Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Una propuesta didáctica sobre probabilidad para 4º ESO

A didactical proposal about probability for the 4th year of ESO

Autor/es

EDUARDO ALONSO CALDERÓN

Director/es

PABLO BELTRÁN PELLICER

Facultad de Educación

Año 2018 – 2019

ÍNDICE

A- SOBRE LA DEFINICION DEL OBJETO MATEMATICO A ENSEÑAR

1- Nombra el objeto matemático a enseñar.

La propuesta didáctica que se va a presentar en este trabajo versa sobre el objeto matemático de la probabilidad en la asignatura de 4º de Educación Secundaria Obligatoria en la modalidad de la opción de Académicas. Los objetivos serán conforme a la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo en los que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria obligatoria y su aplicación en los centros docentes de la comunidad autónoma de Aragón siendo el bloque 6 el que engloba a la Estadística y Probabilidad.

2- Indica el curso y la asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

El objeto matemático seleccionado se aplica al 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria en la asignatura de *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*.

Se adjunta el anexo I los criterios de evaluación, las competencias clave y los estándares de aprendizaje evaluables del 4º curso dentro del bloque 5 Estadística y Probabilidad de la Orden ECD/489/2016.

3- ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

El conjunto de campo de problemas, técnicas y tecnologías que se pretende enseñar se resume en el siguiente cuadro:

Campo de problemas	**Técnicas**	**Tecnologías**
Significado frecuencial. Convergencia en probabilidad.	Mediante recuento y compresión de aleatoriedad, implicación de la frecuencia.	Ley de los Grandes Números.

Sucesos equiprobables (significados frecuencial y clásico).	Conteo total y parcial.	Ley de Laplace.
Sucesos no equiprobables (significados frecuencial y clásico), no analizable a priori, que requiere experimentación.	Conteos, diagramas estadísticos.	Ley de los grandes números.
Sucesos no equiprobables (significados frecuencial y clásico), analizables a priori sin experimentación.	Conteo de casos. Calculo a priori en base a por ejemplo las proporciones de áreas (sector circular).	Ley de los grandes números.
Experimentos compuestos con dependencia e independencia.	Sucesos dependientes e independientes. Diagramas de Venn Diagramas de árbol, Tablas de contingencia. Multiplicación de probabilidades. Suma de probabilidades en el árbol o en la tabla.	Probabilidad de la unión y de la intersección de sucesos. Definición de probabilidad condicionada. Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes. Relación entre distintas representaciones (tabla – árbol y sus ramas correspondientes).

B- SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA- APRENDIZAJE

1-¿Cómo se justifica habitualmente la introducción del objeto matemático?

Aunque han sido varios los libros consultados (Anaya, Santillana, Oxford) nos centraremos en el de Anaya por ser el libro de texto que se empleaba en el centro donde impartimos la secuencia didáctica

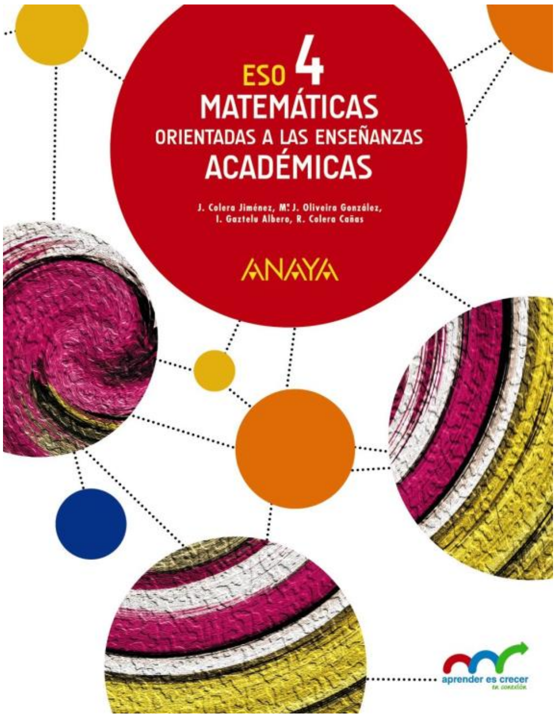


Figura 1. Portada Libro Anaya - Aprender es crecer.

La introducción del objeto matemático se hace desde los juegos de azar en su contexto histórico.

En el libro de Jiménez et al. (2016), texto de referencia de los alumnos donde se impartió la secuencia didáctica propuesta, sí se hace una breve introducción histórica. En ella se menciona a Cardano sobre teoría de probabilidades y al caballero de Meré como los personajes relevantes desde el punto de vista histórico quien indujo a los matemáticos Pascal y Fermat a plantear la base de la teoría de probabilidades. Pero la primera publicación corresponde a Huygens, y Bernoulli amplió y completo su obra construyendo el primer libro importante: Arte de la Conjetura.

Para finalizar el repaso histórico destaca Laplace en 1812 con la Teoría analítica de las probabilidades y a inicios de S.XX a Kolmogorov como responsable de la elaboración axiomática.

A través de distintos tipos de juegos de azar (dados, cartas, bolas) se plantean distintas situaciones que se van asignando a un campo de problemas determinado. Se parte del concepto de azar como sinónimo de aleatoriedad y se presenta la descomposición de los casos posibles que nos podemos encontrar (sucesos), así como el inventario de todos esos casos (espacio muestral). Desde ahí construiremos la primera visión: la frecuencial, la cual podremos experimentar fácilmente con monedas, chinchetas, etc.

Con la visión frecuencial emerge la ley de Laplace de forma muy sencilla e intuitiva y desde ésta ya pasamos a justificar las experiencias compuestas, tanto dependientes como independientes entre sí.

Previa a la probabilidad esta la estadística que siempre está relacionada con la probabilidad en tanto en cuanto emplearemos herramientas de los unos para los otros.

2- ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

A continuación, enumeramos los problemas, las técnicas y las tecnologías que se enseñan habitualmente cuando presentamos una secuencia didáctica de este objeto.

PROBLEMAS:

- De probabilidad compuesta.
- De probabilidad condicionada.
- De probabilidad a priori.

TECNICAS

- Descripción / inventario de sucesos.
- Uso de diagramas de árbol.
- Uso de tablas de contingencia.
- Manejo de propiedades de la probabilidad.
- Regla de la probabilidad total.
- Teorema de Bayes.

TECNOLOGIAS

Tomando como referencia el libro de texto de Anaya, las definiciones planteadas que encontramos son pocas y muy sencillas (aunque hemos de decir que en nuestro trabajo de investigación llevado a cabo en el practicum muy pocos libros de textos vimos que sobresaliesen en este aspecto, si acaso citar el de Oxford que si aportaba una mayor densidad en este aspecto).

Recogemos a continuación un listado de términos que en el texto de Anaya aparecen recogidos como definiciones: *Suceso aleatorio, suceso seguro, suceso imposible, caso, espacio muestral, probabilidad, experiencia aleatoria dependiente e independiente, probabilidad condicionada.*

Destacar que en la mayoría de libros de textos que pudimos consultar el tema de probabilidad aparezca al final lo que ya es una pequeña declaración de intención, y teniendo en cuenta el no cumplimiento del 100% del temario del libro es fácil deducir que ocurre en un alto porcentaje de casos con este tema, además deberíamos añadir la consideración de si se considera por separado o no el tema de probabilidad con el tema de la combinatoria (aspecto este donde hemos encontrado ambos tipos de propuestas y que en la nuestra propuesta como se puede observar lo hemos planteado por separado)

A nivel de docentes, a la hora de plantear su programación didáctica también es frecuente que este objeto matemático sea suprimido bien por falta de tiempo bien por considerar otras partes del temario de mayor importancia (algebra p. ej) bien por otros aspectos, en cualesquiera de los casos es una evidencia que el nivel de los alumnos cuando acaban la ESO es insuficiente y en muchos casos incluso si consideramos el 2º de bachillerato.

Todo esto hace que, si bien los alumnos de secundaria deberían tener un contacto desde el primer curso con estos temas y establecer sus primeras bases conceptuales de forma paulatina y consistente de forma pausada, la realidad es que no se den en ningún curso de la secundaria siendo muchas veces en 2 bachiller cuando se presenta “de golpe” y con intención de cubrir el expediente de cara a que los alumnos puedan optar a resolver preguntas de esta temática en el examen de EvAU.

Es también posible que una mala o insuficiente formación del profesorado en estos campos sea otro de los motivos explícitos de estos hechos como indica Batanero et al. (2012) en su artículo Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza.

3- ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Uno de los efectos principales que podríamos indicar acerca del aprendizaje del alumno acerca de la probabilidad en general y de conceptos básicos de la misma en particular (p. ej. la probabilidad condicionada) es el cambio en el paradigma de pensamiento.

De forma análoga a lo que puede suponer en un alumno el desarrollo del sentido numérico durante su etapa de secundaria y bachiller creemos firmemente que en el campo de la probabilidad pasa incluso con mayor intensidad debido a los obstáculos producidos por el uso del lenguaje.

Aunque no es objeto de este trabajo sí que nos parecería muy interesante plantear y obtener información acerca de si en función de la cultura y por tanto de la lengua materna se aprecian cambios en este sentido y por tanto determinar cuánto influye el nivel de compresión conceptual según el origen lingüístico del alumno, pues de asignaturas optativas del master como habilidades comunicativas hemos aprendido la importancia del lenguaje y gracias a compartir trabajos con compañeros de enseñanza de humanidades hemos descubierto la influencia de la lengua no solo en el pensamiento sino en la forma en que se procesa la información.

Sí que nos gustaría destacar brevemente el trabajo de Azcarate y Cardeñoso (1996) sobre el lenguaje del azar. Una visión fenomenológica sobre los juicios probabilísticos en cuyo artículo centrado en el lenguaje castellano ya ponen de manifiesto las dudas que a nosotros nos surgen, pues p. ej. con respecto al termino azar la RAE lo define como "causalidad, caso fortuito, desgracia imprevista". También nos explican la evolución del significado del término probabilidad y que no siempre tuvo las características con las que hoy lo conocemos. Reseña también a Black (1984, p. 106) quien indica "la probabilidad en el sentido común no se identifica con la frecuencia relativa ni con ninguna relación lógica definible entre proposiciones ni con ningún pretendido estado mental de un juez idealmente razonable.". Y a modo de síntesis nos habla de las consecuencias en la educación a la hora de plantear situaciones de enseñanza aprendizaje que desarrollen el pensamiento probabilístico tal y como nosotros "postulábamos".

También deseamos destacar la evolución de enfoque y cómo ha influido el entorno social e histórico en el mismo.

A nuestro modo de entender en la actualidad en la denominada era de la información, con un mundo globalizado, con una gran disponibilidad de tecnología, una velocidad de evolución vertiginosa y de fácil acceso a gran parte de la población (aunque aquí deberíamos hacer una breve mención a la brecha digital generacional), se pueden plantear enfoques y usar herramientas que eran impensables hace tan solo 25 años.

Hoy en día mostrar la visión frecuencial es más fácil, está más inmersa en nuestro día a día y por tanto sería más fácil de asimilar conceptualmente que lo era para nosotros cuando éramos estudiantes de la EGB. Por otro lado, la visión de la teoría de conjuntos de hace 25 años parece totalmente desfasada en el contexto actual.

No obstante, creemos que es importante conocer los distintos enfoques y ponerlos en valor (ni todo lo nuevo es fenomenal, ni todo lo antiguo es inútil), tal y como los describe Batanero (2005).

En el enfoque clásico, la idea fundamental es la equiprobabilidad de los resultados y la probabilidad es un cociente entre los casos favorables y la totalidad de casos. Esta forma de ver la probabilidad es muy sencilla y aunque exige trabajar y tener bien asentado el concepto de espacio muestral y el poder elaborar el conjunto de casos posibles para realizar su conteo no ofrece excesiva dificultad.

Por otro lado, tenemos el enfoque frecuencial que es el que actualmente más se pone en énfasis, debido a que se prima un carácter experimental a la aproximación de la probabilidad en el currículo y a la relación con la frecuencia relativa de ocurrencia de un suceso. Formalmente la probabilidad se define como el límite de la frecuencia relativa de repeticiones en idénticas condiciones del experimento. Las limitaciones obvias de este enfoque será la posibilidad de repetir o no el suceso un gran número de veces y de forma que este sea bajo las mismas condiciones, aunque la selección de un determinado tipo de ejemplos puede facilitarnos nuestra explicación y las herramientas mencionadas (simuladores, manejo de tablas Excel entre otras herramientas) nos ayudaran mucho en nuestro objetivo.

El tercer enfoque sería el subjetivo, interpretación originada por Bayes y afianzada por Savage, entre otros. En este enfoque hablamos de un grado de creencia que una persona tenga sobre la ocurrencia de un suceso, el juicio no está únicamente basado en el sujeto y sus características personales sino también en la experiencia (historial), y las evidencias de las que disponga.

El cuarto enfoque sería el enfoque matemático (axiomático) el desarrollado en el S.XX, destacando a Borel y a Kolmogorov. Aplicando la teoría de conjuntos independientemente del significado filosófico aportado.

Como hemos dicho, estos cuatro enfoques aparecen en los trabajos de Batanero (2005) y creemos que son una guía esencial y de referencia para los trabajos de hoy en día. Numerosos trabajos en didáctica de la probabilidad hacen uso de estos significados, bien para analizar libros de texto o secuencias de enseñanza y aprendizaje. En la Tabla 1 recogemos los significados tal y como aparecen en el trabajo de Batanero (2005).

Tabla 1. Significados de la probabilidad. Fuente: Batanero (2005), p. 256.

SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS Y PROCEDIMENTOS	ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
Intuitivo	•Sorteos •Adivinación	•Manipulación de generadores de azar: dados, cartas...	•Lenguaje ordinario	•Opinión impredecible, creencia	•Suerte •Destino
Clásica	•Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar	•Combinatoria •Proporciones •Análisis a priori de la estructura del experimento	•Triángulo aritmético •Listados de sucesos •Fórmulas combinatorias	•Cociente de casos favorables y posibles •Equiprobabilidad de sucesos simples	•Esperanza •Equitatividad •Independencia
Frecuencial	•Estimación de parámetros en poblaciones	•Registros de datos estadísticos a posteriori •Ajuste de curvas matemáticas •Análisis matemático •Simulación	•Tablas y gráficos estadísticos • Curvas de densidad •Tablas de números aleatorios •Tablas de distribuciones	•Límite de las frecuencias relativas •Carácter o bjetivo basado en la evidencia empírica	•Frecuencia relativa •Universo •Variable aleatoria •Distribución de probabilidad
Subjetiva	•Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	•Teorema de Bayes •Asignación subjetiva de probabilidades	•Expresión de la probabilidad condicional	•Carácter subjetivo •Revisable con la experiencia	•Probabilidad condicional •Distribuciones a priori y a posteriori
Axiomática	•Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorio abstractos	•Teoría de conjuntos •Álgebra de conjuntos •Teoría de la medida	•Símbolos conjuntistas	•Función medible	•Espacio muestral •Espacio de probabilidad •Conjuntos de Borel

C- SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

1- ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Los alumnos deberán tener conocimientos previos específicos de los que son los fenómenos aleatorios frente a los deterministas, la noción intuitiva de la probabilidad, describir los sucesos en distintos contextos, el espacio muestral y según el currículo de 3º ESO ya deberían haber tenido un contacto previo con la ley de Laplace, diagramas de árbol. Es decir, el temario de 3º y 4º ESO es muy similar, pero como se ha indicado anteriormente no se puede asegurar que los alumnos lo hayan visto o que le hayan dedicado un mínimo tiempo necesario para asentar ciertos conceptos lo cual no supondrá ningún problema para el planteamiento de nuestra propuesta didáctica.

Además, se necesita que el alumno posea conocimientos de fracciones, porcentajes, cálculo de proporciones como parte básica de aritmética.

En el artículo de Batanero, Contreras y Díaz (2012) se nos presentan y resumen muy bien los sesgos en los que los alumnos y nosotros como docentes podemos caer si no tenemos cuidado. Estos sesgos son:

- La falacia del tiempo
- La falacia de la condicional transpuesta
- La falacia de la conjunción
- El sesgo de equiprobabilidad.

En este punto no nos vamos a expandir pues remitimos a la fuente original para un mejor detalle, pero si apuntar de la importancia de conocerlos y del hecho que presentan los autores acerca de que una alta preparación matemática no es suficiente para evitar sesgos de razonamiento de ahí nuestro refuerzo en ser conscientes y cuidadosos con este aspecto.

2- ¿La enseñanza anterior ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Es de vital importancia reconocer que al abordar el estudio de este objeto todos los alumnos tienen una serie de experiencias previas de forma directa o indirecta con la probabilidad. Todos ellos sin excepción han experimentado situaciones en las que de una forma subjetiva hay evaluado probabilidad y en función del resultado posterior han almacenado en su mente un feedback respecto de su valoración inicial. De igual modo también el uso del lenguaje que haya tenido cada uno de los alumnos será clave para su posición de partida en este caso (aquí nos podemos volver a remitir al artículo de Cardeñoso y Azcarate (1996)

Según se menciona en Gómez-Torres et al. (2014) en los libros de primaria se hace un tratamiento de cuatro de los cinco tipos de conocimiento de la probabilidad: ideas probabilísticas, asignar probabilidades, usar el lenguaje adecuado y contextualizar, pero sin enfatizar en la calidad de la información. Por otro lado, Estrada y Batanero (2005) establecen la necesidad de formar en probabilidad a los niños.

Pero la realidad es que actualmente no podemos asegurar que todos nuestros alumnos posean los conocimientos previos necesarios, lo cual también ocurre en otras áreas u otros objetos matemáticos a los que además sí se les dedica de siempre más tiempo.

Es por todo ello que no se plantea la propuesta didáctica con exigencias de tener conocimientos previos y sí que se aprovechará para sacar a relucir posibles deficiencias que serán incluidas en el desarrollo y ejecución de esta propuesta didáctica a través de las primeras sesiones.

3- ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Como se ha indicado la propuesta didáctica se plantea a través de una serie de actividades que se adaptan a los campos de problemas y en las que mediante la dinámica de la experimentación y descubrimiento personal de los alumnos se harán aflorar todos los conceptos. Es por ello que, en el transcurso de la experiencia, aquellos alumnos con menor nivel de conocimientos irán descubriendo mayor cantidad de conocimientos que aquellos que hayan tenido un contacto previo para los que quizás simplemente sea un repaso. No obstante, la diversidad de actividades tendrá en cuenta este posible hecho para hacer frente a la diversidad en el aula y la labor del docente en estas sesiones será precisamente la de observar atentamente la diferencia de niveles de partida con las que cuenta el grupo-clase por si fuese necesario algún tipo de actividad de refuerzo con algún alumno en concreto.

D- SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMATICO

1- ¿Cuál es la razón de ser que vas a tener en cuenta al introducir el objeto?

Dado el contexto histórico actual, con la problemática actual de las apuestas en la población adolescente y el acoso y la inmunidad de la que gozan las empresas de este tipo de actividad, la razón de ser consistiría en introducir la probabilidad como un modelo de razonamiento que permita a nuestros alumnos entender mejor los juegos de azar y su impacto tanto a nivel social como a nivel económico.

Plantear de forma matemática la frecuencia de los sucesos y la probabilidad de que ocurran determinados sucesos (p. ej. en juegos, apuestas, loterías,...) ayudando así a formar un pensamiento crítico basado en el razonamiento matemático en este caso estadístico y probabilístico.

2- ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Coinciden en tanto en que hace referencia a los juegos de azar y como en su origen el motivo de plantear la probabilidad era el de "asegurar" una ganancia por parte de los jugadores por tener conocimiento de los sucesos que tenían lugar, buscando algún tipo de relación entre el desarrollo del juego, la decisión tomada y el posible resultado del mismo.

Ya hemos mencionado con anterioridad como uno de los hitos históricos correspondían al dilema planteado por el caballero de Meré quien propuso a Pascal la cuestión siguiente:

Dado un juego con cuatro dados al que deseamos apostar qué era más ventajoso: *¿que salga algún 6 o que no salga ninguno?*

Serían Pascal y Fermat quienes construyeron la teoría que servía para responder a este tipo de problemas y de ahí que se les considere una referencia en este ámbito a nivel histórico cuando se plantea en los libros de texto.

Hoy en día esas razones históricas se seguirían aplicando y su conocimiento debería ser básico para tener una actitud hacia el juego.

3- Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar

Uno de los problemas que se constituyen en razón de ser de los distintos aspectos del objeto matemáticos a enseñar sigue siendo utilizado en la actualidad en concursos y programas de TV en horario de prime time corresponde al problema de Monty Hall.

Ejemplo 1- El problema de las tres puertas en los concursos de televisión donde una de ellas tiene un premio de valor elevado: coche, viaje y en las otras dos el premio es insignificante.

Enunciado:

El presentador de un reconocido programa de TV te selecciona de entre el público para participar en el concurso en el que puedes ganar un coche que está detrás de una de las tres puertas que te va a mostrar. Deberás elegir en primera instancia una puerta y tras tu elección el presentador te abrirá una de las dos que no has elegido para mostrarte uno de los premios insignificantes. En este instante el presentador Pablo te da la opción de cambiar o de quedarte con la inicial ¿Qué harías? ¿Por qué?

Solución:

En la primera elección la probabilidad de haber elegido la puerta que esconde el coche es de $\frac{1}{3}$ y la de no obtenerlo $\frac{2}{3}$

Una vez elegida si no cambias la elección inicial la probabilidad de que haya coche en tu elección original es de $\frac{1}{3}$, pero si cambias de puerta, pueden ocurrir dos escenarios:

Escenario 1: si habías elegido el coche, seguro que te llevarás un premio insignificante.

Escenario 2: si habías elegido un no premio, cuya probabilidad inicial era de $\frac{2}{3}$, al cambiar seguro que ganas el coche ya que el presentador siempre te abrirá la puerta que contiene la otra puerta sin premio.

Por tanto, siempre debes de cambiar la puerta, ya que la probabilidad de ganar el coche es el doble.

Con este problema podemos incidir en varios puntos de la utilidad de la probabilidad y sobre los que queremos hacer insistentemente referencia durante nuestra secuencia didáctica:

1. Siempre está de actualidad (los juegos nunca pasan de moda y aunque se reinterpreten siempre son o suelen tener la misma base por lo que su conocimiento y estudio da "ventaja" sobre su ignorancia)
2. Siempre hay que tomar una decisión, esa decisión puede ser aleatoria o "razonada" (influencia del conocimiento en la toma de decisiones), el campo de aplicación de las matemáticas en este tipo de situaciones (probabilidad) y una de las ventajas de la educación matemática para en este caso obtener una recompensa (reconocimiento indirecto, por la obtención de un premio, al mayor conocimiento).

Como destaca Batanero (2009), en un artículo donde analiza este problema, se ponen en juego los siguientes razonamientos erróneos:

- Percepción de la independencia.
- Percepción incorrecta del espacio muestral.
- Incorrecta asignación inicial de probabilidades
- Interpretación incorrecta de la convergencia.

4- Indica la metodología a seguir en la implementación en el aula.

Dado la posibilidad de introducir el juego como parte esencial para introducir estos conceptos, la metodología propuesta pasará por la interacción con los distintos juegos de azar clásicos que dieron origen a la razón de ser de los distintos objetos matemáticos que vamos a ver (monedas, dados, cartas, apuestas.).

Posterior a la experimentación en los distintos campos de problemas, se fomentará también el registro de los datos obtenidos durante el proceso para pasar al análisis de los resultados y la puesta en común con los miembros del grupo clase, para poder comparar con el mayor tamaño de grupo posible y la reflexión final sobre los resultados obtenidos tanto a nivel individual como a nivel colectivo (aprovechando para recordar conceptos como la representatividad del número de sucesos).

Se considera de gran interés no olvidar el momento de validación e institucionalización de los mismos, puesto que a pesar del gran interés que puede surgir en la parte de reflexión no debería quedar parte de subjetivismo en determinadas cuestiones (aleatoriedad, probabilidad de que ocurra o no un suceso.) que hagan confundir al alumno y que dejen sesgos propios de la probabilidad sin resolver (p. ej. la falacia del jugador).

También se presentarían algunas soluciones TIC a la hora de ayudar a tratar los datos y emplear las expresiones, con el objeto de mostrar a los alumnos herramientas que ayudan a los cálculos y que permiten, por tanto, plantearse la resolución de un gran número de casos en un tiempo razonablemente corto. En este punto se destaca el estudio realizado en profundidad por Arnaidos y Faura (2012) donde se nos muestra una buena categorización de distintas herramientas para los distintos conceptos que podemos abordar en la secuencia didáctica de probabilidad. Podemos utilizar herramientas como Geogebra también para probabilidad, pero sin duda todos los simuladores de juegos nos darán una gran potencia a la hora de mostrar distintos escenarios y elaborar / plantear distintas estrategias a las que podamos someter a estudio. No obstante, y de acuerdo a las conclusiones que indican los autores de este estudio coincidimos con ellos en que las herramientas deben ser un medio y no un fin en sí mismo. Puesto que, si centramos nuestro objetivo en la herramienta, en que sea visual o que realice determinado tipo de simulación, perderemos el verdadero objetivo didáctico de hacer descubrir a nuestros alumnos los conceptos que surgen de dichas experiencias. Es por tanto vital tenerlo en cuenta desde el principio del planteamiento didáctico para evitar malos resultados y crear falsas expectativas tanto en nuestro alumnado como incluso con nosotros mismos.

E- SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS

1-Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Los tipos de problemas que van a ser presentados en el aula se van a encuadrar dentro de los distintos campos de problemas, de ahora en adelante CP, que vamos a abarcar.

Dichos campos de problemas son:

1. CP1: Problemas de identificación de los sucesos, espacio muestral y tipo de sucesos.

   En este CP1 se busca fundamentalmente estructurar el pensamiento de cara a identificar los elementos que intervienen en un problema de probabilidad, sus unidades elementales(sucesos), cómo pueden ser estos (p. ej. si un suceso es seguro o imposible) y también el problema fundamental de realizar el inventario de todos los sucesos para identificar el espacio muestral asociado al problema. Si bien son conocimientos que los alumnos deberían poseer ya desde 1º ESO en caso de haber ido estudiando algún tema de probabilidad creemos que es fundamental su repaso y dedicarle el tiempo necesario para asegurar una buena base y proponiendo una diversidad más o menos amplia de contextos (no solo situaciones numéricas, sino lo más diversas y conceptualmente ricas posibles).
2. CP2: Problemas de probabilidad Simple, que hagan emerger el cálculo mediante la Ley de Laplace.

   Apoyados en la visión frecuencial de la probabilidad, la cual se puede trabajar previamente a la presentación de este CP2, y una vez asentado el problema de identificación del espacio muestral en el que se conocen por tanto todos los casos posibles llegar a la expresión sencilla que supone la ley de Laplace. Generalmente es un concepto que les suele parecer sencillo y asimilan con rapidez, pero debemos dedicar el tiempo suficiente para aspectos clave asociados a él como es el concepto de la equiprobabilidad.
3. CP3: Problemas de sucesos equiprobables.

   En este caso el objetivo final del campo de problemas es mostrar y llegar a la ley de Laplace a través del conteo tanto total como parcial.
4. CP4: Problemas de sucesos no equiprobables

   En este caso el objetivo final del campo de problemas es mostrar mediante conteos y representación a través de diagramas estadísticos la ley de los grandes Números.

5. CP5: Problemas de probabilidad Compuesta. Probabilidad condicionada.
   En este caso el objetivo final del campo de problemas es mostrar y llegar a la probabilidad condicionada, uno de los conceptos donde pudimos observar mayor dificultad con nuestros alumnos, pero antes de ello es necesario mostrar y hacer emerger la diferencia entre los sucesos dependientes de los independientes, así como la consecuencia que ello tendrá en el posterior planteamiento del cálculo de la probabilidad. Será esencial mostrar la consecuencia que tiene la dependencia e independencia de sucesos, explicándolo desde distintos puntos de vista, pero sobre todo surgiendo a través del campo de problemas. En este punto también consideramos que el lenguaje será un elemento esencial y nuestra propuesta irá desde una introducción muy poco formal a la formalización matemática cuando tengamos la mayor certeza de que el concepto ha sido asimilado por el grupo-clase. Volvemos a insistir una vez más en la importancia del lenguaje. Dentro de este campo de problemas destacaremos también los Problemas con tablas de contingencia. se buscará la comparativa con la técnica inicial propuesta en el CP3 así como con la técnica de los diagramas de árbol.

A continuación, detallamos un ejemplo de cada uno de los campos de problemas descritos anteriormente.

CP1 - Enunciado:

El equipo del colegio desea renovar los equipajes del equipo de futbol sala para este próximo año. Puesto que debe tener en cuenta que no puede coincidir con los colores de equipajes de otros equipos de su grupo identifica:

¿Cuántas combinaciones diferentes podrían obtenerse si comprase 3 colores distintos de camisetas y 2 pantalones?

¿Y si tuviese 3 camisetas y 3 pantalones?

Solución: suponiendo los anteriores colores de camisetas (rojo que denotamos por la letra R, blanco que denotamos con la letra B, azul con la letra A) y de pantalones (negro con letra N, blanco con la letra B), las combinaciones serían las siguientes:

{RN,RB,BN,BB,AN,AB} – total de 6 combinaciones.

{RN,RB,RA,BN,BB,BA,AN,AB,AA} – total de 9 combinaciones.

CP2 - Enunciado

Tenemos en una urna un total de 10 bolas. Las bolas son de varios colores, concretamente tenemos 3 rojas, 2 verdes, 1 amarilla, 4 azules.

Se saca una bola sin mirar y se tratar de determinar:

a) Probabilidad de que salga roja.

b) Probabilidad de que salga verde o roja.

c) Probabilidad de que no salga amarilla.

d) Probabilidad de que salga roja, verde o amarilla.

Solución:

$a)\ P(roja) = \frac{posibles}{totales} = \frac{3}{3+2+1+4} = \frac{3}{10}$

$b)\ P(verde\ o\ roja) = \frac{posibles}{totales} = \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10}$ *(También verlo como suma).*

$c)\ P(verde\ o\ roja) = \frac{posibles}{totales} = \frac{1}{10}$ *(El opuesto será* $\frac{9}{10}$ *pues la probabilidad total siempre ha de ser 1).*

$d) P(roja\ o\ verde\ o\ amarilla) = \frac{posibles}{totales} = \frac{3+2+1}{10} = \frac{6}{10}$

CP3- Enunciado del Problema 1

Marta y Paula juegan a baloncesto en el mismo equipo. Según las estadísticas que tiene el entrenador del año pasado Marta encesta 2 de cada 5 tiros de dos puntos y Paula 3 de cada 7 (también de dos puntos).

Si ambas tiran una sola vez, calcula la probabilidad de los sucesos siguientes:

a) ambas han encestado.

b) ninguna ha encestado.

c) solo Marta ha encestado.

d) al menos una de ellas ha encestado.

Solución

$a)\ P(Marta\ y\ Paula) = \ P(Marta) \cdot P(Paula) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \ = \frac{6}{35}$

b) $P\ (no\ Marta\ y\ no\ Paula) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$

c) $P\ = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{35}$

d) $P = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} - \frac{6}{35}\ =\ P(Marta) + P(Paula) - P(Marta\ y\ Paula)$

Comprobar que es lo mismo que calcularla como $1 - \frac{12}{35}$

CP3- Enunciado del Problema 2 para probabilidad condicionada

> *Según el portal de internet Xataka el 90 % de jóvenes en España tiene un Smartphone y entre ellos el 80% lo usa habitualmente para navegar por internet. Pero, entre los propietarios de otros tipos de teléfono, solo el 5% lo emplea para navegar por internet (es decir, solo lo usa para llamar o recibir algún tipo de SMS).*
>
> *Plantea el diagrama de árbol correspondiente que represente las condiciones mencionadas en el enunciado. Recuerda explicar bien las abreviaturas que emplees en la definición de cada uno de los sucesos.*
>
> *Calcula la probabilidad, justificando su cálculo con las expresiones matemáticas que consideres necesarias, de conectarse habitualmente a internet a través del móvil (sea cual sea el tipo).*

Solución:

$$P(tener\ Smartphone) =\ P(S) = 0{,}90\ \ =>\ P(O) = 1 - 0.90 = 0.1$$

$$P(Internet|S) = 0.8 \qquad P(Internet|O)\ =\ 0.1$$

Hacer el diagrama de árbol correspondiente para visualizar los casos.

La probabilidad de conectarse habitualmente a internet a través del móvil serán:

$$P(I) = P(S) \cdot P(I|S) + P(O) \cdot P(I|O) = 0.9 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.05 = 0.725$$

CP4- Enunciado

En la tabla siguiente se recoge el éxito de aprobar o suspender un examen dependiendo del tiempo de estudio dedicado por los alumnos.

	Poco tiempo	Suficiente tiempo	Mucho tiempo
Aprobado	20	50	30
Suspenso	40	20	0

Determinar las siguientes probabilidades.

a) Probabilidad de que le dedique poco tiempo y suspenda (A).

b) Probabilidad de que le dedique suficiente tiempo y suspenda (B).

c) Probabilidad de que si ha suspendido le haya dedicado suficiente tiempo (C).

Solución:

Tendríamos en primer lugar que calcular los totales de cada fila y cada columna:

	Poco tiempo	Suficiente tiempo	Mucho tiempo	Total
Aprobado	20	50	30	100
Suspenso	40	20	0	60
Total	60	70	30	160

$a)\ P(A) = \frac{40}{100}$

$b)\ P(B) = \frac{20}{160}$

$c)\ P(C) = \frac{20}{60}$

2- ¿Que modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

La técnica inicial presentada en el CP3 va a ser modificada tanto con los diagramas de árbol, como con las tablas de contingencia presentadas en el CP4. No obstante, no deja de ser otra técnica más para resolver el problema y esto habrá de ponerse en valor.

3- Indicar la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología propuesta fomentará el aprendizaje significativo del alumno para ello buscará lo máximo posible la experimentación, la documentación de los hechos acontecidos (registro), la visualización de resultados, la comparación con otros compañeros (tamaño de muestra y periodo de aprendizaje entre iguales) y el análisis de los datos tanto propios como ajenos.

El punto final siempre será una institucionalización por parte del docente pues la consideramos relevante para evitar posibles lagunas o en determinados casos dudas sobre el contrato didáctico que queremos posteriormente dejar claro de cara a la evaluación.

Todas las actividades serán iniciadas sin presentación de contenidos para fomentar a través del descubrimiento por parte del alumno las distintas opciones que hagan emerger la solución del campo de problemas planteados.

También se fomentará el uso de TIC, la investigación, el espíritu crítico con la metodología.

F- SOBRE LAS TECNICAS

1-Diseña los distintos tipos de ejercicios que vas a presentar en el aula.

CP1- Técnica de ejercitación de identificación de los sucesos

Ejercicio 1.1

Se lanzan dos dados y se pide que se detallen:

- ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener si se suman los puntos?
- ¿Y si se restan los puntos?
- ¿Y si se multiplican?

En todos los casos tienes que poner los sucesos y el espacio muestral no solo dejar indicado el número total de sucesos.

Solución: sumando tenemos el mismo número de casos en total que restando y multiplicando, pero el valor de dichos resultados, y por tanto el espacio muestral es diferente.

Suma: {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12},

Resta { -5,-4.-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5},

Multiplicación {1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,20,24,25,30,36}

Ejercicio 1.2

Se tiene una caja con bombillas de las que sabemos que algunas son defectuosas y otras no defectuosas.

Si se cogen siempre de dos en dos ¿Cuáles son las opciones posibles?

Recuerda tienes que escribir el espacio muestral, detallar como nombras cada suceso al inicio y escribir todos los sucesos posibles.

Solución: {DD', D'D, DD, D'D'}

Ejercicio 1.3

Tengo dos urnas con 3 bolas en cada una de ellas, una de cada color: rojo, amarillo, verde. ¿Cuáles son las combinaciones de colores posibles si saco dos bolas a la vez (una de cada urna)?

Solución: {rr, ra, rv, ar, aa, av, vr, va, vv}

Ejercicio 1.4

Tengo dos montones de cartas con 4 figuras (corazón, trébol, pica, diamante) ¿Cuáles son las combinaciones posibles?

Solución: {CC,CT,CP,CD,TC,TT,TP,TD,PC,PT,PP,PD,DC,DT,DP,DD}

CP2 – Técnica de Laplace para probabilidad simple.

Ejercicio 2.1: Se lanza un dado de 6 caras determina las siguientes probabilidades:

a) Que salga par.
b) Que salga un número menor que 5.
c) Que salga par y menor que 5.
d) ¿Qué ocurre si el dado en vez de 6 es de 8 caras?

Solución:

a) *Par: 3 casos posibles de 6 opciones.* $P(par) = \frac{3}{6}$
b) *Número menor que 5: 4 casos posibles de 6.* $P(< 5) = \frac{4}{6}$
c) *Par y menor que 5: 2 casos posibles de 6.* $P(par\ y < 5) = \frac{2}{6}$
d) *Que como hay más opciones posibles podríamos pensar que la probabilidad es menor, pero en el caso de par, se mantiene la misma.*

Ejercicio 2.2: Del total de alumnos de la clase 30% practican futbol y 25 % baloncesto, 10 % ambos deportes y el resto no hace ninguno.

Determinar si elegimos un estudiante de la clase al azar la:

a) Probabilidad de que no juegue ni al futbol ni a baloncesto.
b) Probabilidad de que jueguen a algún deporte.
c) Probabilidad de que no jueguen a ninguno.

Solución:

Las probabilidades dadas son = 0.3 futbol, 0.25 baloncesto, 0.10 ambas y resto ninguno.

El resto lo puedo calcular como: el total 1 – suma de las dadas = 1-0.3-0.25= 0.45

La probabilidad que juegue a alguno= suma de las simples = 0.3+0.25=0.55

La probabilidad de que no juegue a ninguno es la calculada previamente = 0.45

Ejercicio 2.3 Se saca de una baraja española una carta al azar

a) ¿Probabilidad de que sea una figura? ¿Y de que no lo sea?
b) ¿Probabilidad de que sea un caballo?
c) ¿Probabilidad de que no sea ni oros ni bastos?

Solución:

a) $P(figura) = \frac{casos\ favorables}{casos\ totales} = \frac{16}{40}$

$P(no\ figura) = 1 - P(figura) = 1 - \frac{16}{40} = \frac{34}{40}$

b) $P(caballo) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

c) $P(no\ oros\ y\ no\ bastos) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

CP3 – Probabilidad compuesta.

Ejercicio 3.1 A una cena de amigos van 8 chicas y 4 chicos. A la hora de pedir los segundos platos han elegido carne 4 chicos y 4 chicas, el resto ha elegido pescado. Si el camarero que es una persona un poco despistada elige una persona al azar al entregarle un plato, calcular la probabilidad de:

a) Que sea chico.

b) Que haya elegido pescado.

c) Que sea chica y haya elegido carne.

d) Que tome carne y pescado.

Solución

a) $P(chico) = \frac{4}{12}$ *(visualizar con tabla de contingencia)*

b) $P(pescado) = \frac{4}{12}$

c) $P(chica\ y\ carne) = \frac{4}{8}$

d) $P(carne\ y\ pescado) = 0$

CP4 – Tablas de contingencia.

Ejercicio 4.1 Elabora la tabla de contingencia del ejercicio 3.1

La tabla sería:

	Carne	Pescado	Total
CHICA	4	4	8
CHICO	4	0	4
totales	8	4	12

Ejercicio 4.2. Elabora una tabla de contingencia para la clase observando las siguientes características: número de compañeros que son chicos/as y el número de compañeros que son rubios o morenos. Una vez la hayas elaborado responde a las siguientes cuestiones.

a) Determina cual es la probabilidad de que sea chico y no sea rubio.
b) Compara esta probabilidad con la de que sea chica y no sea rubia.

Solución

Al ser un problema de diseño abierto veremos el planteamiento que hace el alumno y por otro lado la aplicación y ejecución correcta de las técnicas para con la tabla construida poder dar respuesta a las dos cuestiones planteadas.

Ejercicio 4.3. ***Ejercicio de interpretación de una tabla dada***

Dada las siguientes tablas elige **una de las tres** y realiza la interpretación de los datos que aparecen en ella. Ten en cuenta que deberás justificar todos los datos de la tabla no únicamente alguno de ellos y hacer un análisis razonado y argumentado de cada una de tus respuestas.

https://www.geogebra.org/m/mp4zQz9N

2- ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

CP1: en este campo de problemas se ejercita la técnica de identificación de los distintos sucesos, para ello se hace necesaria la descomposición del problema en eventos posibles e identificar claramente cada opción-evento como Suceso. Es fundamental desarrollar el proceso mental de ¿qué puede pasar?, ¿cómo le llamo o represento?, ¿he considerado todos los casos?, ¿estoy seguro de no estar “repitiendo” casos de forma indirecta?

Independientemente de cuan probable sea, pues en este punto inicial el ser capaz de identificar los casos posibles es de gran importancia para poder ir avanzando en la construcción de conceptos básicos de probabilidad.

Será fundamental la presentación de distintos “entornos” (dados, cartas, bolas, monedas, ruletas...) pues creemos que una parte fundamental de asegurar o al menos intentar evitar la asociación de aprender de una forma concreta a visualizar el concepto es ir “construyendo” paso a paso la generalización, mediante distintos contextos que permitan al alumno ver que es independiente de dónde lo aplique si entiende correctamente lo que le están preguntando y lo que él debe buscar. Este punto creemos que lo debemos trabajar constantemente en nuestra propuesta e insistir para desmitificar mucho de los mitos alrededor de las matemáticas.

La técnica de inventario, es decir, determinar todos los casos posibles para la construcción del espacio muestral entendiendo éste como el conjunto total de opciones construibles para dicho problema será el siguiente paso para este campo de problemas inicial. La técnica es muy simple pues únicamente hace referencia a control exhaustivo de los casos detectados y no conlleva cálculos ni operaciones de ningún tipo.

CP2: la técnica que se ejercita en este campo de problemas es fundamentalmente el recuento de casos posibles totales frente al número de casos de nuestra opción planteada, es decir llegar a hacer emerger la ley de Laplace.

Si bien la técnica puede parecer muy sencilla a priori, en determinados problemas se verá lo costoso del recuento del espacio muestral, es decir, el total de casos. Así mismo el trabajo con distintos tipos de escenarios y por tanto de enunciados a modelizar pueden suponer una pequeña barrera por la interpretación del lenguaje empleado en dicho enunciado algo en lo que pretendemos insistir como ya hemos comentado en el punto anterior. Cuando se vaya a institucionalizar el resultado, también será muy importante dedicar tiempo suficiente a la reflexión de qué tipo de suceso es (equiprobable) y por tanto qué limitaciones de aplicación tiene esta técnica, pues podemos dejar a muchos de nuestros alumnos con ideas base erróneas que luego les bloqueen en los siguientes campos de problemas y que les afiancen determinados sesgos que es justo lo opuesto a lo que deseamos (pues conocidos los sesgos más representativos hemos de ser especialmente cuidadosos en trabajarlos y asegurarnos de que no se reproducen).

CP3: la técnica que se ejercita en este campo de problemas ya engloba tanto las técnicas del CP1 como nuevas técnicas necesarias para poder discriminar si el suceso es dependiente o independiente.

Este campo de problemas cuyo objetivo final es hacer emerger la probabilidad condicionada permite trabajar con distintas técnicas: los diagramas de árbol, las tablas de contingencia, la teoría de conjuntos y la aplicación de la probabilidad simple vemos en el CP2.

Lo habitual será partir de las técnicas obtenidas en la CP2 y “avanzar” para ver cómo se modifican dichas técnicas a la hora de tener que enfrentarse con sucesos dependientes.

Se podrá presentar también técnicas de diagramas de Venn para visualizar y/o aclarar las técnicas que van emergiendo y que el alumno tenga varias alternativas para visualizar el proceso que surge en el caso de tener que enfrentarse a sucesos dependientes.

CP4: la técnica que se ejercita fundamental e intensivamente es la creación, interpretación y uso de las tablas de contingencia. Aunque se mostrará como técnica propia se buscará su enlace con la probabilidad condicionada del CP3, de modo que los alumnos se planteen las relaciones entre ambas técnicas y valoren las ventajas e inconvenientes que tienen que trabajar con cada una de ellas. Del mismo modo se fomentará esta comparativa entre tablas de contingencia y diagramas de árbol otra de las técnicas ya disponibles de otros campos de problemas anteriores.

3-Dichas técnicas, ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Si, las técnicas están adecuadas a su campo de problemas asociado.

4-Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Para la implementación en el aula la metodología a seguir será la de autodescubrimiento por parte de los alumnos para buscar un aprendizaje más significativo a través de dicha nueva técnica. También se trabajará la cooperación con otros compañeros buscando el compartir planteamientos e ideas que realimenten el proceso individual de autodescubrimiento y refuercen el aprendizaje entre iguales que consideramos muy efectivo y en una segunda parte permitan, al poner en común reflexionar sobre las distintas ideas, reflexionar y visualizar los distintos métodos de plantear soluciones ante una misma situación.

El asentamiento de la nueva técnica se llevará a cabo en una segunda fase en la que los alumnos deberán práctica con una serie de ejercicios estas técnicas para asentar mínimamente la destreza en la aplicación de la misma. Este proceso más mecánico no por ello menos importante deberá servir al alumno para validar su autoconocimiento, viendo si ha entendido el motivo de aplicación de dicha técnica y planteando las dudas en caso de no tener claro alguna de las secuencias de la misma.

Además, sí que entendemos necesaria una institucionalización final siempre por parte del docente para evitar dudas o alguna mala interpretación sobre los conceptos que se vayan presentando o confusión tras las fases de intercambio de resultados principalmente.

G- SOBRE LAS TECNOLOGIAS

1-Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas

El punto de origen de los razonamientos será la visualización de experiencias y la comparación de los resultados de las mismas con las ideas previas preconcebidas. Algunas veces o para algunos alumnos estas ideas previas serán correctas y les ayudarán a la resolución correcta de los ejercicios, pero en otros alumnos esto no será así por lo que el razonamiento tiene que ser a través de su autoconocimiento al interactuar con ciertas situaciones. Tras la realización de experiencias tanto de forma individualizada como en pequeños grupos se definirán los conceptos asociados a la misma, institucionalizando así los conceptos desde el inicio, como por ejemplo la idea de espacio muestral como aquel conjunto de resultados posibles, la definición de un suceso como todo aquel evento que puede tener lugar, los distintos tipos de sucesos: seguro, imposible, complementario. En este caso la aportación de los diagramas de Venn consideramos que serán de gran ayuda para una parte de alumnos, aunque también somos conscientes de que para otros la abstracción le suponga una dificultad añadida a la compresión del razonamiento. Se llegará a la visualización de las operaciones de unión e intersección a través de ejemplos con los diagramas de Venn y posteriormente se formalizará también a nivel matemático a través de expresiones que nos permitan calcular numéricamente si un suceso es independiente o dependiente, si conocemos los valores de sus probabilidades, pues es también parte fundamental conocer las pocas, pero importantes expresiones que se emplean en probabilidad y hacer luego un uso correcto del lenguaje.

En la justificación de los sucesos compuestos a través de diversos ejercicios se trabajarán los diagramas de árbol y las tablas de contingencia, haciendo hincapié en la “traducción” de una a la otra, es decir, intentando que siempre que sea posible el alumno vea distintas herramientas que posee para poder afrontar un problema. Para nuestra propuesta un pilar fundamental es el transmitir varias ideas: el aprender experimentando, el aprender con iguales, el reflexionar sobre los errores como parte esencial del proceso de aprendizaje y el entender que hay problemas con solución problemas sin solución (o todavía no encontrada) y varias formas (técnicas/ herramientas) para el alcanzar un mismo objetivo.

2- ¿Quién va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

En nuestra propuesta didáctica planteada el alumno va descubriendo los conceptos y por tanto se puede justificar de forma autónoma su aprendizaje, no obstante, y para consolidar los aspectos abordados durante la secuencia, se dedicará en todas las sesiones y actividades una pequeña parte, siempre al final, a la institucionalización por parte del profesor, aunque insistimos, más como parte de refuerzo que como parte principal de la propuesta. El alumno ha de sentirse protagonista de todo su procesos de aprendizaje, visualizar sus errores, reflexionar sobre ellos, compartir el proceso con sus compañeros, avanzar y finalmente y únicamente como punto de refuerzo tener la institucionalización del docente como punto y aparte de este aprendizaje, pues otra cosa que deberíamos fomentar con a nuestros alumnos sería el aprendizaje continuo y el ámbito de superación, buscando el retarse con mayores dificultades a medida que sintiesen que poseen y se sienten cómodos con sus conocimientos.

3- Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático

Como hemos indicado en el apartado anterior en parte la institucionalización se cede a los alumnos con su proceso de aprendizaje y su validación de experiencias y conocimientos adquiridos. El proceso es, por tanto: propuesta de actividad que se corresponde con el campo de problemas que hace emerger una técnica y que el alumno puede validar con la experimentación. En una fase final se realiza una institucionalización por parte del profesor para asegurar el correcto cierre de la actividad.

A modo de diagrama de procesos tendríamos:

Figura 2. Diagrama de proceso de institucionalización.

4- Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La metodología de implementación en el aula consistirá fundamentalmente en trabajo de las actividades propuestas tanto de forma individual como grupal.

Habrá al inicio de la secuencia didáctica una interacción con ciertos juegos que son parte del campo de problemas y que permitirán a los alumnos visualizar y sacar conclusiones a través del juego en sí tanto individual como grupal. Además, se utilizarán diversos recursos de TIC disponibles y seleccionadas para algunos campos de problemas. Herramientas como Geogebra u otros simuladores, permitirán comparar experiencias y plantearse la opción de simular experimentos en una mayor cantidad de veces a las propuestas durante el tiempo de experimentación del aula.

No obstante, y como ya hemos indicado en anteriores apartados, estas herramientas serán un medio y no un fin, dando más prioridad en la metodología a la experimentación real que la virtual de los alumnos con el juego.

H- SOBRE LAS SECUENCIA DIDACTICA Y SU CRONOGRAMA

1-Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

La unidad didáctica de probabilidad propuesta se tratará en unas 8 sesiones aproximadamente, repartidas como 5 sesiones de clase, una de repaso, una sesión de evaluación y una sesión de corrección del examen. Cada una de las sesiones están planteadas como de 50 minutos aproximados de duración y aunque pueden ampliarse las sesiones de clase 1 o 2 más nos hemos planteado esta versión algo más reducida para que sea más realista de abordar, incluso podría reducirse a únicamente un total de 6 sesiones si no se plantease repaso ni corrección en clase del examen, siempre dando preferencia al objetivo de abordar unos contenidos apropiados al alumno que va a finalizar su etapa de Educación Obligatoria y que por tanto debería adquirir.

2- Establece una duración temporal aproximada

Se van a plantear un total de 5 sesiones, aunque la propuesta completa de esta secuencia incluiría 3 sesiones más correspondientes a un repaso global, un examen de los conceptos mostrados y finalmente una corrección del examen.

SESION 1.

Esta sesión inicial trata de poner en primer lugar un índice mostrado como nube de palabras "clave" generado con la herramienta: https://www.nubedepalabras.es/ y un contexto al tema que vamos a abordar.

El contexto elegido se encuadra en la razón de ser del campo de problemas de la probabilidad: los juegos de azar. Para ello se entregan a cada uno de los alumnos unos breves recortes de noticias seleccionadas de prensa económica donde se pone de manifiesto el volumen de negocio que supone el juego en España a fecha de hoy y que lo utilizaremos como hilo conductor de nuestro debate. Las fuentes escogidas son:

https://intereconomia.com/empresas/consumo/el-numero-de-apuestas-y-juegos-online-en-maximos-historicos-en-espana-20180706-1135/

http://www.expansion.com/empresas/tecnologia/2018/08/22/5b7c6828e5fdeaf5528b45d2.html

https://es.statista.com/estadisticas/524076/loterias-y-apuestas-del-estado-cifras-de-negocio-en-espana/

Se realizará también una breve reseña histórica, tal y como pueden encontrar en el inicio del tema de su libro de texto, para poner en situación a los alumnos que ya desde hace muchos años las sociedades tenían los juegos y las apuestas como algo propio de su vida social. Se destacará que la aportación de ciertos matemáticos ilustres como Pascal, Fermat, Cardano y Huygens fue plantear el estudio de los hechos de una manera rigurosa y científica, dejando de lado los conceptos de suerte u otras connotaciones que a pesar de todo perviven en la sociedad en la actualidad.

Además, enlazando con esta razón de ser del campo de problemas se plantea una componente social y crítica del problema que ha supuesto a día de hoy la fusión de dos vertientes: las TICs y el juego. Debido a la facilidad de acceso a las TICs de los jóvenes y de la sociedad en general los juegos se han “reinventando” encontrando una segunda juventud en el juego online o juegos a través de diversas apps. Se hará a los alumnos una breve reseña para que reflexionen y se les incoará a que tras estas 5 sesiones al menos tengan un poco más de información a la hora de ser conocedores de sus verdaderas posibilidades y que investiguen y profundicen sobre el tema.

A continuación, se pasará a visualizar un pequeño fragmento de la película 21 Black Jack. Esta película nos puede servir en varios cortes para mostrar varios aspectos (p. ej. el problema de Monty Hall) pero en esta primera muestra deseamos mostrar la parte que hace referencia al hecho de contar cartas y se dejará la pregunta abierta siguiente: ¿por qué os parece eso relevante?¿está relacionado en algo con la matemática? Adjuntamos un pequeño enlace que cita la película:

http://matematicasentumundo.es/CINE/cine_21blackjack.htm

Tras ello se comenzará con la primera actividad (tiempo estimado de duración de 15-20 min). La actividad es muy simple y consiste en el lanzamiento de una sola moneda por parejas que se van alternando la tarea de registrar datos y de lanzar la moneda y cuyo objetivo es poner en evidencia la visión frecuencial de la probabilidad.

Cada pareja hará 25 lanzamientos, deberá anotar los resultados de la secuencia y crear un gráfico de barras de las frecuencias obtenidas. Cuando terminen se juntarán con otro grupo para hacer un nuevo gráfico de un total de 6x50=300 lanzamientos y por último se recogerá los datos de toda la clase.

Se preguntará a la clase y lo iremos dejando reflejado en la pizarra:

- ¿Qué ha salido?

- ¿Cómo varían los datos?
- ¿Ha salido lo que esperábamos?

Se concluye con la institucionalización de la *LEY de los grandes números* y la LEY *LAPLACE*, así como se aprovecha para repasar conceptos básicos de otros años de Espacio Muestral y Tipos de sucesos para este primer experimento tan sencillo.

Llegados a este punto también se puede mostrar y usar un applet de Geogebra a los alumnos para que aquellos que lo deseen puedan continuar con la reflexión de la actividad con una herramienta TIC haciendo un número muy elevado de simulaciones en un tiempo muy pequeño y por tanto aprender una de las ventajas que producen los simuladores hoy en día (la cantidad de información que nos permiten generar en un tiempo relativamente pequeño)

Actividad de reserva: Juego del rio.

En caso de que hubiese una ejecución muy rápida de la actividad o tuviésemos tiempo extra durante nuestra primera sesión dejamos indicada una actividad que podría también ser llevada a cabo en esta sesión número 1.

El juego del rio consiste en que por parejas los alumnos se dibujen una cuadricula de 12 casillas y coloquen fichas repartidas del 1 al 12 de forma aleatoria. A continuación, tirarían un par de dados y la suma sería la ficha que pasaría al otro lado. Los alumnos harían tiradas alternativamente y ganaría el juego quien primero tuviese todas las fichas al otro lado.

SESION 2.

Esta sesión, al igual que las sucesivas hasta el final se empezará con un breve recordatorio de lo visto en la sesión anterior (Ley de Laplace y la Ley de los Grandes Números) así como una breve ronda de preguntas acerca de los conceptos de Espacio Muestral y Tipo de sucesos que sirviesen tanto de repaso como de refuerzo de estos conceptos básicos. (5 min). Esta parte de la metodología creemos que es importante y de hecho en una encuesta elaborada con los alumnos al final de la puesta en práctica de esta secuencia se valoró positivamente.

A continuación, se formulará la pregunta siguiente:

¿Alguien cree que hay algo de particular en este tipo de sucesos? (según sea la respuesta dirigir hacia el objetivo de dejar patente el hecho de que los sucesos son equiprobables y que no todos los experimentos lo son). También se aprovechará en este punto para remarcar una diferencia importante en sucesos *aleatorios* vs *deterministas* preguntando acerca de si el lanzamiento de la moneda es un suceso aleatorio y porqué.

Así como la solicitud a los alumnos de indicar sucesos que sean deterministas, pues tal vez les cueste algo más identificar ese tipo de sucesos y que la gran mayoría los atribuyan o piensen que hay más cantidad de aleatorios que de deterministas.

La Actividad de la sesión 2 consistirá en que los alumnos experimentaren con otra situación: las ruletas fabricadas.

Esta actividad a la que se le plantea un tiempo total máximo de unos 30 min. Se empezará a trabajar por grupos de 2 o 3 personas. Los alumnos se construirán una ruleta con las siguientes condiciones:

- Máximo uso 3 colores diferentes, mínimo de 2.
- Cualquier reparto de las áreas.
- Forma de la ruleta circular.
- La aguja de la ruleta será sustituida por un clip que se hará girar en torno a un lápiz para la simulación del lanzamiento.
- Se muestra ejemplo del tipo de ruleta y forma de juego:

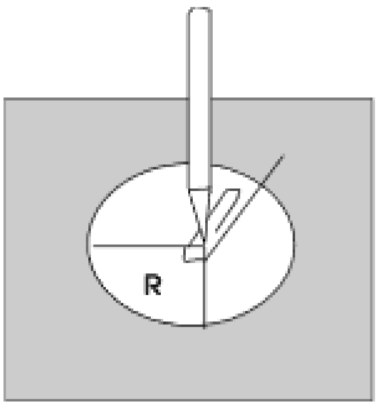


Figura 3. Ejemplo de ruleta y forma de jugar con lápiz y clip.

El juego/experimento consiste en: una vez construida la ruleta personalizada por cada uno de los alumnos uno de los alumnos hará una apuesta previa del resultado y el otro lanzará.

Habrá un total de 20 lanzamientos con sus correspondientes apuestas (pueden ser la misma o ir cambiando) y deberán anotará el resultado (gano/pierdo).

Tras ello y habiéndose intercambiado el papel deberán responder a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuántas veces has ganado la apuesta?
- ¿Has elegido alguna estrategia para apostar?
- ¿Es un juego equitativo a la vista de los resultados?
- ¿Tienes una estrategia definida para asegurar más veces la ganancia?

Una vez jugado de esta manera y resueltas las preguntas entre el grupo clase, se propone el cambiar el tipo de ruleta, de manera que se puedan modificar el número de colores y el reparto de los sectores. De nuevo se juegan al menos 20 tiradas y se responden las cuestiones:

- ¿Qué ocurre en esta nueva situación? ¿cuál consideras que es el motivo?
- ¿Qué ocurriría si también modificamos la forma geométrica de la ruleta?

Se puede también al final de la experimentación de los alumnos mostrar una simulación con el applet DESMOS de la que adjuntamos su enlace y una captura de pantalla: (https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/59233c9aefd17610dbbd684e

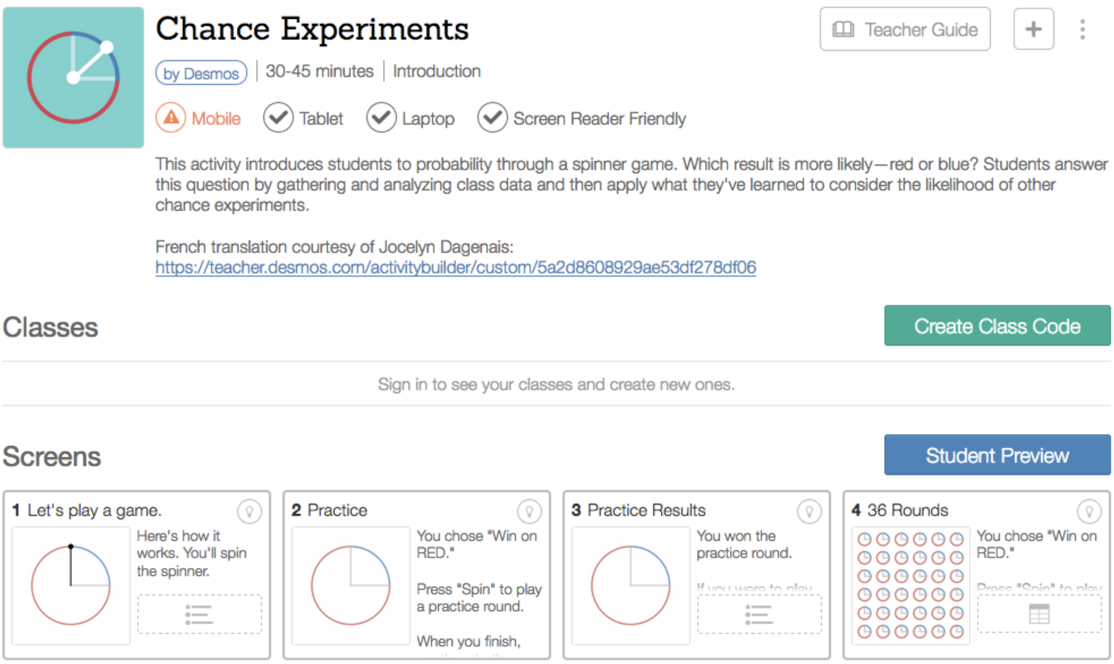


Figura 4. Captura de pantalla de la actividad DESMOS para la experiencia con diversas ruletas en este applet.

Al finalizar esta actividad se deberá institucionalizar lo que son sucesos equiprobables y que por tanto se les puede aplicar la LEY LAPLACE (casos favorables / casos posibles) de los que no lo son y en los que la probabilidad se tiene que experimentar para conocer su valor (insistencia en la experimentación, en la visión frecuencial y en la diferencia de no equiprobable). Nuevamente remarcaremos la importancia de experimentar para obtener información a pesar de tener “intuiciones/juicos a priori”.

SESION 3.

La sesión empezará con un breve recordatorio de lo visto en la sesión anterior de sucesos no equiprobables (5 min) y se realizarán unas breves preguntas de control a los alumnos a ver si recuerdan con algún ejemplo “típico” cual es equiprobable y cual no.

A continuación, en esta sesión dedicada fundamentalmente a la realización de ejercicios que serán entregados a los alumnos a modo de ficha de trabajo se presentarán varios problemas empleando como contexto los juegos de: monedas, cartas y urnas/bolas.

El objetivo de esta sesión será llegar a institucionalizar la diferencia entre los sucesos dependientes de los independientes.

Actividades/Ejercicios:

Ejercicio 1. Se tienen dos monedas y estás se lanzan a la vez. Calcular: las probabilidades de cada uno de los sucesos. Hay que detallar el Espacio Muestral, los tipos de sucesos que pueden aparecer y la descripción de cada uno de ellos.

Ejercicio 2. Se tiene una baraja española (40 cartas) y se va a sacar una carta al azar. Calcular la probabilidad de que:

a) La carta sea una figura.
b) La carta sea de oros.
c) La carta sea menor que 6.
d) La carta sea mayor que 11.

Ejercicio 3. Se tiene una urna con un total de 12 bolas, de las cuales 4 son negras y 8 blancas. Se van a extraer sucesivamente dos bolas. Calcular la probabilidad de que:

a) La bola sea blanca.
b) La bola sea negra.
c) La bola no sea ni blanca ni negra.

A continuación, se plantean los siguientes ejercicios de sucesos (dependientes).

Ejercicio 4. Se tiene una baraja española en la que se han hecho tres montones, en el montón 1 están todas las figuras, en el montón 2 están todas las cartas de oros y espadas y en el montón 3 todas las de bastos y copas.

Calcular la probabilidad de:

a) Si saco una figura de copas, al coger del montón de copas salga un As.
b) Si la figura obtenida es de oros, al coger del montón de oros salga un 3.
c) Si la figura obtenida es de espadas, al coger del montón de espadas salga figura.

Ejercicio 5. Se tienen dos monedas y dos urnas: la urna 1 contiene un total de 12 bolas (4 negras y 8 blancas), mientras que la urna 2 contiene solo 2 bolas (las dos son blancas).

La Extraigo de la urna 1 si salen 2 cruces y de cualquier otra forma extraigo de la urna 2.

Calcular la probabilidad de que:

- Si al lanzar las monedas salga (C, X) y de la urna saque una negra.
- Si al lanzar las monedas salga (XC) y de la urna saque una blanca
- Si lanzando monedas saco (XX) y extraigo negra

Ejercicios de reserva:

- Ejercicios de las tuberías (en el libro de texto de los alumnos hay un par de ejemplos de este tipo de problemas que se elegirían como casos a resolver ejemplo).

Como finalización de los distintos tipos de ejercicios se institucionalizaría la definición de cuando un suceso es dependiente de cuando es independiente, así como se pondría en forma axiomática la forma de "calcular" la dependencia/independencia si son conocidas las probabilidades de los sucesos, así como de la intersección de los mismos.

Cuando A es un suceso independiente de B: $P\ (A\ |B) = P\ (A)\ \ y\ \ P\ (B\ |A) = P\ (B)$

En el caso de sucesos independientes se cumple que la probabilidad de la intersección se puede calcular como el producto de las probabilidades, es decir:

$$P\ (\ A\ \cap B\ ) = \ P\ (\ A\ )\ \cdot P(\ B\ )$$

SESION 4.

Nuevamente la sesión se inicia con un breve recordatorio de lo visto en la sesión anterior de sucesos dependientes e independientes. Se recuerda sobre todo la institucionalización de los mismos, así como la formalización axiomática de cómo verificar que sean dependientes o independientes: Si $P(A|B) = P(A)$ es independiente y se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

A continuación, se llevará a cabo una breve explicación (8 min) de lo que son los diagramas de Venn y cómo se pueden usar para plantear los problemas de probabilidad y visualizar sobre todo las propiedades de unión, intersección, reparto del espacio muestral y otro tipo de propiedades.

El objetivo de esta sesión será que los alumnos se familiaricen con esta forma de representación de sucesos, del espacio muestral y de las operaciones básicas tanto de la unión como de la intersección y los complementarios y sobre todo que usen el razonamiento lógico-abstracto que entendemos que conllevan en su uso estos diagramas para que luego lo puedan comparar con otro tipo de representaciones que se plantearan en la sesión 5 de diagramas de árbol y tablas de contingencia que suele ser más habitual y sencillo para los alumnos.

Las actividades con diagramas de Venn serán de tres tipos: visualización, interacción y de abstracción conceptual (estas últimas dedicadas a mostrar la potencialidad de esta herramienta)

A nivel de visualización, la primera actividad será el uso de un applet muy sencilla de la que adjuntamos su enlace y que permite a los alumnos visualizar a golpe de clic varios casos básicos iniciales para entender la representación de sucesos básicos:

http://ceadserv1.nku.edu/longa//classes/mat385_resources/venn/VennGame.html

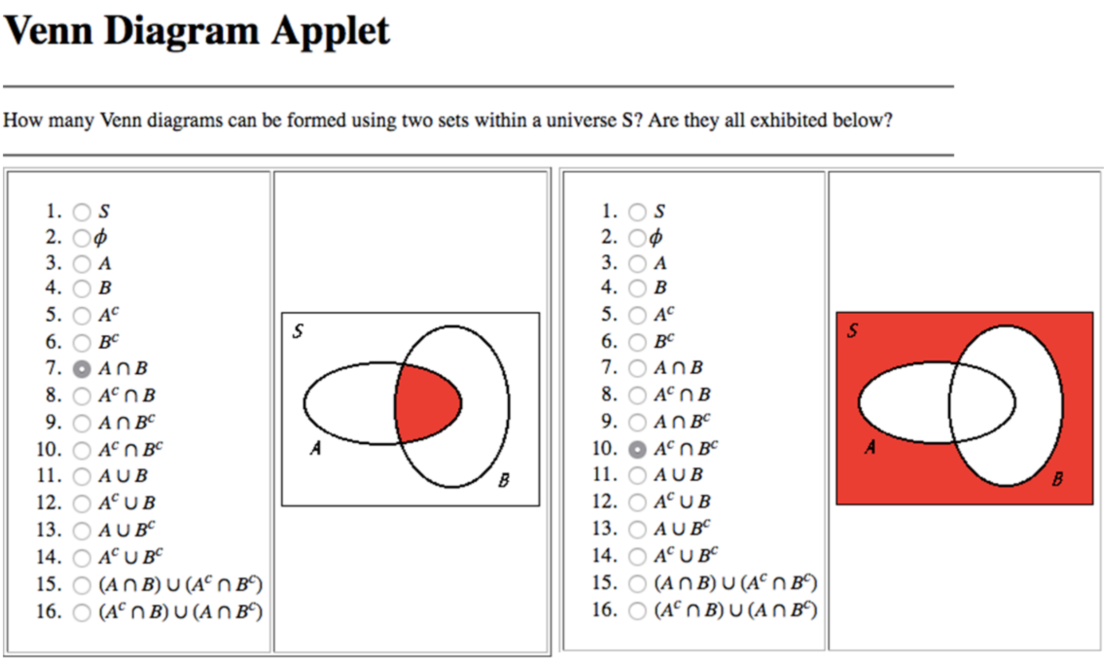


Figura 5. Capturas de pantalla del applet para representar con diagramas Venn.

En este caso vemos que todos los ejemplos planteados de los diagramas de Venn son solo para 2 sucesos. La actividad será dinámica con preguntas a la clase, solicitando la argumentación y favoreciendo la discusión que permita resolver dudas en vez de únicamente ir visualizando el resultado correcto que es lo que permite representar el applet, de nuevo insistimos en que esto es una herramienta que nos ayuda y no un fin en sí mismo. Además, durante la aplicación de esta actividad en el aula se enriquecería la actividad cambiando el suceso genérico A, B por casos específicos del tipo: Sea S todos los alumnos de la clase de 3º ESO, sea A los alumnos que tienen más de una edad determinada y sea B los que son chicas cómo quedaría el diagrama y que valores numéricos podríamos indicar. Así como solicitar a los alumnos que "diseñen" sus propios problemas y para cada uno de ellos argumenten la resolución con diagrama Venn.

También se podrá hacer uso del applet de esta otra fuente que nos da otro tipo de perspectiva, pues en ella, aunque siguen utilizándose únicamente dos sucesos se plantean valores numéricos y en todo momento se puede visualizar el resultado numérico de la intersección, algo que para muchos alumnos es de utilidad (el poder referenciarse a ejemplos con números en vez de la abstracción total con variables):

http://demonstrations.wolfram.com/InteractiveVennDiagrams/

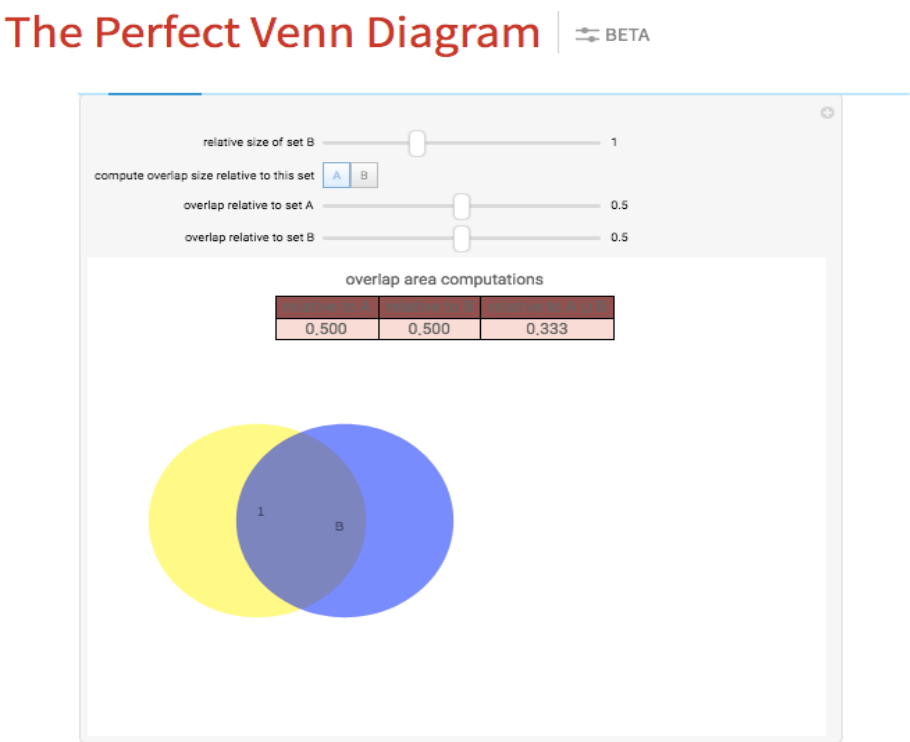


Figura 6. Captura de pantalla de applet con diagramas de Venn y simulador numérico.

Tras haber visto ejemplos de las operaciones básicas con estos diagramas:

- Representar un espacio muestral.
- Representar un suceso.
- Representar la unión, la intersección en distintas situaciones.
- Ver los sucesos seguros, sucesos imposibles, sucesos complementarios.

La segunda actividad será de interacción con los mismos y los alumnos deberán resolver un ejercicio con el uso de estos diagramas.

Ejercicio 2: sea una baraja española en la que se definen los sucesos siguientes:

- A =” extraer una copa”
- B =” extraer un 7”
- C =” extraer una figura”

Hallar las probabilidades y representación en el diagrama de Venn correspondiente de

$P(A \cup B), P(B \cup C)$ y $P(A' \cup C)$

La última actividad será de abstracción conceptual en la que los enunciados serán algo más abstractos y se les pondrá así a los alumnos en la dificultad de aplicar varios conocimientos y usar la herramienta a modo de abstracción.

www.marbartonmaths.com/teachers/rich-tasks/venn-diagrams.html.

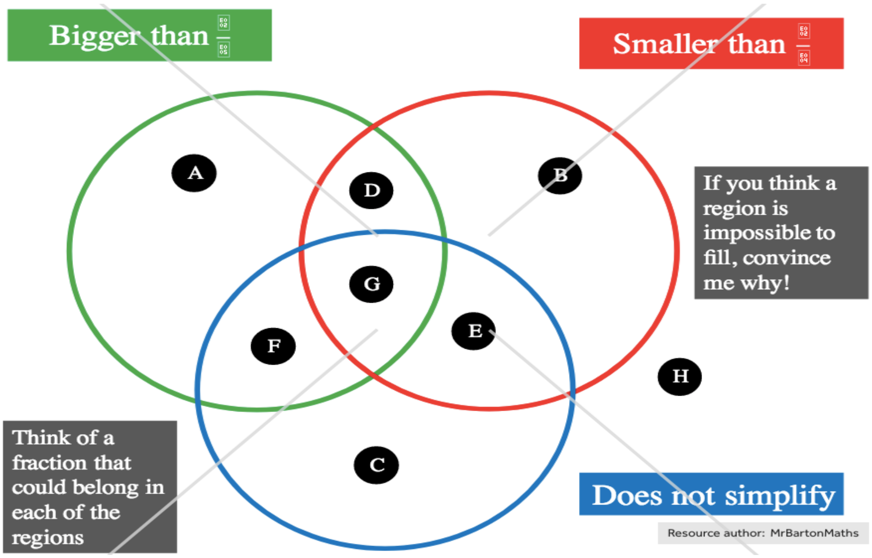


Figura 7. Captura pantalla applet con diagramas de Venn actividad rica.

SESION 5.

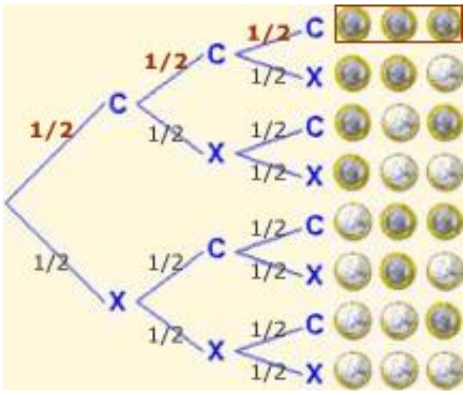
Esta sesión se empezará con un breve recordatorio de lo visto en la sesión anterior de los diagramas de Venn (8 min). A continuación, para esta sesión se plantean una serie de problemas que se constituyen como campo de problemas y razón de ser de las técnicas que se van a aplicar: diagramas de árbol y tablas de contingencia.

Problema 1. [Inicio: dibujar primeros diagramas de árbol, conteo de casos posibles y favorables, entender probabilidades en las ramas]

Si se lanza tres monedas al aire, dibuja el diagrama de árbol correspondiente con todas sus ramas y una vez lo hayas finalizado calcula la probabilidad de que salgan dos caras y una cruz según los datos que tienes en tu diagrama. Justifica tu solución.

Solución:

Hacer el árbol con todas las combinaciones, indicar la probabilidad en cada rama, contar el número total de casos y finalmente dar la solución a la pregunta del problema



Vemos que hay un total de 8 casos posibles y que 3 de ellos son con una cruz y dos caras.

$P\ (\ 2\ caras\ y\ 1\ cruz) = \frac{3}{8}$

Problema 2 [Introducción al concepto de probabilidad condicionada, aplicar teorema probabilidad total]**.**

En la asignatura de matemáticas de 1 bachillerato de académicas hay 150 matriculados de los que 100 asisten regularmente a clase. Se sabe que aprueba el 90% de los que asisten a clase y un 30% de los que no asisten.

Si se elige un alumno al azar calcular:

a) La probabilidad de que haya aprobado.

b) Si se sabe que ha suspendido, la probabilidad de que haya asistido a clase.

Definimos los sucesos siguientes:

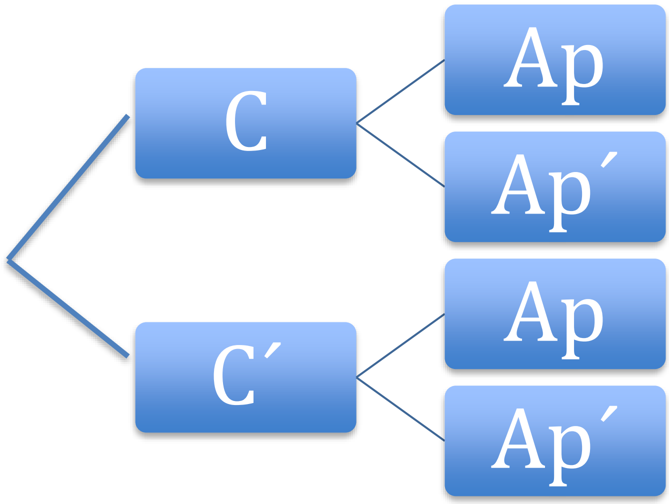
- Aprobar = Ap
- Asistir a clase = C

Hacemos el diagrama de árbol correspondiente (mostrado más adelante).

Indicamos las probabilidades que según el enunciado iremos aplicando a cada rama.

$$C\left(\frac{100}{150}\right) \qquad opción\ 1\ Ap\ (0{,}9), \qquad opción\ 2 -\ Ap'(0{,}1)$$

$$C'\left(\frac{50}{150}\right) \qquad opción\ 1\ Ap\ (0{,}3), \qquad opción\ 2 -\ Ap'(0{,}7)$$



Así:

$$P(Ap) = P(Ap|C) \cdot P(C) + P(Ap|C') \cdot P(C')$$

$$P(Ap) = 0{,}9 \cdot \frac{100}{150} + 0{,}3 \cdot \frac{50}{150}$$

b)

$$P(Ap) = 0{,}7 \implies P(Ap') = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

$$P(C|Ap\,) = \frac{P(C \cap Ap')}{P\,(Ap')} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

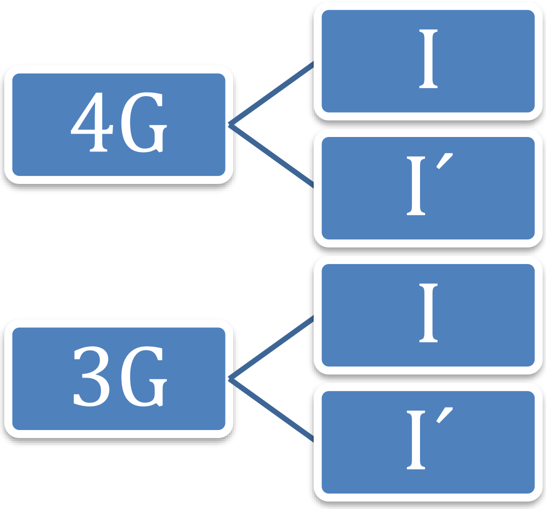
Problema 3 [Insistir en el concepto de: probabilidad condicionada y teorema probabilidad total]**.**

Según un artículo reciente en prensa, en España el 80 % de los usuarios de móvil tienen conexión 4G. Entre los propietarios de este tipo de teléfonos el 75 % si lo emplea para navegar por internet. Sin embargo, hay todavía propietarios de teléfonos que su teléfono todavía es sólo 3G. De estos usuarios sólo el 10% lo emplea para navegar habitualmente por internet.

Calcula la probabilidad de conectarse a internet a través del móvil.

Solución:

Realizar el diagrama de árbol con el inicio de la tecnología si es 4G ó 3G y luego en la rama de 4G los que si navegan (denominación con letra I de internet, por ejemplo) y los que no navegan con la notación de complementario, negado o prima según prefieran *los alumnos. En cualquier caso, deben dejar muy bien explicado que es lo que significa cada una de sus abreviaturas.*

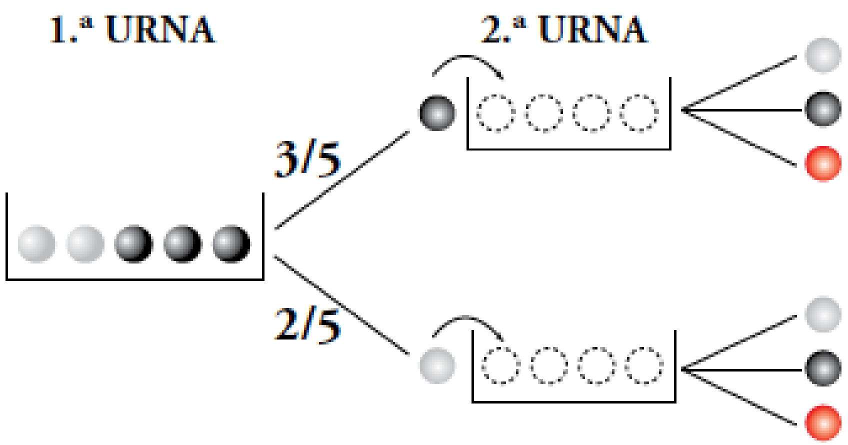


La probabilidad de conectarse habitualmente a internet será

$$P(I) = P\,(4G) \cdot P(I \mid 4G) + P(3G) \cdot P(I|3G) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}1$$

Problema 4 (ejercicio de urnas extraído del libro de Anaya 17 aplicadas)

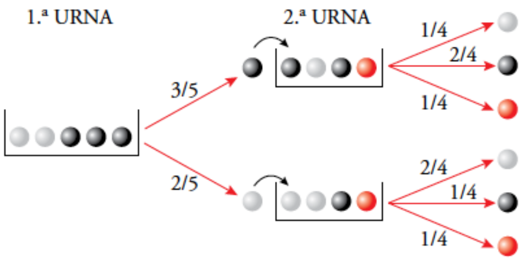
Cogemos al azar una bola de la urna 1 (tres negras y 2 blancas) y la echamos en la urna 2 (la que añadimos y además 1 blanca, 1 roja y 1 negra). Posteriormente sacamos una bola de esta urna 2. Dibujar el diagrama de árbol e indicar las probabilidades de cada rama.



Calcular las probabilidades siguientes:

a) P[1.ª y 2.ª] **b)** P[1.ª y 2.ª] **c)** P[2.ª]

d) P[2.ª] **e)** P[2.ª]



Soluciones;

$$P(1º\ negra\ y\ 2º\ negra) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$$

$$P(1º\ blanca\ y\ 2\ negra) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(2º\ negra) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(2º\ blanca) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4}$$

$$P\ (2º\ roja) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

A continuación, plantearíamos también un conjunto de ejercicios para las tablas de contingencia:

Problema 1 [rellenar e interpretar datos de una tabla de contingencia]

Sea la tabla que muestra el medio de transporte empleado por hombres y mujeres para llegar a su puesto de trabajo si se escoge una persona al azar calcula las probabilidades indicadas

	Hombre	Mujeres	Totales
Público		50	85
Privado			
	120		200

a) Sea hombre y use transporte público.

b) Use transporte público sabiendo que es hombre.

c) Sea mujer sabiendo que usa un transporte privado.

d) Los sucesos ser hombre y utiliza el transporte público ¿son dependientes o independientes? Responder y justificar matemáticamente.

e) Resolver el mismo problema planteando el diagrama de árbol correspondiente y señalando en cada una de sus ramas la probabilidad asociada.

Solución:

a) $P = \frac{35}{200}$

b) $P = \frac{35}{120}$

c) $P = \frac{30}{115}$

d) son DEPENDIENTES porque $p\left(\frac{público}{hombre}\right) = \frac{35}{120}\ y\ p\ = \frac{85}{200}$

Problema 2 [objetivo: resolver probabilidades – "leer "tabla de contingencia]

En el instituto hay 1000 alumnos repartidos según tabla siguiente:

	Chico	Chica
Gafas	187	113
No gafas	413	287

Si elegimos un estudiante al azar cual es la probabilidad de que:

a) Sea chico

b) Sea chica

c) Use gafas

d) No use gafas

e) Sea chica con gafas.

Problema 3 (Adaptado de Santillana Bachillerato de 1)

Una empresa dispone de los siguientes vehículos a la venta (marca y tipo de coche).

	Opel	Renault	Seat
Turismo	3	6	5
SUV	1	2	8

Si las llaves de todos ellos están mezcladas en una caja, cual es la probabilidad de que unas llaves al azar:

a) Sean de un Seat.

b) Sean de un SUV (f) de Renault.

c) Sean un turismo que no sea Opel.

d) No sean de un SUV ni de un Seat.

Soluciones:

a) $P(s) = \frac{13}{25}$

b) $P = \frac{2}{25}$

c) $P(t \cap o') = \frac{11}{25}$

d) $P(f' \cap s') = \frac{9}{25}$

Problema 4 (tabla de ficha VIII)

Copia y completa la siguiente tabla de contingencia referida a los sucesos A, B, C, D de los que conocemos sus probabilidades siguientes:

$$P(B|C) = \frac{15}{25} \quad P(D|B) = \frac{12}{27} \quad P(D|A) = \frac{5}{15}$$

Tener en cuenta que las fracciones no han sido simplificadas

	A	**B**	**TOTALES**
C	10	15	25
D	5	12	17
TOTALES	15	27	42

I- SOBRE LA EVALUACIÓN

1- Prueba escrita que evalúa el aprendizaje realizado por los alumnos.

A continuación, se indican los 7 ejercicios correspondientes a la prueba escrita que pretende evaluar el aprendizaje realizado por los alumnos.

Ejercicio 1 *0,75 puntos (0,25 puntos cada apartado*)

Indica el espacio muestral de las siguientes experiencias:

a) Luces de un semáforo.

b) Señalar una palabra cualquiera en un artículo de prensa y ver cuál es la primera vocal que aparece.

c) Sean los días de la semana indicar los que no acaban en –es.

Soluciones

a) {amarillo, rojo, verde}

b) $\{a, e, i, o, u\}$

c) $\{s, d\}$

Ejercicio 2 *0,75 puntos (0,25 puntos cada apartado*) En la biblioteca se deja un carro con libros, revistas, comic y periódicos. La cantidad de cada uno de ellos es 10, 8, 6, 5 respectivamente.

Si se elige uno al azar calcular la probabilidad de que:

a) sea libro

b) no sea periódico

c) no sea ni libro ni revista ni periódico.

Soluciones:

a) $P(libro) = \frac{10}{29}$

b) $P(no\ periódico) = \frac{24}{29}$

c) $P(no\ libro\ no\ revista\ no\ periódico) = \frac{6}{29}$

Ejercicio 3 *1,5 puntos (0,5 puntos cada apartado*)

Sea una baraja española de la que se extraen dos cartas calcular la probabilidad de:

a) sean dos ases

b) sean dos figuras (de cualquiera de los palos de la baraja)

c) sea una figura y una no figura

Solución:

a) $P(as \cap as) = P(as) \cdot P(as|as) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

b)$P(figura \cap figura) = P(figura) \cdot P(figura|\, figura) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{11}{130}$

c) $P(figura \cap figura') = P(figura) \cdot P(figura'|\, figura) = \frac{12}{40} \cdot \frac{28}{39} = \frac{14}{65}$

Ejercicio 4 *2 puntos*

En un instituto hay 500 alumnos de los que chicas son un 60%. Dentro de los chicos hay un total de 125 que se declaran tener alergia a algo. En total tras el último reconocimiento médico se sabe que solo el 20% no tienen ningún tipo de alergia.

Haz la tabla de contingencia y el diagrama de árbol que refleje esta situación. (explica cómo rellenar las casillas de la tabla y argumenta tu planteamiento)

	Chicos	**Chicas**	**Total**
Alérgicos	125	275	400
No alérgicos	75	25	100
	200	300	500

Ejercicio 5- *1,5 puntos (0,5 puntos cada apartado*)

En el instituto se ha hecho un estudio de cuantos alumnos de ESO y de Bachillerato realizan los distintos deportes que ofrece el centro. Se han obtenido que:

En la ESO el reparto es:

12 hacen atletismo, 20 voleibol y 18 baloncesto

En el Bachillerato sin embargo los datos son:

10 voleibol, 18 baloncesto.

Sabiendo que el total de alumnos que hacen atletismo son 12, plantea la tabla de contingencia y calcula las probabilidades siguientes:

a) Que un alumno de bachiller haga voleibol.

b) Que un alumno del centro no haga ni voleibol ni baloncesto.

c) ¿Cuántos alumnos hacen algún deporte en total en el centro y cuántos no hacen ningún deporte si hay un total de 300 alumnos?

Solución:

a) $P\ (bachiller\ y\ voleibol)\ = \frac{10}{28}$

b) $P\ (no\ voleibol\ no\ baloncesto)\ = \ P\ (atletismo)\ = \frac{12}{78}$

c) $P\ (algún\ deporte) = \frac{78}{300}\ y\ \ P(ningún\ deporte)\ = \frac{300}{300} - \frac{78}{300}$

La tabla de contingencia asociada es:

	Eso	Bachiller	Total
Atletismo	12	0	12
Voleibol	20	10	30
Baloncesto	18	18	36
Totales	50	28	78

Ejercicio 6- *2 puntos (1 puntos cada apartado)*

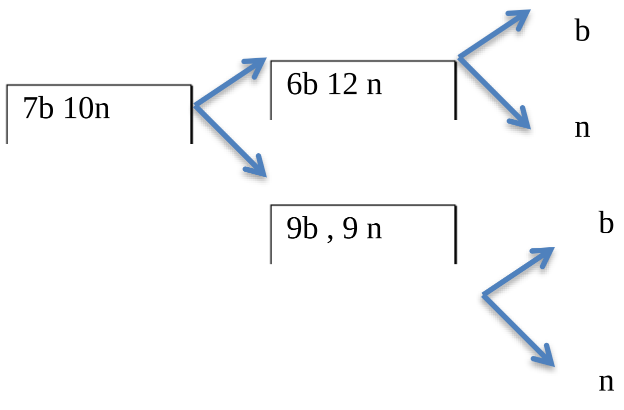
Una urna tiene 7 bolas blancas y 10 negras, de la urna se extrae una al azar que se cambia por dos del otro color (es decir, si sale blanca por negras).

Después del cambio se extrae una 2º bola. Dibuja en primer lugar el diagrama de árbol, indica la probabilidad de cada rama y después responde a las siguientes preguntas:

Cuáles son las probabilidades de que:

a) La 2º bola sea blanca

b) La 2º bola sea del mismo color que la primera



a) $P(2\ blanca) = P(C1) \cdot P(B|\ C1) + P(C2) \cdot P(B|\ C2)\ = \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{69}{18} = \frac{122}{51}$

b) $P(2\ bola\ mismo\ color) = P(BB) \cdot P(NN) = \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{18} = \frac{42}{306}$

Ejercicio 7 *1,5 puntos (0,5 puntos cada apartado)*

Un crucero en función del tiempo en la mar tiene un 50% probabilidad de parar en los siguientes puertos: 50% Valencia, un 40% en Italia y un 30% en ambas.

Utilizando los diagramas de Venn, calcula y dibuja:

a) La probabilidad de parar en uno de los dos puertos (valencia-Italia)

b) La probabilidad de parar solo en uno de los dos

c) La probabilidad de parar en valencia y no en Italia

d) La probabilidad de parar en Italia si ha parado en valencia

Nota: se exige dibujar la solución con los diagramas y en el caso de poner la solución de forma directa argumentar cómo se ha llegado a ese valor.

Solución:

a) $P(Valncia\ o\ Italia)\ =\ P\ (V)\ +\ P\ (I) - P\ (V \cap I)\ =\ 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}3$

b) $P\ (1\ solo)\ =\ P\ (V) - P\ (V \cap I)\ +\ P\ (I) - P\ (V \cap I)\ =\ 0{,}5 - 0{,}3 - 0{,}4 - 0{,}3$

c) $P\ (Valencia\ y\ no\ Italia)\ =\ P\ (V) - P\ (V \cap I)\ =\ 0{,}5\ - 0{,}3$

d) $P\ (Valencia|Italia)\ =\ \frac{P\ (V \cap I)}{P(V)} = \frac{0.3}{0.5}$

2 ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

A continuación, se detalla problema por problema lo que se pretende evaluar.

P1: Se busca validar que el alumno es capaz de identificar correctamente los sucesos y que entiende lo que es el espacio muestral independientemente de la situación o experiencia planteada. Se busca abstraer del concepto numérico.

P2: En este problema se pretende validar el conocimiento y la aplicación de forma correcta de la ley de Laplace, así como la aplicación de alguna de las propiedades básicas que se consideran de vital importancia como el uso de los complementarios.

P3. En este caso el problema trata de ver la asimilación de los conceptos de sucesos dependientes e independientes por parte del alumno y el cálculo de sus probabilidades en caso de ser dependiente o independiente.

P4- En este problema el alumnado deberá demostrar la capacidad de generar tablas de contingencia, así como el diagrama de árbol correspondiente. Además de ser capaz de autocompletar los datos necesarios de la tabla correspondiente.

P5: Calcular las probabilidades por una correcta interpretación de los datos que aparecen en una tabla de contingencia.

P6. Plantear correctamente el diagrama de árbol y los sucesos descritos, indicando en cada rama sus probabilidades y a partir de ahí aplicar el teorema de probabilidad total.

P7 Saber hacer uso de los diagramas de Venn para resolver problemas de probabilidades y las implicaciones de operaciones básicas de unión e intersección.

3- ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

A continuación, se detallan problema por problema los posibles fallos en las respuestas de los alumnos.

P1: en este tipo de ejercicio el único tipo de fallo esperado es el de olvidar algún tipo de suceso en cualquier otro caso los alumnos no deberían tener ningún problema para plantear las respuestas correctas con sus conocimientos anteriores y/o adquiridos.

P2: en este problema se plantean como posibles respuestas incorrectas aquellas que no tienen realizado un correcto conteo de los casos totales o de los favorables por no haber identificado todos y cada uno de los sucesos que pueden ocurrir y haberlos registrado ordenadamente. También puede haber algún tipo de fallo al considerar el complementario y una incorrecta interpretación de los enunciados.

P3- En este problema se pueden producir confusión de los sucesos, así como plantear una suma en vez de producto a la hora de aplicar la probabilidad total.

P4 En este problema se pueden esperar respuestas en las que se aprecien una dificultad o incorrecta identificación de las variables, la no comprobación de las sumas por filas y columnas a la hora de asignar los valores numéricos a cada una de las casillas y el no planteamiento de los totales.

P5 Los errores pueden ser debidos al no entendimiento del concepto de complementario y a no entender que el valor de cada casilla de la tabla nunca es en sí mismo el valor de la probabilidad, sino que conlleva plantear un cociente.

P6. En este caso puede haber mayor cantidad de problemas por parte de los alumnos pues se debe modelizar bien el problema, lo que ya supone una dificultad y ser detallista en el cálculo de las probabilidades de cada rama, siendo consciente de en qué casos la probabilidad de las ramas haya de sumar en total la unidad.

En la resolución de probabilidades totales el no entender que es la suma de las aportaciones ponderadas puede suponer una dificultad a la hora de acordarse cómo plantear el cálculo de las probabilidades.

P7. En este caso la visualización inicial de si los sucesos son dependientes o independientes y lo que eso supone a la hora dibujar los diagramas y plantear las probabilidades asociadas a cada una de las partes. También pueden ser de dificultad la interpretación correcta de los complementarios, unión e intersección a partir del enunciado del problema.

Entendemos que este tipo de problemas pueden suponer cierta complejidad debido a la abstracción que supone el diagrama, pero precisamente su sencillez unida con su nivel de abstracción debería ser adquiridos por los alumnos a lo largo de esta secuencia didáctica.

4- ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Debido al planteamiento conciso de la prueba de evaluación

Los criterios de calificación a emplear serán los siguientes:

P1: 100% o 0% en función de la respuesta correcta totalmente o no. No cabe valoración parcial para validar un concepto base como es el espacio muestral. Se plantean 3 apartados para validar que hay un entendimiento mínimo del concepto.

P2: Resta de hasta un 25% por fallos aritméticos y un 50 % si solo está realizado correctamente el planteamiento.

P3: Un 50% por el planteamiento totalmente correcto y un 25% de penalización por fallos aritméticos o de transcripción de datos.

P4: Un 50% por el planteamiento correcto y si la tabla no está completa un máximo de un 30 %. Los fallos aritméticos o de transcripción de datos pueden restar un máximo de 25%.

P5: Un 50% por el planteamiento correcto y un 25% de penalización por fallos aritméticos.

P6: Un 40% por el diagrama de árbol correctamente planteado, un 25% si el planteamiento es correcto de todas ramas y sus probabilidades, los fallos aritméticos pueden restar un máximo de 25%.

En principio no se aplica como criterio el método de los tercios que ha sido propuesto en el master, pues no se está del todo identificado con la aplicación de este método. Con el criterio propuesto sí que se pretende dejar claro que tipo de fallos penalizan, cuanto lo hacen y que tipo de tareas se consideran relevantes (suelen ser las referentes al correcto planteamiento asociado con el objetivo principal del problema)

CONCLUSIONES

Durante la elaboración de esta propuesta didáctica de probabilidad hemos planteado como objetivo que la secuencia cumpliese con varios aspectos que para nosotros eran esenciales.

En primer lugar, documentarnos en referentes como Batanero, Godino, comprobar diversos libros de texto y tras la lectura de todas y cada una de las diversas fuentes hacer una reflexión personal de qué sería para nosotros una buena secuencia didáctica de probabilidad en un curso de la ESO (concretamente el último curso) con todo lo que estábamos aprendiendo en este master y con lo que estábamos viendo en el aula en el practicum II.

En nuestro caso particular hemos optado por diseñar una secuencia que compagine la parte tradicional (clase magistral del profesor) con la parte de autodescubrimiento de los alumnos a través de la experimentación. Además, hemos tenido la suerte de elaborar la propuesta en el tiempo oportuno para que gracias al practicum III pudiésemos ponerla en práctica en el aula y por lo tanto nos ha permitido tener un pequeño feedback de nuestro planteamiento y hacernos una pequeña autoevaluación.

Sin duda alguna hoy en día la parte experimental en las matemáticas se está potenciando y creemos que aporta una gran motivación a los alumnos, así como un aprendizaje más significativo, de hecho, en la encuesta realizada tras la finalización de la secuencia didáctica era una de las partes más valoradas de ahí nuestra puesta en valor de ésta durante el diseño de la secuencia.

Si bien a lo largo de este TFM hemos intentado sintetizar y hacer el ejercicio docente más difícil que es acertar en la selección del mejor material siempre se queda la duda de si hubiese sido mejor una actividad u otra que también teníamos preparada. De hecho, como actividades adicionales que no hemos incluido finalmente, debido a la extensión temporal que nos marcábamos como objetivo, y que también considerábamos de interés tenemos entre otras los applets de GeoGebra sobre la experiencia de las agujas de Buffon, así como varios videos de Eduardo Sáez de Cabezón en el que con temas actuales para los jóvenes (como ciertos videojuegos) trata de acercar su interés por conceptos matemáticos de probabilidad. Creemos que nuestra secuencia didáctica puede evolucionarse y servir de guía tanto para próximos alumnos del master como docentes que deseen aplicar a su manera la propuesta aquí planteada y sin duda alguna la revisión y evolución de esta propuesta inicial la enriquecerá como así lo hizo a nosotros en el transcurso de su diseño e implantación posterior.

J- BIBLIOGRAFIA Y WEBS

Azcarate, M.P y Cardeñoso, J.M (1996). El lenguaje del azar. *Epsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática " Thales",* 35, 165-178

Batanero, C. & Serrano, L. (1999). The meaning of randomnes for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education* 30(5), pp.558-567

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *8*(3), 247-264.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (5), 15-28.

Brodie, M (s.f) Interactive Venn Diagrams. Proyecto Demostración Wolfram. http://demonstration.wolfram.com/TwoDiceWithHistogram.

Cañizares, M. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Universidad de Granada.

Contreras, J.M, Estrada, A., Díaz, C., & Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidad en tablas de doble entrada. En M.M.

Contreras, J.M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Universidad de Granada. Granada.

Díaz Godino, J., Batanero Bernabéu, M., & Cañizares Castellano, M. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Fischbein (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: Reidel

García, A. y Martínez, U (2012). Aprendizaje de la probabilidad apoyado en las TICs. *@ti.revista d´innovació educativa (nº9)*,131-139

Jiménez, L., & Jiménez, R. (2005). Enseñar probabilidad en primaria y secundaria. ¿Para qué y por qué? *Revista Digital Matemática*, *6*(1), 1-10.

Lonjedo, Mª A., Huerta, M.P., & Carles, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks: An example form Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(3), 319-338

León, N. (1998). *Explorando las nociones básicas de probabilidad a nivel superior*. Paradigma, 12(2), 125-143

Morales, G. M. A. (2002). Historia de la probabilidad (desde sus orígenes a Laplace) y su relación con la historia de la teoría de la decisión. *Historia de la Probabilidad y de la Estadística.* Volumen I.

Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 271-280). Lleida: SEIEM.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Eds. SAEM Thales

Zahner, D., y Corter, J.E. (2010). The process of probability problem solving: use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 177-204.

ANEXO I

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS		Curso: 4.º
BLOQUE 5: Estadística y probabilidad		
Contenidos: Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento. Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística. Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.		
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	**COMPETENCIAS CLAVE**	**ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES**
Crit.MAAC.5.1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.	CMCT-CAA	Est.MAAC.5.1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación
		Est.MAAC.5.1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.
		Est.MAAC.5.1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS		Curso: 4.º
BLOQUE 5: Estadística y probabilidad		
		Est.MAAC.5.1.4. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones.
		Est.MAAC.5.1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
		Est.MAAC.5.1.6. Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.
Crit.MAAC.5.2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.	CMCT	Est.MAAC.5.2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias.
		Est.MAAC.5.2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia.
		Est.MAAC.5.2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada.
		Est.MAAC.5.2.4. Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas.
Crit.MAAC.5.3. Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación.	CCL-CMCT	Est.MAAC.5.3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, cuantificar y analizar situaciones relacionadas con el azar.
Crit.MAAC.5.4. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador), y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.	CMCT-CD-CAA	Est.MAAC.5.4.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos estadísticos.
		Est.MAAC.5.4.2. Representa datos mediante tablas y gráficos estadísticos utilizando los medios tecnológicos más adecuados.
		Est.MAAC.5.4.3. Calcula e interpreta los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador).
		Est.MAAC.5.4.4. Selecciona una muestra aleatoria y valora la representatividad de la misma en muestras muy pequeñas.
		Est.MAAC.5.4.5. Representa diagramas de dispersión e interpreta la relación existente entre las variables.