Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Una propuesta de enseñanza de las ecuaciones de primer grado en 1º de E.S.O.

A proposal for the teaching of first degree equations in 1º E.S.O.

Autora

Julia Solana Sancho

Director

Víctor Manero García

Facultad de Educación

Curso 2018/2019

ÍNDICE

A. Definición del objeto matemático a enseñar

En este trabajo se pretende hacer una propuesta didáctica de cómo enseñanza de la ecuación de primer grado en 1º de ESO y su empleo en la resolución de problemas. Para ello se define una ecuación como una igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple solamente para ciertos valores de las letras, que llamaremos incógnitas, y que encontrar sus soluciones es averiguar los valores que deben tomar las incógnitas para que la igualdad se conserve.

La <u>terminología</u> que se va a emplear al tratar las ecuaciones es fundamentalmente: miembros de la ecuación, términos, incógnita, soluciones y grado de la ecuación.

Los **miembros** de una ecuación son las expresiones que aparecen a cada lado del signo de igualdad y los **términos** son los sumandos que forman los miembros.

$$\overbrace{2x + 3}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{x - 4}^{\text{Segundo miembro}}$$

Términos

Las **incógnitas** de una ecuación son las letras cuyos valores queremos obtener. Las **soluciones** de una ecuación son los valores que hemos de dar a las incógnitas para que se cumpla la igualdad. El **grado** de una ecuación es el mayor de los grados de los monomios que contiene después de haber reducido los términos semejantes.

Los contenidos y criterios de evaluación correspondientes a este objeto matemático están recogidos en el Currículo de ESO de Aragón como se especifica a continuación:

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Matemáticas. 1ºESO. Bloque 2: Números y Álgebra.

Contenidos a enseñar:

- Iniciación al lenguaje algebraico.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución. Interpretación de la solución. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.

Criterios de evaluación:

- Crit.MA.2.6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.

- Crit.MA.2.7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer grado, aplicando para su resolución métodos algebraicos.

Los problemas se introducirán en contextos conocidos por el alumnado presentes en sus realidades cotidianas para fomentar la motivación por el aprendizaje de este objeto matemático.

Se enseñarán diferentes técnicas que nos servirán para guiar el aprendizaje hasta la resolución de problemas. Las técnicas corresponderán a los diferentes campos de problemas: identificación de la terminología, traducción a lenguaje algebraico, identificación de patrones, resolución de ecuaciones mediante tanteo y herramientas que el alumnado ya tenga adquiridas y por último se enseñará la técnica de resolución de ecuaciones mediante la reducción de sus miembros y trasposición.

Todas ellas estarán sustentadas en las tecnologías correspondientes para que el alumnado comprenda el porqué del uso de dichas técnicas haciendo especial hincapié en la comprensión de ecuaciones equivalentes y conservación de la igualdad.

Es importante conocer dónde surgió el álgebra y bajo qué pretexto para acercarnos a las posibles dificultades que pueda tener el alumnado y para contextualizar la necesidad de su estudio.

"El primer documento en el que aparece el álgebra data de 1650 a.C. (papiro de Rhid) e inició el primer periodo que comprende los años 1700 a.C.-1700 d.C. y se caracterizó por la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones." (Grupo Thales). La principal razón de ser que dio origen al álgebra fue la resolución de problemas:

> Diversos autores han destacado el hecho de que el álgebra progresó como un método para resolver problemas en la época de pujanza económica de la Europa medieval (Paradís, 1993; Puig, 1993; Radford, 1995; Rojano, 1996). El álgebra se presentó como una regla (*regola*) desarrollada con la finalidad de resolver problemas verbales; en principio para resolver problemas de entretenimiento, no prácticos, pero enseguida se extendió a los problemas comerciales. La resolución de problemas ha sido, por tanto, eje predominante en el desarrollo y consolidación del lenguaje simbólico algebraico. El paso de la aritmética al álgebra se produjo, principalmente, por la necesidad de tener un mecanismo potente para resolver problemas (inicialmente fueron problemas aritméticos y geométricos clásicos). Cada familia de problemas tiene diferentes dificultades: algunas aparecen en términos de parametrización, otras en términos de sintaxis. El lenguaje algebraico permite abordar los problemas a través de sistemas de representación simbólicos que generalizan los métodos de resolución. El álgebra, posteriormente, evolucionó desde ser una herramienta al servicio de la resolución de problemas a ser un objeto matemático en sí, una rama autónoma de las matemáticas. (Fernández, F., 1997, pp.38)

Aunque la resolución de problemas ha sido el eje central de desarrollo del álgebra, esta se ha hecho desde el conocimiento aritmético y es conveniente conocer la aportación de esta en su desarrollo para facilitar la construcción del pensamiento algebraico en el alumnado:

> El desarrollo del álgebra se realizó desde la aritmética, por una parte, al tratar de encontrar solución a los problemas mercantiles (las escuelas de ábaco de la Italia medieval) y, por otra, a través de la geometría resolviendo problemas algebraicos de forma geométrica (Vièta). La enseñanza debe tener en cuenta y sacar provecho de esta evolución histórico-epistemológica para enfocar su aspecto operativo, y potenciar metodologías que permitan, a través de la resolución de problemas, facilitar el paso complejo desde sistemas de representación más intuitivos y con mayor carga aritmética hacia los sistemas simbólicos de representación, más sofisticados. (Fernández, F., 1997, pp.39)

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

"El libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real" (Monterrubio y Ortega 2009). En esta línea, Schubring, (1987) apunta que "los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos". Por ello se considera necesario que, a la par que se estudia el currículo y lo que en él se especifica, se revisen libros de texto de diferentes editoriales para conocer qué se está enseñando en el aula y cómo se está siguiendo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para ello se analizan tres libros de texto de editoriales diferentes (ANAYA, 1996; ANAYA, 2016; EDELVIVES, 2007; SM, 2002), en particular nos detenemos en cómo lo introducen y qué técnicas, tecnologías y campos de problemas emplean.

En el caso de la editorial Anaya encontramos algunos problemas planteados como juegos que podrían enmarcarse en **razón de ser**. Las indicaciones "resuelve a tu aire" e "intenta descubrir por tus propios medios" muestran una clara intención de que el alumnado busque la manera de resolver los problemas y de que el primer acercamiento al álgebra sea desde la necesidad.

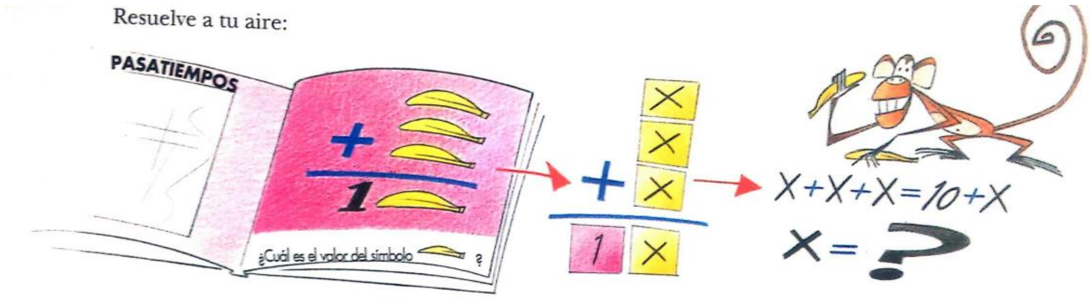


Imagen 1: Razón de ser. (Anaya, 1996)

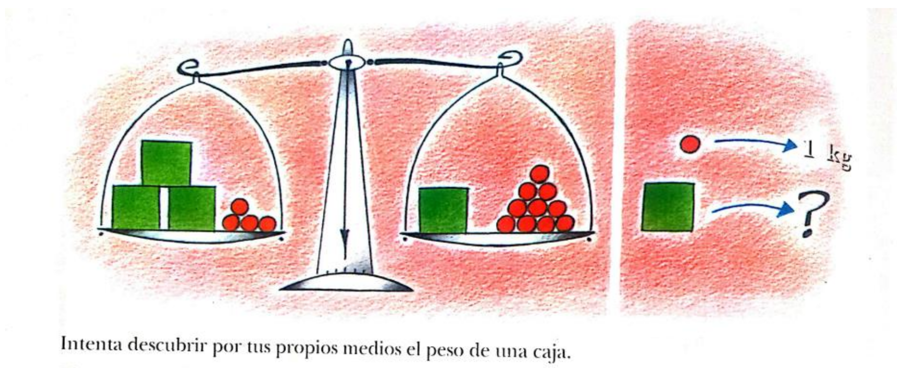
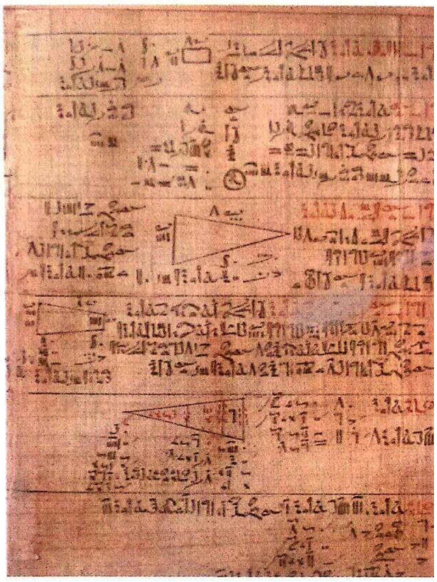


Imagen 2: Razón de ser. (Anaya, 1996)

En distintas editoriales encontramos referencias a las primeras apariciones del álgebra y al contexto histórico en el que apareció. Todas ellas aparecen en los márgenes a modo de curiosidad.

Algo de historia



Papiro de Rhind (1650 a. C.)

«Un montón y un séptimo del mismo es igual a veinticuatro» es uno de los casi 100 problemas que aparecen en este papiro. Los egipcios denominaban *aha* o montón a la incógnita y obtenían la solución por el método de la falsa posición o *regula falsi*, que consistía en tomar un valor concreto y comprobar si ese valor cumplía la ecuación. Si no la cumplía, seguían con los cálculos hasta obtenerla.

Imagen 3: Referencia histórica (Edelvives, 2007)

Algo de historia

El matemático francés François Viète (1540-1603) escribió el primer tratado de Álgebra en el que utilizaba las letras para designar las incógnitas. Su colega Descartes contribuyó notablemente al desarrollo de esta notación.

Imagen 4: Referencia histórica (Edelvives, 2007)

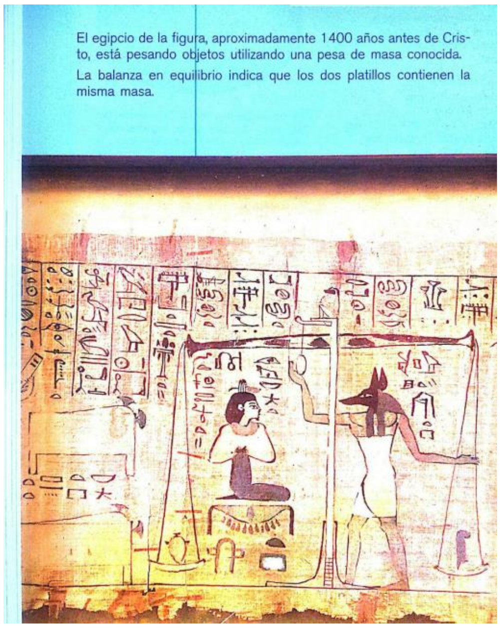
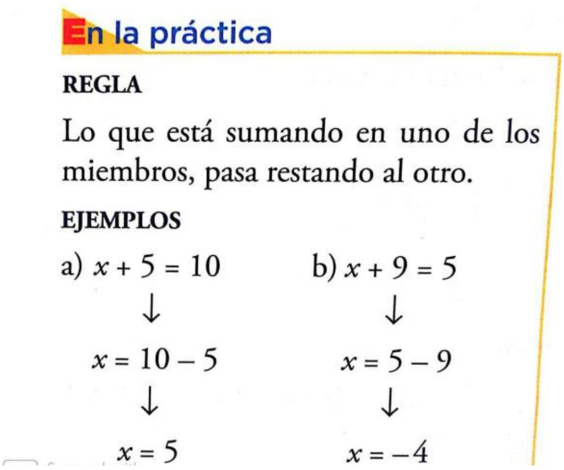


Imagen 5: Referencia histórica (SM, 2002)

Las **técnicas** que habitualmente se enseñan para la resolución de ecuaciones son diversas y salvo alguna excepción son planteadas como una mecanización de pasos sin potenciar la comprensión de estas. La única editorial que sugiere comenzar resolviendo ecuaciones mediante tanteo y ensayo-error es Anaya, las otras editoriales no plantean esta primera técnica para comprender el significado de solución de ecuación.

La técnica de trasposición de términos se enseña en muchos casos como una mecanización de pasos a seguir tal y como se muestra en las imágenes 6, 7, 8 y 9.

Se plantean una serie de reglas según la naturaleza de la ecuación sin incidir en la comprensión real.



En la práctica

REGLA

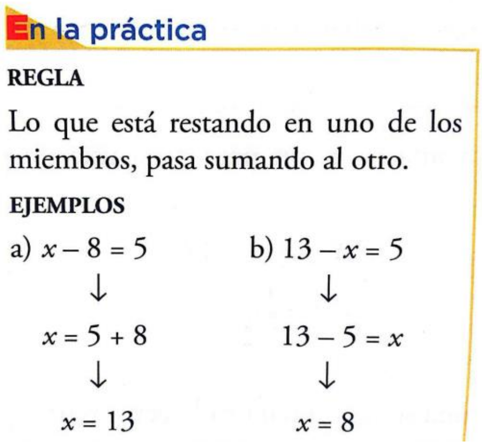
Lo que está sumando en uno de los miembros, pasa restando al otro.

EJEMPLOS

a) $x + 5 = 10 \rightarrow x = 10 - 5 \rightarrow x = 5$

b) $x + 9 = 5 \rightarrow x = 5 - 9 \rightarrow x = -4$

Imagen 6: Técnica (Anaya, 2016)



En la práctica

REGLA

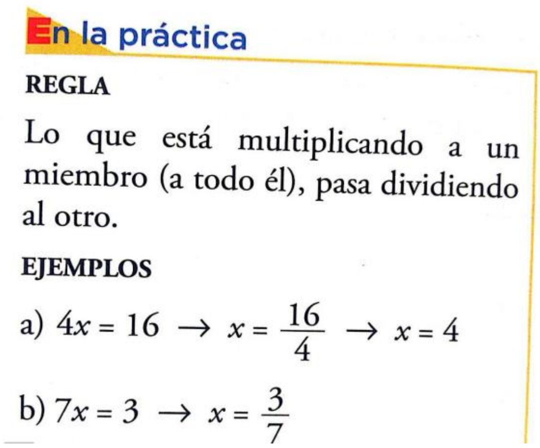
Lo que está restando en uno de los miembros, pasa sumando al otro.

EJEMPLOS

a) $x - 8 = 5 \rightarrow x = 5 + 8 \rightarrow x = 13$

b) $13 - x = 5 \rightarrow 13 - 5 = x \rightarrow x = 8$

Imagen 7: Técnica (Anaya, 2016)



En la práctica

REGLA

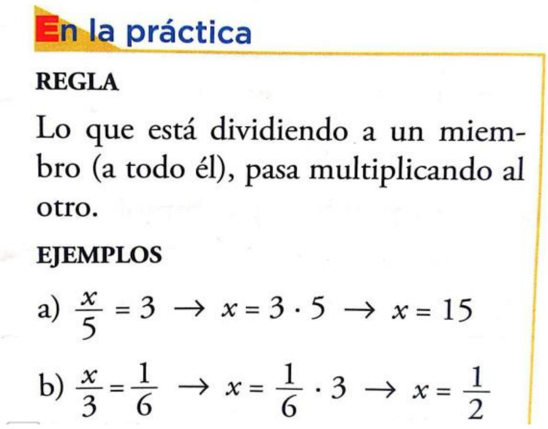
Lo que está multiplicando a un miembro (a todo él), pasa dividiendo al otro.

EJEMPLOS

a) $4x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{4} \rightarrow x = 4$

b) $7x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{7}$

Imagen 8: Técnica (Anaya, 2016)



En la práctica

REGLA

Lo que está dividiendo a un miembro (a todo él), pasa multiplicando al otro.

EJEMPLOS

a) $\frac{x}{5} = 3 \rightarrow x = 3 \cdot 5 \rightarrow x = 15$

b) $\frac{x}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow x = \frac{1}{6} \cdot 3 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

Imagen 9: Técnica (Anaya, 2016)

En las imagen 10 se puede observar cómo aunque se tipifica de nuevo y se establece una técnica para ese tipo de ecuación, se hace desde una mayor explicación del porqué, efectuando la misma operación en ambos miembros de la ecuación lo que puede ayudar al alumnado a comprender mejor el significado de ecuación equivalente.

Observa

- Las ecuaciones del tipo **ax = b** se resuelven dividiendo los dos miembros de la ecuación entre a, con lo que su solución es:

$$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

- Las ecuaciones del tipo $\frac{x}{a}$ **= b** se resuelven multiplicando los dos miembros de la ecuación por a, con lo que su solución es:

$$\frac{x}{a} \cdot a = b \cdot a \Rightarrow x = b \cdot a$$

Imagen 10: Técnica (Edelvives, 2007)

En la imagen 11 se muestra una técnica completa para la resolución de una ecuación basada en la reducción y trasposición de términos resaltando qué operación se hace y que se efectúa en ambos miembros.

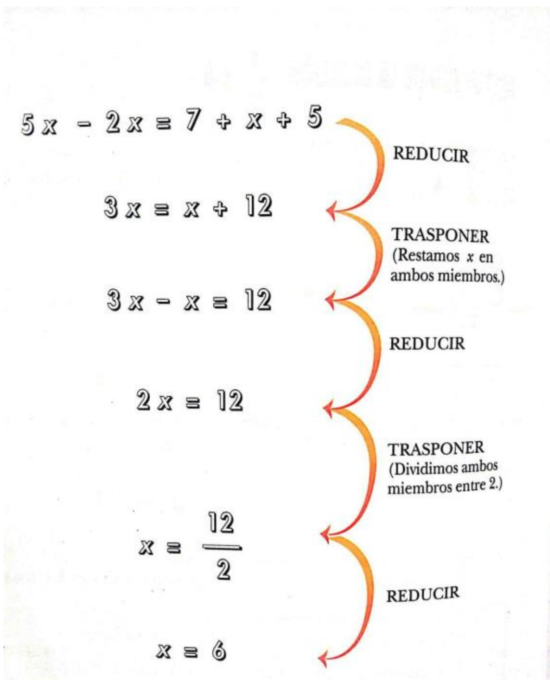


Imagen 11: Técnica (Anaya, 1996)

Las **tecnologías** que se emplean para justificar las técnicas fundamentalmente se basan en definiciones. En algunas editoriales se justifica la técnica de trasposición de términos explicando el concepto de ecuación equivalente como se muestra en las imágenes 12 y 13.

Si en una ecuación se opera con el mismo número en los dos miembros:
- La igualdad permanece.
- Se obtiene una ecuación equivalente a la primitiva.

Esto nos permite cambiar los términos de un miembro a otro.

Imagen 12: Tecnología (Anaya, 1996)

Regla de la suma: *Si se suma o resta el mismo número o letra a los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra ecuación equivalente.*

Imagen 13: Tecnología (SM, 2002)

A grandes rasgos las tres editoriales analizadas presentan una propuesta didáctica basada en la explicación de técnicas sin que surja en el alumnado una previa necesidad, seguida de un trabajo e institucionalización de estas. Existen unas tecnologías, fundamentalmente basadas en definiciones, que justifican el uso de las técnicas. No obstante encontramos propuestas que presentan técnicas de resolución sin justificaciones y que producen en el alumnado una automatización en la resolución de ecuaciones llevando a expresiones tan habituales como “pasamos al otro lado de la ecuación” sin comprender la tecnología que subyace.

En cuanto a los contextos en los que se plantean los problemas y ejercicios encontramos una uniformidad que se repite en todos los libros de texto. A continuación se exponen algunos ejemplos:

<u>Balanzas</u>: Se representan ecuaciones mediante balanzas.

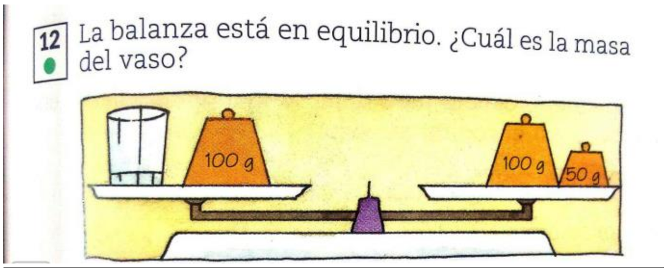


Imagen 15: Ejercicio con contexto de balanzas (SM, 2002)

Numéricos: Aquellos que establecen relaciones entre números.

45. El quíntuplo de un número menos 3 unidades es igual a su doble más 3 unidades. ¿Cuál es el número?

Imagen 16: Ejercicio con contexto numérico (Edelvives, 2007)

Geométricos: Se emplean las propiedades de las figuras planas para relacionar sus magnitudes.

37 Los tres lados del triángulo vienen expresados en metros. Si su perímetro es 27 metros, halla la longitud de cada lado.

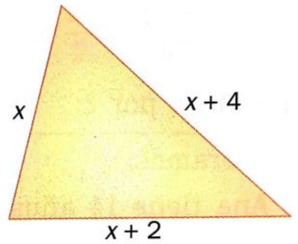


Imagen 17: Ejercicio con contexto geométrico (SM, 2002)

Edades: Se relacionan edades entre personas.

8 Marisa es tres años más joven que su hermana Rosa y un año mayor que su hermano Roberto. Entre los tres igualan la edad de su madre, que tiene 38 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Imagen 18: Ejercicio con contexto de edades (Anaya, 1996)

En la siguiente tabla se recogen los contextos empleados en cada editorial donde se puede observar la estandarización del empleo de todos ellos.

	ANAYA	SM	EDELVIVES
Balanzas	X	X	
Numéricos	X	X	X
Geométricos	X	X	X
Edades	X	X	X

Tabla 1: Relación de contextos según editorial

C. Conocimientos previos del alumnado

Para la implementación del nuevo objeto matemático, el alumnado deberá saber realizar operaciones numéricas y conocer la jerarquía de operaciones. Estos conocimientos previos están recogidos en el currículo de Educación Primaria de Aragón como a continuación se detallan:

ORDEN ECD/850/2016, de 29 de julio, por la que se modifica la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Anexo II. Matemáticas. 6º.

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

Contenidos:

-Planificación del proceso de resolución de problemas: Análisis y comprensión del enunciado, Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc. Resultados obtenidos.

-Acercamiento al método de trabajo científico mediante el estudio de algunas de sus características y su práctica en situaciones sencillas. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

Criterios de evaluación:

- Crit.MAT.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas
- Crit.MAT.1.7. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados para la resolución de problemas
- Crit.MAT.1.8. Conocer algunas características del método de trabajo científico en contextos de situaciones problemáticas a resolver.
- Crit.MAT.1.9./Crit.MAT.1.11 Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático: precisión, rigor, perseverancia, reflexión, automotivación y aprecio por la corrección. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.

Bloque 2: Números.

Contenidos:

-Números positivos y negativos.

-Fracciones equivalentes, reducción de dos o más fracciones a común denominador.

-Operaciones con fracciones.

-Operaciones con números naturales

-Operaciones con fracciones.

-Algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división.

- Crit.MAT.2.3. Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas.
- Crit.MAT.2.4./Crit.MAT.2.6. Operar con los números teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, aplicando las propiedades de las mismas, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora), usando el más adecuado.
- Crt.MAT.2.8. Conocer, utilizar y automatizar algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en comprobación de resultados en contextos de resolución de problemas y en situaciones de la vida cotidiana.

En principio los conocimientos adquiridos por el alumnado hasta el momento son suficientes para abordar el álgebra y en concreto la enseñanza de la ecuación de primer grado. Además en Educación Primaria se han hecho ejercicios del tipo: "Completa el cuadrado con el número correcto $\boxed{} + 7 = 15$", son los problemas llamados aditivos de una etapa o de valor perdido, fundamentales para que ahora el paso al uso del álgebra sea más asequible y la sustitución de ese rectángulo por algo desconocido que denotamos x se hará más comprensible.

En esta propuesta nos situamos en la unidad didáctica de iniciación al álgebra y se va a abordar la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. Asumimos que el alumnado acaba de aprender el manejo del álgebra, operaciones con monomios y traducción a lenguaje algebraico.

No obstante, deberemos asegurarnos de que el alumnado posee estos conocimientos antes de comenzar a introducir el nuevo objeto matemático y si estos fuesen escasos hacer hincapié en su profundización. Es recomendable realizar una evaluación inicial para detectar posibles necesidades y conocer el punto de partida de nuestro alumnado.

"La introducción del álgebra supone cambios en la manera de hacer y de pensar de los estudiantes que hasta el momento están situados en un modo de hacer y de pensar propio de la aritmética" (Arce, Conejo y Muñoz, 2019). Por ello a continuación se presentan algunas dificultades que el alumnado puede tener y que el docente deberá conocer para identificarlas y subsanarlas.

- Reconocer las expresiones algebraicas como procesos y como objetos.

- Uso y significado de las letras. "En aritmética el uso de las letras ha tenido un carácter de etiqueta y esto puede llevar a errores como modelar "en mi instituto, cada 20 estudiantes hay dos profesores" como $20e = 2p$" (Arce, Conejo y Muñoz, 2019).

- Comprensión relacional del signo igual que establece como equivalentes las expresiones a ambos lados del igual.

D. Razones de ser del objeto matemático.

Al introducir un nuevo objeto matemático es conveniente hacerlo mediante una situación que genere en el alumnado la necesidad de este, recurriendo a conocimientos ya adquiridos.

> Usiskin (1988) y Socas, Camacho, Paralea y Hernández (1989) plantean cuatro enfoques o interpretaciones del álgebra en el currículo escolar aludiendo al papel que juegan las variables y señalan la necesidad de combinar en el currículo del álgebra todos ellos: aritmética generalizada, resolución de ecuaciones, funcional y estructural (citado en Arce, Conejo y Muñoz, 2019).

Los cuatros problemas que se plantean como razón de ser a continuación responden a cada uno de estos enfoques.

(RS1) Si Juan tiene 12 años y Bea tiene el doble de años que Juan, ¿cuántos años tiene Bea? ¿Y si Juan tiene 20? ¿Qué operación estás haciendo para obtener los años de Bea? Si desconozco la edad de Juan y pongo que Juan tiene J años, ¿Cómo expreso los años que tiene Bea?

"Enfoque aritmética generalizada donde el álgebra aparece como producto de los procesos de generalización donde se utilizan las letras como números generalizados para identificar, revelar y describir patrones y estructuras." (Arce, Conejo y Muñoz, 2019)

(RS2) Dado un rectángulo de área 16 cm^2 cuya altura mide 8 cm, ¿cuánto mide la base de dicho rectángulo? Dado un triángulo de área 8 cm^2 cuya altura mide 8 cm, ¿cuánto mide la base de dicho triángulo?

"Enfoque resolución de ecuaciones. El álgebra se presenta como herramienta para resolver problemas que pueden ser modelizados con ecuaciones" (Arce, Conejo y Muñoz, 2019).

El alumnado ha empleado el álgebra de manera indirecta en cursos anteriores y recurrir a ello puede ser una opción para comprenderla mejor. Conocen la fórmula del área de un triángulo y en ella representan mediante letras el número que corresponde a la longitud de la base y la altura del triángulo. Ocurre lo mismo en el caso del rectángulo.

El problema del rectángulo lo resolverán relacionando el problema con un problema aditivo de una etapa que han trabajado en cursos anteriores, pero en el caso del triángulo les será más complicado. No obstante podrán resolverlo razonando que el área de un triángulo es la mitad que la de un rectángulo que tiene la misma base y altura que el triángulo. Sustituyendo en la fórmula conocida del área de un triángulo podremos plantear una ecuación que por tanteo podrán resolver y sobre la que volveremos cuando se hayan adquirido ciertos conocimientos.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \longrightarrow 8 = \frac{b \cdot 8}{2}$$

(RS3) Pensad un número, multiplicadlo por 2, sumadle 6 unidades, divididlo entre dos y al número que obtengáis restadle el que habíais pensado. ¿El resultado es 3? ¿Por qué?

"Enfoque funcional, el álgebra como estudio de las relaciones entre cantidades. El álgebra es un medio para formular e investigar las relaciones entre variables" (Arce, Conejo y Muñoz, 2019).

(RS4) Problema de una balanza: ¿A cuántos dados equivale un caballo?

El último de los enfoques es el estructural: el álgebra como estudio de estructuras algebraicas. Dado que nos encontramos en 1º E.S.O. en este enfoque se presenta el modelo de la balanza para incidir en el carácter estructural de una ecuación.

E. Campo de problemas

A continuación se plantean 6 campos de problemas en los que se basará la secuencia didáctica y mediante los cuales se avanzará el proceso de aprendizaje de la resolución de ecuaciones y de resolución de problemas.

(P1) Traducción a lenguaje algebraico.

En este campo de problemas se emplea el uso de la balanza como intermediario entre el lenguaje verbal y el algebraico para resolver ecuaciones. "Van Amerom (2002) apunta que el empleo de este tipo de modelos da sentido concreto a nociones abstractas, aunque advierte que es necesario desprenderse gradualmente de la semántica vinculada al modelo ya que podría retrasar la construcción de una sintaxis algebraica" (citado en Arce, Conejo y Muñoz, 2019, p.274).

1.1. Asumiendo que los dados son unidades, transcribe a lenguaje algebraico las siguientes situaciones de la balanza.

1. $(p = 1)$

2. $(2p = p + 1)$

3. $(3c = c + 4)$

El empleo de contextos como la balanza tiene limitaciones en cuanto a modelar situaciones con expresiones algebraicas en las que intervengan diferencias o enteros negativos pero el principal objetivo del uso de esta es enfatizar el carácter estructural de la ecuación y el signo igual como equivalencia. Para suplir estas limitaciones se plantean ejercicios de este campo de problemas en otro contexto.

1.2. Traduce a lenguaje algebraico:

1) Un número más su consecutivo
2) El cuadrado de un número menos cinco
3) Mi edad dentro de 6 años
4) 6 veces mi edad
5) El triple de un número menos su doble
6) Un quinto de un número menos ese número
7) El doble del siguiente de un número
8) Tengo c cromos y pierdo la mitad
9) Tengo p pinturas y gano un tercio de los que tenía, ¿Cuántos tengo?

1.3. Para cada una de las ecuaciones siguientes, plantea un enunciado que modelice dicha ecuación:

1) $2x + 4 = 16$
2) $x + x + 1 = 22$
3) $42 - x = x$
4) $\frac{x}{3} + 4 = 11$
5) $2(x + 4) = 18$

(P2) Identificación de patrones. Generalización de la aritmética.

2.1. Joel va a comprar caramelos, completa la siguiente tabla y responde:

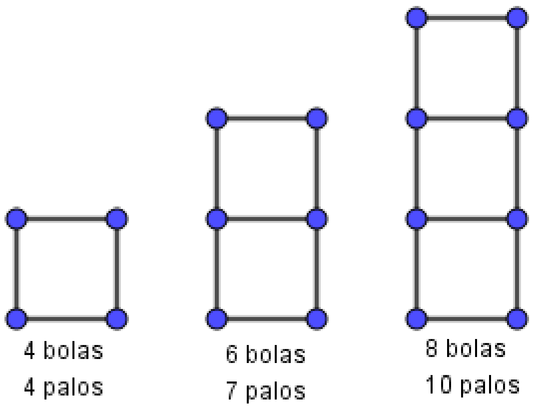
Nº de caramelos	1	2	3		5	6		8
Precio (cts)	5	10		20			35	

1) ¿Cuánto tendrá que pagar si compra 102 caramelos?
2) ¿Cuántos caramelos podrá pagar con 55 céntimos?
3) Escribe una expresión que relacione el nº de caramelos que compra con los céntimos que le cuestan.

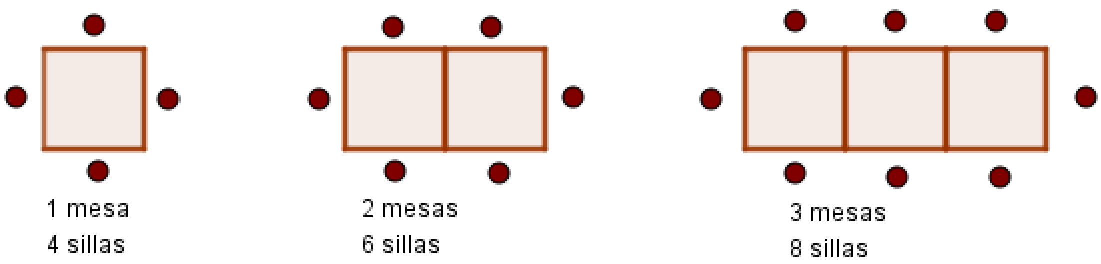
2.2. Como puedes ver en la imagen, la figura de un cuadrado necesita 4 bolas y 4 palos, la figura de dos cuadrados necesita 6 bolas y 7 palos, la figura de tres cuadrados necesita 8 bolas y 10 palos. (Actividad extraída de Callejo y Zapatera, 2014, p.72)

1) ¿Cuántas bolas y palos se necesitan para construir una figura de 4 cuadrados?

2) ¿Cuántas bolas y palos se necesitan si construyo una figura de 6 cuadrados?
3) ¿Cuántas bolas y palos se necesitan si construyo una figura de 20 cuadrados?
4) Expresa una regla general que relacione el número de cuadrados y el de bolas.
5) Expresa una regla general que relacione el número de cuadrados y el de palos.

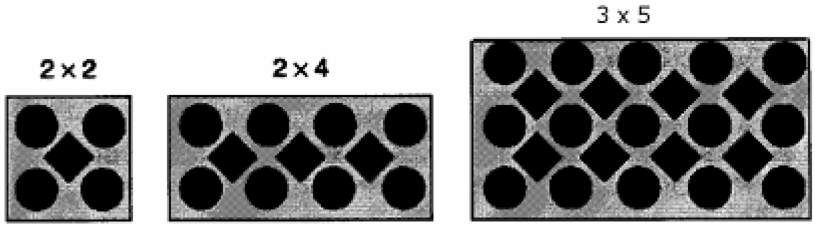


2.3. Juan ha invitado a su cumpleaños a los compañer@s de su clase y coloca las mesas y las sillas. (Actividad extraída de Zapatera, 2018, p.64)



1) Dibuja 4 mesas juntas, ¿cuántos invitados pueden sentarse en 4 mesas? ¿y en 5 mesas?
2) ¿Cuántos invitados podrían sentarse en 20 mesas? Explica cómo lo has hallado.
3) Escribe una regla que permita hallar el número de invitados sabiendo el número de mesas.
4) ¿Cuántas mesas necesitarán si en la clase son 26 compañer@s?

2.4. (Actividad extraída de Godino y Font, 2003, p.820) Una compañía empaqueta cajas de bombones intercalando un caramelo por cada cuatro bombones, según se muestra en la figura. Los círculos representan los bombones y los cuadrados los caramelos. Las dimensiones de la caja se indican mediante el número de columnas y de filas de bombones que hay en cada caja.



1) ¿Cuántos caramelos habrá en una caja de 4x6 bombones?
2) ¿y en una de 25x32?
3) ¿y en una de nxm?

(P3) Resolución de ecuaciones por tanteo. Comprobación de la solución de una ecuación.

3.1. Comprueba en cada caso qué valor de x es la solución.

a) $6x - 7 = 17$ $\quad x = 1\ ;\ x = 3\ ;\ x = 4$

b) $\frac{x+5}{6} = 1$ $\quad x = 1\ ;\ x = -2\ ;\ x = 6$

c) $5x + 4 = x$ $\quad x = 3\ ;\ x = -1\ ;\ x = 1$

d) $x - 2 = 3x + 4$ $\quad x = 5\ ;\ x = -2\ ;\ x = 9$

3.2. Fíjate en el ejemplo y resuelve las siguientes ecuaciones por tanteo.

a) **Ejemplo:** $x - 2 = 17$

¿Qué número al restarle 2 unidades da 17? $19 - 2 = 17$. La solución es $x = 19$

b) $x + 3 = 6$

c) $2x = 8$

d) $5x = 15$

e) $\frac{x}{2} = 10$

3.3. Fíjate en el ejemplo y resuelve las siguientes ecuaciones:

a) **Ejemplo:** $\frac{2x-4}{2} = 1$

El numerador debe valer 2. $2x - 4 = 2$

Ahora $2x$ debe valer 6: $2x = 6$

Finalmente, ¿qué número multiplicado por 2 da 6? $x = 3$

b) $5x - 2 = 20$

c) $2x - 5 = 3$

d) $\frac{3-x}{2} = 1$

(P4) Identificación de los elementos de las ecuaciones.

4.1. Dadas las siguientes ecuaciones identifica los miembros, los términos, la incógnita y la solución.

1) $2p = p + 1$

2) $3p = p + 4$

3) $\frac{3-x}{2} = 1$

4) $x - 2 = 3x + 4$

5) $6x - 7 = 17$

4.2. ¿Cuál es el grado de estas ecuaciones? Para cada ecuación, señala el coeficiente del término de mayor grado

1) $6x^2 - 7 = 17$

2) $x^3 - 8 = 17$

3) $-x^3 = -1$

4) $\frac{x}{3} - 9 = -3$

(P5) Resolución de ecuaciones por trasposición de términos.

5.1. Fíjate en el ejemplo y resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $x + 7 = 9$

Para despejar la *x* debemos eliminar el 7 que está sumando en el primer miembro. Para ello restamos 7 a cada miembro.

$$x + 7 - 7 = 9 - 7$$

Operamos,

$$x + 0 = 2$$

Y obtenemos la solución de la ecuación:

$$x = 2$$

2) $x + 3 = 12$

3) $8 = x + 5$

4) $3 + x = 29$

5.2. Fíjate en el ejemplo y resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 7 = 9$

Para despejar la x debemos eliminar el 7 que está restando en el primer miembro. Para ello sumamos 7 a cada miembro.

$$x - 7 + 7 = 9 + 7$$

Operamos,

$$x + 0 = 16$$

Y obtenemos la solución de la ecuación:

$$x = 16$$

5) $x - 4 = 12$

6) $8 = x - 7$

7) $-5 + x = 115$

5.3. Fíjate en el ejemplo y resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 9$

Para despejar la x debemos eliminar el 3 que la multiplica. Dividimos los dos miembros de la ecuación entre 3.

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

Operamos,

$$x = \frac{9}{3}$$

Y obtenemos la solución de la ecuación:

$$x = 3$$

b) $5x = 15$

c) $2x = 14$

d) $5x = 9$

5.4. Fíjate en el ejemplo y resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $\frac{x}{3} = 6$

Para despejar la x debemos eliminar el 3 que la divide. Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 3.

$$\frac{3x}{3} = 6 \cdot 3$$

Operamos,

$$x = 6 \cdot 3$$

Y obtenemos la solución de la ecuación:

$$x = 18$$

2) $\frac{x}{6} = 2$

3) $\frac{x}{5} = -2$

4) $\frac{x}{7} = -1$

5.5. Fíjate en el ejemplo y resuelve las siguientes ecuaciones:

a) Ejemplo: $5x - 2x = 7 + x + 5$

Reducimos los términos de ambos miembros.

$$3x = 12 + x$$

Trasponemos términos dejando los que llevan la incógnita a un lado y los números a otro.

$$3x - x = 12 + x - x$$

Reducimos términos

$$2x = 12$$

Trasponemos términos

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$$

Reducimos términos

$$x = 6$$

b) $8x - 5x = x + 6$

c) $5x - 7 = 2 - 4x$

d) $2 + 6x = 9x$

e) $8 - x = 3x + 2x + 5$

5.6. Fíjate en el ejemplo y resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis:

a) $4 - x = 2 - 3(x - 2)$

Quitamos el paréntesis $4 - x = 2 - 3x + 6$

Reducimos términos $4 - x = 8 - 3x$

Trasponemos términos dejando los que llevan la incógnita a un

$$4 - x + 3x = 8 - 3x + 3x$$

Reducimos términos $4 + 2x = 8$

Trasponemos términos dejando los que llevan la incógnita a un lado y los números a otro. $4 + 2x - 4 = 8 - 4$

Reducimos términos $2x = 4$

Trasponemos términos $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$

Reducimos términos $x = 2$

b) $5 - (4x + 6) = 2x$

c) $x + 1 = 5x - (2x + 3)$

d) $2x - (5 - 4x) + 1 = x + (3x - 5)$

(P6) Resolución de problemas

6.1. Si a un número le sumas su siguiente obtienes 37, ¿Qué número es?

6.2. En la casa de juventud hay 13 sillas más que taburetes y en total se pueden sentar 45 personas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?

6.3. La base de un rectángulo es doble que la altura y su perímetro es 48 cm. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo?

6.4. Dado un rectángulo de área 16 cm^2 cuya altura mide 8 cm, ¿cuánto mide la base de dicho rectángulo?

6.5. Dado un triángulo de área 8 cm^2 cuya altura mide 8 cm, ¿cuánto mide la base de dicho triángulo?

6.6. Hemos pagado 7,50 € por tres cafés y dos cruasanes. Sabiendo que un cruasán cuesta medio euro más que un café, ¿Cuál es el precio del café?

F. Técnicas

Las técnicas que se van a trabajar van acordes con los campos de problemas planteados aunque hay campos de problemas que no tienen técnica asociada. Estas técnicas tendrán un primer momento de acercamiento por parte del alumnado para a posteriori pasar a un segundo momento de institucionalización.

Técnica correspondiente al P2**: Identificación de patrones. Generalización de la aritmética.**

> En el caso concreto de la generalización de patrones, el proceso implica tres acciones: darse cuenta de una propiedad común, generalizar la propiedad común a todos los términos de la secuencia y usar la propiedad común para determinar una regla que permita hallar cualquier término de la secuencia (Dreyfus, 1991) (citado en Zapatera, 2018).

Para darse cuenta de la propiedad común se propone que trabajen con situaciones pequeñas y a partir de ellas observen el factor común.

Técnica correspondiente al P3: **Resolución de ecuaciones por tanteo. Comprobación de la solución de una ecuación.**

Para comprobar si un valor de x es solución de la ecuación hay que sustituir la x por dicho valor y comprobar si se cumple la igualdad.

Para resolver por tanteo lo primero que se debe hacer es identificar el monomio (o suma de monomios) que contiene a la x. ¿Qué número debe ser la x para que se cumpla la igualdad?

Se elige un valor posible y se sustituye en la incógnita, si se cumple la igualdad ese valor es la solución de la ecuación. Si no se verifica la igualdad se elige otro valor, y así sucesivamente escogiendo valores que aproximen cada vez más ambos miembros de la ecuación.

Técnica correspondiente al P5: **Resolución de ecuaciones empleando las técnicas de trasposición de términos.**

-Reducir términos. Simplificar (quitar paréntesis).

-Trasponer términos para dejar los términos independientes en un miembro de la ecuación y los monomios que contienen $x's$ en otro.

-Reducir términos, simplificar.

-Trasponer términos para aislar la x con coeficiente 1

-Reducir términos, simplificar.

-Comprobar la solución.

<u>Ejemplos:</u>

1) $x + 7 = 9$

Para despejar la *x* debemos eliminar el 7 que está sumando en el primer miembro. Para ello restamos 7 a cada miembro.

$$x + 7 - 7 = 9 - 7$$

Operamos,

$$x + 0 = 2$$

Y obtenemos la solución de la ecuación:

$$x = 2$$

2) $x - 7 = 9$

Para despejar la *x* debemos eliminar el 7 que está restando en el primer miembro. Para ello sumamos 7 a cada miembro.

$$x - 7 + 7 = 9 + 7$$

Operamos,

$$x + 0 = 16$$

Y obtenemos la solución de la ecuación:

$$x = 16$$

3) $3x = 9$

Para despejar la *x* debemos eliminar el 3 que la multiplica. Dividimos los dos miembros de la ecuación entre 3.

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

Operamos,

$$x = \frac{9}{3}$$

Y obtenemos la solución de la ecuación:

$$x = 3$$

4) $\frac{x}{3} = 6$

Para despejar la *x* debemos eliminar el 3 que la divide. Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 3.

$$\frac{3x}{3} = 6 \cdot 3$$

Operamos,

$$x = 6 \cdot 3$$

Y obtenemos la solución de la ecuación:

$$x = 18$$

5) $5x - 2x = 7 + x + 5$

Reducimos los términos de ambos miembros.

$$3x = 12 + x$$

Trasponemos términos dejando los que llevan la incógnita a un lado y los números a otro.

$$3x - x = 12 + x - x$$

Reducimos términos

$$2x = 12$$

Trasponemos términos

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$$

Reducimos términos

$$x = 6$$

6) $4 - x = 2 - 3(x - 2)$

Quitamos el paréntesis $4 - x = 2 - 3x + 6$

Reducimos términos $4 - x = 8 - 3x$

Trasponemos términos dejando los que llevan la incógnita a un

$$4 - x + 3x = 8 - 3x + 3x$$

Reducimos términos $4 + 2x = 8$

Trasponemos términos dejando los que llevan la incógnita a un lado y los números a otro. $4 + 2x - 4 = 8 - 4$

Reducimos términos $2x = 4$

Trasponemos términos $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$

Reducimos términos $x = 2$

Técnica correspondiente al P6: **Resolución de problemas.**

1. Dado un problema extrae los datos que conoces e indica aquello que deseas conocer.

2. Ese dato será la incógnita que deberás nombrar con una letra.

3. Relaciona los datos conocidos con la incógnita mediante una igualdad.

4. Resuelve dicha ecuación.

5. Expresa la solución en el contexto del problema y verifica su coherencia.

G. **Tecnologías**

A continuación se desarrollan las tecnologías que justifican las técnicas mencionadas en el apartado anterior aunque algunas técnicas no tienen tecnología asociada. Esta justificación será clave para la real comprensión por parte del alumnado de lo que se está haciendo y una buena enseñanza de estas reducirá los posibles errores que puedan cometer al entender el porqué del uso de las técnicas. Algunas tecnologías se basan en definiciones y otras requieren de una explicación más exhaustiva que se hará con la ayuda de la balanza como apoyo visual para facilitar la comprensión.

Tecnología asociada al campo de problemas 3:

Las **soluciones** de una ecuación son los valores que toman las incógnitas para que se cumpla la igualdad.

Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones. Es decir, averiguar los valores que deben tomar las incógnitas para que se cumpla la igualdad.

Tecnología asociada al campo de problemas 5:

Dos **ecuaciones son equivalentes** cuando sus soluciones coinciden.

Resolver ecuaciones consiste en encontrar ecuaciones equivalentes.

La igualdad de la ecuación se conserva cuando efectuamos las mismas operaciones en los dos miembros de la ecuación.

Para ayudar en la comprensión del concepto de ecuación equivalente y de trasposición de términos se ilustra mediante la balanza:

Dada la ecuación, $3c = c + 4$

Debemos efectuar las mismas acciones (operaciones) en ambos platos (miembros) de la balanza (ecuación) para que siga en equilibrio (para que se conserve la igualdad).

Quitamos un caballo en ambos platos de la balanza (restamos c en ambos miembros de la ecuación) y obtenemos otra situación (ecuación) equivalente con la misma solución que la original.

$$\mathbf{2}\boldsymbol{c} = +\mathbf{4}$$

Dividimos ambos miembros entre dos,

Y obtenemos una ecuación equivalente, que es solución de la ecuación original.

$\boldsymbol{c = 2}$

Se pretende hacer hincapié en la comprensión de la técnica de resolución de ecuaciones para no caer en errores fruto de la automatización de la técnica sin una comprensión real.

Un error muy común es identificar mal "cómo pasa el número al otro lado" es decir, no realizar correctamente la trasposición de términos.

$$5 = 10x$$

$$5 - 10 = x$$

Este tipo de errores se evitan explicando que deben efectuar la misma operación en ambos miembros, así, este razonamiento quedaría:

$$5 - 10 = 10x - 10$$

Y si se tiene un correcto manejo de las operaciones con monomios, el alumno se daría cuenta de que no puede operar el miembro de la derecha.

Otro error muy común es trasponer los términos en el orden erróneo.

$$\frac{x}{2} - 5 = 3$$

$$x - 5 = 6$$

$$x = 5 + 6$$

$$x = 11$$

Este tipo de errores se evitan explicando que deben efectuar la misma operación en ambos miembros, así, si se tiene un correcto manejo de las operaciones con monomios, este error quedaría:

$$2\left(\frac{x}{2}-5\right)=2\cdot 3$$

$$x-10=6$$

$$x-10+10=10+6$$

$$x=16$$

Así pues, el alumnado acabará automatizando y omitiendo algunos pasos pero estará entendiendo el proceso de resolución y podrá detectar errores más fácilmente.

<u>Tecnología asociada al campo de problemas 6:</u> La resolución de problemas tiene una fase de contextualización del problema, en la que se deben extraer los datos, una segunda fase descontextualizada de resolución de la ecuación cuya tecnología está descrita anteriormente y una última fase de contextualización en la que se expresa la solución de acuerdo al contexto del problema.

H. Secuencia didáctica y cronograma

SESIÓN 1	Evaluación inicial
SESIÓN 2	Razón de ser 1 y 2. Problema 2.1
SESIÓN 3	Problemas 2.2. ; 2.3. ; 2.4.
SESIÓN 4	Razón de ser 3 (introducción definición de identidad) Razón de ser 4 (introducción def. ecuación) Terminología asociada a una ecuación sobre la ecuación de la RS4. Problema 1.1 ; 1.2. ; 1.3.
SESIÓN 5	Explicación resolver una ecuación es encontrar la solución. Problemas 3.1 ; 3.2 ; 3.3.
SESIÓN 6	Identificación de elementos de las ecuaciones Problemas 4.1 y 4.2.
SESIÓN 7	Explicación ecuaciones equivalentes con ejemplo de balanza. Problemas tipo 5.1. 5.2. Problema 6.1.
SESIÓN 8	Problema 6.2. Problemas tipo 5.3. 5.4.
SESIÓN 9	Problemas 6.3. 6.4. 6.5. Resolución de ecuaciones más complejas Problemas tipo 5.5
SESIÓN 10	Problemas tipo 5.6. Problema 6.6.
SESIÓN 11	Repaso y dudas
SESIÓN 12	Examen
SESIÓN 13	Corrección del examen

SESIÓN 1: Se desea conocer el grado de manejo que tiene el alumnado en las operaciones algebraicas, para conocer el punto de partida y si es necesario o no hacer más hincapié. Por ello se plantea una evaluación inicial que realizarán individualmente y que se corregirá primero con el compañero/a y después con el conjunto del grupo-clase guiando dicha corrección el docente. Además esta sesión pretende servir de recordatorio de lo trabajado anteriormente.

Realiza las siguientes operaciones:

- $2(x+1) =$
- $\frac{4x}{4} =$
- $x^2 + 5x - x =$
- $2x - 2 + x =$
- $-\frac{x}{2} + \frac{3x}{2} =$
- $7x - 7 - 4x =$
- $-x(2-x) =$
- $\frac{5x}{2} + \frac{3x}{5} =$
- $-x - \frac{7x}{2} =$

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones cuando $a = 2\ y\ b = -1$

- $2a - b =$
- $-a + \frac{3}{2}b =$
- $a \cdot b - 1 =$
- $5a + 2 =$
- $\frac{7}{4}a - b =$

Rellena los rectángulos:

- $9 - \boxed{\quad} = 5$
- $2 - \boxed{\quad} = -3$
- $\boxed{\quad} + \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$
- $\frac{7}{2} - \boxed{\quad} = 3$

SESIÓN 2: Se comienza la sesión planteando las razones de ser 1 y 2. Por parejas, el alumnado deberá enfrentarse a ellas. El docente irá observando al alumnado para detectar las dudas y necesidades que surjan. Una vez que el alumnado haya resuelto o intentado ambos problemas se comentarán en gran grupo.

A continuación se plantea el primer problema del campo de problemas de generalización de aritmética: 2.1. Este problema se plantea para ser resuelto individualmente y se corregirá a posteriori.

SESIÓN 3: En la sesión anterior se hizo el primer problema de generalización de la aritmética y en esta sesión se van a trabajar los demás: 2.2; 2.3 y 2.4.

Estos problemas tienen distintos grados de dificultad, posiblemente no todo el alumnado llegará a realizar todos los apartados, en particular, el último apartado de obtener la fórmula general está planteado para que se enfrenten a él y aquellos que puedan lo resuelvan. El resto del alumnado lo comprenderá al realizar la corrección.

SESIÓN 4: La sesión comienza planteando la razón de ser 3 a modo de juego. Se pide que todo el alumnado piense un número y lo anote en el cuaderno, se les van indicando las operaciones que deben hacer y finalmente se pregunta todos han obtenido el número 3. Se escribirá algebraicamente en la pizarra la expresión y se introduce la definición de identidad.

Con la razón de ser 4, la balanza, se introducen las ecuaciones. Se presenta la balanza con una situación: 3 caballos en un plato y un caballo y dos dados en otro. Asumiendo que los dados son unidades (valen 1), el alumnado escribe una expresión para esa situación. Así, se empieza a nombrar algo desconocido (incógnita) con una letra: c y sobre la ecuación,

$$3c = c + 2$$

se identifican los elementos de una ecuación: signo igual, miembro izquierda, miembro de la derecha, términos, incógnita… y se hace hincapié en la diferencia entre identidad y ecuación.

A continuación se hacen los problemas correspondientes a traducción del lenguaje algebraico: 1.1; 1.2; 1.3.

SESIÓN 5: En esta sesión se va a explicar qué es resolver una ecuación y qué son las soluciones de esta. Retomamos la ecuación de la razón de ser 4:

$$3c = c + 2$$

y se pide que obtengan la solución, lo que vale un caballo. Así, introducimos la técnica de resolución por tanteo. El alumnado probará distintos valores para c y cuando los valores de ambos platillos (miembros) coincidan habrán encontrado la solución de la ecuación.

Se plantean los ejercicios 3.1; 3.2; 3.3. En los ejercicios 3.2. y 3.3. se plantean unas primeras técnicas para la resolución de ecuaciones. Hay un ejemplo resuelto en cada ejercicio para que el alumnado pueda deducir a partir de este el método de resolución de los demás. El docente observará al alumnado y resolverá las dudas que hubiese guiando a los alumnos en la resolución de los ejercicios.

SESIÓN 6: Ahora que el alumnado ya es capaz de obtener la solución de algunas ecuaciones se plantea que identifiquen la terminología. Los miembros, términos e incógnita ya han sido introducidos en la sesión 4, en la anterior se han obtenido las soluciones de algunas ecuaciones, por lo que en esta sesión, tras definir el grado de una ecuación ya pueden identificar toda la terminología y resolver los problemas 4.1. y 4.2.

SESIÓN 7: Antes de explicar la técnica de resolución de ecuaciones por trasposición de términos se explica la tecnología que subyace empleando la balanza y haciendo hincapié en la definición de ecuaciones equivalentes (detallado en pág. 31).

Se realizan ejercicios tipo 5.1. y 5.2. y se realiza el problema 6.1. para dar sentido a la resolución de problemas.

SESIONES 8, 9 y 10: En estas sesiones se van a ir practicando las técnicas de trasposición de términos alternando ejercicios y problemas. Se pretende que al principio el alumnado realice todos los pasos para ir poco a poco automatizando estos, pero sin llegar nunca a explicar expresiones como “se pasa al otro lado”.

SESIÓN 11: Esta sesión se dedicará a resolución de dudas y repaso general de la unidad didáctica.

SESIÓN 12: Se realizará un examen escrito individual con el que se calificará.

SESIÓN 13: Antes de devolver al alumnado los exámenes corregidos se corregirá en la pizarra para que el alumnado tenga una resolución correcta del examen con la que comparar los errores que tuvieran.

I. Evaluación

A continuación se muestra una prueba escrita a realizar por el alumnado en la sesión 12 de duración 50'.

1. Traduce a lenguaje algebraico las siguientes expresiones: ***(1 punto)***

a) La suma de dos números consecutivos ***(0.25 puntos)***

b) Pedro tiene un año más que el doble de años que María. ***(0.25 puntos)***

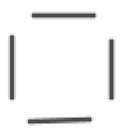
Edad de María	
Edad de Pedro	

c) La mitad del siguiente de un número cualquiera. ***(0.25 puntos)***

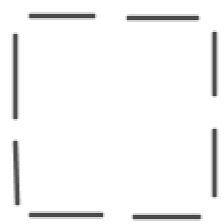
d) La diferencia de un número y su cuadrado. ***(0.25 puntos)***

2. Aarón comienza a hacer cuadrados con palillos de la siguiente manera: ***(2 puntos)***

Cuadrado de lado 1:



Cuadrado de lado 2:



- ¿Cuántos palillos necesitará para hacer el cuadrado de lado 3? ***(0.5 puntos)***
- ¿Y el de 20? ***(1 punto)***
- Da una expresión para los palillos que se necesitan para construir el cuadrado de "n" lados. ***(0.5 puntos)***

3. Resuelve las siguientes ecuaciones: ***(2 puntos)***

- $3x - 2 = 6$

- $8 - 2x = 4$

- $5x - 2x = 7 + x + 5$

- $5 - (x + 2) = 2x$

4. Si a la nota que he sacado en el examen de biología le sumo su triple, obtengo 28. ¿Qué nota he sacado en el examen de biología? ***(1 punto)***

5. El perímetro de un triángulo isósceles es 110 m, la medida del lado desigual es la mitad que la medida de los lados iguales. Calcula cuánto vale cada lado del triángulo. Resuelve el problema planteando una ecuación. ***(2 puntos)***

6. Juan gasta la tercera de su dinero en comprar un móvil, la quinta parte en un chándal y le quedan 70 euros, ¿cuánto dinero tenía Juan? Resuelve el problema planteando una ecuación. ***(2 puntos)***

Para evaluar se va a emplear el método de tercios desarrollado por Gairín, Muñoz y Oller (2012) y que se basa en categorizar tipos de tareas en cada ejercicio propuesto y un modelo de penalización de errores que explicaremos más adelante. Esta tipología y jerarquización de tareas se clasifica en: tareas principales y tareas auxiliares. A su vez estas últimas se dividen en específicas y generales.

<u>a) Tareas principales.</u> Son aquellas tareas que claramente constituyen el objetivo principal de la calificación: valorar la comprensión del alumno sobre los contenidos matemáticos propios de los temarios de matemáticas de un curso determinado. A su vez, estas tareas también pueden distinguirse atendiendo a su carácter conceptual o procedimental.

<u>b) Tareas auxiliares.</u> En el proceso de resolución del problema también hay que realizar otro tipo de tareas, que denominamos tareas auxiliares, con la finalidad de obtener las informaciones necesarias para dar la respuesta al problema. Identificamos dos grandes grupos de tareas auxiliares: las específicas y las generales.

b1)Tareas auxiliares específicas. Son aquellas tareas que juegan un papel instrumental para alcanzar la solución de un problema en el que aparecen tareas principales sobre contenidos específicos. Por ejemplo, para calcular los extremos relativos de una función, la obtención de derivadas es una tarea auxiliar específica.

b2) Tareas auxiliares generales. Consideramos como tareas auxiliares generales de un determinado curso de matemáticas a todo tipo de tareas matemáticas que ha realizado el alumno a lo largo de su formación matemática anterior. Atendiendo a su naturaleza, estas tareas podrían dividirse en tareas de tipo algebraico, de tipo aritmético, de tipo geométrico, de tipo gráfico y de representación. (Gairín, Muñoz y Oller, 2012, pp. 269)

A continuación se detallan los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se evalúan en cada pregunta, así como las diferentes tareas y los criterios de evaluación correspondientes a cada pregunta. En el currículo de Aragón encontramos dos criterios:

- Crit.MA.2.6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.

- Crit.MA.2.7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer grado, aplicando para su resolución métodos algebraicos.

Dado que nos encontramos en 1ºE.S.O. no existen estándares de aprendizaje con los que poder relacionar cada pregunta.

1. [Crit.MA.2.6] En esta pregunta se evalúa el campo de problemas 1: traducción a lenguaje algebraico. Este campo de problemas no tiene técnica ni tecnología asociada.

a) Tareas principales: Reconocer correctamente el consecutivo de un número y escribir adecuadamente la expresión pedida.

Tareas auxiliares específicas: no hay

Tareas auxiliares generales: no hay

b) Tareas principales: Expresar la edad de María con una letra y la de Pedro en función de la letra asignada a la edad de María.

Tareas auxiliares específicas: no hay

Tareas auxiliares generales: no hay

c) Tareas principales: Establecer correctamente la relación.

Tareas auxiliares específicas: no hay

Tareas auxiliares generales: no hay

d) Tareas principales: Expresar adecuadamente el cuadrado de un número y la expresión pedida.

Tareas auxiliares específicas: no hay

Tareas auxiliares generales: no hay

2. [Crit.MA.2.6] En esta pregunta evalúa el campo de problemas 2: Identificación de patrones. Generalización de la aritmética. **Técnica que se evalúa:**

> En el caso concreto de la generalización de patrones, el proceso implica tres acciones: darse cuenta de una propiedad común, generalizar la propiedad común a todos los términos de la secuencia y usar la propiedad común para determinar una regla que permita hallar cualquier término de la secuencia (Dreyfus, 1991) (citado en Zapatera, 2018).

No hay tecnología asociada.

Tareas principales: identificar el patrón de la secuencia y aplicarlo al caso particular de lado 3 y lado 20. Generalizar dicho patrón.

Tareas auxiliares específicas: no hay

Tareas auxiliares generales: operar 3·4 y 20·4.

3. [Crit.MA.2.7.] En esta pregunta se evalúa el campo de problemas 5: Resolución de ecuaciones por trasposición de términos. La **técnica** que se evalúa es la siguiente:

-Reducir términos. Simplificar (quitar paréntesis).

-Trasponer términos para dejar los términos independientes en un miembro de la ecuación y los monomios que contienen $x's$ en otro.

-Reducir términos, simplificar.

-Trasponer términos para aislar la x con coeficiente 1

-Reducir términos, simplificar.

-Comprobar la solución.

La **tecnología** que subyace se basa en comprender que dos ecuaciones son equivalentes cuando sus soluciones coinciden; resolver ecuaciones consiste en encontrar ecuaciones equivalentes y que la igualdad de la ecuación se conserva cuando efectuamos las mismas operaciones en los dos miembros de la ecuación.

Tareas principales: reducir términos, operar monomios semejantes, trasponer términos.

Tareas auxiliares específicas: no hay.

Tareas auxiliares generales: operaciones aritméticas al simplificar.

4. [Crit.MA.2.7.] En esta pregunta se evalúa el campo de problemas 3, 5 y 6. Resolución de ecuaciones por tanteo, resolución de ecuaciones por trasposición de términos y resolución de problemas.

Las técnicas que se evalúan son las que corresponden a los campos de problemas: resolución por tanteo, por trasposición de términos y de resolución de problemas:

1. Dado un problema extrae los datos que conoces e indica aquello que deseas conocer.

2. Ese dato será la incógnita que deberás nombrar con una letra.

3. Relaciona los datos conocidos con la incógnita mediante una igualdad.

4. Resuelve dicha ecuación

5. Expresa la solución en el contexto del problema y verifica su coherencia.

La tecnología que se evalúa es la descrita en la pregunta anterior correspondiente a la resolución de ecuaciones por trasposición de términos.

Tareas principales: plantear la ecuación del problema o justificar que se debe sumar la nota y su triple.

Tareas auxiliares específicas: Una vez planteada la ecuación: $x + 3x = 28$; operar para reducir miembros: $4x = 28$ y trasponer términos: $\frac{4x}{4} = \frac{28}{4}$.

Tareas auxiliares generales: operaciones aritméticas al simplificar: $\frac{28}{4}$

5. [Crit.MA.2.7.] En esta pregunta se evalúa el campo de problemas 5 y 6. Resolución de ecuaciones por trasposición de términos y resolución de problemas.

Las técnicas que se evalúan son las que corresponden a los campos de problemas: resolución por trasposición de términos y de resolución de problemas ya descritas anteriormente.

La tecnología que se evalúa es la ya descrita correspondiente a la resolución de ecuaciones por trasposición de términos.

Tareas principales: identificar la incógnita y plantear la ecuación del problema.

Tareas auxiliares específicas: Reducir y trasponer miembros.

Tareas auxiliares generales: operaciones aritméticas al simplificar.

6. [Crit.MA.2.7.] En esta pregunta se evalúa el campo de problemas 5 y 6. Resolución de ecuaciones por trasposición de términos y resolución de problemas.

Las técnicas que se evalúan son las que corresponden a los campos de problemas: resolución por trasposición de términos y de resolución de problemas ya descritas anteriormente.

La tecnología que se evalúa es la ya descrita correspondiente a la resolución de ecuaciones por trasposición de términos.

Tareas principales: identificar la incógnita y plantear la ecuación del problema.

Tareas auxiliares específicas: Reducir y trasponer miembros.

Tareas auxiliares generales: operaciones aritméticas al simplificar.

A continuación se detallan las posibles respuestas correctas que el alumnado puede dar a cada pregunta:

1. a) La suma de dos números consecutivos: $x + x + 1$

b) Pedro tiene un año más que el doble de años que María

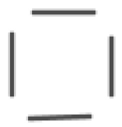
Edad de María	x
Edad de Pedro	$2x + 1$

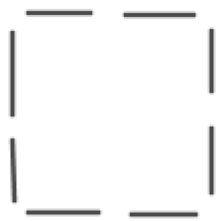
c) La mitad del siguiente de un número cualquiera: $\frac{x+1}{2}$

d) La diferencia de un número y su cuadrado: $x - x^2$

2. Aarón comienza a hacer cuadrados con palillos de la siguiente manera:

Cuadrado de lado 1: Cuadrado de lado 2:





• ¿Cuántos palillos necesitará para hacer el cuadrado de lado 3?

$3 \cdot 4 = 12$. El alumnado podrá resolverlo haciendo el dibujo y contando los palillos o multiplicando el número de palillos en un lado por el número de lados.

• ¿Y el de 20? De nuevo, es factible que algún alumno/a realice el dibujo y cuente. Se espera que hayan identificado el patrón y multipliquen 20·4= 80

• Da una expresión para los palillos que se necesitan para construir el cuadrado de "n" lados.

Tras haber resuelto los casos anteriores más sencillos, la respuesta esperada será $4n$.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

Se resuelven las ecuaciones por el método de trasposición de términos, pudiendo ser algunos pasos omitidos por aquellos alumnos/as que tengan un buen manejo.

Se dará por buena toda resolución del tipo: La solución de esta ecuación $8 - 2x = 4$ es $x = 2$ porque $8 - 2 \cdot 2 = 4$.

• $3x - 2 = 6$

$3x - 2 + 2 = 6 + 2$; $3x = 8$; $\frac{3x}{3} = \frac{8}{3}$; $x = \frac{8}{3}$

• $8 - 2x = 4$

$8 - 2x - 8 = 4 - 8$; $-2x = -4$; $\frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2}$; $x = +2$

• $5x - 2x = 7 + x + 5$

$3x = 12 + x$; $3x - x = 12 + x - x$; $2x = 12$; $\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$; $x = 6$

• $5 - (x + 2) = 2x$

$5 - x - 2 = 2x$; $3 - x + x = 2x + x$; $3 = 3x$; $x = 1$

4. Si a la nota que he sacado en el examen de biología le sumo su triple, obtengo 28. ¿Qué nota he sacado en el examen de biología?

En esta pregunta no se exige que se resuelva mediante una ecuación dando como correcta la respuesta:

- He sacado un 7 en el examen de biología porque 7 más su triple que es 21 da 28. $7 + 3 \cdot 7 = 7 + 21 = 28$

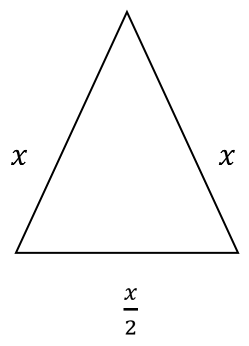
- También se dará como correcta la respuesta 28:4 = 7. Resolución de tipo aritmético ya que demuestra una comprensión del enunciado.

- Por último, el alumnado puede plantear una ecuación: $x + 3x = 28$ y resolverla.

5. El perímetro de un triángulo isósceles es 110 m, la medida del lado desigual es la mitad que la medida de los lados iguales. Calcula cuánto vale cada lado del triángulo. Resuelve el problema planteando una ecuación.

En esta ocasión se pide que se resuelva mediante una ecuación para evaluar el conocimiento en cuanto a traducción a lenguaje algebraico de un enunciado y su resolución.

x: "medida de un lado de los que son iguales"



$$x + x + \frac{x}{2} = 110$$

$2x + \frac{x}{2} = 110$; $4x + \frac{2x}{2} = 220$; $5x = 220$; $\frac{5x}{5} = \frac{220}{5}$; $x = 44$

Solución: Los lados iguales miden 44m y el lado desigual 22m.

6. Juan gasta la tercera de su dinero en comprar un móvil, la quinta parte en un chándal y le quedan 70 euros, ¿cuánto dinero tenía Juan? Resuelve el problema planteando una ecuación.

De nuevo se exige que se resuelva el problema planteando y resolviendo una ecuación:

x: “Dinero total que tenía Juan”

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+70=x$$

$\frac{15\,x}{3}+\frac{15\,x}{5}+1050=15x;\quad 5x+3x+1050=15x;\quad 8x+1050=15x\;;$

$1050=7x\;;\;150=x$

Solución: Juan tenía 150 euros.

El modelo de penalización de errores diseñado por Gairín, Muñoz y Oller (2012) se basa en penalizar los errores por tareas auxiliares generales hasta 1/3 de la puntuación y seguir con la corrección; el conjunto de los errores de las tareas auxiliares generales y específicas se penalizará hasta 2/3 de la puntuación total, reservando así al menos 1/3 de la puntuación para las tareas principales pudiendo penalizarse los errores de esta categoría hasta con el 100%% de la puntuación total.

A continuación se detalla una guía de corrección de la prueba para cada pregunta basándonos en dicho modelo:

1. Dado que todas las tareas del ejercicio son tareas principales, si la solución no es correcta se penalizará el 100% de la puntuación. Cada apartado puntúa 0.25.
2. Por fallos en las tareas generales se penalizará con hasta un 5%. Por fallos en las tareas principales se podrá penalizar el 100% de la puntuación.
3. Cada ecuación puntúa 0.5 puntos. Por fallos en las tareas generales se podrá penalizar hasta 1/3. . Los fallos en las tareas principales se podrán penalizar con el 100% de la puntuación
4. Por fallos en las tareas generales se podrá penalizar hasta 1/6 y en total por fallos en tareas auxiliares hasta 1/3. Los fallos en las tareas principales se podrán penalizar con el 100% de la puntuación.

5. Por fallos en las tareas generales se podrá penalizar hasta 1/6 y en total por fallos en tareas auxiliares hasta 1/3. Los fallos en las tareas principales se podrán penalizar con el 100% de la puntuación.

6. Por fallos en las tareas generales se podrá penalizar hasta 1/6 y en total por fallos en tareas auxiliares hasta 1/3. Los fallos en las tareas principales se podrán penalizar con el 100% de la puntuación.

J. Referencias

Anzola, M., Bargueño, J., Peralta, J. y Vizmanos, J.R. (2002). *Matemáticas 1 Gauss*. Madrid, España: SM.

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz, J.M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* (pp.265-277). Madrid: Síntesis.

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *BOLEMA*, 28(48), pp. 64‑88.

Carrasco, M.A., Martín, R., Ocaña. J.M. y Sánchez, J.M. (2007). *Matemáticas 1*. Zaragoza, España: Edelvives.

Colera, J., De Guzmán, M., García, J.E. y Gaztelu, I. (1996). *Matemáticas 1*. Madrid, España: Anaya.

Colera, J., Colera, R. y Gaztelu, I. (2016). *Matemáticas 1*. Madrid, España: Anaya.

Fernández García, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

Godino, J.D. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. En Godino, J.D. (Ed). *Matemáticas para maestros*. (pp. 766-826). Universidad de Granada. Recuperado de:

https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: Síntesis.

Monterrubio, M.C., Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. *Historia.* Recuperado de:

https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

ORDEN ECD/850/2016, de 29 de julio, por la que se modifica la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números*, 97, 51-67.