Trabajo Fin de Máster

Trigonometría: una propuesta didáctica para 4º de ESO

Trigonometry: a didactical proposal for 4th year of ESO.

Autora: Beatriz Malo Polo

Director: Sergio Martínez Juste

Facultad de Educación

2018/2019

ÍNDICE

Introducción

El trabajo que se va a mostrar a continuación recoge una propuesta de enseñanza de trigonometría para la asignatura de Matemáticas Académicas del curso de 4º de ESO.

La memoria está dividida en diversas secciones en las que se realiza un estudio previo del objeto matemático para posteriormente plantear una secuencia didáctica que se podría llevar al aula en función del estudio realizado. La terminología y el marco teórico que encuadra a todo el trabajo es el de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (TAD. Grupo de investigación en Teoría antropológica de lo didáctico., 2008). Las secciones están dividas por los principales elementos de la TAD y en cada una de ellas se estudia uno de estos elementos: razones de ser, campos de problemas, técnicas y tecnologías.

También se realiza un análisis de varios libros de texto en el que se comparan cada uno de los elementos de la TAD, mencionados anteriormente, según tres libros de texto actuales.

Por último, se propone una secuencia didáctica en la que se incluyen todos los contenidos relacionados con la trigonometría, objeto matemático estudiado en el presente trabajo, junto con una prueba escrita que servirá de evaluación de dichos contenidos. En esta última sección de evaluación se mostrarán tanto los resultados esperados, como los fallos esperados y se dará un guion para unificar las correcciones de las pruebas y conseguir una evaluación lo más objetiva posible.

En cuanto al objeto matemático de esta memoria, la trigonometría, veremos que, a pesar de ser una parte de las matemáticas con grandes aplicaciones a otras ciencias, actualmente se explica en los libros de texto como una parte más de la geometría que el alumnado debe aprender, recordar, y mecanizar momentáneamente para poder superar un examen puntual. Por ello, en este trabajo se pretende dar un enfoque diferente a la trigonometría en el que el alumnado, razone, desarrolle su pensamiento lógico matemático y vea la utilidad e importancia del estudio de la trigonometría en el curso de 4º de ESO.

A. Definición del objeto matemático a enseñar.

A.1. El objeto matemático a enseñar.

En el presente trabajo, se va a realizar una propuesta didáctica sobre la trigonometría en la asignatura de Matemáticas Académicas del curso de 4º de E.S.O. Durante la propuesta didáctica que se va a realizar, se tendrá en cuenta que el alumnado al que va dirigida no ha tenido contacto anterior con la trigonometría como tal, aunque sí traen conocimientos previos sobre los conceptos de triángulos y sus clasificaciones, así como de ángulos.

La palabra trigonometría proviene del griego τρίγωνο (trígono) cuyo significado es triángulo y μέτρον (métrono) que significa medida. Por lo que, según sus raíces lingüísticas podríamos decir que la trigonometría estudia la medida de los triángulos. Concretamente, se define trigonometría como la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo.

A.2 El objeto matemático en el currículo.

Actualmente, la legislación de la Comunidad Autónoma de Aragón viene marcada por la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, en la cual se recoge que el objeto matemático, trigonometría, a tratar durante esta propuesta didáctica se debe impartir, por primera vez, en 4º de ESO de la asignatura de Matemáticas Académicas.

Además, se especifica que los contenidos, relacionados con dicho objeto son:

- Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.
- Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.
- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.

Del mismo modo, se especifican los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje siendo estos los siguientes:

Tabla 1: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, según el currículo oficial.

Criterios de Evaluación	***Estándares de aprendizaje.***
Crit.MAAC.3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	Est.MAAC.3.1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.
Crit.MAAC.3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	Est.MAAC.3.2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.
	Est.MAAC.3.2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.
	Est.MAAC.3.2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.

A.3 Campo de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan

Los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se pretenden enseñar se desarrollarán en profundidad en las secciones posteriores. A continuación, se presenta únicamente el listado con los códigos de los campos de problemas, técnicas y tecnologías.

Tabla 2: Clasificación de los campos de problemas.

Campo de problemas	***Subcampos de problemas***
CP1: Resolución de triángulos rectángulos	CP1.1 Conocidos dos lados del triángulo
	CP1.2 Conocidos un lado y un ángulo del triángulo
CP2: Resolución de triángulos no rectángulos.	

En cuanto a las técnicas que resuelven los campos de problemas anteriores son las siguientes:

T1: Medidas angulares (grados y radianes)

T2: Razones trigonométricas de un ángulo agudo (seno, coseno y tangente)

T2.1: Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

T2.2: Razones trigonométricas de ángulos agudos sin calculadora

T2.3 Razones trigonométricas de ángulos agudos con calculadora.

T3: Relaciones trigonométricas.

T4: Descomposición de triángulos cualesquiera en triángulos rectángulos.

T4.1: Triángulos acutángulos.

T4.2: Triángulos obtusángulos.

Por otro lado, las tecnologías que justificarán las técnicas anteriores serán:

TG1: Definiciones de grados y radianes.

TG2: Razones trigonométricas

TG3: Demostraciones de las relaciones trigonométricas.

TG4: Descomposición en triángulos rectángulos.

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

Tras revisar los contenidos relacionados con la trigonometría que marca el currículo oficial de Aragón en la sección anterior, a continuación, se va a analizar cómo se trabajan dichos contenidos en los libros de texto.

A lo largo de la historia de la enseñanza de las matemáticas mediante libros de texto, se pueden apreciar varios métodos de presentación del contenido. Según Gómez (2000) algunos de estos métodos serían:

- El reglado: aquel en el que el aprendizaje se realiza sobre ejemplos sin hacer argumentaciones o justificaciones de las técnicas utilizadas.
- El razonado: aquel en el que se pone de manifiesto la lógica de las reglas sin demostraciones en el sentido formal.
- El de repeticiones: a través de un aprendizaje mecanizado.

- El intuitivo: apoyado en imágenes concretas, excluye el formalismo abstracto.
- El de actividades: introduce actividades que forman parte del proceso de aprendizaje.
- El orientado a la estructura: es un método procedimental en el que se trabajan los conceptos básicos y las relaciones entre ellos.

Aunque los libros que aquí se analizarán son de reciente publicación, estudiaremos cómo se presentan los contenidos, cómo se justifica la introducción de la trigonometría en los libros y cuáles son las técnicas, tecnologías y campos de problemas que se trabajan. Veremos que a pesar de que los métodos mencionados por Gómez (2000) hacen referencia a la enseñanza tradicional de las matemáticas, algunos de ellos todavía siguen presentes en estos libros.

Los libros que se analizan pertenecen a tres editoriales que los tienen vigentes todavía, pues son libros que se ajustan a la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), estos libros son los siguientes:

- Editorial Santillana, Serie Resuelve. Proyecto. Matemáticas, Enseñanzas académicas. Serie Resuelve, (2016)
- Editorial Código Bruño. Arias Cabezas y Maza Sáez, (2016)
- Editorial Oxford Educación. de Lucas Benedicto, Peña Romano, y Rey Fedriani, (2016)

B.1 Justificación de la introducción escolar de la trigonometría.

Analizaremos, en esta ocasión, cómo se realiza la introducción a la trigonometría en cada uno de los libros mencionados anteriormente.

Comenzando por la editorial Santillana, se puede observar que no se hace ninguna mención al porqué del estudio de la trigonometría, ni tampoco a la aparición ni evolución de esta a lo largo de los años. Solamente hacen un pequeño recorrido a lo largo de los siglos de la evolución de los faros costeros. Podríamos suponer que el docente podría relacionar los faros con la trigonometría, ángulos de observación a la luz que emite el faro, distancias de barcos a las costas… pero no se hace explícita esta relación en el texto.

En la editorial Bruño se hace al comienzo del bloque de Geometría una mención a los principales matemáticos que hicieron una gran contribución en el estudio de la geometría. Se habla tanto de la parte de trigonometría como de la geometría analítica estudiada por Descartes. En la introducción del tema relacionado con la resolución de triángulos rectángulos mediante trigonometría sí que se mencionan algunas de las aplicaciones de esta, como pueden ser la topografía, áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos en el espacio.

Por último, la editorial Oxford recurre también a la topografía como aplicación de la trigonometría en situaciones cotidianas. Explica la utilidad de la topografía para la realización de mapas mediante la medición de ángulos y el uso de la trigonometría para el cálculo de distancias inaccesibles.

B.2 Campos de problemas, técnicas y tecnologías.

A continuación, se va a detallar cómo se procede a la introducción de las técnicas, cuáles son las tecnologías que justifican a esas técnicas y qué campos de problemas se trabajan en cada uno de los tres libros de texto anteriormente señalados. Para poder llevar a cabo este análisis, vamos a establecer los contenidos que se van a observar ya que cada uno de los libros los amplía en mayor o menor medida. Así pues, entraremos en detalle en los que coincidan en las tres. Estos serán:

- Medida de ángulos, grados y radianes.
- Razones trigonométricas de un ángulo agudo (seno, coseno y tangente)
- Relaciones entre las razones trigonométricas.
- Razones trigonométricas de ángulos notables (30º, 45º y 60º)
- Circunferencia goniométrica, razones de ángulos cualesquiera y reducción al primer cuadrante.
- Resolución de triángulos rectángulos.

I. Medida de ángulos, grados y radianes.

<u>Campos de problemas:</u>

Los campos de problemas encontrados en los tres libros de texto sobre la medida de ángulos en radianes y grados son los mismos. En este campo de problemas se trabaja el cambio de unidades de radianes a grados y viceversa.


1 PRACTICA. Expresa en radianes estos ángulos.
a) 180° b) 540° c) 900° d) 1080° e) 1440°

2 APLICA. Expresa en grados sexagesimales.
a) 7π rad b) $\frac{\pi}{6}$ rad c) $\frac{3\pi}{4}$ rad

3 REFLEXIONA. Expresa, tanto en grados sexagesimales como en radianes, las siguientes partes de una circunferencia.
a) Una cuarta parte. b) Tres cuartas partes. c) Una sexta parte. d) Una tercera parte.

Figura 1. Actividades, p.136, Santillana (2016)

Sobre las técnicas y tecnologías

Las técnicas que se utilizan para resolver los ejercicios referentes al campo de problemas previo son diferentes en cada uno de los libros de texto. Todas las editoriales comienzan dando una definición y posteriormente una técnica para relacionar los grados con los radianes y viceversa.

Santilla y Oxford comienzan por la institucionalización de la definición de radián.

> "Se llama radián a la amplitud del ángulo central de una circunferencia cuyo arco mide lo mismo que su radio."

Posteriormente, se relaciona el radián con el sistema sexagesimal dando una equivalencia de 1 radián en grados, 57º 17' 45".

En ambos textos, las tecnologías que justifican la técnica son la definición de radián, la amplitud de la circunferencia completa en radianes, 2π rad, y la amplitud de la circunferencia completa en grados, 360º.

Bruño, en cambio, comienza con la definición de grado (es el único texto que recoge la definición de grado)

> "Medida de ángulo que resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales"

Continúa con una definición de radian similar a la del libro de Santillana, y establece una relación entre un radian y los grados. La aproximación que se realiza en el texto es la siguiente:

> "Un radian mide aproximadamente 57º"

En comparación con Santillana, no se hace ninguna justificación a esta aproximación y, además, la aproximación a 57º de un radián es muy pobre teniendo en cuenta que estamos en el último curso de ESO.

En este caso no aparece ninguna tecnología que justifique la técnica.

II. Razones trigonométricas de un ángulo agudo (seno, coseno y tangente)

Campos de problemas:

Según las editoriales podemos encontrar una forma diferente de tratar este contenido.

Santillana propone ejercicios de cálculo de razones trigonométricas mediante repetición, con dos tipos de problemas diferentes:

1. Cálculo de razones trigonométricas dados dos lados de un triángulo rectángulo.

"Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyas medidas son: un cateto mide 5m, y la hipotenusa 7.5m."

2. Cálculo de razones trigonométricas dado un lado y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

"Si el cateto contiguo a un ángulo en un triángulo rectángulo mide 3cm y la tangente de ese ángulo mide 4/3, ¿cuánto valen los demás lados?

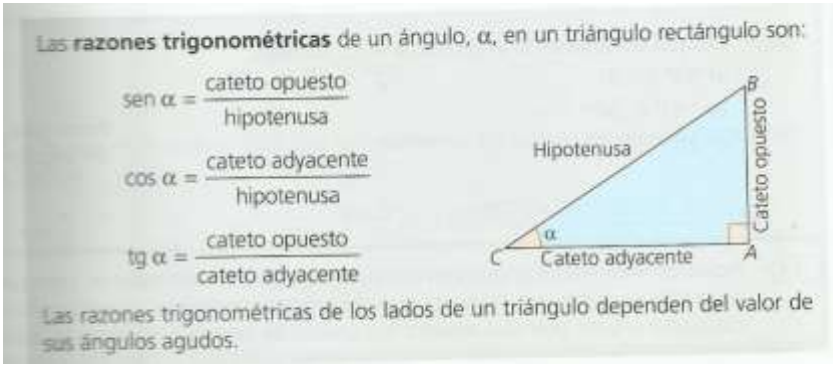
Bruño, también propone ejercicios de repetición, pero además, añade ejercicios para practicar el uso del cálculo de razones trigonométricas mediante calculadora e incluye ejercicios para dibujar ángulos agudos dadas alguna de las razones trigonométricas.

"Dibuja un ángulo agudo tal que senα = $\frac{3}{4}$"

Por último, la editorial **Oxford** es la que más campos de problemas abarca, pues incluye los campos de problemas de Santillana y de Oxford.

Sobre la técnica:

No aparecen técnicas como tal, aunque los tres libros de texto proporcionan la misma definición para el seno, coseno y tangente, planteando un triángulo rectángulo al lado de la definición y marcando los lados de este como cateto opuesto, contiguo e hipotenusa:



Las **razones trigonométricas** de un ángulo, α, en un triángulo rectángulo son:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

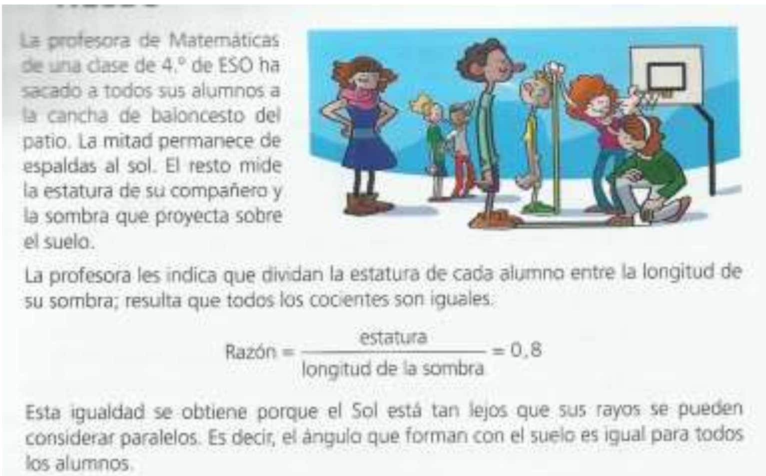
Las razones trigonométricas de los lados de un triángulo dependen del valor de sus ángulos agudos.

Figura 2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo, p.148, Oxford (2016)

La editorial Bruño también se detiene en dar la definición de secante, cosecante y cotangente como las inversas multiplicativas del seno, coseno y tangente.

<u>Sobre las tecnologías</u>

La editorial **Oxford**, da un pequeño razonamiento antes de ofrecer la técnica:



La profesora de Matemáticas de una clase de 4.º de ESO ha sacado a todos sus alumnos a la cancha de baloncesto del patio. La mitad permanece de espaldas al sol. El resto mide la estatura de su compañero y la sombra que proyecta sobre el suelo.

La profesora les indica que dividan la estatura de cada alumno entre la longitud de su sombra; resulta que todos los cocientes son iguales.

$$\text{Razón} = \frac{\text{estatura}}{\text{longitud de la sombra}} = 0{,}8$$

Esta igualdad se obtiene porque el Sol está tan lejos que sus rayos se pueden considerar paralelos. Es decir, el ángulo que forman con el suelo es igual para todos los alumnos.

Figura 3. Tecnología de razones trigonométricas de un ángulo agudo, p.148, Oxford (2016)

Y a partir, de aquí se razona del mismo modo para el seno y coseno formalizando la definición de las tres razones trigonométricas.

Además, en las tres editoriales, **Oxford, Santillana y Bruño**, aparece una breve justificación de la ampliación de las razones trigonométricas para triángulos cualesquiera como consecuencia del teorema de Thales. Aunque, solo es Bruño quien hace mención a este teorema.

III. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo.

<u>Campos de problemas</u>

En esta ocasión, los ejercicios que se muestran en los tres libros de texto son similares. Pues todos ellos son de la forma:

"Si $sen\ \alpha = 0.3$, aproxima los valores del $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$"

En los que se trabajan las relaciones entre las razones trigonométricas a base de repetir el mismo procedimiento en todos ellos.

Sí que cabe destacar que tanto la editorial Oxford como Santillana proponen una actividad de demostración de otras relaciones trigonométricas. En el caso de Bruño, se propone una actividad similar de simplificación de expresiones trigonométricas. Estos tipos de ejercicios permiten que el alumno razone y potencie el pensamiento lógico-matemático que no se desarrolla con los ejercicios de mecanización.

Sobre las técnicas:

La Editorial **Oxford** proporciona dos relaciones fundamentales precedidas por la tecnología. Es decir, comienza buscando una relación entre las tres razones trigonométricas vistas anteriormente y en segundo lugar formaliza la técnica dando las siguientes relaciones:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1\ ; \qquad \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = tg\ \alpha$$

En los otros dos libros de texto, se comienza dando la técnica, con más relaciones entre las razones trigonométricas, que el libro anterior. Aparece una relación más en la editorial de **Santillana**:

$$tg^2\alpha\ + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Y en la editorial **Bruño** aparece la anterior y otra más en términos de secantes, cosecantes y cotangentes.

$$tg^2\alpha\ + 1 = \sec^2\alpha; \qquad cotg^2 + 1 = cosec^2\alpha$$

Sobre las tecnologías:

En estos dos libros las tecnologías aparecen después de dar las técnicas como demostraciones.

IV. Razones trigonométricas de ángulos notables, 30º 45º y 60º.

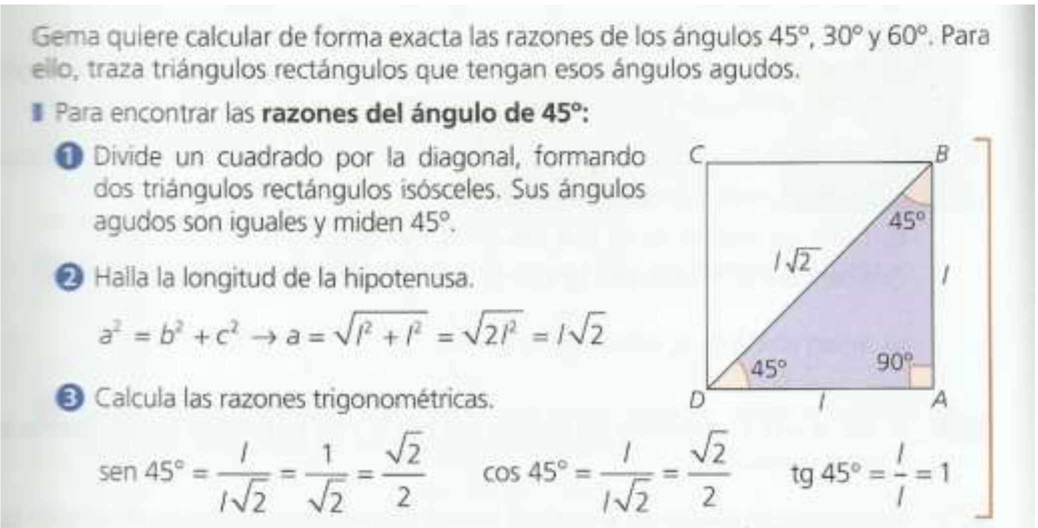
Campo de problemas:

La editorial **Santillana** es la única que propone tres actividades relacionadas exclusivamente con las razones trigonométricas de ángulos de 30º, 45º y 60º. En los otros dos libros de texto los ejercicios que se plantean están relacionados con el uso de razones trigonométricas de ángulos complementarios que les llevan al uso de las razones trigonométricas de los ángulos notables.

Es destacable que en las tres editoriales se le dedica un espacio a la explicación de la medición de ángulos en grados y radianes y posteriormente, no se usa la notación en radianes.

Sobre las técnicas y tecnologías:

Tanto las editoriales de **Santillana** como **Oxford**, dan las razones de 45º, en primer lugar, y de 30º y 60º, posteriormente, seguidas de una justificación de la tecnología anterior.


Gema quiere calcular de forma exacta las razones de los ángulos 45°, 30° y 60°. Para ello, traza triángulos rectángulos que tengan esos ángulos agudos.

Para encontrar las **razones del ángulo de 45°:**

1. Divide un cuadrado por la diagonal, formando dos triángulos rectángulos isósceles. Sus ángulos agudos son iguales y miden 45°.
2. Halla la longitud de la hipotenusa.

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$

3. Calcula las razones trigonométricas.

$\text{sen } 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \text{tg } 45° = \frac{l}{l} = 1$

Figura 4. Tecnología de razones trigonométricas de un ángulo de 45º, p.152, Oxford (2016)

En el caso de la editorial **Bruño** se dan las razones de los tres ángulos y ninguna justificación explícita de estas. Sí que aparece un dibujo del triángulo de hipotenusa 1 del que se podrían deducir las razones dadas.

V. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera y circunferencia goniométrica.

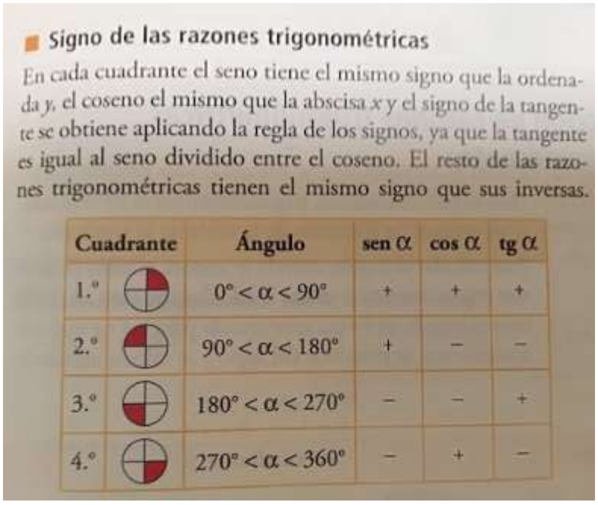
A pesar de que el currículo oficial de la Comunidad de Aragón no hace referencia a las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera y a la circunferencia goniométrica en todos los libros de texto que se han analizado aparece una breve explicación sobre estos conceptos.

Sobre los campos de problemas.

Únicamente en la editorial **Oxford** aparecen problemas en los que se trabajan ángulos cualesquiera y no solamente agudos. A demás, a raíz del problema que se plantea se introduce también la justificación de las técnicas.

Sobre las técnicas y tecnologías.

Las tres editoriales definen la circunferencia goniométrica y analizan las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera según los ejes de coordenadas en los que se sitúe el ángulo. Además, en todas ellas, aparecen ejercicios para calcular las razones de ángulos cualquiera mediante reducciones al primer cuadrante y luego asignándoles el signo adecuada. La justificación de esta técnica se basa en los signos que tienen las variables x e y en unos ejes coordenados. Es decir:



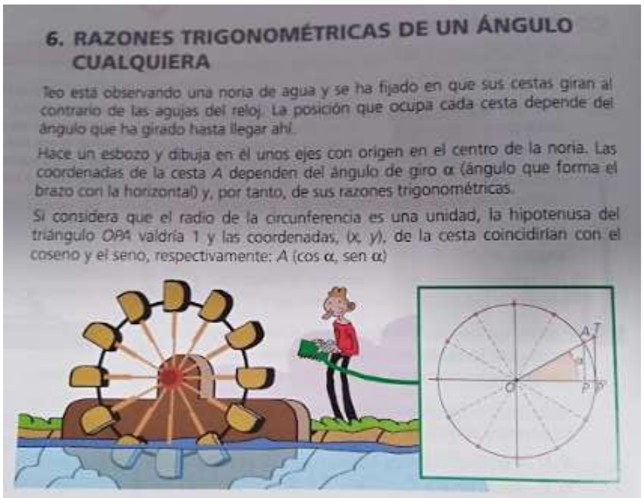
Signo de las razones trigonométricas

En cada cuadrante el seno tiene el mismo signo que la ordenada y, el coseno el mismo que la abscisa x y el signo de la tangente se obtiene aplicando la regla de los signos, ya que la tangente es igual al seno dividido entre el coseno. El resto de las razones trigonométricas tienen el mismo signo que sus inversas.

Cuadrante		Ángulo	sen α	cos α	tg α
1.º		$0° < \alpha < 90°$	+	+	+
2.º		$90° < \alpha < 180°$	+	−	−
3.º		$180° < \alpha < 270°$	−	−	+
4.º		$270° < \alpha < 360°$	−	+	−

Figura 5.Tecnología de razones trigonométricas de ángulos cualesquiera, p.159, Bruño (2016)

Del mismo modo que **Oxford** es la única editorial que ofrece problemas para trabajar este contenido, también es la única que contextualiza la tecnología.



6. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

Teo está observando una noria de agua y se ha fijado en que sus cestas giran al contrario de las agujas del reloj. La posición que ocupa cada cesta depende del ángulo que ha girado hasta llegar ahí.

Hace un esbozo y dibuja en él unos ejes con origen en el centro de la noria. Las coordenadas de la cesta *A* dependen del ángulo de giro α (ángulo que forma el brazo con la horizontal) y, por tanto, de sus razones trigonométricas.

Si considera que el radio de la circunferencia es una unidad, la hipotenusa del triángulo *OPA* valdría 1 y las coordenadas, (*x*, *y*), de la cesta coincidirían con el coseno y el seno, respectivamente: *A* (cos α, sen α)

Figura 6. Tecnología de razones trigonométricas de ángulos cualesquiera, p.156, Oxford (2016)

VI. Resolución de triángulos rectángulos.

Las técnicas que se utilizan en la resolución de triángulos rectángulos son las que se han ido viendo a lo largo de la unidad didáctica. En la sección de resolución de triángulos solo se muestran uno o dos problemas ejemplificando como se utilizarían las diversas técnicas en la resolución de problemas reales.

Analizando los problemas que se proponen encontramos varios campos de problemas:

- 1º Campo de problemas: Problemas en los que se da un ángulo agudo y un lado o bien dos de los lados de un triángulo rectángulo.
  En este campo de problemas las técnicas que se utilizan para su resolución son el planteamiento de una ecuación de primer grado en la que se ve involucrada una razón trigonométrica.
- 2º Campo de problemas: Problemas similares a los anteriores en los que la medición del ángulo se hace a una cierta altura, aunque el ángulo de observación sigue siendo con la horizontal.
  Las técnicas que se utilizan en este campo de problemas son las mismas que en el primer campo de problemas.
- 3º Campo de problemas: resolución de triángulos no rectángulos que pueden descomponerse en dos triángulos rectángulos. Los podemos dividir en dos subcampos de problemas, según los datos que se ofrecen en los problemas:
  - **3.1. Ángulo, ángulo, lado**. Problemas de doble observación, en los que se realizan dos observaciones a diferentes distancias del objeto inaccesible y se da la distancia entre las dos observaciones.
    En este caso, la técnica que se trabaja está basada en el planteamiento de un sistema de ecuaciones con las razones trigonométricas de los dos ángulos observados relacionadas por dos incógnitas.
  - **3.2 Ángulo, lado, lado**. Problemas de doble medición en los que se proporciona uno de los ángulos y sus dos lados contiguos.
    Después de la descomposición en triángulos rectángulos las técnicas que se utilizan son las mismas que en el 1º y 2º campo de problemas descrito previamente.

En relación a los libros de texto analizados, estos campos de problemas no aparecen en todos ellos.

B.3 Efectos de dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumnado

Sintetizando el análisis realizado anteriormente, podríamos concluir observando que los tres libros de texto trabajan de forma similar. En primer lugar, se institucionalizan las técnicas, en segundo lugar, se ejemplifican las técnicas y, por último, se ofrecen ejercicios y problemas de mecanización de las técnicas aprendidas. Aunque, sí que cabe mencionar que una de las editoriales, Oxford, hace más hincapié que el resto en las tecnologías que justifican las técnicas. Estas tecnologías favorecen el razonamiento y pensamiento lógico del alumnado, así como una mayor capacidad de asimilación de las técnicas.

Retomando los métodos de enseñanza de las matemáticas en los libros de texto que proponía Gómez (2000), vemos que, aunque prima un método razonado, pues las técnicas que se explican no aparecen con demostraciones propiamente dichas si no que se razonan en ciertas ocasiones, también tiene gran peso el método de repeticiones, en el cual el aprendizaje se realiza de forma mecánica. Esto ocurre en gran parte en los problemas y ejercicios que se proponen a lo largo de los temas, en los que, tras una ejemplificación proporcionada previamente por el libro de texto, los ejercicios y problemas son repetitivos y, en algunos casos, con pequeños incrementos del nivel.

Por otra parte, aunque en menor medida, también aparece el método reglado, que enfatiza en el aprendizaje mediante ilustraciones sin hacer mención a argumentaciones (véase Figura 4), y el método de actividades complementarias. Este método consiste en introducir actividades completarías, no de repetición, si no para la adquisición de nuevos contenidos o nuevas habilidades. En el caso de los libros que se han analizado, estas actividades aparecen al final del texto con títulos del tipo: “Para profundizar” o “Comprende, Relaciona y reflexiona.”

Por lo tanto, parece ser que en la enseñanza de la matemática en los libros de texto se deja de lado el pensamiento analítico y reflexivo, y se sustituye por la memorización y la mecanización generada principalmente por la repetición de ejercicios (Ballestero, 2007).

Por último, cabe destacar que, desde una apreciación propia, los libros de texto se ciñen a explicar lo que viene pactado por el currículo sin dar importancia a la razón de ser del objeto matemático y sin relacionar conceptos de una misma unidad didáctica o de un mismo curso. Por ejemplo, en todos los libros se dedica una sección al uso de grados y radianes y al paso de una medida angular a otra, pero posteriormente en todos los ejercicios y problemas que plantean estos libros de texto, se utilizan los grados como medida angular. Lo cual lleva a pensar, por parte del alumnado, en la poca importancia que tienen los radianes en la vida cotidiana y en la inutilidad de estos, pensando así que el manejo de varias medidas angulares es únicamente porque se exige en los libros de texto y no por la necesidad de ello.

C. Conocimientos previos del alumnado

C.1 Conocimientos previos que necesita el alumnado para afrontar el aprendizaje de la trigonometría y relación con la enseñanza previa.

Como hemos mencionado anteriormente, la trigonometría es una rama de las matemáticas ligada a la geometría. Por ello, de forma general, todos los conocimientos previos que el alumnado tenga sobre geometría le serán útiles en este tema. Pero también forma parte de las matemáticas, así que serán necesarios otros conocimientos previos no tan relacionados con la Geometría.

Concretando, el alumnado necesitará conocer:

- La clasificación de los triángulos, principalmente triángulos rectángulos.
- Medición de ángulos y su clasificación. Relación entre la medida de los ángulos y los triángulos.
- Teorema de Pitágoras.
- Teorema de Thales.
- Semejanza de triángulos
- Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.
- Resolución de sistemas.
- Áreas y volúmenes de figuras geométricas.

La mayoría de estos conocimientos han sido adquiridos en cursos anteriores de la Educación Secundaria Obligatoria, aunque sí que es cierto que algunos de ellos pueden verse en este mismo curso. Por ejemplo, en el caso del libro de texto analizado anteriormente, de la editorial Bruño, al comienzo del tema de Trigonometría se hace un recordatorio de los teoremas de Pitágoras y Thales y de semejanza de triángulos. En los otros dos libros de texto, el tema que precede al de trigonometría está dedicado a contenidos sobre semejanza.

Por lo tanto, habrá contenidos previos que estén muy recientes y que quizá recuerden con más facilidad que el resto o que, por el contrario, estos contenidos recientes estén todavía sin asimilar al completo.

En cuanto a la resolución de ecuaciones de 1º y 2º grado, cabe observar que son ecuaciones que se aprenden en los cursos de 1º y 2º de ESO, respectivamente, y que además se continúan trabajando en los cursos de 3º y 4º de ESO.

C.2 Actividades previas.

La propuesta que se va a realizar durante la secuencia didáctica va a constar de una primera sesión que incluya una evaluación inicial y actividades que ayuden a los alumnos y alumnas a recordar y afianzar los conocimientos previos que deberían de poseer.

Se tratará de una sesión en la que el alumnado trabajará varios tipos de actividades, que recapitulen todos los contenidos vistos previamente y que necesitan para afrontar con éxito la propuesta sobre Trigonometría.

Una de las actividades que se propone es la siguiente:

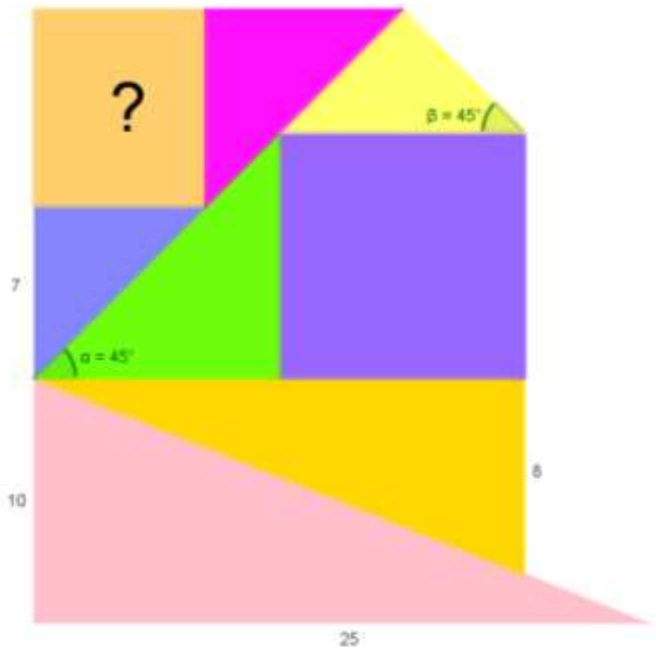


Figura 7.Actividad inicial 1.

Es una actividad bastante completa sobre lo que estamos buscando, pues en ella se trabaja el teorema de Pitágoras, el teorema de Thales, los ángulos complementarios y suplementarios, la suma de ángulos en polígonos, la clasificación de triángulos (rectángulos, isósceles, equiláteros…), la semejanza en triángulos y el razonamiento lógico-matemático.

Para realizar esta actividad se le pediría a cada alumno y alumna que averiguase cuánto mide el área del rectángulo señalado con '?'. Conforme fuesen acabando se juntarían por parejas para comentar los pasos que han ido realizando para obtener el área y fuesen discutiendo si el procedimiento seguido por sus compañeros o compañeras es correcto o no. Cuando toda la clase hubiese terminado se podría poner en común y así observar los contenidos que van saliendo en clase relacionados con la geometría vista en cursos anteriores.

Otra de la actividad que se propone es un debate en el cuál el alumnado se deberá posicionar en el lado del SI o del NO según las repuestas que creyesen válidas para estas preguntas:

1. ¿Queda determinado un triángulo conociendo sus tres lados?
2. ¿Los lados de un triángulo rectángulo pueden medir 4cm, 6cm y 8cm?
3. ¿Los lados de un triángulo cualquiera pueden medir 4cm, 6cm y 8cm?
4. ¿Los triángulos solo tienen una altura y una base?
5. ¿Queda determinado un triángulo conociendo sus tres ángulos?
6. ¿Dos triángulos solo pueden ser semejantes si tienen los mismos ángulos y lados?
7. La geometría solo sirve para calcular áreas y volúmenes.

El objetivo de esta actividad es repasar contenidos previos, pero también conocer el razonamiento de cada alumno y alumna, hacerles pensar más allá de la aplicación de fórmulas. Además, crear un debate en el aula aporta beneficios a la hora de organizar ideas para poder expresarlas con claridad, potencia la escucha activa entre el alumnado o la capacidad de reacción ante respuestas inesperadas.

D. La razón de ser de la trigonometría.

D.1 Razones de ser históricas que dieron origen a la trigonometría.

Es sabido que las matemáticas no son una ciencia moderna sino una ciencia histórica. En cuanto a la parte más geométrica de las matemáticas se sabe que los egipcios fueron una de las principales civilizaciones que contribuyeron en la aparición de esta. Pero no fueron los únicos porque, aunque en menor medida, los babilónicos también hicieron sus pequeñas contribuciones geométricas durante muchos años. Se han encontrado textos desde los años 3500 a.C hasta el siglo IV a.C., en los cuales realizaban mediciones de distancias en triángulos, utilizando ángulos y relaciones entre ellos aunque sin tener la noción de trigonometría como se conoce hoy en día. (Esteban Piñerior, Ibañes Jalón, & Ortega del Rincón, 1998)

Para poder hablar del nacimiento de la trigonometría debemos de avanzar unos cientos de años más, concretamente hasta mediados del siglo II a.c. En esta época el alejandrino Hiparco de Nicea elaboró una tabla de cuerdas en las que se relacionaba los valores de los ángulos y los lados de los triángulos, lo que actualmente equivaldría a una tabla de valores para el seno trigonométrico. Hiparco es considerado el creador de la trigonometría plana y esférica, pero principalmente es conocido como el más grande astrónomo de la Antigüedad. Consiguió dar una mejor aproximación de la distancia entre la Tierra y la Luna que había dado anteriormente Aristarco.

Y es esta la primera razón de ser del origen de la trigonometría, la necesidad de hacer mediciones astronómicas y de distancias de lugares terrestres. Ptolomeo, siglo II d.C., continuando con la trigonometría que había propuesto Hiparco hizo grandes aportaciones a la astronomía, astrología y geografía. Ptolomeo es conocido también por hacer una gran aproximación al número π , durante el cálculo de la cuerda del ángulo de 1º y la relacionarla con la longitud de su arco.

Para continuar con el estudio de la evolución de la trigonometría a lo largo de la historia tenemos que dar un gran salto en el tiempo hasta los siglos V y VII d.C. Durante este periodo destaca la trigonometría india, que al igual que en años anteriores seguía considerándose una parte de la astronomía. Tanto es así que el título de maestro astronómico no se podía adquirir sin tener amplios conocimientos trigonométricos. Es durante estos siglos cuando el matemático indio Varahamihira estableció los resultados trigonométricos de seno para los ángulos de 30, 60 y 90 grados. Posteriormente y ayudándose de estos resultados creo unas tablas en las que se podía encontrar el seno de cualquier valor comprendido entre 3º y 90º. Un siglo más tarde Bhaskara I, halló una fórmula que permitía conocer el seno de cualquier ángulo sin tener que acudir a una tabla.

Los árabes, varios siglos más tarde, tomaron prestados de la trigonometría helenística e india conceptos y aportaciones a los que les dieron unas características más modernas. Tres de las aportaciones fundamentales de la trigonometría árabe son:

- El establecimiento de un conjunto de funciones trigonométricas básicas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.
- Obtención de ecuaciones trigonométricas, entre ellas la regla del seno o Teorema del seno.
- Elaboración de tablas trigonométricas más precisas que las anteriores.

La llegada de la trigonometría al Occidente cristiano supuso un punto de partida y evolución en cuanto a la astronomía europea se refiere. Esta siempre apoyada en la trigonometría árabe, tenía como finalidad el estudio de los movimientos de cuerpos celestes, por ejemplo del Sol, Saturno, Júpiter, Marte, Venus o Mercurio. Posteriormente, otro de los objetivos de la trigonometría europea fue la medida de la Tierra, la determinación del grado de meridiano y el cálculo de la longitud geográfica de un lugar.

D.2 Razón de ser en la introducción escolar de la trigonometría.

Una de las principales preocupaciones de la humanidad a lo largo de la historia ha sido la medición de longitudes y el cálculo de superficies o volúmenes. De hecho, como se ha visto en la sección anterior, el comienzo de la trigonometría con el objetivo de poder medir distancias terrestres, como por ejemplo el radio de la tierra. A partir de esta necesidad de medir distancias evolucionó la trigonometría hasta introducirse en diversos campos la aeronáutica o la navegación.

Durante la propuesta didáctica de este trabajo, serán tres las razones de ser que ayuden a introducir el objeto matemático, pero serán diversos campos y contextos los que se utilizarán para darle contextualización y sentido al uso de la trigonometría en la vida cotidiana. En la siguiente sección, se detallarán las tres razones de ser así como los contextos para los problemas que darán sentido al uso de la trigonometría.

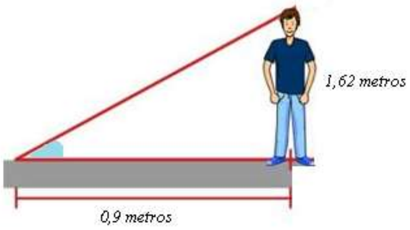
D.3 Actividades propuestas relacionadas con las razones de ser.

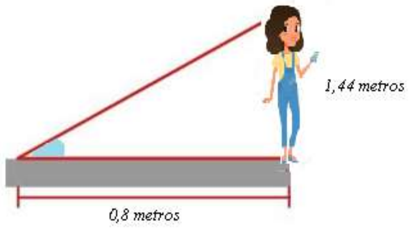
A continuación se van a exponer varias razones de ser que se trabajarán durante toda la secuencia didáctica que se propone en el presente trabajo. Al igual que ha ido surgiendo la trigonometría a lo largo de la historia, habrá razones de ser relacionada con el cálculo de distancias o ángulos dados ciertos datos de triángulos rectángulos y, a partir de ahí vayan evolucionando a razones de ser un tanto más complejas como pueden ser la astronomía, navegación o aeronáutica. Así las primeras razones de ser servirán para introducir las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente) en triángulos rectángulos y las relaciones entre estas y las siguientes razones de ser para trabajar las razones trigonométricas en triángulos no necesariamente rectángulos o en problemas con varios triángulos.

Como resultado del análisis histórico de la introducción y evolución de la trigonometría, las razones de ser que se proponen son:

1ª Razón de ser: Introducción de las razones trigonométricas dados los lados de un triángulo rectángulo.

Actividad 1: En el patio del colegio se quiere averiguar la altura de una canasta de baloncesto y para ello se mide la altura de dos de los estudiantes y la sombra que proyectan, obteniendo los siguientes resultados. Responde a las siguientes preguntas:





a) ¿Podrías calcular la altura de la canasta sabiendo que proyecta una sombra de 1,5 metros?

b) ¿Cuál es el cociente de dividir la altura de las dos personas entre la sombra que proyectan? ¿Por qué crees que ocurre esto?

c) ¿Y el cociente de dividir la altura de la canasta entre la sombra que proyecta?

Esta actividad serviría de introducción para las razones trigonométricas, pues se comienza con el uso de la semejanza para calcular distancias pero al realizar los cocientes se aprecia que ambos son iguales. Con esto se pretende que el alumnado vea que tanto para las personas como para la canasta los rayos inciden con el mismo ángulo de inclinación. Seguidamente se podría proponer la siguiente actividad, que se introduciría con una nueva razón de ser.

2º Razón de ser: Cálculo de distancias en triángulos rectángulos conocido algún ángulo.

> Actividad 2: Un senderista que está ascendiendo una montaña ha observado al comienzo de la subida un cartel que indicaba una inclinación de 10º. Al tiempo, se da cuenta que ha caminado 5km y quiere averiguar a qué altura se encuentra. ¿Cuál es esta altura?

Este problema está pensado para dar sentido al uso de las razones trigonométricas. Después de haber resuelto el problema anterior (Actividad 1) con semejanza puede ser que el alumnado utilice las mismas herramientas para este otro ejercicio. Pero van a observar que necesitan algo más, pues únicamente con la semejanza no se puede resolver.

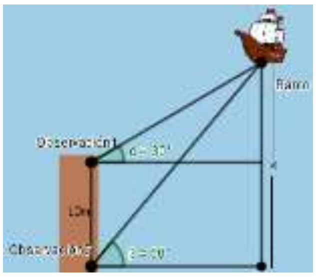
Para introducir los problemas en los que se deben de calcular los ángulos de un triángulo rectángulo además de distancias, se va a utilizar el contexto de la agrimensura. La agrimensura era definida como el arte de medir tierras, y formaba parte de la ciencia que actualmente denominamos como topografía. El problema que se propone es el siguiente:

> Actividad 3: Desde una ciudad A observamos un desvío de carreteras, una va hacia una ciudad y otra hacia la ciudad C. Un cartel nos indica que B está a 50 km de distancia del desvío y C está a 40km. ¿A qué distancia están las ciudades B y C si se sabe que la carretera que va de B a C y la que a de A a C son perpendicules en la ciudad C? ¿Qué ángulo se forma en el desvio en la ciudad A?

Una vez hayan asimilado las razones trigonométricas en triángulos rectángulos se pasaría a las introducir otros problemas con triángulos no necesariamente rectángulos con las siguiente razón de ser.

3º Razón de ser: Razones trigonométricas en triángulos no rectángulos.

Actividad 4: Dos personas separadas 1200 m observan un avión que vuela entre ellos con ángulos de elevación de 35º y 55º ¿ a que altura vuela este avión?



Actividad 5: Desde un muelle en la playa se observa un barco en el horizonte. Un observador realiza dos mediciones como se muestran en la imagen. Los ángulos de observación del barco respecto a la horizontal son de 30º y 50º, y la distancia entre las dos mediciones es de 10m. ¿Cuál es la distancia del barco hasta la orilla?

Con este problema se introduce la última razón de ser y el último campo de problemas, CP2, en el que se proporcionan dos ángulos y un lado. Los problemas se introducen en varios contextos, entre ellos la aeronáutica y la navegación debido a la importancia que tiene la trigonometría en estas dos ciencias.

D.4 Metodología.

La enseñanza de la trigonometría tradicional se basa en el uso repetitivo de algoritmos y fórmulas para resolver problemas trigonométricos con conceptos y enunciados que el alumnado no entiende o a los cuales no ve finalidad alguna. Como dicen Triana y Naranjo, (2015, p.67) "los (las) estudiantes muestran poco interés y motivación por aprender matemáticas ya que, la mayoría de las veces, no le encuentran sentido a lo que hacen en esta disciplina." Por lo tanto, se intentará que esto no ocurra y que los ejercicios y problemas que se planteen posean interés para el alumnado, sin caer en la facilidad del trabajo repetitivo o mecanizado. No por ello se dejarán de lado los libros de texto, sino que la introducción de los contenidos será en diferente orden al que allí se plantean. Así como el orden en el que se introducen las técnicas, tecnologías y campos de problemas. Pues, como dice Gamboa, (2007, p.16) "la clave está en trabajar las situaciones cotidianas y los problemas presentes en los libros de texto dese un nuevo enfoque, apoyadas en las herramientas tecnológicas disponibles".

Además, como abogan multitud de autores, entre ellos Gamboa (2007) y Sánchez (2010) las matemáticas permiten el uso de la tecnología en el aula de una manera beneficiosa para nuestro alumnado, fomentando mayor atención e interés hacia la materia y aumentando el trabajo autónomo al enfrentarse a nuevas situaciones.

Durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos relacionados con el objeto matemático de la trigonometría, se trabajarán con diferentes metodologías, desde las más tradicionales hasta el uso de las tecnologías, como se ha mencionado anteriormente. Habrá momentos en los que se utilice una metodología expositiva-participativa en la que el docente institucionalizará las técnicas y habrá otras sesiones que se dedicarán a realizar un proyecto en grupos.

Al mismo tiempo, como se recoge en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Corica y Otero, 2009), se pueden definir unos momentos de estudio, por los cuales debe pasar todo el alumnado que se enfrente al estudio de un nuevo objeto didáctico, como en este caso es el estudio de la trigonometría. Estos momentos son:

1. **Momento del primer encuentro**. El alumnado se ve en la necesidad de abordar una nueva técnica o bien se reencuentra con técnicas aprendidas anteriormente y que aparecen de nuevo, pero en este caso para resolver una tarea diferente.
2. **Momento exploratorio.** El alumnado comienza a explorar las tareas que le son propuestas en el primer encuentro, tratando de elaborar técnicas que le permitan resolver las tareas propuestas de manera autónoma y personal.
3. **Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico**. El alumnado debe reflexionar sobre las técnicas adquiridas en los momentos previos.
4. **Momento del trabajo de la técnica**. Momento en el que se mejorara la técnica haciéndola más eficaz y extendiendo la destreza que se tiene de ella.
5. **Momento de institucionalización**. Momento en el que el docente afianza la técnica y la tecnología que han demostrado ser útiles previamente.
6. **Momento de evaluación.** Reflexión sobre la utilidad de lo aprendido y sobre la importancia de conservar este conocimiento para aplicaciones futuras. Frecuentemente este momento se articula de manera simultánea con el momento de la institucionalización.

El alumnado deberá pasar por todos estos momentos, no necesariamente en orden, para adquirir todos los contenidos relacionados con la trigonometría que vayan apareciendo. Lo podrán hacer de forma individual o en grupos, dependiendo de la sesión, pero aunque se realice de forma individual se fomentará el debate en la clase en el que todas las personas den su propia opinión, así como las técnicas y tecnologías que van surgiendo.

E. Los campos de problemas.

Esta sección va a estar dedicada a los campos de problemas. Antes de comenzar es necesario hacer una distinción entre lo que entendemos por problema y por ejercicio, pues la siguiente sección está dedicada a estos otros. Según la TAD se entiende por problema a una pregunta que el alumno debe de responder mediante una búsqueda de un modelo matemático y de unas técnicas asociadas que permitan encontrar la solución. En cambio, un ejercicio es simplemente la búsqueda de una solución poniendo en práctica una técnica que ha sido especificada de antemano.

En el caso que nos compete del objeto matemático de la trigonometría, podemos distinguir dos campos de problemas principalmente. El primero de ellos incluirá aquellos problemas en los que se deba de resolver un triángulo rectángulo mediante el uso de alguna de las razones trigonométricas, seno, coseno o tangente, bien sea para calcular alguno de los ángulos del triángulo o alguno de los lados. Dentro de este campo de problemas podemos distinguir dos subcampos en función de los elementos conocidos del triángulo a resolver: si se conocen dos lados o bien si se conoce uno de los lados y un ángulo.

Y por último, el segundo campo de problemas incluirá la resolución de triángulos no rectángulos en los que se vean implicadas varias razones trigonométricas, o la misma pero de diferentes ángulos, y se deban usar estrategias diferentes a las del primer campo de problemas para poder resolverlos.

Para facilitar la tarea posterior a la hora de mencionar los campos y subcampos de problemas, se muestra en la siguiente tabla los códigos de la clasificación de dichos campos.

Tabla 3: Clasificación de los campos de problemas.

Campo de problemas	***Subcampos de problemas***
CP1: Resolución de triángulos rectángulos	CP1.1 Conocidos dos lados del triángulo
	CP1.2 Conocidos un lado y un ángulo del triángulo
CP2: Resolución de triángulos no rectángulos.	

E.1. Diseño de los problemas que se presentarán en el aula.

I. Campo de problemas 1: Resolución de triángulos rectángulos (CP1)

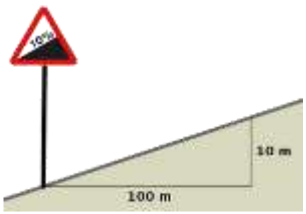
Campo de problemas 1.1: Conocidos dos lados del triángulo rectángulo. (CP1.1)

Conocidos dos de los lados de un triángulo rectángulo se pide calcular uno de los ángulos del triángulo, bien sea el ángulo que se forma entre los dos lados o el ángulo opuesto. Además, los lados que se proporcionan pueden ser dos catetos o uno de los catetos y la hipotenusa. Por consiguiente, resultan varios problemas diferentes de los cuales se muestra un ejemplo para cada uno a continuación:

Tabla 4: Clasificación de los problemas del campo CP1.1.

Problema	**Elementos dados**	**Elementos pedidos.**
1.1.1	Dos catetos	Uno de los ángulos agudos
1.1.2	Cateto e hipotenusa	Ángulo que forman
1.1.3	Cateto e hipotenusa	Ángulo opuesto al cateto dado.

Problema 1.1.1: Una señal colocada al comienzo de una rampa nos indica una pendiente del 10%, ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la pendiente?



Problema 1.1.2: Si en una rampa similar a la anterior hemos andado durante 200 metros y hemos subido una altura de 24 metros. ¿Cuál es el ángulo que se forma ahora?

Problema 1.1.3: Se desea sujetar un poste de 20 metros con un cable que mide 30 metros. ¿Cuál será el ángulo que forma el cable con el suelo?

Campo de problemas 1.2: Conocido un ángulo y un lado del triángulo rectángulo. (CP.1.2)

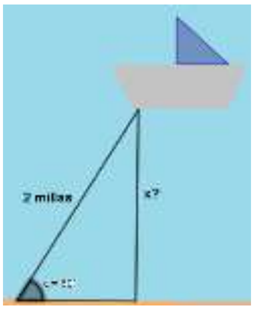
En este caso, se van a dar uno de los ángulos agudos y uno de los lados, bien sea la hipotenusa o uno de los dos catetos y se desean conocer alguno de los elementos restantes del triángulo. Resultan un total de 3 problemas diferentes de los cuales se da un ejemplo para cada tipo:

Tabla 5: Clasificación de los problemas del campo CP1.2.

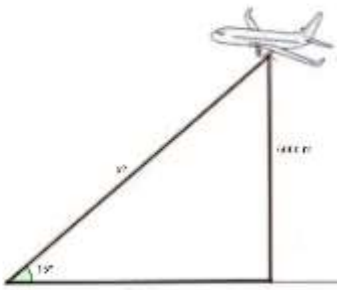
Problema	**Elementos dados**	**Elementos pedidos.**
1.2.1	Ángulo agudo e hipotenusa	Uno de los catetos
1.2.2	Ángulo agudo y c. contiguo al ángulo	El otro cateto y/o la hipotenusa
1.2.3	Ángulo agudo y c. opuesto al ángulo.	El otro cateto y/o la hipotenusa.

Problema 1.2.1: Se sabe que una rampa tiene una inclinación de 12º y que un senderista ha caminado 2km sobre ella. ¿A qué altura de la base de la rampa se encuentra el senderista?

Problema 1.2.2: Un barco sale de un puerto con una horientación de 60º NE, y navega 2 millas ¿a qué distancia, en km, de la orilla de la playa se encuentra? (1 milla nautica equivale a 1,852 km)



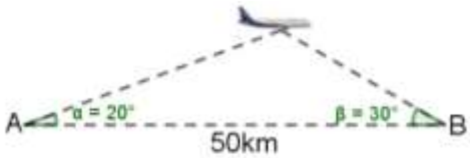
Problema 1.2.3: Un avión se dispone a aterrizar con un grado de inclinación sobre la horizontal de 15º. En el radar del avión se indica que está a una altura de 5000 m. ¿Cuántos kilometros debe de recorrer el avión hasta llegar al aeropuerto?



II. Campo de problemas 2: Resolución de triángulos no rectángulos. (CP2)

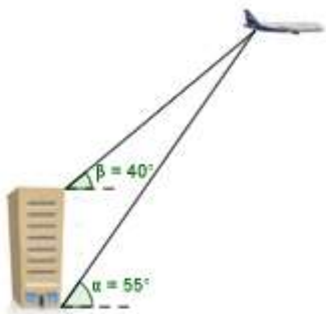
En este campo de problemas se incluyen aquellos problemas en los que o bien el triángulo inicial no es un triángulo rectángulo pero se puede descomponer en dos de estos o directamente se dan dos triángulos rectángulos, pero que para resolverlos necesitamos estrategias diferentes a las anteriores en las que se planteaba una ecuación con una única razón trigonométrica involucrada.

Problema 2.1: Un avión vuela entre dos ciudades A y B que distan entre sí 50km. Desde el avión se miden los ángulos que se indican en la figura ¿a que altura vuela el avión?



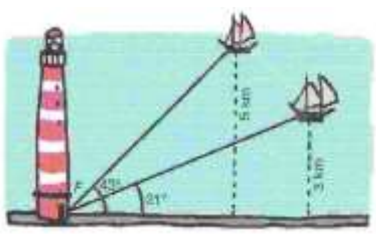
Problema 2.2: Para sujetar una antena se lanzan dos cables al suelo desde la parte más alta de estas. Uno de ello esta anclado al suelo con un ángulo de 25º y a una distancia de 4 metros de la base de la antena. El otro esta anclado a 3 metros de la base. ¿Cuál es la altura de la antena y el ángulo de anclaje del segundo cable?

Problema 2.3: Para saber a que altura vuela un avión medimos los ángulos de elevación del avión desde el portal de nuestra casa, 55º, y desde la terraza, 40 º, y se realiza el esquema de la figura. Sabiendo que el edificio tiene 15 metros y que la altura aproximada de cada piso es de 3,2 metros ¿Cuál es la altura del avión?



Problema 2.4. Desde una ciudad de observa un satelite a 15km de la ciudad con un ángulo sobre la vertical de $\frac{\pi}{3}$ radianes. Desde otra ciudad se observa ese mismo satelite a 10km, ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades? ¿Cuál es el ángulo, en grados, sobre la vertical de la otra ciudad?

Problema 2.5: Desde el faro F se observa el barco A bajo un ángulo de 43º con respecto a la línea de la costa; y el barco B, bajo un ángulo de 21º. El barco A está a 5 km de la costa y el B a 3 km. Calcula la distancia entre los dos barcos.



E.2. Modificaciones de la técnica inicial en la resolución de los problemas.

Las técnicas que se utilizan para resolver estos campos de problemas no sufren ninguna modificación respecto a la técnica inicial pero sí que es necesaria una visión diferente de las técnicas. Es decir, para resolver estos problemas se utilizan las razones trigonométricas vistas, seno, coseno y tangente, pero también se ven en la necesidad de utilizar combinaciones de estas razones trigonométricas para poder llegar a la respuesta adecuada.

E.3. Metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología que se tiene pensada para trabajar estos problemas es la metodología de trabajo en grupo con la dinámica concreta del 1-2-4. Esta dinámica se basa en la resolución de problemas de forma individual pero con una puesta en común posterior con el resto de componentes del grupo, primero por parejas y luego en el grupo completo. Por consiguiente, se pretende que cada alumno y alumna resuelva de manera individual cada uno de los problemas propuestos y cuando haya terminado un compañero o compañera del grupo pongan en común las estrategias y técnicas seguidas para resolverlos, que discutan si alguna de ellas es más ventajosa que la otra, si ambas son válidas, y que en el caso de que los resultados sean diferentes sepan cuál de ellos es el correcto y donde está el error del otro. Mientras, los otros dos integrantes del grupo también pondrán en común de la misma manera sus resultados. Y por último, cuando hayan terminado por parejas lo comentarán en el grupo las cuatro personas.

F. Sobre las técnicas.

F.1. Las técnicas.

Como hemos visto en la sección anterior, E. Los campos de problemas., son necesarias unas técnicas específicas para resolver algunos de esos problemas. Al mismo tiempo, estas técnicas se pueden combinar para resolver otros de los problemas que se proponen. En esta sección se van a diseñar las técnicas relacionadas con el objeto matemático que estamos estudiando, los ejercicios necesarios para ejercitar cada una de las técnicas, así como los campos de problemas vistos en la sección anterior que están relacionados con las técnicas que aquí se presentan.

Mencionar también que para el cálculo de las razones trigonométricas de algunos ángulos es necesario el uso de la calculadora. Por ello en las técnicas que sea necesario el uso de esta se especificará o se dividirá la técnica en dos subapartados; uno en el que sea necesario el uso de la calculadora y otro en el que no haga falta.

I. Técnica 1: Medidas angulares (T1)

Según el currículo oficial, en el curso de 4º de ESO se han de explicar dos medidas angulares: los grados y los radianes. Con los ejercicios que se muestran a continuación se pretende trabajar la técnica del paso de grados a radianes y viceversa.

Ejercicio 1.1: Completa la siguiente tabla realizando los calculos y simplificaciones sin la calculadora.

Grados	**0**	**30**		**60**		**120**	**180**	**200**	**270**		**360**
Radianes			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$					$\frac{22\pi}{11}$	2π

Ejercicio 1.2 Completa la tabla anterior utilizado la calculadora y observa que ocurre.

Ejercicio 1.3: Convierte 45º 30’ a radianes.

Ejercicio 1.4: Convierte 45º 30’ a radianes con la calculadora y comprueba el resulado con el ejercicio anterior.

Con la resolución de estos ejercicios se consigue trabajar la técnica del cambio de medidas angulares de grados a radianes o viceversa. Además, se comienza con la introducción del uso de la calculadora que será más necesaria posteriormente. Con la comparación de los resultados entre las simplificaciones “manuales” y los cálculos con la calculadora se espera que el alumnado observe que es más preciso el trabajo con fracciones que con números cuyas cifras decimales sean elevadas y se realicen truncamientos o redondeos que introduzcan errores en las soluciones.

Los campos de problemas que se trabajan con esta técnica son todos los propuestos en la sección E en los que se exija un cambio de medidas angulares, como ocurre por ejemplo en el Problema 2.1.

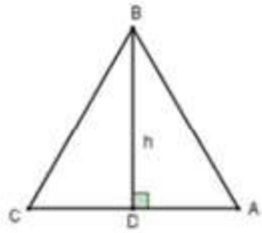
II. Técnica 2: Razones trigonométricas de un ángulo agudo (T2)

Con esta técnica se va a practicar el cálculo de razones trigonométricas de los ángulos agudos en triángulos rectángulos dado los lados del triángulo. Del mismo modo se incluirá el cálculo de alguno de los lados de un triángulo rectángulo dadas las razones trigonométricas.

Las razones trigonométricas que se exigen para este curso son: $sen\ \alpha, cos\alpha\ y\ tg\alpha$.

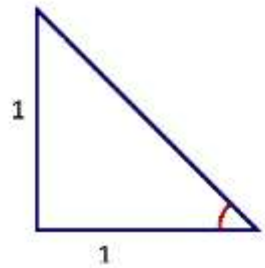
Técnica 2.1 Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º. (T2.1)

Ejercicio 2.1.1: Calcula la altura del triángulo equilátero utilizando el Teorema de Pitágoras, sabiendo que los lados miden una unidad. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo? Calcula las razones trigonométricas de los dos ángulos agudos (BCA y CBD).



Ejercicio 2.1.2: Dibuja un triángulo isósceles con la medida del lado que tu decidas. Calcula la altura del triángulo como en el ejercicio anterior. En uno de los dos triángulos rectángulos que se obtienen al trazar la altura, calcula las razones trignometricas de los dos ángulos agudos y la medida de esto ángulos.

Ejercicio 2.1.3. Calcula los lados de un triángulo rectángulo isosceles en el que los catetos miden una unidad con el Teorema de Pitágoras.¿Cuánto miden sus ángulos? Calcula las razones trigonométricas de esos ángulos.



Ejerccio 2.1.4. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles con la medida del cateto que tu decidas. Calcula las razones trigonometricas de los dos ángulos agudos. ¿Cuánto miden los ángulos?

Estos tres ejercicios trabajan las razones trigonométricas de ángulos de 30º, 45º o 60º. Además, se relaciona la clasificación de triángulos según sus lados (equiláteros o isósceles) con las razones trigonométricas de sus ángulos.

Además, con el Ejercicio 2.1.2 y el Ejercicio 2.1.3 al dibujar cada uno triángulos de medidas diferentes se justificará que las razones trigonométricas no dependen de los lados de los triángulos sino de los ángulos.

Técnica 2.2 Razones trigonométricas de ángulos agudos sin calculadora. (T2.2)

Ejercicio 2.2.1. Realiza los siguientes cálculos y reponde a las preguntas.

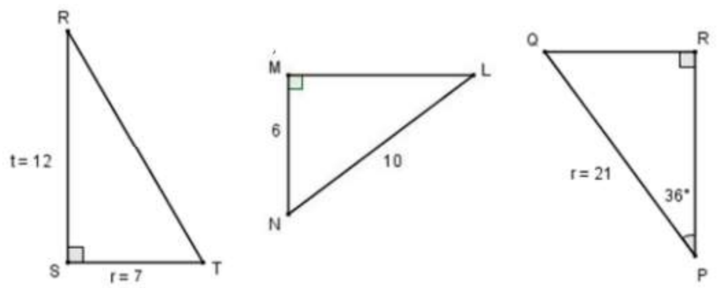
i. Calcula las razones trignómetricas de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 13cm, 12cm y 5cm.

ii. Después, utilizando la calculadora, indica cuánto miden los ángulos del triángulo.

iii. ¿Qué relación hay entre el seno y el coseno de un ángulo y del otro?

iv. ¿Cómo son los ángulos agudos del triángulo? ¿Cuánto suman?

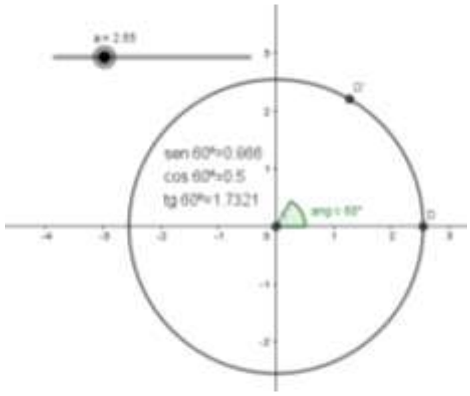
Ejercicio 2.2.2. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de estos triángulos y calcula los lados y ángulos que faltan. Expresa los resultados en forma de fracción, no uses la calculadora.



Técnica 2.3 Razones trigonométricas de ángulos agudos con calculadora. (T2.3)

Ejercicio 2.3.1. Dibuja un triángulo rectángulo con las medidas de los catetos que tu decidas. Mediante el teorema de Pitágoras calcula la medida de la hipotenusa y las razones trigonométricas de los ángulos agudos de tu triángulo. Con ayuda de la calculadora halla el valor de los ángulos del triángulo. ¿Qué relación observas entre el seno de uno de los ángulos y el coseno del otro? ¿Cuánto suman los ángulos agudos. ?

Ejercicio 2.3.2. Calculamos las razones trigonometricas de un ángulo dado con Geogebra. Debes calcular las de los ángulos de 0º, 10º, 15º, 30º, 40º, 45º, 60º 90º. Para cada uno de los ángulos sigue los siguientes pasos:



- Coloca un punto, A en el origen.
- Crea un deslizador, a, con rango 0-10 e incremento 0.01.
- Haz una circunferencia de centro A y radio a.
- Halla la intersección del Eje X con la circunferencia.
- Con la herramienta ángulo dado, haz un ángulo con centro en A de una de las medidas que están indicadas arriba.
- En la barra de entrada indica que calcule el seno, coseno y tangente del ángulo que acabas de hacer.
- Anima el deslizador y observa que ocurre con las razones trigonométricas que has hallado.

Al igual que con el Ejercicio 2.1.2 y el Ejercicio 2.1.3, al dibujar cada alumno y alumna un triángulo diferente se pueden usar estos ejercicios para generalizar y justificar las técnicas. En este caso, en el ejercicio se trabajan varias técnicas:

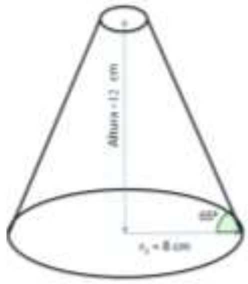
- Cálculo de razones trigonométricas de ángulos agudos.
- Uso de la calculadora para hallar ángulos y razones trigonométricas.
- Relación entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios.

El campo de problemas que se práctica con esta segunda técnica, bien sea con o sin calculadora es el Campo de problemas 1: Resolución de triángulos rectángulos (CP1). También se trabaja esta técnica en el Campo de problemas 2: Resolución de triángulos no rectángulos. (CP2), pero en este campo no es la única técnica que se utiliza, pues como veremos más adelante, en ocasiones son necesarias las técnicas que se especifican a continuación.

Para trabajar esta técnica también se proponen ejercicios relacionados con áreas y volúmenes, en los cuales deberán de usar razones trigonométricas para calcular el lado de ciertas figuras geométricas y así poder calcular sus áreas o volúmenes.

Ejercicio 2.3.3. Halla el área de un pentágono inscrito en una circunferencia de radio 20cm.

Ejercicio 2.3.4. Determina el volumen de este tronco de cono, cuya altura es 12cm, el radio de la base es 8 cm y el ángulo que forma la base con la generatriz es de 65º. ¿Es posible determinar su superficie? En caso afirmativo calcula dicha superficie.



III. Técnica 3: Relaciones trigonométricas.

Los ejercicios que se presentan a continuación son para trabajar las relaciones trigonométricas entre las razones de un ángulo. Se trabajarán dos principalmente:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1;$$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}.$$

Ejercicio 3.1. Sabiendo que el $sen\ \alpha = \frac{1}{3}$. Calcula las restantes razones trigonométricas.

Ejercicio 3.2. Sabiendo que el $cos\ \alpha = \frac{2}{3}$. Calcula las restantes razones trigonométricas.

Ejercicio 3.3 Calcula el $sen\alpha\ y\ cos\alpha$, sabiendo que $tg\alpha = \frac{3}{5}$.

Ejercicio 3.4. ¿Puede existir un ángulo α tal que $sen\alpha = \frac{1}{4}\ y\ cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$?

IV. Técnica 4: Descomposición de triángulos cualesquiera en triángulos rectángulos.

En algunos libros de texto consultados denominan a esta técnica “estrategia de la altura” o “estrategia de la tangente”. Esto es debido a que en los problemas se presenta generalmente un triángulo, no necesariamente rectángulo, que para resolverlo es necesario dividirlo en dos triángulos rectángulos trazando la altura del original.

Técnica 4.1. Triángulos acutángulos.

Cuando el triángulo que se presente sea un triángulo acutángulo, no rectángulo, la técnica que se utilizará para resolver el problema será la descomposición en dos triángulos rectángulos tranzando la altura sobre la base del triángulo.

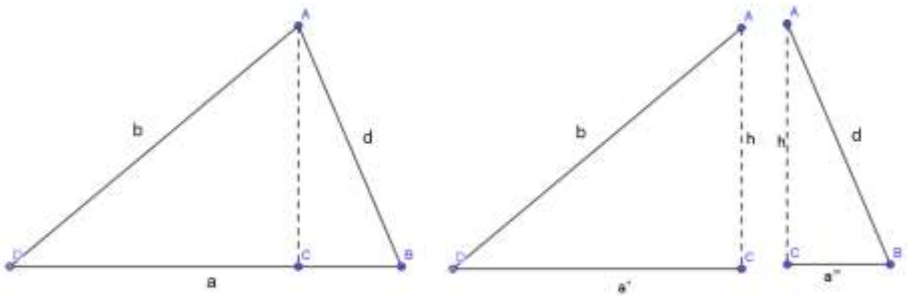


Figura 8. Descomposición de triángulos acutángulos en triángulos rectángulos.

Técnica 4.2. Triángulos obtusángulos.

En el caso en que el triángulo sea obtusángulo se dividirá en dos triángulos rectángulos trazando la altura sobre la base.

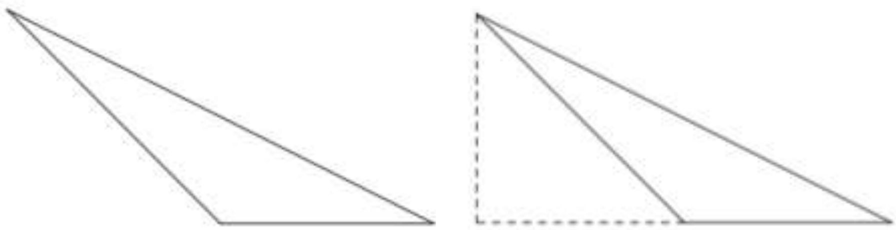


Figura 9. Descomposición de triángulos obtusángulos en triángulos rectángulos.

En ambos casos, la técnica T4 de descomposición de triángulos no rectángulos en triángulos rectángulos se utilizan para la resolución de buena parte de los problemas del Campo de problemas 2: Resolución de triángulos no rectángulos. (CP2)

F.2 Metodología a seguir en el aula.

Todos ejercicios que se proponen para trabajar las técnicas están previstos para que se resuelvan de manera individual pero con una posterior puesta en común en el aula. Como se ha mencionado, algunos de los ejercicios que se proponen no tienen un enunciado cerrado pues cada alumno y alumna puede proponer diferentes triángulos, pero todos ellos llevan a las mismas conclusiones. Por ello, es interesante que se resuelvan de manera individualizada y luego se genere un debate en el aula para consensuar esas conclusiones comunes. Estos debates servirán también como tecnologías de las técnicas.

G. Las tecnologías.

Según se define en la TAD, las tecnologías son las justificaciones de las técnicas. Como en la sección anterior se han especificado las técnicas y se han explicado una por una, en esta sección se hará la misma diferenciación.

G.1. Razonamientos que justifican las técnicas.

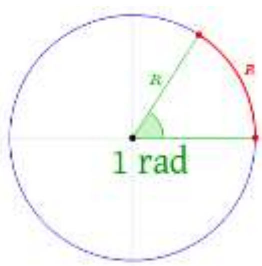
I. Tecnología 1: Definiciones de grados y radianes (TG1)

Técnica 1: Medidas angulares (T1) se va a justificar mediante las definiciones de grados y radianes. Se debería comenzar por la definición de grado, minuto y segundo, medidas del sistema sexagesimal:

> "El grado sexagesimal se define como una de las 360 partes iguales en las que se divide una circunferencia. Cada grado puede dividirse en 60 partes iguales denominadas minutos y cada minuto en otras 60 que llamaremos segundos."

Y continuar con la definición de radián:

> "Un radián es el ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de igual longitud que el radio de la misma."



A partir de aquí, se continuaría con la relación entre las dos medidas angulares para poder pasar de una a otra sin ningún tipo de dificultad.

El docente debería de dar las dos definiciones anteriores y recordar cual es la longitud de una circunferencia de radio r ($l = 2\pi r$), para después dejar libertad al alumnado par que encuentre cual es la relación entre esas dos medidas. Deberían de llegar a la equivalencia de radianes a grados y de grados a radianes:

> "1 radián son $\frac{180}{\pi}$ grados" y "1 grado son $\frac{\pi}{180}$ radianes"

Cuando el alumnado hubiese llegado a este paso, sería tarea del docente institucionalizar la técnica para poder practicarla con los ejercicios propuestos en la T1.

II. Tecnología 2: Razones trigonométricas (TG2)

La Técnica 2: Razones trigonométricas de un ángulo agudo (T2) bien sea con o sin calculadores se justificaría mediante el trabajo del problema propuesto en la primera razón de ser, relacionado con las alturas de alumnos. Este problema se ampliará trabajando con Geogebra como se indica en el Ejercicio 2.3.2.

Las razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º se pueden hallar con los ejercicios propuestos en esa misma técnica: Técnica 2.1 Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º. (T2.1) y así quedarían justificadas.

Posteriormente el docente institucionalizaría las definiciones de seno, coseno y tangente:

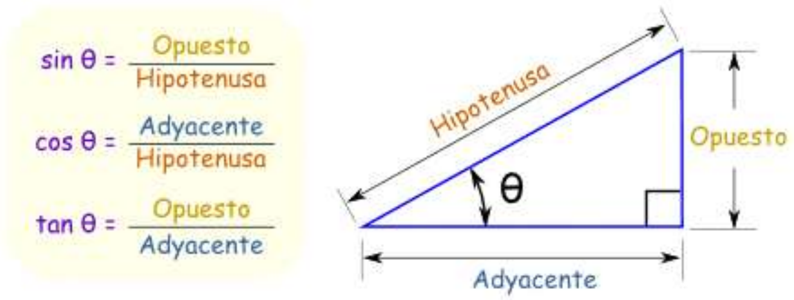


Figura 10. Definiciones de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

A continuación, sería el alumnado el que iría descubriendo las propiedades de estas. Por ejemplo, con los ejercicios donde el alumnado dibuja sus propios triángulos se pueden justificar las relaciones entre las razones trigonométricas y los ángulos complementarios:

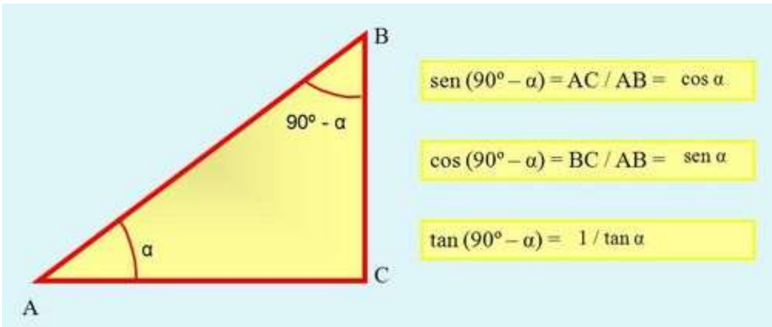


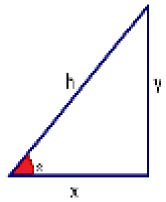
Figura 11.Relaciones de las razones trigonométricas de ángulos complementarios.

Con esos ejercicios también pueden aventurar que las razones trigonométricas no dependen únicamente de los lados del triángulo, aunque así lo parezca por las definiciones, sino que dependen únicamente del ángulo.

III. Tecnología 3: Demostraciones de las relaciones trigonométricas. (TG3)

En el caso de la Técnica 3: Relaciones trigonométricas. Se justificarán con el uso del teorema de Pitágoras y las definiciones de las razones trigonométricas vistas anteriormente. La demostración de estas relaciones las realizará el alumnado con pequeñas institucionalizaciones progresivas del docente para que siguen los pasos correctamente. Debemos de entender que en 4º de ESO el alumnado está preparado para asumir demostraciones pero siempre con una guía.

La primera relación se puede demostrar usando únicamente el Teorema de Pitágoras y las definiciones de seno y coseno:



“Demostración de $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Aplicamos la definición de seno y coseno para el ángulo α y escribimos el teorema de Pitágoras:

$$sen\ \alpha = \frac{y}{h};\ cos\ \alpha = \frac{x}{h};\ x^2 + y^2 = h^2$$

Entonces: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^2 = \frac{y^2+x^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$

Y así queda demostrada la primera relación trigonométrica.”

Para la siguiente basta con usar la definición de seno, coseno y tangente:

“Demostración de $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$. Aplicando las definiciones de seno, coseno y tangente

$$sen\ \alpha = \frac{y}{h};\ cos\ \alpha = \frac{x}{h};\ tg\ \alpha = \frac{y}{x}$$

Entonces:

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{y}{h}}{\frac{x}{h}} = \frac{y \cdot h}{x \cdot h} = \frac{y}{x} = tg\ \alpha$$

Y quedaría demostrada la segunda relación fundamental”

IV. Tecnología 4: Descomposición en triángulos rectángulos (TG4)

La técnica 4 se desarrollará a la vez que se vayan introduciendo los problemas del Campo de problemas 2: Resolución de triángulos no rectángulos. (CP2) y quedará justificada por las tecnologías que justifican las técnicas previas.

H. Sobre la secuencia didáctica.

La propuesta de la secuencia didáctica que se mostrará a continuación, está prevista para 12 sesiones de 50 minutos cada una de ellas. Una de las sesiones se dedicará a la realización de un trabajo en grupo y otras dos de ellas se destinarán a la prueba escrita y a la sesión de postevaluación.

Tabla 6: Temporalización de la propuesta didáctica.

Sesión	**Contenidos**	**Razón de ser**	**Campos de problemas**	**Técnicas**	**Tecnologías**
1	Actividad de conocimiento previos				
2	Medidas angulares: grados y radianes			T1	TG1
3	Definiciones de seno, coseno y tangente.	Nº 1		T.2.2 y T.2.1.	TG2
4	Razones trigonométricas con calculadora	Nº2	CP1.1, CP1.2	T.2.3	TG2
5	Trabajo de los campos de problemas		CP1.1, CP1.2,		
6	Relaciones trigonométricas			T3	TG3
7	Descomposición en triángulos rectángulos	Nº3	CP2	T4.1 T4.2	TG4
8	Trabajo de campo		CP2	T4.1 T4.2	TG4
9	Trabajo de campo con Geogebra.		CP2	T41. T4.2	TG4
10	Sesión de repaso y dudas				
11	Evaluación con prueba escrita		CP1, CP2	T1, T2, T3. T4	
12	Postevaluación.				

I. Sesión 1. Introducción y conocimientos previos.

En esta primera sesión de 50 minutos se dedicará unos 35 minutos en realizar las actividades previas que se han descrito en el apartado C.2 Actividades previas. Posteriormente, se utilizará el resto de la sesión para contarle al alumnado cómo será la evaluación de la unidad, cuáles serán los contenidos que se trabajarán y para explicarles en que consistirá el trabajo que realizarán en las sesiones posteriores.

II. Sesión 2. Medidas angulares.

Para comenzar el contenido de esta secuencia didáctica empezaremos con la definición de grados y radianes. A continuación, se le planteará al alumnado un problema en el que deban pasar grados a radianes o viceversa. Cuando el alumnado haya investigado sobre la equivalencia entre grados y radianes y viceversa será tarea del docente institucionalizar la técnica T1 y justificarla mediante la tecnología TG1. Se terminará la sesión trabajando la técnica con los Ejercicios 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

III. Sesión 3: Definiciones de las razones trigonométricas.

En esta sesión se trabajará e introducirá la primera de las razones trigonométricas con la Actividad 1, en la que el alumnado deberá de observar las relaciones entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Posteriormente, se darán las definiciones de las razones trigonométricas y se harán los ejercicios 2.2.1 y 2.2.2. Por último, se explicarán las razones trigonométricas del ángulo 30º, 45º y 60º, se trabajarán con los ejercicios 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.1 y se justificará con la tecnología TG2.

IV. Sesión 4: Razones trigonométricas con calculadora y geogebra.

Dedicaremos a trabajar las razones trigonométricas que habrán visto en la sección anterior pero en este caso con la calculadora o con el software libre Geogebra. Pero primero se introducirá el cálculo de los ángulos conocidos los catetos del triángulo rectángulo con la razón de ser Nº 2.

Seguidamente se harán los ejercicios 2.3.1 y 2.3.2, uno de ellos con calculadora y otro de ellos con el programa de Geogebra. Así se institucionalizará la técnica T2.3.

V. Sesión 5: Trabajo de los campos de problemas.

Comenzaremos la clase realizando dos de los ejercicios que quedaban pendientes de la técnica 2, en los que se trabajaba el cálculo de áreas y volúmenes a través de la trigonometría. Y se continuará realizando problemas de los campos de problemas CP1.1 y CP1.2 para trabajar las técnicas vistas en las cuatro sesiones anteriores.

VI. Sesión 6: Relaciones trigonométricas

Continuaremos la secuencia didáctica con la explicación de las relaciones trigonométricas (T3), su justificación (TG3) y se trabajará la técnica con los ejercicios 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4.

VII. Sesión 7: Descomposición de trabajos cualesquiera en triángulos rectángulos.

Se introduce en esta sesión la razón de ser Nº3, con la posterior realización de los problemas del campo de problemas CP2. Durante la realización de los problemas se irá institucionalizando la técnica T4 y la tecnología TG4.

VIII. Sesión 8: Trabajo de campo, mediciones en el exterior.

El trabajo que se les propone es calcular la altura de alguno de los edificios cercanos al instituto o incluso es propio edificio del instituto del cual el pie es inaccesible. Para ello se realizarán dos medidas a diferentes distancias del pie de la base del edificio. Las medidas que deberá de tomar el alumnado serán: los ángulos de visión desde el alumno o alumna que realice la medición hasta la parte superior del edificio y la distancia en línea recta sobre el suelo entre las dos mediciones. Las mediciones de los ángulos las realizarán con un goniómetro de construcción casera en madera.

El trabajo lo realizarán por parejas, una de las personas de la pareja realizará las mediciones y la otra anotará los datos. La producción que entreguen, así como la actividad en Geogebra también la realizan en parejas.

IX. Sesión 9: Trabajo de campo, paso de datos a Geogebra.

En esta sesión el docente podrá ayudar al alumnado a realizar el trabajo pero se les intentará dejar la mayor libertad posible, para observar los conocimientos adquiridos y asimilados hasta el momento. Deberán plantear el problema en un folio y realizar todos los cálculos con boli y calculadora. Pero también se les exigirá que trasladen todos los datos al programa Geogebra, realicen los cálculos ahí y los comparen con los que han obtenido a mano.

Para realizar los cálculos en Geogebra deberán de utilizar deslizadores y la herramienta de medición de ángulos, entre otras, y para facilitarles la tarea se les dará un guion que deberán de seguir, aunque será un guion general para todos y cada una de las parejas deberá de adaptarlo a sus propios datos.

En este trabajo no se les pedirá únicamente que realicen los cálculos y los entreguen como un problema, sino que se pretende que hagan un Diario de campo en el que describan como se han tomado las mediciones, por qué se tomaron esos datos y no otros, cuáles fueron los materiales utilizados para hacer las mediciones, cómo se planteó posteriormente el problema y como se resolvió, con las dos técnicas exigidas (cálculos analíticos y en Geogebra).

X. Sesión 10: Sesión de repaso.

Realizaremos una sesión de repaso en la que el alumnado podrá plantear las dudas que tengan sobre los problemas y ejercicios.

XI. Sesión 11: Prueba escrita.

Realización del examen descrito en la sección siguiente.

XII. Sesión 12: Entrega de resultados de la prueba escrita.

Tras la realización de cualquier prueba es conveniente conocer los fallos y errores para que el aprendizaje sea fructífero. Por ello, tras la realización de esta prueba se hará esta sesión posterior en la que el alumnado verá los aciertos y errores que ha cometido en cada una de las actividades. Pero dejar en el alumnado toda la responsabilidad de la asunción de errores no puede ser tan beneficiosos como que el docente los guie durante ese proceso de corrección.

En la sección siguiente sobre la prueba escrita se detallarán tanto la sesión 11 como la 12, así como la gestión de los resultados de esta prueba escrita.

I. Sobre la evaluación.

I.1 Prueba escrita.

A continuación, se presenta la prueba escrita que debería de hacer el alumnado que trabajase con esta propuesta didáctica. La prueba consta de un total de 7 preguntas de las cuales algunos de ellas son ejercicios para que el docente corrobore que el alumnado maneja ciertas técnicas, y otras son problemas en los que se evaluará tanto el razonamiento lógico-matemático a la hora de entender los enunciados e interpretar las soluciones como las técnicas que resuelven los problemas.

1.- Dos ángulos de un triángulo miden respectivamente 40º y π/3 radianes. Calcula en radianes y en grados lo que mide el tercer ángulo. (1.25 puntos)

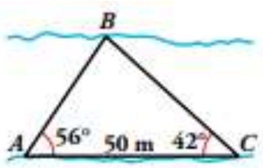
2.- ¿Es rectángulo un triángulo cuyos lados mide 12, 13 y 5cm? En caso afirmativo calcula el seno, coseno y tangente de uno de sus ángulo agudos usando las definiciones de las razones trigonométricas. Explica qué relación hay entre las razones de los dos ángulos agudos. (1.25 puntos)

3.- Calcula el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente es 4/3. ¿Existe un triángulo rectángulo cuya tangente sea 4/3 y su seno sea 3/5? (1.25 puntos)

4.- Un avión sale del aeropuerto y se eleva con un ángulo de 10º hasta que adquiere una altura de 15km. ¿Cuántos km ha recorrido el avión? (1.25 puntos)

5.- Dos hombres salen de un punto A. Uno se dirige a B y otro al punto C, siguiendo trayectorias rectilíneas. Si el caminante que va a B anda 492 metros y el que va a C camina 335,5 metros y la dirección BC es perpendicular a la dirección AC, ¿Qué ángulo forman los caminos cuando se separan en el punto A?¿Cuántos metros separan a los puntos B y C? (1.75 puntos)

6.- Para medir la anchura de un río, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. Hállala. (1.5 puntos)



7.- En un acantilado de 12 metros de altura se observa un barco bajo un ángulo de depresión de $\frac{\pi}{3}$ radianes. En ese mismo acantilado hay colocado un faro desde el cual el vigilante observa el barco en lo alto del faro bajo un ángulo de depresión de $\frac{\pi}{4}$ radianes. Calcula la distancia del barco al pie del acantilado y la altura sobre el nivel del mar de la parte superior del faro. Debes indicar los resultados con números racionales y sin decimales. (1.75 puntos)

I.2. Análisis de la prueba escrita.

En esta sección se va a hacer un análisis cada pregunta de la prueba escrita. Los códigos que se utilizarán para nombrar los campos de problemas, técnicas y tecnologías, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje serán los especificados en A.3 Campo de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan. Por otro lado, se detallarán las respuestas esperadas correctas y la calificación otorgada a cada uno de los fallos según el modelo de tercios.

También debemos de tener en cuenta que además de las respuestas esperadas el alumnado puede cometer diversos errores esperados. Estos errores los podemos clasificar según sean errores asociados a los nuevos conceptos, a conceptos matemáticos previos o al pensamiento y razonamiento lógico- matemático. Los errores generales que se esperan son los siguientes:

- **Errores asociadas a la complejidad de los nuevos objetos matemáticos**:
    - En las equivalencias entre grados y radianes.
    - En el uso de las definiciones de las razones trigonométricas.
    - En la relación entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios.
    - En el uso de las relaciones trigonométricas
- **Errores asociadas a antiguos objetos matemáticos**:
    - Al recordar cual es la suma de los ángulos de un triángulo.
    - Aplicación del Teorema de Pitágoras.
    - Identificación de catetos e hipotenusa de los triángulos.
    - En la resolución de las ecuaciones y sistemas que surjan.
    - Errores aritméticos durante la realización de las operaciones.
- **Errores asociadas al proceso de pensamiento lógico-matemático**:
    - A la hora de interpretar las soluciones de los problemas.
    - Realización de un dibujo acorde con el enunciado.
    - Interpretación de los datos proporcionados en el enunciado.

Por otro lado, según Gairin, Muñoz, y Oller, (2012) a la hora de corregir exámenes de matemáticas por el modelo de tercios es necesario hacer una clasificación de las tareas que el alumnado ha de llevar a cabo durante la resolución de los ejercicios. La jerarquización y ponderación de estas tareas es la siguiente:

- Tareas principales (con una penalización de hasta el 100%)
- Tareas auxiliares (con una penalización de hasta el 67%)
    - Tareas auxiliares especificas (con una penalización de hasta el 67%)
    - Tareas auxiliares generales (con una penalización de hasta el 33%)

La penalización de las tareas auxiliares específicas junto con la de las tareas auxiliares no podrá superar el 67% de la calificación de la pregunta.

En el posterior análisis de la prueba escrita que se propone se clasificarán cada una de las tareas de cada uno de los ejercicios y problemas según la clasificación anterior.

I. Pregunta 1.

1.- Dos ángulos de un triángulo miden respectivamente 40º y π/3 radianes. Calcula en radianes y en grados lo que mide el tercer ángulo. (1.25 puntos)

Conocimientos del alumnado.

Tabla 7: Conocimientos del alumnado evaluados en la pregunta 1

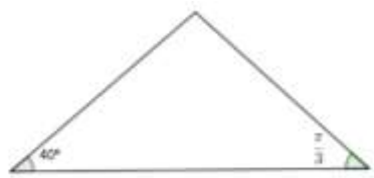
Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías	Criterios de Evaluación	Estándares de aprendizaje.
-	T.1	TG.1	Crit.MAAC.3.1.	Est.MAAC.3.1.1.

Respuesta Correcta 1: Cálculos en radianes.

La equivalencia entre grados y radianes es:

$$“1\ radián\ son\ \frac{180}{\pi}\ grados"$$

$$“1\ grado\ son\ \frac{\pi}{180} radianes"$$



Por lo tanto 40º son $\frac{2}{9}\pi$ radianes

Como los ángulos de un triángulo suman 180º o lo que es lo mismo π radianes, el tercer ángulo medirá en radianes: $\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{9} = \frac{4\pi}{9}\ radianes.$

Haciendo su equivalencia a grados con las equivalencias anteriores, tendremos que el tercer ángulo en grados medirá 80º.

Respuesta Correcta 2: Cálculos en grados.

Usando las equivalencias anteriores se tiene que $\frac{\pi}{3}$ radianes son 60º.

Como los ángulos de un triángulo suman 180º el tercer ángulo medirá en grados: $180º - 40º - 60º = 80º$. Y haciendo su equivalencia a radianes, tendremos que el tercer ángulo medirá $\frac{4\pi}{9}$ radianes.

Respuesta Correcta 3: Mezcla de las dos anteriores.

Otra respuesta esperada, sería que el alumnado hiciese los dos procedimientos anteriores para poder calcular el tercer ángulo en radianes o en grados sin llegar a hacer la equivalencia final.

Modelo de tercios.

Tabla 8: Modelo de tercios para la pregunta 1.

Tareas Principales		
Cálculo de la medida del tercer ángulo en grados y en radianes	Penalización hasta el 50% en cada una de las medidas.	Hasta el 100% y dejar de corregir.
Tareas Auxiliares Específicas		
Paso de grados a radianes o de grados a radianes	Penalización del 33,5% por cada error	Hasta el 67% y continuar corrigiendo.
Tareas auxiliares generales		
Relación de los ángulos de un triángulo (suma 180º)	Penalización del 67%	Hasta el 33% y continuar corrigiendo
Fallos aritméticos	Penalización del 11% por cada fallo	

II. Pregunta 2

2.- ¿Es rectángulo un triángulo cuyos lados mide 12, 13 y 5cm? En caso afirmativo calcula el seno, coseno y tangente de uno de sus ángulo agudos usando las definiciones de las razones trigonométricas. Explica qué relación hay entre las razones de los dos ángulos agudos. (1.25 puntos)

Tabla 9: Conocimientos del alumnado evaluados en la pregunta 2

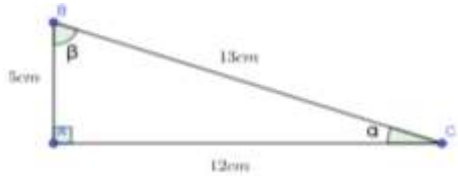
Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías	Criterios de Evaluación	Estándares de aprendizaje.
-	T.2, T2.2	TG.2	Crit.MAAC.3.2.	Est.MAAC.3.2.1.

Respuesta Correcta 1:

Para comprobar que un triángulo de lados 12, 13 y 5cm es rectángulo comprobamos que cumple el Teorema de Pitágoras. El lado que mide 13cm deberá de ser la hipotenusa y los lados de 12 y 5 cm los catetos. Como: $13^2 = 12^2 + 5^2;\ 169 = 169$

El triángulo de lados 13, 12, y 5cm es un triángulo rectángulo.

Para calcular las razones trigonométricas de los dos ángulos agudos, primero dibujamos el triángulo.



Usado las definiciones de seno, coseno y tangente:

$$sen\ \theta = \frac{c.opuesto}{hipotenusa.};\ cos\ \theta = \frac{c.contiguo}{hipotenusa.};\ tg\ \theta = \frac{c.opuesto}{c.contiguo.}$$

Entonces:

$$sen\ \alpha = \frac{5}{13};\ cos\ \alpha = \frac{12}{13};\ tg\ \alpha = \frac{5}{12};$$

$$sen\ \beta = \frac{12}{13};\ cos\ \beta = \frac{5}{13};\ tg\ \beta = \frac{12}{5}$$

Los ángulos α y β son ángulos complementarios, es decir suman 90º. Y las razones trigonométricas de ambos cumplen:

$$sen\ \alpha = cos\ \beta;\ cos\ \beta = sen\ \alpha;\ tg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \beta}$$

(No se esperan respuestas diferentes, aparte de aquellas que tengan diferente notación o en las que el triángulo este dibujado con el cateto de 5cm en la base. A pesar de esto la respuesta no cambiaría puesto que se pide calcular las razones de ambos ángulos agudos.)

Modelo de tercios.

Tabla 10: Modelo de tercios para la pregunta 2.

Tareas Principales		
Definiciones de razones trigonométricas	Penalización del 75%	Hasta el 100% y dejar de corregir.
Comprobación de que el triángulo es rectángulo para poder aplicar las definiciones de la razones.	Penalización del 25%	

Tareas auxiliares especificas		
Calcular las razones trigonométricas de los ángulos agudos.	Penalización del 10% por cada razón	Hasta el 67% y continuar corrigiendo.
Relacionar las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios.	Penalización del 7%	
Tareas auxiliares generales		
Comprobación de que es un triángulo rectángulo.	Penalización del 23%	Hasta el 33% y continuar corrigiendo.
Fallos aritméticos	Penalización del 5% por cada fallo	

III. Pregunta 3.

3.- Calcula el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente es 4/3. ¿Existe un triángulo rectángulo cuya tangente sea 4/3 y su seno sea 3/5? (1.25 puntos)

Conocimientos del alumnado.

Tabla 11: Conocimientos del alumnado evaluados en la pregunta 3.

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías	Criterios de Evaluación	Estándares de aprendizaje.
-	T.3	TG.3	Crit.MAAC.3.1.	Est.MAAC.3.1.1.

Respuesta Correcta 1:

Utilizando las dos relaciones fundamentales de la trigonometría:

$$(1) sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad (2)\ tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}.$$

Podemos plantear un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \\ \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Entonces: $\frac{3sen\alpha}{4} = cos\alpha$.

Y por sustitución: $sen^2\alpha + \left(\frac{3sen\alpha}{4}\right)^2 = 1$

De donde: $sen\alpha = \frac{4}{5}$ y por lo tanto $cos\alpha = \frac{3}{5}$

No podría existir un triángulo rectángulo en el que $tg\alpha = \frac{4}{3}\ y\ sen\alpha = \frac{3}{5}$ por los resultados obtenidos previamente, ya que las razones trigonométricas para un determinado ángulo agudo son únicas y el seno hallado no coincide con el pedido.

(No se esperan respuestas diferentes, aparte de aquellas en las que el sistema se resuelva por un método diferente.)

Modelo de tercios.

Tabla 12: Modelo de tercios para la pregunta 3.

Tareas Principales		
Definiciones erróneas de las relaciones trigonométricas	Penalización del 75%	Hasta el 100% y dejar de corregir.
Conclusión sobre la unicidad de una razón trigonométrica para un determinado ángulo agudo. .	Penalización del 25%	
Tareas auxiliares especificas		
Cálculo del seno y del coseno del ángulo.	Penalización del 33,5% cada razón	Hasta el 67% y continuar corrigiendo
Tareas auxiliares generales.		
Fallos aritméticos	Penalización del 5% por cada fallo	Hasta el 33% y continuar corrigiendo
Resolución del sistema de ecuaciones	Penalización del 23%	

IV. Pregunta 4.

4.- Un avión sale de un aeropuerto y se eleva manteniendo un ángulo constante de 10º hasta que adquiere una altura de 15km. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido el avión? (1.25 puntos)

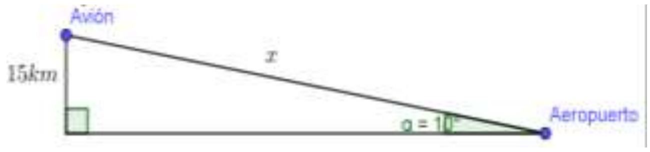
Conocimientos del alumnado.

Tabla 13: Conocimientos del alumnado evaluados en la pregunta 4.

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías	Criterios de Evaluación	Estándares de aprendizaje.
CP1.2	T.2, T2.3	TG.2	Crit.MAAC.3.1. Crit.MAAC.3.2.	Est.MAAC.3.1.1. Est.MAAC.3.2.1. Est.MAAC.3.2.1.

Respuesta Correcta 1:

Realizamos el dibujo:



Como nos preguntan por los kilómetros recorridos por el avión, debemos de calcular la hipotenusa del triángulo. Con el seno del ángulo α tenemos:

$$sen\ 10º = \frac{15}{x};\ x = \frac{15}{sen\ 10} = 86{,}3815 km$$

Entonces el avión ha recorrido 86.3815 kilómetros.

Respuesta Correcta 2:

Con el mismo dibujo que en la respuesta 1:

$$tg\ 10º = \frac{15}{y};\ y = \frac{15}{tg\ 10} = 85{,}0692\ km$$

Con el teorema de Pitágoras calculamos la hipotenusa del triángulo.

$$x^2 = (85{,}0692)^2 + 15^2;\ x = 86{,}3815\ km$$

Por lo tanto, el avión ha recorrido 86,1538 km.

Modelo de tercios.

Tabla 14: Modelo de tercios para la pregunta 4.

<table>
<tr><th colspan="3">Tareas Principales</th></tr>
<tr><td>Interpretación del enunciado</td><td>Penalización hasta el 50%</td><td rowspan="2">Hasta el 100% y dejar de corregir.</td></tr>
<tr><td>Interpretar el cálculo de la hipotenusa del triángulo.</td><td>Penalización hasta el 50%</td></tr>
<tr><th colspan="3">Tareas auxiliares especificas</th></tr>
<tr><td>Planteamiento de la ecuación con razones trigonométricas</td><td>Penalización del 67%
(Penalización de 33% por la ecuación y 33% por Pitágoras)</td><td>Hasta el 67% y continuar corrigiendo</td></tr>
<tr><th colspan="3">Tareas auxiliares generales.</th></tr>
<tr><td>Resolución de la ecuación
(si se usa ecuación y Teorema de Pitágoras)</td><td>Penalización del 23%
(Penalización de 13% por la ecuación y 10% por Pitágoras)</td><td rowspan="2">Hasta el 33% y continuar corrigiendo</td></tr>
<tr><td>Fallos aritméticos</td><td>Penalización del 5% por cada fallo</td></tr>
</table>

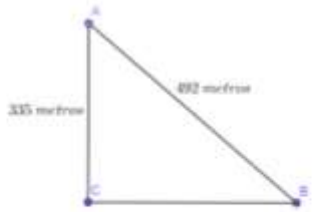
V. Pregunta 5.

5.- Dos hombres salen de un punto A. Uno se dirige a B y otro al punto C, siguiendo trayectorias rectilíneas. Si el caminante que va a B anda 492 metros y el que va a C camina 335,5 metros y la dirección BC es perpendicular a la dirección AC, ¿Qué ángulo forman los caminos cuando se separan en el punto A?¿Cuántos metros separan a los puntos B y C? (1.75 puntos)

Conocimientos del alumnado.

Tabla 15: Conocimientos del alumnado evaluados en la pregunta 5.

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías	Criterios de Evaluación	Estándares de aprendizaje.
CP12	T2	TG.2	Crit.MAAC.3.1.	Est.MAAC.3.1.1.



Respuesta Correcta 1:

Planteamos un dibujo que nos ayude a interpretar el enunciado.

El ángulo que se forma en A, lo podemos calcular con el coseno ya que es la razón trigonométrica que nos relaciona el cateto contiguo y la hipotenusa:

$$cos\alpha = \frac{335,5}{492};\ \alpha = 47^{o}$$

El ángulo que se forma en A es de 47º. Usando el seno o la tangente podemos calcular la distancia entre B y C. $sen\ 47º = \frac{x}{492}$

O bien, $tg\alpha = \frac{x}{335}$

Y de ambas formas obtenemos que la distancia entre B y C es de 360 metros.

Respuesta correcta 2.

Primero calculamos el cateto que falta con el teorema de Pitágoras:

$$492^2 = 335.5^2 + c^2$$

De donde $c = 360$ metros.

Y luego con cualquiera de las tres razones trigonométricas calculamos el ángulo que se forma en A.

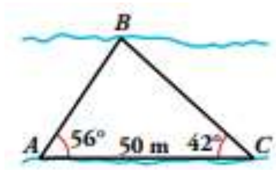
Modelo de tercios.

Tabla 16: Modelo de tercios para la pregunta 5.

Tareas Principales		
Interpretación del enunciado	Penalización hasta el 50%	Hasta el 100% y dejar de corregir.
Definiciones de las razones trigonométricas.	Penalización hasta el 55%	
Tareas auxiliares especificas		
Cálculo de la distancia entre B y C por razones trigonométricas o por el Teorema de Pitágoras.	Penalización hasta el 33.5%	Hasta el 67% y continuar corrigiendo
Cálculo del ángulo que se forma en A (independientemente de la razón trigonométrica que se use)	Penalización del 33.5%	
Tareas auxiliares generales		
Fallos aritméticos	Penalización del 5% por cada fallo	Hasta el 33% y continuar corrigiendo
Resolución de ecuaciones	Penalización del 23%	

VI. Pregunta 6

6.- Para medir la anchura de un río, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. Hállala. (1.5 puntos)

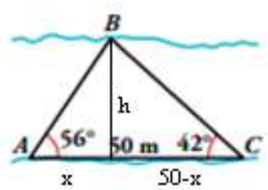


Conocimientos del alumnado.

Tabla 17: Conocimientos del alumnado evaluados en la pregunta 6.

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías	Criterios de Evaluación	Estándares de aprendizaje.
CP2	T2, T4	TG.2, TG4	Crit.MAAC.3.1. Crit.MAAC.3.2.	Est.MAAC.3.1.1. Est.MAAC.3.2.1. Est.MAAC.3.2.1.

Respuesta Correcta 1:



Descomponemos el triángulo en dos triángulos rectángulos.

Usando las tangentes de dos ángulos de 56º y 42º tenemos:

$$\begin{cases} tg56º = \dfrac{h}{x} \\ tg42º = \dfrac{h}{50-x} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por el método que se crea adecuado, por ejemplo por igualación, se tiene:

$$\begin{cases} x \cdot tg56º = h \\ (50-x) \cdot tg42º = h \end{cases}$$

$$xtg56º = (50-x)tg42º$$

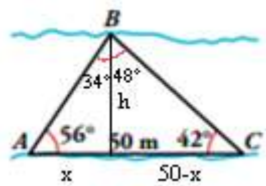
$$xtg56 + xtg42 = 50\,tg42$$

$$x = \frac{50tg42}{tg56 + tg42}$$

De donde $x = 18{,}89\,metros$.

Y sustituyendo en una de las ecuaciones del sistema se tiene que $h = 28\,metros$.

Respuesta Correcta 2:



Descomponemos el triángulo en dos triángulos rectángulos y hallamos el resto de los ángulos de los dos triángulos.

Usando las tangentes de dos ángulos de 34º y 48º tenemos:

$$\begin{cases} tg34º = \dfrac{x}{h} \\ tg48º = \dfrac{50-x}{h} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, por ejemplo por el método de igualación, se tiene:

$$\begin{cases} h \cdot tg34º = x \\ 50 - h \cdot tg48º = x \end{cases}$$

$$htg34º = 50 - htg48º$$

$$htg34 + htg48 = 50$$

$$h = \frac{50}{tg34 + tg48}$$

Y directamente se obtiene que $h = 28\,metros$.

Existen otras respuestas posibles según se resuelva el sistema por un método o por otro (reducción o sustitución).

Modelo de tercios.

Tabla 18. Modelo de tercios para la pregunta 6.

Tareas Principales		
Descomposición del triángulo en dos triángulos rectángulos	Penalización hasta el 50%	Hasta el 100% y dejar de corregir.
Definiciones de razones trigonométricas	Penalización hasta el 50%	
Tareas auxiliares especificas		
Planteamiento de los sistemas con razones trigonométricas	Penalización del 33.5%%	Hasta el 67% y continuar corrigiendo
Cálculo de la anchura del rio	Penalización del 33.5%	
Tareas auxiliares generales.		
Resolución del sistema.	Penalización del 23%	Hasta el 33% y continuar corrigiendo
Fallos aritméticos	Penalización del 5% por cada fallo	

VII. Pregunta 7.

7.- En un acantilado de 12 metros de altura se observa un barco bajo un ángulo de depresión de $\frac{\pi}{3}$ radianes. En ese mismo acantilado hay colocado un faro desde el cual el vigilante observa el barco en lo alto del faro bajo un ángulo de depresión de $\frac{\pi}{4}$ radianes. Calcula la distancia del barco al pie del acantilado y la altura sobre el nivel del mar de la parte superior del faro. Debes indicar los resultados con números racionales y sin decimales. (1.75 puntos)

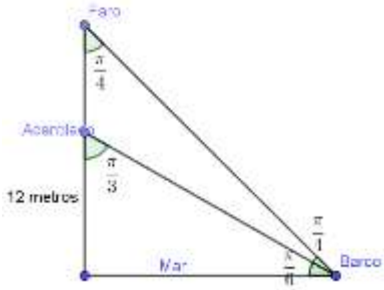
Conocimientos del alumnado.

Tabla 19: Conocimientos del alumnado evaluados en la pregunta 7.

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías	Criterios de Evaluación	Estándares de aprendizaje.
CP1.2, CP2.1	T1, T2, T4	TG.1, TG.2, TG.4	Crit.MAAC.3.1. Crit.MAAC.3.2.	Est.MAAC.3.1.1. Est.MAAC.3.2.1. Est.MAAC.3.2.1.

Respuesta Correcta 1:

Comenzamos haciendo un dibujo en el que se reflejen los datos del enunciado.



Llamamos x a la altura del faro e y a la distancia del barco al pie del acantilado. Podemos plantear dos ecuaciones con cada uno de los triángulos rectángulos que se forman.

$$tg\frac{\pi}{3} = \frac{y}{12}$$
$$tg\frac{\pi}{2} = \frac{y}{12+x}$$

De la primera de las ecuaciones obtenemos que $y = 12\sqrt{3}$

Y sustituyendo en la segunda se obtiene que $x = 12\sqrt{3} - 12$

Así la parte superior del faro está situado a $12\sqrt{3}$ metros sobre el nivel del mar, y el barco se encuentra a $12\sqrt{3}$ metros del pie del acantilado.

Respuesta Correcta 2:

A partir del dibujo realizado anteriormente se pueden calcular los restantes ángulos del triángulo rectángulo.

Llamamos x a la altura del faro e y a la distancia del barco al pie del acantilado. Podemos plantear dos ecuaciones con las razones trigonométricas de los nuevos ángulos.

$$tg\frac{\pi}{6} = \frac{12}{y}$$
$$tg\frac{\pi}{2} = \frac{12+x}{y}$$

De la primera de ellas se obtiene que $y = 12\sqrt{3}$. Y sustituyendo en la segunda se obtiene que $x = 12\sqrt{3} - 12$. Por lo tanto, la parte superior del faro está situada a $12\sqrt{3}$ metros sobre el nivel del mar, y el barco se encuentra a $12\sqrt{3}$ metros del pie del acantilado.

Respuesta correcta 3:

A partir del dibujo de la respuesta 1, podemos obtener que: $tg\frac{\pi}{3} = \frac{y}{12}$

Siendo y la distancia del barco al pie del acantilado.

Y despejando se tiene que $y = 12\sqrt{3}$.

Y para obtener la altura del faro sobre el nivel del mar, bastaría con razonar que un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden $\frac{\pi}{2}$ es isósceles y por lo tanto los dos catetos miden lo mismo. Es decir, que la parte superior del faro está situada a $12\sqrt{3}$ metros sobre el nivel del mar.

Modelo de tercios.

Tabla 20: Modelo de tercios para la pregunta 7.

<table>
<tr><th colspan="3">Tareas Principales</th></tr>
<tr><td>Interpretación del enunciado</td><td>Penalización hasta el 50%</td><td rowspan="2">Hasta el 100% y dejar de corregir.</td></tr>
<tr><td>Interpretar el cálculo de los catetos</td><td>Penalización hasta el 50% (25% de cada cateto)</td></tr>
<tr><th colspan="3">Tareas auxiliares especificas</th></tr>
<tr><td>Planteamiento de ecuaciones con razones trigonométricas</td><td>Penalización del 67%</td><td>Hasta el 67% y continuar corrigiendo</td></tr>
<tr><th colspan="3">Tareas auxiliares generales</th></tr>
<tr><td>Fallos aritméticos</td><td>Penalización del 5% por cada fallo</td><td rowspan="2">Hasta el 33% y continuar corrigiendo</td></tr>
<tr><td>Resolución de ecuaciones</td><td>Penalización del 23%</td></tr>
</table>

I.3. Gestión de los resultados.

Como se ha comentado anteriormente, en la sesión posterior a la prueba se planteaba una sesión en la que el alumnado fuese consciente y analizase los fallos cometidos durante la prueba escrita.

En este caso se propone entregar al alumnado los exámenes con los errores marcados pero sin ningún tipo de calificación, aunque el docente sí que la tenga anotada en algún lugar. A continuación, el docente realizaría el examen en la pizarra para que el alumnado sea consciente del porqué y de la importancia de los errores cometidos. Posteriormente y sabiendo como de graves han sido los errores sería el alumnado el que se calificase las pruebas, sí que se les indicaría el peso de cada uno de los problemas y ejercicios.

La nota final que recibiría cada alumno o alumna sería la nota media de la nota propia y la nota otorgada por docente, siempre y cuando la diferencia entre las dos notas no superase los dos puntos.

Con esto se pretende conseguir que el alumnado preste atención durante la corrección del examen para que se dé cuenta de los fallos cometidos y así los corrija y entienda para pruebas posteriores.

Para evaluar toda la secuencia didáctica no utilizará únicamente la prueba escrita, sino que utilizaremos el trabajo de campo realizado (25 % de la calificación) y el examen (75%). Además la observación diaria del alumnado servirá para calificar el proceso de enseñanza, así como para adaptar las sesiones al aprendizaje del alumnado.

J. Referencias.

Arias Cabezas, J. M., & Maza Sáez, I. (2016). *Matemáticas Académicas 4º Eso.* Madrid: Bruño.

Ballestero, C. (2007). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista de educación 32(1),* 123-138.

Corica, A. R., & Otero, M. R. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista latinoamericana de investigación en educación matemática., 12*(3).

de Lucas Benedicto, M., Peña Romano, M., & Rey Fedriani, M. J. (2016). *Matemátias Orientadas a las Enseñanzas Académicas.* (Vol. 2). Madrid: Oxford Educación.

Esteban Piñerior, M., Ibañes Jalón, M., & Ortega del Rincón, T. (1998). *Trigonometría.* Madrid, España: Síntesis S.A.

Gairin, J., Muñoz, J., & Oller, A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVI,* (págs. 261-274). Granada, España.

Gamboa, R. (2007). Uso de las tecnologías en la enseñanza de matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.*(3), 11-44.

Gobierno de Aragón, Departamento de Educación, Cultura y Deporte. (2016). *Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.*

Gómez, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*(43-44.), 77-80.

Massa Esteve, M., Romero Vallhonesta, F., & Casals Puit, M. (s.f.). *http://cimm.ucr.ac.cr/.* Obtenido de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewFile/118/112

Matemáticas, Enseñanzas académicas. Serie Resuelve. (2016). Madrid: Santillana.

Sánchez, A. A. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría aplicando las TICS. *EDUTEC. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*(31). Obtenido de http://edutec.rediris.es/revelec2/revelec31/

TAD. Grupo de investigación en Teoría antropológica de lo didáctico. (2008). Recuperado el 2019, de http://www.atd-tad.org/

Triana, M. A., & Naranjo, W. E. (2015). Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en matemáticas: reflexiones de una indagación en el aula. . *Ejes.*, 67-73.