: 0,75 puntos máximo cada uno)
- Cálculo de la ordenada en el origen por alguno de los métodos descritos.
 - Errores en procedimiento de método I, II, III, IV: 0,75 puntos máximo cada uno)
- Razona sus respuestas. Justificación. 0,5 puntos máxima penalización.

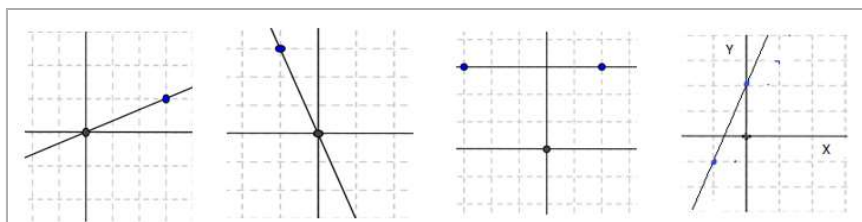
Tareas auxiliares específicas (Máxima penalización: 1 punto / 0,5 máximo para cada tarea)

- Errores en la obtención de la ecuación de la recta en los métodos II del cálculo de la ordenada en el origen. (Máxima penalización 0,5 puntos)
- Representación gráfica de la función en el método I del cálculo de la ordenada en el origen (Máxima penalización 0,5 puntos)
- Justificación de su respuesta (Máxima penalización 0,5 puntos)

Tareas auxiliares generales: (Máxima penalización: 0,5/ 0,1 por error. Máximo de 5 errores)

- Errores aritméticos de cálculo

[**Pregunta 6**] (1,5 puntos) relaciona cada gráfica con su ecuación. Razona tu respuesta.



a) $y = 3$ $y = -3x$ $y = 1/3 x$ $y = 3x + 2$

b) De las funciones anteriores, indica si son crecientes, decrecientes o constantes

Objetivos de la evaluación pregunta 6:

A través de la pregunta 6 evaluaremos su comprensión acerca de las distintas expresiones algebraicas asociadas a gráficas. Por ejemplo, veremos si diferencian una función constante o una que pasa por el punto (0,0) en cuanto a las características de su expresión algebraica (La función constante no tendrá variable x , o lo que es lo mismo, tendrá pendiente 0 y las que pasen por el punto (0,0) tendrán una ordenada en el origen (b) igual a 0, por lo que su expresión será $y = mx$)

A través de la pregunta 6 evaluaremos las técnicas T1 (Representación de puntos en el plano y de funciones a partir de tablas: T1A (Representación de puntos en el plano a través de sus coordenadas), T1B (Representación de funciones a partir de tabla o fórmula)), T3B.1 (Visualización e identificación de la pendiente en la gráfica), T2D (Monotonía de una función a través de su gráfica), T4 (Interpretación sobre la monotonía de la función a través de la pendiente)

El estándar de aprendizaje relacionado con esta pregunta será Est.MA.4.3.2.

Respuestas esperadas pregunta 6:

- Identifica la función constante como aquella representada en la gráfica III cuya pendiente es 0 (Expresión 1, $y=3$)
- Identifica la función de la gráfica IV como la función afín, cuya expresión algebraica correspondería con la d)
- De entre las expresiones algebraicas segunda y tercera, establece la diferencia substituyendo el valor de x observando el valor de la pendiente y diferenciando, si es negativo, la función como función decreciente y si es positivo como función creciente, llegando así a la conclusión de que la gráfica II corresponde a la expresión b y la I a la expresión c.

Posibles errores en pregunta 6:

Diferenciaremos entre varios tipos de errores que penalizaremos de forma distinta:

- Identifica la expresión $y=3$ (a) con alguna de las gráficas a, b o d (Confunde función constante con lineal o afín)
- Identifica la función afín $y= 30x+2$ con alguna de las gráficas a o b (Confunde función afín con lineal)
- Identifica la función $y=-3x$ con la gráfica a (Confunde dos funciones lineales)
- No justifica su respuesta.

Apartado b: Errores en la determinación de creciente decreciente o constante (Habremos visto si efectivamente confunde el concepto en los primeros errores, aquí nos referiremos a la expresión)

Definición de tareas pregunta 6:

Tareas principales: (Máxima penalización: 1,5 punto). Definimos penalizaciones máximas:

Identifica correctamente cada función con su expresión correspondiente: Posibles errores y sus penalizaciones máximas:

- Identifica la expresión $y=3$ (a) con alguna de las gráficas a, b o d (Confunde función constante con lineal o afín) (Máxima penalización: 1,5 Puntos)
- Identifica la función afín $y= 30x+2$ con alguna de las gráficas a o b (Confunde función afín con lineal) (Máxima penalización: 1 Punto)
- Identifica la función $y=-3x$ con la gráfica a (Confunde dos funciones lineales) (Máxima penalización: 0,5 Puntos)
- Errores en la determinación de creciente decreciente o constante (Habremos visto si efectivamente confunde el concepto en los primeros errores, aquí nos referiremos a la expresión. (0,5 puntos)

Tareas auxiliares específicas: (Máxima penalización 1 punto)

- Justificar su respuesta (Máxima penalización 0,5 puntos)

3. Referencias

- Alayo, F. (1989). Funciones y gráficas. *Suma*, 4, pp. 39-42.
- Alcalde Guindo, F., Nieto M., Maestre Blanco, A., Pérez A., *Matemáticas. 2 ESO. Savia* (2010). Madrid. Grupo SM
- Azcárate Giménez, C., Deulofeu Piquet, J. (1996). Funciones y gráficas. *De Colecciones Matemática: Cultura y Aprendizaje*. Madrid: Síntesis.
- Calvo Pesce, C., Deulofeu Piquet, J., Jareño Ruiz, J., Morera Úbeda, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Editorial Síntesis
- Colera, J., Gaztelu, I., *Matemáticas 2 Educación Secundaria* (2003). Madrid. Grupo Anaya
- Fernandez, C., Llinares, S. (2010) *Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales*. Universidad de Alicante
- Juan Redal, E. *Solucionario Santillana* (2014). Madrid. Grupo Santillana
- Kwai Meng, S., Wai Lung, C. (2008), “Mathematics Matters”, Marshall Cavendish Education, Singapore.
- Luis-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Granada
- Shell Centre for Mathematical Education. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Ministerio de Educación y Ciencia y Universidad del País Vasco.
- Vall, C. (2000). *Las ideas de los alumnos respecto de la dependencia funcional entre variables*. SUMA, 33, pp. 73-81
- Arnal, A. y Beltrán, P. (2019). Diseño, organización y desarrollo de actividades para el aprendizaje de Matemáticas. [Apuntes académicos]. ADDUnizar.
- Martínez, S. (2019). Evaluación e innovación docente e investigación educativa en Matemáticas. [Apuntes académicos]. ADDUnizar

- http://www.educaragon.org/HTML/carga_html.asp?id_submenu=60

- Which doesnt belong? <https://wodb.ca/graphs.html>

- Plataforma Desmos:

<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/57e563aa072703f509160cc2#preview/f1319cb6-f972-4fed-a524-0aeebc97e74c>

- LEY ORGÁNICA 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. Publicado en «BOE» núm. 295, de 10/12/2013.
- REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Publicado en: «BOE» núm. 3, de 3 de enero de 2015.
- REAL DECRETO 83/1996, de 26 de enero, Real Decreto 83/1996, de 26 de enero, por el que se aprueba el Reglamento Orgánico de los Institutos de Educación Secundaria. publicado en: «BOE» núm. 45, de 21 de febrero de 1996.
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Publicado en: «BOE» núm. 25, de 29 de enero de 2015.
- ORDEN de 15 de mayo de 2015, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad Autónoma de Aragón el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Recuperada de:
- ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Recuperada de: <http://www.boa.aragon.es/cgi-bin/EBOA/BRSCGI?CMD=VEROBJ&MLKOB=910768820909>

4. Anexos

4.1 ANEXO 1: Prueba de conocimientos previos a través de Socrative



Functions PREVIOUS II ('Copy')

Score: _____

1. Ordena estos números en la recta numérica

- ☐ A -8,-3,-10,6,-1
- ☐ B -3,-10,6,-1,-8
- ☐ C -1,-3,6,-8,-10
- ☐ D -10,-8,-3,-1,6

2. Halla el valor de y cuando x es 1,6,-8 y 0 si $y = (1/2)x + 3$

- ☐ A 11, 6, 1, 3
- ☐ B 4,5, 6, -1, 3
- ☐ C 4, 15, 1, 3
- ☐ D 5, 5, -1, 3

3. Calcula el área de un cuadrado de lado 3 cm y de un triángulo de base 6 cm y altura 5 cm

- ☐ A 9 cm, 25 cm²
- ☐ B 9 cm², 30 cm²
- ☐ C 6 cm², 36 cm²
- ☐ D 9 cm, 30 cm

4. Si mi hermano tiene el doble de años que yo, ¿Qué expresión algebraica define mi edad?

- ☐ A $y = 2 + x$
- ☐ B $y = (2/x)$
- ☐ C $y = 2x$
- ☐ D $y = x$
- ☐ E $y = (x/2)$

5. Ordena estos valores en la recta numérica: -1/3, -4/6, 5, 30/100

- ☐ A -4/6, -1/3, 30/100, 5
- ☐ B -1/3, 30/100, -4/6, 5
- ☐ C -4/6, -1/3, 5, 30/100

6. Si 5 kilos de naranjas me cuestan 10 euros, cuánto me costarán 3 kilos de naranjas?

- ☐ A 3€
- ☐ B 5€
- ☐ C 2€
- ☐ D 6€
- ☐ E 12€

7. Si un libro de 100 páginas vale 15 €. ¿Cuánto costará uno de 200 páginas?

- ☐ A 20 €
- ☐ B 30 €
- ☐ C 10 €
- ☐ D No podemos saberlo

8. Viajando a 60 km/hora tardo en llegar a mi pueblo 1,50 horas. ¿Cuánto tardaré si viajo a 120 km/hora?

- ☐ A 45 min
- ☐ B 75 min
- ☐ C 1 hora
- ☐ D 2 horas

4.2 Anexo II: DESMOS

Make a Prediction



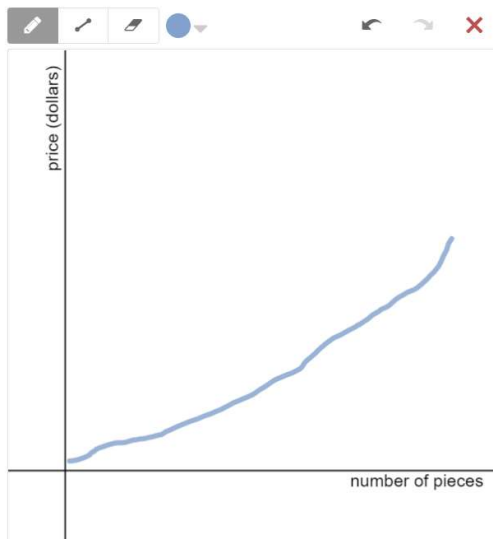
Mackenzie built the small LEGO set. It cost \$5.49.

Caleb built the large LEGO set.

How much do you think the large LEGO set cost?

Share with Class

Sketch the Relationship



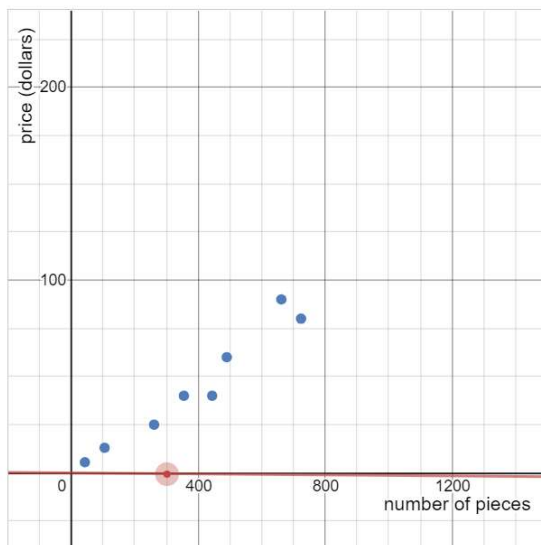
One way to make a more accurate prediction is to explore the relationship between price and the number of pieces.

(1) Sketch what you think the "price vs pieces" graph looks like.

(2) Explain your thinking below.

Share with Class

Build a Model

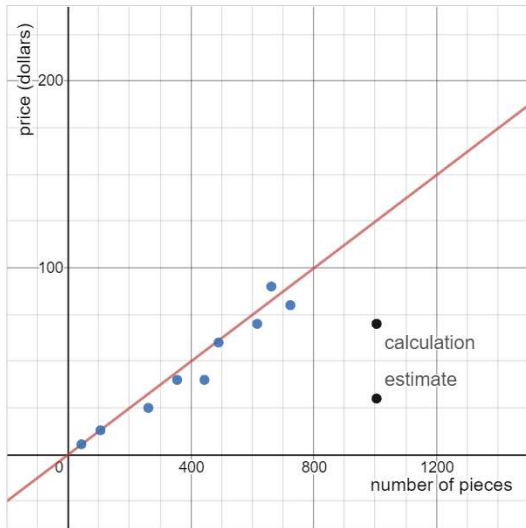


The blue points represent price and number of pieces for several LEGO sets.

Drag the red point to create a model for the data.

When you finish, continue to the next screen.

Use your Model



The model you built on Screen 3 is shown in red.

The equation of your model is $y = 0.125x$.

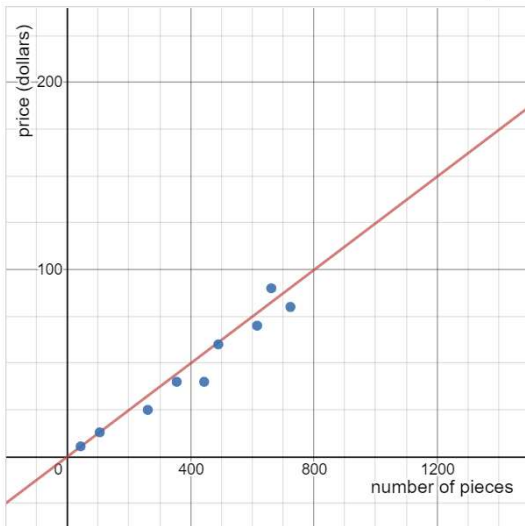
Based on what you know now, make a new prediction:
How much will the large LEGO set (1005 pieces) cost?

Enter your prediction, then press "Submit."

Edit your response

Three other students' responses would show up here.

Interpret the Slope

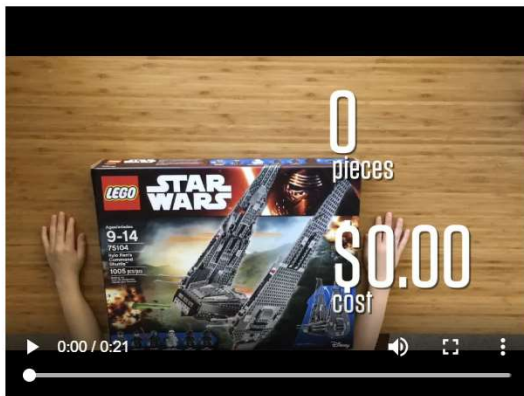


The equation of your model is $y = 0.125x$.

What does 0.125 mean in terms of LEGO prices?

Share with Class

Reveal



Play the video to see the actual price revealed.

Your original prediction: \$30.00

Your final prediction: \$1200.00

How could you fix your previous work so your final prediction would be closer to the answer?

Share with Class

4.3 Anexo III: Razonamiento guiado para los problemas de C2

C2.1: En una clase de 28 alumnos, se realiza una prueba de matemáticas de 18 preguntas. El profesor le pide a Jorge que corrija las pruebas de sus compañeros y que los califique con un número de 0 a 10 puntos. Obtén una forma general de calcular la calificación de cada uno de ellos sin necesidad de ir uno por uno. Conocidas las notas de nuestros compañeros, ¿podremos hallar los aciertos de cada uno?

Jorge corregirá el primer examen, y se encuentra con que ha tenido bien 12 preguntas de 18. Y se dará cuenta de que, si 18 preguntas son un 10, debe calcular cuántos puntos significan 12 aciertos.

18 aciertos son un 10.

12 aciertos corresponderán a $\frac{12 \cdot 10}{18}$ puntos en el examen: Un 6,6.

Irá a corregir el siguiente, en el que suponemos que ha habido 9 aciertos, y realizará la misma operación.

18 aciertos son un 10.

9 aciertos son $\frac{9 \cdot 10}{18}$ puntos en el examen: Un 5

¿Podemos aplicar el mismo cálculo a todos nuestros compañeros? Sí, diremos:

Si 18 aciertos son 10 puntos

X aciertos son $\frac{\text{aciertos} \cdot 10}{18}$ puntos.

La función quedaría expresada de la siguiente manera: $Y = \frac{10X}{18}$

Nos permitirá calcular la nota de cualquier compañero.

¿Si representamos las notas en un eje de coordenadas en el que X son los aciertos e Y la nota, qué nota crees qué punto elegirías para ser representado?

Conocidas las notas de nuestros compañeros, ¿podremos hallar los aciertos de cada uno?

C2.2: (Función lineal o de proporcionalidad) Disponemos de las medidas de un grupo de 40 niños expresadas en metros. Necesitamos expresarlas en centímetros, ¿Cómo podemos transformar nuestras medidas en centímetros de forma general sin necesidad de ir una por una?

Sabemos que 1 metro son 1000 cm. Por lo tanto, un alumno/a que mida 1.5 metros, medirá 1500 cm, y uno/a que mida 0.75 m, medirá 750 cm. Vemos que para traducir de metros a cm multiplicamos por 1000.

La variable y es la variable que no conocemos y queremos conocer: Expresión de la medida en cm

La variable x es la variable que conocemos: Expresión de la medida en metros.

Para calcular y tendremos que multiplicar x por 1000, quedando la siguiente expresión:
 $y = 1000x$

C2.3: (Función cuadrática) Si conocemos las medidas de un cuadrado, ¿cómo podemos obtener su área? ¿Podrías hallarla para cuadrados de lado 2, 6, 10 y 15 cm? ¿Cómo obtienes una forma general?

Conocido el lado de un cuadrado, sabemos que, conocida la fórmula del área del mismo, tendremos que multiplicar lado por lado para hallar el área (en m^2)

Por lo tanto, sabremos que:

Si el lado es 2, el área será $A = 4 = 2 \cdot 2 \text{ m}^2$

Si el lado es 3, el área será $A = 9 = 3 \cdot 3 \text{ m}^2$

Si el lado es 10, el área será $A = 100 = 10 \cdot 10 \text{ m}^2$

Podremos llamar a y: Área del cuadrado

Podremos llamar a x: Longitud del lado

Ahora construimos la tabla de valores anterior y deducimos que $y = x^2$

C2.4: Si sabemos que un coche puede viajar a 150 km/hora. ¿Cómo podemos averiguar cuántos metros recorre cada segundo?

Si suponemos que un coche se desplaza a 1 km/ hora, a cuántos metros / segundo equivaldrá?

Sabemos que 1 km son 1000 metros y que 1 hora son 3600 segundos, por lo tanto, desplazarse a 1km/hora será lo mismo que desplazarse a 1000 metros/3600 segundos = 0,27 m/seg

Por lo tanto, sabremos que, si el coche se desplaza a 150 km/hora, se desplaza a $150 \cdot 0.27$ metros por segundo = 41,66 metros/segundo

Habremos expresado la relación entre la velocidad expresada en KM/h y m/sg como : $m/sg = 0.27 \cdot km/h$

Llamando a y: Velocidad expresada en km/h y a x: Velocidad expresada en m/s

Deduciremos que: $y = 0.27x$

C2.5: (Función afin) Irene ha ahorrado 18 € y cada semana ahorra 6 € más. Andrés tiene 146 € y cada semana gasta 8 €. ¿Cuántas semanas tienen que pasar para que Irene y Andrés tengan el mismo dinero?

La primera semana, Irene dispondrá de 18 € y Andrés de 146 €-

La segunda semana, Irene habrá ahorrado 6 €, así que tendrá $18 + 6 = 24$ € y Andrés, habrá gastado 8 € así que tendrá $146 - 8 = 138$ €

La tercera semana Irene tendrá $24 + 6 = 30$ € y Andrés $138 - 8 = 130$ €

¿Podemos hallar una expresión para el dinero que tiene Irene? ¿En base a qué cambiará? A las semanas que hayan transcurrido.

Si y = Dinero que tiene Irene y x = las semanas que han transcurrido. $y = 18 + 6x$

¿Podemos hacer lo mismo con Andrés?

Si ahora y = Dinero que tiene Andrés y x = las semanas que han transcurrido.

$y = 146 - 8x$

Queremos calcular el número de semanas tal que $18 + 6x = 146 - 8x$

Despejamos la variable y deducimos que cuando hayan transcurrido $x = 10$ semanas (¿El resultado da un número decimal y nos debemos plantear, puede ser un número de semanas un decimal?)

C2.6: (Función afín) En una compañía de autobús el precio del billete sufre una recarga para maletas con peso superior a 5 kg. El billete cuesta 35 €. La recarga es de 7 € por kg. ¿Cómo podemos calcular el precio del billete dados los kg de las maletas?

El precio del billete variará en función de los kg del equipaje. Con esta conclusión ya sabemos qué variables vamos a utilizar.

Llamamos y a la variable que queremos conocer: El precio final

x será el peso del equipaje.

De esa manera sabremos que si el equipaje pesa menos de 5 kg el precio será 35 €. Pero si el equipaje supera los 5 kg abonarán 7 € más por cada kg de más.

¿Cuántos kg de más llevará un pasajero cuya maleta pese 8 kg? Aquellos kg que superen a 5, es decir, $8 - 5 = 3$ kg de más.

¿Y un pasajero que lleve una maleta de 10 kg? Aquellos kg que superen a 5, es decir $10 - 5 = 5$ kg

Si X es el peso del equipaje, para x superiores a 5 tendremos un extra de kg de $x - 5$ kg

Y deberán abonar 7 veces ese excedente, es decir, $7 \cdot (x - 5)$ €

Por lo tanto, la relación entre las variables quedaría definida de la siguiente manera:

$y = 35 + 7(x - 5)$ Si x es mayor que 5.

$y = 35$ Si x es menor o igual que 5

C2.7: Franchó tiene en su casa un circuito de trenes en miniatura. A las 17h pone en marcha uno de los trenes y a las 17h y 10 min ha hecho 20 vueltas al circuito. Si detiene el tren a las 17h 23m y 30 segundos, ¿cuántas vueltas al circuito habrá dado? ¿Cuánto tiempo habrá pasado si ha dado 100 vueltas? Sabemos

Sabemos que el tren tarda 10 minutos en dar 20 vueltas. Con lo cual conocemos la relación entre minutos transcurridos y vueltas dadas. En el problema nos dan el tiempo transcurrido y nos piden que hallemos las vueltas que ha dado. Por qué denominaremos Y a la variable que

queremos conocer: y: Vueltas que ha dado y x la conocida, la independiente: tiempo transcurrido en minutos.

Si en 10 minutos da 20 vueltas

¿En un minuto? $\frac{20}{10} = 2$ vueltas

Concluimos con qué $y = 2x$

En el problema nos dan el dato del tiempo expresado de forma compleja: 10h 23m. Deberemos transformarlo a minutos: $= 10 \cdot 60 + 23 = 623$ min. Por lo tanto, habrá dado $= 623 \cdot 2$ vueltas $= 1.246$ vueltas.

Ahora nos preguntan cuánto tiempo ha transcurrido si ha dado 100 vueltas. Utilizando la misma expresión podemos transformar la variable dependiente en independiente, la conocida en la desconocida.

Si $y = 2x$, entonces $x = \frac{y}{2}$

Si $x = 100$ vueltas, sustituyendo obtendremos que $x = 50$ minutos

C2.8: (Función de proporcionalidad inversa) Tenemos un rectángulo hecho de papel cuya área es 20 cm^2 . Con este mismo rectángulo queremos construir otros de diferentes medidas, pero manteniendo la misma área. ¿Cuánto tendrán que medir sus lados?

Sabemos que el área corresponde a esta expresión $A = b \cdot h$, y nuestra área es conocida ($A = 20$)

Por lo tanto, podremos expresar la base en función de la altura. $\text{Base} = \frac{A}{\text{altura}} = \frac{20}{\text{altura}}$.

Y también podremos hacerlo en función de su base. $\text{Altura} = \frac{A}{\text{base}} = \frac{20}{\text{base}}$.

Gracias a esta expresión podremos asignar cuántos valores queramos a la base o a la altura, y con ese dato, deducir el otro.

Gracias a este ejercicio podremos trabajar la proporcionalidad inversa, aunque no sea uno de los objetivos curriculares de este año.

4.4 Anexo IV: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del Bloque 4º del currículo de 2º ESO.

Crit.MA.4.1. Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas.

Est.MA.4.1.1. Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas.

Crit.MA.4.2. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.

Est.MA.4.2.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto.

Crit.MA.4.3. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.

Est.MA.4.3.1. Reconoce si una gráfica representa o no una función.

Est.MA.4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

Crit.MA.4.4. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales, utilizándolas para resolver problemas.

Est.MA.4.4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.

Est.MA.4.4.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores.

Est.MA.4.4.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y la representa.

Est.MA.4.4.4. Estudia situaciones reales sencillas y, apoyándose en recursos tecnológicos, identifica el modelo matemático funcional (lineal o afín) más adecuado para explicarlas y realiza predicciones y simulaciones sobre su comportamiento.